



BIBLIOTHECA
UNIV. JAGELL.
CRACOVENSIS

594951

Mag. St. Dr.

II



Specula Graec



594951 II

Mag. St. Dr.

Spec. Astr. Graec. 8^o 248.

I. H. LAMBERT
ACADEMIAE SCIENTIARVM ELECTO-
RALIS BOICAE MEMBRI ET PROFESSORIS HO-
NORARIJ, SOCIETATIS PHYSICO-MEDICAE BASI-
LEENSIS MEMBRI, REGIAE SOCIETATI SCIENTIARVM
GOETTINGENSI COMMERCIO LITERARIO
ADIVNCTI

INSIGNIORES
ORBITAE
COMETARVM
PROPRIETATES.



BIBLIOTEKI
OBSERWATORIUM
Krakowskiego.

AVGVSTAE VINDELICORVM,
SVMTIBVS EBERHARDI KLETT VIDVAE.
MDCCLXI.



PRAEFATIO.



Plurima superesse videntur, Matheos applicatae capita, quae etsi iam passim ab Auctoribus sint pertractata,

attamen ab eo fine, ad quem erant perduenda, immensum quantum distant. Duo potissimum sunt, quae moram nectere posse, primo quidem intuitu videntur. Quod si enim theoria vel maxime ob praxin excolatur, saepissime citatiori passu, illa neglecta vel obiter tractata, ad hanc properamus, eamque ingredimur viam, quae primo sese nobis offert, nulla habita breuitatis ambituumue ratione. Porro & ipsa

X 2

theo-

BIBLIOTHECA
UNIVERSITATIS
BRACOVILSIS

594 951

II

Bibl. Jag.

St. Dr. 2008.D. 16/31 (31)

PRAEFATIO.

theoria, quam curatius euoluendam esse prospicimus, haud raro speciem problematis intricatissimi prae se fert, atque cum eam leuiter adspicimus vel e limine tantum salutamus, ita videtur complexa & ardua, ut & eos qui laboris sunt patientissimi & quos in noua & elegantiora fert animus impiger, deterrere possit. Nescio tamen quaenam subinde felicioris successus spes intuentem penitiusque rimantem arrideat, ut cum labore improbo rem adgreditur, spem ipse euentus superet, certe hic viam sternat iis, qui ad veram absolutamque metam pertingere gestiunt.

Quae sese mihi obtulerunt specimina, utramque hanc difficultatis causam luce sua collustrantia, his edoctus sum, problema quoduis intricatius peculiarem sibi que propriam requirere methodum, peculiaremque artificiorum heuristicorum combinationem, quae nisi iunctim sumpta & suo quaeque ordine meditati succurrant, spem elegantioris solutionis fallunt, aut nonnisi per prolixiores ambages, eo quo deueniendum erat, conducunt. Accedit quandoque, ut solutio quaestionis vel ideo incassum tentetur, quod verum rei momentum adhucdum latet, atque saepissime,
quid

PRAEFATIO.

quid sibi velit id quod vel quaerimus vel iam inuenimus, menti sese subducit. Hoc vero ipso praetergredimur id in quo cardo rei vertitur. Quodsi porro theoria praestruenda reuera deprehendatur nimis complexa difficultatisque plena, expedit utique casum euoluere specialiore magisque concinnum, quo facto haud raro res praeter expectationem ita cadit, ut elegantiores proprietates, quas casus iste nobis offert, leui mutatione facta uniuersaliter patere atque ad casus omnes extendi posse facili negotio peruideamus. Contra ea haud raro huiuscemodi theoria difficilioris speciem mentitur, re vero actu tentata longe sese ostendit faciliorem. Denique casus iste, quem curatius examinare propositum est, pluries multifariis circumstantiis a re ipsa prorsus alienis ita videtur inuolutus, ut an istae remoueri tutoque praetermitti queant, primo quidem obtutu nequaquam lique scat, re autem curatius perlustrata non modo deprehendantur alienae verum & quandoque mere arbitrarie.

Exempla, quibus his assertionibus lux adfundatur, aliunde in medium heic proferre superfluum duco, quippe singula veluti

PRAEFATIO.

luti in summam collecta in hoc opusculo occurrunt, in quo *Proprietates insigniores orbitae cometarum* eodem prorsus modo euolutas dedi, quo tribus abhinc annis in tractatu *Les propriétés remarquables de la route de la lumière par les airs*, semitas luminis per plura media diaphana sphaerica eaque concentrica peruestigauit.

Plures utique iam prostant methodi orbitam cometæ ex datis tribus ipsius locis geocentricis, vel tentando, vel constructione, vel denique subducto calculo definiendi, unde hoc certe respectu de crambe bis, ter vel centies recocta sermonem heic esse iniiciendum iudicabunt, qui norunt, quaenam vestigia mihi hac in re erant premenda. Illustria sane si quæ vel maxime hoc nomen merentur, at ni fallor vestigia tantum, quæ a primis fontibus veluti per saltum eo deducebant, quo, praestructa enucleatori theoria, via concinniori deueniendum fuisset. Nota iam erant prima quibus cetera superstruerentur principia polique iura, at ab ipso hoc problemate, quo ex tribus observationibus eruenda erat cometæ orbita, quodque scopi primarii vices sustinet, nimis ista videbantur remota. Mirum tamen videri pote-

PRAEFATIO.

poterat, an elegantissimæ illæ proprietates, quibus gaudent sectiones conicæ, & in quibus eruendis summi geometræ veluti certatim ab antiquissimis retro temporibus operam collocarunt indefessam, prorsus inutiles atque superflue forent, simul ac cometarum orbitis essent adplicandæ? Res ipsa utique tentamine digna, spes haud inana, at superauit euentus, quippe elegantiores istæ proprietates, dum cometarum orbitis ita adplicantur, ut areae substituantur tempus numeris absolutis definitum, quantumuis iam sint concinnae, concinniores euadunt. Has iam ita in hoc opusculo congeffi, ut eas positiones, quæ independenter ab orbitis cometarum sectiones conicas in se spectatas concernunt, quo uniuersaliter paterent, lemmatum instar proponerem, easque hac ratione a ceteris, quæ ad euoluendas orbitarum proprietates quicquam facerent, distinguerem. Nouis iam nota interserere e re esse videbatur, quo clarius elucesceret positionum nexus. Ex nouis tamen ea tantum in medium protuli, quæ elegantiora essent & uniuersaliora, quibusque in apicum productis haud deessent, quæ ulterius progressuro viam ostendere possent, quæque subin-

PRAEFATIO.

subinde indicaui. Huc referas meditata de projectione orthographica in planum ecclyptices vel aliud quoduis utiliter ipsi substituendum. Similiter Lemmata quaedam in prima Sectione ipsi tractationi praefixa, & quae in Sectione IV. de differentia orbitarum parabolicarum, ellipticarum & hyperbolicarum breuibus differui. Orbitam potissimum parabolicam curatius perlustravi, atque theoremata & problemata ad eam spectantia luce sua ita videbantur conspicua, ut quae plerumque illustrationis ergo adferuntur exempla, hic deesse possent absque ullo claritatis detrimento. Orbitas vero ellipticas in ultima Sectione eatenus tantum peruestigavi, quatenus palam fieret, qua ratione elegantissimae orbitae parabolicae proprietates ceteris quoque sectionibus conicis essent adplicabiles. Hanc vero prouinciam si quis in se suscipere operae pretium esse ducat, utiliter in subsidium vocabit, quae summus EVLERVS eximia qua pollet ingenii sagacitate in *Theoria motuum Planetarum & Cometarum* demonstrata dedit.



PRO-

PROPRIETATES INSIGNIORES
ORBITAE COMETARVM.

SECTIO I.

Praestruuntur Lemmata uniuersaliora, quibus indoles Parabolae, variaeque ipsius proprietates in theoria motus Cometarum usui futurae exponuntur.

LEMMA I.

§. 1. Sit AF axis, F focus parabolae AN , Fig. 1., ducto radio vectore quocunque FN , & tangente NT , erit angulus $TNF = \frac{1}{2} \cdot NFB$.

DEMONSTRATIO.

Etenim per naturam parabolae est $FT = FN$, adeoque $FTN = TNF$. Sed $FTN + TNF = NFB$, quare $TNF = \frac{1}{2} NFB$.

LEMMA II.

§. 2. E vertice A erigatur AS ad axin normalis, quae tangentem TN secet in S , ducatur FS , dico angulum AFN esse bisectum, & triangula AFS , SFN esse similia.

A

DE.

DEMONSTRATIO.

Etenim per naturam parabolae est $TS = SN$, $FT = FN$, adeoque angulus $TFS = SFN$. Porro FS est ad tangentem TN normalis, adeoque triangulum FSN rectangulum. Sed ob angulum SAF rectum, triangulum FAS quoque est rectangulum, unde ob angulos AFS , SFN aequales, utrumque iisdem gaudet angulis. Sunt ergo similia.

COROLLARIUM I.

§. 3. Erit ergo $AF : FS = FS : FN$. Quare FS est media proportionalis inter FA & FN .

COROLLARIUM II.

§. 4. Cum sit $ASF = SNF$, erit $AF = SF$. sin $ASF = SF$. sin $SNF = FN$. sin FNT^2 . Quare dato radio vectore FN & angulo FNT , facillime dabitur distantia foci a vertice AF , & situs axis.

COROLLARIUM III.

§. 5. Cum angulus FSN constanter sit rectus, foco F & recta AS positione datis, ope normalis, foco F & quibusvis punctis S adplicandae dicto citius ducentur quotuis tangentes SN , parabolae ambitum vel sua sponte delineaturae.

SCHOLION.

§. 6. Propositiones hae longe uniuersalibus patent, atque paucis mutatis quibusvis sectionibus

nibus conicis adplicantur. Quod de parabola sequentem in modum palam fiet.

LEMMA III.

§. 7. Si ad duo puncta parabolae N , M ducantur tangentes NR , RM , atque e foco F agantur rectae FN , FM , FR , triangula NFR , RFM erunt similia, & producta tangente MR in T , angulus TRN erit $= NFR = RFM$.

DEMONSTRATIO.

E vertice A erigatur AT ad axin AF normalis, producantur tangentes RM , RN in T & S , atque agantur rectae FS , FT . Quoniam anguli FSR , FTR sunt recti (§. 2.) eidemque rectae FR insistant, puncta F , S , T , R erunt in peripheria circuli, cuius diameter FR . Quare $FST + FRT = 180^\circ$, adeoque $ASF = TRF = SNF$. Unde cum triangula ista sint similia, erit quoque $SFN = TFR$. Quare $SFT = NFR = SRT$. Est vero (§. 1.) $SNF = \frac{1}{2} NFB$, $TMF = \frac{1}{2} MFB$, unde $SNF - TMF = \frac{1}{2} NFM$. Sed per naturam quadranguli est $SNF - TMF = NFM - TRS$, adeoque $NFM - TRS = \frac{1}{2} NFM$, siue $TRS = \frac{1}{2} NFM = NFR$. Quare recta FR angulum NFM bisecat. Cumque sit $SNF = TRF$, erit quoque $FNR = FRM$, adeoque in triangulis FNR , FRM anguli respondentes sunt aequales, quare triangula ipsa sunt similia.

COROLLARIUM I.

§. 8. Erit ergo $FN:FR = FR:FM$. Adeoque FR est media proportionalis inter FN , FM . Unde $FN:FR = FR:FM = \sqrt{FN}:\sqrt{FM}$.

COROLLARIUM II.

§. 9. Datis ergo foco F & duobus parabolae punctis N , M , ob angulum NFM bisectum, & $FR = \sqrt{FN \cdot FM}$, facillime ducentur tangentes RNS , MRT , atque ad has normales FS , FT , proinde & TSA , & FA .

COROLLARIUM III.

§. 10. Similiter dato triangulo FNM dabitur triangulum FRM , quare & angulus RMF , eritque $AF = FM \cdot \sin RMF^2$ (§. 4.)

COROLLARIUM IV.

§. 11. Cum sit $FRM = FNR$, manente recta FN & tangente NR , angulus FRM erit constans, quaecunque sit rectae FM ad FN inclinatio. Uniuersaliter itaque patet methodus parabolam construendi supra (§. 5.) exposita.

COROLLARIUM V.

§. 12. Dueta chorda NM , erit summa angulorum $RNM + RMN = TRS = NFR$.

COROLLARIUM VI.

§. 13. Porro cum sit
 $NR:RM = \sin RMN:\sin RNM$

& ob

& ob angulum NFM bisectum

$$NR:RM = \sin RMF:\sin RNF$$

erit

$$\sin RMN:\sin RNM = \sin RMF:\sin RNF$$

COROLLARIUM VII.

§. 14. Ob triangula FNR , FRM similia, est
 $NR:RM = FN:FR$

Sed (§. 8.)

$$FN:FR = \sqrt{FN}:\sqrt{FM}$$

Quare (§. 13.)

$$\sqrt{FN}:\sqrt{FM} = \sin RMF:\sin RNF$$

LEMMA IV.

§. 15. Si ad tria parabolae puncta L , M , N Fig. 3. ducantur tangentes LR , RN , PMQ , puncta intersectionis P , R , Q una cum foco F erunt in peripheria circuli.

DEMONSTRATIO.

Est enim (§. 7.)

$$TRL = \frac{1}{2} \cdot LFN = \frac{1}{2} LFM + \frac{1}{2} MFN$$

Sed (§. cit.)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot LFM &= PFM \\ \frac{1}{2} \cdot MFN &= MFQ \end{aligned}$$

Quare

$$TRL = PFM + MFQ = PFQ.$$

Unde in quadrangulo $FPRQ$ anguli oppositi $PFQ + PRQ = 180^\circ$. Quae proprietas est quadrilateri circulo inscripti, constat ergo propositum.

A 5

COROL-

COROLLARIUM I.

§. 16. Tribus itaque parabolae tangenti-
bus positione datis, per puncta intersectionis
P, Q, R duci poterit circulus QRPF, qui per
focum parabolae transeat.

COROLLARIUM II.

§. 17. Proinde si positione dentur quatuor
parabolae tangentes, duo describentur circuli,
quorum intersectio focum parabolae exhibeat.

LEMMA V.

§. 18. Manente utraque tangente LR, RN, situs
tertia PMQ varietur utcumque, ratio inter partes ab-
scissas LP, RQ erit constans.

DEMONSTRATIO.

Est enim

$$\begin{aligned} LFP &= \frac{1}{2} LFM \\ LFR &= \frac{1}{2} LFN \end{aligned}$$

unde

$$PFR = \frac{1}{2} MFN = MFQ$$

adeoque addendo partem communem RFM,
erit

$$RFQ = PFM = LFP$$

Sed est quoque

$$PLF = QRF$$

unde triangula LPF, RQF sunt similia, adeo-
que ratio inter LP & RQ constans.

COROL-

COROLLARIUM I.

§. 19. Erit ergo
LP:RQ = LR:RN = LF:RF

siue

$$LP:RQ = \sqrt{LF}:\sqrt{NF}$$

COROLLARIUM II.

§. 20. Hinc quoque erit
RP:QN = \sqrt{LF}:\sqrt{NF}

COROLLARIUM III.

§. 21. Quare &
$$\frac{LR = PR + RQ \cdot LR}{RN}$$

siue

$$\frac{PR}{LR} + \frac{RQ}{NR} = 1.$$

COROLLARIUM IV.

§. 22. Cum sit

$$PFM = LFP$$

$$PFR = MFQ$$

erit addendo PFQ = LFR = \frac{1}{2} LFM

Est vero quoque FPM = FLP = FRQ

quare triangula LRF, RNF, PFQ sunt similia.

COROLLARIUM V.

§. 23. Quicumque ergo sit situs tangentis
PMF, manente utraque tangente LR, RN, ra-
tio inter latera FP, PQ, FQ erit constans.

A 4

LEM-

LEMMA VI.

Fig. 4. §. 24. Tribus parabolae tangentibus Rr , RQ , rq positione datis, si ducatur quarta quaecunque qPQ , ratio inter partes abscissas qP , PQ erit constans.

DEMONSTRATIO.

Etenim per corollarium quintum Lemmatis praecedentis (§. 23.) ratio inter PF , PQ nec non inter PF , Pq est constans, quare & ratio inter PQ , Pq constans erit.

LEMMA VII. PROBLEMA I.

§. 25. Tribus rectis Rr , RQ , rq positione datis, ducenda sit quarta qQ talis ut partes abscissae qP , PQ sint in ratione data.

SOLVTIO.

Problema hoc indeterminatum est. At si unica recta qQ ducta sit conditioni satisfaciens, dabuntur quatuor parabolae tangentis, quarum ope definietur situs foci F per §. 17. atque proinde constructur ipsa parabola per §. 9. siue quotlibet eius tangentis per §. 5. Cunctae vero vi lemmatis sexti conditioni problematis satisfaciunt.

Aliter.

Cum sit (§. 24.)

$$qP : PQ = SR : RM = rm : Sr$$

erit componendo

$$SR : SM = rm : mS$$

siue

siue

$$SM : Sm = SR : rm$$

Sed est quoque (§. 19.)

$$SM : Sm = QM : Sq$$

Quare

$$SR : rm = QM : Sq.$$

Data itaque ratione inter qP , PQ per analogiam primam dabitur RM & rm , adeoque situs punctorum contactus M , m . Assumpta itaque abscissa qualibet QM , erit haec ad Sq in ratione constante $Sr : rm$. Unde pro quouis puncto Q dabitur respondens q , quo duci possit recta qQ .

Aliter.

Cum sit

$$Pq : \sin qrP = qr : \sin qPr$$

$$PQ : \sin QRP = QR : \sin QPR$$

&

$$qPr = QPR$$

erit

$$Pq : PQ = \frac{qr \cdot \sin qrP}{\sin qPr} : \frac{QR \cdot \sin QRP}{\sin QPR}$$

Quare

$$\frac{PQ}{Pq} \cdot \sin qrP : \sin QRP = QR : qr = \frac{PQ}{Pq} : \frac{SR}{SR}$$

Assumpta itaque QR , dabitur quoque qr , & vicissim.

LEMMA VIII. PROBLEMA II.

§. 26. Duobus parabolae punctis N , M una cum Fig. 5. foco F positione datis construere parabolam.

A 5

SOLV-

SOLVTIO.

Diametro NM describatur semicirculus MVN, fiat $Fn = FN$, quo habeatur differentia nM. Haec transferatur ex N in V, ut chorda NV sit = nM. Ducatur MVH, atque ad hanc ex foco F demittatur normalis FH, erit haec axis parabolae. Denique fiat $AF = \frac{1}{2}(FM - FH)$ eritque A parabolae vertex. His vero datis facile absoluetur parabolae constructio.

DEMONSTRATIO.

Per naturam parabolae est
 $FM = FH + 2AF$
 $FN = FK + 2AF$

Quare differentia

$$FM - FN = FH - FK = HK = NV$$

Sed ob angulum NVM rectum, chorda NM subtendit semicirculum NVM, & NV est axi AH parallela.

SCHOLION.

§. 27. Aliam huius problematis solutionem iam supra indicauimus (§. 9.)

LEMMA IX. PROBLEMA III.

§. 28. Dato triangulo NFM inuenire aream segmenti NQM.

SOLVTIO.

Ponatur parabolae parameter = p, porro

$$\begin{array}{ll} AH = x & HM = y \\ AK = \xi & KN = \eta \end{array}$$

erit

erit area

$$\text{segmenti } AMH = \frac{2}{3}xy$$

$$\text{segmenti } ANK = \frac{2}{3}\xi\eta$$

$$\text{quadrilateri } KNMH = \frac{1}{2}(x - \xi) \cdot (\eta + y)$$

Quare area segmenti NQM erit

$$= \frac{2}{3}xy - \frac{2}{3}\xi\eta - \frac{1}{2}(x - \xi) \cdot (y + \eta)$$

siue debita reductione facta

$$= \frac{1}{2}(xy - \xi\eta - 3x\eta + 3\xi y)$$

At vero est

$$x = y^2 : p$$

$$\xi = \eta^2 : p$$

Quare substituendo erit area segmenti NQM

$$B = \frac{1}{6p}(y^3 - 3y^2\eta + 3y\eta^2 - \eta^3)$$

siue

$$B = (y - \eta)^3 : 6p - MV^3 : 24AF$$

Pendet itaque area segmenti NQM unice a differentia ordinarum KN, HM, & distantia foci a vertice AF.

Sit iam

$$FM = a$$

$$FN = b$$

$$NFM = 2c$$

$$NM = k$$

erit

$$2ab \cos 2c = a^2 + b^2 - k^2$$

fed

$$\cos 2c = 1 - 2 \sin^2 c$$

unde

$$4ab \sin^2 c = k^2 - (a - b)^2 = MV^2$$

$$MV = 2 \sin c \sqrt{ab}$$

Porro est (§. 8.)

$$FR = \sqrt{ab}$$

Unde Fig. 2.

Unde

$$RW = \sin c \cdot \sqrt{ab}$$

$$MW = a - \cos c \cdot \sqrt{ab}$$

$$\sin RMW^2 = b \sin c^2 : (a+b - 2 \cos c \cdot \sqrt{ab})$$

Sed (§. 4.)

$$AF = FM \cdot \sin RMW^2$$

Quare

$$AF = \frac{ab \cdot \sin c^2}{a+b - 2 \cos c \cdot \sqrt{ab}}$$

Est vero

$$B = MV^2 : 24 AF$$

Fig. 5.

Quare substituendo, erit

$$B = \frac{1}{2} \sqrt{ab} \cdot \sin c (a+b - 2 \sqrt{ab} \cdot \cos c)$$

COROLLARIUM.

§. 29. Facile iam hinc habebitur area sectoris parabolici NFMQ, si segmento NQM addatur area trianguli NFM, quae est

$$= \frac{1}{2} ab \cdot \sin 2c = ab \sin c \cdot \cos c$$

Quare dicta area sectoris NFMQ = A, erit

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{ab} \cdot \sin c \cdot (a+b) + \frac{1}{2} ab \cdot \sin c \cdot \cos c$$

siue

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{ab} \cdot \sin c (a+b + \sqrt{ab} \cdot \cos c)$$

LEMMA X. PROBLEMA III.

§. 30. Datis lateribus trianguli NFM inuenire distantiam foci F a vertice A, & aream sectoris parabolici NFM.

SOLVTIO.

Per formulas trigonometricas est

$$4ab \sin c^2 = (k+a-b) \cdot (k-a+b) = k^2 - (a-b)^2$$

$$4ab \cos c^2 = (k+a+b) \cdot (a+b-k) = (a+b)^2 - k^2$$

Quare

Quare cum fit (§. 28. 29.)

$$AF = ab \cdot \sin c^2 : (a+b - 2 \cos c \cdot \sqrt{ab})$$

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{ab} \cdot \sin c (a+b + \cos c \cdot \sqrt{ab})$$

erit substitutione facta

$$AF = \frac{k^2 - (a-b)^2}{4[a+b - \sqrt{((a+b)^2 - k^2)}]}$$

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{(k^2 - (a-b)^2) \cdot [a+b + \frac{1}{2} \sqrt{((a+b)^2 - k^2)}]}$$

COROLLARIUM I.

§. 31. Cum fit

$$(a+b) - \sqrt{((a+b)^2 - k^2)} = \frac{k^2}{(a+b) + \sqrt{((a+b)^2 - k^2)}}$$

erit quoque

$$AF = (k^2 - (a-b)^2) \cdot [a+b + \sqrt{((a+b)^2 - k^2)}] : 4k^2$$

COROLLARIUM II.

§. 32. Si angulus $c = \frac{1}{2} NFM$ fuerit 90° , erit $k = a+b$, quare hoc casu erit

$$AF = \frac{ab}{a+b} = ab : k$$

$$A = \frac{1}{2} (a+b) \sqrt{ab} = \frac{1}{2} k \sqrt{ab}$$

SCHOLION.

§. 33. Literae a, b, c, k , quibus in utroque problemate praecedente usi sumus, constanter eundem retinebunt significatum, quem hic ipsis tribuimus. Quod hic ideo notandum, quo superflua reddatur eiusdem denominationis continua repetitio.

LEM-

LEMMA XI. PROBLEMA V.

Fig. 2. § 34. Datis lateribus trianguli NFM invenire
angulum RMF vel SNF.

SOLVTIO.

Cum sit (§. 28.)

$$\sin RMF^2 = b \sin c^2 : (a+b-2 \cos c \sqrt{ab})$$

atque (§. 30.)

$$4ab \sin c^2 = k^2 - (a-b)^2$$

$$4ab \cos c^2 = (a+b)^2 - k^2$$

erit substitutione facta

$$\sin RMF^2 = \frac{k^2 - (a-b)^2}{4a[a+b - \sqrt{((a+b)^2 - k^2)}]}$$

similique ratione (§. 14.)

$$\sin SNF^2 = \frac{k^2 - (a-b)^2}{4b[a+b - \sqrt{((a+b)^2 - k^2)}]}$$

COROLLARIUM I.

§. 35. Cum sit (§. 1.)

$$MFB = 2RMF$$

erit

$$\cos MFB = 1 - 2 \sin RMF^2$$

adeoque

$$\cos MFB = 1 - \frac{k^2 - (a-b)^2}{2a[a+b - \sqrt{(a+b)^2 - k^2}]}$$

COROLLARIUM II.

§. 36. Si angulus NFM euadat $= 180^\circ$, erit
 $a+b=k$, adeoque

$$\cos MFB = 1 - \frac{2b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}$$

SCHO.

SCHOLION.

§. 37. Alio insuper modo exprimetur an-
gulus RMF simulque & angulus RMN per a, b, c ,
si quaeratur utriusque cotangens. Est enim
 $FRM = 180^\circ - c - RMF$. Quare

$$FR:FM = \sin FRM : (\sin FRM \mp c)$$

Sed est (§. 8.)

$$FR:FM = \sqrt{b} : \sqrt{a}$$

Dicto itaque angulo $RMF = v$, erit

$$\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sin v : \sin(c \mp v)$$

sive ob

$$\sin(c \mp v) = \sin c \cdot \cos v \mp \cos c \cdot \sin v$$

$$\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sin v : (\sin c \cdot \cos v \mp \cos c \cdot \sin v)$$

$$\sqrt{b}^2 : \sqrt{a}^2 = 1 : (\sin c \cdot \cot v \mp \cos c)$$

Unde

$$\cot v = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \cos c - \cot c.$$

Porro dicto angulo $FMN = \omega$, ob $TRN = RFM = c$
(§. 7.) erit

$$MNR = c - \omega$$

quare

$$NR:RM = \sin \omega : \sin(c - \omega)$$

Est vero (§. 14.)

$$NR:RM = \sqrt{b} : \sqrt{a}$$

Quare

$$\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sin \omega : \sin(c - \omega)$$

sive

$$\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sin \omega : (\sin c \cdot \cos \omega - \cos c \cdot \sin \omega)$$

Unde erit

$$\cot \omega = \cos c \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} \mp \cot c$$

Cum.

Cumque sit

$$\cot v = \operatorname{cosec} c \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} - \cot c$$

patet, mutato tantum signo, eandem formulam exhibere cotangentem utriusque anguli v , ω siue RMF, RMN.

LEMMA XII.

Fig. 6. §. 38. Bisecta chorda NM in G, ducatur WGR axi AH parallela, ducantur porro tangentes NR, RM, atque insuper recta FQ e foco F, erit $RQ = QG = QE$.

DEMONSTRATIO.

Producta tangente NR in P, agatur MP axi parallela, per naturam parabolae erit $RQ : PM = NR^2 : NP^2$

At vero $NR : NP = NG : NM = 1 : 2$

Quare $RQ : PM = 1 : 4$

Sed $RG : PM = 1 : 2$

Quare $RQ : RG = 1 : 2$

adeoque $RQ = QG$

Porro recta, quae parabolam in Q tangit, chordae NM est parallela, atque ad rectas FQ, QW sub eodem angulo inclinata, unde erit

$$QEG = QGE$$

adeoque $QE = QG = RQ$.

SCHO-

SCHOLION.

§. 39. Cum QW sit parabolae diameter, dabitur relatio inter FQ, QG, NM, eritque

$$NM^2 = 16 \cdot FQ \cdot QG.$$

Similiter erit

$$NP^2 = 16 \cdot FN \cdot QR = 16 \cdot FN \cdot QG$$

adeoque

$$NP : NM = \sqrt{FN} : \sqrt{FQ}$$

siue

$$NR : NG = \sqrt{FN} : \sqrt{FQ}$$

LEMMA XIII.

§. 40. Si per medium chordae G ducatur ordinata IG ad axin normalis, atque iungatur gF, erit $gF = (FN \mp FM) : 2$.

DEMONSTRATIO.

Est enim

$$Fg - FN = KN$$

$$FM - Fg = KV = KN$$

adeoque

$$Fg - FN = FM - Fg$$

siue

$$Fg = \frac{FN \mp FM}{2}$$

SCHOLION.

§. 41. Lemma hoc latius patet, atque singulis sectionibus conicis applicabile est.

B

LEM-

LEMMA XIV.

§. 42. *Ductis rectis FQ, QG, Fg ut in utroque Lemmate praecedente, erit Fg = FQ + QG.*

DEMONSTRATIO.

Est enim

$$GW = IH = FM - Fg$$

$$QW = FM - FQ$$

Quare subtrahendo

$$QW - GW = Fg - FQ = QG$$

adeoque

$$Fg = FQ + QG.$$

COROLLARIUM.

§. 43. Ob $QE = QG$ (§. 38.) erit quoque
 $Fg = FQ + QE$

LEMMA XV. PROBLEMA VI.

§. 44. *Datis lateribus trianguli FNM, inuenire distantiam FQ sive initii diametri QW a foco F.*

SOLVTIO.

Cum sit (§. 42. 40.)

$$Fg = FQ + QG = \frac{FN + FM}{2}$$

atque porro (§. 39.)

$$NM^2 = 16 \cdot FQ \cdot QG$$

erit

$$FQ + \frac{NM^2}{16 \cdot FQ} = \frac{FN + FM}{2}$$

Dicta

Dicta itaque $FQ = q$ erit

$$q = \frac{a+b}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b)^2 - k^2]}$$

SCHOLION.

§. 45. Mutato signo eadem formula dabit
 QE , eritque

$$QE = QG = \frac{a+b}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b)^2 - k^2]}$$

COROLLARIUM I.

§. 46. Hinc erit

$$FQ - QE = \frac{1}{2} \sqrt{[(a+b)^2 - k^2]} = FE$$

COROLLARIUM II.

§. 47. Est vero (§. 30.)

$$(a+b)^2 - k^2 = 4ab \cdot \cos^2 c$$

quare

$$FE = \sqrt{ab} \cdot \cos c = FR \cdot \cos RFM.$$

LEMMA XVI.

§. 48. *Ducta RL ad FM normali, erit FL = FE, & RL = GK.*

DEMONSTRATIO.

Est enim (§. 8.)

$$FR = \sqrt{ab}$$

$$RFM = c$$

adeoque

$$FL = \sqrt{ab} \cdot \cos c$$

$$RL = \sqrt{ab} \cdot \sin c$$

B 2

Sed

Sed (§. 30. 47.)

$$\sqrt{ab. \sin c} = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - (a-b)^2} = \frac{1}{2} MV = GK$$

$$\sqrt{ab. \cos c} = FE$$

Quare

$$RL = GK$$

$$FL = FE$$

LEMMA XVII.

Fig. 7. §. 49. Si tria puncta parabolae N, Q, M , una cum foco F neantur rectis FN, FQ, FM, NM, NQ, QM , triangula NFQ, QFM erunt in ratione simplici abscissarum NE, EM , & segmenta NMQ, NQ, QM erunt in ratione triplicata rectarum NM, NG, GM , si QG sit axi AF parallela.

DEMONSTRATIO.

Etenim triangula NQE, QEM sunt aequae alta, ob communem verticem Q , quare eorum areae sunt ut bases NE, EM . Similiter triangula NFE, EFM sunt aequae alta ob communem verticem F , quare eorum areae itidem sunt ut bases NE, EM . erit ergo componendo

$$\triangle NFQ : \triangle FQM = NE : EM$$

Porro ducta NV axi parallela, demissaque ordinata MV erit (§. 28.) area segmenti

$$NMQ = MV^3 : 24 AF$$

$$NQ = VW^3 : 24 AF$$

$$QM = MW^3 : 24 AF$$

Quare

$$NMQ : MV^3 = NQ : VW^3 = QM : MW^3$$

siue areae segmentorum NMQ, NQ, QM sunt in ratione triplicata abscissarum MV, VW, MW .

MW. Sunt vero hae abscissae in ratione abscissarum NM, NG, GM . Constat ergo propositum.

SCHOLION.

§. 50. Quodsi angulus NFM 20 aut 30 gradus non excedat, segmenta NQ, QM ratione triangularum NFQ, QFM , quibus adjacent sunt paruitatis contemnendae, quare sectores NFQ, QFM erunt proxime in ratione abscissarum NE, EM , chordae quae arcum integrum NM subtendit.

LEMMA XVIII. PROBLEMA VII.

§. 51. Quatuor rectis BL, BI, DK, DH positione datis, ducere quintam LH talem, ut partes abscissae HI, IK, KL sint in ratione data. Fig. 8.

SOLVTIO.

Sumto triangulo ABC , quod formant rectae puncta I, K, L secturae atque fiat $KI : IH = AB : Be$, porro $KL : KH = BC : Cg$ siue $LI : IH = AC : Cf$; hinc dabuntur puncta e, f, g in eadem recta sita. Producat igitur efg in H . Porro fiat $HD : DM = HK : KI$, unde dabitur punctum M . Ducatur porro MI ipsi DK parallela, atque recta per HI ducta erit recta quaesita.

Aliter.

Per trigonometriam erit

$$\sin \text{CKI} : \text{AL} = \sin \text{BAD} : \text{KL}$$

$$\sin \text{CKI} : \text{DH} = \sin \text{ADE} : \text{HK}$$

$$\sin \text{CIK} : \text{EH} = \sin \text{DEB} : \text{HI}$$

$$\sin \text{CIK} : \text{BL} = \sin \text{ABE} : \text{IL}$$

Unde fit

$$\frac{\text{AL} \cdot \sin \text{BAD}}{\text{KL}} = \frac{\text{DH} \cdot \sin \text{ADE}}{\text{HK}}$$

$$\frac{\text{EH} \cdot \sin \text{DEB}}{\text{HI}} = \frac{\text{BL} \cdot \sin \text{ABE}}{\text{IL}}$$

Fiat iam

$$\text{KL} : \text{HK} = 1 : m$$

$$\text{HI} : \text{IL} = 1 : n$$

erit

$$m(\text{AB} + \text{BL}) \sin \text{BAD} = \text{DH} \cdot \sin \text{ADE}$$

$$n(\text{ED} + \text{DH}) \sin \text{DEB} = \text{BL} \cdot \sin \text{ABE}$$

Unde porro

$$\text{DH} = \frac{m(\text{AB} + \text{BL}) \sin \text{BAD}}{\sin \text{ADE}}$$

$$\text{DH} = \frac{\text{BL} \cdot \sin \text{ABE} - n \cdot \text{ED} \cdot \sin \text{DEB}}{n \cdot \sin \text{DEB}}$$

adeoque

$$\text{BL} = n \cdot \sin \text{DEB} \left[\frac{m \text{AB} \sin \text{BAD} + \text{ED} \cdot \sin \text{ADE}}{\sin \text{ABE} \cdot \sin \text{ADE} - m n \sin \text{BAD} \sin \text{DEB}} \right]$$

Data vero BL, facile dabitur DH, unde & situs rectae HL.

SCHO-

SCHOLION I.

§. 52. Demonstratio solutionis prioris ex Lemmate sexto & septimo petitur. Sunt enim rectae AB, AC, BC, eg, LH tangentes parabolae. Ceterum si in formula, quam exhibet solutio posterior, lateribus uti praestet, eam sequenti ratione mutare licet. Primo enim abit in sequentem

$$\text{BL} = (m \cdot n \cdot \frac{\text{AB} \cdot \sin \text{BAD}}{\sin \text{ADE}} + n \cdot \text{ED}) :$$

$$\left(\frac{\sin \text{ABE}}{\sin \text{DEB}} - \frac{m \cdot n \sin \text{BAD}}{\sin \text{ADE}} \right)$$

Ducatur BD ipsi ED parallela, eritque

$$\text{AdB} = \text{ADE}$$

$$\text{AB} \cdot \sin \text{BAD} : \sin \text{ADE} = \text{Bd}$$

$$\sin \text{ABE} : \sin \text{DEB} = \text{Ee} : \text{eB}$$

$$\sin \text{BAD} : \sin \text{ADE} = \text{eD} : \text{Ae}$$

adeoque

$$\text{BL} = (m \cdot n \cdot \text{Bd} + n \cdot \text{ED}) : \left(\frac{\text{Ee}}{\text{eB}} - m \cdot n \cdot \frac{\text{eD}}{\text{Ae}} \right)$$

siue

$$\text{BL} = n \cdot \text{eB} \cdot \text{Ae} (m \cdot \text{Bd} + \text{ED}) : (\text{Ee} \cdot \text{Ae} - m \cdot n \cdot \text{eD} \cdot \text{eB})$$

SCHOLION II.

§. 53. Aliam huius problematis solutionem inuenias in *Aritmetica uniuersali* summi NEWTONI, qui idem ad eruendam Cometæ distantiam geocentricam adhibuit, ponendo exiguum orbitæ partem instar rectæ spectari posse, sumitque puncta H, I, K, L esse quatuor cometæ loca in planum Eccliptices proiecta.

B 4

LEM.

LEMMA XIX. PROBLEMA VIII.

Fig. 9. §. 54. Quatuor rectis positione datis AE, AG, BF, BH inscribere quadrilaterum datum $EFGH$.

SOLVTIO.

Ob rectas positione datas dabuntur anguli CAD, CBD, CAB, CBA . Constructo itaque quadrilatero $EFGH$, per angulos oppositos EG, FH ducantur circuli ita ut arcus EG, FH sint angulis EAG, FBH duplo maiores, atque facile obuium est puncta A, B , in peripheriis horum circulorum esse sita. Fiat porro arcus $Ea = 2 CAB$, arcus $Fb = 2 ABD$, atque per puncta b, a agatur recta $baBA$, quae in peripheria utriusque circuli situm punctorum B, A abscindet. Denique ducant HBC, FBD , eruntque EA, GA, FB, HB quatuor istae rectae quibus quadrilaterum $EFGH$ erat inscribendum.

SCHOLION.

§. 55. Facile patet, haud opus esse ut latera quadrilateri $EFGH$ data sint in eadem mensura, qua latera quadranguli $ABCD$, verum sufficit notos esse angulos E, F, G, H una cum ratione laterum inter se. Hac ratione usui esse poterit hoc problema, ubi cometae orbita iam proxime fuerit definita. Quod si enim proxime detur curuatura eius partis orbitae, quam cometa interuallo quatuor observationum percurrit, problema hoc voto magis satisfaciet ac praecedens, quod partem orbitae supponit esse rectam.

LEM-

LEMMA XX.

§. 56. Bifecta chorda NM parabolae in G , du- Fig. 10.
catur GQ axi AF parallela, neantur Q & focus F recta QF , denique chorda NM transferatur in nm , ita ut FQ eam sub angulo recto bifecet, dico puncta n, m esse in parabola nQm , cuius vertex Q , axis QF , focus F & arae sectorum nFm, NFM erunt in ratione subduplicata semilaterum rectorum.

DEMONSTRATIO.

Etenim ob $NG = GM$, & GQ axi AF parallelam, chorda NM erit parallela rectae, quae parabolam tangit in Q . adeoque $NEF = \frac{1}{2} QEB$, & $QG = QE$ (§. 38. 1.) Porro per naturam parabolae est

$$NM^2 = 16 FQ \cdot QG$$

adeoque &

$$nm^2 = 16 \cdot FQ \cdot QE$$

Quae aequatio est ad parabolam, cuius axis & distantia foci a vertice est FQ . Similiter ob $QG = QE$, area segmenti NQM erit ad aream segmenti nQm ut sinus anguli $QGE = QEG = NEF$ ad sinum totum. At in eadem quoque ratione sunt triangula FNM, Fnm , ob bases NM, nm aequales; Unde & integri sectores NFM, nFm sunt in ratione sinus anguli NEF ad sinum totum. Est vero (§. 4.)

$$\sin NEF : 1 = \sqrt{AF} : \sqrt{FQ} = \sqrt{2AF} : \sqrt{2FQ}$$

adeoque

$$NFMN : nFmn = \sqrt{2AF} : \sqrt{2FQ}$$

Sunt vero $2AF, 2FQ$ semilatera recta, unde constat propositum.

B §

SCHO-

SCHOLION.

¶ §. 57. Lemma hoc, si debite limitetur, ad singulas sectiones conicas extendi poterit. Idem quoque ita posse inuerti, ut ex data parabola nQm, deducatur quaeuis alia NQM, quae per verticem prioris Q transeat, vel me tacente patet.

LEMMA XXI. PROBLEMA IX.

§. 58. Data chorda NM & sagitta QG, inuenire aream segmenti NQM & sectoris NFM.

SOLVTIO.

Area segmenti nQm est $=\frac{2}{3}QE.nm$, trianguli nFm $=\frac{1}{2}FE.nm$, quare erit area sectoris

$$nFmQ = \frac{2}{3}QE.nm + \frac{1}{2}FE.nm$$

siue

$$nFmQ = \frac{1}{3}QE.nm + \frac{1}{2}FQ.nm$$

Est vero (§. 56.)

$$nFmQ : NFMQ = nmQ : NMQ = \sqrt{FQ} : \sqrt{AF}$$

$$nm = NM$$

$$QE = QG$$

Quare erit area

$$\text{segmenti } NMQ = \frac{2}{3}NM.QG \sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

$$\text{sectoris } NFMQ = NM \left(\frac{1}{3}QG + \frac{1}{2}FQ \right) \sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

Cum vero sit

$$NM^2 = 16.QG.FQ$$

erit

erit area

$$\text{segmenti } NMQ = \frac{2}{3} \sqrt{(QG^3 . AF)}$$

$$\text{sectoris } NFMQ = \left(\frac{1}{3}QG^2 + \frac{1}{2}NM^2 \right) \sqrt{\frac{AF}{QG}}$$

COROLLARIUM.

§. 59. Similiter erit area sectoris

$$NFMQ = NM \left(\frac{NM^2}{96.FQ} + \frac{1}{2}FQ \right) \sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

LEMMA XXII. PROBLEMA X.

§. 60. Data chorda NM = k & summa laterum FM + FN = a + b, inuenire aream sectoris FNQM.

SOLVTIO.

Cum sit (§. 58.)

$$NFMQ = NM \left(\frac{1}{3}QG + \frac{1}{2}FQ \right) \sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

atque porro (§. 44. 45.)

$$FQ = \frac{1}{2} [a + b + \sqrt{(a + b)^2 - k^2}]$$

$$QG = \frac{1}{4} [a + b - \sqrt{(a + b)^2 - k^2}]$$

erit substitutione debitaque reductione facta

$$NFMQ = \frac{k [a + b + \frac{1}{2} \sqrt{(a + b)^2 - k^2}]}{3 \sqrt{[a + b + \sqrt{(a + b)^2 - k^2}]}} \cdot \sqrt{AF}$$

COROL.

COROLLARIUM I.

§. 61. Cum sit
 $[a \pm b \pm \sqrt{(a \pm b)^2 - k^2}] \cdot [a \pm b - \sqrt{(a \pm b)^2 - k^2}] = k^2$
 erit quoque

$$\text{NFMQ} = \sqrt{[a \pm b - \sqrt{(a \pm b)^2 - k^2}] \cdot [a \pm b \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a \pm b)^2 - k^2}]} \frac{\sqrt{AF}}{3}$$

COROLLARIUM II.

§. 62. Huius formulae factor posterior
 $a \pm b \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a \pm b)^2 - k^2}$ leui mutatione abit in

$$\frac{1}{2} (a \pm b) \pm \frac{1}{2} [a \pm b \pm \sqrt{(a \pm b)^2 - k^2}]$$

adeoque formula ipsa mutatur in sequentem

$$\frac{3 \cdot \text{NFMQ}}{\sqrt{AF}} = \frac{1}{2} \sqrt{[(a \pm b) - \sqrt{(a \pm b)^2 - k^2}] \cdot (a \pm b) \pm \frac{1}{2} k \sqrt{[a \pm b \pm \sqrt{(a \pm b)^2 - k^2}]}}$$

fiat breuitatis ergo $a \pm b = g$, eritque

$$\frac{3 \cdot \text{NFMQ}}{\sqrt{AF}} = \frac{1}{2} g \sqrt{(g - \sqrt{g^2 - k^2})} \pm \frac{1}{2} k \sqrt{(g \pm \sqrt{g^2 - k^2})}$$

COROLLARIUM III.

§. 63. Hinc vero fit

$$\frac{3 \cdot \text{NFMQ}}{\sqrt{AF}} = \frac{1}{2} g \sqrt{\frac{g+k}{2}} - \frac{1}{2} g \sqrt{\frac{g-k}{2}} \pm \frac{1}{2} k \sqrt{\frac{g+k}{2}} \pm \frac{1}{2} k \sqrt{\frac{g-k}{2}}$$

adeoque

$$\frac{3 \cdot \text{NFMQ}}{\sqrt{AF}} = \frac{1}{2} (g \pm k) \sqrt{\frac{g \pm k}{2}} - \frac{1}{2} (g - k) \sqrt{\frac{g - k}{2}}$$

siue

siue breuissime

$$\frac{3 \cdot \text{NFMQ}}{\sqrt{AF}} = \left(\frac{g+k}{2} \right)^{3:2} - \left(\frac{g-k}{2} \right)^{3:2}$$

atque proinde area sectoris

$$\text{FNMQ} = A = \left[\left(\frac{a \pm b \pm k}{2} \right)^{3:2} - \left(\frac{a \pm b - k}{2} \right)^{3:2} \right] \cdot \frac{1}{2} \sqrt{AF}$$

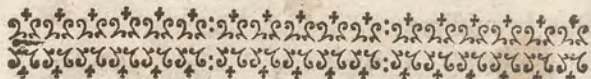
SCHOLION I.

§. 64. Hanc formulam admodum concinnam prolixiori ratiocinio erutam, infra breuius demonstratam dabimus, cum de inueniendo tempore, quo cometa datum quemlibet orbitae parabolicae arcum NM emittitur, sermo erit. Ceterum hic notabimus simile quid obtineri posse, si orbita fuerit sectio conica quaecunque, atque debitaе fiant mutationes & limitationes.

SCHOLION II.

§. 65. En itaque Lemmata potiora, quae praestruenda esse duxi, quo concinnior euauderet theoria motus cometarum in orbitis parabolicis incedentium. Videbimus vero formulas hactenus erutas simpliciores fieri, si in vicem areae sectoris NFMQ substituamus tempus quo cometa arcum NM percurrit.

PRO.



PROPRIETATES INSIGNIORES
ORBITAE COMETARVM.

SECTIO II.

Exponuntur Symptomata notabiliora motus Cometarum parabolici.

LEX CAELI I.

§. 66. *Singula corpora caelestia, quae circa Solem gyrauntur, Planetae nempe & Cometae, aguntur viribus centralibus, atque in Solem grauiasunt, ita ut grauitas decreseat reciproce ut quadratum distantiae.*

LEX II.

§. 67. *Proinde Tempora, quibus datum arcum orbitae percurrunt, areis sunt proportionalia, quas verrit radius vector, siue recta e centro Solis in centrum planetas vel cometas ducta.*

LEX III.

§. 68. *Ita ergo circa Solem aguntur, ut orbita, in qua incedunt, necessario sit Sectio conica, in cuius foco alterutro est centrum Solis.*

LEX

LEX IV.

§. 69. *Tempus quo cometa vel planeta arcum datum orbitae suae percurrat, est ut area, quam verrit radius vector, per radicem quadratam semilateris recti diuisa, si diuersi inter se comparentur cometas vel planetas.*

SCHOLION.

§. 70. Non est huius loci, ut exponamus, quanam in demonstrandis his legibus experientiae, quanam principiis mechanicis debeantur. Ansam dedit acutissimus KEPLERVS, cum tres posteriores ex operosissimis obseruationibus deduceret easque planetis applicaret. Primam ex obseruationibus deduxit summus NEWTONVS, remque omnem ad principia Mechanices transtulit, cum theoriae virium centralium prima strueret fundamenta. Legem tertiam potissimum eius necessitatem solito suo ingenii acumine solitaque sagacitate in apricum produxit inter Geometras facile Princeps JO. BERNOVLLIVS. Singulae iam ita ubique sunt obuiaes, atque velut in vulgus notas, ut actum agerem, si in iis denuo demonstrandis tempus terere vellem. Principiorum instar heic sunt, ex quibus specialiora deducuntur motuum caelestium symptomata. Haec vero ut nexu magis naturali & continuo ex legibus istis manare queant, nouis iam nota praefigere atque immiscere propositum est, quatenus haec ad rem nostram quicquam facient.

THEO.

THEOREMA I.

§. 71. Si duo pluresue Cometae in orbitis ellipticis incedant, quarum axes maiores sunt aequales, tempora periodica erunt aequalia.

DEMONSTRATIO.

Fig. 11. Sit F centrum solis unaque focus ellipseos ADB, axis maior sit AB, minor EG, semilatus rectum FD, erit per naturam ellipseos

$$FD.AC = CE^2 = AF.FB$$

Denotet porro $1:\pi$ rationem diametri circuli ad peripheriam erit area ellipseos

$$A = \pi.AC.CE$$

At vero per legem quartam (§. 69.) tempus est ut area per radicem quadratam semilateris recti diuisa, quare dicto tempore periodico $= T$, erit

$$T = \frac{\pi.AC.CE}{m\sqrt{FD}}$$

Est vero

$$\sqrt{FD} = CE : \sqrt{AC}$$

adeoque erit

$$T = \frac{\pi}{m}.AC^{3:2}$$

Pendet ergo tempus periodicum unice ab axe maiore ellipseos. Unde liquet propositum, simulque & sequens

THEOREMA II.

§. 72. Tempora periodica cometarum & planetarum in ellipsis incedentium sunt in ratione sesquuplicata semiaxium maiorum vel distantiae heliocentricae mediae.

DEMONSTRATIO.

Est enim distantia media $FE = \frac{AF+FB}{2} = AC$.

Sed vi theorematis praecedentis est

$$T = \frac{\pi}{m}.AC^{3:2}$$

Quare &

$$T = \frac{\pi}{m}.FE^{3:2}$$

PROBLEMA XII.

§. 73. Exhibere distantias & tempora cometarum planetarumue in numeris absolutis, una cum ratione, quam tempus & distantia inter se seruant.

SOLVTIO I.

Cum tellus moueatur in ellipsi, ponatur eius distantia media siue, quod vulgo aiunt, radius orbis magni $= 100000$, atque in his partibus definiantur distantiae quaelibet aliae. Porro efferatur tempus in diebus naturalibus, horumque partibus decimalibus. Est vero tempus periodicum telluris $= 365,25659$ dierum.

C

Quare

34 PROPRIETATES INSIGNIORES

Quare erit in formula theorematum praecedentis

$$AC = FE = 100000$$

$$T = 365,25659.$$

Hinc iam habebitur valor literae m , quae rationem quaesitam denotat. Est vero

$$m = \frac{\pi \cdot AC^{3:2}}{T}$$

adeoque

$$\log. AC^{3:2} = 7,5000000$$

$$\log. \pi = 0,4971499$$

$$7,9971499$$

$$\log. T = 2,5625980$$

$$\log. m = 5,4345519$$

unde

$$m = 271989,4.$$

$$T = \frac{\pi \cdot AC^{3:2}}{271989,4.}$$

SOLVTIO II.

Inuentis fractionibus decimalibus, radius orbis magni commodius fit $= 1$. Ponatur itaque

$$T = n \cdot \pi \cdot AC^{3:2}$$

erit $AC = 1$, quare

$$n = T : \pi$$

$$\log. T = 2,5625980$$

$$\log. \pi = 0,4971499$$

$$\log. n = 2,0654481$$

unde

$$n = 116,2648. = \frac{1}{m}$$

Sit

ORBITAE COMETARVM. Sectio II. 35

Sit itaque area sectoris cuiuslibet $NFM = A$, Fig. 5. semilatus rectum $= s$, tempus quo percurritur arcus NM , in diebus naturalibus exprimendum $= T$, erit

1° posito radio orbis magni $= 100000$

$$T = \frac{A}{m \sqrt{s}} = \frac{nA}{\sqrt{s}} = \frac{A : \sqrt{s}}{271989,4}$$

2° posito radio orbis magni $= 1$, erit

$$T = \frac{A}{m \sqrt{s}} = \frac{n \cdot A}{\sqrt{s}} = \frac{A \cdot 116,2648}{\sqrt{s}}$$

SCHOLION.

§. 74. In sequentibus plerumque utemur literis π , m , n , A , T , quarum ergo significatus constanter retinebitur idem, haud secus ac ille, quem supra (§. 33.) literis a , b , c , k tribuimus. Significatum literarum m , T , A eodem sensu iam adhibuit perillustri EVLERVS in *Theoria cometarum & planetarum*.

PROBLEMA XXIII.

§. 75. Inuenire celeritatem cometae in circulo incidentis.

SOLVTIO.

Sit semidiameter circuli $= r$, erit eius area $= \pi r^2$, adeoque tempus periodicum

$$T = \frac{\pi \cdot r r}{m \sqrt{r}} = \frac{\pi}{m} \cdot r^{3:2}$$

C 2

Hoc

Hoc tempore absoluit peripheriam $= 2\pi r$.
 Quare si celeritas exprimatur per arcum uno
 die naturali percurrendum, eaque dicatur $= K$,
 erit

$$K = 2\pi r : T = 2m : \sqrt{r}$$

THEOREMA III.

Fig. 12. §. 76. Si cometa incedat in parabola AM celeritas in dato quouis loco M est ad celeritatem, qua incederet in circulo MP ad eandem a Sole F distantiam ut $\sqrt{2}$ ad 1.

DEMONSTRATIO.

Cum tempora sint ut areae per radicem quadratum semilateris recti diuisae (§. 69.) erit tempus quo percurritur arcus parabolicus infinite paruus MN

$$T = MFN : m\sqrt{2}AF$$

tempus vero, quo percurritur arcus circularis MP

$$t = MFP : m\sqrt{FM}$$

At vero celeritates sunt ut arcus per tempus diuisi quare si dicantur C, K , erit

$$C = MN : T = MN . m\sqrt{2}AF : MFN$$

$$K = MP : t = MP . m\sqrt{MF} : MFP$$

adeoque

$$C : K = \frac{MN . \sqrt{2}AF}{MFN} : \frac{MP . \sqrt{MF}}{MFP}$$

Est vero (§. 4.)

$$AF = MF . \sin MNP^2 = MF . MP^2 : MN^2$$

Quare

Quare

$$MN\sqrt{AF} = MP\sqrt{MF}$$

Sed ob angulum MFN infinite paruum, areae sunt aequales, adeoque substituendo erit

$$C : K = \sqrt{2} : 1$$

COROLLARIUM.

§. 77. Cum celeritas circularis sit (§. 75.)

$$K = 2m : \sqrt{MF}$$

erit celeritas parabolica

$$C = 2m\sqrt{2} : \sqrt{MF}$$

Quae formula exprimit spatium, quod cometa uno die naturali iuxta directionem tangentialem percurreret (§. 75.) nisi vi grauitatis a recta deflesteretur.

SCHOLION.

§. 78. Hac proprietate motus parabolici uti licet, si proxime definienda sit longitudo arcus exiguo temporis interuallo percurfi, eaque, debita adhibita limitatione, haud difficulter orbitis ellipticis adplicatur. Propositionis concinnitas inde est, quod celeritas parabolica unice pendet a distantia cometae heliocentrica, atque perinde est, quanta sit parabolae parameter. At vero cum celeritas singulis momentis mutetur, exiguus propositionis ceteroquin notissimae est usus. En ergo alias uniuersaliores.

C 3

PRO.

PROBLEMA XIII.

Fig. 5. §. 79. Dato utroque radio vectore NF , MF & angulo NFM , inuenire tempus, quo cometa emittitur arcum parabolicum NM .

SOLVTIO.

Area sectoris $NFMQ$ est (§. 29.)

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{ab} \sin c (a+b + \sqrt{ab} \cos c)$$

Semilatus rectum (§. 28.)

$$s = 2AF = \frac{2ab \sin c^2}{a+b - 2\cos c \sqrt{ab}}$$

At vero (§. 75.) tempus

$$T = \frac{n \cdot A}{\sqrt{s}}$$

Quare substituendo, erit

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} \cdot (a+b + \sqrt{ab} \cos c) \sqrt{(a+b - 2\sqrt{ab} \cos c)}$$

COROLLARIUM I.

§. 80. Hac formula euoluta erit

$$18m^2 T^2 = (a+b)^3 - 3(a+b)ab \cos c^2 - 2ab\sqrt{ab} \cos c^3$$

siue

$$18m^2 T^2 = a^3 + b^3 + 3(a+b)ab \sin c^2 - 2ab\sqrt{ab} \cos c^3$$

ut adeo dato tempore T , ex quantitibus a , b , c alterutra inueniatur ope aequationis tertii gradus.

COROL-

COROLLARIUM II.

§. 81. Si fuerit $c = \frac{1}{2}NFM = 90^\circ$, erit $NFM = 180^\circ$, adeoque $\cos c = 0$, quare formula breuiffima

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} \cdot (a+b)^{3/2}$$

exhibet tempus quo cometa e puncto quouis M peruenit ad punctum ipsi e diametro oppositum.

COROLLARIUM III.

§. 82. Quodsi ergo detur tempus, quo cometa ab uno nodorum ad alterum pertingit, dabitur longitudo lineae nodorum $a+b$, eritque

$$a+b = (18mT)^{2/3}$$

PROBLEMA XV.

§. 83. Data summa radiorum vectorum FN , FM una cum chorda NM quae triangulum NFM claudit, inuenire tempus, quo percurritur arcus NQM .

SOLVTIO I.

Cum sit (§. 30.)

$$2AF = s = \frac{k^2 - (a-b)^2}{2[a+b - \sqrt{(a+b)^2 - k^2}]}$$

$A = \frac{1}{2}[a+b + \frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 - k^2}] \cdot \sqrt{k^2 - (a-b)^2}$
atque in genere (§. 75.)

$$T = \frac{nA}{\sqrt{s}}$$

C 4

erit

erit substitutione debitaque reductione facta

$$T = \frac{n[a+b+\frac{1}{2}\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]\sqrt{[a+b-\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}}{3\sqrt{2}}$$

SOLVTIO II.

Cum sit (§. 31.)

$2AF = [k^2 - (a-b)^2] \cdot [a+b+\sqrt{((a+b)^2-k^2)}] : 2k^2$
erit, hac formula utendo

$$T = \frac{kn[a+b+\frac{1}{2}\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}{3\sqrt{2}[\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}$$

SOLVTIO III.

Est (§. 63.)

$$\frac{3A}{\sqrt{AF}} = \left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{3:2}$$

Sed (§. 75.)

$$T = nA : \nu s = A : m\sqrt{2}AF$$

quare

$$T = \frac{\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{3:2}}{m \cdot 3\sqrt{2}}$$

COROLLARIUM I.

§. 84. Dicta summa radiorum vectorum $a+b=g$, formula, quam suppeditat solutio prima resoluitur in aequationem sequentem

$$0 = k^6 + 6g^2k^4 + 9g^4k^2 - 144m^2T^2g^2 - 432m^2T^2gk^2 + 72^2m^2T^2$$

COROL-

COROLLARIUM II.

§. 85. Similiter formula Solutionis tertiae abit in seriem

$$4mT = k\sqrt{g} - \frac{k^3}{4 \cdot 6 \cdot g^{3:2}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot k^5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot g^{7:2}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot k^7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot g^{11:2}} - \&c.$$

siue reductis fractionibus

$$4mT = k\sqrt{g} - \frac{k^3}{24 \cdot g^{3:2}} - \frac{k^5}{128 \cdot g^{7:2}} - \frac{3 \cdot k^7}{1024 \cdot g^{11:2}} - \frac{143 \cdot k^9}{98304 \cdot g^{15:2}} - \&c.$$

Quae series admodum est conuergens, quoties angulus NFM fuerit paucorum graduum. Ceteris casibus formula ipsa praestat, cum absoluta sit.

PROBLEMA XVI.

§. 86. Data chorda NM & sagitta QG=QE, Fig. 6. inuenire tempus quo cometa percurrit arcum NM.

SOLVTIO.

Cum sit (§. 58.)

$$A = \left(\frac{2}{3} \cdot QG^2 + \frac{1}{8} \cdot NM^2\right) \cdot \sqrt{\frac{AF}{QG}}$$

atque porro (§. 75.)

$$T = nA : \nu \sqrt{2}AF$$

C 5

erit

erit

$$T = n \left(\frac{2}{3} \cdot QG^2 + \frac{1}{3} NM^2 \right) : \sqrt{2} QG$$

PROBLEMA XVII.

§. 87. Data chorda NM & radio vectore FQ, inuenire tempus, quo cometa arcum NM emetitur.

SOLVTIO.

Per formulam problematis praecedentis est

$$T = n \left(\frac{2}{3} QG^2 + \frac{1}{3} NM^2 \right) : \sqrt{2} QG$$

Sed

$$\frac{NM^2}{16 \cdot FQ} = QG$$

Quare erit

$$T = \frac{n \cdot NM}{\sqrt{2}} \left[\frac{NM^2}{96 \cdot FQ^{3/2}} + \frac{1}{2} \sqrt{FQ} \right]$$

COROLLARIUM.

§. 88. Hac formula euoluta habebitur aequatio

$$NM^3 + 48NM \cdot FQ^2 = 96\sqrt{2} \cdot mT \cdot FQ^{3/2}$$

ex qua ea ratione quam in Tom. III. Actorum Helueticorum descriptam dedi, fit series

$$NM = \frac{2\sqrt{2} \cdot mT}{\sqrt{FQ}} - \frac{\sqrt{2} \cdot m^3 T^3}{3 \cdot FQ^{7/2}} + \frac{m^5 T^5 \sqrt{2}}{6 \cdot FQ^{13/2}} - \frac{m^7 T^7 \sqrt{2}}{9 \cdot FQ^{19/2}} + \&c.$$

siue

siue posito radio orbis magni = 1, atque substituto valore ipsius $m = \frac{1}{n}$, quem vidimus esse

(§. 73.)

$$n = 116,2648$$

prodibit series in numeris absolutis

$$NM = \frac{0,0243747 \cdot T}{\sqrt{FQ}} - 0,0000003006425 \frac{T^3}{FQ^{7/2}} + 0,0000000001109490 \frac{T^5}{FQ^{13/2}} - \&c.$$

Sunt vero logarithmi coefficientium

$$\text{primi} = 0,3860969 - 2$$

$$\text{secundi} = 0,4780495 - 7$$

$$\text{tertii} = 0,0451232 - 11$$

&c.

SCHOLION I.

§. 89. Haec series maxime videtur conuergens, at eo tantum casu citius conuergit, quo tempus T est paucorum dierum, atque radius vector FQ unitate parum sit minor.

SCHOLION II.

§. 90. Alio insuper casu usui esse poterit Fig. 10. haec formula, cum computanda est longitudo ordinatae nm, dato tempore, quo arcus nQm percurritur.

PROBLEMA XVIII.

§. 91. Data sagitta QG & radio vectore FQ, inuenire tempus, quo cometa percurrit arcum NQM.

SOLV.

SOLVTIO.

Cum sit (§. 86.)

$$T = n \left(\frac{2}{3} QG^2 + \frac{1}{3} NM^2 \right) : \sqrt{2} QG$$

atque

$$NM^2 = 16 FQ \cdot QG$$

erit

$$T = n \left(\frac{2}{3} QG^2 + 2 FQ \cdot QG \right) : \sqrt{2} QG$$

COROLLARIUM.

§. 92. Hinc erit vicissim

$$FQ = mT : \sqrt{8} QG - \frac{1}{2} QG = \frac{a+b}{2} - QG$$

$$a+b = mT : \sqrt{2} QG + \frac{1}{2} QG$$

THEOREMA IV.

§. 93. Sint omnia ut in lemmate vigesimo (§. 56.) tempora, quibus percurrentur arcus NQM , nQm sunt aequalia.

DEMONSTRATIO.

Patet enim ex Problemate praecedente, tempus definitum esse per radium vectorem FQ & sagittam QG . At vero in utraque parabola, vi Lemmatis citati idem est radius vector, & sagittae QG , QE sunt aequales. Unde quoque tempora quibus arcus nm , NM percurrentur aequalia sunt.

Aliter.

Tempora sunt ut areae per radicem semilateris recti diuisae (§. 69.) unde erunt ut $(NFMN : \sqrt{2} AF)$ ad $(nFmn : \sqrt{2} FQ)$ At vero (§. 57.)

$$\frac{NFMN}{\sqrt{2} AF} = \frac{nFmn}{\sqrt{2} FQ}$$

Quare & ipsa tempora sunt aequalia.

COROLLARIUM.

§. 94. Cum tempus definiatur per summam radorum vectorum $Fn + Fm$, siue $FN + FM$, & chordam nm , siue NM , hoc vero casu sit $nm = NM$ (§. 56.) atque tempus utrumque aequale, patet vicissim, esse quoque $nF + mF = NF + MF$. siue summam radorum vectorum esse aequalem.

SCHOLION.

§. 95. Insignis haec motus cometarum parabolici proprietates, si debite limitetur, ceteris quoque Sectionibus conicis adplicabilis est. Ceterum idem hic notandum, quod ad Lemma vigesimum (§. 56.) notauimus, parabolae NM , retento foco F substitui posse quamlibet aliam, quae transeat per punctum Q . Cumque tempus, quo absoluitur motus cometae per arcum quemuis NQM unice pendeat a longitudine chordae NM , & summa laterum $NF + MF$, hinc uniuersalissime euidens fit motus cometarum parabolici isochronismus, & quid sibi velit celeritas ad eandem a sole F distantiam in singu-

singulis quibusvis parabolis eadem. At vero accedamus ad ea, quae hinc sequuntur.

THEOREMA V.

§. 96. *Data summa radiorum vectorum FN, FM una cum chorda NM, tempus, quo traicitur arcus NQM, quem chorda NM subtendit, plane idem eruetur, quacunque utaris parabola, dummodo summa laterum FN + FM semilatare recto sit maior.*

DEMONSTRATIO.

Primum inde evidens est, quod chorda NM & summa laterum FN + FM definiendo tempori, quo percurritur arcus NQM satisfaciunt. Cum vero quaecunque assumatur parabola, ea transire debeat per punctum Q, patet maximum semilatus rectum fore = 2FQ. Est vero (§. 94) FN + FM = Fn + Fm, & per naturam parabolae Fm = Fn = FQ + QE adeoque Fn > FQ, unde FN + FM > 2FQ.

SCHOLION.

§. 97. Eligenda itaque parabola talis, ut eius semilatus rectum minor sit quam 2FQ. Quodsi ergo construenda sit scala singulis quibusvis parabolis inferitura, ea commodissime adhibebitur, cuius latus rectum = 0, siue quod eodem redit, linea recta, a centro solis in infinitum producenda. Etsi vero vix cometa in huiusmodi parabola rectilinea incedat, utiliter tamen assumi poterit, quippe pro definiendo motu cometarum in quibusvis aliis parabolis

parabolis instar moduli erit. Cumque haec parabola cum linea recta coincidat, cometa, qui in ea incedere ponitur, veluti in solem cadere videtur. Nascitur hinc vel sua sponte

DEFINITIO I.

§. 98. *Lapsus parabolicus cometae in solem est eiusdem in parabola incessus, cuius latus rectum = 0, siue cuius vertex cum foco in centro solis coincidit.*

COROLLARIUM I.

§. 99. Quoniam parabola in infinitum excurrit, lapsus parabolici initium est nullum, adeoque in data quavis a sole distantia iam adest definitus celeritatis gradus.

COROLLARIUM II.

§. 100. Cum celeritas cometae in parabola Fig. 13. incedentis unice pendeat ab ipsius a sole distantia (§. 78.) dicta hac distantia = MF, erit (§. 77.)

$$C = m\sqrt{2} : \sqrt{MF}$$

COROLLARIUM III.

§. 101. Cumque porro lapsus parabolici initium sit nullum (§. 99.) tempora commodius a centro solis retro numerantur, loco lapsus ascensum parabolicum assumendo.

PROBLEMA XIX.

§. 102. Definire temporum intervalla in lapsu parabolico, siue tempus, quo cometa a data distantia ad datam quamvis aliam delabitur.

SOLVTIO.

Sit F centrum solis, FM distantia altera, FN altera, atque quaeritur tempus, quo cometa labitur per spatium MN. Spectentur FM, FN ut radii vectores, MN ut chorda arcus percurrenti, qui hoc casu omni curuedine caret, atque erit (§. 83.)

$$T = \frac{\frac{(FN+FM+MN)^{3/2}}{2} - \frac{(FM+FN-MN)^{3/2}}{2}}{m^{3/2}}$$

Est vero hoc casu

$$MN = FM - FN$$

adeoque

$$\frac{FN+FM+MN}{2} = FM$$

$$\frac{FN+FM-MN}{2} = FN$$

Quare erit tempus quaesitum

$$T = \frac{FM^{3/2} - FN^{3/2}}{3m^{1/2}}$$

COROL.

COROLLARIUM I.

§. 103. Quodsi ergo quaeratur tempus, quo cometa ex M pertingit ad centrum solis F, erit $FN=0$, adeoque

$$T = FM^{3/2} : 3m^{1/2}$$

COROLLARIUM II.

§. 104. Hinc erit vicissim

$$FM = (18 T^2 : n^2)^{1/3}$$

siue substituto valore ipsius n pro radio orbis magni = 1, (§. 73.)

$$\log FM = \frac{2}{3} \log T - 0,9585412.$$

Qua ergo formula in numeris absolutis definitur distantia FM per tempus lapsus parabolici, & vice versa.

SCHOLION.

§. 105. Si in formula corollarii primi pro FM successiue substituantur distantiae planetarum mediae, inuenietur numerus dierum, quibus absoluitur lapsus parabolicus cometae in solem

e 5 diebus 807,50.

♃ - - - 325,00.

♃ - - - 51,54.

♃ - - - 27,40.

♀ - - - 16,85.

♁ - - - 6,60.

Lapsus parabolicus cometae per radium orbis magni curatius definitus est = 27d⁹h⁴¹'³⁴".

D

COROL.

COROLLARIUM.

§. 106. Cum lapsus hic sit dato quouis motu elliptico, parabolico & circulari celerior, numeri dierum, quos hic exhibuimus, denotant femoram cometæ breuissimam intra orbitam cuiuslibet planetæ. Unde mora breuissima intra orbitam

♃	est dierum	1615,00
♄	- - -	650,00
♅	- - -	103,08
♆	- - -	54,80
♇	- - -	33,70
♈	- - -	13,20

Ceterum si lapsus ponatur hyperbolicus, cogitari poterit mora dato quouis interuallo temporis minor. At cum lapsus parabolicus sit ellipticorum limes, moram lapsus parabolici breuissimam adpellare maluimus. Patet vero hinc cometas, qui se nobis spectandos sistunt, fere integrum quinquennium intra orbitam Saturni commorari, etsi nobis vix totidem menses conspici sint.

DEFINITIO II.

§. 107. Scala celeritatum parabolicarum nobis hic est ea, quæ ad datam quamuis a sole distantiam celeritatem cometæ in parabola incedentis exhibet.

THEOREMA VI.

§. 108. Si F denotet centrum solis, atque dato cuius puncto M adscribatur numerus dierum vel tempus, quo absolvitur lapsus parabolicus cometæ ex M
in

in F , recta FM hoc modo diuisa erit scala celeritatum parabolicarum.

DEMONSTRATIO.

Etenim quaelibet abscissa quantumvis exigua Mm exhibet spatium lapsus. Cum vero tempora adscripta sint, dabitur quoque tempusculum, quo absolvitur lapsus per Mm . At vero si spatium Mm per tempus diuidatur, habebitur celeritas. Unde recta FM exhibet celeritates lapsus parabolici. Cum vero celeritas cometæ in parabola quacunque incedentis ad eandem a sole distantiam sit eadem (§. 78.) consequens est, scalam FM in uniuersum exhibere celeritatem motus cometarum parabolici.

SCHOLION.

§. 109. Dantur quoque & alii modi huiusmodi scalas construendi, at hic, quem iam descripsimus ad scopum nostrum adcommodatior est.

PROBLEMA XX.

§. 110. Scalam celeritatum parabolicarum construere.

SOLVTIO.

Assumto radio orbis magni $FT = 1$, per formulam (§. 104.)

$$\log FM = \frac{2}{3} \log T - 0,9585412$$

D 2

pro

pro quouis numero dierum T computetur distantia respondens FM, haec in rectam FM transferatur ex F in M, atque puncto M adscribatur numerus dierum pro ea definienda assumtus, & scala erit constructa.

SCHOLION.

Fig. 14. §. 111. Huiusmodi scalam sistit figura decima quarta, quam ad 100 dies extendi. F est centrum solis, FT radius orbis magni, atque punctum T cadit in $27^d 9h 41' 34''$ (§. 105.) Quodsi eiusmodi scala construatur, assumta distantia FT maiori, commode distinguuntur horarum interualla. Et vel per se euidens est, in construenda orbita cometae retinendam esse distantiam FT, ad quam scala ipsa constructa est. Quod ergo, ne in sequentibus repetendum sit, hic monuisse sufficiat.

PROBLEMA XXI.

§. 112. Constructa orbita cometae parabolica scalae adcommodata, definire tempus, quo datus quilibet ipsius arcus percurritur.

SOLVTIO.

Fig. 15. I. Sit parabola AM, eius focus F, radius orbis magni FT. quaeritur tempus, quo percurritur arcus MN. Transferatur FN in Fv, bisecetur vM in g, eritque $Fg = \frac{FN + FM}{2}$.

Fig. 14. Similiter bisecetur chorda NM in G. Quo facto transferatur Fg in scalam, ex F in g, ubi

ubi cadit in $18^d 9h$. Cuiatur semilongitudo chordae, eaque in scala transferatur ex g in m & n, ubi cadit in $29^d 6^h 4h$. quae tempora si ab inuicem subtrahantur, remanet $22^d 20h$. Hoc itaque temporis intervallo percurritur arcus NM.

II. Quodsi arcus percursus MAn in foco F formet angulum MFn gibbum siue duobus rectis maiorem, eodem modo quaeritur semisumma radorum vectorum (FM + FN): 2, & dimidium chordae Mn. Illa cadit in diem 16, atque semilongitudo chordae ex 16^d antrosum & retrorsum translata in $0^d 3h$ & $43^d 5h$. At ob angulum MFn gibbum, sumenda est horum temporum summa. Unde $0^d 3h + 43^d 5h = 43^d 8h$ erit tempus quo percurritur arcus MAn.

III. Si quaeratur tempus, quo Cometa ex dato puncto M peruenit in punctum oppositum m, hoc casu radii vectores FM, Fm cum chorda Mm coincidunt, atque tempus breuissime inuenitur, si tota chorda Mm in scalam transferatur, ubi cadet in $39^d 10h$. Hoc ergo temporis intervallo cometa percurrit arcum MAM.

DEMONSTRATIO.

Etenim tempus plane idem est, quoties summa radorum vectorum & chorda arcus percursi fuerint eadem, quacunquē utaris parabola (§. 96.) Quare cum semisumma transferatur in Fg, & semilongitudo chordae ex g in m & n, erit mn longitudo chordae. Cum iam scalae

adscrip̄ta sint tempora, quibus cometa datum spatium mn̄ percurrit, patet, tempus, quo emetitur arcum MN hoc modo definitum iri.

SCHOLION I.

§. 113. Ex formula (§. 104. 110.)

$$\log FM = \frac{2}{3} \log T - 0,9585412$$

siue

$$FM = (18 T^2 : n^2)^{1/3}$$

patet, quadratum temporis quo cometa ex dato puncto *g* motu parabolico in solem *f* defertur esse in ratione cubi distantiae *Fg*. Hinc consequens est, in scala celeritatum parabolicarum tempora octuplo maiora a sole *F* esse quadruplo remotiora. Quippe quadratum octenarii aequatur cubo quaternarii. Hinc ergo etsi scalae nonnisi dies integri adscrip̄ti sint, facile tamen definientur horae, singula certe ternarum horarum interualla siue dierum semiquadrantes; Etenim quartae parti distantiae adscribenda est pars temporis octaua.

SCHOLION II.

Fig. 15. §. 114. Quo in praxi superflua reddatur chordae *NM* atque spatii *v M* bisectio, consultum est, scalam construere duplo maiorem. Quo facto ipsa radiorum *FM*, *FN* summa, totaque chorda *NM* dicto modo in scalam erunt transferendae, simulque, quod vel per se euidens est, hac ratione discerni poterunt temporum minutiae duplo minores.

SCHO-

SCHOLION III.

§. 115. Quo breuius atque facilius absolui possit scalae constructio computari poterit tabella relationem inter tempus & spatium lapsus parabolici exhibens (§. 110.) Tabella haec simul usui erit, ubi calculo rem peragere volueris. Eam ideo ad calcem libri adiecimus, cum maxime uniuersalis sit ipsius usus. Ceterum idem de tabella notandum, quod de scala notauimus (§. 113.) si tempora minora quaerantur.

SCHOLION IV.

§. 116. Ex problemate praesenti patet, usum scalae esse facilem & maxime expeditum, ubi ex summa radiorum *FM*+*FN* & chorda *NM* eruendum est tempus, quo arcus *NM* percurritur. At si problema inuertatur, atque ex summa radiorum & tempore quaeratur chorda, vel ex chorda & tempore summa radiorum, vel, quod saepius occurrit ex alterutro radio *FN*, tempore & semilatero recto parabolae radius alter *FM*, & chorda *NM*, res nonnisi tentando absolui poterit. Unde quo usus scalae in eruenda orbita cuiusdam cometae euadat facilior, quaestionem ita immutare e re erit, ut ex summa radiorum *FN*+*FM* & chorda *NM* quaeratur tempus. Hoc enim cum tempore reapse obseruato congruere debet.

D 4

THEO-

THEOREMA VII.

§. 117. Si chorda Mm transeat per focus F , tempus quo percurritur arcus MAN , quem subtendit, unice pendet a longitudine chordae, atque perinde est foci F situs siue ab alterutra extremitate M , in distantia.

DEMONSTRATIO.

Etenim hoc casu angulus c est $= 90^\circ$, unde (§. 81.)

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} \cdot (a \pm b)^{3/2}$$

Est vero $a \pm b = Mm$, quare

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} \cdot Mm^{3/2}$$

COROLLARIUM I.

§. 118. Quodsi ergo focus F cum initio chordae coincidere ponatur, haec formula itidem exprimit tempus lapsus cometæ parabolici in solem (§. 103.)

COROLLARIUM II.

§. 119. Hinc iam vicissim deducetur formula (§. 83.)

$$mT = \left[\frac{(FN \mp FM \mp NM)^{3/2} (FN \mp FM - NM)^{3/2}}{2} \right] : 3\sqrt{2}$$

Fig. 13. Labatur enim cometa ex M in N , tempus, quod impendit erit differentia temporum, quibus
ex

ex M & N ad centrum solis delaberetur, adeoque (§. 118.)

$$mT = [FM^{3/2} - FN^{3/2}] : 3\sqrt{2}$$

Est vero

$$FM = \frac{FM \mp FN \mp MN}{2}$$

$$FN = \frac{FM \mp FN - MN}{2}$$

Quare substituendo prodibit

$$mT = \left[\frac{(FM \mp FN \mp MN)^{3/2} (FM \mp FN - MN)^{3/2}}{2} \right] : 3\sqrt{2}$$

Hanc vero formulam uniuersalem esse inde patet, quod tempus T unice a chorda MN & summa radiorum vectorum pendet.

PROBLEMA XXII.

§. 120. Sint omnia ut in Lemmate duodecimo Fig. 6. (§. 38.), inuenire tempus quo percurritur arcus NQ vel MQ , si data sint latera trianguli NFM .

SOLVTIO.

Ob chordam NM in G bisectam, & QG axi AF parallelam, recta QG bisecat segmentum NMQ , & recta FG triangulum NFM : Quare mixtilineum $NQGF$ erit pars dimidia sectoris $NFMQ$. Subtracto itaque triangulo FQG vel idem addendo erit sector

$$NFQ = \frac{1}{2} NFMQ - FQG$$

$$MFQ = \frac{1}{2} NFMQ \mp FQG$$

D 5

Unde

Unde si tempora dicantur t, τ , erit (§ 73.)

$$t = (\frac{1}{2} NFMQ - FQG) : m\sqrt{2}AF$$

$$\tau = (\frac{1}{2} NFMQ + FQG) : m\sqrt{2}AF$$

sive dicto tempore, quo percurritur arcus
 $NQM = T$, erit

$$t = \frac{1}{2} T - FQG : m\sqrt{2}AF.$$

$$\tau = \frac{1}{2} T + FQG : m\sqrt{2}AF.$$

Est vero area trianguli

$$FQG = \frac{1}{2} QG \cdot GI$$

Sed per naturam parabolae

$$GI = 2\sqrt{(QF - AF) AF}.$$

Unde

$$\frac{FQG}{\sqrt{AF}} = QG\sqrt{(FQ - AF)}$$

Hinc fit

$$\frac{FQG}{\sqrt{AF}} = \sqrt{FQ} \cdot QG \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{AF}{FQ}\right)}$$

Sed ob QW, NV axi AF parallelas, erit
 (§. 4. 38.)

$$\sqrt{\frac{AF}{FQ}} = \sin MNV = MV : NM$$

adeoque

$$\sqrt{\left(1 - \frac{AF}{FQ}\right)} = NV : NM = (a - b) : k$$

Porro est

$$NM^2 = 16 FQ \cdot QG$$

sive

$$QG \cdot \sqrt{FQ} = \frac{1}{4} NM\sqrt{QG}$$

Unde

Unde (§. 45.)

$$\frac{FQG}{\sqrt{AF}} = \frac{a-b}{8} \left[\sqrt{\left(\frac{a+b+k}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{a+b-k}{2}\right)} \right]$$

Dicta iam breuitatis ergo summa laterum $a+b=g$
 erit

$$6\sqrt{2}.m.t = \left(\frac{g+k}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{3:2} - 3\left(\frac{a-b}{4}\right)$$

$$\left[\left(\frac{g+k}{2}\right)^{1:2} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{1:2}\right]$$

&

$$6\sqrt{2}.m.\tau = \left(\frac{g+k}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{3:2} + 3\left(\frac{a-b}{4}\right).$$

$$\left[\frac{g+k}{2} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{1:2}\right]$$

PROBLEMA XXIII.

§. 121. Data summa radiorum vectorum $NF + FM = a + b = g$, una cum tempore T , quo percurritur arcus NM inuenire longitudinem chordae $NM = k$.

SOLVTIO.

Per solutionem primam Problematis XV. est

$$Tm.3\sqrt{2} = [g + \frac{1}{2}\sqrt{(g^2 - k^2)}] \cdot \sqrt{[g - \sqrt{(g^2 - k^2)}]}$$

Unde fit

$$6\sqrt{2}.m.T = [2g + \sqrt{(g^2 - k^2)}] \cdot \sqrt{[g - \sqrt{(g^2 - k^2)}]}$$

Hinc porro

$$72m^2 T^2 = [5g^2 - k^2 + 4g\sqrt{(g^2 - k^2)}] \cdot [g - \sqrt{(g^2 - k^2)}]$$

atque porro

$$72m^2 T^2 - g^3 - 3gk^2 = -(g^2 - k^2)^{3:2}$$

Fiat

Fiat iam

$$g^2 - k^2 = v^2 \\ -72m^2 T^2 + 4g^3 = b$$

atque substitutione facta erit

$$v^2 + 3gv^2 = b$$

Qua ergo aequatione resoluta dabitur v , atque proinde & k . Adhibita vero methodo supra (§. 88.) citata, aequatio haec abit in alterutram seriem sequentem. Erit nempe

$$v^2 = g^2 - k^2 = \frac{b}{3g} - \frac{b^{3/2}}{(3g)^{3/2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{(3g)^4} \\ - \frac{3 \cdot 7 \cdot b^{5/2}}{2 \cdot 4 \cdot (3g)^{11/2}} + \frac{3 \cdot 8 \cdot 10 \cdot b^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (3g)^7} - \frac{3 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot b^{7/2}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot (3g)^{17/2}} \\ + \frac{3 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot b^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot (3g)^{19}} - \&c.$$

siue

$$v^3 = (g^2 - k^2)^{3/2} = b - 3g \cdot b^{2/3} + \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot g^2 b^{1/3} \\ - \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 6} \cdot 3^3 \cdot g^3 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot g^4}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot b^{1/3}} - \frac{2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3^5 \cdot g^5}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot b^{2/3}} + * \\ + \frac{2 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3^7 \cdot g^7}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 18 \cdot b^{4/3}} - \frac{2 \cdot 13 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3^8 \cdot g^8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 21 \cdot b^{5/3}} \\ + \&c.$$

Alterutra harum serierum semper est plus minusue conuergens, at nunquam utraque simul.

COROL.

COROLLARIUM I.

§. 122. Quoniam

$$v^2 = g^2 - k^2 \\ g = a + b$$

erit

$$v^2 = a^2 + b^2 - k^2 + 2ab$$

Sed per trigonometriam

$$a^2 + b^2 - k^2 = 2ab \cos 2c$$

Unde

$$v^2 = 2ab(1 + \cos 2c) = 4 \cos^2 c \cdot ab$$

Quare (§. 48.)

$$v = 2\sqrt{ab} \cdot \cos c = 2FE.$$

COROLLARIUM II.

§. 123. Cum ergo sit

$$v = 2FE$$

$$g = (a + b) = 2FG \quad (\S. 40.)$$

erit

$$k^2 = g^2 - v^2 = 4(Fg^2 - FE^2)$$

COROLLARIUM III.

§. 124. Hinc porro

$$2 \cdot FE^3 + 3 \cdot Fg \cdot FE^2 = 8 \cdot Fg^3 - 18 \cdot m^2 \cdot T^2$$

siue

$$2ab\sqrt{ab} \cdot \cos^3 c + 3(a+b)ab \cos^2 c = (a+b)^3 - 18m^2 T^2$$

Plane ut supra (§. 80.)

SCHOLION.

§. 125. Alia series, qua directe eruatur k per summam laterum $a+b=g$ deducetur ex ea, qua

qua supra inuenimus (§. 85.) si debite conuertatur. Est vero

$$4mT = k\sqrt{g} - \frac{k^3}{24.g^{3:2}} - \frac{k^5}{128.g^{7:2}} - \frac{3.k^7}{1024.g^{11:2}} - \&c.$$

Diuidatur per $g\sqrt{g}$, atque fiat $4mT:g\sqrt{g} = z$, eritque

$$z = \frac{k}{g} - \frac{k^3}{24.g^3} - \frac{1}{128} \cdot \frac{k^5}{g^5} - \frac{3}{1024} \cdot \frac{k^7}{g^7} - \&c.$$

Ponatur iam

$$\frac{k}{g} = z + az^3 + 6z^5 + \gamma z^7 + \&c.$$

atque erit

$$\frac{k^3}{24.g^3} = \frac{1}{24} z^3 + \frac{1}{8} az^5 + \frac{1}{8} a^2 z^7 + \frac{1}{8} \gamma z^9 + \&c.$$

$$+ \frac{1}{8} 6.. + \frac{1}{4} a6..$$

$$+ \frac{1}{24} aa..$$

$$\frac{k^5}{128.g^5} = + \frac{1}{128} z^5 + \frac{5}{128} az^7 + \frac{5}{64} a^2 z^9 + \&c.$$

$$+ \frac{5}{128} 6..$$

$$\frac{3.k^7}{1024.g^7} = + \frac{3}{1024} z^7 + \frac{21}{1024} az^9 + \&c.$$

$$\frac{143.k^9}{98308.g^9} = + \frac{143}{98308} z^9 + \&c.$$

&c.

Hinc

Hinc erit

$$\alpha = \frac{1}{24}$$

$$\epsilon = \frac{1}{8} \alpha + \frac{1}{128} = \frac{1}{196} + \frac{1}{128} = \frac{5}{384}$$

$$\gamma = \frac{1}{8} \alpha^2 + \frac{1}{8} \epsilon + \frac{5}{128} \alpha + \frac{3}{1024} = \frac{59}{9216}$$

&c.

adeoque

$$\frac{k}{g} = z + \frac{1}{24} z^3 + \frac{5}{384} z^5 + \frac{59}{9216} z^7 + \&c.$$

siue substituto valore ipsius $z = 4mT:g\sqrt{g}$

$$k = \frac{4mT}{\sqrt{g}} + \frac{8m^3 T^3}{3.g^{7:2}} + \frac{40.m^5 T^5}{3.g^{13:2}} + \frac{944.m^7 T^7}{9.g^{19:2}} + \&c.$$

$$\text{Cum sit } m = \frac{1}{n} = \frac{1}{116,2648} \text{ (§. 73.) patet}$$

hanc seriem tunc tantum esse conuergentem, cum tempus T fuerit paucorum dierum.

PROBLEMA XXIV.

§. 126. Data sagitta QG & tempore, quo percurritur arcus NQM , inuenire summam radiorum $FN + FM = g$.

SOLVTIO.

Cum sit (§. 79.)

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} \cdot a + b + \sqrt{ab} \cdot \text{cosc} \cdot \sqrt{a + b - 2\sqrt{ab} \cdot \text{cosc}}$$

atque

atque

$$\sqrt{ab} \cdot \cos c = FE = Fg - 2QG = \frac{a+b}{2} - 2QG$$

erit

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}(a+b) - 2QG \right) \cdot \sqrt{4QG}$$

Unde

$$a+b-g = \frac{mT\sqrt{2}}{\sqrt{QG}} + \frac{1}{3}QG$$

PROBLEMA XXV.

Fig. 5. §. 127. Dato semilatore recto & ordinata NK inuenire tempus a perihelio, siue quo cometa percurrit arcum AN.

SOLVTIO.

Sit semilatus rectum $= 2AF = s$, ordinata $NK = y$, erit area sectoris AFN

$$A = (y^3 + 3s^2y) : 12s$$

Dicto tempore $= T$, erit (§. 73.)

$$T = A : m\sqrt{s}$$

adeoque

$$T = \frac{y^3 + 3s^2y}{12ms^{3/2}}$$

COROLLARIUM I.

§. 128. Hinc erit

$$y^3 + 3s^2y = 12ms^{3/2}T$$

quae aequatio, ponendo breuitatis ergo

$$12ms^{3/2}T = q$$

abit

abit in seriem

$$y = \frac{q}{3s^2} - \frac{q^3}{3^4 \cdot s} + \frac{3q \cdot s^7}{3^7 \cdot s^{14}} - \frac{3 \cdot 8 \cdot q^7}{2 \cdot 3^{10} \cdot s^{20}} + \frac{3 \cdot 11 \cdot 10 \cdot q^9}{2 \cdot 3 \cdot 3^{13} \cdot s^{26}} - \frac{3 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot q^{11}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3^{16} \cdot s^{32}} + \&c.$$

COROLLARIUM II.

§. 129. Similiter erit per regulam CARDANI

$$\frac{y}{\sqrt{s}} = \frac{3}{\sqrt{s}} [6mT + \sqrt{(36m^2T^2 + s^3)}] + \frac{3}{\sqrt{s}} [6mT - \sqrt{(36m^2T^2 + s^2)}]$$

COROLLARIUM III.

§. 130. Cum sit

$$AK = y^2 : 2s$$

$$NF = y^2 : 2s + \frac{1}{2}s$$

data ordinata y , facile dabitur abscissa AK, & radius vector siue distantia heliocentrica FN, atque hinc porro angulus NFH, cum sit

$$\sin NFK = KN : FN$$

PROBLEMA XXVI.

§. 131. Data distantia perihelii AF una cum Fig. 1. radio vectore AN, inuenire tempus a perihelio.

SOLVTIO.

Cum sit in genere (§. 79.)

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} (a+b + \sqrt{ab} \cdot \cos c) \cdot \sqrt{(a+b - 2\sqrt{ab} \cdot \cos c)}$$

E

erit

erit hoc casu

$$a = FN$$

$$b = AF$$

$$\sqrt{ab} = FS$$

$$c = AFS$$

unde

$$\sqrt{ab} \cdot \cos c = AF$$

Quare

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} (FN + 2AF) \cdot \sqrt{(FN - AF)}$$

COROLLARIUM I.

§. 132. Hinc iterum erit

$$18m^2 T^2 = FN^3 + 3FN^2 \cdot AF - 4AF^3$$

siue

$$FN^3 + 3AF \cdot FN^2 = 18m^2 T^2 + 4AF^3$$

COROLLARIUM II.

§. 133. Cum per naturam parabolae fit

$$FN = AF + AK$$

erit substitutione facta

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} (AK + 3AF) \sqrt{AK}$$

unde

$$AK^3 + 6AK^2 \cdot AF + 9AK \cdot AF^2 = 18m^2 T^2$$

PROBLEMA XXVII.

Fig. 1. §. 134. Data distantia perihelii AF atque angulo NFA , inuenire tempus a perihelio.

SOLV-

SOLVTIO.

Dicatur $AF = f$, $AFS = SFN = c$, atque erit (§. 2.)

$$AS = f \cdot \tan c = \frac{1}{2}NK = \frac{1}{2}y$$

unde

$$y = 2f \tan c$$

siue dicto semilatore recto s , erit

$$y = s \cdot \tan c$$

Est vero (§. 127.)

$$T = \frac{y^3 + 3s^2 y}{12m s^{3/2}}$$

Quare substituendo

$$T = \frac{s \sqrt{s}}{12m} (\tan c^3 + 3 \tan c)$$

COROLLARIUM.

§. 135. Hinc erit per regulam CARDANI

$$\tan c \sqrt{s} = \sqrt[3]{6mT + \sqrt{(36m^2 T^2 + s^2)}} +$$

$$\sqrt[3]{6mT - \sqrt{(36m^2 T^2 + s^2)}}$$

PROBLEMA XXVIII.

§. 136. Inuenire distantiam perihelii siue semilatus rectum parabolae in qua cometa diutissime intra orbitam dati cuiusdam planetae commoretur.

SOLVTIO.

Sit F centrum solis, AM orbita cometae, A Fig. 12. eius perihelium, MP orbita cometae, tempus,

E 2

quo

quo percurritur arcus MA est semimora intra orbitam MP. Quare erit (§. 132.)

$$18m^2 T^2 = FM^3 + 3FM^2 \cdot AF - 4AF^3$$

adeoque differentiendo

$$0 = 36m^2 TdT = 3FM^2 \cdot dAF - 12AF^2 \cdot dAF$$

unde

$$4AF^2 = FM^2$$

$$FM = 2AF$$

Debet ergo distantia planetae heliocentrica una esse semilatus rectum parabolae, quae moram cometae intra orbitam planetae reddat maximam.

PROBLEMA XXIX.

§. 137. Inuenire tempus morae maximae cometae in parabola incedentis intra datam planetae orbitam.

SOLVTIO.

Cum sit

$$18m^2 T^2 = FM^3 + 3FM^2 \cdot AF - 4AF^3$$

atque pro mora maxima

$$\frac{1}{2} FM = AF$$

erit substitutione facta

$$18m^2 T^2 = FM^3 \left(1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2FM^3$$

unde

$$T = \frac{1}{3} n \cdot FM^{3/2}$$

Quae est semimora maxima, unde mora integra erit $\frac{2}{3} n \cdot FM^{3/2}$

COROLLARIUM.

§. 138. Quoniam tempus morae breuissimae est (§. 103. 105.)

$$T = \frac{1}{3} n \sqrt{2} \cdot FM^{3/2}$$

patet,

patet, moram maximam ad minimam esse in ratione $\sqrt{2}$ ad 1.

SCHOLION I.

§. 139. Quodsi pro distantia FM substituantur distantiae planetarum mediae, tempus morae maximae cometae in parabola incedentis erit intra orbitam

♄ dierum 2282,66.

♃ - - - 919,28.

♂ - - - 145,80.

♆ - - - 77,50.

♀ - - - 47,66.

♁ - - - 18,67.

SCHOLION II.

§. 140. Utraque mora cum tempore planetae periodico conferri poterit hoc modo. Vidimus (§. 75.) tempus periodicum esse

$$= \frac{\pi}{m} \cdot FM^{3/2}$$

Sed mora breuissima = $\frac{\sqrt{2}}{3m} \cdot FM^{3/2}$

maxima = $\frac{2}{3m} \cdot FM^{3/2}$

Unde tempus planetae periodicum erit ad moram cometae breuissimam = $3\pi : \sqrt{2} = 20 : 3$, ad maximam vero = $3\pi : 2 = 33 : 7$.

E 3

PRO-

PROPRIETATES INSIGNIORES
 ORBITAE COMETARVM.

SECTIO III.

Perlustrantur motus cometarum adparentiae, atque varii exponuntur modi orbitam veram ex observationibus determinandi, si ista sit parabolica.

DEFINITIO III.

§. 141. *Notae characteristicae orbitae cometarum siue differentiae specificae sunt illa capita, quibus orbita cuiuslibet cometae a cunctis ceteris discernitur.*

SCHOLION I.

§. 142. Duo sunt capita, in quibus singulae orbitae congruunt. Primo enim oportet fit sectio conica, atque secundo haec ita posita est, ut eius focus cum centro solis coincidat. Contra ea dantur sex capita, quibus singulae orbitae ab inuicem sunt distinguendae, suntque

- 1°. *Distantia perihelii a sole.*
- 2°. *Ratio inter banc distantiam & semilatus rectum, siue quod eodem redit, tempus periodicum, si orbita sit elliptica vel circularis.*
- 3°. *Tem-*

- 3°. *Tempus, quo cometa fuit in perihelio, vel in dato orbitae suae puncto haesit.*
- 4°. *Inclinatio orbitae ad planum ecliptices.*
- 5°. *Situs lineae nodorum siue longitudo nodi ascendentis heliocentrica.*
- 6°. *Elongatio axeos orbitae a linea nodorum, siue longitudo perihelii heliocentrica.*

Prima duo capita ipsam sectionis conicae speciem eiusque magnitudinem veram, caput tertium epocham, reliqua tria situm orbitae ratione eclipticae suppeditant, ut adeo si singula adhibeantur, orbita cometae ab omnibus aliis distinguatur.

SCHOLION II.

§. 143. Ad definienda sex ista capita tres requiruntur observationes siue tria loca cometae geocentrica, longitudes puto & latitudes e tellure obseruandae. Constat vero partem orbitae quam cometa percurrit, dum se terricolis spectandum ficit, admodum esse exiguam. Hinc fit, ut caput secundum siue tempus periodicum ex tribus obseruationibus sibi admodum vicinis vix definiiri possit. Quodsi vero redeat cometa iam pridem obseruatus, datur tempus periodicum, atque ex hoc curatius definitur longitudo axis maioris ellipso. (§. 72.)

SCHOLION III.

§. 144. Porro obseruationibus constat, orbitas cometarum, si quidem ellipticae sint, admodum esse oblongas, ut adeo exigua illa pars, quam

quam tempore visibilitatis percurrunt, absque notabili errore cum parte orbitae parabolicae confundatur. Etenim cum tempus periodicum plerumque sit plurimum saeculorum, aphe- lium non potest non a sole esse remotissimum. Contra ea perihelia eorum cometarum, qui nobis sunt visibiles, fere semper cadunt intra orbitam telluris, adeoque soli sunt maxime vi- cina, quo fit ut ratio inter distantiam perihelii a sole & semilatus rectum ab ea fere non dif- ferat, quae obtinet, si orbita fuerit parabolica.

THEOREMA VIII.

Fig. 15. §. 145. Si cometa in parabola incedens obseruetur in utroque nodo N, n , e tellure in E , e haerente, dabitur situs & longitudo lineae nodorum, distantia perihelii a sole & situs axeos parabolae, sed incognita remanet orbitae inclinatio.

DEMONSTRATIO.

Etenim ob data puncta eclipticae, quae co- meta e tellure traicere visus est, datur situs rectorum EN, en . Porro ob datum temporis interuallum, quo cometa ex N peruenit in n , dabitur longitudo lineae nodorum Nn (§. 117.) eritque

$$Nn^{1/2} = 3 \sqrt{2.m.T}$$

Quare quaestio eo redit, ut per centrum solis F agatur recta cuius pars Nn a rectis EN, en positione datis abscissa sit datae longitudinis. Hac vero ducta dabitur situs axeos & distantia perihelii AF , adeoque tota parabola. Contra ea cum puncta obseruata N, n sint in plano eclip-

ecclipticae, ex iis solis angulus inclinationis definiri nequit, quare inclinatio remanet inde- finita.

COROLLARIUM.

§. 146. Quodsi ergo accedat obseruatio tertia non modo dabitur inclinatio orbitae, verum & cum quadruplex sit problematis so- lutio, definiri poterit, quatenam reapse obti- neat.

SCHOLION.

§. 147. Casus huius theorematis utique ra- rissimus est. Plerumque enim vel nodorum alteruter nimis est a tellure remotus, vel visi- bilitati cometae in ipso haerentis obstat solis vicinitas.

THEOREMA IX.

§. 148. Si cometa e tellure bis obseruetur, atque in alterutra obseruatione versetur in perihelio orbitae parabolicae, dabitur tota orbita eiusque situs.

DEMONSTRATIO.

Assumta enim distantia geocentrica pro ea ob- seruatione, quae tempore celebrati perihelii facta est, dabitur distantia heliocentrica adeo- que distantia perihelii & situs axeos. Unde hoc ipso dabitur orbita atque elongatio come- tae a perihelio tempore obseruationis alterius, siue punctum N . Quodsi ergo parabola circa axin rotetur, punctum N incidere debet in
E 5 rectam

rectam e secundo loco telluris in secundum locum cometae ductam, cuiusque positio data est. Quod si fuerit, distantia geocentrica assumpta vera est. Sin minus alia assumenda, donec huic conditioni satisfiat. Quod cum necessario alicubi fieri debeat, consequens est problema esse determinatum, atque duas observationes determinandae orbitae cometae sufficere, si iste tempore alterutrius observationis extiterit in perihelio.

SCHOLION.

Fig. 6. §. 149. Theorema hoc ad quaelibet duo alia cometae loca N, M extenditur, si detur alteruter angulorum RMF, RNF, sub quibus orbita radios vectores FM, FN fecat.

THEOREMA X.

§. 150. Si in globo caelesti per locum solis & cometae geocentricum ducatur circulus sphaerae maximum, hic simul transibit per locum telluris & cometae heliocentricum.

DEMONSTRATIO.

Etenim circulus iste refert sectionem sphaerae caelestis a plano factam, quod transit per centra solis, telluris atque cometae. Unde cum rectae, quae iungunt ista centra sint in hoc plano, atque ad fixas usque productae ibidem referant loca telluris & cometae e sole, nec non loca solis & cometae e tellure visa, constat propositum.

COROL-

COROLLARIUM.

§. 151. Eandem ob causam, cum cometa moueatur in plano, quod per centrum solis transit, loca singula cometae heliocentrica erunt in circulo sphaerae maximo.

SCHOLION.

§. 152. Usui esse poterit hoc theorema, si Fig. 7. inueniatur formula concinna rationem inter angulos NFQ, QFM & tempora exhibens quibus percurruntur arcus NQ, QM. Etenim hi anguli sunt arcus circuli, qui loca cometae heliocentrica refert, a circulis e locis solis per loca cometae geocentrica ductis intercepti.

PROBLEMA XXX.

§. 153. Si dentur quatuor observationes cometae exiguo interuallo temporis ab inuicem remotae, orbitae situm & magnitudinem approximando definire, si haec fuerit parabolica.

SOLVTIO.

Quoniam ob exigua temporum interualla arcus a cometa a prima observatione ad quartam percurfus instar rectae haberi potest, aequabili celeritate percurfus, orbita cometae siue quatuor eius loca obseruata concipiuntur in planum ecliptices proiecta, sintque H, I, K, L. Porro rectae e locis telluris in loca cometae ductae sint EH, EI, AK, AL; quae cum referant cometae longitudes geocentricas, positione sunt datae. Unde ergo delabimur ad Lem.

Lemma XVIII, (§. 51.) cum ducenda sit recta HL talis, quae a rectis AL, AK, EI, EH positione datis in tres partes LK, KI, IH temporibus proportionales secetur.

Hac recta constructa retineantur puncta extrema H, L, atque in subsidium vocatis latitudinibus cometæ geocentricis, erectis e punctis H, L perpendicularibus, definiuntur duo puncta orbitæ cometæ a veris haud ita multum abhorrentia. Unde per Lemma V. dabitur tota orbita (§. 26.). Cumque itidem hinc detur tempus per Problema XV. (§. 83.) experiri datur, an cum tempore observato congruat, siue plus minusue ab eo differat. Posterius si fuerit, ut vel necessario esse solet, retenta orbita hoc modo constructa quaerantur in ea loca cometæ, in quibus iste esse debuisset tempore utriusque observationis intermediae, si tempora observata in computata mutentur. Quo facto dabitur quadrilaterum EFGH, ab eo quod vera cometæ loca efformant longe minus discrepans ac recta primo assumpta. Hoc vero in eclipticam est proiiciendum, atque retentis angulis & ratione laterum quaestio eò reducitur, ut quadrilaterum simile quatuor rectis AE, AG, BF, BH positione datis inscribatur. Quod fiet ope Lemmatis IX. (§. 54.). Retentis iterum duobus punctis extremis EH eodem modo quaeratur situs orbitæ, quæ a vera longe minus aberrabit. Hac ratione cum ulterius progredi liceat, orbita approximando definietur qualis reipsa est.

Fig. 9.

SCHO-

SCHOLION.

§. 154. Quod in hoc problemate assumitur, cometam nempe percurrere rectam aequali celeritate, idem alio modo assumere licet. Sint duo cometæ loca extrema N, M ducatur ^{Fig. 7.} chorda NM, atque hæc ponatur a cometa percursæ, ita ut dum fuerit in dato quouis loco orbitæ intermedio Q, ducta FQ, locus iste transferatur in E. At vero duo hinc enascuntur incommoda. Primo enim punctum E aliam habet longitudinem & latitudinem geocentricam ac locus cometæ reapse observatus Q. Porro tempora quibus percurruntur arcus MQ, QM partibus chordæ abscissis ME, EN haud perfecte sunt proportionalia. Patet tamen ex Lemmate XVII. (§. 49. 50.) rationem inter areas sectorum NFQ, QFM & abscissas NE, EM perparum differre, quoties angulus NFM 20 aut 30 gradus non excedat. Quare posteriori incommodo ita obuiam ire datur, ut primo abscissæ NE, EM sumantur esse temporibus proportionales. Quo ipso proxime definietur orbita, atque ratio inter abscissas NE, EM curatius definiri poterit, quo calculus instaurari queat. Priori incommodo variae adferri possunt medelæ. Aut enim, quod fecit summus EVLERVS ex distantia inter utramque extremam NF, MF media atque tentando definienda, atque ex temporibus quibus percurruntur arcus MQ, QN proxime determinabitur sagitta QE, ex lapsu corporum in solem. Quodsi tempora ista fere sint aequalia, dabitur sagitta maxima QG = QE per formulam

lam

Fig. 6. iam §. 92. qua ceu proxime vera uti licet. At
 Fig. 7. cum puncto E eatenus tantum opus sit, qua-
 tenus recta ex eo in centrum telluris ducta in
 planum ecliptices proiicienda est, exactius
 voto satisfiet, si in vicem plani ecliptices eli-
 gatur aliud planum scopo adcommodandum.
 Facile vero patet utramque rectam e centro
 telluris in puncta Q & E ductam atque in pla-
 num istud proiectam coincidere debere. Huic
 vero fini satisfaciet quodlibet planum, quod
 normaliter transeat per planum in quo eodem
 tempore versantur sol, cometa & tellus.
 Quod ut fiat euidentius, unaque exponatur
 methodus orbitam cometae definiendi, sequens
 adponemus

PROBLEMA XXXI.

§. 155. *Datis tribus cometae in parabola ince-
 dentis locis geocentricis una cum interuallo temporum,
 inuenire orbitae situm & magnitudinem.*

SOLVTIO.

Fig. 16. Sint E, C, D tria cometae loca, perpendicu-
 larium ope in planum ecliptices proiecta.
 Tellus eodem tempore sit in A, T, B. In lo-
 cum telluris medium T e sole Sagatur recta ST,
 atque ad hanc normalis TR. Ad hanc ex
 utroque loco telluris extremo A, B demittan-
 tantur normales A α , B β , similiterque e locis
 cometae E, C, D normales EPG, CQK, DRH.
 Sint porro PG, QK, RH aequales eleuationi
 cometae in E, C, D supra planum eclipticae,
 atque agantur rectae α H, TK, β G.

Hac

Hac ratione planum α RHG spectari poterit
 ceu ad planum ecliptices α RDS, & in spe-
 cie ad rectam TS normale, atque referet loco-
 rum telluris & cometae α , T, β , G, K, H pro-
 iectionem orthographicam. Patetque rectam
 TK non modo esse projectionem rectae e lo-
 co telluris medio T in locum cometae puncto
 C normaliter imminentis, verum & lineae e
 centro solis S in eundem hunc cometae locum
 ductae, adeoque totius plani, in quo eodem
 tempore commorantur sol, cometa, tellus.

Quoniam rectae AD, TC, BE sunt longi-
 tudines cometae geocentricae, TS longitudo
 solis vel telluris tempore obseruationis me-
 diae, BS, AS longitudes solis tempore obser-
 uationum extremarum, hinc dabuntur

$$\alpha T = AS. \sin TSA$$

$$\beta T = BS. \sin TSB$$

Porro anguli ADR, TCQ, BEP sunt differen-
 tia inter longitudes cometae & longitudi-
 nem solis tempore obseruationis mediae, qua-
 re sunt dati, eritque

$$\beta P = BE. \sin BEP$$

$$TQ = TC. \sin TCQ$$

$$\alpha R = AD. \sin ADR$$

Sint porro latitudes cometae geocentricae
 in B, T, A = λ , λ' , λ'' , erit

$$PG = BE. \tan \lambda$$

$$QK = TC. \tan \lambda'$$

$$RH = AD. \tan \lambda''$$

Unde iam habetur

$$\tan G\beta P = \tan \lambda : \sin BEP$$

$$\tan K T Q = \tan \lambda' : \sin TCQ$$

$$\tan H\alpha R = \tan \lambda'' : \sin ADR$$

Dan-

Dantur itaque in plano normali assumto

rectae αT , $T\epsilon$, $\alpha\epsilon$
anguli $G\epsilon P$, KTQ , $H\alpha R$

Vocetur ergo

$\alpha T = g$ $G\epsilon P = \epsilon$
 $\epsilon T = b$ $KTQ = \tau$
 $H\alpha R = \alpha$

Nectantur puncta G , H , eritque recta GH projectio chordae, cuius arcum percurrit cometa interuallo temporis utriusque obseruationis extremae. Cumque TK sit projectio radii vectoris medii, erit KL projectio sagittae, & tempora proxime sunt in ratione

$$GL:LH=PO:OR=p:q.$$

Quodsi peracto calculo eundem instaurare operae pretium sit, haec ratio facile curatius definietur.

Fiat iam

$$TO = x$$

$$PO = y$$

erit

$$OR = yq:p$$

Porro

$$OL = x \cdot \text{tang } \tau$$

$$\alpha R = g + x + qy:p$$

$$\epsilon P = x - b - y$$

$$HR = (g + x + qy:p) \text{ tang } \alpha$$

$$PG = (x - b - y) \text{ tang } \epsilon$$

Sed

$$(OL - GP) : (RH - OL) = p:q$$

Quare

Quare

$$qxtang\tau + q(x - b - y) \text{ tang } \epsilon = p(g + x + \frac{qy}{p}).$$

$$\text{tang } \alpha - px \text{ tang } \tau.$$

sive debita reductione facta

$$y = \frac{(q+p) \text{ tang } \tau - q \text{ tang } \epsilon - p \text{ tang } \alpha}{q(\text{tang } \alpha - \text{tang } \epsilon)} \cdot x + \frac{qb \text{ tang } \epsilon - pq \text{ tang } \alpha}{q(\text{tang } \alpha - \text{tang } \epsilon)}$$

Haec formula in numeris est computanda, unde faciemus breuissime

$$y = \gamma x + \delta$$

Datur ergo $y = PO$ per $x = TO$. Unde porro erit

$$\epsilon P = x - \gamma x - \delta - b$$

$$\alpha R = x + \frac{q\gamma x}{p} + \frac{q\delta}{p} + g$$

Quare

$$PE = TW = (x - \gamma x - \delta - b) \cot BEP + \epsilon B$$

$$RD = TX = (x + \frac{q\gamma x}{p} + \frac{q\delta}{p} + g) \cot ADR + A\alpha$$

Cum vero & hae formulae computandae sint in numeris, ita faciemus

$$\frac{TW + TX}{2} = TF = \mu x + \nu$$

$$TX - TW = WX = \nu x + \epsilon = EV$$

$$FS = TS - TF = \phi x + \omega$$

F

Porro

Porro est

$$WE = TP = x - \gamma x - \delta$$

$$XD = TR = x + \frac{q\gamma x}{p} + \frac{q\delta}{p}$$

Hinc

$$VD = \frac{q+p}{p} (\gamma x + \delta) = \varepsilon x + \eta \text{ breuitatis ergo}$$

Sed

$$VE = vx + e$$

Unde

$$ED^2 = (\varepsilon^2 + v^2)x^2 + (2\varepsilon\eta + 2ve)x + \eta^2 + e^2$$

Porro

$$GP = (x - \gamma x - \delta - b) \text{ tang } \varepsilon$$

$$RH = \left(x + \frac{\gamma q x}{p} + \frac{\delta q}{p} + g\right) \text{ tang } \alpha$$

Unde differentia altitudinum cometæ extremarum RH—GP efferri poterit per

$$rx + s$$

Dabitur ergo hinc quadratum longitudinis chordæ, quam cometa in orbita sua percurrit

$$ED^2 + (RH - GP)^2 = Ax^2 + Bx + C$$

Cumque sit

$$WE = x - \gamma x - \delta$$

$$XD = x + \frac{q\gamma x}{p} + \frac{q\delta}{p}$$

erit

$$\frac{WE + XD}{2} = FZ = Dx + E$$

Sed

$$FS = Qx + e$$

Quare

Quare dimidium summae distantiarum cometæ extremarum a sole erit

$$= \sqrt{[(Qx + \omega)^2 + (Dx + E)^2 + LO^2]}$$

Ex hac distantia & longitudine chordæ & tempore quo ab inuicem distant obseruationes extremæ dabitur x per problema XV. (§. 83.)

Quodsi chorda haud fuerit magna erit proxime

$$Ax^2 + Bx + C = \frac{8m^2 T^2}{\sqrt{[(Qx + \omega)^2 + (Dx + E)^2 + LO^2]}}$$

Quæ est æquatio sexti gradus.

Inuenta iam $x = TO$, facile dabitur $y = PO$, atque proinde OR, & cunctæ quantitates, quæ ad definiendum situm chordæ ED in eclipticam projectæ adeoque & chordæ veræ quicquam faciunt. Cumque radii vectores extremi sint

$$b = \sqrt{(SW^2 + WE^2 + PG^2)}$$

$$a = \sqrt{(SX^2 + XD^2 + RH^2)}$$

tota orbita determinabitur per Lemmata VIII, X, XI. huiusque Corollarium I, &c.

Aliter, constructione.

Quoniam prolixiori hoc calculo orbita cometæ tantummodo proxime determinatur, nisi eum instaurare volueris, constructione rem omnem breuius atque commodius absolueri licet.

Sit ergo S centrum solis, T locus telluris tempore obseruationis mediæ, B, A eiusdem loca tempore obseruationis primæ & tertiæ. Ex datis cometæ longitudinibus geocentricis

F 2

ducen-

ducentur rectae TC, AD, BE. Porro ducta TR ad TS normali, demittantur $A\alpha$, $B\beta$ ut in solutione prima, similiterque vel calculo vel constructione definiuntur anguli $G\epsilon P$, KTQ , $H\alpha R$, eritque ut antea TK projectio rectarum e centro solis & telluris in locum cometae medium ductarum.

Assumatur iam in recta TK punctum quodlibet L, quod referat punctum intersectionis chordae a cometa percurfae & radii vectoris medii in ipsa cometae orbita. Quodsi hoc punctum L forte fortuna rite fuerit assumptum, vera quoque determinabitur cometae orbita, sin minus innotescet aberratio, atque aliud tentando erit eligendum. Ipsa vero constructio pro singulis est eadem, quare ne figura nimium quantum oneretur rectis, situm puncti L assumimus verum, eundemque ceu incertum tractabimus.

Per punctum L agatur recta GLH talis, ut partes GL, LH sint in ratione temporum, atque e punctis G, H demittantur GPE, HRD ad rectam αR normales. Quo facto triangula ϵGP , αHR in planum ecliptices erunt translata, eruntque ϵEP , αDR , atque ducta ED erit chorda a cometa percurfa in planum ecliptices projecta.

E puncto assumpto L agatur LZ ad αR normalis, eritque

$$GL:LH=EZ:ZD$$

atque puncta S, Z, C erunt in una eademque recta, quae radium vectorem medium refert in eclipticam projectum, si punctum L rite fuerit

fuerit assumptum. At cum hoc incertum sit, nestantur loca telluris A, B, atque e puncto intersectionis t agatur recta tZ per punctum Z. Haec recta talis erit, ut quicumque fuerit situs chordae a cometae percurfae atque in eclipticam projectae, recta tZ eam secet in eadem ratione in qua secta est recta EZD, adeoque proxime in ratione temporum.

Assumtis itaque in recta tZ punctis quibusvis Z facile ducentur totidem rectae EZD a rectis AD, BE, tZ in data ratione temporum sectae.

Eiusmodi recta cum sit ED, ope latitudinum geocentricarum facile e punctis E, D erigentur normales, quae erunt $= GP$, HR , atque harum summitates longitudine chordae a cometa percurfae inter se distare debent, simulque summitatum istarum a centro solis S distantia referet radios vectores extremos. His vero distantis inuentis ope formularum Problematis XV. (§. 83.) vel ope scalae celeritatum parabolicarum (§. 112. seqq.) definitur tempus, quo cometa percurrere debuisset chordam ope puncti assumpti Z erutam. Quodsi ergo hoc tempus cum tempore inter primam & tertiam observationem elapsum congruat, punctum Z rite fuit assumptum, sin minus, notetur differentia, atque in recta tZ successiue assumantur alia puncta vicem ipsius Z subitura. Unde totidem dabuntur temporis obseruati & constructione eruti differentiae. Quo facto distantiae tZ spectentur ut abscissae, atque differentiae temporum ipsis instar ordinarum adplicentur, quo duci possit curua, quae re-

etiam tZ in eo loco secabit, cui verum punctum Z respondet. Per se vero patet puncta Z ita esse assumenda ut differentiae temporum erutae sint & positivae & negativae.

Invento iam vero puncto Z , constructionem instaurando ducetur vera chorda proiecta ED , qua data facillime absoluetur constructio totius orbitae.

Hac vero constructa facile examini subicietur ratio inter partes rectae GL , LH , an temporibus sint proportionales, vel an notabilius differant. Quodsi differant, vera ratio curatius definietur, atque constructio vel calculus instaurari poterit, quo exactius eruatur orbitae magnitudo & situs.

SCHOLION I.

§. 156. Quod constructionem hanc reddit prolixior est orbitae cometae ad eclipticam inclinatio. Hoc enim fit, ut altitudines cometae supra puncta E , D duplici modo in planum eclipticae sint transferendae, quo determinari possit chordae a cometa percursae longitudo, atque a sole S distantia siue radii vectores extremi. Ceterum prolixitas ista compendio, quod in computanda temporum differentia suppeditat scala celeritatum parabolicarum, magna ex parte compensatur.

SCHOLION II.

§. 157. Quoniam in solutione posteriori punctum Z tentando est quaerendum, eius quaedam criteria in medium proferre haud inutile

utile erit. Huc facit Theorema III. (§. 76. seqq.) quo ex distantia cometae heliocentrica definitur ipsius celeritas, atque cum celeritate planetae ad eandem distantiam in circulo gyrantis confertur. Quoniam arcus vel chordae a prima observatione ad tertiam percursae plerumque sunt exiguae, chorda a cometa percursa cum ea quam eodem tempore percurrit tellus, quaeque est AB quodammodo conferri poterit. Ponamus v. gr. cometam esse in T , atque facile patet, chordam ab eo percursam debere esse proxime $= AB. \frac{1}{2}$. (§. cit.) quod esse nequit, quia cadere debet intra rectas AD , BE . Quodsi punctum Z assumatur intra rectam tI , cometae a sole distantia minuitur, adeoque augetur longitudo chordae, quam percurrere debuisset. Cum vero rectae AD , BI in I coincidunt, spatium longe fit angustius, eo ergo minus cometa intra tI erit locandus, atque facile patet punctum Z debere esse puncto I longe remotius. Assumpto puncto Z situs chordae proiectae ED oculo solo iudice plerumque proxime colligitur, eiusque longitudo cum AB & distantia a sole confertur. Similiter rectae AD , tE , tZ in I ita sunt positae, ut quae media esse deberet extrema sit, quo ipso situs puncti K ibidem necessario euadit impossibilis.

PROBLEMA XXXII.

§. 158. Si orbita cometae parabolica iam proxime fuerit definita, eandem curatius definire.

SOLVTIO.

Quoniam proxime in numeris dantur distantiae cometæ geocentricæ curtatæ AD, TC, BE, ponemus singulas esse debito minores, atque differentiam qua augendæ sunt, ut in veras abeant, ita esse exiguam, ut dignitates earum prima superiores abici tuto possint. Hac ratione instar differentialium eas tractare licet, computo in numeris absoluendo debite adiciendarum. Ipse vero computus ita erit instituendus, ut ex assumtis distantis eruantur tempora intra primam & secundam, secundam & tertiam, tertiam denique & primam observationem elapsa. Quo factò tempora computata cum obseruatis conferri poterunt, atque hac ratione deueniemus ad tres aequationes, quibus eruentur differentiae distantiarum assumtarum & verarum AD, TC, BE, assumtis addendæ vel ab iis subtrahendæ, prout posituæ vel negatiuæ fuerint.

Computum vero, quo eruentur istae aequationes, exemplo illustrabimus sequentem in modum.

Fig. 17. Sit S sol, T, t loca telluris, punctis K, k imineant loca cometæ C, c, rectæ TK, tk erunt eiusdem longitudines & anguli CTK, ctk erunt latitudines geocentricæ. Producantur KT, kt in A, atque agatur AS, & CP ipsi Kk parallela. Fiat iam

$$\begin{array}{llll} AT = a & AK = K & CTK = C & TS = T \\ At = \epsilon & Ak = k & ctk = \gamma & tS = \tau \\ TAt = \omega & TK = K' & CTS = e & \\ & tk = k' & ctS = f & \end{array}$$

atque

atque erit

$$Cc^2 = K^2 \mp k^2 - 2Kk \cos \omega \mp K'^2 \tan g C^2 \mp k'^2 \tan g c^2 - 2kK' . \text{tc} . tC$$

Porro est

$$CS^2 = T^2 \mp K'^2 \sec C^2 - 2TK' . \sec C . \cos e$$

$$cS^2 = \tau^2 \mp k'^2 \sec c^2 - 2\tau k' \sec c . \cos f$$

Hae formulae computandæ sunt in numeris. At vero cum ipsis adicienda sint differentialia, notabimus, quantitates K, K', k, k' spectandas esse ceu variables, atque facile patet, ob

$$K = K' \mp a$$

$$k = k' \mp \epsilon$$

differentialia dK, dK', nec non dk, dk' esse eadem, quare differentiando erit

$$d(Cc) = (K \mp K' t C^2 - k \cos \omega - k' t c . t C) dK : Cc \mp (k - K \cos \omega \mp k' t c^2 - K' t c . t C) dk : Cc$$

$$d(CS) = (K' \sec C^2 - T \sec C . \cos e) dK : CS$$

$$d(cS) = (k' \sec c^2 - \tau \sec c . \cos f) dk : cS$$

His iterum in numeris computatis, contractiones euadunt, eritque

$$d(Cc) = mdK \mp ndk$$

$$d(CS) = pdK$$

$$d(cS) = q . dk.$$

At iam per CS, cS, cC dabitur tempus per formulam (§. 83.) eritque

$$3 \sqrt{2.m} \eta = \left(\frac{CS \mp cS \mp cC}{2} \right)^{3/2} - \left(\frac{CS \mp cS - cC}{2} \right)^{3/2}$$

Sed cum distantiae geocentricæ curtatæ TK, tk assumtæ a veris differant, tempus η , quod dat hæc formula ab obseruato differet. Quare,

F 5

re,

re, ut 7 sit tempus obseruatum, formulae adii-
ciendum erit differentiale, eritque

$$1217 = \left(\frac{CS + cS + cC}{2} \right)^{3/2} - \left(\frac{(CS + cS - cC)}{2} \right)^{3/2} \\ + \frac{3}{2} (CS + cS + cC)^{1/2} \cdot (dCS + d.cS + dcC) \\ - \frac{3}{2} (CS + cS - cC)^{1/2} \cdot (dCS + dcS - dcC)$$

Dantur vero CS, cS, cC in numeris, pariter-
que & earum differentialia per dK, dk . Quare
hac ratione dabitur aequatio inter dK, dk .

Assumto porro tertio loco cometae, com-
binando dabuntur insuper duae aequationes
inter $dk, d\bar{k}$, & $dK, d\bar{k}$. quibus ergo differentiae
hae definiuntur. Quodsi peracto calculo de-
prehendantur notabiles, calculus eodem mo-
do instaurabitur, assumendo distantias AD,
TC, BE prima hac operatione correctas.

Fig.16.

PROBLEMA XXXIV.

§. 159. *Datis duobus cometae locis geocentricis
sibi admodum vicinis, atque distantia cometae geocen-
trica tempore alterutrius obseruationis, inuenire situm
orbitae eiusque magnitudinem.*

SOLVTIO.

Fig.17. Sit S centrum solis, T, t loca telluris, C, c lo-
ca cometae, K, k eadem in eclipticam proie-
cta, erunt TK, tk eius longitudes, CTK, ctk
latitudines obseruatae. Detur iam distantia
TC, adeoque & $TK = TC \cdot \cos CTK$. E pun-
ctis K, T in rectam tk demittantur normales
KQ,

KQ, TR atque ducantur AS, CP ut in proble-
mate praecedente. Porro fiat

$$TK = x \quad CTK = \lambda \\ Qk = y \quad ctk = \Lambda \\ tR = \alpha \quad TAt = \omega \\ \Delta T = p \quad CTS = b \\ TS = r$$

Quoniam latitudines geocentricae λ, Λ parum
inter se differunt, ponatur

$$\text{tang} \Lambda = \text{tang} \lambda + q$$

eruntque y, α, q, ω , quantitates admodum exi-
guae, ob assumtam locorum T, t vel C, c vi-
cinitatem.

Hinc iam erit

$$AK = x + p \\ KQ = (x + p) \sin \omega \\ Kk^2 = y^2 + (x + p)^2 \sin^2 \omega$$

Porro habebitur

$$AR = p \cos \omega \\ AQ = (x + p) \cos \omega \\ Ak = (x + p) \cos \omega + y \\ Rk = (x + p) \cos \omega - p \cos \omega + y = x \cos \omega + y \\ tk = x \cos \omega + y - \alpha$$

adeoque

$$ck = [x \cos \omega + y - \alpha] \cdot (\text{tang} \lambda + q) \\ CK = x \text{tang} \lambda$$

Quare

$$cP = x (\cos \omega - 1) \text{tang} \lambda + (y - \alpha) \cdot \text{tang} \lambda + x \cos \omega \cdot q \\ + (y - \alpha) q$$

sive

$$cP = y (\text{tang} \lambda + q) - \alpha (\text{tang} \lambda + q) - x (1 - \cos \omega) \\ \text{tang} \lambda + xq$$

Pro

Pro qua formula substituemus breuitatis ergo

$$cP = Ay + Bx - C$$

Est vero

$$Cc^2 = cP^2 + Kk^2$$

Quare erit

$$Cc^2 - y^2 + (x + p)^2 \sin^2 \omega^2 = Dy^2 + Ey + F \\ + A^2 y^2 + 2AByx + C^2 \\ + 2ACy - 2BCx. \\ + B^2 x^2$$

Porro erit

$$CS^2 = r^2 + x^2 \sec^2 \lambda^2 - 2rx \sec \lambda \cdot \cos b$$

At iam per solutionem secundam Problematis XV. (§. 83.) est

$$3\sqrt{2}.mT = \frac{k[a + b + \frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 - k^2}]}{\sqrt{[a+b + \sqrt{(a+b)^2 - k^2}]}}$$

siue cum chorda k sit admodum exigua, atque proxime $a = b$, erit absque notabili errore

$$3\sqrt{2}.mT = \frac{3k\sqrt{a}}{2} \\ k = \sqrt{8}.mT:\sqrt{a}$$

siue

$$cC = \frac{\sqrt{8}.mT}{\sqrt{CS}}$$

adeoque substitutis valoribus

$$Dy^2 + Ey + F = \frac{8m^2 T^2}{\sqrt{(r^2 + x^2 \sec^2 \lambda^2 - 2rx \sec \lambda \cdot \cos b)}}$$

Qua ergo aequatione, data distantia x , dabitur y , adeoque & situs chordae proiectae Kk . Hac vero data facile dabitur tota orbita.

SCHO.

SCHOLION.

§. 160. Cum aequatio, ad quam tandem devenimus, quadratica sit, dabuntur duo ipsius y valores, adeoque tertia observatio erit adhibenda, quo definiri queat, quali reapse sit utendum. Porro assumimus distantiam x esse datam. Quodsi vero indeterminata sit, successe alia atque alia assumi poterit, usque dum valor ipsius y euadat imaginarius. Dantur ergo limites quos distantia x excedere nequit, atque inveniuntur, si in ultima aequatione ponatur $y = 0$. Quo facto aequatio abit in aliam, in qua distantia x ad sextam dimensionem affurgit.

PROBLEMA XXXV.

§. 161. Dato situ orbitae cometae parabolicae, inuenire situm & proprietates in planum ecliptices proiectae.

SOLVTIO.

Sit F centrum solis atque proinde focus orbis Fig. 18. tae, Nn linea nodorum, NQn orbita ipsa ad planum ecliptices sub angulo quocunque inclinata, A perihelium, AFB axis. Assumpto puncto quolibet Q , ducatur QP ad Nn normalis, atque fiat QP ad qP in ratione sinus totius ad cosinum anguli elevationis, punctum q erit in orbita proiecta, ipsique punctum Q normaliter imminet.

Quodsi

Quodsi iam Q sit culmen orbitae, directio utriusque parabolae in Q, q erit lineae nodorum parallela. Bifariam secetur Nn in G, ducantur FQ, Fq, GQ, Gq, erit GQ axi AB, & Gq axi orbitae proiectae aB parallela, atque FQ=QG, Fq=qG, FP=PG.

Porro erit FQ ad Fq ut sinus totus ad cosinum latitudinis heliocentricae ipsius culminis Q.

Similiter ob NG=Gn, & Gq axi aB paralelam, recta qF transit per focum orbitae proiectae f, atque est

$$Nn^2 = 16. FQ^2 = 16. Fq.fq$$

unde

$$Fq : FQ = FQ : fq.$$

Cumque utraque parabola in Q & q sit lineae nodorum Nn parallela, anguli, quos faciunt cum rectis FQ, Fq erunt angulis QGF, qGF aequales, adeoque

$$\begin{aligned} AF &= FQ. \sin QGF^2 = PQ^2 : FQ \\ af &= fq. \sin qGF^2 = fq. Pq^2 : Fq^2 \end{aligned}$$

Dicto angulo inclinationis = η erit

$$Pq = PQ. \cos \eta$$

adeoque

$$af = fq. PQ^2. \cos^2 \eta : Fq^2$$

unde porro

$$AF : af = Fq^2 : FQ. \cos^2 \eta. fq$$

Est vero

$$fq = FQ^2 : Fq$$

Quare

$$AF : af = Fq^3 : FQ^3. \cos^2 \eta$$

Cum

Cumque Fq:FQ sit cosinus latitudinis heliocentricae puncti Q dicta hac latitudine = λ , erit

$$\begin{aligned} AF : af &= \cos^3 \lambda^3 : \cos^2 \eta^2 \\ \sqrt{af} &= \frac{\sqrt{AF} \cdot \cos \eta}{\cos \lambda^{3/2}} \end{aligned}$$

Quodsi iam a radio vectore describatur area quaedam, quam dicemus = A, atque tempus elapsum sit = T, erit

$$T = \frac{A}{m\sqrt{2AF}}$$

At vero eadem haec area in orbita proiecta minor est in ratione 1 : $\cos \eta$, quare erit = A. $\cos \eta$. = D. Cumque sit

$$T = \frac{A}{m\sqrt{2AF}} = \frac{A \cdot \cos \eta}{m\sqrt{(2af) \cdot \cos^3 \lambda^{3/2}}}$$

erit

$$T = \frac{D}{m \cdot \cos \lambda^{3/2} \cdot \sqrt{(2af)}}$$

Ut adeo tempus detur per aream in eclipticam proiectam D, per semilatus rectum orbitae proiectae 2af, & cosinum latitudinis heliocentricae culminis Q.

PROBLEMA XXXVI.

§. 162. Data orbita proiecta aqn, inuenire orbitam veram NQn, eiusque inclinationem & lineam nodorum Nn.

SOLV.

SOLVTIO.

Sit orbita proiecta aNqn, eius axis af, focus f, centrum solis F. Quod cum sit focus orbitae verae, agatur recta fFq per utrumque focus, atque ducta tangente tq, ipsique parallela NFn per centrum solis F, haec erit linea nodorum. Porro ad hanc demittatur normalis QqP, fiatque $FQ = \frac{1}{4} Nn$, punctum Q erit culmen orbitae verae, & qP:QP erit cosinus inclinationis. Denique fiat $QG = QF$, vel $NG = Gn$, ducatur QG ipsique parallela AF, haec erit axis orbitae verae. Cumque sit $AF = FQ^2 : FQ$ (§. 161.) hinc dabitur distantia verticis vel perihelii A a centro solis F.

THEOREMA XI.

§. 163. *Orbita proiecta datur per meras longitudes geocentricas cometae, at quinque obseruationes ad eam definiendam requiruntur.*

DEMONSTRATIO.

Determinatur orbita proiecta, si detur vertex a, & focus f, siue situs utriusque huius puncti ratione rectae e dato loco telluris in centrum solis ductae. Pendet itaque iste situs a quatuor incognitis hunc in finem assumendis. His vero assumtis dabitur (§. 162.) linea nodorum nN, distantia af, & utraque recta FQ, Fq, atque proinde $Fq : FQ = \cos \lambda$ (§. 161.) Quoniam itaque quatuor istae incognitae assumtae determinandae sunt per longitudes cometae geocentricas & spatia in orbita proiecta percursa,

cursa, dabuntur haec spatia, quae cum temporibus elapsis comparari poterunt (§. 161.) & quoduis spatium ad aequationem deducit. Quoniam vero opus est quatuor aequationibus, opus quoque erit quatuor spatiis proiectis, adeoque quinque longitudinibus geocentricis obseruatis.

THEOREMA XII.

§. 164. *Si cometa tempore cuiusdam obseruationis versetur in polo ecliptices, additis insuper tribus longitudinibus geocentricis, orbita proiecta determinabitur.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si locus cometae in polo ecliptices in eam proiciatur, cadet in locum, in quo eodem tempore versatur tellus. Qualiscunque ergo sit orbitae proiectae situs & magnitudo, oportet per hunc telluris locum transeat; adeoque datur definitum quoddam istius orbitae punctum. Hoc vero fit, ut ex quatuor incognitis assumendis altera euadat superflua, quo ipso minuatur numerus spatiorum, adeoque & longitudinum obseruatarum.

SCHOLION I.

§. 165. *Per se patet, si cometa in polo ecliptices fuerit stationarius, orbitam proiectam definitum iri, duabus his obseruationibus tertiam adiiciendo. Ceterum calculus, quo definienda est orbita, mirum in modum est complexus*

plexus, ut adeo utique praestet latitudines geocentricas una cum longitudinibus ad definiendam orbitam veram adhibere.

SCHOLION II.

§. 166. Quae haecenus de orbita cometae in planum ecliptices proiecta diximus, uniuersaliora sunt, quippe projectio in planum eclipticae mere est arbitraria, atque eligi potest planum quodlibet, cuius situs ratione eclipticae sit datus. Eiusmodi vero planum ecliptices vicem sustinet, atque in istud simul proicienda sunt loca telluris, & rectae ex his in loca cometae ductae, uti iam exemplo rem illustratam dedimus in Problemate XXXI. (§. 155.) Plura dantur huiuscemodi plana, quae ad compendium calculi quicquam facere possunt. Sic v. gr. planum quod transit per centra solis telluris & cometae idem nobis sistit compendium, quod sifteret ecliptica, si cometae versaretur in alterutro nodorum. Similiter planum, quod ad rectam e centro telluris in centrum cometae ductam normale est, casum nobis supeditat casui Theorematis XII. (§. 164.) analogum.

THEOREMA XIII.

§. 167. Si cometa ita sit stationarius, ut quater in eodem caeli puncto haerere videatur, ipsius orbita absque ullo computo construetur.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Cum enim sit stationarius, rectae e locis telluris in loca cometae ductae erunt parallelae. Concipiatur itaque planum per centrum solis transiens atque ad rectas istas normale, in hoc plano dabuntur quatuor puncta orbitae in istud proicienda. Haec vero cum sit parabolica, patet eam construi posse. Unde per Problema XXXVI. (§. 162.) dabitur situs orbitae verae.

SCHOLION.

§. 168. Vix equidem unquam cometa quater in eodem caeli puncto haerere obseruabitur, si temporum interualla fuerint notabiliora. At si breuiora fuerint, exactissimis obseruationibus opus erit, siquidem hac ratione orbitam veram eruere volueris. Dari tamen poterit, quae a vera parum aberrat, si motus cometae adparens fuerit lentissimus.

THEOREMA XIV.

§. 169. Si cometa bis obseruetur in eodem caeli puncto, rectae, quae aguntur per utrumque locum telluris, & per utrumque locum cometae in linea nodorum coincidunt.

DEMONSTRATIO.

Sint loca telluris T, t, cometae C, c. Ex his Fig. 10. in planum demittantur normales CK, ck, & CN, cn normales ad lineam nodorum Nn. Porro agantur rectae NK, nk, TK, tk, CcM, TtM.

G 2

TtM. Quoniam cometa est stationarius, rectae TC, tc itemque rectae TK, tk sunt parallelae, & insuper anguli latitudinum CTK, ctk aequales. Unde erit

$$CK:ck=CT:ct=KT:kt=CM:cM=TM:tM=KM:kM$$

Quare rectae Tt, Cc, Kk in M coincidunt.

Porro est

$$CK:ck=CN:cn=KN:kn=CM:cM=KM:kM=NM:nM$$

quare recta Nn in idem punctum M incidit, in quod incidunt rectae Cc, Kk, Tt. Est vero Nn linea nodorum, unde constat propositum.

THEOREMA XV.

§. 170. Si cometa incedat in plano ecliptices, eiusque orbita sit parabolica, tres observationes siue longitudes geocentricae sufficiunt ad eam determinandam; contra ea quarta insuper opus est, si incedat in ellipsi nisi detur huius axis maior.

DEMONSTRATIO.

Tres longitudes determinandae orbitae parabolicae sufficere, patet ex problemate XXXI. (§. 158.) ipsaque orbitae constructio longe est facilior. Contra ea cum tres istae longitudes pro determinanda parabola necessario requirantur, in ellipsi vero accedat ratio inter distantiam periheliam & semilatus rectum, haec indeterminata maneret, nisi vel accederet observatio quarta, vel data esset longitudo axeos maioris, siue quod idem est, tempus periodicum.

SCHO.

SCHOLION.

§. 171. Eadem ratione si orbita fuerit ad eclipticam inclinata sed parabolica, tres equidem observationes requiruntur, at non complete. Carere enim possumus vel tempore quo fit altera observatio, vel longitudine vel latitudine geocentrica. At si nilominus singulae tres observationes complete adhibeantur, plura data adsunt quam opus est, unde ad compendium calculi adhiberi poterunt superfluae, saltem ad eius correctionem.



G 3

PRO-



PROPRIETATES INSIGNIORES
ORBITAE COMETARVM.

SECTIO IV.

Demonstrantur proprietates concinniores
orbitae Cometarum, simulque & Planeta-
rum ellipticae.

LEMMA XXIII. THEOREMA.

Fig. 80. §. 172. Si in ellipsi sumantur tres ordinatae
aequidistantes PN, QL, RM, atque e foco F du-
cantur radii vectores FN, FL, FM, erit $2FL$
 $= FN + FM$.

DEMONSTRATIO.

Etenim per naturam ellipseos est

$$FN = AF + \left(\frac{AB - 2AF}{AB} \right) \cdot AP$$

$$FM = AF + \left(\frac{AB - 2AF}{AB} \right) \cdot AR$$

adeoque

$$FN + FM = 2AF + \left(\frac{AB - 2AF}{AB} \right) \cdot (AP + AR)$$

Est

Est vero per hypothesin

$$(AP + AR) = 2AQ$$

adeoque

$$FN + FM = 2 \left[AF + \left(\frac{AB - 2AF}{AB} \right) \cdot AQ \right] = 2FL.$$

LEMMA XXIV. THEOREMA.

§. 173. Si in ellipsi AQBD sumatur punctum quoduis Q, atque ducatur diameter QCD, tangens QT, ipsique parallela quaelibet NGM, neantur focus F & punctum assumtum Q recta QFb, atque ordinata NM orthogonaliter transferatur in nEm, ut sit nE = mE, puncta n, m itidem erunt in ellipsi Qnbm, cuius focus pariter est F, & axis maior Qb, axi maiori AB ellipseos prioris aequalis. Fig. 21.

DEMONSTRATIO.

Cum QCD sit diameter ellipseos, atque ordinata NM tangenti QT parallela, per notissimam sectionum conicarum proprietatem, aequatio inter abscissam QG & ordinatam NM prorsus analoga est illi, quae exprimit relationem inter abscissas in axe maiore sumtas & applicatas ad axin normales. Quoniam porro per constructionem est $NM = nm$, & $QG \propto QE$, atque NM ad FQ normalis, aequatio inter QE & nm itidem erit ad ellipsin, cuius axis maior est Qb. Ducta porro Cc ipsi QT parallela, atque erecta cy ad axin Qb normali = cC, erit cy semiaxis minor. Dicatur iam

$$AB = a$$

$$AF = f$$

$$FQ = z$$

G 4

Ducta

Ducta recta Qf in alterum focum f, angulus TQF per naturam ellipsium erit $= 90^\circ - \frac{1}{2}FQf$, eritque

$$FQ + Qf = a$$

$$Qf = a - z$$

$$Ff = a - 2f$$

hinc per formulas trigonometricas

$$\operatorname{cospin} \frac{1}{2}FQf = \operatorname{sin}TQF = \operatorname{sin}QcC = \frac{\sqrt{(af - ff)}}{\sqrt{(az - zz)}}$$

$$\operatorname{cot}TQF = \operatorname{cot}QcC = \frac{\sqrt{(az - zz) - (af - ff)}}{\sqrt{(az - zz)}}$$

$$\operatorname{cot}QFC = \frac{az - (2af - ff)}{z(a - 2f)}$$

$$\operatorname{sin}QFC = \frac{2\sqrt{(af - ff)}}{z(a - 2f)} \cdot \sqrt{(az - zz) - (af - ff)}$$

Unde ob $QTC = QFC - TQF = FCc$, erit

$$\operatorname{sin}FCc = \frac{(a - 2z)\sqrt{(af - ff)}}{(a - 2f)\sqrt{(az - zz)}}$$

Est vero

$$Fc : \operatorname{sin}FCc = FC : \operatorname{sin}QcC$$

adeoque substitutis valoribus repertis debitaque reductione facta

$$FC = \frac{1}{2}a - z$$

$$Fc + z = Qc = \frac{1}{2}a$$

$$Qb = a = AB.$$

Est porro semidiater conjugata $Cc = cy = \sqrt{(az - zz)}$, adeoque cum sit

$$Fy^2 = Fc^2 + cy^2$$

erit

$$Fy^2 = (\frac{1}{2}a - z)^2 + (az - zz) = \frac{1}{4}a^2$$

$$Fy = \frac{1}{2}a = Qc$$

Unde patet F esse focum utriusque ellipseos.

COROL.

COROLLARIUM I.

§. 174. Similiter erit semidiameter

$$QC = \sqrt{[\frac{1}{4}(a - 2z)^2 + af - ff]} = \sqrt{(Fc^2 + CH^2)}$$

Hinc porro

$$\operatorname{sin}QCc = \frac{a\sqrt{(af - ff)}}{\sqrt{(az - zz)} \cdot \sqrt{[\frac{1}{4}(a - 2z)^2 + af - ff]}}$$

COROLLARIUM II.

§. 175. Cum sit per naturam ellipseos

$$GM^2 = \frac{QG \cdot GD \cdot Cc^2}{QC^2}$$

atque

$$\frac{QG \cdot GD}{QC^2} = \frac{QE \cdot Eb}{Qc^2}$$

erit

$$GM^2 = Em^2 = \frac{QE \cdot Eb \cdot Cc^2}{Qc^2}$$

COROLLARIUM III.

§. 176. Dicta itaque $FE = \xi$, erit

$$Em^2 = \frac{(az - a\xi - (z - \xi)^2) \cdot (az - zz)}{\frac{1}{4}a^2}$$

$$Fm = \frac{2(az - zz)}{a} - \frac{(a - 2z)\xi}{a}$$

LEMMA XXV. THEOREMA.

§. 177. Sint omnia ut in lemmate praecedente, ductis radiis vectoribus Fh, Fm, FN, FM , summa priorum $Fh + Fm$ erit aequalis summae posteriorum.

G 5

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Per punctum G ducatur adplicata PGK, atque e foco F recta FK. Quoniam NG = GM, erit per Lemā XXIII. (§. 172.) $2FK = FN + FM$. Cumque sit $Fn = Fm$, demonstrandum est, esse $Fn = FK$.

Quoniam TQ, EG, cC sunt parallelae, erit

$$cQ : QC = cE : GC$$

$$CG = \frac{QC \cdot cE}{cQ}$$

sive substitutis valoribus

$$CG = \frac{(\xi + \frac{1}{2}a - z) \sqrt{[\frac{1}{4}(a - 2z)^2 + af - ff]}}{\frac{1}{2}a}$$

Porro per trigonometriam est

$$\cos QCF = \frac{QC^2 + CF^2 - QF^2}{2QC \cdot CF}$$

$$CP = CG \cdot \cos QCF$$

unde valoribus substitutis, erit

$$\cos QCF = \frac{\frac{1}{2}a(a - 2z)}{(a - 2f) \sqrt{[\frac{1}{4}(a - 2z)^2 + af - ff]}}$$

$$CP = \frac{(a - 2z) \cdot (2\xi + a - 2z)}{2(a - 2f)}$$

Hinc

$$PF = FC - CP = \frac{(a - 2f)^2 - (a - 2z)^2 - 2(a - 2z)\xi}{2(a - 2f)}$$

Est vero per naturam ellipseos

$$FK = \frac{2(af - ff)}{a} + \frac{a - 2f}{a} \cdot FP$$

adeo-

adeoque substitutione debitaque reductione facta

$$FK = \frac{2(az - z^2)}{a} - \frac{(a - 2z)\xi}{a}$$

Eundem vero valorem habuimus pro radio Fm (§. 176.) erit itaque

$$FK = Fm \\ 2FK = 2Fm = Fn + Fm = FN + FM.$$

LEMMA XXVI. THEOREMA.

§. 178. Sint omnia ut in utroque Lemmate praecedente, areae sectorum NQMF, nQmF erunt in ratione subduplicata semilaterum rectorum ellipsium AB, Qb.

DEMONSTRATIO.

Etenim si ordinatae NM ad diametrum QD essent normales, area segmenti NMQ maior foret in ratione reciproca sinus inclinationis QGN. Unde cum in nm translatae ad axin Qb sint normales, segmentum nQm utique in hac ratione maius esse debet. At vero cum abscissae QE maiores sint abscissis QG, segmentum nmQ in hac quoque ratione maius est; Ut adeo sit

$$nmQ = \frac{NMQ \cdot QE}{\sin QEG \cdot QG}$$

Est vero per trigonometriam

$$\frac{QE}{QG \cdot \sin QEG} = \frac{1}{\sin QEG} = \frac{1}{\sin TQF}$$

adeo-

adeoque segmentum

$$nmQ = \frac{NMQ}{\sin TQF}$$

Est vero (§. 173.)

$$\sin TQF = \frac{\sqrt{af-ff}}{\sqrt{az-zz}}$$

Quare

$$nmQ = \frac{NMQ \cdot \sqrt{az-zz}}{\sqrt{af-ff}}$$

$$nmQ : NMQ = \sqrt{az-zz} : \sqrt{af-ff}$$

Porro cum triangula nFm, NFM habeant bases nm, NM aequales, eorum areae erunt ut perpendiculara e foco siue vertice communi F in eas demissa adeoque ut sinus totus ad sinum anguli NEF = TQF. Unde similiter erit

$$nFm : NFM = \sqrt{az-zz} : \sqrt{af-ff}$$

Quare & toti sectores

$$nQmF : NQMF = \sqrt{az-zz} : \sqrt{af-ff}$$

Sunt vero semilatera recta ellipsium

$$AHB = \frac{2(af-ff)}{a} = s$$

$$Q\gamma b = \frac{2(az-zz)}{a} = S$$

adeoque sectores

$$nQmF : NQMF = \sqrt{\frac{aS}{2}} : \sqrt{\frac{as}{2}} = \sqrt{S} : \sqrt{s}$$

Constat ergo propositum.

COROL.

COROLLARIUM.

§. 179. Erit itaque

$$\frac{nQmF}{\sqrt{S}} = \frac{NQMF}{\sqrt{s}}$$

LEMMA XXVII. THEOREMA.

§. 180. Axi maiori ellipseos AB insistat semicir. Fig. 22. culus AnmB, sumta chorda quacunque NM eaque in G bisecta, e centro C agatur recta CGQ, e puncto Q recta Qc per focum F, denique recta Cc chordae NM vel tangenti TQ parallela. Porro per puncta N, Q, M ducantur nN, qQ, mM ad axin AB normales, nequantur n, m, q, C rectis nm, qC, dico, arcum nm esse in q bisectum, atque sagittam qg = QE.

DEMONSTRATIO.

Etenim per naturam ellipseos ordinatae Pm, PM sunt in ratione axeos maioris ad minorem, quare chordae mn, MN productae in R cum axe maiori coincident, unde porro erit ng = gm, cum sit NG = GM. Hinc porro

$$CQ : QG = Cq : qg$$

Sed ob parallelas NM, cC erit

$$CQ : QG = Qc : QE$$

adeoque

$$Cq : qg = Qc : QE$$

Est vero (§. 173.)

$$cq = AC = Qc$$

Quare &

$$qg = QE$$

COROL.

COROLLARIUM.

§. 181. Cum Qc sit semiaxis maior alterius ellipseos Qb (Fig. 21.) atque semiaxi maiori AC aequalis, patet (Fig. 22.) sagittam QL similiter esse sinum versum arcus circularis arcui nq aequalis. Unde non modo chordae ellipticae nm, NM (Fig. 21.) verum & chordae arcuum circularium, ad quos referuntur aequales sunt.

SCHOLION.

Fig. 22. §. 182. Quod ut clarius explicetur, ponamus ellipsin ANMB esse projectionem orthographicam circuli AnmB, obliquius ad eam inclinati, ita ut axis AB sit linea interfectionis siue linea nodorum, & PM: Pm cosinus inclinationis. Quo posito chorda NM erit projectio chordae circularis nm, similiterque (Fig. 21.) chorda elliptica nEm erit projectio chordae circuli, cuius diameter & linea interfectionis est axis maior Qb, & cosinus inclinationis = cy: Qc. At per Corollarium praesentis Lemmatis non modo chordae circulares aequales sunt, verum & ellipticae, quae sunt illarum projectio.

THEOREMA XV.

Fig. 21. §. 183. Sint omnia ut in Lemmate vigesimo quarto (§. 173.) utraque ellipsis Qmb, AQB poterit esse orbita cometae, atque utraque eodem tempore percurritur.

DEMON.

DEMONSTRATIO.

Etenim F est focus utrique communis, unde per legem tertiam (§. 68.) erit centrum solis, quod necessario focus esse debet sectionis conicae, quam cometa percurrit. Quoniam porro vi Lemmatis citati uterque axis maior AB, Qb est aequalis, tempus periodicum quoque idem sit oportet (§. 71.)

THEOREMA XVI.

§. 184. *Iisdem positis, arcus nQm, NQM eodem tempore percurruntur.*

DEMONSTRATIO.

Per legem quartam (§. 69.) tempora sunt ut areae, quas verrit radius vector per radicem quadratam semilaterum rectorum diuisae, adeoque (§. 178.) tempus quo percurritur arcus NM erit ad tempus, quo percurritur nQm, ut (NQMF: \sqrt{s}) ad (nQmF: \sqrt{s}) Sed est (§. 179.)

$$\frac{NQMF}{\sqrt{s}} = \frac{nQmF}{\sqrt{s}}$$

adeoque & tempora aequalia sint necesse est.

PROBLEMA XXXVII.

§. 185. Si cometa in orbita elliptica percurrat arcum quemlibet NQM, inuenire infinitas alias ellipses, in quibus eodem tempore percurrisset arcus, quos subtendant chordae ipsi NM aequales, & summa radiorum vectorum extremorum summae extremorum FN+FM aequalis fuisset.

SOLV.

SOLVTIO.

Bifecta chorda NM in G, e centro C agatur recta CQG. atque quaelibet ellipsis datae ANMB isochrona siue aequae periodica voto satisfaciet, si ita ponatur, ut transeat per punctum Q, & focus cum foco F ellipseos datae coincidat.

Aliter.

Fig. 22. Spectetur ellipsis AQB ut proiectio orthographica circuli AqB, atque chorda NM erit proiectio chordae nm. Arcus nm in circulo AqB transferatur ad libitum, atque mutata inclinatione quaeratur chorda proiecta datae NM aequalis. Quo facto dabuntur duo puncta ellipseos construendae, atque insuper uterque vertex A, B. Ea itaque constructa, ita erit ponenda ut focus cum foco F coincidat.

SCHOLION.

§. 186. Ponamus breuitatis ergo nm esse ipsam chordam translata, demittantur nN, mP ad axin normales, & chorda mn producat in R, ubi axin decussat. Fiat ut chorda mn ad mR, ita chorda ellipseos datae ad quartam proportionalem. Haec ponatur ex R in M, eruntque N, M duo illa puncta quaesita ellipseos ANMB, & arcus NM voto satisfaciet.

DEFINITIO IV.

§. 187. *Lapsus ellipticus cometae in solem est eiusdem in ellipsi incessus, cuius axis minor vel semilatus*

latus rectum = o, siue cuius vertex cum foco in centro solis coincidit.

COROLLARIUM I.

§. 188. Quoniam axis maior ellipseos est finitus, lapsus elliptici datur initium, atque cometa hac ratione in solem delabens, a quiete inchoat, totumque axin maiorem emetitur.

COROLLARIUM II.

§. 189. Quoniam porro tempus periodicum cometae in ellipsi incedentis unice pendet a longitudine axeos maioris (§. 71.) patet, hoc dato, una dari tempus, quo cometa a quiete inchoans in solem delabitur.

PROBLEMA XXXVIII.

§. 190. *Data distantia cometae vel corporis quiescentis a sole inuenire tempus, quo in solem delabitur.*

SOLVTIO.

Sit distantia ista = D, erit haec longitudo axeos maioris ellipseos, cuius tempus periodicum duplo maius est tempore quaesito. Unde cum tempus periodicum sit (§. 71.)

$$= \frac{\pi}{m}, \left(\frac{1}{2}D\right)^{3:2}$$

erit tempus lapsus elliptici in solem

$$= \frac{\pi}{m} \cdot D^{3:2} : 4\sqrt{2}$$

H

COROL

COROLLARIUM.

§. 191. Quoniam tempus lapsus parabolici est (§. 103.)

$$= D^{3/2} : 3m\sqrt{2}$$

erit tempus parabolicum ad ellipticum ut 4 ad 3π siue proxime = 14 : 33 = 73 : 172.

SCHOLIUM.

§. 192. Si pro D successiue substituantur distantiae planetarum mediae, erit tempus lapsus elliptici in solem

♃	dierum	1902,60.
♄	- - -	764,38.
♅	- - -	121,42.
♆	- - -	64,57.
♇	- - -	39,70.
♈	- - -	15,55.

PROBLEMA XXXIX.

§. 193. Inuenire celeritatem cometæ in elliptici incidentis.

SOLVTIO.

Fig. 12. Sit AM arcus ellipticus, A vertex, AF eius distantia a foco vel centro solis = f , axis maior sit a , distantia FM = z , arcus MN infinite paruus, MP arcus circularis soli concentricus. Tempus quo percurritur MN sit = T , quo vero percurritur MP = t , erit semilatus rectum ellip-

ellipticos = $2(a-f) : a$, adeoque vi legis quartæ (§. 69.)

$$T = \frac{MFN \cdot \sqrt{a}}{m\sqrt{2af-2ff}}$$

$$t = \frac{MFP}{m\sqrt{z}}$$

Dicantur celeritates per MN = C , per MP = c , erit

$$\frac{C}{c} = \frac{MN}{MP} = \frac{T}{t}$$

adeoque

$$C : c = \frac{m \cdot MN \cdot \sqrt{2}(af-ff)}{MFN\sqrt{a}} : \frac{MP \cdot m\sqrt{z}}{MFP}$$

siue

$$C : c = MN\sqrt{2}(af-ff) : (MP \cdot \sqrt{za})$$

Est vero

$$\frac{MP}{MN} = \sin MNP = \frac{\sqrt{af-ff}}{\sqrt{az-zz}} \quad (\S. 173.)$$

Quare substitutione facta

$$C : c = \sqrt{2}(az-zz) : \sqrt{za}$$

Est vero (§. 75.) celeritas circularis

$$c = 2m : \sqrt{z}$$

adeoque

$$C = \frac{2m\sqrt{2}(az-zz)}{z\sqrt{a}}$$

Quod est spatium iuxta directionem tangentialem uno die naturali percurrendum.

COROLLARIUM.

§. 194. Cum formulam erutam nonnisi axis maior & distantia FM ingrediatur, patet celeri-

H 2

leri-

leritatem a situ foci in axe esse independentem.

THEOREMA XVI.

§. 195. Si tempora periodica duorum plurimum cometarum in ellipsis incidentium sint aequalia, celeritas singulorum ad eandem a sole distantiam est eadem.

DEMONSTRATIO.

Etenim si tempora periodica sint aequalia, axes maiores quoque sunt aequales (§. 71.) Unde cum in genere celeritas elliptica sit

$$C = \frac{2\sqrt{2} \cdot m \cdot V(a^2 - z^2)}{2\sqrt{a}}$$

erit axis maior a pro singulis idem. Cumque ex hypothesi & distantia z ponatur eadem, patet celeritatem quoque eandem esse.

THEOREMA XVII.

Fig. 23. §. 196. Si cometa in ellipsi incedens percurrat arcum quemlibet NM , ducta chorda NM eaque bissecta in G , e centro C agatur semidiameter CGQ , atque e foco F recta FB axi maiori AB aequalis. Facta porro $Fg = \frac{1}{2}(FN + FM)$ & $Gn = gm = GN$, dico, si cometa e puncto b a quiete inchoans labatur in solem, tempus quo emittitur partem abscissam mn esse aequale tempori, quo percurritur arcus NM .

DEMONSTRATIO.

Recta Fb spectari poterit ceu ellipsis, cuius focus cum vertice in F coincidit, atque ob
Fb

$Fb = AB$ tempus quo percurritur idem est ac tempus periodicum ellipseos AQB (§. 71.). Erit porro $Fn + Fm$ summa radiorum vectorum $= FN + FM$, & nm chorda percursa $= NM$, quare vi Problematis XXXVII. (§. 185.) utraque chorda eodem tempore percurritur.

COROLLARIUM.

§. 157. Tempus itaque, quo percurritur arcus ellipticus quicumque per lapsum cometæ ellipticum in solem definiri poterit.

DEFINITIO V.

§. 198. Scala celeritatum ellipticarum est recta ita diuisa, ut ad datam quamvis a sole distantiam celeritatem cometæ in ellipsi incedentis exhibeat.

COROLLARIUM.

§. 199. Cum celeritas elliptica pendeat ab axe maiori (§. 194.) consequens est, scalam hanc eandem manere, quoties axis maior retineatur idem, hoc vero mutato scalam quoque mutatum iri.

THEOREMA XVIII.

§. 200. Si F denotet centrum solis, in quod cometa a quiete inchoans ex A delabatur, atque dato cuius puncto M adscribatur tempus, quo vel ex A peruenit in M , vel etiam ex M in F , recta AF hac ratione diuisa erit scala celeritatum pro ellipsis, quarum axis maior est $= AF$. Fig. 13.

DEMONSTRATIO.

Datur enim tempusculum, quo percurritur spatiolum quodlibet Mm. Hoc vero per illud diuisum celeritatem in M exhibet. Cum vero quilibet axis maior aliam requirat celeritatum scalam (§. 199.) atque recta AF referat ellipsin cuius vertex & focus est F, axis maior = AF (§. 197.) consequens est scalam his tantum ellipsis inferuire, quarum axis maior est = AF.

THEOREMA XIX.

§. 201. Sit A centrum solis, cometa a quiete inchoans ex B labatur in A, diametro AB describatur semicirculus, assumpta abscissa qualibet AP, normaliter ducatur ordinata PM, atque porro AM, dico, tempus lapsus integri per BA esse ad tempus lapsus per BP, ut area semicirculi AMB ad aream segmenti AMB.

DEMONSTRATIO.

Etenim recta AB refert ellipsin omni latitudine carentem, unde spatia, quae verrit radius vector, quibusque tempora sunt aequalia per notissimum Astronomiae theorema commodius & vel necessario per spatia semicirculi axi maiori AB insistentis exhibentur. Est vero focus in A, unde recta AM radii vectoris vicem sustinet, & tempora erunt ut areae, quas verrit. Quare tempus lapsus integri erit ad tempus lapsus per BP, ut area semicirculi ad aream sectoris MAB.

Aliter.

Sit $AB = a$, $AP = z$, $Pp = -dz$, tempusculum, quo labendo percurritur Pp sit = $d\tau$, erit celeritas in P = $dz : d\tau$. Vidimus vero, hanc esse (§. 193.)

$$= \frac{2\sqrt{2} \cdot m \cdot \sqrt{(az - z^2)}}{2\sqrt{a}}$$

Quare erit

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{2\sqrt{2} \cdot m \cdot \sqrt{(az - z^2)}}{2\sqrt{a}}$$

unde

$$\frac{2\sqrt{2} \cdot m \cdot d\tau}{\sqrt{a}} = \frac{z dz}{\sqrt{(az - z^2)}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \cdot m}{\sqrt{a}} \cdot \tau = \int \frac{z dz}{\sqrt{(az - z^2)}}$$

Est vero $\frac{1}{4} a z dz : \sqrt{(az - z^2)} =$ spatiolo mAM, unde erit $\frac{1}{2} \tau \cdot m \cdot \sqrt{2a} = \text{MAB}$

$$\tau = \frac{2\text{MAB}}{m\sqrt{(2a)}} = \frac{2n \cdot \text{MAB}}{\sqrt{2a}}$$

SCHOLION I.

§. 202. Haec formula exhibet tempus in diebus naturalibus, atque eatenus pendet a definita longitudine axeos maioris AB. Quodsi vero in genere tempus peridiocum ellipseos diuidatur in 100 partes aequales, atque axis maior AB in partes 10000, computabitur tabella lapsuum ellipticorum, qualis est ea, quam ad calcem huius opusculi adiecimus, ipsius usus erit uniuersalior. Eadem quoque vi theorema-

rematis XVIII. (§. 200.) usui erit in construendis *scalis celeritatum ellipticarum*, qualem sistit

Fig. 25. Numeri adscripti sunt tempora, quibus cometa lapsu elliptico a dato quouis loco in solem A defertur, si lapsus in B initium sumat, totumque tempus in 50 partes aequales diuidatur.

SCHOLION II.

Fig. 23. §. 203. Quodsi recta $FB = AB$ (§. 196.) hac ratione diuidatur, differentia temporum punctis n, m adscriptorum erit tempus, quo percurritur pars nm adeoque & arcus NM . Usus enim scalae ellipticae idem est ac parabolicae, quem in superioribus fusius explicauimus. Simulac enim datus sit axis maior, dabitur scala celeritatum, & chorda arcus cuiuscunque percursi una cum summa radiorum extremorum $FN + FM$ determinando tempori sufficiunt.

LEMMA XXV. PROBLEMA XL.

Fig. 21. §. 204. *Data longitudine axis maioris & situ foci F nec non situ punctorum N, M, construere ellipticam.*

SOLVTIO.

Uterque radius vector FM, FN ab axe maiori subtrahatur, atque differentiae vel residua per naturam ellipseos erunt distantiae foci alterius f ab utroque puncto M, N . Cum vero haec puncta sint positione data, situs foci f absque difficultate determinabitur. Quo facto recta Ff
in

in Cbifariam secetur, atque semilongitudo axis maioris ponetur ex C in A & B , eritque AB situs & longitudo axeos maioris. Hoc vero dato constructio ellipseos facillime absoluetur.

SCHOLION.

§. 205. Vel me tacente patet, situm foci alterius f duplicem esse, quare aliunde constare debet, quinam sit eligendus.

THEOREMA XX.

§. 206. *Si cometa, cuius tempus periodicum notum sit, e tellure obseruetur in utroque nodo, dabitur situs & longitudo lineae nodorum, & situs axeos maioris, totaque orbita, sed indefinita remanet huius inclinatio.*

DEMONSTRATIO.

Sit NAn pars ellipseos, F focus vel centrum solis, eE orbita telluris simulque eius loca tempore utriusque obseruationis. Rectae en, EN sint longitudes cometae geocentricae obseruatae, adeoque positione datae, erit NFn linea nodorum. Quoniam datur tempus periodicum datur quoque longitudo axeos maioris, unde constructur scala celeritatum. In hac a centro solis numeretur tempus a prima obseruatione ad alteram praeterlapsum, atque capiatur distantia, haec erit longitudo lineae nodorum Nn , quae cum necessario transeat per F , atque cadat intra rectas NE , ne positione datae, hac ratione duci poterit. Datur ergo situs utriusque puncti N, n & foci F ,
H 5, quare

quare constructio orbitae absoluetur per Lemma praecedens (§. 204.) Cum vero puncta n , N sint in plano eccliptices, orbitae inclinato his solis datis definiri nequit.

SCHOLION.

§. 207. Probe vero notandum, octuplicem esse huius casus solutionem. Primo enim recta Nn quadruplici modo intra rectas NE , ne cadere potest, ita ut per F transeat. Porro quilibet rectae Nn situs duplicem iterum admittit situm orbitae. (§. 205.) unde prodit solutio octuplex. At vero haud difficulter ad duplicem reuocatur. Etenim recta Nn et si quadruplici modo construi possit, attamen duobus tantum casibus ipsa transit per F , quod esse debet, quia centrum solis necessario est intra utrumque nodum N , n . Ceteris vero duobus casibus F cadit extra nodos N , n , unde vel necessario excluduntur. Porro duplex orbitae situs (§. 205.) hic nullam faceffit difficultatem, quippe, tertia obseruatione in subsidium vocata, una cum angulo inclinationis verus orbitae situs determinatur.

THEOREMA XXI.

§. 208. Si notum sit tempus periodicum cometae in ellipsi incedentis, atque insuper dentur tria ipsius loca geocentrica una cum interuallo temporis, quo factae sunt obseruationes, tota orbita eiusque situs definitur.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Etenim dato tempore periodico datur axis maior adeoque & scala celeritatum (§. 71. 200. seqq.) Huius vero usus cum plane idem sit ac scalae celeritatum parabolicarum, constructio orbitae eodem modo absoluetur, quo in solutione secunda Problematis XXXI. (§. 155.) orbitam parabolicam construendam esse docuimus. Definietur nempe situs verus duorum locorum cometae, unde tertia obseruatione adhibita, tota orbita construetur per Lemma XXV. (§. 204.)

SCHOLION.

§. 209. Tempus periodicum cometae, quod in hoc theoremate ceu datum assumitur, utique abesse posse non me fugit, quippe tria loca cometae geocentrica sufficiunt. Ne itaque absque ulla ratione vel necessitate datorum vel requisitorum numerum auxisse videar, haec notare conueniet. Primo constat eam esse orbitarum cometarum indolem eumque situm, ut arcus ille, quem tempore visibilitatis percurrunt totius ellipseos pars sit admodum exigua. Unde ex sex illis capitibus, quae simul sumta sunt orbitae veluti notae characteristicae (§. 141. 142.) longitudo axeos maioris ex obseruationibus sibi tantopere vicinis tuto colligi nequit, cum vel minimus error in obseruationibus vix euitandus differentiam notabilem pariat. Huc quoque referas aberrationem luminis, quae obseruationes plus minusue incertas reddere valet, cuiusque effectus, nisi iam

iam proxime nota sit cometæ orbita, definiri nequit. Quodsi vero orbita iam proxime sit definita, accidit quandoque, ut ex ceteris notis caracteristicis cometa cognoscatur esse idem, qui iam olim obseruatus est, unde tempus periodicum colligi poterit, præfertim si iam pluries fuerit obseruatus. Dato vero tempore periodico, determinatio orbitæ utique maxime facilitatur, quippe datur scala celeritum, vel si calculo rem curatius absoluere conducat, computari poterit tabella lapsus elliptici. Denique dato tempore periodico, eadem hic notanda veniunt, quæ circa parabolam notauimus (§. 170. 171.)

PROBLEMA XLI.

Fig. 23. §. 210. Data longitudine axis maioris AB , summa radorum vectorum $FN + FM$ & chorda NM , inuenire tempus, quo percurritur arcus NQM .

SOLVTIO.

Sint omnia ut in theoremate XVII. (§. 196.) cometa ex b in F decidens eodem tempore percurrit partem abscissam mn , quo percurritur arcus NQM , atque est

$$Fm = \frac{FN + FM + NM}{2}$$

$$Fn = \frac{FN + FM - NM}{2}$$

Pona-

Ponatur

$$Fb = AB = a$$

$$Fm = z$$

$$Fn = \zeta$$

tempora, quibus percurruntur Fm, Fn sint t, τ , differentia $t - \tau = T$ sit tempus quaesitum, erit (§. 201.)

$$\frac{2\sqrt{2}.m.t}{\sqrt{a}} = \int \frac{z dz}{\sqrt{(az - z^2)}}$$

$$\frac{2\sqrt{2}.m.\tau}{\sqrt{a}} = \int \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{(a\zeta - \zeta^2)}}$$

Quibus formulis in seriem resolutis debiteque integratis, erit

$$2\sqrt{2}.m.t = \frac{2}{3} z^{3/2} + \frac{1.2}{2.5.a} . z^{5/2} + \frac{1.3.2.z^{7/2}}{2.4.7.a^2}$$

$$+ \frac{1.3.5.2.z^{9/2}}{2.4.6.9.a^3} + \&c.$$

$$2\sqrt{2}.m.\tau = \frac{2}{3} \zeta^{3/2} + \frac{1.2.\zeta^{5/2}}{2.5.a} + \frac{1.3.2.\zeta^{7/2}}{2.4.7.a^2}$$

$$+ \frac{1.3.5.2.\zeta^{9/2}}{2.4.6.9.a^3} + \&c.$$

adeoque

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} (z^{3/2} - \zeta^{3/2}) + \frac{n}{10.a\sqrt{2}} (z^{5/2} - \zeta^{5/2})$$

$$+ \frac{3.n}{56.a^2.\sqrt{2}} (z^{7/2} - \zeta^{7/2}) + \frac{5.n}{144.a^3.\sqrt{2}} (z^{9/2} - \zeta^{9/2}) + \&c.$$

CORON-

COROLLARIUM I.

§. 211. Si axis maior sit infinitus, elliptis abit in parabolam, atque erit breuissime

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} (2^{3:2} - 3^{3:2})$$

prorsus ut in solutione tertia problematis XV. (§. 83.)

COROLLARIUM II.

§. 212. Patet itaque, quid tempori ex hypothese parabolae computato addendum sit, quo habeatur tempus, quo cometa arcum NQM ellipticum percurrit. Primus enim seriei erutae terminus ab axe maiore ellipseos non pendet, unde si solus retineatur, parabolae inseruit

COROLLARIUM III.

§. 213. Similiter si FB sit hyperbolae axis transuersus, tempus lapsus hyperbolici cometae ex m in solem F, erit (§. 210.)

$$t = \frac{n}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3} 2^{3:2} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 2^{7:2}}{2 \cdot 5 \cdot a} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^{7:2}}{2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot a^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2^{9:2}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot a^3} + \&c. \right)$$

Unde facile construetur *scala celeritatum hyperbolicarum*, *scalae ellipticarum* & *parabolicarum* similis.

THEO.

THEOREMA XXII.

§. 214. Axi maiori ellipseos AB insistat semi-Fig. 26. circulus AqB, ducta chorda NM axi AB parallela, erigantur ordinatae PNn, RMm, dico, si pro ellipseo sol sit in foco F, pro circulo vero in centro C, arcus NQM, nqm eodem tempore percursum iri.

DEMONSTRATIO.

E centro C erigatur normalis CQq, haec utramque chordam NM, nm bifecat, ducta itaque FQ, erit QE = qg (§. 180.) & ellipseo iuxta praecepta Lemmatis XXIV. (§. 173.) per Q ducenda hoc casu, ob FQ = AC, abit in circulum vQμ, circulo AqB aequalem. Ducta itaque vEμ ad FQ normali, arcus vQμ eodem tempore percurritur, quo arcus NQM (§. 183.) At vero ob FQ = Cq, QE = qg, arcus nqm arcui vQμ, & chorda nm chordae vμ est aequalis. Unde si centrum solis pro circulo AqB statuatur in C, arcus nqm eodem tempore percurritur, quo arcus ellipticus NQM.

COROLLARIUM I.

§. 215. Quodsi ergo detur tempus, quo cometa peruenit ex A in N, haud difficulter dabitur tempus, quo peruenit ex A in M, & vicissim. Addendum enim vel demendum erit tempus, quo percurritur arcus circularis nm. Huius vero computus longe est facillimus. Erit enim tempus istud ad tempus cometae periodicum ut arcus nqm ad peripheriam circuli AqB integram.

COROL.

COROLLARIUM II.

Fig. 21. §. 216. Similiter, cum hoc theorema a situ foci F non pendeat, si ponatur centrum solis in A, ut sit $AF=0$, cometa motu elliptico ex B in A delabens eodem tempore percurrit partem abscissam RP, quo percurritur arcus circularis nqm. ut adeo iterum dato tempore, quo cadit ex B in R facillime reperiatur tempus quo cadit ex B in P, siue etiam dato tempore quo peruenit ex P in A, reperiatur tempus, quo decidit ex R in A.

THEOREMA XXIII.

§. 217. Dato axe maiori AB, motus cometæ per arcum quemlibet NM reduci poterit ad motum in alia ellipsi aequæ periodica NQM, ita ut in hac eodem tempore percurrat arcus nQ, Qm ab utraque verticis parte æquales.

DEMONSTRATIO.

Bisecta chorda NM in G, sumtaque semisumma radorum vectorum (FN+FM):z, construatur triangulum rectangulum FEm, ita ut si

$$Fm = \frac{FN+FM}{2}$$

$$Em = \frac{1}{2} NM$$

Quo facto sumatur differentia inter Fm & axin AB, atque hæc transferatur ex m in ϕ , eritque ϕ focus alter ellipseos quaesitæ. Bisecta itaque ϕF in c, fiat $cQ = cb = AC$, eritque Qb axis maior. Dato vero foco F & axe maiori Qb ellipsis construi poterit, eritque nQm arcus quaesitus (§. 183.)

Tabu.

ad §. 115.

Tabula lapsus parabolici cometarum
in solem.

Tem- pus d. h.	Distant. a centro solis	Tem- pus d. h.	Distant. a centro solis	Tem- pus d. h.	Distant. a centro solis
0 0	0,00000	3 3	0,23516	8,12	0,45822
0 3	0,02750	3 6	0,24139	8,18	0,46712
0 6	0,04366	3 9	0,24754	9, 0	0,47601
0 9	0,05721	3 12	0,25360	9, 6	0,48479
0 12	0,06930	3 15	0,25961	9,12	0,49348
0 15	0,08042	3 18	0,26055	9,18	0,50211
0 18	0,09082	3 21	0,27142	10, 0	0,51065
0 21	0,10064	4 0	0,27722	10,12	0,52753
1 0	0,11002	4 6	0,28866	11, 0	0,54415
1 3	0,11900	4 12	0,29987	11,12	0,56052
1 6	0,12766	4 18	0,31088	12, 0	0,57665
1 9	0,13604	5 0	0,32169	12,12	0,59256
1 12	0,14416	5 6	0,33233	13 -	0,60826
1 15	0,15206	5 12	0,34279	14 -	0,63906
1 18	0,15976	5 18	0,35311	15 -	0,66914
1 21	0,16728	6 0	0,36327	16 -	0,69856
2 0	0,17464	6 6	0,37326	17 -	0,72737
2 3	0,18184	6 12	0,38318	18 -	0,75563
2 6	0,18891	6 18	0,39294	19 -	0,78336
2 9	0,19584	7 0	0,40258	20 -	0,81061
2 12	0,20265	7 6	0,41211	21 -	0,83741
2 15	0,20935	7 12	0,42153	22 -	0,86379
2 18	0,21595	7 18	0,43085	23 -	0,88977
2 21	0,22244	8 0	0,44006	24 -	0,91538
3 0	0,22884	8 6	0,44919	25 -	0,94063
3 3	0,23516	8 12	0,45822	26 -	0,96553

Tabula lapsus cometarum parabolici
in solem.

Tem- pus dies	Distant. a centro solis	Tem- pus dies	Distant. a centro solis	Tem- pus dies	Distant. a centro solis
26	0,96555	51	1,51300	76	1,97394
27	0,99015	52	1,53272	77	1,99122
28	1,01442	53	1,55230	78	2,00843
29	1,03846	54	1,57176	79	2,02555
30	1,06220	55	1,59111	80	2,04261
31	1,08567	56	1,61034	81	2,05960
32	1,10890	57	1,62945	82	2,07651
33	1,13188	58	1,64845	83	2,09336
34	1,15463	59	1,66735	84	2,11014
35	1,17717	60	1,68614	85	2,12685
36	1,19948	61	1,70482	86	2,14350
37	1,22159	62	1,72340	87	2,16009
38	1,24351	63	1,74188	88	2,17661
39	1,26523	64	1,76026	89	2,19307
40	1,28676	65	1,77855	90	2,20946
41	1,30812	66	1,79675	91	2,22580
42	1,32931	67	1,81485	92	2,24208
43	1,35032	68	1,83287	93	2,25829
44	1,37118	69	1,85080	94	2,27445
45	1,39188	70	1,86863	95	2,29056
46	1,41243	71	1,88639	96	2,30660
47	1,43282	72	1,90406	97	2,32260
48	1,45307	73	1,92165	98	2,33853
49	1,47318	74	1,93916	99	2,35441
50	1,49315	75	1,95659	100	2,37024
51	1,51300	76	1,97394	--	---

Tabula lapsus cometarum elliptici
in solem.

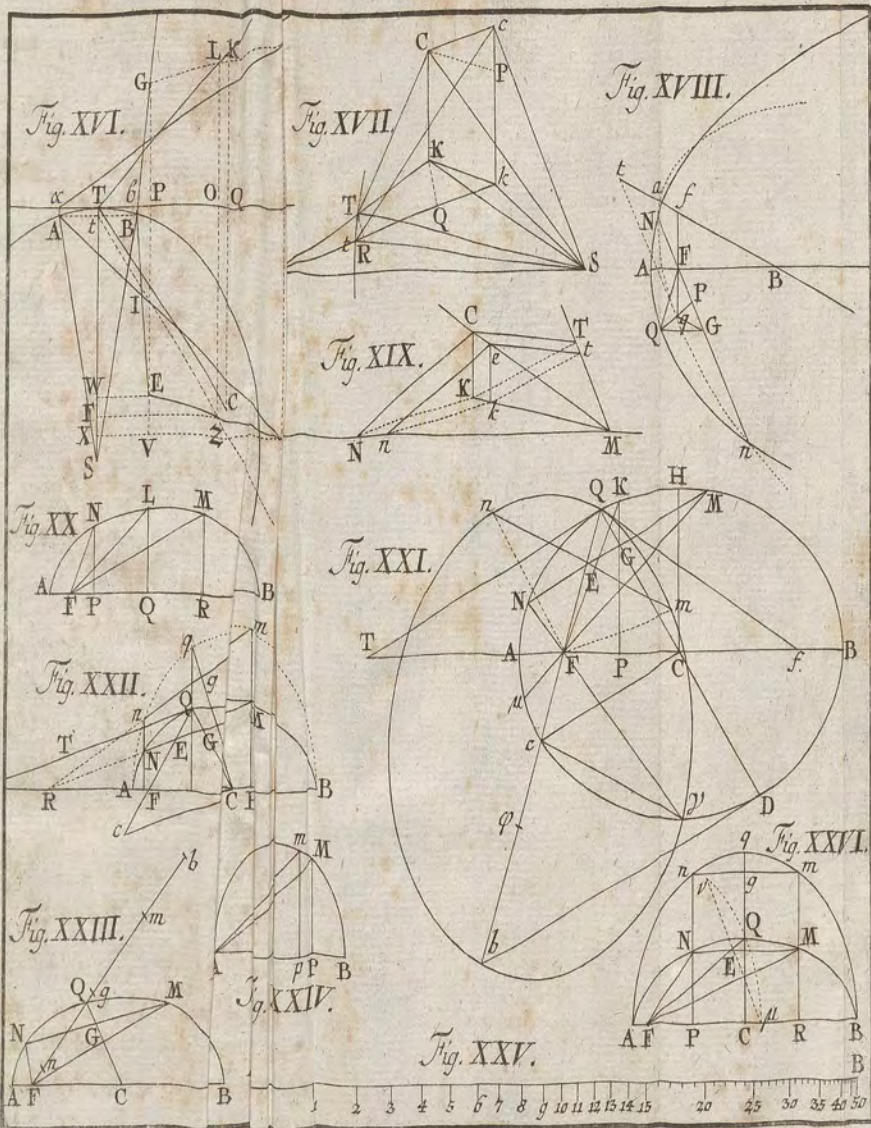
Tem- pus pus	distant. a sole	Tem- pus pus	distant. a sole	Tem- pus pus	Distant. a sole
0	0	17	7008	34	9355
1	1270	18	7209	35	9434
2	1984	19	7399	36	9508
3	2562	20	7580	37	9577
4	3062	21	7753	38	9642
5	3513	22	7918	39	9699
6	3921	23	8075	40	9751
7	4298	24	8226	41	9799
8	4647	25	8368	42	9842
9	4973	26	8503	43	9880
10	5279	27	8631	44	9912
11	5567	28	8753	45	9939
12	5840	29	8869	46	9961
13	6100	30	8978	47	9978
14	6343	31	9081	48	9990
15	6575	32	9178	49	9998
16	6797	33	9269	50	10000
17	7008	34	9355	--	---

Errata.

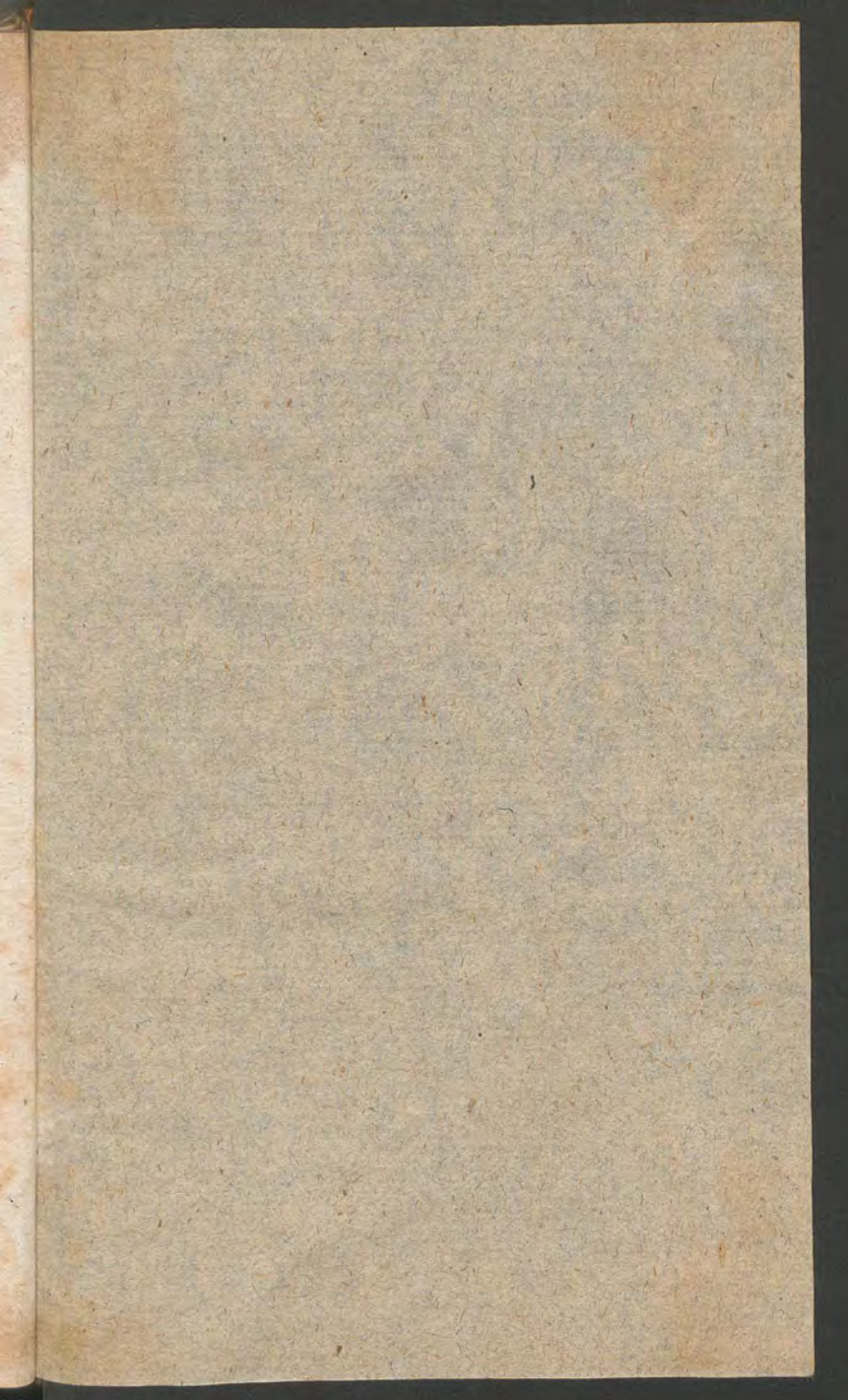
- p. 7. §. 23. lin. 2. pro PMF lege QMF
 p. 10. - - - lin. 7. pro FM—FH l. FM—FN
 p. 15. §. 37. lin. 5. pro fin FRM: (FRM+c)
 lege fFMR: (fFMR+c)
 p. 15. §. 37. lin. 16. pro angulo FMN lege
 angulo RMN
 p. 23. §. 52. lin. 10. pro Ducatur BD lege Du-
 catur Bd
 p. 25. §. 56. lin. 11. pro NEF = $\frac{1}{2}$ QEB lege
 NEF = $\frac{1}{2}$ QFB
 p. 26. - - lin. antipen. pro $\frac{1}{2}$ GQ = $\frac{1}{2}$ FQ lege
 $\frac{1}{2}$ GQ + $\frac{1}{2}$ FQ
 p. 44. - - - lin. 11. pro $\sqrt{2}$ QG + $\frac{1}{3}$ QG lege
 $\sqrt{2}$ QG + $\frac{4}{3}$ QG
 p. 47. §. 100. l. 5. pro m $\sqrt{2}$: \sqrt{MF} l. 2m $\sqrt{2}$: \sqrt{MF}
 p. 53. - - - l. 3. pro 29 lege 34
 p. 53. - - - l. 5. pro 22 lege 27
 p. 58. - - - l. 11. pro QI lege GI
 p. 65. §. 130. lin. 7. pro fin NFK lege fin NFH
 p. 81. - - - l. 6. pro qhtang⁶—pq tangz lege
 qhtang⁶—pgt^z



BIBLIOTHECA
VNI^{ERSITATIS} IAGELL.
CRACOVENSIS



BIBLIOTHECA
UNIV. FACELL.
CRACOVENSIS



Biblioteka Jagiellońska



stdr0008422

