z. 2

Dr. MARCIN GOLDMAN.

Kilka tablic do ubezpieczeń socjalnych w Polsce.

I.

Z materjału Ubezpieczalni Krajowej w Poznaniu zostały skonstruowane tablice (tabl. 1) wymieralności oraz tablice ubywania (tabl. 2) rencistek wdów inwalidek.

Najważniejszemi zasadami przyznawania tych rent są: wdowieństwo po pracowniku z dostateczną liczbą przepracowanych tygodni, oraz niezdolność do pracy w tym sensie, iż za inwalidztwo uznaje stę stan, który uniemożliwia zarobek $^1/_3$, lub mniej niż to, co potrafi przeciętnie zarobić kobieta w podobnych okolicznościach.

Przepisy przewidują również wypłaty rent w wypadkach nie stałej, lecz długotrwałej choroby (inwalidztwa). Materjał tyczący się tych osób nie został uwzględniony.

Utrata praw do renty następuje w wypadkach powtórnego zamężcia, powrotu do możności zarobkowania, emigracji i innych mniejszej wagi.

Z powodu uzależnienia prawa do renty od dwu powodów, wdowieństwa i inwalidztwa, było zgóry jasne, iż nie uda się skonstatować wpływu czasu minionego od przyznania renty na śmiertelność: sama skąpość materjału statystycznego tego braku nie musiała ujawnić, gdyż okazuje się tutaj, że jednorodność materjału kompensuje brak wielkich liczb. Liczby niewyrównane wykazują przebieg bardzo regularny. Przy ustalaniu materjału statystycznego trzeba było ograniczyć się do rachowania li tylko na pełne lata kalendarzowe, — co jest, oczywista, metodą nie najdokładniejszą, lecz to, jak się tu okazuje, nie przeszkadza dobremu przebiegowi.

Zwłaszcza uderzający jest dobry przebieg szeregu w wiekach starszych. Wszystko to razem pozwoliło na wyrównanie graficzne, które okazało się następnie w dobrej zgodzie z wyrównaniem według metody K i n g a, i wskazało drogę, jaką należało uzupełnić szereg w wiekach wysokich. Z drugiej zaś strony pochodzenie materjału statystycznego objaśnia fakt zupełnie znikomej obsady cyframi wieków młodych.

Jednakowoż dobry przebieg wyrównania graficznego i tu wskazał drogi uzupełnienia.

Tak więc w tablicy śmiertelności od wieku 75 wzięty został wzór G o m p e r t z - M a k e h a m a, obliczony z prawdopodobieństw dla wieków 55, 65, 75, otrzymanych z wyrównanego metodą K i n g a szeregu.

Natomiast za charakterystyczny przebieg w rocznikach najmłodszych przyjęto przebieg śmiertelności lub ubywania tychże z materjałów niemieckich i skonstruowano go za pomocą paraboli.

Dowolność na tym odcinku jest z punktu widzenia praktycznego dopuszczalna, gdyż przy zastosowaniu do obliczeń liczby te nie odgrywają poważniejszej roli finansowej.

Dla tablic wybywania przyjęto od wieku 79 wgórę te same prawdopodobieństwa co dla śmiertelności. Prawdopodobieństwa do wieku 75 (otrzymane z materjału) doprowadzono do prawdopodobieństwa dla lat 79 i wyższych przez przeprowadzenie paraboli 3-go stopnia przez punkty dla lat 74, 75, 79, 80.

Renty obliczano na podstawie $4\frac{1}{2}\%$.

Przy konstrukcjach liczono się z rezultatami tablic wymieralności dla województw zachodnich, skonstruowanych w tym celu przez Instytut Badań Ludnościowych. Dane liczbowe tyczące materjału statystycznego brzmią:

Okres obserwacji 1.I. 1926 do 31.XII. 1930 r. Liczba lat obserwacji 55.139,5, wypadków śmierci 2195.

Liczba lat obserwacji dla wybycia 55,248, wyp. wybycia 2412.

Również z materjału Ubezpieczalni Poznańskiej skonstruowano tablice śmiertelności (tabl. 3) i wybywania (tabl. 4) inwalidek (kobiet pobierających rentę inwalidzką).

Przy obliczaniu prawdopodobieństw śmierci i wybycia inwalidek użyto wyżej omówionych metod, użytych przy konstrukcji tablic dla wdów.

Szeregi wyrównano metodą Kinga i interpolowano metodą oskulacyjną.

Dane liczbowe dotyczące materjału:

Dla tablicy wybywania: lat obserwacji 54.293, wypadków wybycia 3.076 osób, dla tablicy śmiertelności lat obserwacji 54.240,5, wypadków śmierci 2.971.

II.

Tablice inwalidów-mężczyzn z połączonych materjałów Zakładu Ubezpieczeń w Królewskiej Hucie i Ubezpieczalni Poznańskiej.

Obliczenie prawdopodobieństw śmierci i wybycia dla inwalidy-mężczyzny z danych Ubezpieczalni Poznańskiej i Królewskiej Huty oddzielnie nie dało zadowalających wyników, prawdopodobnie z powodu szczupłości materjałów. Obliczono zatem wspólne dla rencistów obu zakładów prawdopodobieństwa z połączonych materjałów, dotyczących śmiertelności i wybywania inwalidów, przyczem z materjału Królewskiej Huty wzięto tylko część obserwacyj, a mianowicie dotyczącą tych rencistów, którzy otrzymali rentę przed ukończeniem 60 roku życia, gdyż w 60 r. wszyscy ubezpieczeni torzymują rentę,

a. Tablica śmiertelności (tabl 5).

Okres obserwacyj 1926 — 1930. Lat obserwacyj 128.840 wypadków śmierci 10.734.

Szereg prawdopodobieństw surowych wykazał bardzo dobry przebieg: wyrównano go metodą K i n g a i interpolowano met. S p r a g u e'a. Otrzymano szereg wartości wyrównanych dla wieków $34\frac{1}{2}$ do $79\frac{1}{2}$, przedłużono go na wartości do $19\frac{1}{2}$ lat i do $89\frac{1}{2}$ lat parabolami 2 go stopnia. Wyrównany szereg wykazał przegięcie przy wiekach $51\frac{1}{2}$ — $57\frac{1}{2}$, przegięcie to złagodzono, prowadząc parabolę 3-go stopnia przez punkty dla wieków $48\frac{1}{2}$, $49\frac{1}{2}$ — $58\frac{1}{2}$, $59\frac{1}{2}$.

Ponieważ, począwszy od 80 roku, wartości dla śmiertelności były prawie identyczne z wartościami prawdopodobieństw wybycia i ponieważ wybycia w tych rocznikach z innych powodów niż śmierć są wyjątkami, przyjęto dla obu prawdopodobieństw wartości te same (od wieku $81\frac{1}{2}$).

b. Tablica wybywania (tabl. 6).

Tablica wybywania inwalidów mężczyzn (Ubezpiecz. Pozn. 1926 do 1930 oraz Król. Huta), obliczone z tego samego materjału co $q_x{}'$, obejmując okres obserwacyj 1926—1930, lat obserwacyj 129.058, wypadków wybycia 11.170.

Szereg prawdopodobieństw surowych wykazuje prawidłowy przebieg. Szereg ten wyrównano K i n g em, wartości dla wieków $19\frac{1}{2}$ do $29\frac{1}{2}$ i $79\frac{1}{2}$ do $89\frac{1}{2}$ ekstrapolowano parabolami 2-go stopnia.

III.

Ze statystyki Kasy Brackiej w Tarnowskich Górach.

Kasa ta opracowywuje w swych sprawozdaniach bardzo dokładny materjał statystyczny, który dotychczas nie został wyzyskany.

Opracowanie było tem bardziej wskazane, że można się było spodziewać, zwłaszcza co do prawdopodobieństw inwalidności, uzyskania cyfr nie tylko orjentacyjnych, lecz wprost górną ich granicę, gdyż chodzi o pracowników przemysłu najcięższego.

Jeżeli w dodatku uwzględnić, że powszechnem jest zdanie, iż do tych tablic należy bezwzględnie starać się o materjał statystyczny najświeższej daty, to będzie to dalszym dowodem potrzeby uwzględnienia tego materjału, jako przyczynku do podstaw ubezpieczenia socjalnego w Polsce.

Prawdopodobieństwa inwalidności (tabl. 7).

Liczby podstawowe materjału statystycznego są następujące:

Okres obserwacyj 1.I. 1926 — 31.XII. rok 1930.

Lat obserwacyj: 456.246 (mężczyzn), wypadków zainwalidowań: 9.399 (mężczyzn).

Wyrównanie tabl. nastąpiło metodą oskulacyjną i Kinga. Początkowe i końcowe wartości uzupełniono graficznie.

Materjał statystyczny, dotyczący kobiet, nie był dostateczny dla zbudowania szeregów. Sumaryczne porównanie wykazuje zainwalidowań wśród kobiet o 2,7 razy więcej, niż mężczyzn.

Cały rachunek, z braku bliższych danych, opierał się na latach kalendarzowych.

Porównanie otrzymanych cyfr z kilku innemi znanemi tablicami wykazuje, że wyżej wymienione względy nie są dość ważkie, by tu otrzymaną tablicę uważać za górną granicę.

Otrzymujemy rezultat na pierwszy rzut oka sprzeczny ze spodziewanym. Ta tablica daje rezultaty niższe, niż np. tablica Amtmann-Pfaffenbergera dla górnictwa śląskiego z lat 1875 — 1904.

Klucza do rozwiązania tej sprzeczności należy szukać wyłącznie w okoliczności, że materjał tu opracowany pochodzi z lat dobrej konjunktury. Okazuje się więc i tu, że na ryzyko inwalidności przeważnie działają stosunki ekonomiczne.

Śmiertelność inwalidów.

Tablica śmiertelności inwalidów (tabl. 8) agregatowa — gdyż dla konstrukcji tablicy zależnej i od czasu trwania inwalidności materjał był niewystarczający—wykazuje charakterystyczne cechy: spadek śmiertelności w latach młodych i średnich i dopiero późniejszy wzrost. Śmiertelność zaś w młodych latach jest wysoka, co objaśnia się ważkością przyczyn zainwalidowania w młodych latach i odpowiednio większym wpływem pierwszych lat inwalidztwa na śmiertelność:

Tablica została wyrównana tylko graficznie i może mieć wartość ilustracyjną.

Śmiertelność aktywnych.

Tablica śmiertelności aktywnych członków Kasy Brackiej (tabl. 9) została wyrównana podobnież, jak wyżej, metodą K i n g a i wykazuje liczby bardzo niskie. Należy to przypisać badaniu lekarskiemu i doborowi pracowników, zachodzącemu w tych gałęziach przemysłu siłą rzeczy.

IV.

Tablice prawdopodobieństw posiadania dziecka.

Z materjału Ubezpieczalni Poznańskiej obliczono prawdopodobieństwo posiadania dziecka poniżej lat 15 (tabl. 10): prawdopodobieństwo otrzymano ze statystyki dodatków na dzieci do rent inwalidzkich, pobieranych przez rencistów Ubezpieczalni w dniu 31.XII. 1930. Inwalidów rencistów było 23444, z tych pobierało dodatki na dzieci 3752. Szereg prawdopodobieństw posiadania dziecka wyrównano graficznie.

Z materjału Królewskiej Huty obliczono prawdopodobieństwo posiadania dziecka poniżej 18 lat (tabl. 11).

Prawdopodobieństwo wyliczono ze statystyki zgonów inwalidów i rent sierocych po zmarłych inwalidach w okresie 1926 — 1930. W okresie tym zmarło 5620 inwalidów, przyznano renty sieroce 1111 rodzinom sierocym. Otrzymany szereg prawdopodobieństw został wyrównany graficznie.

W późnych wiekach prawdopodobieństwo posiadania dziecka jest niestosunkowo duże, co jest prawdopodobnie skutkiem prawodawstwa, uprawniającego, do pobierania dodatków na wnuki i dzieci przysposobione.

V.

Tablica prawdopodobieństw żonatości.

Prawdopodobieństwo żonatości (tabl. 12) obliczono na podstawie danych ze spisu 1921 dla województw zachodnich, jako stosunek liczby mężczyzn żonatych danego wieku, do ogólnej liczby mężczyzn danego wieku.

Rachunki i konstrukcje wykonywał p. *Antoni Wanatowski*.

RÉSUMÉ.

Quelques Tableaux des probabilités basés sur l'expérience des instituts d'assurances sociales en Pologne.

Ayant pour but un contrôle technique des Instituts d'assurances d'invalidité et de vieillesse (travailleurs physiques) à Poznań (cité dorénavant U. P.) et à Królewska Huta (K. H.), on a construit quelques tableaux biométriques, basés sur les matériaux statistiques donnés par ces Instituts.

Pour orientation et illustration on a aussi usé les matériaux de la Caisse de Mineurs à Tarnowskie Góry.

Tableau I donne les probabilités de décès de veuves-invalides (UP).

Tableau II donne les probabilités générales de suspension des rentes viagères des mêmes matériaux.

Tableau III — Table de mortalité pour les femmes invalides, rentières à la base de leurs propres assurances.

Tableau IV — analogue à tableau II — suspension des rentes générales — non seulement à cause de mort.

Tableau V — probabilités de suspension des rente des matériaux unis (UP et KH) pour hommes.

Tableau VI — probabilités de décès des hommes invalides rentières (matériaux unis).

Tableau VII — Table d'invalidité des mineurs.

Tableau VIII — Table de mortalitité des invalides mineurs.

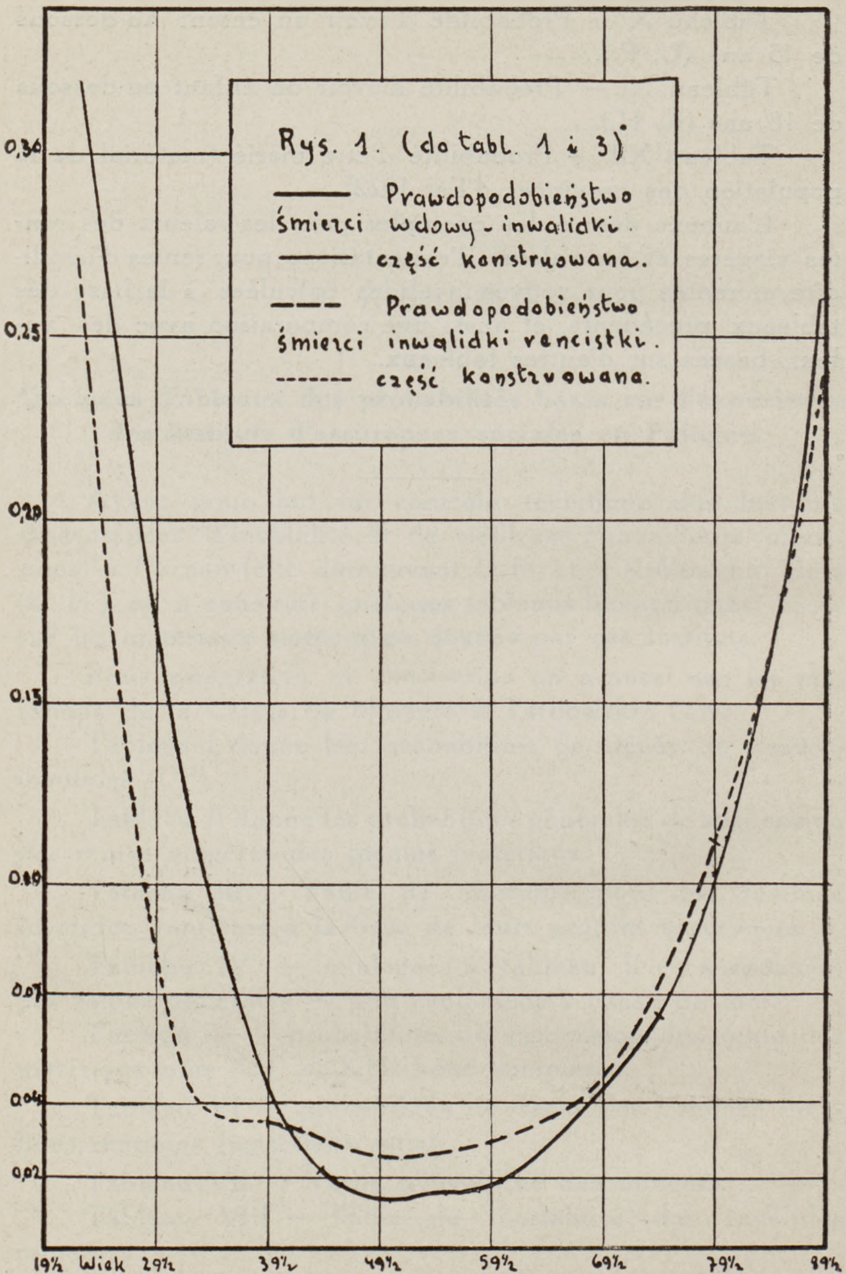
Tableau IX — Table de mortalité pour les actifs mineurs.

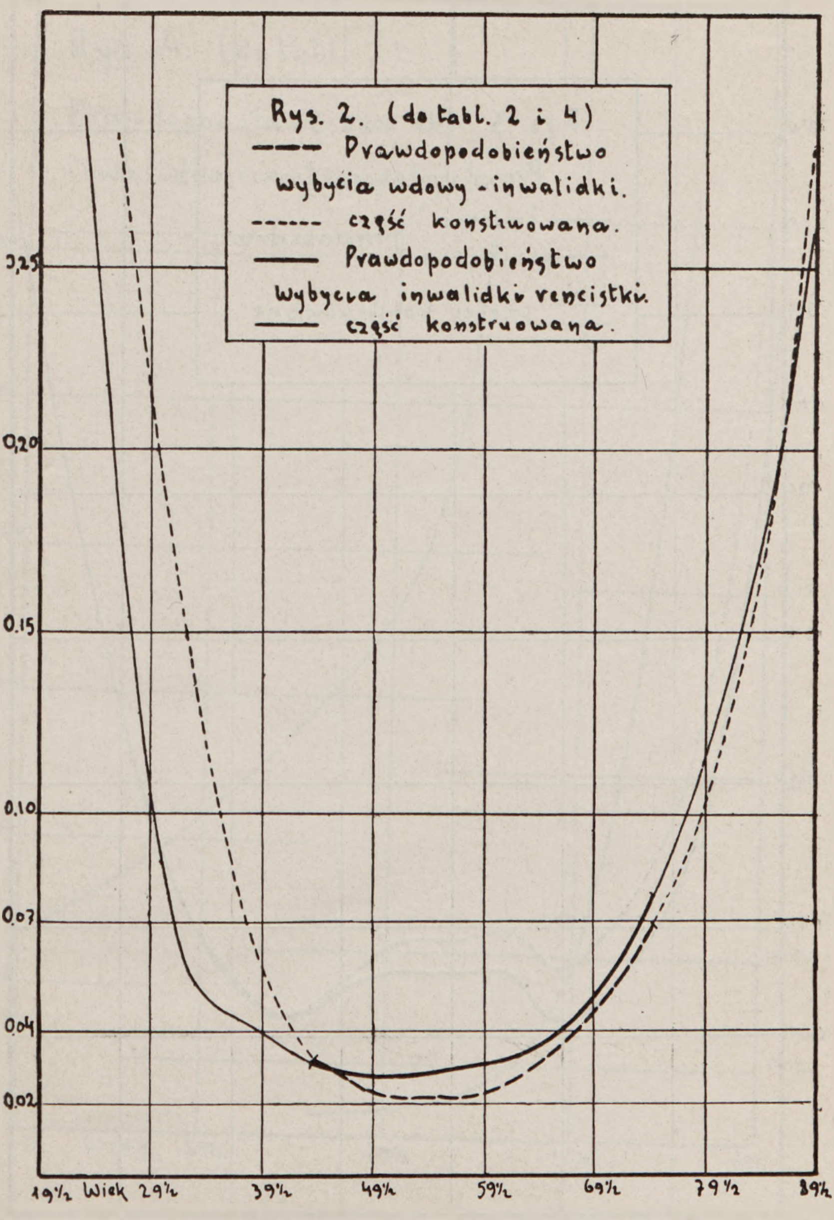
Tableau X — Probabilité d'avoir un enfant au-dessous de 15 ans (U. P.).

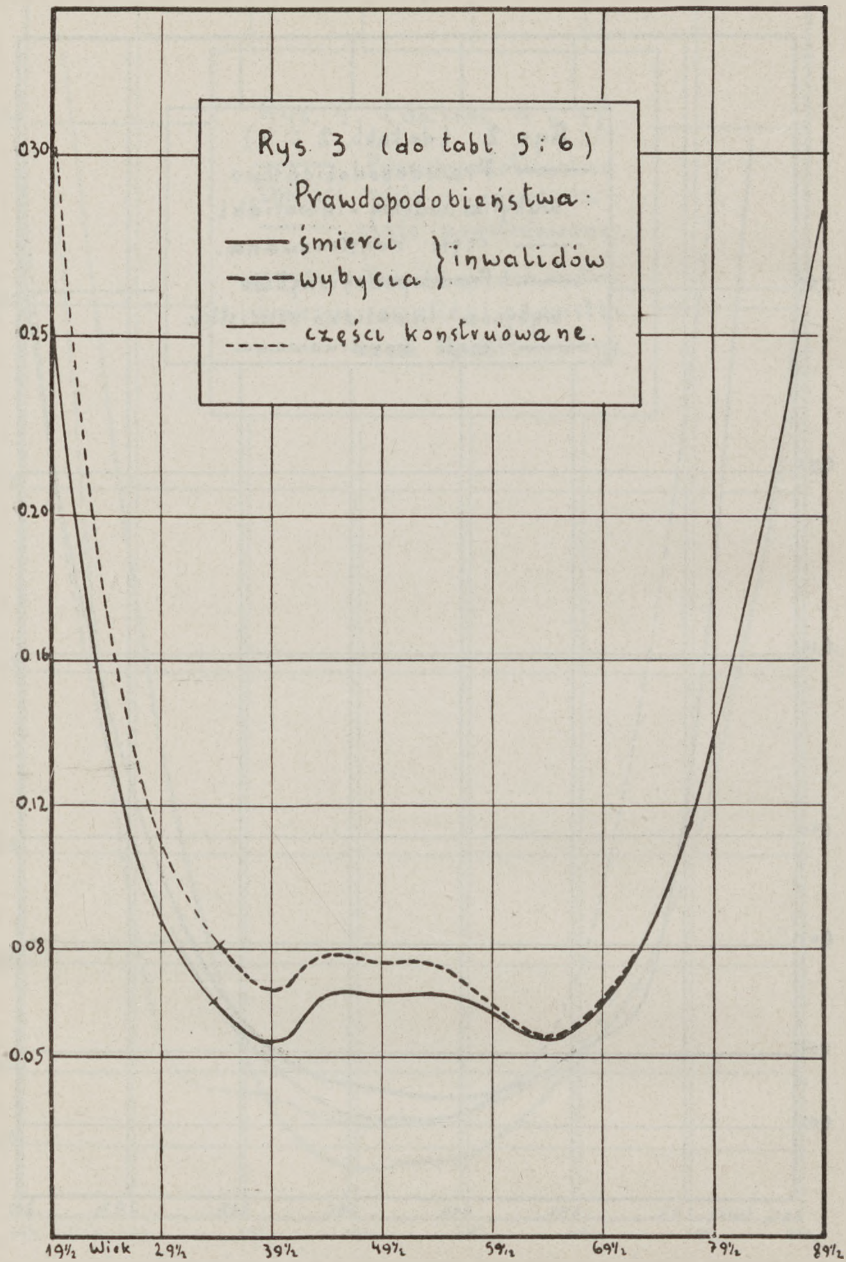
Tableau XI — Probabilité d'avoir un enfant au-dessous de 18 ans (K. H.).

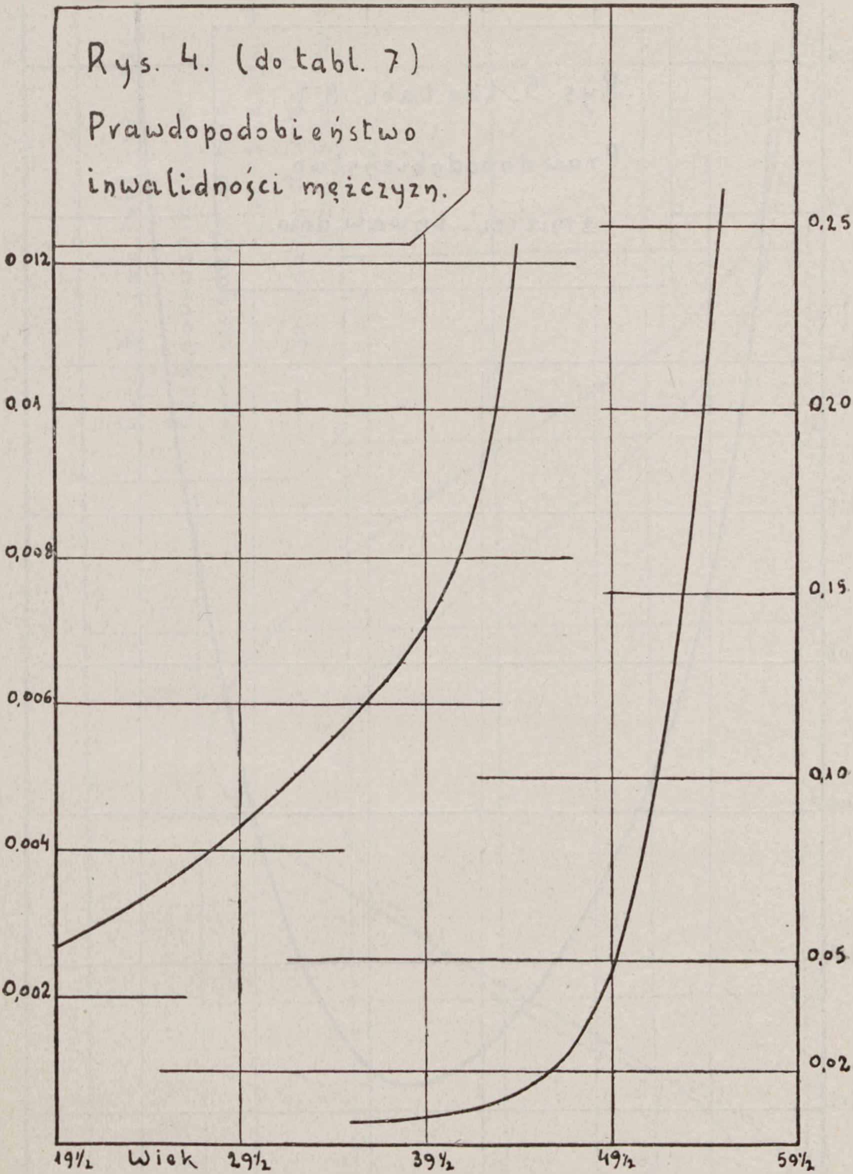
Tableau XII — Probabilité d'être marié (matérial de la population des provinces d'Est 1922).

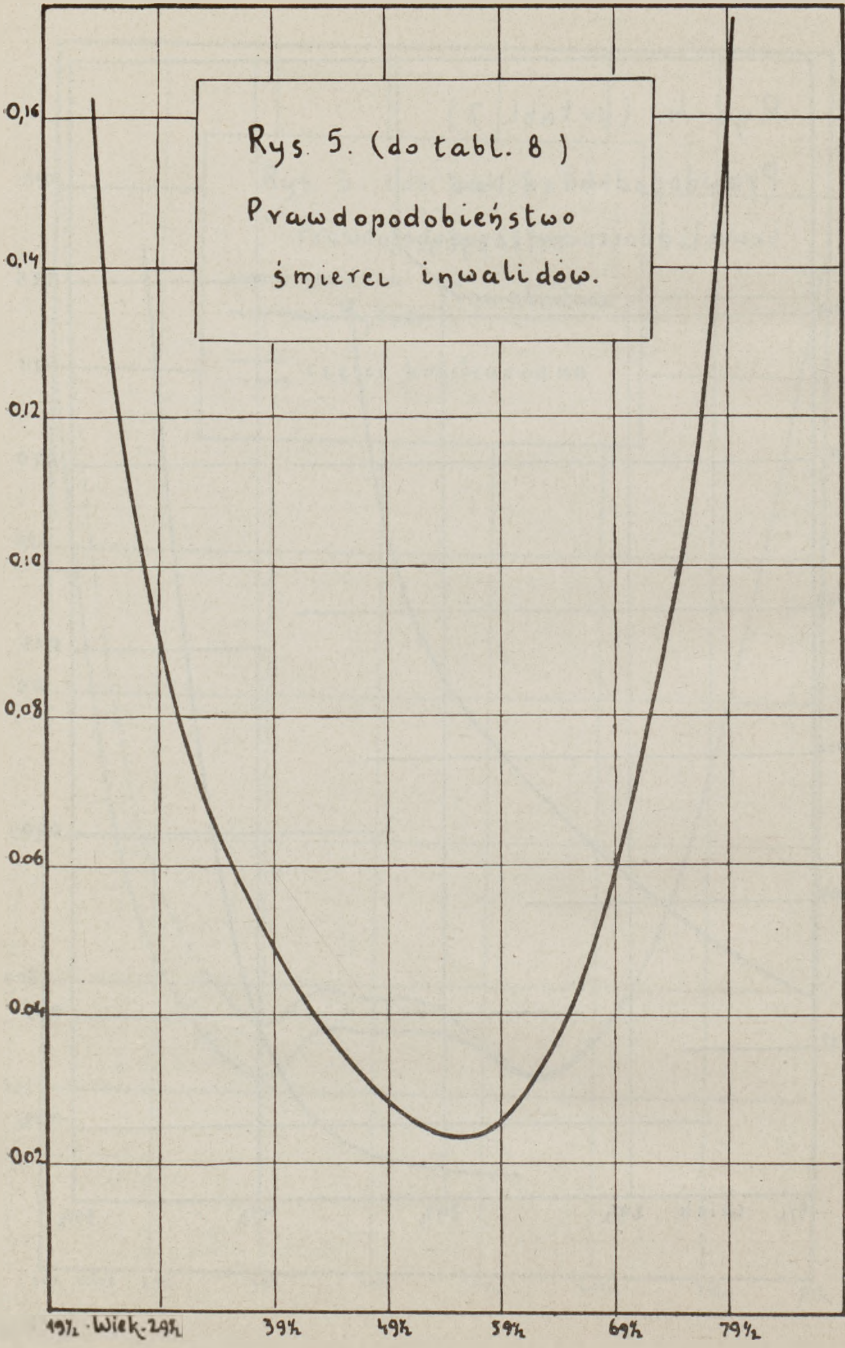
L'annexe donne des exemples pour les valeurs des rentes viagères et les valeurs d'expectatives pour rentes d'invalidité et rentes pour veuves-invalides calculées à la base des tableaux précédents, et aussi une comparaison avec des valeurs basées sur d'autres tableaux.

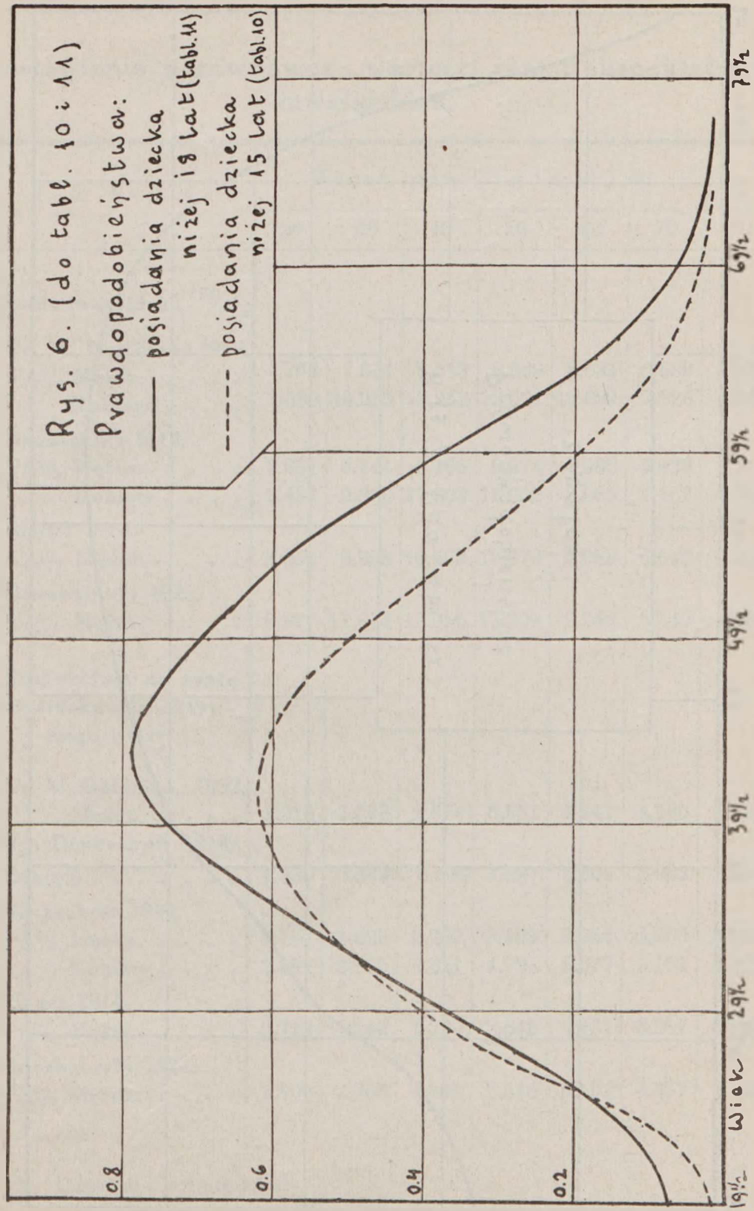

Rys. 1. (do tabl. 1 i 3)
Prawdopodobieństwo śmierci wdowy - inwalidki.
część konstruowana.
Prawdopodobieństwo śmierci inwalidki rencistki.
część konstruowana.
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,07
0,04
0,02
19½
Wiek
29½
39½
49½
59½
69½
79½
89½

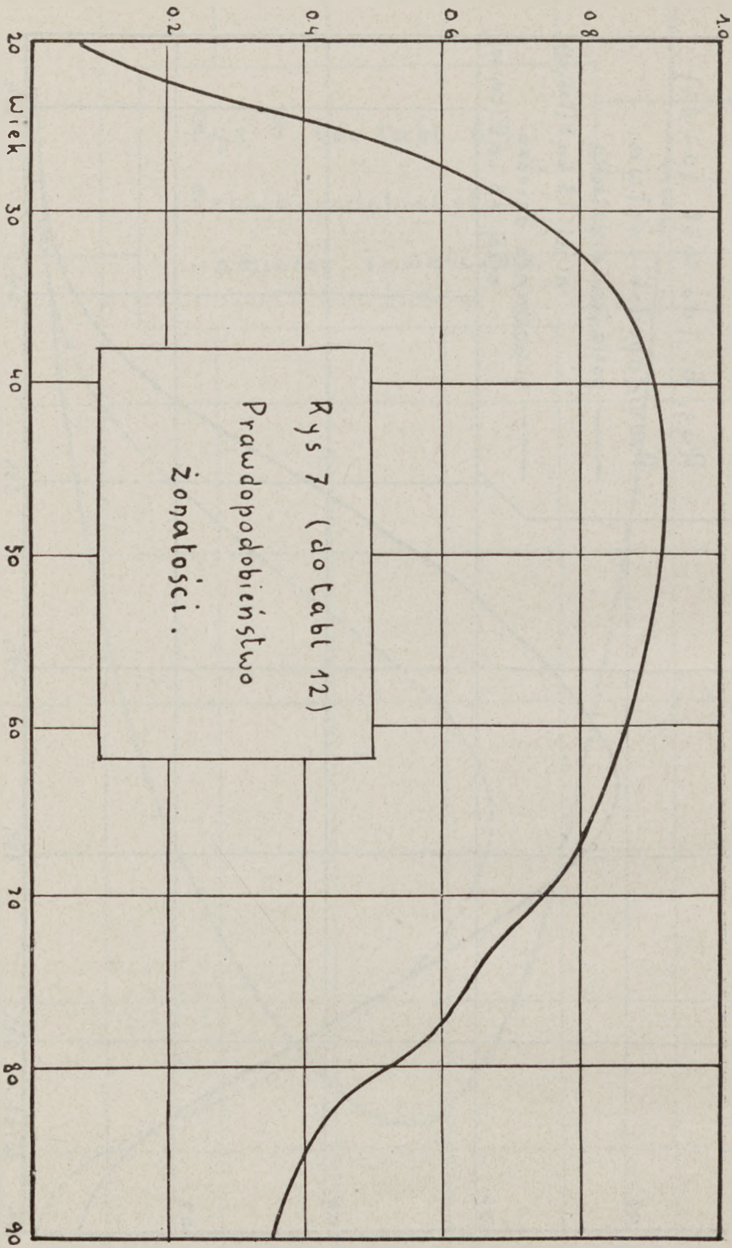

Rys. 2. (do tabl. 2 i 4)
Prawdopodobieństwo wybycia wdowy-inwalidki.
część konstruowana.
Prawdopodobieństwo wybycia inwalidki rencistki.
część konstruowana.
0,25
0,20
0.15
0.10
0.07
0.04
0.02
19½ Wiek 29½
39½
49½
59½
69½
79½
89½


Rys. 3 (do tabl. 5 : 6)
Prawdopodobieństwa:
śmierci
wybycia
inwalidów
części konstruowane.
0.30
0.25
0.20
0.16
0.12
0.08
0.05
19½
Wiek
29½
39½
49½
59½
69½
79½
89½


Rys. 4. (do tabl. 7)
Prawdopodobieństwo
inwalidności mężczyzn.
0.012
0.01
0,008
0,006
0,004
0,002
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0,02
19½
Wiek
29½
39½
49½
59½


Rys. 5. (do tabl. 8)
Prawdopodobieństwo
śmierci inwalidów.
0,16
0,14
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
19½
Wiek
29½
39½
49½
59½
69½
79½


Rys. 6. (do tabl. 10 i 11)
Prawdopodobieństwa:
— posiadania dziecka niżej 18 lat (tabl. 11)
----- posiadania dziecka niżej 15 lat (tabl. 10)
0.8
0.6
0.4
0.2
19½
Wiek
29½
39½
49½
59½
69½
79½


Rys 7 (do tabl 12)
Prawdopodobieństwo
żonatości.
Wiek
20
30
40
50
60
70
80
90
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Zestawienie porównawcze wartości rent i ekspektatyw inwalidzkich.

TREŚĆ	Wartość renty (ekspektywy) dla wieku						
	20	30	40	50	60	70	80
I. Renta inwalidzka $^{(12)}a^{i}_{x}$							
1) Dr. M. Goldman 1932,							
$4^1/_2\%$ Mężcz.	3.763	7.611	8.313	8.369	8.531	6.639	3.957
Kobiety	2.589	10.935	13.012	12.501	10.689	7.826	4.842
2) Denkschrift 1914,							
$3^1/_2\%$ Mężcz.	3.951	5.144	6.196	6.974	7.080	5.923	4.105
Kobiety	6.434	9.969	11.303	11.002	9.605	7.162	4.501
3) Riedel 1914,							
$4^1/_2\%$ Mężcz.	8.362	9.958	10.563	10.373	8.983	6.645	4.223
4) Grieshaber*) 1922,							
$4^1/_2\%$ Mężcz.	8.377	11.074	12.095	11.209	9.248	6.342	4.266
II. Ekspektywa na rentę inwalidzką dla aktywnego $^{(12)}a^{ai}_{x}$							
1) Dr. M. Goldman, 1932,							
$4^1/_2\%$ Mężcz.	1.016	1.578	2.374	3.551	4.841	4.580	2.620
(i_x : Denkschrift 1914) Kobiety	1.686	2.569	3.549	4.687	5.605	5.092	2.896
2) Denkschrift 1914,							
$3^1/_2\%$ Mężcz.	1.157	1.625	2.257	3.108	3.944	4.086	3.021
Kobiety	2.191	2.975	3.811	4.794	5.677	5.134	3.310
3) Riedel 1914,							
$4^1/_2\%$ Mężcz.	0.713	1.140	1.739	2.545	3.431	3.587	3.039
4) Grieshaber*) 1922,							
$4^1/_2\%$ Mężcz.	1.800	2.705	4.031	5.813	6.192	4.347	2.904

*) Dane dla robotników!

Wdowy-inwalidki-rencistki Ubezpieczalni Poznańskiej (okres 1926 — 1930).

Tabl. 1. Prawdopodobieństwo śmierci.

y	Surowe $q^l_{y-1/2}$	Wyrównane $q^l_{y-1/2}$	Wyrównane i interpolowane na pełne wieki q_y
(1)	(2)	(3)	(4)
20		0.4000	0.3862
1		3724	3591
2		3459	3331
3		3203	3081
4		2959	2841
5		2724	2612
6		2500	2393
7		2286	2184
8		2083	1986
9		1890	1798
30	0 1538	0.1707	0.1620
1		1534	1453
2		1372	1296
3	0.0385	1221	1150
4		1079	1013
5	0.0298	0948	0888
6	548	828	772
7	208	717	667
8	342	617	572
9		528	488
40	0.0090	0.0449	0.0414
1	341	380	350
2	060	321	297
3	253	273	254
4	186	235	221
5	091	208	203
6	235	199	190
7	191	182	172
8	156	163	155
9	190	147	143
50	0.0150	0.0139	0 0138
1	145	138	139
2	070	141	143
3	075	146	149
4	173	152	154
5	206	156	157
6	167	158	158
7	164	159	159
8	132	160	161
9	166	163	166
60	0.0208	0.0170	0.0176
1	212	183	192
2	244	202	214
3	288	226	239
4	264	253	266
5	256	280	294
6	264	308	322
7	343	337	352
8	378	368	384
9	364	401	418
70	0.0448	0.0436	0.0453
1	447	471	489
2	552	507	526
3	571	545	566
4	652	588	614
5	630	641	671
6	629	702	735
7	766	769	806
8	956	844	885
9	910	927	973
80	0.1076	0.1019	0.1069
1	1058	1119	1174
2	1430	1230	1290
3	0952	1350	1418
4	1046	1487	1560
5	1124	1634	1715
6	1971	1796	1884
7	1786	1972	2068
8	1702	2164	2268
9	2121	2372	2485
90	0.1500	0.2598	

Tabl. 2. Prawdopodobieństwo wybycia (ustanie renty).

y	Surowe $\sigma^l_{y-1/2}$	Wyrównane $\sigma^l_{y-1/2}$	Wyrównane i interpolowane na pełne wieki σ_y
(1)	(2)	(3)	(4)
20		0.5000	0.4826
1		4653	4486
2		4320	4160
3		4000	3846
4		3693	3546
5		3400	3260
6		3120	2986
7		2853	2726
8		2599	2479
9		2359	2245
30	0.1538	0.2131	0.2024
1		1918	1817
2		1717	1623
3	0.0385	1530	1443
4	0816	1356	1275
5	1143	1195	1121
6	1316	1047	0980
7	0208	0913	852
8	342	792	738
9	380	684	637
40	0.0090	0.0590	0.0549
1	475	509	475
2	120	441	413
3	402	386	365
4	232	345	330
5	226	316	311
6	367	307	298
7	348	289	278
8	259	268	258
9	307	249	243
50	0.0187	0.0237	0.0233
1	209	229	226
2	236	223	221
3	137	219	217
4	238	216	215
5	277	215	214
6	210	214	214
7	218	215	216
8	161	217	219
9	219	221	224
60	0.0252	0.0228	0.0233
1	247	239	246
2	277	254	263
3	318	273	283
4	317	293	304
5	280	315	327
6	299	339	352
7	373	365	380
8	408	395	410
9	399	4.6	443
70	0.0483	0.0460	0.0477
1	455	494	511
2	566	528	546
3	586	565	586
4	692	608	634
5	637	661	688
6	635	715	745
7	798	776	812
8	956	848	887
9	922	927	973
80	0 1104	0.1019	0.1069
1	1113	1119	1174
2	1430	1230	1290
3	0986	1350	1418
4	1046	1487	1560
5	1124	1634	1715
6	1971	1796	1884
7	1893	1972	2068
8	1702	2164	2268
9	2121	2372	2485
90	0.1500	0.2598	

Kobiety-inwalidki-rencistki Ubezpieczalni (1926 — 1930).

Tabl. 3. Śmiertelność.

Wiek y	niewyrównane $q^{I}_{y-1/2}$	$q^{I}_{y-1/2}$	q^{I}_{y}
(1)	(2)	(3)	(4)
20	—	0.4000	0.3769
1	—	3538	3327
2	—	3107	2907
3	—	2708	2524
4	—	2341	2173
5	0.1651	2005	1853
6	870	1701	1564
7	330	1428	1307
8	881	1187	1082
9	606	977	0888
30	571	800	727
1	735	655	597
2	520	539	497
3	750	455	429
4	389	404	394
5	263	384	381
6	331	379	376
7	233	374	371
8	478	368	364
9	206	360	356
40	493	352	347
1	245	343	337
2	336	332	326
3	495	320	314
4	313	309	303
5	239	298	293
6	175	289	284
7	272	279	274
8	276	270	266
9	273	262	257
50	267	253	252
1	169	251	251
2	290	251	252
3	298	253	254
4	271	256	258
5	254	260	263
6	235	266	269
7	248	273	278
8	299	283	287
9	333	292	296
60	307	300	303
1	278	307	309
2	286	312	314
3	330	317	321
4	351	325	331
5	362	337	345
6	340	353	363
7	318	374	386
8	388	399	414
9	368	429	446
70	471	463	484
1	513	505	531
2	605	558	586
3	557	615	647
4	610	679	712
5	775	746	779
6	818	813	848
7	989	883	920
8	942	957	997
9	946	1037	1080
80	1215	1124	1172
1	1189	1221	1274
2	1362	1327	1383
3	1672	1439	1499
4	1525	1559	1623
5	1851	1686	1753
6	1889	1821	1892
7	1529	1963	2037
8	2005	2112	2190
9	2353	2269	2351
90	2454	2433	2519
1	3097	2605	

Tabl. 4. Prawdopodobieństwo wybycia. (ustania renty).

y	Surowe $\sigma_{y-1/2}$	Wyrównane $\sigma_{y-1/2}$	Wyrównane i interpolowane na pełne wiek σ_y
(1)	(2)	(3)	(4)
20		0.5000	0.4717
1		4435	4171
2		3908	3663
3		3419	3193
4		2968	2761
5	0.1651	2554	2366
6	1007	2178	2009
7	0330	1840	1689
8	0881	1539	1407
9	895	1276	1163
30	0.0641	0.1051	0.0957
1	792	0864	789
2	576	714	658
3	893	602	565
4	484	528	510
5	391	492	481
6	452	471	460
7	271	449	440
8	468	431	422
9	240	414	405
40	0.0525	0.0396	0.0386
1	314	377	367
2	435	357	347
3	525	338	329
4	341	321	314
5	239	308	303
6	175	298	294
7	272	290	286
8	296	283	280
9	291	278	276
50	0.0313	0.0275	0.0275
1	183	275	275
2	302	276	277
3	332	279	281
4	292	283	285
5	275	287	289
6	254	292	294
7	284	297	300
8	325	304	307
9	341	311	314
60	0.0335	0.0317	0.0319
1	291	321	322
2	292	324	326
3	336	328	331
4	356	334	339
5	362	345	353
6	359	362	373
7	332	384	397
8	417	411	427
9	368	443	461
70	0.0492	0.0479	0.0499
1	518	520	545
2	627	570	598
3	569	626	657
4	623	688	720
5	781	753	786
6	818	820	855
7	996	890	927
8	942	965	1005
9	972	1045	1089
80	0.1224	0.1134	0.1183
1	1211	1232	1286
2	1362	1340	1399
3	1672	1458	1521
4	1561	1585	1653
5	1873	1722	1796
6	1970	1870	1950
7	1566	2030	2116
8	2050	2203	2297
9	2353	2392	2496
90	2454	0.2600	
1	3205		
2	2364		

Śmiertelność i ubywanie inwalidów z połączonych materjałów Ubezpieczalni i Zakładu w Król. Hucie, okres 1926 — 1930.

Tabl. 5. Prawdop. śmierci.

Wiek X	Prawdopod. śmierci $q'_{x - 1/2}$ Surowe	Wyrównane
20	0.4445	0.2500
1	3581	2236
2	2273	1995
3	3299	1774
4	2362	1578
5	2376	1405
6	1368	1253
7	1183	1124
8	0950	1016
9	1088	0931
30	0.1048	0.0871
1	752	822
2	712	777
3	646	735
4	753	696
5	626	661
6	743	627
7	564	593
8	687	564
9	580	544
40	0.0451	0.0537
1	454	548
2	561	575
3	604	611
4	524	647
5	761	671
6	749	679
7	693	678
8	736	673
9	683	668
50	0.0638	0.0670
1	668	673
2	636	677
3	807	680
4	762	682
5	711	682
6	673	679
7	713	672
8	693	661
9	690	644
60	0.0626	0.0621
1	549	602
2	554	582
3	634	565
4	566	554
5	508	551
6	515	557
7	562	570
8	571	589
9	590	614
70	0.0704	0.0643
1	644	678
2	739	719
3	717	769
4	768	826
5	966	889
6	1004	963
7	1037	1049
8	1209	1147
9	1257	1288
80	0.1364	0.1364
1	1450	1485
2	1575	1612
3	1651	1742
4	2082	1879
5	1872	2023
6	2106	2172
7	2353	2330
8	2594	2494
9	2826	2664
90	0.2275	0.2842
1	2989	
2	2636	
3	2667	

Tabl. 6. Prawdop. wybycia.

Wiek X	Prawdopod. wybycia $(\beta_{x - 1/2})$ Surowe	Wyrównane
20	0.4445	0.3000
1	3571	2694
2	2273	2413
3	3469	2158
4	2636	1928
5	2531	1722
6	1417	1543
7	1468	1390
8	1174	1262
9	1368	1159
30	0.1197	0.1082
1	0974	1020
2	877	0963
3	846	911
4	945	864
5	712	822
6	921	784
7	719	749
8	906	719
9	720	697
40	0.0518	0.0687
1	570	693
2	764	714
3	781	741
4	628	768
5	840	784
6	827	787
7	825	782
8	820	774
9	828	765
50	0.0708	0.0760
1	750	760
2	697	763
3	862	766
4	837	765
5	764	757
6	746	729
7	756	714
8	708	686
9	718	659
60	0.0641	0.0637
1	563	616
2	562	595
3	644	576
4	578	564
5	515	560
6	525	567
7	570	582
8	588	604
9	600	631
70	0.0730	0.0661
1	663	695
2	750	734
3	722	780
4	776	834
5	978	895
6	1009	968
7	1037	1055
8	1209	1153
9	1267	1261
80	0.1379	0.1373
1	1467	1489
2	1575	1612
3	1666	1742
4	2094	1879
5	1872	2023
6	2114	2172
7	2366	2330
8	2612	2494
9	2826	2664
90	0.2275	0.2842
1	2989	
2	2636	
3	2667	

Z danych Spółki Brackiej w Tarnowskich Górach okres 1926 — 1930.

Tabl. 7. Prawdopodobieństwa stania się inwalidą i_x.

Wiek	$i_{x-1/2}$ niewyrównane	$i_{x-1/2}$ wyrównane graficznie
17	0.00128	
8	131	
9	124	
20	0.00179	0.00270
1	232	275
2	335	296
3	279	305
4	332	320
5	393	335
6	349	350
7	323	370
8	409	390
9	405	410
30	0 00443	0.00430
1	416	455
2	509	480
3	431	505
4	492	530
5	656	555
6	637	580
7	559	605
8	663	630
9	714	655
40	0.00641	0.00685
1	679	740
2	846	805
3	925	900
4	1225	1030
5	1253	1230
6	1550	1690
7	1825	2140
8	2277	2600
9	2832	3400
50	0.04873	0.04600
1	6555	6600
2	8993	9000
3	10748	11800
4	15600	15600
5	18387	19800
6	27418	26000
7	26518	
8	25636	
9	27694	
60	0.40811	
1	50246	
2	42105	
3	35714	
4	35714	
5	27419	

Tabl. 8. Prawdopodobieństwa śmierci inwalidów-mężczyzn.

Wiek	$q^{i}_{x-1/2}$ niewyrównane	$q^{i}_{x-1/2}$ wyrównane graficznie
20	0.18605	
1	12632	
2	26923	0.220
3	17062	188
4	13718	162
5	16514	142
6	13514	127
7	13506	115
8	07595	105
9	11321	097
30	0.12093	0 090
1	6019	84
2	9190	78
3	7634	73
4	7294	68
5	9740	64
6	4386	60
7	6540	57
8	4762	54
9	6326	51
40	0.03953	0.048
1	6349	46
2	6367	43
3	5567	41
4	3104	39
5	6173	37
6	4696	35
7	5474	33
8	3621	31
9	3050	29
50	0.04195	0.028
1	3274	27
2	2565	26
3	2534	25
4	2426	24
5	2090	23
6	1977	23
7	2319	23
8	2343	23
9	2390	24
60	0.02052	0.025
1	2425	26
2	2641	28
3	3297	31
4	3429	34
5	3863	37
6	7045	41
7	4358	45
8	5299	49
9	5868	54
70	0.06127	0.060
1	7106	66
2	7854	73
3	7540	80
4	8714	87
5	8073	95
6	12130	105
7	10667	115
8	11364	127
9	16553	143
80	0.15517	0.163
1	15088	187
2	17352	216
3	20580	251
4	16783	
5	17895	

Dane Spółki Brackiej w Tarnowskich Górach okres 1926 — 1930.

Tabl. 9. Prawdopodob. śmierci mężczyzn aktywnych.

Wiek	$q_{x-1/2}^{aa}$ niewyrównane	wyrównane
16	0.00103	
7	282	
8	250	
9	327	
20	0.00352	
1	351	
2	406	
3	260	
4	320	
5	429	0.00371
6	438	
7	425	
8	501	
9	458	
30	0.00506	0.00503
1	532	517
2	501	525
3	369	528
4	500	529
5	594	531
6	591	531
7	597	528
8	473	526
9	456	527
40	0.00651	0.00535
1	563	555
2	558	584
3	659	591
4	625	624
5	711	683
6	651	703
7	758	716
8	620	728
9	765	741
50	0.00755	0.00760
1	910	
2	770	
3	911	
4	1094	
5	751	0.00936
6	890	
7	1079	
8	1448	
9	0656	
60	0.00677	
1	2276	
2	1653	
3	1563	
4	1227	
5	1835	

Prawdopodobieństwo posiadania dziecka.

Tabl. 10. Prawd. posiadanie dziecka poniżej 15 lat, z danych Ubezpieczalni.

Wiek ubezp.	Prawdop. posiad. dziecka surowe	wyrównane graficznie
23	0.1429	0 027
4	0588	100
5	1875	157
6	0000	220
7	1786	275
8	2857	325
9	5143	365
30	4444	0,405
1	5676	435
2	5000	462
3	5357	487
4	4459	507
5	5976	527
6	5263	550
7	4583	567
8	5301	585
9	5714	600
40	0.5852	0.612
1	6106	620
2	7080	622
3	5573	620
4	5822	612
5	6027	605
6	6466	592
7	5739	575
8	4965	557
9	5809	535
50	0.4772	0,507
1	4974	472
2	4372	437
3	4217	405
4	3846	370
5	3321	340
6	3179	310
7	2976	282
8	2792	250
9	2329	220
60	0.1841	0.190
1	1709	162
2	1496	137
3	1179	120
4	1154	100
5	0763	085
6	0813	070
7	0677	057
8	0309	047
9	0433	037
70	0.0447	0.032
1	350	30
2	373	25
3	225	22
4	243	20
5	163	20
6	198	20
7	125	17
8	049	17
9	140	17
80	0.0173	0.015
1	075	15
2	115	15
3	095	15
4	000	
85	142	

Tabl. 11. Prawd. posiadanie dziecka poniżej 18 lat. (z danych KH).

Wiek ubezp.	Prawdopod. posiadanie dziecka surowe	wyrównane graficznie
25	0.138	0.160
6	286	200
7	186	235
8	111	280
9	626	325
30	0.436	0.365
1	692	407
2	437	447
3	333	487
4	588	527
5	688	567
6	500	605
7	864	645
8	643	682
9	600	712
40	0.786	0.740
1	818	762
2	765	777
3	750	787
4	800	790
5	913	785
6	910	775
7	643	755
8	606	735
9	625	715
50	0.757	0.690
1	586	670
2	707	650
3	735	625
4	562	600
5	675	567
6	474	532
7	486	495
8	403	454
9	393	414
60	0.378	0.375
1	352	335
2	269	295
3	253	255
4	157	210
5	125	172
6	136	142
7	097	120
8	101	100
9	076	082
70	0.037	0.067
1	34	055
2	30	44
3	24	35
4	34	30
5	35	27
6	26	25
7	06	23
8	28	22
9	00	
80	0.016	

Tabl. 12. Prawdopodobieństwo żonatości dla mężczyzn woj. zachodnich (z danych spisu 1921 r.).

Wiek mężcz.	% żonatych Liczba surowa	% żonatych wyrównane graficzne
20	1.57	3.2
1	5.46	7.2
2	12.0	11.2
3	17.65	17.6
4	25.55	24.8
5	34.4	34.4
6	44.5	44.4
7	51.9	51.2
8	57.1	56.8
9	62.8	63.0
30	66.57	66.8
1	72.03	72.0
2	75.84	76.0
3	78.9	78.8
4	82.21	81.2
5	83.7	83.6
6	85.13	85.2
7	86.76	86.8
8	88.71	88.4
9	88.78	89.2
40	89.50	90.4
1	89.72	90.8
2	91.58	91.2
3	91.15	91.6
4	91.46	92.0
5	91.63	92.4
6	92.50	92.4
7	92.46	92.4
8	92.15	92.0
9	91.74	91 8
50	91.23	91.6
1	91 18	91.4
2	91.05	91.0
3	90.79	90.8
4	90.59	90.2
5	89.64	89.8
6	89.	89 2
7	88.87	88.8
8	88.41	88.0
9	87.23	87.2
60	86.92	86.4
1	85.66	85.6
2	85.06	84.8
3	83 92	83.8
4	83.30	82.8
5	80.83	82.0
6	80.9	80.8
7	79 95	80.0
8	77.45	78.4
9	75.3	76.4
70	73.37	74.0
1	71.06	72.6
2	69 43	69.2
3	66.85	66.8
4	64.99	65.2
5	63 85	63.6
6	62.75	62.0
7	59.85	60.0
8	57 89	58.0
9	55.19	55.2
80	51.12	51.2
1	49.78	48.0
2	45.97	45.2
3	41.92	42.8
4	41.08	41.2
5	43.5	40.0
6	40.23	38.8
7	40.06	37.6
8	40.28	36.8
9	36.	36.0
90	34.87	35.2
1	38.24	34.8
2	33.33	34.4
3	33.33	
4	42.86	

Z POLSKIEGO INSTYTUTU BADANIA ZAGADNIEŃ LUDNOŚCIOWYCH.

TABLICE WYMIERALNOŚCI

Województw Poznańskiego i Pomorskiego 1927 roku.

Mężczyźni i kobiety.

Tablice poniższe są trzeciemi z rzędu polskiemi powszechnemi tablicami wymieralności, dotyczącemi okresu powojennego. Dotychczas obliczone i ogłoszone zostały przez prof. St. Szulca tablice następujące: 1) *Tablice wymieralności województw Poznańskiego i Pomorskiego 1922 r.* Kwartalnik Statystyczny 1928 r. t. V, zeszyt 3, oraz 2) *Polskie Tablice Wymieralności 1927 roku*, ibidem, 1931 r. t. VIII, zeszyt 1.

Pierwsza z tych publikacyj zawiera tablice dla obu wspomnianych województw (łącznie), oddzielnie dla każdej płci, oraz dla obu płci razem, jakoteż obszerny wstęp metodyczny i szereg zestawień międzynarodowych Druga publikacja zawiera tablice dla całej Polski i dla każdej z 4 dzielnic oddzielnie, jednakże bez podziału według płci. Ponieważ tablice 1922 roku są już nieco przestarzałe wobec szybkiej poprawy wymieralności, przeto tablice poniższe wypełniają poniekąd powstałą lukę, podając porządek wymieralności dla województw poznańskiego i pomorskiego, oddzielnie dla mężczyzn i kobiet.

Tablice zawierają zwykłe rubryki powszechnych tablic wymieralności — liczby żyjących i zmarłych dla każdego rocznika wieku, prawdopodobieństwa zgonu i przeżycia jednego roku oraz przeciętne dalsze trwanie życia. Jako materjał liczbowy dla ich obliczenia posłużyły:

1) liczby żyjących w dniu 1 stycznia 1926 roku, z podziałem według płci i wieku, przeliczone na ten dzień według danych, zawartych w cytowanej pracy St. Szulca *„Tablice wymieralności województw poznańskiego i pomorskiego 1922 roku“*, w której podano m. in. liczby żyjących na dzień 1 stycznia 1926 roku; dla dzieci w wieku 0 — 7 lat liczby te oparte są na danych statystyki ruchu naturalnego ludności (urodzeń i zgonów) we wspomnianych województwach za lata 1919 — 1926, zaś od 7 lat wzwyż — na wynikach spisu ludności 1921 roku, przerachowanych na 1 stycznia lat następnych;

2) dane statystyki zgonów za 1927 rok, z podziałem według płci i wieku (z nieopublikowanych jeszcze zestawień Głównego Urzędu Statystycznego).

Obliczenia surowych prawdopodobieństw zgonu dokonano metodą, opisaną w cytowanej pracy St. Szulca. Obliczono mianowicie zbiorowości elementarne zmarłych (będących w wieku x do $x + 1$ lat i urodzonych w tym samym roku kalendarzowym), wobec niekompletności odpowiednich danych, według klucza, przytoczonego w tej pracy (str. 9 ÷ 11), jakoteż w pracy tegoż autora *„Polskie Tablice Wymieralności 1927 roku”* (str. 3 — 5). Następnie obliczono prawdopodobieństwa zgonu dla wieku 0 — 13 lat metodą Böckha (*Tablice wymieralności 1922 roku.* str. 5 — 6), zaś dla roczników starszych metodą Müllera — Pescha. Ta ostatnia metoda daje wartości rocznych prawdopodobieństw dla wieku w przybliżeniu $x + \frac{1}{2}$; zwykle więc oprócz wyrównania prawdopodobieństw, oblicza się wartości q_x za pomocą interpolacji linjowej

$$q_x = \frac{1}{2}\left(q_{x-\frac{1}{2}} + q_{x+\frac{1}{2}}\right).$$

Przy niniejszych tablicach połączono obie operacje w jedną, modyfikując nieznacznie użytą do wyrównania surowych prawdopodobieństw metodę K i n g a, tak, aby dawała ona odrazu wartości q_x dla całkowitych wartości x.

Metoda K i n g a należy do t. zw. metod interpolacyjno-stycznościowych i składa się z 2 stadjów (ob. np. S. F o g e l s o n, *O wyrównaniu szeregów statystycznych*, Kwartalnik Statystyczny 1931, tom VIII. zesz. 3, §§ 17 i 18). Najpierw wyznacza się t. zw. wartości podstawowe (*pivotal values*) jako poprawione przez różnice do 3-go rzędu włącznie średnie pięcioletnie, następnie stosuje się między temi wartościami interpolację przy pomocy parabol 3-go stopnia, z których każda przechodzi przez dwie sąsiednie wartości podstawowe i jest styczna do obu sąsiednich parabol. Modyfikacja, zastosowana przy obliczeniu niniejszych tablic, polegała na tem, że zamiast przyjąć, jak to robi K i n g, dla każdej grupy 5 wyrazów, q_1' równe „wartości podstawowej" (*pivotal value*), Q_z, zaś q_2', q_3', q_4', q_5', otrzymać z interpolacji dla $z = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$, interpolowano odrazu dla $z = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$. Otrzymano w ten sposób odrazu wartości q_x', dla całkowitych wartości x, niewątpliwie dokładniejsze niż często stosowane średnie artymetyczne.

Do rachunku użyto wzoru w postaci różnicowej a mianowicie

$$q_1' = Q_{z-1} + 1{,}1\ \Delta Q_{z-1} + 0{,}055\ \Delta^2 Q_{z-1} + 0{,}0045\ \Delta^3 Q_{z-1}$$

$$\delta q_1' = 0{,}2\ \Delta Q_{z-1} + 0{,}140\ \Delta^2 Q_{z-1} + 0{,}0270\ \Delta^3 Q_{z-1}$$

$$\delta q_2' = 0{,}3\ \Delta Q_{z-1} + 0{,}180\ \Delta^2 Q_{z-1} + 0{,}0310\ \Delta^3 Q_{z-1}$$

$$\delta q_3' = 0{,}4\ \Delta Q_{z-1} + 0{,}220\ \Delta^2 Q_{z-1} + 0{,}0110\ \Delta^3 Q_{z-1}$$

$$\delta q'_4 = 0{,}5\ \Delta Q_{z-1} + 0{,}260\ \Delta^2 Q_{z-1} + 0{,}0330\ \Delta^3 Q_{z-1}.$$

gdzie różnice Δ dotyczą przedziałów 5-letnich, a różnice δ — rocznych. Powyższa postać wzoru jest szczególnie dogodna, gdyż umożliwia obliczenie całej grupy 5 wyrazów na arytmometrze bez potrzeby kasowania, oraz natychmiastową kontrolę rachunku przez ponowne obliczenie ostatniego wyrazu przy pomocy wzoru

$$q_5' = Q_{z-1} + 2{,}5\ \Delta Q_{z-1} + 0{,}855\ \Delta^2 Q_{z-1} + 0{,}0405\ \Delta^3 Q_{z-1}.$$

Wyrównanie metodą King a dało zupełnie zadowalające wyniki dla roczników 13 — 82 dla obu płci, t. zn. dało krzywe o dostatecznie gładkim przebiegu i dostatecznie bliskie szeregu surowego. Roczniki 5 — 12 wyrównano przy pomocy 9-cio wyrazowego wzoru mechanicznego

$$70\, q_x' = 26\, q_x + 19\,(q_{x|1} + q_{x+1}) + 5\,(q_{x-2} + q_{x+2})$$

$$+ (q_{x-3} + q_{x+3}) - 3\,(q_{x-4} + q_{x+4})$$

(jest to jeden z t. zw. wzorów H i g h a m a, ob. S. F o g e l s o n, l. c., § 12); miejsce zetknięcia tego odcinka szeregu zarówno z niewyrównaniemi wyrazami na początku, jak i z częścią, wyrównaną metodą K i n g a, poprawiono graficznie. Wreszcie, ze względu na zupełnie fantastyczne i niewiarygodne wartości surowych prawdopodobieństw zgonu dla starszych roczników, obliczono je, od wieku 82 lat począwszy, przy pomocy ekstrapolacji geometrycznej logarytmów prawdopodobieństw przeżycia 1 roku

$$p_{82+n} = p_{82}^{r^n} \quad (\log p_{82+n} = r^n \log p_{82})$$

(stałą r wyznaczono przy pomocy p_x, wyrównanych metodą K i n g a, dla 10-lecia 73 — 82 lat; wyniosła ona dla płci męskiej $r = 1.10045$, dla płci żeńskiej $r = 1.08516$).

Porównanie obliczonych tablic z tablicami wymieralności 1922 roku dla tychże województw oraz z tablicami wymieralności 1926 roku dla województw zachodnich (ob. St. Szulc „*Polskie Tablice wymieralności 1927 roku*“ dało wyniki następujące. Krzywe prawdopodobieństw zgonu dla obu płci mają zwykły charakterystyczny przebieg, wykazując znaczną poprawę w porównaniu z 1922 rokiem. Krzywa prawdopodobieństw dla mężczyzn przebiega niemal całkowicie poniżej odpowiedniej krzywej dla kobiet 1922 r. Minimum umieralności wynosi dla mężczyzn 0.0018 dla wieku 10 i 11 lat, dla kobiet — 0.0017 dla tegoż wieku. W 1922 roku odpowiednie minima wynosiły: dla mężczyzn 0.0023 (11 — 13 lat), dla kobiet 0.0027 — (11 lat).

Ogólna poprawa warunków umieralności widoczna jest z poniższych dwóch tabliczek, w których porównano prawdopodobieństwa zgonu i przeciętne trwanie życia w 1927 roku.

Prawdopodobieństwa zgonu.

Wiek	Mężczyźni		Kobiety	
	1922	1927	1922	1927
0	0,1797	0,1830	0,1565	0,1551
2	0,0160	0,0105	0,0158	0,0089
5	0,0045	0,0033	0,0028	0,0031
10	0,0025	0,0019	0,0048	0,0017
20	0,0058	0,0045	0,0046	0,0040
30	0,0062	0,0049	0,0060	0,0053
40	0,0075	0,0059	0,0071	0,0063
50	0,0114	0,0111	0,0098	0,0083
60	0,0240	0.0207	0,0197	0,0191
70	0,0628	0,0512	0,0566	0,0469
80	0,1629	0,1404	0,1432	0,1352

Przeciętne dalsze trwanie życia.

Wiek	Mężczyźni		Kobiety	
	1922	1927	1922	1927
0	47,8	50,7	50.3	53,3
2	57,9	61,3	59,2	62,5
5	56,7	59,6	58,1	60,6
10	52,6	55,3	54,1	56,3
20	44,2	46,7	45,8	47,6
30	36,8	38,8	38,0	39,7
40	29,0	30,7	30,2	31,8
50	21,2	22,7	22,4	23.7
60	14,0	15,5	14,8	16,0
70	8,1	9,3	8,7	9,5
80	4,2	4,7	4,8	4,9

We wzajemnem ustosunkowaniu się prawdopodobieństw zgonu obu płci zaszły pewne przesunięcia: są one obecnie większe dla płci męskiej dla 0 — 11 lat, mniejsze dla 12 — 15, większe dla 16 — 27, mniejsze dla 28 — 42 i większe dla roczników starszych. W 1922 roku natomiast były prawdopodobieństwa zgonu dla mężczyzn większe dla lat 0 — 2, mniejsze dla 13 — 17, większe dla 18 — 30, mniejsze dla 31 — 37 i większe dla roczników starszych. Jednocześnie nadmierna śmiertelność mężczyzn w wieku 17 — 30 lat, ostro zaznaczona w tablicach 1922 roku, uległa znacznemu złagodzeniu: maksymalna różnica prawdopodobieństw zgonu dla mężczyzn i dla kobiet, która wynosiła wówczas dla wieku 20 lat 0,0058 — 0,0046 = 0,0012 czyli 26%, obecnie wynosi (dla 23 lat) 0,0053 — 0,0046 = 0,0007 czyli 16%. Potwierdza to w dużym stopniu (łącznie z przesunięciem się owego

„garbu“ w kierunku starszych roczników) przypuszczenie S t. S z u l c a, że chodzi tu o zjawisko specjalnie powojenne (l c. str. 29).

Poprawa tablic wymieralności w porównaniu z 1922 rokiem jest zupełnie zgodna z ogólną tendencją spadku umieralności, który wyraźnie ujawnił się przy porównaniu z surowemi prawdopodobieństwami zgonu dla lat 1925 i 1926.

Porównanie z tablicą wymieralności 1927 roku dla województw zachodnich dla obu płci razem było utrudnione przez to, iż tamta tablica obejmuje również i Górny Śląsk. Porównanie to wykazuje, iż prawdopodobieństwa zgonu dla roczników 0 — 5 dla województw poznańskiego i pomorskiego są nieco wyższe niż dla województw zachodnich w całości, dla pozostałych zaś roczników — niższe. Wynika stąd, iż prawdopodobieństwa te są dla Górnego Śląska niższe niż dla pozostałych województw Polski Zachodniej dla roczników b. młodych i wyższe dla pozostałych roczników. Przyczyną takiego ustosunkowania się umieralności w rocznikach starszych jest niewątpliwie sposób rekonstrukcji liczb żyjących dla Górnego Śląska, przyjęty przy obliczeniu ogólnych tablic wymieralności 1927 roku. Wobec tego, iż spis 1921 roku nie objął Górnego Śląska, liczby te zostały zrekonstruowane szacunkowo przy pomocy tablic wymieralności 1922 roku. Otrzymano w ten sposób prawdopodobnie zbyt niskie liczby żyjących i zbyt wysokie prawdopodobieństwa zgonu (ob. S. S z u l c, *Ludność Polski według wieku*, str. 18). Z drugiej strony można przypuszczać, że wzajemne ustosunkowanie się umieralności na Górnym Śląsku i w pozostałych 2 województwach również i w rzeczywistości posiada wspomniane cechy — chociażby na mocy analogji ze stosunkami przedwojennemi (ob. np. C. B a l l o d, *Die mittlere Lebensdauer in Stadt und Land*, Leipzig 1899, str. 112 i następne). Obie te przyczyny działają w tym samym kierunku i w zupełności tłumaczą systematyczne różnice prawdopodobieństw zgonu w obu tablicach.

Prowizoryczne wyniki Powszechnego Spisu Ludności 9 XII. 1931 rok (ob. Wiadomości Statystyczne 1932, zeszyt 2) wykazały, że szacunek ludności województw poznańskiego i pomorskiego, na którym oparte zostały tablice niniejsze, był nieco zbyt wysoki. Wobec tego podane w tablicach prawdopodobieństwa zgonu uważać należy za nieco zbyt niskie. Dotyczy to szczególnie roczników od 15 do 80 lat (poniżej 15 lat liczby żyjących oparte na spisie szkolnym 1926 roku i danych o ruchu naturalnym ludności są bardziej dokładne, powyżej zaś 80 lat prawdopodobieństwa zgonu, otrzymane przez ekstrapolację, mają znaczenie wyłącznie orjentacyjne).

Tablice zostały obliczone z inicjatywy Dr. M. Goldmana w Polskim Instytucie Badania Zagadnień Ludnościowych przez p. S. Fogelsona.

Tablice wymieralności woj. poznańskiego i pomorskiego.

A. Płeć męska. 1927.

Wiek x	Żyjący l_x	Zmarli d_x	Prawdopodobieństwo przeżycia 1 roku p_x	Prawdopodobieństwo zgonu q_x	Przeciętne dalsze trwanie życia (pełne) e_x
0	10000	1830	0,8170	0,1830	50,7
1	8170	190	0,9767	0,0233	60,9
2	7980	84	0,9895	0,0105	61,3
3	7896	47	0,9941	0,0059	61,0
4	7849	33	0,9958	0,0042	60.3
5	7816	26	0,9967	0,0033	59,6
6	7790	21	0,9973	0,0027	58,8
7	7769	19	0,9976	0,0024	57,9
8	7750	16	0,9979	0,0021	57,1
9	7734	15	0,9981	0,0019	56,2
10	7719	15	0,9981	0,0019	55,3
11	7704	14	0,9982	0,0018	54,4
12	7690	14	0,9982	0,0018	53,5
13	7676	15	0,9980	0,0020	52,6
14	7661	18	0,9977	0,0023	51,7
15	7643	19	0,9975	0,0025	50,8
16	7624	23	0,9971	0,0029	50,0

Wiek x	Żyjący l_x	Zmarli d_x	Prawdopodobieństwo przeżycia 1 roku p_x	Prawdopodobieństwo zgonu q_x	Przeciętne dalsze trwanie życia (pełne) e_x
17	7601	27	0,9965	0,0035	49,1
18	7574	30	0,9960	0,0040	48.3
19	7544	32	0,9957	0,0042	47,5
20	7512	34	0,9955	0,0045	46,7
21	7478	36	0,9952	0,0048	45,9
22	7442	38	6,9949	0,0051	45,1
23	7404	39	0,9947	0,0053	44,3
24	7365	40	0,9946	0,0054	43,6
25	7325	40	0,9945	0,0055	42,8
26	7285	39	0,9946	0,0054	42,0
27	7246	37	0,9949	0,0051	41,2
28	7209	35	0,9951	0,0049	40,5
29	7174	34	0,9952	0,0048	39,7
30	7140	35	0,9951	0,0049	38,8
31	7105	36	0,9950	0,0050	38,0
32	7069	37	0,9948	0,0052	37,2
33	7032	37	0,9947	0,0053	36,4
34	6995	38	0,9946	0,0054	35,6
35	6957	38	0,9945	0,0055	34,8
36	6919	38	0,9945	0,0055	34,0
37	6880	38	0,9945	0,0055	33,2
38	6842	38	0,9945	0,0055	32,4
39	6804	39	0,9943	0,0057	31,5
40	6765	40	0,9941	0,0059	30,7
41	6725	41	0,9939	0,0061	29,9
42	6684	43	0,9936	0,0064	29,1
43	6641	44	0,9933	0,0067	28,3
44	6597	47	0,9929	0,0071	27,4

Wiek x	Żyjący l_x	Zmarli d_x	Prawdopodobieństwo przeżycia 1 roku p_x	Prawdopodobieństwo zgonu q_x	Przeciętne dalsze trwanie życia (pełne) e_x
45	6550	50	0,9924	0,0076	26,6
46	6500	53	0,9918	0,0082	25,8
47	6447	58	0,9910	0,0090	25,0
48	6389	62	0,9903	0,0097	24,3
49	6327	66	0,9896	0,0104	23,5
50	6261	69	0,9889	0,0111	22,7
51	6192	74	0,9881	0,0119	22,0
52	6118	77	0,9874	0,0126	21,2
53	6041	81	0.9866	0,0134	20,5
54	5960	85	0,9857	0,0143	19,8
55	5875	89	0,9849	0,0151	19,1
56	5786	93	0,9840	0,0160	18,3
57	5693	96	0,9831	0,0169	17,6
58	5597	100	0,9821	0,0179	16,9
59	5497	106	0,9808	0,0192	16,2
60	5391	112	0,9793	0,0207	15,5
61	5279	117	0,9779	0,0221	14,9
62	5162	120	0,9768	0,0232	14,2
63	5042	125	0,9752	0,0248	13,5
64	4917	134	0,9727	0,0273	12,8
65	4783	144	0,9698	0,0302	12,2
66	4639	156	0,9663	0,0337	11,6
67	4483	178	0,9604	0,0396	10,9
68	4305	180	0,9581	0,0419	10,4
69	4125	191	0,9536	0,0464	9,8
70	3934	201	0,9488	0,0512	9,3
71	3733	208	0,9442	0,0558	8,7
72	3525	213	0,9396	0,0604	8,2

Wiek x	Żyjący l_x	Zmarli d_x	Prawdopodobieństwo przeżycia 1 roku p_x	Prawdopodobieństwo zgonu q_x	Przeciętne dalsze trwanie życia (pełne) e_x
73	3312	219	0,9340	0,0660	7,7
74	3093	222	0,9281	0,0719	7,2
75	2871	230	0,9199	0,0801	6,7
76	2641	237	0,9102	0,0898	6.3
77	2404	244	0,8986	0,1014	5,8
78	2160	245	0,8864	0,1136	5,5
79	1915	241	0,8740	0,1260	5,1
80	1674	235	0,8596	0,1404	4,7
81	1439	222	0,8455	0,1545	4,4
82	1217	202	0,8339	0,1661	4,2
83	1015	179	0,8232	0,1768	3,9
84	836	161	0.8072	0,1928	3,6
85	675	142	0,7900	0,2100	3,3
86	533	122	0,7716	0,2284	3,1
87	411	102	0,7517	0,2483	2,9
88	309	83	0,7305	0,2695	2,7
89	226	66	0,7078	0,2922	2,5
90	160	51	0,6836	0,3164	2,3
91	109	37	0,6580	0,3420	2,1
92	72	27	0,6310	0,3690	1,9
93	45	18	0,6023	0,3977	1,8
94	27	12	0,5725	0,4275	1,6
95	15	7	0,5413	0,4587	1,5
96	8	4	0,5090	0,4910	1,4
97	4	2	0,4756	0,5240	1,3
98	2	1	0,4414	0,5586	1,0
99	1	—	0,4065	0,5935	—
100	—	—	0,3714	0,6286	—

Tablice wymieralności woj. poznańskiego i pomorskiego.

B. Płeć żeńska. 1927.

Wiek x	Żyjący l_x	Zmarli d_x	Prawdopodobieństwo przeżycia 1 roku p_x	Prawdopodobieństwo zgonu q_x	Przeciętne dalsze trwanie życia (pełne) e_x
0	10000	1551	0,8449	0,1551	53,3
1	8449	193	0,9772	0,0228	62,0
2	8256	73	0,9911	0,0089	62,5
3	8183	46	0,9944	0,0056	62,0
4	8137	33	0,9960	0,0040	61,4
5	8104	25	0,9969	0,0031	60,6
6	8079	20	0,9975	0,0025	59,8
7	8059	17	0,9979	0,0021	59,0
8	8042	15	0,9981	0,0019	58,1
9	8027	14	0,9982	0,0018	57,2
10	8013	14	0,9983	0,0017	56,3
11	7999	14	0,9983	0,0017	55,4
12	7985	15	0,9981	0,0019	54,5
13	7970	17	0,9979	0,0021	53,6
14	7953	18	0,9977	0,0023	52,7
15	7935	20	0,9975	0,0025	51,8
16	7915	22	0,9972	0,0028	51,0
17	7893	24	0,9969	0.0031	50,1
18	7869	28	0,9965	0,0035	49,2
19	7841	29	0,9963	0,0037	48,4
20	7812	31	0,9960	0,0040	47,6
21	7781	33	0,9958	0,0042	46,8
22	7748	34	0,9956	0,0044	46,0
23	7714	35	0,9954	0,0046	45,2
24	7679	37	0,9952	0,0048	44,4

Wiek x	Żyjący l_x	Zmarli d_x	Prawdopodobieństwo przeżycia 1 roku p_x	Prawdopodobieństwo zgonu q_x	Przeciętne dalsze trwanie życia (pełne) e_x
25	7642	38	0,9950	0,0050	43,6
26	7604	38	0,9950	0,0050	42,8
27	7566	39	0,9949	0,0051	42,0
28	7527	38	0,9949	0,0051	41,2
29	7489	39	0,9948	0,0052	40,4
30	7450	39	0,9947	0,0053	39,7
31	7411	41	0,9945	0,0054	38,9
32	7370	42	0,9943	0,0057	38,1
33	7328	43	0,9942	0,0058	37,3
34	7285	44	0,9940	0,0060	36,5
35	7241	43	0,9940	0,0060	35,7
36	7198	44	0,9939	0,0061	34,9
37	7154	44	0,9939	0,0061	34,1
38	7110	44	0,9938	0,0062	33,4
39	7066	45	0.9937	0,0063	32,6
40	7021	44	0,9937	0,0063	31,8
41	6977	45	0,9936	0,0064	31,0
42	6932	45	0.9935	0,0065	30,2
43	6887	46	0,9933	0,0067	29,4
44	6841	47	0,9932	0,0068	28,5
45	6794	48	0 9930	0.0070	27,7
46	6746	48	0.9929	0,0071	26,9
47	6698	48	0,9928	0,0072	26,1
48	6650	49	0,9926	0,0074	25,3
49	6601	51	0,9923	0,0077	24.5
50	6550	54	0,9917	0,0083	23,7
51	6496	57	0,9912	0,0088	22,9
52	6439	60	0,9907	0,0093	22,1

Wiek x	Żyjący l_x	Zmarli d_x	Prawdopodobieństwo przeżycia 1 roku p_x	Prawdopodobieństwo zgonu q_x	Przeciętne dalsze trwanie życia (pełne) e_x
53	6379	63	0,9901	0,0099	21,3
54	6316	68	0,9892	0,0108	20,5
55	6248	74	0,9882	0,0118	19,7
56	6174	80	0,9870	0,0130	18,9
57	6094	89	0,9854	0,0146	18,2
58	6005	97	0,9839	0,0161	17,4
59	5908	104	0,9824	0,0176	16,7
60	5804	111	0,9809	0,0191	16,0
61	5693	117	0,9795	0,0205	15,3
62	5576	120	0,9784	0,0216	14,6
63	5456	125	0,9770	0,0230	13,9
64	5331	135	0,9746	0,0254	13,2
65	5196	146	0,9719	0,0281	12,6
66	5050	157	0,9690	0,0310	11,9
67	4893	166	0,9660	0,0340	11,3
68	4727	178	0,9624	0,0376	10,7
69	4549	191	0,9580	0,0420	10,1
70	4358	204	0,9531	0,0469	9,5
71	4154	216	0,9479	0,0521	8,9
72	3938	226	0,9425	0,0575	8,4
73	3712	236	0,9365	0,0635	7,9
74	3476	245	0,9294	0,0706	7,4
75	3231	253	0,9217	0,0783	6,9
76	2978	259	0,9131	0,0869	6,4
77	2719	263	0,9033	0,0967	6,0
78	2456	272	0,8892	0,1108	5,6
79	2184	264	0,8791	0,1209	5,2
80	1920	260	0,8648	0,1352	4,9

Wiek x	Żyjący l_x	Zmarli d_x	Prawdopodobieństwo przeżycia 1 roku p_x	Prawdopodobieństwo zgonu q_x	Przeciętne dalsze trwanie życia (pełne) e_x
81	1660	250	0,8494	0,1506	4,6
82	1410	229	0,8379	0,1621	4,3
83	1181	209	0,8232	0,1768	4,0
84	972	185	0,8097	0,1903	3,8
85	787	161	0,7953	0,2047	3,5
86	626	138	0,7799	0,2201	3,3
87	488	115	0,7636	0,2364	3,1
88	373	95	0,7462	0,2538	2,9
89	278	76	0,7279	0,2721	2,7
90	202	59	0,7084	0,2916	2,5
91	143	45	0,6879	0,3121	2,3
92	98	33	0,6664	0,3336	2,2
93	65	23	0,6437	0,3563	2,1
94	42	16	0,6200	0,3800	1,9
95	26	11	0,5953	0,4047	1,8
96	15	6	0,5696	0,4304	1,7
97	9	4	0,5429	0,4571	1,5
98	5	2	0,5154	0,4846	1,3
99	3	2	0,4871	0,5129	0,8
100	1	1	0,4581	0,5419	—

Dokończenie.

H. BERLINER.

O obliczeniu taryfy należności za nabycie lat poprzedniej służby przez ubezpieczonych pracowników umysłowych.

Wyrażeniu $R_2(x, u)$ można jeszcze dać inną postać. Według (105) i (127) jest mianowicie dla $t=3$ (kiedy więc: $\beta=\alpha$):

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)+\alpha-\varepsilon, \tag{201}$$

a zatem według (110), (106) i (16[a]), zważając, że $[u+1] \leqq 5$ dla $u<5$, a $\varepsilon=0$ dla $u=5$ będziemy mieli:

$$n_6(x, 3, u) = n_4\left[[x], 3, [u]+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\right], \tag{202}$$

$$n_7(x, 3, u) = n_7\left[[x], 3, [u]+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\right] = [x] - [u] - \frac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)+37 = n_4\left[[x]-[u]-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)+30;\ 3;\ 0\right]. \tag{203}$$

A więc według (111) i (112) — zważając, że dla $t=3$ i $u=0$ jest $\varepsilon=0$ i $\gamma=\alpha$ będzie:

$$R_2(x, u) = 0{,}01\,(1+i)^{-2}\left\{\frac{1}{4}\left(1-\frac{x-63}{|x-63|}\right)_{+0}\left(1-\frac{x-u-58}{|x-u-58|}\right)_{+0}\left[\delta(1-\delta)\,\overline{D}_{n_4\left[[x],\,3,[u]+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\right]} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{x-u-28}{|x-u-28|}\right)\gamma(1-\gamma)\,\overline{D}_{n_7\left[[x],\,3,\,[u]+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\right]}\right]\right. \tag{204}$$

$$- \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x-58}{|x-58|}\right)\alpha(1-\alpha)\left[\overline{D}_{n_4}([x];3;0) - \frac{1}{2}\left(1\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{x-28}{|x-28|}\right)\overline{D}_{n_7}([x];3;0)\right]\right\}.$$

Znaczek $+0$ przy $\left(1 - \frac{x-58}{|x-58|}\right)$ w (204) jest zbytecz-ny, gdyż dla $x = 58$ jest $\alpha = 0$.

Zakładając teraz:

$$(205)\quad \left|\begin{aligned} &\frac{R_1([x],[u])}{\overline{D}^{aa}_{[x+2]}} = T_1([x],[u]),\\ &0{,}01(1+i)^{-2}\,\frac{\overline{D}_{n_4}([x],3,[u])}{D^{aa}_{[x+2]}} = T_2([x],[u]),\\ &0{,}01(1+i)^{-2}\,\frac{\overline{D}_{n_7}([x],3,[u])}{D^{aa}_{[x+2]}} = T_3([x],[u]),\end{aligned}\right.$$

otrzymujemy z (200) i (103):

$$(206)\quad \frac{R(x,u)}{D^{aa}_{x+2}} = -\left[1 - \alpha\left(1 - \frac{D^{aa}_{[x+3]}}{\overline{D}^{aa}_{[x+2]}}\right)\right]^{-1}\left[\left[\frac{1}{2}\left[\left(1\right.\right.\right.\right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\varepsilon(1-\alpha) + \left(1 + \frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\alpha(1-\varepsilon)\Big|\, T_1([x],[u])$$

$$+ \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x-63}{|x-63|}\right)_{+0}\left(1 - \frac{x-u-58}{|x-u-58|}\right)_{+0}\Big\{\delta(1$$

$$-\delta)\, T_2\left[[x],[u] + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\right] - \frac{1}{2}\left(1\right.$$

$$\left. - \frac{x-u-28}{|x-u-28|}\right)\gamma(1-\gamma)\; T_3\left[[x],[u] + \frac{1}{2}\left(1\right.\right.$$

$$+\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\Big)\Big]\Big\}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x-58}{|x-58|}\right)\alpha(1-\alpha)\Big[T_2([x],\ 0)$$

$$-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x-28}{|x-28|}\right)T_3([x],0)\Big]\Big]\Big].$$

Wzór (206) pozwala obliczyć $\frac{R(x,\ u)}{D^{aa}_{x+2}}$, jeżeli będą zestawione tablice wartości $T_1([x],[u])$, $T_2([x],[u])$ i $T_3([x],[u])$ w granicach $21 \leqq [x] \leqq 62$, $0 \leqq [u] \leqq 35$ i $21 \leqq [x]-[u] \leqq 58$ wzgl. (dla $T_3([x],\ [u])$) $21 \leqq [x]-[u] \leqq 28$, gdyż według (126) musi być: $[x]-[u] \geqq 21$, a według (205), (198) i (204) jest $T_1([x],\ [u])=0$ dla $[x]-[u]>58$, $R_2(x,\ u)=0$ dla $x \geqq 63$ lub dla $x-u \geqq 58$ i $T_3([x],\ [u]$ pomnożony jest przez $\frac{1}{2}\left(1-\frac{x-u-28}{|x-u-28|}\right)$.

Tablice te można bardzo łatwo zestawić. Albowiem według (16[a]), (203) i (198) jest:

(207) $$\overline{D}_{n,([x],3,[u])}=\overline{D}_{n,([x]-[u];3;0)}$$

dla $$u \leqq 5,$$

(208) $$\overline{D}_{n,([x],3,[u])}=\overline{D}_{n,([x]-5;3;0)}$$

dla $$u \geqq 5,$$

(209) $$\overline{D}_{n,([x],3,[u])}=\overline{D}_{n,([x]-[u];3;0)}=\overline{D}_{n,([x]-[u]+30;3;0)},$$

$$(210) \qquad R_1([x],[u]) = R_1([x]-[u],0) - \frac{1}{2}\Bigg(1$$

$$+ \frac{[u]-4}{|[u]-4|}\Bigg)\left(\overline{D}_{[x]-[u]+6} + \overline{D}_{[x]-[u]+7}\right)$$

dla $[x] \leqq 62.$

Wystarczy więc według (205) obliczyć $0{,}01\,(1+i)^{-2}\,D_{n,(\lambda;3;0)}$, $R_1(\lambda, 0)$ i $R_1(\lambda, 5)$ dla $21 \leqq \lambda \leqq 58$, gdzie λ jest liczbą całkowitą, zapomocą (16^e) i następujących, wynikających z (198) wzorów:

$$(211) \quad R_1(\lambda, 0) = 0{,}01\,(1+i)^{-2}\Big[\,8\,\big(D^{aa\,(12)}_{\lambda+36} - D^{aa\,(12)}_{\lambda+37}\big)$$

$$+ \overline{D}_{\lambda+6} + \overline{D}_{\lambda+7} - \big(\overline{D}_{\lambda+36} + \overline{D}_{\lambda+37}\big)\Big]$$

dla $21 \leqq \lambda \leqq 22,$

$$(212) \quad R_1(23;0) = 0{,}01\,(1+i)^{-2}\Big[8\,D^{aa\,(12)}_{59} - \big(108\,D^{aa\,(12)}_{60}$$

$$+ 4\,D^{aa}_{60,(z)}\big) + \overline{D}_{29} + \overline{D}_{30} - \big(\overline{D}_{59} + \overline{D}_{60}\big)\Big],$$

$$(213) \quad R_1(\lambda, 0) = 0{,}01\,(1+i)^{-2}\Big[108\,\big(D^{aa\,(12)}_{\lambda+36} - D^{aa\,(12)}_{\lambda+37}\big)$$

$$+ 4\,\big(D^{aa}_{\lambda+36,(z)} - D^{aa}_{\lambda+37,(z)}\big) + \overline{D}_{\lambda+6} + \overline{D}_{\lambda+7} - \big(\overline{D}_{\lambda+36} + \overline{D}_{\lambda+37}\big)\Big]$$

dla $24 \leqq \lambda \leqq 27,$

$$(214) \quad R_1(28;0) = 0{,}01\,(1+i)^{-2}\Big[108\,D^{aa\,(12)}_{64} + 4\,D^{aa}_{64,(z)}$$

$$+ \overline{D}_{34} + \overline{D}_{35} - \big(2\,N^{aa\,(12)}_{65} + \overline{N}_{64} + \overline{N}_{65}\big)\Big],$$

(215) $$R_1\ (\lambda,\ 0) = 0{,}01\ (1+i)^{-2}\ (\overline{D}_{\lambda+6} + \overline{D}_{\lambda+7})$$

dla $$29 \leqq \lambda \leqq 57,$$

(216) $$R_1\ (58;\ 0) = 0{,}01\ (1+i)^{-2}\ (2\ N_{65}^{aa\ (12)} + \overline{N}_{64} + \overline{N}_{65}),$$

(217) $$R_1\ (\lambda,\ 0) = 0$$

dla $$\lambda \geqq 59\ \text{i}$$

(218) $$R_1\ (\lambda,\ 5) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda - 62}{|\lambda - 62|}\right)\Big[R_1\ (\lambda - 5;\ 0)$$

$$- 0{,}01\ (1+i)^{-2}\ (\overline{D}_{\lambda+1} + \overline{D}_{\lambda+2})\Big].$$

Przez dzielenie $R_1\ (\lambda,\ 0)$ albo $R_1\ (\lambda,\ 5)$ przez $D_{[x+2]}^{aa}$, gdzie $\lambda \leqq [x] \leqq 62$, otrzymujemy wartości dla $T_1\ ([x],\ [u])$, gdzie $[u] = [x] - \lambda$ wzgl. $[u] = [x] - \lambda + 5$, gdyż według (210) i (205) jest:

(219) $$\frac{R_1\ (\lambda,\ 0)}{D_{[x+2]}^{aa}} = \frac{R_1\ ([x],\ [x] - \lambda)}{D_{[x+2]}^{aa}} = T_1([x],\ [x] - \lambda)$$

dla $$0 \leqq [x] - \lambda \leqq 5$$

i

(220) $$\frac{R_1\ (\lambda,\ 5)}{D_{[x+2]}^{aa}} = \frac{R_1\ ([x],\ [x] - \lambda + 5)}{D_{[x+2]}^{aa}} = T_1\ ([x],\ [x] - \lambda + 5)$$

dla $$0 \leqq [x] - \lambda \leqq 30.$$

Tak samo jest według (205) i (207) — (209):

$$(221) \qquad 0{,}01\,(1+i)^{-2}\,\frac{\overline{D}_{n_4\,(\lambda;\;3;\;0)}}{D^{aa}_{[x+2]}}$$

$$= 0{,}01\,(1+i)^{-2}\,\frac{\overline{D}_{n_4\,([x],\;3,\;[x]-\lambda)}}{D^{aa}_{[x+2]}} = T_2\,([x],\;[x]-\lambda)$$

dla $$0 \leqq [x]-\lambda \leqq 5\,,$$

$$(222) \qquad 0{,}01\;(1+i)^{-2}\,\frac{\overline{D}_{n_4\,(\lambda;\;3;\;0)}}{D^{aa}_{\lambda+7}}$$

$$= 0{,}01\,(1+i)^{-2}\,\frac{\overline{D}_{n_4\,(\lambda+5;\;3;\;[u])}}{D^{aa}_{\lambda+7}} = T_2\,(\lambda+5,\;[u])$$

dla $$5 \leqq [u] \leqq 35,\text{ a}$$

$$(223) \qquad 0{,}01\,(1+i)^{-2}\,\frac{\overline{D}_{n_4\,(\lambda+30;\;3;\;0)}}{D^{aa}_{[x+2]}} = 0{,}01\,(1+i)^{-2}\,\frac{\overline{D}_{n_7\,(\lambda;\;3;\;0)}}{D^{aa}_{[x+2]}}$$

$$= 0{,}01\;(1+i)^{-2}\,\frac{\overline{D}_{n_7([x],\,3,\,[x]-\lambda)}}{D^{aa}_{[x+2]}} = T_3\,([x],\;[x]-\lambda)$$

dla $$0 \leqq [x]-\lambda \leqq 35.$$

W razie, gdy $x = [x]$, kiedy więc $\alpha = 0$ i według (201) $\gamma = 1-\varepsilon$, lub gdy $u = [u]$, kiedy więc $\varepsilon = 0$, a według (201) i (106) $\delta = \gamma = \alpha$ (ponieważ $t = 3$, a zatem $\beta = \alpha$), (206) przechodzi według (204) i (106) na

$$(224) \qquad \frac{R([x],\,u)}{D^{aa}_{[x+2]}} = -\,\frac{R_2([x],\,u)}{D^{aa}_{[x+2]}} = -\,\frac{1}{8}\,\Big(1$$

$$- \frac{[x]-62}{|[x]-62|}\Big)\Big(1-\frac{[x]-u-58}{|[x]-u-58|}\Big)\varepsilon(1-\varepsilon)\Big[\Big(1$$

$$-\frac{u-5}{|u-5|}\Big)T_2([x],[u+1])-\frac{1}{2}\Big(1$$

$$-\frac{[x]-u-28}{|[x]-u-28|}\Big)\;T_3([x],[u+1])\Big],$$

$$(225)\qquad \frac{R(x,[u])}{D^{aa}_{x+2}}=-\frac{R_2(x,[u])}{D^{aa}_{x+2}}=-\Big[1-\alpha\Big(1$$

$$-\frac{D^{aa}_{[x+3]}}{D^{aa}_{[x+2]}}\Big)\Big]^{-1}\frac{1}{4}\Big(1-\frac{x-63}{|x-63|}\Big)\Big(1-\frac{x-[u]-58}{|x-[u]-58|}\Big)\alpha(1$$

$$-\alpha)\Big\{T_2([x],[u])-\frac{1}{2}\Big(1-\frac{x-[u]-28}{|x-[u]-28|}\Big)T_3([x],[u])$$

$$-\frac{1}{2}\Big(1-\frac{x-58}{|x-58|}\Big)\Big[T_2([x],0)-\frac{1}{2}\Big(1-\frac{x-28}{|x-28|}\Big)T_3([x],0)\Big]\Big\}.$$

W (224) i (225) opuszczono znaczki $+0$, gdyż cała prawa strona (224) albo (225) znika wraz z ε albo z α, a $\varepsilon=0$, kiedy $[x]-u$ równa się liczbie całkowitej, i $\alpha=0$, kiedy x albo $x-[u]$ równa się liczbie całkowitej.

18. Obliczenie taryfy $P(x, 3, u)$ zapomocą wzorów (191) i (206) daje wartości z dokładnością zupełnie wystarczającą, gdyż dokładność ta zależna jest jedynie od dokładności interpolacji linjowej, zastosowanej w (103). Ale do obliczenia tego potrzebne są prócz taryfy $P(x, 3, u)$ dla całkowitych wartości x i u oraz tablicy spółczynników

(Nr. 9), jeszcze 3 tablice dla $T_1([x], [u])$, $T_2([x], [u])$ i $T_3([x], [u])$, a z 5-ciu wartościami tych tablic, mianowicie:

$$T_1([x], [u]),\ T_2\left[[x], [u] + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon - \alpha}{|\varepsilon - \alpha|}\right)\right],\ T_2([x], 0),\ T_3\left[[x], [u] + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon - \alpha}{|\varepsilon - \alpha|}\right)\right] \text{ i } T_3([x], 0)$$

należy wykonać wskazane w (206) działania.

Jeżeli jednak zadowolimy się wartościami $P(x, 3, u)$ mniej dokładnemi w razie, gdy x i u nie są liczbami całkowitemi, to można w przypadkach, w których $\frac{R_2(x, u)}{D^{aa}_{x+2}}$ lub $\frac{R(x, u)}{D^{aa}_{x+2}}$ nie przekracza w stosunku do $P(x, 3, u)$ pewnej granicy, osiągnąć oszczędność pracy przy obliczeniach $P(x, 3, u)$ zapomocą (191) przez nieuwzględnienie $\frac{R_2(x, u)}{D^{aa}_{x+2}}$ albo $\frac{R(x, u)}{D^{aa}_{x+2}}$.

W tym celu ustalimy granice dla wartości $\frac{R_2(x, u)}{D^{aa}_{x+2}}$ i $\frac{R(x, u)}{D^{aa}_{x+2}}$ zapomocą tablic dla D^{aa}_x, $N^{aa\,(12)}_x$, N^{ai}_x, $N^{a}_{x\,(y)}$, ${}^{18}N^{a}_{x\,(z)}$ i ${}^{18}N^{aa}_{x\,(z)}$, które zostały użyte przy ustaleniu wysokości obowiązującej według wspomnianego na wstępie (Nr. 1) rozporządzenia składki ubezpieczeniowej pracowników umysłowych i których jedną z podstaw obliczeniowych jest 4,5% jako techniczna stopa procentowa ($i = 0{,}045$) (pozostałe podstawy obliczeniowe nie są mi znane).

Przedewszystkiem wynika z (204):

$$(226) \qquad |R_2(x, u)| \leqq 0{,}01\,(1+i)^{-2}\,\frac{1}{4}\,(\overline{D}_{\mu} + \overline{D}_{\mu'} - \overline{D}_{\overline{\mu}})$$

dla $x - u < 28$ i $x < 58$,

$$(227) \qquad |R_2\,(x,\,u)| \leqq 0{,}01\,(1+i)^{-2}\,\frac{1}{4}\,\overline{D}_{\mu}$$

dla $\qquad x - u \geqq 28$ lub $x \geqq 58,$

gdzie $\overline{D}_{\mu}$ oznacza największą i $\overline{D}_{\overline{\mu}}$ najmniejszą z wartości $\overline{D}_{28}$, $\overline{D}_{29}$, ... $\overline{D}_{64}$ i $\overline{D}_{65}$, a $\overline{D}_{\mu'}$, najwiekszą z $\overline{D}_{58}$, $\overline{D}_{59}$ ... $\overline{D}_{64}$ i $\overline{D}_{65}$, gdyż, jak łatwo się przekonać, musi być:

$$(228) \qquad 0 \leqq \alpha\,(1-\alpha) \leqq \frac{1}{4},\quad 0 \leqq \gamma\,(1-\gamma) \leqq \frac{1}{4}$$

w przedziałach $0 \leqq \alpha < 1$ i $0 \leqq \gamma < 1$, a dla $t = 3$ jest $\delta = \alpha$ albo $\delta = \gamma$. Z (226) i (227) otrzymujemy teraz:

$$(229) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{|R_2\,(x,\,u)|}{D^{aa}_{x+2}} < \dfrac{0{,}01\,(1+i)^{-2}}{D^{aa}_{[u]+31}}\,\dfrac{1}{4}\,(\overline{D}_{\mu} + \overline{D}_{\mu'} - \overline{D}_{\overline{\mu}}), \\[2ex] \dfrac{|R_2\,(x,\,u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq \dfrac{0{,}01\,(1+i)^{-2}}{D^{aa}_{60}}\,\dfrac{1}{4}\,(\overline{D}_{\mu} + \overline{D}_{\mu'} - \overline{D}_{\overline{\mu}}) \end{array} \right.$$

dla $\qquad x - u < 28$ i $x < 58$, a

$$(230) \quad \frac{|R_2\,(x,\,u)|}{D^{aa}_{x+2}} < \frac{0{,}01\,(1+i)^{-2}}{D^{aa}_{[x+3]}}\,\frac{1}{4}\,\overline{D}_{\mu} \leqq \frac{0{,}01\,(1+i)^{-2}}{D^{aa}_{65}}\,\frac{1}{4}\,\overline{D}_{\mu}$$

dla $x - u \geqq 28$ lub $x \geqq 58$, gdyż D^{aa}_{x} maleje ze wzrostem x, a $x + 2 < [x + 3] \leqq 65$ (ponieważ $x < 63$) i dla $x - u < 28$ jest: $x + 2 < [u] + 31$. Lecz według wymienionych tablic jest:

$$(231) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{D}_{\mu} = \overline{D}_{52} = 2390{,}9;\ \overline{D}_{\mu'} = \overline{D}_{58} = 2254{,}5; \\[2ex] \overline{D}_{\overline{\mu}} = \overline{D}_{28} = 1497{,}2;\ D_{60} = 3068{,}7;\ D^{aa}_{65} = 1453{,}2; \end{array} \right.$$

a zatem według (226), (227), (229) i (230), zważając, że techniczna stopa procentowa tych tablic $i = 0{,}045$:

$$(232) \qquad \frac{|R_2(x, u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq \frac{7{,}21}{D^{aa}_{x+2}} < \frac{7{,}21}{D^{aa}_{[u+31]}}, \quad \frac{|R_2(x, u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}00235$$

dla $\qquad x - u < 28$ i $x < 58$, a

$$(233) \qquad \frac{|R_2(x, u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq \frac{5{,}47}{D^{aa}_{x+3}} < \frac{5{,}47}{D^{aa}_{[x+3]}} \leqq 0{,}00377$$

dla $\qquad x - u \geqq 28$ lub $x \geqq 58$.

Następnie jest:

$$(234) \qquad P(x, 3, [u]) \leqq P(x, 3, u) \leqq P(x, 3, [u+1]),$$

a więc według (18):

$$(235) \qquad F(x, 3, [u]) \leqq F(x, 3, u) \leqq F(x, 3, [u+1]),$$

gdyż jak wynika z samego określenia $P(x, t, u)$ jako należność za nabycie lat poprzedniej służby (Nr. 2), $P(x, t, u)$ nie może maleć, gdy liczba lat nabywanych u wzrasta.

Dalej jest przy obliczeniu $F([x], 3, [u])$ zapomocą wymienionych tablic:

$$(236) \qquad |F([x], 3, [u]) - F([x+1], 3, [u])| \geqq 32{,}66$$

dla $23 \leqq [x] \leqq 62$, $1 \leqq [u] \leqq 35$ i $21 \leqq [x] - [u] \leqq 57$, a

$$(237) \qquad F(22; 3; 1) - F(23; 3; 1) = -15{,}71;$$

Lecz według (225), (221) — (223), (226) i (231) jest:

$$(238) \qquad |R_2(x, [u])| \leqq 28{,}83\, \alpha\, (1 - \alpha),$$

(239) $$R_2\,(22+\alpha,\ 1) = -\,1{,}10\ \alpha\,(1-\alpha),$$

gdyż według wspomnianych tablic jest:

(240) $$\overline{D}_{29} = 1593{,}7;\ \overline{D}_{59} = 2230{,}8;$$

a zatem:

(241) $$\alpha\,|F\,([x],\ 3,\ [u]) - F\,([x+1],\ 3,\ [u])| > |R_2\,(x,[u])|$$

i

(242) $$(1-\alpha)\,|F([x],\ 3,\ [u]) - F([x+1],\ 3,\ [u])| > |R_2\,(x,\ [u])|$$

dla

(243) $$22 \leqq [x] \leqq 62,\ 1 \leqq [u] \leqq 35 \text{ i } 21 \leqq [x] - [u] \leqq 57.$$

Oznaczając teraz $F([x],\ 3,\ [u])$ albo $F([x+1], 3, [u])$ przez $F([\overline{x}],\ 3,\ [u])$, a α albo $\alpha+1$ przez $\overline{\alpha}$, zależnie od tego, czy wartość $F([x],\ 3,\ [u])$ jest mniejsza albo większa niż $F([x+1], 3, [u])$, będziemy mieli według (194) i (225):

(244) $$F(x,\ 3,\ [u]) = F([\overline{x}],\ 3,\ [u]) + \overline{\alpha}\,|F([x],\ 3,\ [u]) - F([x+1],\ 3,\ [u])| - R_2\,x,\ ([u]),$$

więc według (241) i (242):

(245) $$F(x,\ 3,\ [u]) \geqq F([\overline{x}],\ 3,\ [u])$$

i tem bardziej według (235):

(246) $$F(x,\ 3,\ u) \geqq F([\overline{x}],\ 3,\ [u])$$

dla x i u które czynią zadość (243).

Z (246) wynika teraz:

(247) $$\frac{|R_2(x, u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq \frac{|R_2(x, u)|}{F([\overline{x}], 3, [u])} P(x, 3, u),$$

gdyż według (18) jest:

$$\frac{R_2(x, u)}{D^{aa}_{x+2}} = \frac{R_2(x, u)}{D^{aa}_{x+2}\ P(x, 3, u)} P(x, 3, u) = \frac{R_2(x, u)}{F(x, 3, u)} P(x, 3, u).$$

Według (232) i (233) mamy więc:

(248) $$\frac{|R_2(x, u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq \frac{7,21\ P(x, 3, u)}{F([\overline{x}], 3, [u])}$$

dla $$x - u < 28 \text{ i } x < 58,$$

(249) $$\frac{|R_2(x, u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq \frac{5,47\ P(x, 3, u)}{F([\overline{x}], 3, [u])}$$

dla $$28 \leqq x - u \leqq 57 \text{ lub } 58 \leqq x < 63.$$

Lecz przy obliczeniu $F([x], 3, [u])$ i $\overline{D}_x$ zapomocą wymienionych tablic jest:

(250) $$F([x], 3, [u]) > F([x+1], 3, [u])$$

dla $$23 \leqq [x] - [u] \leqq 57;$$

$$
(251)\left\{
\begin{array}{ll}
 & F([x+1], 3, [u]) \geqq F(30; 3; 1) = 1422{,}97 \\
\text{dla} & [x]-[u] \leqq 28 \text{ i } [u] \geqq 1; \\
 & F([x+1], 3, [u]) \geqq F(51; 3; 1) = 547{,}86 \\
\text{dla} & [x]-[u] \leqq 49 \text{ i } [u] \geqq 1; \\
 & F([x+1], 3, [u]) \geqq F(57; 3; 1) = 312{,}13 \\
\text{dla} & [x]-[u] \leqq 55 \text{ i } [u] \geqq 1; \\
 & F([x+1]\ 3, [u]) \geqq F(63; 3; 6) = 263{,}90 \\
\text{dla} & [x]-[u] = 56 \text{ i } [u] \geqq 1; \\
 & F([x+1], 3, [u]) \geqq F(57; 3; 2) = 659{,}77 \\
\text{dla} & [x]-[u] \leqq 54,\ [x] \leqq 62 \text{ i } [u] \geqq 2; \\
 & F([x+1], 3, [u]) \geqq F(63; 3; 7) = 527{,}79 \\
\text{dla} & [x]-[u] = 55,\ [x] \leqq 62 \text{ i } [u] \geqq 2; \\
 & F([x+1], 3, [u]) \geqq F(34; 3; 5) = 6714{,}02 \\
\text{dla} & [x]-[u] \leqq 28 \text{ i } [u] \geqq 5; \\
 & F([x+1], 3, [u]) \geqq F(61; 3; 7) = 1250{,}04 \\
\text{dla} & [x]-[u] \leqq 53,\ [x] \leqq 60 \text{ i } [u] \geqq 5; \\
 & F([x+1], 3, [u]) \geqq F(63; 3; 9) = 1055{,}58 \\
\text{dla} & [x]-[u] \leqq 53,\ 61 \leqq [x] \leqq 62 \text{ i } [u] \geqq 5;
\end{array}
\right.
$$

$$
(252)\quad \overline{D}_{61} = 2110{,}1;\ \overline{D}_{62} = 2011,3;\ \overline{D}_{63} = 1868{,}4 > \overline{D}_{64} > \overline{D}_{65};
$$

a zatem:

$$
(253)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{|R_2(x,u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}00507\, P(x,3,u), \text{ o ile } [x]-[u] \leqq 28 \text{ i } [u] \geqq 1;\\
&\frac{|R_2(x,u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}00999\, P(x,3\,u), \text{ o ile } [x]-[u] \leqq 49 \text{ i } [u] \geqq 1;\\
&\frac{|R_2(x,u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}01752\, P(x,3,u), \text{ o ile } [x]-[u] \leqq 55 \text{ i } [u] \geqq 1;\\
&\frac{|R_2(x,u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}00829\, P(x,3,u), \text{ o ile } [x]-[u] \leqq 54 \text{ i } [u] \geqq 2;\\
&\frac{|R_2(x,u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}00107\, P(x,3,u), \text{ o ile } [x]-[u] \leqq 28 \text{ i } [u] \geqq 5;\\
&\frac{|R_2(x,u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}00438\, P(x,3,u), \text{ o ile } [x]-[u] \leqq 53,\\
&\qquad\qquad [x] \leqq 60 \text{ i } [u] \geqq 5,
\end{aligned}
\right.
$$

i, zważając, że według (204), (16^a) i (252) jest:

$|R_2(x,u)| \leqq \frac{1}{4}\, 0{,}0091573\, \overline{D}_{62}$ dla $[x]-[u]=56$ i $[u] \leqq 5$,

$|R_2(x,u)| \leqq \frac{1}{4}\, 0{,}0091573\, \overline{D}_{61}$ dla $[x]-[u]=55$ i $[u] \leqq 5$, a

$|R_2(x,u)| \leqq \frac{1}{4}\, 0{,}0091573\, \overline{D}_{63}$ dla $61 \leqq [x] \leqq 63$ i $[u] \geqq 5$:

$$
(254)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{|R_2(x,u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}01743\, P(x,3,u),\\
&\text{o ile } [x]-[u]=56 \text{ i } 1 \leqq [u] \leqq 5;\\
&\frac{|R_2(x.\,u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}00915\, P(x,3,u),\\
&\text{o ile } [x]-[u]=55 \text{ i } 2 \leqq [u] \leqq 5;\\
&\frac{R_2(x,u)}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}00405\, P(x,3,u),\\
&\text{o ile } [x]-[u] \leqq 53,\ [x] \geqq 61 \text{ i } [u] \geqq 5.
\end{aligned}
\right.
$$

Widzimy więc, że

$$\frac{|R_2(x, u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}00438\ P\ (x,\ 3,\ u), \tag{255}$$

o ile $[x] - [u] \leqq 53$ i $[u] \geqq 5$;

$$\frac{|R_2(x, u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}00999\ P\ (x,\ 3,\ u), \tag{256}$$

o ile $[x] - [u] \leqq 49$ i $[u] \geqq 1$ lub, o ile $[x] - [u] \leqq 55$ i $[u] \geqq 2$,

$$\frac{|R(x, u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}01752\ P\ (x,\ 3,\ u), \tag{257}$$

o ile $[x] - [u] \leqq 56$ i $[u] \geqq 1$.

Jeżeli zatem zadowolimy się obliczeniem $P\ (x,\ 3,\ u)$ z dokładnością $1^0/_0$, możemy pozostawić $\frac{R_2(x, u)}{D^{aa}_{x+2}}$ bez uwzględnienia w przypadkach, dgy $[x] - [u] \leqq 49$ i $[u] \geqq 1$ lub gdy $[x] - [u] \leqq 55$ i $[u] \geqq 2$, a jeżeli zadowolimy się dokładnością do $2^0/_0$, to możemy nie uwzględniać $\frac{R_2(x, u)}{D^{aa}_{x+2}}$ nawet w przypadkach, gdy $[x] - [u] \leqq 56$ i $[u] \geqq 1$. W przypadkach nieuwzględniania $\frac{R_2(x, u)}{D^{aa}_{x+2}}$ wystarczy według (200), (205) i (206) przy obliczaniu $P\ (x,\ 3,\ u)$ zapomocą (191) zamiast $\frac{R(x, u)}{D^{aa}_{x+2}}$ obliczać tylko

$$- \left[1 - \alpha\left(1 - \frac{D^{aa}_{[x+3]}}{D^{aa}_{[x+2]}}\right)\right]^{-1} \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{\varepsilon - \alpha}{|\varepsilon - \alpha|}\right) \varepsilon\ (1 - \alpha)\right.$$

$$+ \left(1 + \frac{\varepsilon - \alpha}{|\varepsilon - \alpha|}\right) \alpha\ (1 - \varepsilon)\ T_1([x], [u])$$

zapomocą tablicy spółczynników (Nr. 9) i tablicy $T_1([x], [u])$.

19. Przechodzimy teraz do ustalenia granic dla $\dfrac{R(x, u)}{D_{x+2}^{aa}}$.

Zważając, że $\varepsilon(1-\alpha) \leqq \alpha(1-\alpha)$ dla $\varepsilon \leqq \alpha$, a $\alpha(1-\varepsilon) < \alpha(1-\alpha)$ dla $\varepsilon > \alpha$ i że według (228) $0 \leqq \alpha(1-\alpha) \leqq \frac{1}{4}$, otrzymujemy z (200).

$$|R(x, u)| \leqq \tfrac{1}{4} \mid R_1([x], [u]) \mid + \mid R_2(x, u) \mid. \tag{258}$$

a zatem analogicznie do (247):

$$\frac{|R(x, u)|}{D_{x+2}^{aa}} \leqq \frac{\frac{1}{4} |R_1([x], [u])| + |R_2(x, u)|}{F([\bar{x}], 3, [u])} P(x, 3, u). \tag{259}$$

Lecz według (232) i (233) jest:

$$|R_2(x, u)| \leqq 7.21 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{[x]-[u]-28}{|[x]-[u]-28|}\right) 1,74; \tag{260}$$

a z (210) — (218) otrzymujemy zapomocą wyżej (Nr. 18) wymienionych tablic:

$$\tag{261} \left| \begin{array}{ll} \dfrac{1}{4} R_1([x], [u]) = 3,59 - \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{[u]-4}{|[u]-4|}\right) 6,54 & \\ \text{dla} \qquad [x] - [u] = 21; & \\ \dfrac{1}{4} R_1([x], [u]) = 3,93 - \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{[u]-4}{|[u]-4|}\right) 7,08 & \\ \text{dla} \qquad [x] - [u] = 22; & \end{array} \right.$$

$$
(261)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\frac{1}{4} R_1([x],[u]) = -673{,}52 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right) 7{,}49 \\
\text{dla} \qquad [x]-[u] = 23; \\
\frac{1}{4} R_1([x],[u]) = 87{,}88 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right) 7{,}87 \\
\text{dla} \qquad [x]-[u] = 24; \\
\frac{1}{4} R_1([x],[u]) = 83{,}79 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right) 8{,}27 \\
\text{dla} \qquad [x]-[u] = 25; \\
\frac{1}{4} R_1([x],[u]) = 79{,}22 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right) 8{,}61 \\
\text{dla} \qquad [x]-[u] = 26; \\
\frac{1}{4} R_1([x],[u]) = 74{,}01 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right) 8{,}98 \\
\text{dla} \qquad [x]-[u] = 27; \\
\frac{1}{4} R_1([x],[u]) = 342{,}79 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right) 9{,}37 \\
\text{dla} \qquad [x]-[u] = 28; \\
\frac{1}{2}\left(1 - \frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right) 9{,}68 \leqq \frac{1}{4} R_1([x],[u]) \leqq \frac{1}{2}\left(1 \right. \\
\left. - \frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right) 10{,}94 \qquad \text{dla} \quad 29 \leqq [x]-[u] \leqq 57 \\
\frac{1}{4} R_1([x],[u]) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right) 69{,}86 \\
\text{dla} \qquad [x]-[u] = 58; \\
\frac{1}{4} R_1([x],[u]) = 0 \qquad \text{dla} \quad [x]-[u] \geqq 59.
\end{array}
\right.
$$

Dalej jest przy obliczaniu $F([x], 3, [u])$ zapomocą tychże tablic:

$$
(262)\quad \left\{
\begin{aligned}
&F([x], 3, [u]) \geqq F(23; 3; 1) = 1448{,}33 \\
&\text{dla} && 21 \leqq [x] - [u] \leqq 23 \text{ i } [u] \geqq 1; \\
&F([x+1], 3, [u]) \geqq F(25; 3; 1) = 3780{,}90 \\
&\text{dla} && [x] - [u] = 23 \text{ i } [u] \text{ i } \geqq 1; \\
&F([x+1], 3, [u]) \geqq F(26; 3; 1) = 3445{,}56 \\
&\text{dla} && [x] - [u] = 24 \text{ i } [u] \geqq 1; \\
&F([x+1], 3, [u]) \geqq F(27; 3; 1) = 3128{,}86 \\
&\text{dla} && [x] - [u] = 25 \text{ i } [u] \geqq 1; \\
&F([x+1], 3, [u]) \geqq F(28; 3; 1) = 2832{,}84 \\
&\text{dla} && [x] - [u] = 26 \text{ i } [u] \geqq 1; \\
&F([x+1], 3, [u]) \geqq F(29; 3; 1) = 1461{,}67 \\
&\text{dla} && [x] - [u] = 27 \text{ i } [u] \geqq 1; \\
&F([x+1], 3, [u]) \geqq F(30; 3; 1) = 1422{,}97 \\
&\text{dla} && [x] - [u] = 28 \text{ i } [u] \geqq 1; \\
&F([x+1], 3, [u]) \geqq F(58; 3; 1) = 279{,}45 \\
&\text{dla} && 29 \leqq [x] - [u] \leqq 56 \text{ i } 1 \leqq [u] \leqq 5; \\
&F([x+1], 3, [u]) \geqq F(26; 3; 5) = 14251{,}43 \\
&\text{dla} && 21 \leqq [x] - [u] \leqq 23 \text{ i } [u] \geqq 5; \\
&F([x+1], 3, [u]) \geqq F(29; 3; 5) = 14650{,}02 \\
&\text{dla} && [x] - [u] = 23 \text{ i } [u] \geqq 5; \\
&F([x+1], 3, [u]) \geqq F(30; 3; 5) = 12292{,}09 \\
&\text{dla} && [x] - [u] = 24 \text{ i } [u] \geqq 5; \\
&F([x+1], 3, [u]) \geqq F(31; 3; 5) = 10229{,}62 \\
&\text{dla} && [x] - [u] = 25 \text{ i } [u] \geqq 5.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(262)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
F([x+1], 3, [u]) \geqq F(32;\ 3;\ 5) = 8443{,}73 & \\
\text{dla} & [x] - [u] = 26 \text{ i } [u] \geqq 5; \\
F([x+1], 3, [u]) \geqq F(33;\ 3;\ 5) = 6913{,}48 & \\
\text{dla} & [x] - [u] = 27 \text{ i } [u] \geqq 5; \\
F([x+1], 3, [u]) \geqq F(34;\ 3;\ 5) = 6714{,}02 & \\
\text{dla} & [x] - [u] = 28 \text{ i } [u] \geqq 5.
\end{array}
\right.
$$

Mamy zatem, zważając, że według (250)

$$
F([x], 3, [u]) > F([x+1], 3, [u]) \text{ dla } 23 \leqq [x] - [u] \leqq 57:
$$

$$
(263)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{|R(x, u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}00775 \; P(x, 3, u), \\
\text{o ile} \quad 21 \leqq [x] - [u] \leqq 22 \text{ i } [u] \geqq 1; \\
\dfrac{|R(x, u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}18004 \; P(x, 3, u), \text{ o ile } [x]-[u]=23 \text{ i } [u] \geqq 1; \\
\dfrac{|R(x, u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}02760 \; P(x, 3, u), \text{ o ile } [x]-[u]=24 \text{ i } [u] \geqq 1; \\
\dfrac{|R(x, u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}02908 \; P(x, 3, u), \text{ o ile } [x]-[u]=25 \text{ i } [u] \geqq 1; \\
\dfrac{|R(x, u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}03051 \; P(x, 3, u), \text{ o ile } [x]-[u]=26 \text{ i } [u] \geqq 1; \\
\dfrac{|R(x, u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}05557 \; P(x, 3, u), \text{ o ile } [x]-[u]=27 \text{ i } [u] \geqq 1; \\
\dfrac{|R(x, u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}24596 \; P(x, 3, u), \text{ o ile } [x]-[u]=28 \text{ i } [u] \geqq 1; \\
\dfrac{|R(x, u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}05872 \; P(x, 3, u), \\
\text{o ile} \quad 29 \leqq [x] - [u] \leqq 56 \text{ i } [u] \geqq 1;
\end{array}
\right.
$$

$$
(263)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{|R(x,u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}00073\ P(x,\ 3,\ u), \\
\text{o ile} \qquad 21 \leqq [x] - [u] \leqq 22 \ \text{ i } \ [u] \geqq 5; \\
\dfrac{|R(x,u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}04698\ P(x,3,u), \text{ o ile } [x]-[u]=23 \text{ i } [u]\geqq 5; \\
\dfrac{|R(x,u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}00710\ P(x,3,u), \text{ o ile } [x]-[u]=24 \text{ i } [u]\geqq 5; \\
\dfrac{|R(x,u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}00809\ P(x,3,u), \text{ o ile } [x]-[u]=25 \text{ i } [u]\geqq 5; \\
\dfrac{|R(x,u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}00922\ P(x,3,u), \text{ o ile } [x]-[u]=26 \text{ i } [u]\geqq 5; \\
\dfrac{|R(x,u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}01045\ P(x,3,u), \text{ o ile } [x]-[u]=27 \text{ i } [u]\geqq 5; \\
\dfrac{|R(x,u)|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq 0{,}05073\ P(x,3,u), \text{ o ile } [x]-[u]=28 \text{ i } [u]\geqq 5; \\
\dfrac{|R(x,u)|}{D^{aa}_{x+2}} = \dfrac{|R_2(x,u)|}{D^{aa}_{x+2}}, \text{ o ile } [x]-[u]\geqq 29 \text{ i } [u]\geqq 5;
\end{array}
\right.
$$

Jeżeli zatem zadowolimy się obliczeniem $P\ (x,\ 3,\ u)$ z dokładnością do $1^0/_0$, to możemy przy obliczeniu $P\ (x,\ 3,\ u)$ zapomocą (191) pozostawić $\dfrac{R\ (x,\ u)}{D^{aa}_{x+2}}$ bez uwzględnienia, o ile $[u] \geqq 5$ i $[x] - [u] \leqq 55$, ale $[x]-[u] \neq 23$ i $[x]-[u] \neq 28$, lub o ile $[u] \geqq 1$ i $21 \leqq [x]-[u] \leqq 22$. $[x]-[u]$ musi być $\leqq 55$ na skutek (256).

20. Rozpatrzymy teraz, czy przy obliczeniach należności za nabycie lat poprzedniej służby może być zastosowana przyjęta przy normalnych ubezpieczeniach prywatnych zasada ustalania wieku przystępującego do ubezpieczenia,

mianowicie zaokrąglanie wieku w ten sposób, że nie uwzględnia się części roku, nie przekraczającej $^1/_2$, natomiast część roku, przekraczają $^1/_2$, liczy się za cały rok.

Według tej zasady należałoby zamiast $P\,(x,\,3,\,u)$ obliczyć $P\,([x],\,3,\,u)$, o ile $0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$, a $P([x+1],\,3,\,u)$, o ile $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Lecz jak wynika z (191), (193) i (103), musi być:

$$P\,(x,\,3,\,u) - P\,([x],\,3,\,u) = -\,\alpha\,\frac{D^{aa}_{[x+3]}}{D^{aa}_{x+2}}\Big[(1-\varepsilon)\,P([x],3,[u])$$

$$+\,\varepsilon\,P\,([x],\,3,\,[u+1]) - (1-\varepsilon)\,P\,([x+1],\,3,\,[u])$$

$$-\,\varepsilon\,P\,([x+1],\,3,\,[u+1])\Big] + \frac{R\,(x,\,u)}{D^{aa}_{x+2}} - \frac{R\,([x],\,u)}{D^{aa}_{[x+2]}}\,,$$

czyli zakładając:

$$(264)\qquad \Delta\,([x],\,[u]) = P\,([x],\,3,\,[u]) - P\,([x+1],\,3,\,[u]),$$

$$(265)\qquad P\,(x,3,u) - P([x],3,u) = -\,\alpha\,\frac{D^{aa}_{[x+3]}}{D^{aa}_{x+2}}\Big[(1-\varepsilon)\,\Delta\,([x],\,[u])$$

$$+\,\varepsilon\,\Delta\,([x],\,[u+1])\Big] + \frac{R\,(x,\,u)}{D^{aa}_{x+2}} - \frac{R\,([x],\,u)}{D^{aa}_{[x+2]}}$$

i analogicznie:

$$(266)\qquad P(x,3,u) - P([x+1],3,u) = (1-\alpha)\,\frac{D^{aa}_{[x+2]}}{D^{aa}_{x+2}}\Big[(1$$

$$-\,\varepsilon)\,\Delta\,([x],\,[u]) + \varepsilon\,\Delta\,([x],\,[u+1])\Big] + \frac{R\,(x,\,u)}{D^{aa}_{x+2}} - \frac{R([x+1],\,u)}{D^{aa}_{[x+3]}}\,,$$

Oznaczając teraz $[u]$ przez $[\bar{u}]$ i $[u+1]$ przez $[u']$ albo $[u]$ przez $[u']$ i $[u+1]$ przez $[\bar{u}]$, zależnie od tego, czy wartość $|\Delta([x], [u])|$ jest mniejsza albo nie mniejsza niż $|\Delta([x], [u+1])|$, otrzymujemy:

$$(267)\qquad |(1-\varepsilon)\Delta([x],[u]) + \varepsilon\Delta([x],[u+1])| \leqq |\Delta([x],[u'])|$$

i, o ile $\Delta([x], [u])$ i $\Delta([x], [u+1])$ są oba dodatnie lub oba ujemne, także:

$$(268)\qquad |(1-\varepsilon)\Delta([x],[u]) + \varepsilon\Delta([x],[u+1])| \geqq |\Delta([x],[\overline{u}]|.$$

Oznaczając dalej $F([x+1], 3, [u+1])$ albo $F([x], 3, [u+1])$ przez $F([x'], 3, [u+1])$, zależnie od tego, czy wartość $F([x+1], 3, [u+1])$ jest większa albo mniejsza niż $F([x], 3, [u+1])$, otrzymujemy analogicznie do (246):

$$(269)\qquad F(x, 3, u) \leqq F([x'], 3, [u+1)].$$

Mamy zatem analogicznie do (247):

$$(270)\qquad \frac{|(1-\varepsilon)\Delta([x],[u]) + \varepsilon\Delta([x],[u+1])|}{D^{aa}_{x+2}} \leqq \frac{|\Delta([x],[u'])|}{F[(\overline{x}], 3, [u])} P(x, 3, u)$$

i, o ile $\Delta([x], [u])$ i $\Delta([x], [u+1])$ są oba dodatnie albo oba ujemnie, także:

$$(271)\qquad \frac{|(1-\varepsilon)\Delta([x],[u]) + \varepsilon\Delta([x],[u+1])|}{D^{aa}_{x+2}} \geqq \frac{|\Delta([x],[\overline{u}])|}{F([x'],3,[u+1])} P(x,3,u),$$

a więc, zakładając:

$$(272)\qquad \left|\begin{aligned} &\frac{D^{aa}_{[x+2]}\,|\Delta([x],[u'])|}{F([\overline{x}], 3, [u])} = M([x], [u]), \\ &\frac{D^{aa}_{[x+3]}\,|\Delta([x],[\overline{u}])|}{F([x'], 3, [u+1])} = m([x], [u]), \end{aligned}\right.$$

otrzymujemy:

$$\frac{D^{aa}_{[x+3]}}{D^{aa}_{x+2}} \left| (1 - \varepsilon)\Delta([x], [u]) + \varepsilon\Delta([x], [u + 1]) \right| < \frac{D^{aa}_{[x+2]}}{D^{aa}_{x+2}} \left| (1 - \varepsilon)\Delta([x], [u]) + \varepsilon\Delta([x], [u + 1]) \right| \leq M([x], [u])\, P(x, 3, u) \tag{273}$$

i, o ile $\Delta([x], [u])$ i $\Delta([x], [u + 1])$ mają równe znaki ($+$ albo $-$), także:

$$\frac{D^{aa}_{[x+2]}}{D^{aa}_{x+2}} \left| (1 - \varepsilon)\Delta([x], [u]) + \varepsilon\Delta([x], [u + 1]) \right| > \frac{D^{aa}_{[x+3]}}{D^{aa}_{x+2}} \left| (1 - \varepsilon)\Delta([x], [u]) + \varepsilon\Delta([x], [u + 1]) \right| \geq m([x], [u])\, P(x, 3, u). \tag{274}$$

Lecz przy obliczaniu $P([x], 3, [u])$ zapomocą wyżej (Nr. 18) wspomnianych tablic jest:

$$\Delta([x], [u]) < 0 \tag{275}$$

dla $[x] - [u] \leq 22$ lub dla $[x] - [u] \geq 28$ i $[x] \leq 57$ z wyjątkiem:

$$\Delta(53; 1),\ \Delta(54; 1) \text{ i } \Delta(55; 1), \text{ a}$$

$$\Delta([x], [u]) > 0 \tag{276}$$

dla $23 \leq [x] - [u] \leq 27$ lub dla $[x] - [u] \leq 57$, $[x] \geq 58$ i $[u] \leq 19$ lub dla $63 \leq [x] \leq 69$. O ile zatem $[x] - [u] \leq 22$

lub $24 \leqq [x] - [u] \leqq 27$ lub $[x] - [u] \leqq 57$, $[x] \geqq 58$ i $[u] \leqq 18$ lub wreszcie $63 \leqq [x] \leqq 69$, mają $\Delta([x], [u])$ i $\Delta([x], [u+1])$ równe znaki, a o ile $[x] - [u] = 23$ lub $[x] - [u] = 28$ mają, $\Delta([x], [u])$ i $\Delta([x], [u+1])$ różne znaki. Dalej otrzymujemy przy obliczaniu $P([x], 3, [u])$ zapomocą wymienionych tablic.

$$
(277) \left\{ \begin{array}{l}
M(23; 1) = 2{,}0684;\ m(23; 1) = 0{,}4967;\ M(24; 1) = 0{,}7309; \\
M(27; 1) = 0{,}1045;\ m(27; 1) = 0{,}0210;\ M(28; 1) = 0{,}9844; \\
m(28; 1) = 0{,}2059;\ M(29; 1) = 0{,}8824;\ m(58; 1) = 0{,}4085; \\
M(27; 5) = 0{,}1491;\ m(27; 5) = 0{,}1173;\ M(28; 5) = 0{,}1291; \\
M(31; 5) = 0{,}1750;\ m(31; 5) = 0{,}0923;\ M(32; 5) = 0{,}1871; \\
m(32; 5) = 0{,}0944;\ M(33; 5) = 0{,}1668;\ M(58; 5) = 0{,}1855; \\
m(58; 5) = 0{,}0928;\ M(32; 10) = 0{,}0502;\ m(32; 10) = 0{,}0432; \\
M(33; 10) = 0{,}0828;\ M(36; 10) = 0{,}0959;\ m(36; 10) = 0{,}0584; \\
M(37; 10) = 0{,}0951;\ m(37; 10) = 0{,}0570;\ M(38; 10) = 0{,}0845; \\
M(58; 10) = 0{,}0513;\ m(58; 10) = 0{,}0316;\ M(42; 20) = 0{,}0447; \\
m(42; 20) = 0{,}0393;\ M(43; 20) = 0{,}0574;\ M(46; 20) = 0{,}0652; \\
m(46; 20) = 0{,}0420;\ M(47; 20) = 0{,}0649;\ m(47; 20) = 0{,}0412; \\
M(48; 20) = 0{,}0598;
\end{array} \right.
$$

$$
(278) \qquad M([x], [u]) < 0{,}032
$$

dla $[x] - [u] \geqq 29$, $[x] \leqq 57$ i $[u] \geqq 5$;

$$
(279) \qquad M([x], 6) \leqq M(69; 6) = 0{,}1269
$$

i $m([x], 6) \geqq m(63; 6) = 0{,}0138$ dla $63 \leqq [x] \leqq 69$;

a z (272), (83) i (84) wynika:

$$(280) \qquad M([x],\ [u]) = \frac{[u]-4}{2([u]-5)}\ M([x],\ 6) \ \text{ i } \ m([x],\ [u])$$

$$= \frac{2([u]-5)}{[u]-4}\ m([x],\ 6)$$

dla $\qquad 63 \leqq [x] \leqq 69$ i $[u] \geqq 6.$

Widzimy więc, że o zastosowaniu bez zastrzeżeń wyżej wymienionej zasady ustalania wieku przy obliczeniach $P(x, 3, u)$ nie może być mowy, gdyż błąd, który powstaje przy zastosowaniu tej zasady, może być znaczny, a w pewnych przypadkach nawet bardzo wielki. Tak np. granice (dolna i górna) bezwzględnej wartości błędu, który powstaje przy zastosowaniu tej zasady przez nieuwzględnienie pierwszego wyrazu po prawej stronie (265) w razie, gdy $\alpha \leqq \frac{1}{2}$, albo (266) w razie, gdy $\alpha > \frac{1}{2}$, są według (273), (274) i (277), o ile α jest równe lub bardzo mało różni się od $\frac{1}{2}$, w procentach wartości $P(x, 3, u)$: 24,8 i 103,4 dla $[x] = 23$ i $[u] = 1$; 10,2 i 49,2 dla $[x] = 28$ i $[u] = 1$; 4,7 i 9,3 dla $[x] = 32$ i $[u] = 5$, a 2,9 i 4,7 dla $[x] = 36$ i $[u] = 10$. Dopiero po dodaniu do bezwzlgędnej wartości tegoż błędu jeszcze

$$\left| \frac{R(x,\ u)}{D^{aa}_{x+2}} - \frac{R([x],\ u)}{D^{aa}_{[x+2]}} \right|,$$

o ile $\alpha \leqq \frac{1}{2}$, a różnica

$$\frac{R(x,\ u)}{D^{aa}_{x+2}} - \frac{R([x],\ u)}{D^{aa}_{[x+2]}}$$

i suma $(1-\varepsilon)\,\Delta([x],\ [u]) + \varepsilon\,\Delta([x],\ [u+1])$ mają różne znaki, lub

$$\left| \frac{R(x,\ u)}{D^{aa}_{x+2}} - \frac{R([x+1],\ u)}{D^{aa}_{[x+3]}} \right|,$$

o ile $\alpha > \frac{1}{2}$, a różnica

$$\frac{R(x,\ u)}{D^{aa}_{x+2}} - \frac{R([x+1],\ u)}{D^{aa}_{[x+3]}}$$

i suma $(1-\varepsilon)\,\Delta([x],\ u) + \varepsilon\,\Delta([x],\ [u+1])$ mają równe znaki, otrzymuje się według (265) i (266) całkowity błąd, który powstaje przez zastosowanie wspomnianej zasady.

Jeżeli jednak zadowolimy się obliczeniem $P(x,\ 3,\ u)$ z dokładnością do $2^0/_0$, to można zastosować wspomnianą zasadę w przypadkach, kiedy $[x]-[u] \geqq 29$, $[x] \leqq 57$ i $[u] \geqq 5$. Albowiem w tych przypadkach bezwzględna wartość błędu, który powstaje przez nieuwzględnienie pierwszego wyrazu po prawej stronie (265) lub (266), jest według (273), (274) i (278) mniejsza niż $1{,}6^0/_0$ wartości $P(x,\ 3,\ u)$, gdyż przy zastosowaniu tej zasady musi być $\alpha \leqq \frac{1}{2}$ lub $1-\alpha < \frac{1}{2}$, a według (263), (255) i (224) jest w tychże przypadkach:

$$\frac{|R(x,\ u)|}{D^{aa}_{x+2}} < 0{,}0044\ P(x,3,u)$$

i $R([x],\ u) = R([x+1],\ u) = 0$.

21. Poza (191) można wyprowadzić jeszcze inny sposób obliczenia $P(x,\ 3,\ u)$ dla ułamkowych wartości x i u.

Zważając, że według (13^a) i (14^a) jest:

(281) $$k_3([x],\ 3,\ [u+1]) = k_3([x+1],\ 3,\ [u+1])$$

$$= k_3([x],\ 3,\ [u]) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right),$$

(282) $$\overline{N}_{n3\,([x+1],\,3,\,[u])} = \overline{N}_{n3\,([x+1],\,3,\,[u+1])}$$

$$= \overline{N}_{n3\,([x],\,3,\,[u])} - \overline{D}_{[x]+2}\,,$$

otrzymujemy z (157):

(283)
$$k_3(x,\ 3,\ u)\ \overline{N}_{n3\,(x,\ 3,\ u)}$$

$$-\left\{\left[1-\frac{(\varepsilon-\alpha)^2}{|\varepsilon-\alpha|}\right] k_3([x],\ 3,\ [u])\ \overline{N}_{n3\,([x],\ 3,\ [u])}\right.$$

$$+\frac{(\varepsilon-\alpha)^2}{|\varepsilon-\alpha|}\,k_3\left[[x]+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)3,\ [u]\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\right]\overline{N}_{n3}\left[[x]+\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right),\ 3,\ [u]+\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\varepsilon+\left(1+\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\alpha\right]\left[\left(1\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right)\overline{N}_{[x]+2}-\left(1+\frac{[u]-5}{|[u]-5|}\right)([u]-5)\,\overline{D}_{[x]+2}\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right)\alpha\ \varepsilon\ \overline{D}_{[x]+2}\,.$$

Następnie wynika z (11^a) i (103):

(284)
$$N^{aa}_{n_2\,(x,\,3,\,u),\,(z)}=(1-\alpha)\,N^{aa}_{n_2\,([x],\,3,\,[u]),\,(z)}$$

$$+\alpha\,N^{aa}_{n_2\,([x+1],\,3,\,[u]),\,(z)}=\left[1-\frac{(\varepsilon-\alpha)^2}{|\varepsilon-\alpha)|}\right]N^{aa}_{n_2\,([x],\,3,\,[u]),\,(z)}$$

$$+\frac{(\varepsilon-\alpha)^2}{|\varepsilon-\alpha|}\,N^{aa}_{n_2}\left[[x]+\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right),\ 3,\ [u]+\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\right],(z)$$

$$- \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\varepsilon - \alpha}{|\varepsilon - \alpha|} \right) \varepsilon + \left(1 + \frac{\varepsilon - \alpha}{|\varepsilon - \alpha|} \right) \alpha \right] D^{aa}_{[x]+2,\ (z)}$$

dla $x \geqq 63.$

Dalej otrzymujemy z (10^a), (11^a) i (103) analogicznie do (157) i (283):

(285) $$k_1 (x,\ 3,\ u)\ N^{aa\ (12)}_{n_2 (x,\ 3,\ u)}$$

$$- \left\{ \left[1 - \frac{(\varepsilon - \alpha)^2}{|\varepsilon - \alpha|} \right] k_1 ([x],\ 3,\ [u])\ N^{aa\ (12)}_{n_2 ([x],\ 3,\ [u])} \right.$$

$$+ \frac{(\varepsilon - \alpha)^2}{|\varepsilon - \alpha|} k_1 \left[[x] + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon - \alpha}{|\varepsilon - \alpha|} \right),\ 3,\ [u] + \frac{1}{2} \left(1 \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\varepsilon - \alpha}{|\varepsilon - \alpha|} \right) \right] N^{aa\ (12)}_{n_2 \left[[x] + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon - \alpha}{|\varepsilon - \alpha|} \right),\ 3,\ [u] + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon - \alpha}{|\varepsilon - \alpha|} \right) \right]} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\varepsilon - \alpha}{|\varepsilon - \alpha|} \right) \varepsilon + \left(1 + \frac{\varepsilon - \alpha}{|\varepsilon - \alpha|} \right) \alpha \right] \left\{ \frac{1}{2} \left(1 \right. \right.$$

$$\left. + \frac{[u] - 4}{|[u] - 4|} \right) N^{aa\ (12)}_{[x]+2} - \left[20 + \frac{1}{2} \left(1 \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + \frac{[u] - 5}{|[u] - 5|} \right) ([u] - 5) \right] D^{aa\ (12)}_{[x]+2} \right\} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{[u] - 4}{|[u] - 4|} \right) \alpha\, \varepsilon\, D^{aa(12)}_{[x]+2}$$

dla $x \geqq 63.$

Ze wzorów (108), (136), (156), (158) i (283) — (285) wynika teraz:

$$(286) \qquad e(x,\ 3,\ u) = \left[1 - \frac{(\varepsilon - \alpha)^2}{|\varepsilon - \alpha|}\right] e([x],\ 3,\ [u])$$

$$+ \frac{(\varepsilon - \alpha)^2}{|\varepsilon - \alpha|} e\left[[x] + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon - \alpha}{|\varepsilon - \alpha|}\right) 3,\ [u] + \frac{1}{2}\left(1\right.\right.$$

$$\left.\left.+ \frac{\varepsilon - \alpha}{|\varepsilon - \alpha|}\right)\right] + 0{,}01\ \frac{1}{4}\left[\left(1 - \frac{\varepsilon - \alpha}{|\varepsilon - \alpha|}\right)\varepsilon + \left(1\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\varepsilon - \alpha}{|\varepsilon - \alpha|}\right)\alpha\ \right] \left\{2\left(1 + \frac{[u] - 4}{|[u]-4|}\right)\left[\overline{N}_{[x]+2} + \frac{1}{2}\left(1\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+ \frac{[x] - 62}{|[x] - 62|}\right) N^{aa\,(12)}_{[x]+2}\right] - 2\left(1 + \frac{[u] - 5}{|[u] - 5|}\right)([u] - 5)\left[\overline{D}_{[x]+2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{[x] - 62}{|[x] - 62|}\right) D^{aa\,(12)}_{[x]+2}\right] - \left(1 + \frac{[x] - 62}{|[x] - 62|}\right)\left(40\, D^{aa\,(12)}_{[x]+2}\right.$$

$$\left.\left. + 4\ D^{aa}_{[x]+2,\ (z)}\right)\right\} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{[u] - 4}{|[u] - 4|}\right) 2\,\alpha\,\varepsilon\left[\overline{D}_{[x]+2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{[x] - 62}{[x] - 62}\right) D^{aa\,(12)}_{[x]+2}\right]$$

$$- 0{,}01\ k_4(x,\ 3,\ u)\left[k_5(x,\ 3,\ u)\,\overline{D}_{n_6\,(x,\ 3,\ u)} - k_6(x,\ 3,\ u)\,\overline{D}_{n_7\,(x,\ 3,\ u)}\right]$$

dla wszystkich wartości x i u, które czynią zadość:

$$(126) \qquad x \leqq 70,\ 0 \leqq u \leqq 35,\ x - u \geqq 21.$$

Zważając, że $\varepsilon = 0$ i $\alpha \geqq \varepsilon$ dla $u = 0$, otrzymujemy z (286):

$$e(x;\ 3;\ 0) = (1 - \alpha)\ e([x];\ 3;\ 0) + \alpha\, e([x+1];\ 3;\ 0)$$

$$- 0{,}01\ k_4(x; 3; 0)\left[k_5(x;\ 3;\ 0)\,\overline{D}_{n_6\,(x;\,3;\,0)} - k_6(x;\ 3;\ 0)\,\overline{D}_{n_7\,(x;\,3;\,0)}\right].$$

Ale wzorowi temu można jeszcze dać następującą postać:

$$(287) \qquad e(x;\ 3;\ 0) = \left[1 - \frac{(\rho - \alpha)^2}{|\rho - \alpha|}\right] e([x];\ 3;\ 0)$$

$$+ \frac{(\rho - \alpha)^2}{|\rho - \alpha|} e\left[[x] + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho - \alpha}{|\rho - \alpha|}\right), 3;\ 0\right] - \frac{1}{2}\left[\left(1\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\rho - \alpha}{|\rho - \alpha|}\right)\rho + \left(1 + \frac{\rho - \alpha}{|\rho - \alpha|}\right)\alpha\right]\left[e([x];3;0) - e([x+1];3;0)\right]$$

$$- 0{,}01\, k_4(x;\ 3;\ 0)\ [k_5(x;\ 3;\ 0)\ \overline{D}_{n_6\,(x;\ 3;\ 0)} - k_6(x;\ 3;\ 0)\ \overline{D}_{n_7(x;\ 3;\ 0)}],$$

gdzie ρ oznacza liczbę dowolną. Tak samo można dać (184) następującą postać:

$$(288) \qquad N^{aa\,(12)}_{n_1\,(x;\,3;\,0)} = \left[1 - \frac{(\rho - \alpha)^2}{|\rho - \alpha|}\right] N^{aa\,(12)}_{n_1\,([x];\,3;\,0)}$$

$$+ \frac{(\rho - \alpha)^2}{|\rho - \alpha|} N^{aa\,(12)}_{n_1\left[[x] + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho - \alpha}{|\rho - \alpha|}\right);\,3;\,0\right]} - \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{\rho - \alpha}{|\rho - \alpha|}\right)\rho\right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{\rho - \alpha}{|\rho - \alpha|}\right)\alpha\right]\left(N^{aa\,(12)}_{n_1\,([x];\,3;\,0)} - N^{aa\,(12)}_{n_1\,([x+1];\,3;\,0)}\right).$$

Lecz według (9^a) — (17^a) jest:

$$(289) \qquad N^{aa\,(12)}_{n_1\,([x];\,3;\,0)} = N^{aa\,(12)}_{n_1\,([x+1];\,3;\,0)} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{[x] - 27}{|[x] - 27|}\right) D^{aa\,(12)}_{[x]+37}$$

dla $\qquad [x] \leqq 62,$

(290) $$k_1([x];\ 3;\ 0) = k_1([x+1];\ 3;\ 0) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{[x]-27}{|[x]-27|}\right)\left(1 - \frac{[x]-57}{|[x]-57|}\right),$$

(291) $$N^{aa\,(12)}_{n_2\,([x];\,3;\,0)} = N^{aa\,(12)}_{n_2\,([x+1];\,3;\,0)} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{[x]-22}{|[x]-22|}\right)\left(1 - \frac{[x]-27}{|[x]-27|}\right) D^{aa\,(12)}_{[x]+37} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{[x]-62}{|[x]-62|}\right) D^{aa\,(12)}_{[x]+2},$$

(292) $$k_2([x];\ 3;\ 0) = k_2([x+1];\ 3;\ 0) = k_3([x];\ 3;\ 0) = k_3([x+1];\ 3;\ 0) = 0,$$

(293) $$k_4([x];\ 3;\ 0) = k_4([x+1];\ 3;\ 0) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{[x]-56}{|[x]-56|}\right)\left(1 - \frac{[x]+57}{|[x]+57|}\right),$$

(294) $$\overline{S}_{n_4\,([x];\,3;\,0)} = \overline{S}_{n_4\,([x+1];\,3;\,0)} + \overline{N}_{[x]+7},$$

(295) $$\overline{S}_{n_5\,([x];\,3;\,0)} = \overline{S}_{n_5\,([x+1];\,3;\,0)} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{[x]-27}{|[x]-27|}\right) \overline{N}_{[x]+37},$$

a zatem według (6):

(296) $$e([x];\ 3;\ 0) - e([x+1];\ 3;\ 0) = 0{,}01 \left[\frac{1}{4}\left(1 + \frac{[x]-22}{|[x]-22|}\right)\left(1 - \frac{[x]-27}{|[x]-27|}\right)\left(100\ D^{aa\,(12)}_{[x]+37} + 4\ D^{aa}_{[x]+37,\,(z)}\right)\right.$$

$$+ \frac{1}{4}\left(1 + \frac{[x]-27}{|[x]-27|}\right)\left(1 - \frac{[x]-57}{|[x]-57|}\right) 2 N_{65}^{aa\,(12)} + \frac{1}{2}\left(1\right.$$

$$\left. + \frac{[x]-62}{|[x]-62|}\right)(40\, D_{[x]+2}^{aa\,(12)} + 4\, D_{[x]+2,(z)}^{aa}) + \frac{1}{2}\left(1\right.$$

$$\left. - \frac{[x]-57}{|[x]-57|}\right)(\overline{N}_{[x]+7} + \overline{N}_{[x]+8}) - \frac{1}{2}\left(1\right.$$

$$\left. - \frac{[x]-27}{|[x]-27|}\right)(\overline{N}_{[x]+37} + \overline{N}_{[x]+38}) \Big] ,$$

gdyż $k_1([x]; 3; 0) = 50$ i $n_2([x]; 3; 0) = n_5([x]; 3; 0) = [x] + 37$ dla $x \leqq 27$, $n_2([x]; 3; 0) = 65$ dla $28 \leqq [x] \leqq 57$, $k_1([x]; 3; 0) = 20$ dla $[x] \geqq 63$, a $n_4([x]; 3; 0) = 64$ i $n_3([x]; 3; 0) = 65$ dla $[x] = 57$.

Podstawiając więc w (287) i (288) ε zamiast ρ i zważając, że $n_1(x, 3, u) = n_1(x; 3; 0)$ dla $x \geqq 63$, a zatem dla $x \geqq 63$ $N_{n_1}^{aa\,(12)}$ i $N_{n_{10}}^{aa\,(12)}$ w (109) znoszą się wzajemnie, otrzymujemy z (18), (109), (108), (130), (286) — (289), (296), (103) i (199) analogicznie do (191):

$$(297) \qquad P(x, 3, u) = \left|1 - \alpha\left(1 - \frac{D_{[x+3]}^{aa}}{D_{[x+2]}^{aa}}\right)\right|^{-1} \Big\{\Big[1$$

$$- \frac{(\varepsilon-\alpha)^2}{|\varepsilon-\alpha|}\Big] P([x], 3, [u])$$

$$+ \frac{(\varepsilon-\alpha)^2}{|\varepsilon-\alpha|} \frac{D_{[x+2]+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)}^{aa}}{D_{[x+2]}^{aa}} P\Big[[x] + \frac{1}{2}\Big(1$$

$$- \frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\Big), 3, [u] + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\Big] + \frac{r(x, u)}{D_{x+3}^{aa}},$$

gdzie:

$$(298)\quad r(x,u) = 0{,}01\,(1+i)^{-2}\,\frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\varepsilon+\left(1\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\alpha\right]\left\{\left(1-\frac{[x]-27}{|[x]-27|}\right)\left[8\,D^{aa\,(12)}_{[x]+37}+\frac{1}{2}\left(1\right.\right.\right.$$

$$\left.+\frac{[x]-22}{|[x]-22|}\right)\left(100\,D^{aa\,(12)}_{[x]+37}+4\,D^{aa}_{[x]+37,\,(z)}\right)-\left(\overline{N}_{[x]+37}+\overline{N}_{[x]+38}\right)\Big]$$

$$+\left(1-\frac{[x]-57}{|[x]-57|}\right)\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{[x]-27}{|[x]-27|}\right)2\,N^{aa\,(12)}_{65}\right.$$

$$\left.+\overline{N}_{[x]+7}+\overline{N}_{[x]+8}\right]+2\left(1+\frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right)\left[\overline{N}_{[x]+2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(1+\frac{[x]-62}{|[x]-62|}\right)N^{aa\,(12)}_{[x]+2}\right]-2\left(1\right.$$

$$\left.+\frac{[u]-5}{|[u]-5|}\right)([u]-5)\left[\overline{D}_{[x]+2}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{[x]-62}{|[x]-62|}\right)D^{aa\,(12)}_{[x]+2}\right]\Bigg\}$$

$$-\,0{,}02\,(1+i)^{-2}\,\frac{1}{2}\left(1+\frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right)\alpha\,\varepsilon\left[\overline{D}_{[x]+2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(1+\frac{[x]-62}{|[x]-62|}\right)D^{aa\,(12)}_{[x]+2}\right]-R_2(x,u)\,.$$

Wzór (297) jest ważny dla wszystkich wartości x i u, które czynią zadość (126).

Zakładając teraz:

$$(299)\quad S_1([x]) = \frac{0{,}01\ (1+i)^{-2}}{D^{aa}_{[x+2]}} \left\{ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{[x]-27}{|[x]-27|}\right) \left[8\, D^{aa\,(12)}_{[x]+37} \right.\right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{[x]-22}{|[x]-22|}\right) (100\, D^{aa(12)}_{[x]+37} + 4\, D^{aa}_{[x]+37,\,(z)}) - (\overline{N}_{[x]+37}$$

$$\left. + \overline{N}_{[x]+38}) \right] + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{[x]-57}{|[x]-57|}\right) \left[\frac{1}{2}\left(1 \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{[x]-27}{|[x]-27|}\right) 2\, N^{aa\,(12)}_{65} + \overline{N}_{[x]+7} + \overline{N}_{[x]+8} \right] \right\},$$

$$(300)\qquad S_2([x]) = \frac{0{,}02\ (1+i)^{-2}}{D^{aa}_{[x+2]}} \left[\overline{N}_{[x]+2} + \frac{1}{2}\left(1 \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{[x]-62}{|[x]-62|}\right) N^{aa\,(12)}_{[x]+2} \right] + S_1([x]),$$

$$(301)\qquad S_3([x]) = \frac{0{,}02\ (1+i)^{-2}}{D^{aa}_{[x+2]}} \left[\overline{D}_{[x]+2} + \frac{1}{2}\left(1 \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{[x]-62}{|[x]-62|}\right) D^{aa\,(12)}_{[x]+2} \right],$$

otrzymujemy z (298) i (103):

$$(302)\qquad \frac{r(x,\ u)}{D^{aa}_{x+2}} = \left[1 - \alpha\left(1 - \frac{D^{aa}_{[x+3]}}{D^{aa}_{[x+2]}}\right) \right]^{-1} \left[\!\left[\frac{1}{4} \left[\left(1 \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right) \varepsilon + \left(1 + \frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right) \alpha \right] \left[\left(1 - \frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right) S_1([x]) \right.$$

$$+\left(1+\frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right)S_2([x])\Big]-\frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right)\alpha\,\varepsilon\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{[u]-5}{|[u]-5|}\right)\left[\left(1-\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\varepsilon+\left(1\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\alpha\right]([u]-5)\Big\}S_3([x])\Bigg]\Bigg|-\frac{R_2(x,\ u)}{D^{aa}_{x+2}},$$

czyli według (204) i (205):

$$\text{(303)}\qquad \frac{r\ (x,\ u)}{D^{aa}_{x+2}}=\left[1-\alpha\left(1-\frac{D^{aa}_{[x+3]}}{D^{aa}_{[x+2]}}\right)\right]^{-1}\Bigg|\Bigg[\frac{1}{4}\Big[\Big(1$$

$$-\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\Big)\varepsilon+\left(1+\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\alpha\Big]\Big[\left(1-\frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right)S_1([x])$$

$$+\left(1+\frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right)S_2([x])\Big]-\frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right)\alpha\,\varepsilon\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{[u]-5}{|[u]-5|}\right)\left[\left(1-\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\varepsilon+\left(1\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\alpha\right]([u]-5)\Big\}S_3([x])-\frac{1}{4}\left(1-\frac{x-63}{|x-63|}\right)_{+0}\Big(1$$

$$-\frac{x-u-58}{|x-u-58|}\Big)_{+0}\Big\{\delta\,(1-\delta)\,T_2\left[[x],\ [u]+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x-u-28}{|x-u-28|}\right)\gamma\,(1-\gamma)\,T_3\Big[[x],\ [u]+\frac{1}{2}\Big(1$$

$$+\frac{\varepsilon-\alpha}{|\varepsilon-\alpha|}\Big)\Big]\Big\}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x-58}{|x-58|}\right)\alpha(1-\alpha)\Big[T_2\ ([x],\ 0)$$

$$-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x-28}{|x-28|}\right)T_3\ ([x],\ 0)\Big]\Bigg]\Bigg|.$$

Wzory (297) i (303) pozwalają obliczyć $P\ (x,\ 3,\ u)$ dla ułamkowych wartości x i u zapomocą zestawionej taryfy $P\,(x,\ 3,\ u)$ dla całkowitych wartości x i u oraz wspomnianej wyżej (Nr. 9) tablicy spółczynników $\frac{D^{aa}_{x-t+5}}{D^{aa}_{x+2}}$, o ile będą zestawione tabliczki wartości $S_1\ ([x])$ dla $21 \leqq [x] \leqq 57$, $S_2\ ([x])$ i $S_3\ ([x])$ dla $26 \leqq [x] \leqq 69$ oraz tablicy $T_2\ ([x],\ [u])$ i $T_3\ ([x],\ [u])$ dla $21 \leqq [x] \leqq 62$, $0 \leqq [u] \leqq 35$ i $21 \leqq [x] - [u] \leqq 58$ wzgl., dla $T_3\ ([x],\ [u])$, $21 \leqq [x] - [u] \leqq 28$ (p. Nr. 17). Dla $S_1\ ([x])$ jest 57 górną granicą $[x]$, a dla $S_2\ ([x])$ i $S_3\ ([x])$ jest 26 dolną granicą $[x]$, ponieważ $S_2\ ([x]) = 0$ dla $[x] > 57$, a S_2 i S_3 w (303) pomnożone są przez

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{[u]-4}{|[u]-4|}\right),\ \text{a}\ [x]-[u] \geqq 21.$$

Do obliczenia $P\ (x,\ 3,\ u)$ potrzebna jest tabliczka $S_1\ ([x])$ tylko, gdy $u < 5$, a tabliczki $S_2\ ([x])$ i $S_3\ ([x])$ potrzebne są tylko, gdy $u > 5$. Dla $x = [x]$ lub dla $u = [u]$ wzór (302) przechodzi na:

$$(304)\quad \frac{r\ ([x],\ u)}{D^{aa}_{x+2}} = -\frac{R_2\ ([x],\ u)}{D^{aa}_{[x+2]}},\quad \frac{r\ (x,\ [u])}{D^{aa}_{x+2}} = -\frac{R_2\ (x,\ [u])}{D^{aa}_{x+2}},$$

gdyż wtedy $\alpha = 0$ i $\varepsilon \geqq \alpha$ albo $\varepsilon = 0$ i $\varepsilon \leqq \alpha$ (p. Nr. 17 i 18).

ZUSAMMENFASSUNG.

Die einmalige Prämie für den Einkauf von Dienstjahren, die vor der Versicherung zurückgelegt wurden, durch pflichtversicherte Angestellte ist vom Alter x des Versicherten zur Zeit des Einkaufes, von der Versicherungsdauer t bis zur Zeit des Einkaufes und von der Anzahl u der eingekauften Dienstjahre abhängig und wird mit $P(x, t, u)$ bezeichnet (Nr. 1 — 2). $P(x, t, u)$, die eine unstetige Funktion von x, t und u ist, wird mittels der Formeln (9) — (21) durch einen geschlossenen Ausdruck dargestellt (Nr. 3 — 4).

Alsdann werden die Formeln (30), (43), (48), (53) und (64), die die Berechnung von $P(x, t, u)$ für alle môglichen Fälle (zunächst jedoch nur für ganzzahlige Werte von x, t und u) auf die Berechnung von $P(x, 3, u)$ zurückführen, abgeleitet, weshalb nur ein Tarif für $P(x, 3, u)$ zusammengestellt zu werden braucht (Nr. 5 — 8).

Ferner werden die Rekursionsformeln (72), (74), (75) und (81), die die Berechnung von $F(x; 3; u) = D^{aa}_{x+2}\ P(x, 3, u)$ auf die Berechnung von $F(x; 3; 1)$ zurückführen,, abgeleitet (Nr. 9 — 11).

Sodann werden Kriterien (zwar negative, die aber praktisch auch als positive angesehen werden können) der fehlerlosen Berechnungen von $F(x\ 3, u)$ und $P(x, 3, u)$ abgeleitet (Nr. 12).

Zuletzt werden die gewonnenen Resultate auf gebrochene Werte von x, t und u ausgedehnt (Nr. 13 — 14), die Formeln (191) und (297), die die Berechnung von $P(x\ 3,\ u)$ für gebrochene Werte von x und u auf die Berechnung von $P(x,\ 3,\ u)$ für ganzzahlige Werte von x und u zurückführen, abgeleitet (Nr. 15 — 17 und 21) und die Grenzen des Restgliedes $\dfrac{R(x,\ u)}{D_{x+2}^{aa}}$ in (191) ermittelt (Nr. 18 — 20).

Międzynarodowe kongresy aktuarjuszy.

Międzynarodowe kongresy aktuarjuszy datują się od r. 1895, kiedy to odbył się pierwszy tego rodzaju kongres w Brukseli; następne odbywały się w Londynie (1898 r.), Paryżu (1900 r.), New-Yorku (1903 r.), Berlinie (1906 r.), Wiedniu (1909 r.), i Amsterdamie (1912 r.). Potem powstaje dłuższa przerwa, spowodowana wojną i okresem powojennym, tak że następny kongres (VIII) odbył się dopiero w 1927 r. w Londynie. Ostatni (IX) Międzynarodowy Kongres Aktuarjuszy odbył się w dniach 16 — 20 czerwca 1930 roku w Stokholmie pod patronatem następcy tronu szwedzkiego.

W skład honorowego prezydjum kongresu wszezł m. in. również p. Aleksander Prystor, ówczesny Minister Pracy i Opieki Społecznej Rzplitej Polskiej, którego depesza powitalna przyjęta była przez uczestników kongresu z żywem zadowoleniem.

Przewodniczącymi kongresu byli: p. Sven Palme, prezes Szwedzkiego Związku Zakładów Ubezpieczeń oraz prof. dr. Edvard Phragmen, prezes Szwedzkiego Insytutu Aktuarjuszy, wspomagani czynnie przez sekretarzy w osobach: er. Reinholda Palmqvista i dr. Pawła Bergholma. Pozatem w skład prezydjum wchodzili przedstawiciele tych zagranicznych członków kongresu, którzy byli obecni w większej liczbie; m. in. w skład kongresu weszli z ramienia polskich członków kongresu: prof: Władysław Strzelecki, jako vice-prezes kongresu i Dr. Tadeusz Poznański, jako sekretarz. Delegatami Rządu polskiego byli: prof. dr. Jan

Łazowski, ówczesny dyrektor Państwowego Urzędu Kontroli Ubezpieczeń i p. Izydor Wysłouch, naczelnik wydziału w departamencie Ubezpieczeń Społecznych Ministerstwa Pracy i Opieki Społecznej.

Kongres ten miał bardzo licznych uczestników, gdyż obecnych było około 500 członków, w tem z Polski 16 osób.

Następujące tematy były przedmiotem referatów, wygłoszonych na kongresie: 1. Zagadnienie podziału zysków, 2. Ubezpieczenia bez udziału w zyskach, a takież z udziałem w zyskach, 3. Ubezpieczenia ryzyka śmierci a ubezpieczenia oszczędnościowe, 4. Zagadnienie teorji ryzyka, 5. Badanie gruźlicy, 6. Technika ubezpieczenia chorobowego, 7. Zagadnienie rent starczych.

Ze strony Polski nie przedstawiono, niestety, ani jednego referatu na powyższe tematy. Czytając różne referaty, przedstawione kongresowi, musimy przyznać, że skromność polskich aktuarjuszy była zbyt wielka, gdyż poziom przedstawionych referatów był często bardzo niski, a w niektórych przypadkach referenci ograniczali się do streszczenia ustaw lub podawania danych statystycznych. Przy dobrych chęciach ze strony członków polskich można było przedstawić bardzo ciekawe i pouczające referaty. Zamiast nich delegacja polska przedstawiła kongresowi specjalną broszurę p. t. „O ubezpieczeniach w Polsce", opracowaną z okazji kongresu, która miała na celu zaznajomienie czytelnika zagranicznego (a także i krajowego) ze stanem ubezpieczeń w naszym kraju. Broszura ta, jak wynika z licznych wzmianek prasowych w pismach zagranicznych, przyjęta została z wielkiem uznaniem. Porusza ona całokształt spraw ubezpieczeniowych w Polsce, a w szczególności traktuje o wiedzy ubezpieczeniowej wogóle, o rozwoju i stanie obecnym ustawodawstwa w tej dziedzinie, o ubezpieczeniach społecznych i prywatnych oraz o prawno-publicznych zakładach ubezpieczeń, o ubezpieczeniach życiowych P. K. O. i o zasadach technicznych działalności zakładów ubezpieczeń na życie. Wydana ona została pod redakcją prof. dr. J. Łazowskiego, dyrektora Państwowego Urzędu Kontroli

Ubezpieczeń, przy współudziale kompetentnych sił fachowych, a mianowicie pp.: O. Einfelda, L. Grygołajtysa, Wł. Kozłowskiego, Z. Szymańskiego, J. Rabcewicza-Zubkowskiego i A. Weryhy. Praca ta wydana została w języku polskim, angielskim, francuskim i niemieckim.

Następny kongres (X-ty) odbędzie się w Rzymie w końcu kwietnia lub na początku maja 1934 r.

WYKAZ

organizacyj naukowych wiedzy ubezpieczeniowej w szczególności wiedzy aktuarjalnej (ułożony według spisu członków Stałego Komitetu Międzynarodowych Kongresów Aktuarjuszy).

Belgja.

Association Royale des Actuaires Belges, 13 rue du Congrès, Bruxelles.

Bułgarja.

Association des Actuaires Bulgares, rue Rakovski, 112, Sofia (Nazwa w języku oryginalnym nieznana).

Czechosłowacja.

Jednota pro vědy pojistné, Spálená, 76, Praha II
Spolek Československých Pojistných Techniku, 978, Havlickovo nám. Praha II.

Danja.

Den Danske Aktuarforening, 17, Gröningen, Kjobenhavn K.

Finlandja.

Association des Actuaires Finlandais, Helsingfors. (Nazwa w języku oryginalnym nieznana).

Francja.

Institut des Actuaires Français, 44, rue des Mathurins, Paris (VIII).

Hiszpanja.

Asociacion Actuarial Matematica de España, 17, Calle Fernando VI. Madrid.

Holandja.

Vereeniging voor Levensverzekeringswiskunde, Huize Canton, Baarn.

Italja.

Istituto Italiano degli Attuari, via Marco Minghetti, 17, Roma.

Japonja.

The Institute of Actuaries of Japan, C/o. Life Insurance Companies Association, Marunouchi, Tokjo.

Niemcy.

Deutscher Verein für Versicherungs-Wissenschaft, Johannisbergerstrasse 31, Berlin — Wilmersdorf.

Norwegja.

Den Norske Aktuarforening, Torvet, 5, Oslo.

Polska.

Polski Instytut Aktuarjuszy, ul. Kopernika 36/40, Warszawa.

Portugalja.

Association des Actuaires Portugais, 18, Avenida da Liberdade, Lisboa. (Nazwa w języku oryginalnym nieznana).

Rzplita Argentyńska.

Facultad de Ciencias Economicas, Charcas 1835, Buenos-Ayres.

Stany Zjednoczone A. P.

Actuarial Society of America, 393, Seventh Avenue, New-York City,

American Institute of Actuaries, 210, Wisconsin Street, Milwaukee, Wisc.

Casualty Actuarial Society, 75, Fulton Street, New-York City.

Fraternal Actuarial Association, C/o. The Maccabees, Detroit, Michigan.

Szwajcarja.

Association des Actuaires Suisses, Bureau fédéral des Assurances sociales, Berne.

Węgry.

Magyar Bitzositástudományi Társulat, Andrássy-ut, 43, Budapest, VI.

Wielka Brytanja.

Faculty of Actuaries in Scotland, 26, George Street, Edimbourg.

Institute of Actuaries, Staple Inn Hall, Holborn, London W. C. I.

STATUT

POLSKIEGO INSTYTUTU AKTUARJUSZY

Nazwa, cel, działalność i siedziba.

§ 1- Organizacja naukowa pod nazwą: Polski Instytut Aktuarjuszy, ma na celu:

a) popieranie i prowadzenie badań w zakresie matematyki ubezpieczeniowej i finansowej, statystyki matematycznej i ubezpieczeniowej, jak również badań w inych zakresach nauki, opartych na stosowaniu metod rachunku prawdopodobieństwa;

b) udział czynny w sprawach, dotyczących fachowego wykształcenia;

c) podejmowanie prac oraz wydawanie opinji na żądanie władz państwowych w sprawach, wypływających z powyższych celów Instytutu, w szczególności zaś w sprawie organizacji i nadzoru ubezpieczeń. Instytut Aktuarjuszy nie prowadzi spraw na żądanie osób lub instytucyj prywatnych.

§ 2. Cel swój osiąga Instytut przez:

a) obrady na zebraniach członków lub powoływanie do życia komisji dla prowadzenia poszczególnych prac;

b) publikacje naukowe;

c) wydawanie czasopisma specjalnego;

d) utworzenie biblioteki i czytelni fachowej;

e) tworzenie lub zarządzanie stypendjami, fundacjami, odpowiadającemi celom Instytutu i t. p.

§ 3. Siedzibą Instytutu jest miasto Warszawa. Terenem działalności, z zachowaniem przepisów miejscowych o stowarzyszeniach, jest Państwo Polskie.

§ 4. Instytut posiada pieczęć: „Polski Instytut Aktuarjuszy w Warszawie".

Członkowie, ich prawa i obowiązki.

§ 5. Instytut składa się z członków rzeczywistych, honorowych i korespondentów.

§ 6. Członkami rzeczywistymi mogą być osoby samodzielnie pracujące naukowo lub praktycznie na polach wskazanych pod § 1-a. W razie jeżeli kwalifikacje naukowe nie dają się ustalić na innych podstawach Rada Instytutu może poddać kandydata egzaminom wskazanym w specjalnym regulaminie.

§ 7. Członkowie rzeczywiści przyjmowani są na podstawach pisemnej deklaracji z załączeniem dowodów, uwzględniających wymagania p. 6, drogą balotowania przez Radę Instytutu.

§ 8. Członkowie rzeczywiści płacą przy wstąpieniu do Instytutu wpisowe jednorazowo Zł. 12, tudzież składkę roczną Zł. 12.

§ 9. Z listy członków Instytutu zostaje się skreślonym:
a) na własne żądanie;
b) na mocy uchwały Ogólnego Zebrania.

§ 10. Członkiem honorowym może zostać osoba specjalnie zasłużona w dziedzinie nauk matematyczno-ubezpieczeniowych. Członkami — korespondentami — członkowie instytutów zagranicznych, lub osoby, przebywające zagranicą i mające kwalifikacje na członków zwyczajnych.

§ 11. Członkowie honorowi i korespondenci mianowani są przez Walne Zebranie na wniosek Rady.

§ 12. Członkowie honorowi i korespondenci wolni są od wszelkich opłat na rzecz Instytutu.

§ 13. Czynny i bierny udział w głosowaniach i wyborach na urząd Instytutu przysługuje tylko członkom rzeczywistym.

§ 14. Fundusze Instytutu tworzą się:

a) z wpisowego i składek członków;

b) z subwencyj, darowizn i legatów, nie warunkujących zależności Instytutu.

Rada Instytutu.

§ 15. Sprawami Instytutu kieruje Zebranie Ogólne i Rada Instytutu.

§ 16. Rada Polskiego Instytutu Aktuarjuszy składa się z 5-iu członków, wybieranych przez Zebranie Ogólne na dwa lata. Ustępujący członkowie Rady mogą być wybrani ponownie. W razie ustąpienia kogoś z członków Rady przed terminem wyborów, na jego miejsce wchodzi osoba, która otrzymała największą zkolei liczbę głosów przy wyborach.

Uwagi. Członkowie honorowi i korespondenci nie posiadają czynnego i biernego prawa wyboru.

§ 17. Prezesa i sekretarza Rady wybiera Ogólne Zebranie bezpośrednio. Pozostali członkowie Rady dzielą między sobą funkcje na posiedzeniu konstytuującem. Korespondencję pieniężną, umowy i pokwitowania podpisuje w imieniu Instytutu prezes i sekretarz; wszelką inną korespondencję może podpisywać sekretarz.

§ 18. Do obowiązków Rady należy prowadzenie wszystkich bieżących spraw Instytutu, zawiadywanie funduszami i majątkiem, zawieranie umów w imieniu Instytutu, prowadzenie ksiąg i rachunkowości, zgodnie z przyjętemi zwyczajami i przepisami prawa, sporządzanie sprawozdań rocznych i budżetów dochodów i wydatków, zwoływanie zebrań ogólnych.

§ 19. Rada przedstawia Zebraniu Ogólnemu co rok sprawozdanie z działalności za rok ubiegły i projekt działalności na rok przyszły z bilansem i budżetem dochodów. Rok sprawozdawczy liczy się od 1 lipca do 30 czerwca każdego roku.

Zebranie ogólne.

§ 20. Zebrania Członków Instytutu są zwyczajne, nadzwyczajne i naukowe. Zwyczajne Zebranie Ogólne zwołuje Rada raz na rok w pierwszym kwartale roku sprawozdawczego. Nadzwyczajne Zebranie Ogólne zwołuje Rada na żądanie: $^1/_5$ członków Instytutu, Komisji Rewizyjnej albo z własnej inicjatywy. Zebranie naukowe zwołuje Rada Instytutu.

Uwaga. Członkowie honorowi i korespondenci posiadają na zebraniach zwyczajnych i nadzwyczajnych głos doradczy, na zebraniach naukowych korzystają z praw członków zwyczajnych.

§ 21. W zakres czynności Ogólnego Zebrania wchodzi: rozpatrzenie i zatwierdzenie sprawozdania Komisji Rewizyjnej, wybór władz Instytutu, decyzje w kwestji nabycia, zbycia i obciążenia nieruchomości, przyjęcia legatów i darowizn na rzecz Instytutu, sprawy, wychodzące poza zakres kompetencji Rady a dotyczące działalności Instytutu, stosownie do niniejszej Ustawy, zamknięcie Instytutu i rozporządzenie jego majątkiem na wypadek likwidacji.

§ 22. Ogólne Zebranie jest prawomocne w razie obecności połowy członków rzeczywistych Instytutu. W razie nieprzybycia dostatecznej ilości członków, Rada zwołuje w terminie jednomiesięcznym drugie zebranie, które jest ważne bez względu na liczbę członków. Uchwały zapadają zwykłą większością głosów; wyjątek stanowią zgromadzenia, zwołane celem zmiany ustawy i zamknięcia Instytutu, przy których konieczna jest obecność $^2/_3$ członków Instytutu; uchwały zapadają wówczas większością $^2/_3$ obecnych głosów.

Komisja Rewizyjna.

§ 23. Dla kontroli funduszów i rachunkowości Zebranie Ogólne wybiera co rok Komisję Rewizyjną, złożoną z 3-ch osób; Komisja Rewizyjna obowiązana jest, o ile uzna za potrzebne, a przynajmniej raz na rok, sprawdzić wszystkie książki, rachunki, dokumenty i kasę Instytutu, a wnioski swoje przedstawić Zebraniu Ogólnemu.

Likwidacja.

§ 24. W razie zamknięcia Instytutu Zebranie Ogólne wyznacza Komisję do zlikwidowania spraw i majątku Instytutu; postanawia o przeznaczeniu funduszów pozostałych, o ile nie mają one przeznaczenia specjalnego.

§ 25. Założycielami Instytutu są:

A. Danielewicz
S. Dickstein
R. Jabłonowski
T. Poznański
S. Mazurkiewicz
K. Horowicz
W. Strzelecki
H. Gruber
Z. Limanowski

Zatwierdzony przez Ministerstwo Spraw Wewnętrznych dnia 20.VI 1920 r. No. B. S. 2370.

LISTA CZŁONKOW
POLSKIEGO INSTYTUTU AKTUARJUSZY
w końcu r. 1932.

Członek honorowy:

A. B. Danielewicz.

Członkowie rzeczywiści:

H. Berliner, A. Czerwiński, S. Dickstein, M. Goldman, H. Greniewski, H. Gruber, H. Horowitz, R. Jabłonowski, Z. Limanowski, I. Lindeman, S. Mazurkiewicz, P. Moroz, L. Kopytowski, R. Pomeranz, T. Poznański, J. Rabcewicz — Zubkowski, Z. Reklewski, K. Smoliński, W. Strzelecki, T. Sznuk, J. Taborski, A. Weryha, M. Wieczorek.

Skład Rady

S. Dickstein — Prezes, W. Strzelecki — Vice Prezes, T. Poznański—Sekretarz, Z. Reklewski—Skarbnik, S. Mazurkiewicz — Członek Rady.

Druk. Koop. Prac. Druk. Zielna 4 Tel. 619-57