DARSTELLUNG

der

sæmmtlichen Theile der Mathematik.

welche wæhrend dem dreyjæhrigen Kurs auf der Krakauer Universitæt öffentlich, und in den privat Stunden vorgetragen waren.

Abgefaſst

von

Joseph Łęski

daſelbst proviſoriſchen Lehrer der höheren Mathematik und Astronomie.

L'étude des Mathématiques transcendantes rompt l'esprit aux méditations profondes; elle lui donne de l'étendue & de la juſteſse; elle l'exerce à ſuivre la vérité dans les dédales les plus tortueux, sans s'égarer.

Cousin
Calcul différentiel & Intégral.

KRAKAU 1801.

Sr. *Kayserlichen Majestæt.*

FRANZ DEM ZWEITEN.

Als ich durch das Schiksal meines ehemaligen Vaterlandes, des Lehramtes im Warschauer Kadetten Korps verlustig wurde, und mich mit meiner Familie nach meinem Geburthsort begab, geruheten Eure K. K. Majestæt mir einen erledigten Lehrstuhl in der hiesigen Universitæt allergnædigst, provisorisch anzuvertrauen. Ich suchte bei der dreyjæhrigen Verwaltung dieser Lehrkanzel mich stets dieses Allerhöchsten Væterlichen Schutzes würdig zu zeigen, und halte es für meine Pflicht Ew. K. K. Apostolischen Majestæt, durch den gegenwærtigen Aufsatz, davon Rechenschaft abzustatten.

Ew. Kayserl. Majestæt.

KRAKAU. *unterthænigst — gehorsamster.*

im Julius 1801. JOSEPH ŁESKI.

DIE REINE GRÖSSENLEHRE.

VORBERICHT.

Bekanntlich, ist ein durch seine Wahl, Bestimmtheit und Ordnung sich empfehlender, und dem jetzigen Zustande der Wissenschaft angemessener Plan, und eine gute Unterrichtsmethode, sehr vermögend, die Fortschritte der Lehrlinge zu befördern. Da aber der Verfasser keinen solchen Plan vor sich sah, so entwarf er sich den gegenwærtigen als einen Versuch und eine Verbesserung desjenigen, welchen er sich bei seinem dreyjæhrigen Vortrag und zur öffentlichen *Prüfung* seiner Schüler bediente. Er hatte ihn nach den brauchbarsten so wohl einheimischen als auswærtigen Anfangsgründen abgefasst, und als eine öffentliche Rechenschaft von der provisorischen Verwaltung des Lehramtes, dem Druke überliefert. Dabey hatte er auch die Nebenabsicht den Kennern zu einer etwanigen Widerlegung Anlass zu geben.

Gegenwærtige Darstellung enthælt zugleich die brauchbarsten Formeln aus den sæmmtlichen Theilen der Mathematik, und es ist hier der Ort manches in Ansehung ihrer zu berühren.

Eine Formel, oder eine Gleichung ist, wie bekannt, als ein Buch anzusehen, darinn man nicht nur die Auflösung der vorhandenen Aufgabe, sondern auch aller ihrer möglichen Fælle findet. Ferner kann sie, als eine Quelle, zu neuen Wahrheiten dienen, die man anfangs gar nicht mutmasste, daraus schöpfen zu können. Zudem kann sie mit unseren Urtheilen, die eben nicht mathematische Gegenstænde zum Ziele haben, sehr vortheilhaft in Beziehung auf die praktische Logik verglichen werden.

Hieselbst betrachte ich sie aber von einer meiner Absicht noch mehr entsprechender Seite. Ich sehe nemlich eine Formel, als eine sinnliche Vorstellung einer allgemeinen Wahrheit, an: und gegenwærtiger Aufsatz enthællt also ein Gemæhlde der wichtigsten Wahrheiten, zu denen sich der menschliche Verstand in der Erforschung der ewigen Gesetze der Natur emporgeschwungen hat. Diese Formeln und ihr systematischer Zusammenhang machen eine kurzgefasste Uebersicht von den sichersten und edelsten menschlichen Kenntnissen aus, die unter dem Nahmen der *Mathematischen Wissenschaften* bekannt sind.

Gegenwærtige Sammlung ist das Resultat von den wichtigsten Untersuchungen, Erfahrungen und Entdeckungen, die der menschliche Forschungsgeist seit vielen Jahrhunderten, in dem ausgebreitesten Felde seines Gebiets gemacht hat: sie kann also nicht zur blossen Lektüre dienen. Sie ist eigentlich für Schüler (Zuhörer læsst sich hier ohne Anstoss nicht sagen) die dem öffentlichen Kurs beywohnen und mit Beharrlichkeit ihr Studium betreiben, blos zum Leitfaden und als Hülfsmittel beim Unterrichte, bestimmt. Jedoch auch selbst dem Lehrer zur kurzen Rückerinnerung bei seinen Vorlesungen, und dem Kenner und einem Gelehrten zur allgemeinen kurzen Uebersicht des unermæslichen Gesichtskreises einer der Abtheilungen der Gelehrsamkeit, und um zu wissen, wodurch und durch wen überhaupt sie von Zeit zu Zeit bereichert wird; kann vielleicht dieser Aufsatz, ehe die Elemente der Grössenlehre eines *Murhards* in ihrem ganzen Umfange erscheinen, einige Dienste leisten. Demjenigen, der sich dieser Wissenschaft nicht ganz widmet, und für den die Gelehrsamkeit nicht, wie für jenen ein Berufsgeschæft ist, kann er brauchbar sein, wenn man bei ihm voraussetzt, dass er nach einer Formel rechnen, das ist: Zahlen statt der allgemeinen Zeichen setzen, und die Arbeit selbst, so wie es die Formel gebietet, verrichten kann. Und dazu gehört wohl nicht eben grosse Fæhigkeit: nur etwa einiges Zutrauen in die Richtigkeit der Formel, welches ein gebildeter Geist und mathematischer Kopf, den man nicht so leicht zu einer Maschine umformt, ohne einer vorlæufigen Ueberzeugung und Prüfung, nicht haben kann: dann wird aber auch dieser nicht so, wie jener

der

der Pinscherey blossgestellt. Sogar einem Halbgelehrten kann diese Sammlung nützlich sein, indem sie ihn von der Sphære seiner Kenntnisse überzeugt.

Es scheint aber, dass mancher misslungener Unterricht seine verfehlte Absicht hauptsæchlich dem Mangel an kurzen bestimmten und anschaulichen Merkmahlen, womit sich wenigstens wichtigere Kenntnisse unterscheiden könnten, zu verdanken hat. Nichts ist dem raschen Fortgang beim Unterrichte mehr zuwider, als ein schon beim Anfang sehr detaillirter und abstracter Vortrag. Ich bin aus Erfahrung überzeugt, dass der vortrefliche *Karstensche* Vortrag weit mehr Anhænger unter der Jugend gefunden hætte, wenn z. B. in seinem Lehrbegrif sogar die Axiomata nicht aus einander gesetzt wo nicht gar erwiesen stünden. *Dalembert* will sie ganz aus den Elementen verdrængt sehen. Die Aufmerksamkeit wird hier zerstückelt und der Lehrling schon müde und verdrüsslich, ehe er die Absicht der Erklærungen einsieht. Dieses abschreckende Beginnen und erschwerter Zutritt zur Erlernung einer Wissenschaft, die das Gepræge der intuitiven Deutlichkeit und Identitæt mit sich führt, hat einen sehr bedeutenden Einfluss, nicht allein auf die Fortschritte sondern öfters sogar auf den künftigen Lebenslauf von manchem Individuum, dessen Bestimmung vielleicht ist der Wissenschaft Zierde zu sein. Schon længst erinnerte der s. *Kæstner*. „ So viel habe ich wohl von Anfængern erfahren, dass viele Worte und grosse Weitlæuftigkeit eher sie ermüden und verwirren als belehren: „ Dennoch handelt man öfterts nicht dieser Erfahrung gemæss: und hat auf den Schaden den man durch diese strafbare Gleichgültigkeit in der Wahl der Methode Ihnen anthut, keine hinlængliche Rücksicht. Glücklichere Unterrichtsmethoden ist man den neuern Zeiten schuldig. Es ist hier der Ort nicht sich in die Prüfung dieser Methoden einzulassen, und ich begnüge mich überhaupt die Versinnlichungsmethoden zum Grund beim Unterrichte zu legen. Hoffentlich wird also auch aus dieser Rücksicht der Nutzen den gegenwærtigen Formeln nicht abgesprochen. In wenigen einfachen und kurzen Zügen wird hier eine wichtige Wahrheit, so zu sagen, abgebildet. Dem Lehrlinge steht das Ziel seiner Aufmerksamkeit stets vor Augen: der Vortrag wird ihm angenehmer und lehrreicher: ist bei weitem nicht mit den obenangeführten Unvollkommenheiten verknüpft und kann mit der Schlözerschen Art die allgemeine Weltgeschichte zu lehren, und dergleichen mit Vortheil verglichen werden. Sogar getraut man sich zu sagen, dass diese angenommene und hier durchgængig befolgte Unterrichtsart, den von *Maimon* vorgeschlagenen und bis jetzt vernachlæssigten Vortrag zum *Erfinden*, indem der bis jetzt gebrauchte bloss zum *Erlernen* der Mathematik eingerichtet ist, befördert. Nur wære hier noch zu empfehlen, dass man den Schüler durch Induction und durch hæufige Exempeln mit Zahlen, die bewiesene Wahrheit der Formeln zu erlæutern, und sie mit denselben zu vertrauen suche: und das aus dem Grunde, weil ein abstrakter Vortrag oft ein geheimnissvolles Ansehen giebt, wo alles deutlich wird, wenn man mit Exempeln anfængt, wovon die Abstraction gemacht ist. Aehnliche Bemerkungen wird sich der denkende Leser selbst über diese Formeln und ihrer Erlernung ergænzen.

Ihr Zusammenhang und allgemeine Abtheilungen machen überhaupt den Plan zu künftigen Elementen aus. Fast jeder Theil der Mathematik, sagt *Kæstner*, hat in den neuen Zeiten so viel Vermehrungen erhalten, dass blos deswegen von Zeit zu Zeit neue Anfangsgründe erfordert werden. Je grössern Wachsthum die Wissenschaften bekommen, desto nothwendiger wird ihnen ein Vortrag, der immer mehr Lehren in einem engern Raum zusammenbringt. Diese Bemerkung hatte ich mir bei der gegenwærtigen Einrichtung gemacht. Aber gleich Anfangs wird es vielleicht dem Leser anstössig sein, dass die Elementar Arithmetik und die Eukildische Geometrie so geschwind abgefertigt worden. Zur Beantwortung dieses Vorwurfs muss ich hier nur erinnern, dass diese zwey Elementar Wissenschaften bei jeder guten Erziehung schon den Kindern vorgetragen werden, oder werden sollten: und wer sie nicht inne hat, kann und wird auch nicht dem ganzen Kurs der Mathematik beywohnen wollen.

Dennoch sind auch hier die Hauptresultate durch Formeln, die grosses Licht und Anlass zu detaillirter Erklærung geben, oder solche die sich nicht in gewöhnlichen An-

fangs-

fangsgründen befinden, beigebracht. Dieses wird der Leser unter andern bei der Regel Detri, der Lehre der Logarithmen u. d. g. finden. Es wird hier vorausgesetzt, daſs der Lehrer die ganze Methaphysik seines Verfahrens kennt und daſs die Formeln, die er vorträgt, nur als Resultate von den zuverläſsigsten Vernunftschlüſsen, die er durch Zusammenstellung ſeiner Begriffe herausgebracht hat, angesehen werden können. Er ist also im Stande, und es stehet ihm frey manches durch weitläuftige Erläuterungen und durch philosophische Untersuchungen zu ergänzen, ohne daſs er dadurch den Faden des Ganzen unterbricht.

Was mir also am meisten obliegen dürfte, war die Zusammenstellung der Grundsätze, um ein so viel möglich ein einfaches Ganzes zu bilden. Es ist also zu dem Ende auch schon die Differential und Integral Rechnung der allgemeinen Gröſsenlehre einverleibt worden: und es hat auch diese Infinitesimal Rechnung nach allen den Erklärungen, die wir den neuen Schriftstellern zu verdanken haben, nicht mehr solche Geheimniſse oder Unbestimmtheiten, die sie aus einer sich am meisten durch ihre Gründlichkeit empfehlenden Hauptabtheilung der Gröſsenlehre, verdrängen sollten. Wenigstens läſst es der gegenwärtige Zustand der Wiſsenschaft nicht zu, da zudem die Grundlage davon schon in der Analysis des Endlichen, wie es die § 7. n. X. und § 8. n. V. zeigen, gelegt werden kann: und ich gestehe es, daſs bei allen neuern Elementen, wo ich die Infinitesimal Rechnung nicht fand, es mir vorkam, als fehlte was dem Systeme. So wäre es z. B. mit den *Metzburgischen* Elementen v. 1791. bei allem Guten, das sie ſonst haben. Sie sind nach den la *Caillischen* v: 1741. abgefaſst: aber hier finde ich sie ſchon nebst einigen zwar kurzen aber lehrreichen Anwendungen. Dieſes hat auch der Abt *Marie* in der neuen Auflage dieser la Cailiſchen Elemente gethan. Kann man sie also ein halb Jahrhundert ſpäter, beim Schluſs des 18 Jahrhunderts aus den Elementen verdrängen, und eine Art von Scheidungsmauer zwischen Elementar Werken und eines la *Place*, la *Grange*, *Prony* u. d. Schriften befördern? (Indem ich dieſes ſchreibe, erscheint ein Elementarwerk von H. LACROIX. *Traité élementaire du Calcul differentiel & du Calcul Intégral en un seul Volume in* 8vo. als Anszug von seinem groſsen Werke in 3. B. in 4. und für diejenigen angehenden Mathematiker bestimmt, die die angeführten Werke mit Nutzen studieren wollen.) Dieſem Mangel sind die ſchwer zu habende, für die Ingenieurs in Wien abgefaſste Anfangsgründe, wovon ich in den vorjährigen Aufsätzen zu ſprechen die Gelegenheit hatte, nicht unterworfen: und ich begnüge mich hier nur zu bemerken, daſs ich mit groſsem Vergnügen die Fertigkeit derjenigen, die darnach unterrichtet waren, bemerkte, und nirgends, wo ich Gelegenheit hatte öffentliche Erziehungs Anstalten kennen zu lernen, beſsere Unterrichts Methoden, hauptsächlich aber der künftigen Anstellung gemäſs, beſser eingerichtete angetroffen habe. Gestehen wirs anderseits: Kann man den möglichen gröſsten Nutzeffekt in der Maschinenlehre, ohne der Theorie des *Gröſsten* und *Kleinsten*, bestimmen? Kann man, wenn es auch nicht in der Astronomie sei, doch schon in der praktischen Geometrie, wenn ihre Anweisung vollständig sein soll, der *differential Analogien* entbehren? Sind diese zwey Theorien auch ſchon in ihren Anwendungen aufs geſellschaftliche Leben nicht recht nützlich, die erste, indem sie dem Geiste die Fähigkeit verschaft den gröſsten Nutzen und den kleinsten Schaden von den Urtheilen und Handlungen zu tragen: die zweite, da sie die Gröſse der Fehler, die wir aus mancher Rücksicht begehen können, miſst; ist sie nicht vermögend ein stolzes und sich für unfehlbar haltendes Geschöpf, von dem Mangel und dem Miſsbrauch der Erkenntniſskräfte zu überzeugen, und den Menschen vor den Abwegen in die er in ſeinem unbedachtſamen und kühnen Entscheiden gerathen kann, zu warnen? Ihm wenigstens die Fähigkeit dazu zu verschaffen? So erstreckt sich der Einfluſs der Mathematik bis auf Moralität.

Auch in der Elementargeometrie habe ich die brauchbarsten Sätze, und hauptsächlich jene, die sich durch Formeln bequem ausdrücken laſsen, oder die sich in den gewöhnlichen Anfangsgründen nicht befinden, beizubringen mich bemühet. So war z. B. die Art die Fläche und den Inhalt der Cylinderstücke, als eine zum Toisiren der Gewölber brauchbare Theorie § 10. besonders angeführt. So war es

noch

noch die Eintheilung der Figuren in gleiche oder Proportionaltheile durch Parallelinien § 5. Ein Paar geometrishe Beyspiele von unbestimmten Aufgaben § 3. n. VI. 3. *Ex.* Etwas von der Theorie der Tangenten, die in der Optik und in der Astronomie vom hæufigen Gebrauche ist § 3 Ex. 2. u. d. g.

Auch liefs sich fchon hier eine Anwendung von der Rechnung des Unendlichen bei der Bestimmung der Ausdrücke für die Kugelstücke § 8 im Gegensatze mit der Erschöpfungsmethode der Alten, zeigen.

Was die Praktische Geometrie anbetrift, dazu bediente ich mich eines Werks, das ich auf höheren Befehl noch in Warschau 1791. für die Ingenieurs druken liefs; freylich nun mit Zusætzen eines *Mayers*, und in privat Stunden. Die Ergænzung davon mit dem Hauptresultaten der praktishen Vorschriften, finden den schicklichsten Ort in der mathematischen Geographie, die Astronomische Kenntnifse voraufsetzt. Eine Anwendung davon liefs sich bei der Aufnahme einer Gegend von Krakau zeigen. Ueberhaupt finde ich mit dem Hrn *Hauser*, dafs oft die Praktik den Schüler reizt, der bei der Theorie unempfindlich bleibt: und der Jüngling verliert bald die Bilder nie gefehener Gegenstænde, welche er sich selbst blofs nach dem Vortrage nie so deutlich macht, als der Lehrer wünscht. Diese Erfahrung macht den Unterricht, wo die Praktik mit der Theorie vereinigt wird, schætzbar.

Ich habe fehr vortheilhaft befunden gleich nach der Lehre der æhnlichen Dreyecke den Gebrauch des vorzüglich zum Unterricht sehr bequemen *Hogrewschen* Mefstisehchens im Felde zu zeigen. Ich bediente mich auch defselben ehemals zur Vermefsung des südlichen Theils von Warschau und ihrer umliegenden Gegend bis nach Czerniakow, etwa eine gute halbe Meile: also die westliche Ufer der Weichsel, *Czerniakow*, *Krolikarnia*, *Mokotow*, *Łazienki* mit begriffen, und hatte bei dieser Aufnahme die ich mit den Hrr. Kadetten für den H. S. König von Pohlen verrichtete, öfters Gelegenheit Anwendungen von den schönen, von mich übersetzten praktischen Vorschriften des Hrn *Hogrewe*, zu machen. Zum genauern Aufnehmen mufs freylich der von den Kayserli: Ingenieurs gebrauchte seine Stelle vertreten: aber die Beschreibung davon, fo wie von andern Instrumenten konnte hier kein Platz finden. Ueberhaupt lernt man den Gebrauch der Instrumenten erst im Felde kennen, und in den Elementen begnügt man sich nur die Grundsætze ihrer Theorie zu erklæren.

Da es bei den meisten mathematischen Untersuchungen über den Zufammenhang der Gröfsen, die sich aus einander bestimmen, hauptsæchlich auf die Verbindung der Linien, der Ebenen und ihrer Winkel untereinander ankömmt; so habe ich in der geradelinigten und fphærischen Trigonometrie, als der deshalb fehr wichtigen Wifsenschaft, die den ausgebreitesten Einflufs auf alle Theile dar Mathematik hat, und wenn sie dazu analytisch vorgetragen wird, den bequemsten und kürzesten Weg und Beweis verschaft, fchon længer verweilt. Ich habe mich hier stets eines nemlichen Dreyecks $A, B, C,$ defsen Seiten ich mit den kleinen Buchstaben $a, b, c,$ bezeichne, bedient: fo dafs z. B. die Seite a dem Winkel A gegenübersteht, und die Seite $A,B,$ zur Grundlinie angenommen. Für das rechtwinklichte, fowohl geradelinichte als fphærifche Dreyeck, bezeichne ich die Katheten, mit a die Höhe mit b die Grundlinie, mit h die Hypothenufe, mit m den einen fchiefen Winkel an der Grundlinie und mit n den andern. Auf folche Art konnte ich auch für andere Formeln der Figuren entbehren. Zum gemeinnützigern Gebrauch aber habe ich die unentbehrlichsten in befondern Kupferplatten beigefügt, und durch kurze Beschreibung dieser Figuren eine Art von zweytem Gemæhlde oder sinnlicher Darstellung der mathematischen Wahrheiten verfertigt: wobey sich auch Manches ergænzen liefs. Auch liefs sich hier etwas von der Markscheidekunst vortragen, nicht etwa aus Neuerungfsucht, viel weniger aus Hang zum Encyclopedismus, fondern hauptfæchlich aus der Rücksicht, dafs es zum Voraufsetzen ist, dafs man doch einige Begriffe davon auf Universitæten eines Landes ertheilt, das aufser vielen Vorzügen auch so berühmte Bergwerke besitzt. Es versteht sich, dafs beim Unterrichte die

Figu-

Figuren recht groſs und deutlich gezeichnet ſein müſsen. Öfters bediente ich mich der Gelegenheit Auſsichten und Blicke auf andere Theile der Mathematik, wo die vorkommenden Gegenſtænde gründlicher und vollkommener erklært werden können, den angehenden Meſskünſtlern zu zeigen, und ſie ſchon zeitig, unter andern auf den Weg zu den erhabenen Astronomiſchen Kenntniſsen zu führen. In dieſer Absicht machte ich auch ſchon von den *Hadleyschen Spiegelsextanten* eine Erwæhnung, die für mich um desto angenehmer ausfiel, da ich zu ſeinem Besitz auf eine wohlfeile Art gekommen bin und ihn dem Ruf eines Liebhabers zu verdanken habe. Die Beschreibung davon eines *Bohnenbergers* (Anleitung zur Geographischen Ortsbestimmung §. 1795. Göttingen mit 7. Kupf:) müſste mir auch aus dieſer Rücksicht recht willkommen sein.

So ſehr ich auch gewünscht hætte bei manchen Gegenstænden der allgemeinen *Gröſsen* und *Raumlehre*, in die ich mit dem Hr. *Murhard* die *reine* Mathematik eintheile, verweilen zu können, ſo hielt mich davon unſeres verdienstvollen nunmehrigen Obristlieutenants Hr. *v Hauser* Bemerkung ab. ,, Der Gelehrte mag ſeines Gegenstandes Wesen ganz erſchöpfen, des Lehrers erste Pflicht ist jene auf ſeinen Schüler zu ſehen. ,, Um aber auch der Würde der Wiſsenschaft, bei ihrem jetzigen Zustande, ſo viel möglich kein Abbruch zu thun, ſo behalte ich mir vor, in einem Anhange zu den gegenwærtigen Darstellungen die Reſultate der wichtigsten neuen Theorien und Erfahrungen, beſonders für den Theil der *angewandten* Gröſsenlehre durch den Druck einst zu verbreiten, und ein vollstændiges Werk nach diesem Plan zu bearbeiten.

Dieses Versprechen; um es in Erfüllung bringen zu können, ſetzt die Bekleidung einer wirklichen Stelle zum voraus; denn eines *proviſoriſchen* Lehrers Lage und Zustand sind nicht eben die vortheilhaftesten, um sich mit einem Geschæft, das ſein Auskommen gar nicht begünstigt, abzugeben. Dazu sind auch Hülfsquellen nöthig, deren Anschaffung betræchtliche Ausgaben verurſacht. Ist man aber einmal mit diesen Hülfsmitteln verſehen; genüſst man eines Wohlstandes, der einen auſser Beſorgniſs für Nothdurft, und über kleinliche Berechnungen der Zukunft, verſetzt, ſo kann man alsdann ſchon was beſseres und vollstændigeres unternehmen und ausführen. Gleich einem durch Kultur sich auszeichnenden Reiſenden der mit literarischen Hülfsmitteln verſehen (wenn es auch nicht unter der Leitung eines betæubenden Ciceronis sei) in einer an Natur und Kunstprodukten reichen Gegend herumwandelt, und durch Wahl und Zuſammenstellung der bereits geſchehenen Beſchreibungen, den verschiedentlich geſehenen Gegenstænden, neues und helleres Licht verschaft, leistet ſo ein Schriftsteller der Wiſsenſchaft wahre Dienste. Er muſs aber noch viele andere Eigenschaften, wenn er sich nicht in Auszügen allein einschrænken will, besitzen: an keine beſondere Vorurtheile, Gewohnheiten und Vorstellungsarten, die er bei der Erziehung empfangen, heften. Kurz um ein Mann der Wiſsenschaft ſein zu können, müſste, mögte ich fast ſagen, das Subjekt ſeine Bildung sich ſebst zu verdanken haben. Freylich ist dieſer Fall wegen der groſsen Anstrengung, die er in der Erwerbung der Kenntniſse voraufsetzt (die doch durch die Früchte, die man davon ziehet, reichlich belohnt wird) sehr selten, und deshalb schon vermögend ihm ein ungünstiges Urtheil zumvoraus zu bewirken: indeſsen wird die Möglichkeit ſolcher Fælle, auſser vielen ælteren, durch das ganz neue Beispiel eines Pohlens *Chodowiecki* u. a. m. erwieſen. Aber dann unterscheidet sich auch eines ſolchen Verfaſsers Arbeit von jener eines gemeinen Zuſammenstoplers; und um mich *Stevins* Worten zu bedienen ,, Kann ein Gelehrter den Wiſsenschaften durch weitere Bekanntmachung und Zuſammenstellung der bereits gefundenen Wahrheiten oft weit mehr Vortheil gewæhren als durch Erweiterung ihrer Grenzen. .,

Manche Erinnerungen würden vielleicht hier noch Platz gefunden haben, wenn es die Grænzen einer Vorrede zulieſsen. Vielleicht werde ich ohnehin Anlaſs oder Muſse bekommen Einwendungen einst zu beantworten. Dieſmal begnüge ich mich alſo nur zu erinnern, daſs ich nichts in der gegenwærtigen Darstellung hergesetzt habe, das meine Schüler nicht gefaſst, wenigstens nicht vor sich gefaſst hætten; denn zwischen lernen und unterrichten wird doch wohl immer ein groſser Unterſchied bleiben.

Die

Die Ausdrücke für die Formeln, wenn sie aus einem bekannten und hæufig gebrauchten Werke entlehnet waren z. B. eines *Cagnoli* classischen Werkes, eines T. *Mayers*, eines *Kæstners*, *Vega* u. d. gl. also schon ein Vertrauen mit ihnen voraussetzen, habe ich meistens beibehalten; und die Druckfehler, da die hiesigen Setzer nicht gewohnt sind Formeln zu drucken, mit Verdruss verbessern müssen; bedeutende Fehler wirds also nicht geben. Ich war dennoch mit diesen gedruckten Formeln nicht zufrieden: und dieses gab mir Anlass selbe selbst zu stechen, und sie den Figuren beyzufügen: wodurch ich meine Absicht noch mehr befördert zu haben meyne.

Ich glaube unter den mathematischen Kenntnissen die ausgebreitet zu sein verdienen, oder die Grundsætze der Wissenschaft nebst ihren Anwendungen bestimmen, eine zweckmæssige Auswahl getroffen zu haben. Alles weniger brauchbare habe ich weggelassen und das praktische Nützliche sorgfæltig bemerkt. Ueberhaupt wære es zu wünschen, dass statt des vielen Vernünftelns, und noch zu einer Zeit, da das Streben nach Ausbildung des Intellectuellen des Menschen schon ohnehin auf Unkosten des Moralischen geschiehet, der grosse Haufe auf vernünftiges Handeln, und der gelehrte Unterricht auf den Schulen und der Universitæt in ein genaueres Verhæltniss mit den Zwecken künftiger Anstellung, zurück gebracht werden.

Dieses wæren nun die Bemerkungen, womit ich die gegenwærtige Vorrede beschlüsse, damit sie wider meine Absicht nicht zu einer Abhandlung anwachse. Erleichterung des Zutritts zur Erkenntniss der Matematischen Wahrheiten für die Jugend ist meine Hauptabsicht bei der Bearbeitung des gegenwærtigen Aufsatzes gewesen. Sinnliche Darstellungen in Verbindung mit den Vortheilen, die die Analysis darbietet, sind die Hüfsmitteln, womit ich meine Absicht erreicht zu haben glaube. Wenigstens bestætigt mir die Erfahrung die Vortheile dieser Unterrichts Methode, indem schon zwelfjæhrige Kinder meinen Vortrag fasslich fanden. Derselben Methode werde ich mich auch bei der Darstellung und Bearbeitung der übrigen Theile der Mathematik, wovon itzt der erste Jahrgang erscheint, bedienen, wenn dieser Versuch den Beyfall des aufgeklærten Publikums erhællt.

Bey Erwæhnung des Unterrichts und der Erziehung erwacht eine Rückerinnerung des für mich theuersten Lebenslaufes der jugendlichen Jahre, die ich unter der Anführung Sr. Durchlaucht des Fürsten Adam Czartoryski Kommendanten des ehemaligen Warshauer Kadetten Korps, jetzigen K. K. General Feldzeigmeisters, zugebracht habe: und hier um desto mehr Bewegungsgründe finde meine Erkenntlichkeit Sr. Durchlaucht öffentlich zu bezeugen, da die erhabene Beyspiele von Tugenden dieses Fürsten, und thætige Sorge um das Wohl der Polnischen Jugend und die Vervolkommung der national Erziehung zu befördern, einen wohlthætigen Einfluss auf meine nachherige Lebensart und Betriebsamkeit hatten. Auch bin ich gegenwærtige Bemühungen zur Verbreitung des Geschmacks zum Studium der Mathematik etwas beitragen zu können, und manche literarische Ergözungen und erhabene Wollust, die dieses Studium verschaft, dem Trieb zu den Wissenschaften, und dem Keime den der Hr. Pfleiderer general Derektor dieses ehemaligen national Instituts, und jetziger Professor der Mathematik und der Naturlehre auf der Universitæt zu Tübingen, wæhrend seines fünfzehnjæhrigen Aufenthalts in Pohlen, in der Jugend einzupflanzen sich bemüht hat, schuldig.

Es bleibt mir endlich nichts übrig als mich der Nachsicht des aufgeklærten Publikums und der Kenner zu empfehlen. Diesen ist es am besten bekannt, wie schwer es ist etwas, das ihres Blicks werth sei, im gegenwærtigem Fache aufzustellen. Wære es nicht eine Art von Nothdurft, die mir meine Lage aufbürdete, eine Rechenschaft von der provisorischen Verwaltung eines öffentlichen Lehramtes dem hiesigen Publico abzustatten, so hætte ich nie gewagt gegenwærtigen Aufsatz vor wenigstens ein Paar Jahren ans Licht zu geben. Auch manche Unvollkommenheiten des Stils, da die deutsche nicht eine Muttersprache des Verfassers ist, werden ihm wohl vergönnt.

DIE ALLGEMEINE GRÖSSENLEHRE.

Un exemple suffit pour donner la raison de chaque opération de quelque espéce qu'elle soit: si vous avez besoin de plusieurs, ce n'est pas pour apprendre à opérer, c'est seulement pour operer avec plus de facilité & de promptitude; & avec quelque lenteur que vous procediez, vous savez faire, si vous savez ce que vous faites. — Exercez vous donc sans maître. — Ne le pouvez vous pas? Restez dans l'ignorance: c'est un oreiller assez doux pour bien des têtes.

La langue des Calculs
de CONDILLAC.

§ 1. Allgemeine Einleitung in die mathematische Wissenschaften. —Jhre allgemeine Eintheilung in die reine und angewandte Grössenlehre. — Unterabtheilungen der ersten in die allgemeine Grössenlehre une Raumlehre: —der zweiten in die mechanische, optische, astronomische und architektonische Wissenschaften. — Nutzen der Mathematik und ihrer Methode.— Grössen — Zahlen. — Jhre Arten und Bezeichnungen. — Grundsætze. —

§ 2. Die vier Rechnungsarten. *Addition.* — *Subtraktion.* — *Multiplikation.* — *Division.* — Zerlegung in Faktoren. —

I. $a+b$ II. $a-b$ III. ab IV. $a:b$ oder $\frac{a}{b}$

§ 3. Von den Rechnungsarten mit *gebrochenen Grössen:* — *Decimal* und *zusammenhængende* Brüche. —Das grösste Maass von zwey Zahlen. —Das kleinste Vielfache von mehreren Zahlen. —

I. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd}$ II. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf.}$

III. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ IV. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ V. $\frac{m}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d.}$

$$\frac{0}{1} \Big| \overset{3}{\frac{1}{3}} \quad \overset{7}{\frac{7}{21}} \quad \overset{15}{\frac{106}{333}} \quad \overset{1}{\frac{113}{355}} = \frac{1000000.}{3142592.}$$

§ 4. Von den *Pontenzen* und *Wurzeln* und ihren Rechnungsarten.— Rationale und irrationale Kwadrat, kubik und andere Wurzeln. —

I. $a^m a^n = a^{m+n}$. II. $a^m : a^n = a^{m-n}$. III. $a^0 = 1$ IV. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ nachdem $m \gtreqless n$.

V. $\frac{m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m}$. VI. $\frac{a}{b}\sqrt{m^2+n^2} = \sqrt{\left[\frac{a^2m^2 \times a^2n^2}{b^2}\right]}$ VII. $\sqrt[n]{-b} = \beta$

eine mögliche oder unmögliche Grösse nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist. —

VIII. $\dfrac{\sqrt{\frac{a^2c^5}{b}}\;\sqrt[4]{ac^3c^2}\;\sqrt[12]{a^5c^{11}}}{b\sqrt{\frac{a}{c}}} = \dfrac{\qquad}{b\sqrt[3]{b}}.$

IX. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$
X. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$
XI. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$
XII. $\sqrt{2} = 1,4142136.$ XIII. $\sqrt[3]{2} = 1,2599205.$

§ 5. Von den *Verhaltnifsen* und *Proportionen.*

Arithmetische Proportion. $a \div a \pm d = b \div b \pm d.$ — *Geometrische* $a : aq = b : bq$ oder $a : b = c : d.$

Hieraus die *Gleichung* $ad = bc$, und verschiedene Eigenschaften und Verwandlungen der Proportionen. — *Verkehrte* Proportion $b : a = c : d.$ *ftetige.* — *zufammengefetzte.* — Abkürzungen derselben. — bey gleichen Verhæltnifsen.

§ 6. Von der *Regel Detri.* nebft Einleitung zur Auflösung der reinen einfachen *Gleichungen.*

I. In der *einfachen Regel Detri* hat man $a : b = c : x$ und $x = \frac{bc}{a}$

II. Der *Regel von fünfen* dient zum Grund der hæufig gebrauchte. *Lehrsatz.* Wenn eine wirkende Ursache C, in der Zeit T die Wirkung E hervorbringt, und c, t, e æhnliche Dinge bedeuten fo ift $E : e = CT : ct.$ Daraus folgt $Ect = eCT$ und andere Folgerungen bei gleichen æhnlichen Dingen, — und mehreren verschiedentlich wirkenden Ursachen. — Für die *Zinsrechnung* wære die daraus hergeleitete Formel $\frac{Sax}{100}$ wo S das Capital x die Zeit und a den jæhrlichen Zins von 100 bedeuten.

III. Eine andere Anwendung von der Zusammensetzung der Verhæltnifse ift die fogenannte *Kettenregel* deren Exempel bei den Wechselrechnungen, bei den Vergleichungen von Maafsen, Münzen u. d. g. hæufig vorkommen.

IV. Der *Gesellschaftsrechnung* dient als Grundsatz die *Aufgabe.* Eine Zahl e in mehrere Theile zu theilen die sich wie die Zahlen f, g, h. . . . verhalten.

Forme. $\frac{ef}{f+g+h};\ \frac{eg}{f+g+h};\ \frac{eh}{f+g+h}.$

Kæmen hier noch die Zeiten und andere Umftænde in Betrachtung so wære die allgemeine Formel $xt;\ \frac{xbt'}{a};\ \frac{xct''}{a} - \frac{xct''}{na}$ wo a die Einlage z. B. des 1. Kaufmanns, b jene des 2. xt den Gewinn des 1. $\frac{xbt'}{a}$ den Gewinn des 2. und die zwey letzten Ausdrücke den Verluft des dritten Kaufmanns bedeuten.

Diese Aufgabe kann zur Erlæuterung der erften Grundregeln der algebraischen Rechnung, und der Auflösung der Gleichungen, dienen.

§ 7. Von den Gleychungen des *erften* und *zweyten Grades* und denen Grösfen zu deren Betrachtung die Auflösung der letzten Anlafs giebt. —

I. *Einfache reine* Gleichung $x = \pm A.$ II. *Zusammengesetzte reine* $x = \pm \sqrt[n]{A}.$ (*einfache unreine* oder *unbeftimmte* $Bx \mp Ay = C.$)

III.

III. Allgemeine *kwadratische* Gleichung $xx+px=q$, oder $xx \pm px \mp q=0$. Ihre Auflösung $x=-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} \pm q}$. (Eine andere Auflösung i. d. Geom.) (*Hariot*. — Wurzeln der Gleichung. — Reductio. — Transformatio) — einfache und höhere — bestimmte und unbestimmte Gleichungen.

Der Funktion entsprechen zerstreute Bergriffe, und der Gleichung das Urtheil.

IV. Formel für die *Mischungsregel*. $x=\frac{d-ca}{b-c}$; $y=\frac{ba-d}{b-c}$.

x und y sind die Theile des Gemischten, a die Grösse des Ganzen, d das ganze Gewicht, b und c die specifische Schwere. — Die nemliche Formel dient auch zur Bestimmung des mitleren Preises.

V. Formel für die *Alligations Regel*. $c-b : a-c = x : y$. (Weins. c ist der mitlere Preis, a der Werth des besseren und b z. B des schlechteren

VI. Es giebt drey Arten der *Elimination* für zwey unbekannte Grösen. 1) Man sucht zwey Werthe einer unbekannten. — 2) oder einer unbekannten in lauter bekannten. — oder endlich 3) indem man alle glieder einer Gleichung durch den Coefficienten der unbekannten der zweiten Gleichung multiplicirt. (Für mehrere unbekannte S. Theorie générale des Equations algébriques p. *Bezout* à Paris 1797.)

VII. Ein Beyspiel von unbestimmten Fragen giebt die

Aufgabe. Zwei Zahlen machen zusammen 36, man soll diese zwei Zahlen finden — Es ist $x+y=36$; und $x=30-1=36-2\ldots=0, 1, 2, 3\ldots$

Fügt man noch die Bedingung zu dass z B $x-y=4$ so wird die Aufgabe bestimmt: es ist nemlich allgemein $x=\frac{a+b}{2}$ und $y=\frac{a-b}{2}$

(hier ist $x=20$; $y=16$.)

Den unbestimmten Aufgaben entsprechen romantische Systheme und Hypothesen in der Physik: Sophismen u. d. g.

VIII. Ein Beyspiel der allgemeinen Aufgaben des zweiten Grades giebt die *Aufgabe*. In einer Prowinz ist die Anzahl n der Einwohner durch zwey Jahre zu der Zahl d gewachsen und steigt jæhrlich in gleichem Verhæltniss ihrer Bevölkerung man soll die Zahl x dieses Wachstums und die Bevölkerung nach dem ersten Jahre finden.

Auflösung. $x=-1 \pm \sqrt{\frac{d}{n}}$; das Steigen der Bevölkerung ist $x=2$; der Sterblichkeit $x=-4$.

Die Rechnung verbessert die Fehler unserer Urtheile.

IX. Ein Beyspiel der *eingebildeten Fragen*.

Aufgabe. Man soll die Zahl 18 in zwey Theile zerlegen, und das Produkt davon soll 135 ausmachen. Es ist $x=9 \pm \sqrt{-54}$.

Wære die gegebene Zahl 24 so wære $x=15$ und $y=9$; allgemeine Formel $xy=a$.

X. Einen Beyspiel von Fragen die zur Betrachtung des *Unendlichen* der *entgegengesetzen* Grösen, und der allgemeinen Bezeichnung der unbestimmten Aufgaben führen, giebt die

Aufgabe. Zwey Lichter ertheilen ihr ungleiches Licht in einer geraden Linie, man soll auf dieser Linie ein Ort finden, das von beiden auf gleiche Art beleuchtet sei.

Ist

Ist die Helfte der Entfernung dieser Lichter a, ihre ganze Entfernung b, die Beleuchtung des erstens Lichtes c, die des zweiten d so ist die Entfernung von 1ⁿ. Lichte

$$x = \frac{b(c \pm \sqrt{cd})}{c-d} \text{ und vom } 2^u \; b-x = \frac{-b(d \pm \sqrt{cd})}{c-d}$$

Je nachdem $c \gtreqless d$, ist x *bejahend, verneinend* oder ∞ oder $\frac{1}{0}$ *unendlich gross*, also $\frac{1}{\infty}$ oder $\frac{0}{1}$ *unendlich klein.* und $\frac{0}{0}$ *die zu bestimmende Grösse.*

Die Rechnung verbessert sogar die Fehler der Bezeichnung.

XI. Die oben angeführte Rechnungsarten mit den endlichen Grössen, finden auch bei den Unendlichen und den Entgegengesetzten statt. — Die *allgemeine* Addition und Subtraktion ist bei den letzten der gemeinen entgegengesetzt, — und in der Multiplikation und Division geben gleiche Zeichen + und verschiedene immer. —

XII. Unendlich-Kleine können in Rücksicht auf bestimmte Grössen weggelassen werden: dieses ist auch von unendlich Kleinen und unendlich Grossen von verschiedenen Ordnungen zu verstehen. — Der Durchgang dieser zwey neuer Arten von Grössen von einer in die andere geschiehet durch o oder durch ∞. Dieses werden die geometrische Reihen und geom: Beyspiele noch mehr erleutern. — Es ist erst hier der Ort die entgegengesetzte Grössen zu betrachten;

§ 8. *Von den verænderlichen Grössen, den Grænzen der Verhæltnisse und den Reihen überhaupt.*

I. Allgemeine *Formel* für eine *ganze rationale Funktion* $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots$ z. B. für die Funktion der Zeit (aus § 6 nro 11) ist

$$\frac{Sax}{100} = 0 + \frac{Sax}{100} + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \ldots$$

Formel für eine *gebrochene rationale funktion.* $\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots}{a+bx+cx^2+dx^3+\ldots}$

.... für eine *ungleichartige* Funktion von zwei Veränderlichen.

$$A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Fy^2+\ldots$$

II. Die *Grösse* $\sqrt{2}$ ist die *Grænze* von 1,4 genauer von 1,41 noch genauer von 1,414: u. s. w.

III. $\sqrt{2} : \sqrt{5}$ ist die *Grænze* von den Verhæltnissen 1,4 : 2,2 oder 1,41 : 2,23 noch genauer 1,414 : 2,236.....

IV. $y = A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots$ Ist $A=0$ so wird $\frac{y}{x} = B+Cx+Dx^2+\ldots$ so wie x ein immer kleineres Verhæltniss. — Wird $x=0$, und auch $y=0$, so ist $\frac{y}{x} = \frac{b}{1} = \frac{0}{0}$ ein *verschwindendes* Verhæltniss das nach § 7. n X. unzæhlige Werthe haben kann z. B für $y = \frac{Sax}{100}$ ist $\frac{y}{x} = \frac{Sa.}{100}$

V. Das Verhæltniss $\frac{y}{x}$ kann in jedem *bestimmten* Zustande durch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und in dem *verschwindenden* durch $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet werden.

Die

Die Buchstaben Δ und d haben Keine Werthe, und sind nur Bezeichnungen, die erste einer *bestimmten Differenz*, und die zweyte einer unendlich kleinen Differenz oder eines *Differenzials.*

VI. Die Verhæltnifs der veränderlichen ist beständig in $y=ax^h+bx^{h+i}+cx^{h+i+k}\ldots$ und in $z=ax^h+bx^{h+m}+f^{h+m+i}$

denn $\frac{y}{x^h}=\frac{a}{1}$, und $\frac{z}{x^h}=\frac{a}{1}$

§ 9. Von der *geraden Methode der Reihen.*

Aufgabe. Eine gebrochene gleichartige Funktion einer veränderlichen x in eine Reihe aufzulösen.—

I. $\frac{1}{a+x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\ldots\frac{\pm x^{n-1}}{a^n}$ *allgemeines* Glied

II. $\sqrt{a^2\mp x^2}=a\mp\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{2.4.a^3}\mp\frac{1.3.x^6}{2.4.6a^5}-\frac{1.3.5.\ x^8}{2.4.6.\ 8a^7}+\ldots$ (durch zwey Wege.)

III. Oefters wird erfordert eine gebrochene Funktion in partielle Brüche zu werwandeln.

z.B. $\frac{4+5x}{-6+x+x^2}=\frac{4+5x}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx}{x+3}=\frac{14}{5(4-2)}+\frac{11}{5(x+3)}\ x.$

Davon ein mehreres in der Introduction ad Analysin infinitorum. v. *Euler* und *Pasquich.* Analys. 1 B.

§ 10. *Von der umgekehrten Methode der Reihen.*

z.B. es ist $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$.daraus wird

$$x=y+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}.\frac{y^3}{3}+\frac{1}{1.3}.\frac{y^4}{4}+\ldots\ldots$$

§ 11. *Anwendung der Reihen auf die Berechnung der Logarithmen: ihre Beschaffenheit und Gebrauch.*

I. In der Logaritmischen Gleichung $a^x=y$ ist die veränd: y eine Funktion von a^x und x der *Logarithm* dieser Funktion. Die beständige a ist die *Grundzahl* und *y* die dem Logar: *x entsprechende* Zahl.

II. Wenn $x=0$; $x=1$; $x=-1$; so ist $\text{Log}\,a^0=0$; $\text{Log}\,a^1=1$, $\text{Log}\,a^{-1}=-1$. Die Grundzahl bestimmt das *System* der Logarithmen.

III. *Lehrsatz:* $\Delta a^x : a^x=\Delta x : m$ und $m=\frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{a-1}}$ desto kleiner je grösser Δx ist und umgekehrt.

versnwindet Δx so ist $m=\frac{0}{0}=k$ also die Grenze des Verhæltnifses $\frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{a-1}}=\frac{dx}{\frac{dx}{a-1}}=k.$

k ist das *Modell*, die *Subtangente* oder die *beständige Zahl* eines jeden *Systems,* denn sie hængt von der Grundzahl ab.

IV. *Lehrsatz.* Die Logarithmen von einerley Zahl in verschiedenen Systemen haben ein beständiges Verhältniſs. —

Denn da $a^n = q$; und $b^m = q$ so iſt $a = b^{\frac{m}{n}}$.

V. *Lehrsatz.* Und verhalten sich wie die Modele der Syſteme.

Denn in dem verschwindenden Zuſtande wird $\frac{m}{n} = \frac{k}{h}$.

VI. Daraus kann man das Differenzial eines jeden Logarithmen und einer jeden Potenz finden.

Für $a^x = y$ iſt $dx = \frac{dy}{y}$, $dy = ydx$ und $x = x\,\mathrm{Log}\,a$,

VII. *Lehrsatz.* In $a^x = y$ und $a^z = q$; iſt $yq = a^{x+z}$ also $\mathrm{Log}\ yq = x+z = ly + lq$ und umgekehrt.

in $\frac{y}{q} = a^{x-z}$ iſt $\log \frac{y}{q} = x - z = \log y - \log q$.

Wenn also $x \gtreqless z$ so iſt der $\log \gtreqless 1$; iſt $x - z = -\infty$ so iſt $\log 0 = -\infty$.

In $(a^x)^p = y^p$ iſt $px = \log y^p = p \log y$ und umgekehrt $\log \sqrt[p]{y} = \frac{\log y}{p}$.

Sind also die Primzahlen von 1 bis 100000 bekannt so findet man die übrigen durch bloſse Addition.

VIII, *Aufgabe.* Den Logarithmus einer jeden Zahl zu finden.

Auflösung. $\log(1+x) = A\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \frac{x^n}{n}\right]$; Daraus

$$\log\left[\frac{1+x}{1-x}\right] = 2A\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right].$$

nimmt man für die schleunig abnehmende Reihe $x = \frac{1}{2n+1}$ so iſt

$$\log(n+1) = \log n + 2A\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)} + \frac{1}{5(2n+1)} + \frac{1}{7(2n+1)} + \ldots\right]$$

IX. Nimmt man A für die Einheit an, so bekommt man die *natürliche* oder hyperbolische Logarithmen.

und umgekehrt iſt $n = 1 + \log n + \frac{\log^2 n}{2} + \frac{1}{2}\frac{\log^3 n}{3} + \frac{1}{2.3}\frac{\log^4 n}{4} + \frac{1}{2.3.4}\frac{\log^5 n}{5} +$

Der natürl. Logarith. Grundzahl $h = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots = 2{,}7182818$.

Basis log. vulg. $= 10$ daraus iſt der Modul $A = \frac{1}{2{,}302585} = 0{,}4342945$,

denn aus n. V. iſt $1 : m = \log\,\mathrm{nat.}\ a : \log\,\mathrm{Vul.}\ a$ daraus $m = \frac{1}{\log\,\mathrm{nat}\ 10}$.

X. *Aufgabe.* Aus dem Wachsthum der Logaritmen jenen der entsprechenden Zahlen zu finden: und umgekehrt.—

Weil $a^x = y$ so iſt aus § 10. und § 11. n. V. und VI.

$$\Delta y = y\Delta x\, la + \tfrac{1}{2} y \Delta x^2 l^2 a + \tfrac{1}{6} y \Delta x^3 l^3 a + \ldots$$

z.B für $a = 10$. $\log 3{,}6842157 = x + \Delta x$ und $y = 4833$ iſt $\Delta y = 0{,}5735$.

XI. Und umgekehrt es iſt $\Delta x = \frac{m\Delta y}{y} - \frac{m\Delta y^2}{2.y^2} + \frac{m\Delta y^3}{3.y^3} - \frac{m\Delta y^4}{4.y^4} + \ldots$

z. B log. vulg. 5643, 543 = 3,7515515.

Dieses ist genau richtig.—Die Arbeit aber selbst wird leichter durch den.

XII. *Lehrsatz.* Die Unterschiede zwischen den Logarithmen haben fast das nemliche Verhæltniss wie die Unterschiede der ihnen entsprechenden Zahlen.

denn nimmt man $x = \frac{d}{2n+d}$ so ist $d : md = \frac{Ad}{n} : \frac{Amd}{n}$

Daraus fliesst eine leichte Art diejenige ganze Zahlen und Logarithmen zu finden, die in den gewöhnlichen Tafeln nicht vorhanden sind.

XIII. Rechnung mit Brüchen. Die Arbeit wird kürzer, wenn man sich der *Arithmetischen Ergænzung* bedient.

$\lg \frac{6}{7} = -0{,}0669468 = 1{,}9330532 - 4 = \lg 0{,}8571.$

z.B $895 - 579 = 895 + 1000 - 579 - 1000 = 895 + 421 - 1000 = 316.$

Man kann sogar die Addition und Subtraktion mit den Logarithmen verrichten. (Siehe Trigon.)

XIV. Hier ist der Ort den Gebrauch der Logarithmen in der Auflösung der Exempel, die im bürgerlichen Leben vorkommen, zu zeigen.

Hat man einmal den Logarith. von 2. und setzt in n. IX; q^2 statt n so bekommt man die ungemein schnell abnehmende

Reihe $\log. q = \frac{\log(q+1) + \log(q-1)}{2} + A\left[\frac{1}{2q^2-1} + \frac{1}{3(2q^2-1)^3} + \frac{1}{5(2q^2-1)^5} + \right]$

Auch hat man $h^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} \ldots\ldots$

In der Gleichung $x^2 = \frac{m}{n} + \log \text{ nat } \frac{c}{x}$ ist $x = \sqrt[3]{\;} \; ch^{\frac{m}{n}}$

§ 12. *Anwendung der Reihen auf eine allgemeine Entwickelung der Potenzen und von den Verbindungen und Versetzungen.*

I, Die *erste Formel des Binomiums* $(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3}b^3 + \ldots$

nimmt man $\frac{b}{a} = Q$ das erste Glied $= A$, das zweite $= B$; das dritte $= C$. u. s. w. so ist die

Zweite Formel. $(a+b)^m = A + mAQ + \frac{m-1}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ + \ldots$

nimmt man endlich $m = \frac{r}{s}$ so ist die

Dritte Formel $(a+b)^m = A + \frac{r}{s}AQ + \frac{r-s}{2s}BQ + \frac{r-2s}{3s}CQ + \frac{r-3s}{4s}DQ + \ldots$

so wie sie *Newton* vorstellt.—

1. Ex. $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots$] zum integriren durch trigonometrische Funktionen.)
2. Ex. $(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \ldots\ldots$
3. Ex. $(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}})^2 = x^{-1}(1 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4) = \frac{1}{x} - 2 + 3x - 2x^2 + x^3.$

II. *Aufgabe.* Die Anzahl der Versetzungen von verschiedenen Grössen zu bestimmen.

ZB. für drey Buchstaben a b c wære die Anzahl der Versetzungen $3.2.1=6=3(3-1)(3-2)$.

Und überhaupt für n Grösen giebts n Factoren und die Anzahl der Versetz. $=n(n-1)(n-2)(n-3)$.....bis der letzte Factor $=0$.

Für gleiche Grösen z.B für abaac ist die Anzahl der Versetz: $\frac{5.4.3.2.1}{3.2.1.}=20.$

Und überhaupt für alle gleiche Grösen ist sie $=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4).}{1.2.3.4.5.....}$

Stellen die Buchstaben die Numern der Lotterie vor; so ist $m=90$. also die Anzahl der Ambi $=4005$: der Terni $=117480$. Es werden aber jedesmal nur $5=m$ gezogen, also die Anzahl der Ambi $=10$. der Terni $=10$. Für gleiches Glückspiel müsste die Lotterie für jeden gewonnenen Ambo $399\frac{1}{2}$ und für den Terno 11747 mahl den Satz bezahlen.

§ 13. *Von den Arithmetischen Reihen, ihrer Eigenschaften und Summirung,—*

I. Allgemeine Formel $a \div a+d \div a+2d \div a+3d \div \ldots . a+(n-1)d.$

Ist z das letzte Glied in der Funktion einer Zahl, *n* die Zahl der Glieder und s die Summe der Werthe der Glieder in dieser Funktion, so ist *das allgemeine Glied* $z=a+(n-1)d$

und das *summatorische Glied* $s=\frac{n(a+z)}{2}=\frac{2an+dn^2-dn.}{2}$

Daraus fliesen 20 neue Formeln.

1. *Exempel.* Um *m* Glieder zwischen *a* und *z* einzuschalten ist $d=\frac{a-z}{m+1}$; z.B. für $m=4$; $a=7$, $z=13$ ist $d=\frac{7-13}{4+1}=\frac{6}{5}=d$ und die Reihe 7; $8\frac{1}{5}$, $9\frac{2}{5}$; $10\frac{3}{5}$; $11\frac{4}{5}$, 13.

2. *Ex.* Für einen frey fallenden Körper ist in der 10" Sekunde $=n$ zurückgelegte Raum $z=15+300-30=285$ Schuh.

3, *Ex.* Der ganze in 8 Sek. $=n$ zurückgelegte Weg oder die Höhe des Thurms $s=\frac{240+1920-240}{2}=960$ Schuh $=160$ Klafter.

4. *Ex.* Für $s=240$ Schuh ist hier $n=\frac{1}{2}-\frac{a}{d}+\sqrt{\frac{2s}{d}+\frac{a^2}{d^2}-\frac{a}{d}+\frac{1}{4}}=4$ Sekund.

5 *Ex.* Jemand soll einen Weg von 25 Meilen in 5. Tagen zurücklegen, und zwar so dass er in jeden nachfolgenden Tag $1\frac{1}{2}$ Meile mehr zurücklegen müse, er muss also in dem 1. Tag $a=\frac{2s+dn-dn^2}{2n}=2$ Meilen zurücklegen.

II. *Von den Arithmetischen Reihen des zweiten Ranges.*

Sind hier die drey ersten Glieder a,b,c, so ist für das n. Glied das *allgemeine Glied* $z=\frac{(6a+2c-6b)+(8b-5a-3c)n+(a+c-2b)n^2}{2}$

das allgem. *summat. Glied,* $s=\frac{1}{6}n.(11a+2c-7b)+\frac{1}{6}n^2.(9b-6a-3c)+\frac{1}{6}n^3.(a+c-2b)$...

1. *Ex.*

1. *Ex.* Für die Reihe 1, 4, 9, 16 ist $s=\frac{n+3n^2+2n^3}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   ist $n=\infty$ so ist $s=\frac{1}{3}\infty^2.\infty$.
   z. B für n=20 Kugeln ist die Anzahl der Kugeln einer vollstændigen viereck: Pyramide s=2870. Fur die Reihe 1, 3, 6, 10, 15.... und die dreyeckigte Piramide ist $s=\frac{2n+3n^2+n^3}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
   z. B für n=10 Kugeln ist s=1540 Kugeln.
2. *Ex.* Für længliche freystehende Haufen ist $s=\frac{n(n+1)(2n-2+3m)}{6}$
   z. B für den Rücken m=10, und die Breite n=11 Kugeln ist s=1100. Für einen solchen Haufen nebst einer viereckigten Piramide ist $s=\frac{n(n+1)m}{2}$. Sind an beiden Seiten solche viereckigte Piramiden, so ist
   $s=\frac{mn(n+1)}{2}+\frac{n(n^2-1)}{6}$

   Hat die Schlichtung in der Mitte einen leeren Raum, so ist $s=\frac{n(n+1)m}{2}$.

III. *Von den Arithmetischen Reihen des dritten Ranges.*

1. Ex. Das *nte* Glied ist hier $=P+Qn+Rn^2+Sn^3$ und die Summe von n Gliedern $=An+Bn^2+Cn^3+Dn^4$.
   Für die Reihe der dritten Potenzen von den natürlichen Zahlen ist
   $s=\frac{n^2+2n^3+n^4}{4}=\frac{1}{4}[n(n+1)]^2$;
   Für $n=\infty$ ist $s=\frac{1}{4}\infty^3.\infty$.
2. *Ex.* Fur die Summe einer unendl: Reihe der *mten* Potenzen der natürl. Zahlen ist $s=\frac{1}{m+1}\infty^m.\infty$.
   z. B. für $m=\frac{1}{2}$ ist $s=\frac{2}{3}\infty\sqrt{\infty}$. (Allgemeiner siehe § 15. n. 11.)

§ 14. *Von den geometrischen Reihen, ihren Eigenschaften und ihren Summirung nebst Anwendungen.*

Allgemeine Formel. $a : aq : aq^2 : aq^3 ; aq^4 \ldots aq^{n-1}$
Das allgemeine Glied ist hier $z=aq^{n-1}$ und das summatorische Glied
$s=\frac{zq-a}{q-1}=\frac{aq^n-a}{q-1}$

(Für die abnehmende Reihe ist $s=\frac{a}{1-q}$)
(Leben.

Daraus fliessen wieder 20 neue Formeln und Beyspiele für das bürgerliche

1. *Exem.* Für den Zins $5\frac{0}{0}$, das kapital *a*, die Zeit *n* und Zins für Zins, steigt das Kapital zu $(\frac{21}{20})^n a$.
   fugt man noch dazu ein jæhrliches Kapital b, so steigt er in n Jahren zu $(\frac{21}{20})^n.(a+20b)\mp 20b$.
   zieht man hingegen jæhrlich b ab, so ist die allgemeine Formel
   $a(\frac{21}{20})^n-b(\frac{21}{20})^{n-1}-b(\frac{21}{20})^{n-2},\ldots-b(\frac{21}{20})-b$.

2. *Exem.*

2. *Exem.* Für den jæhrliben Zins $m:1$, die geborgte summe s indem man die Interessen jæhrlich zum Kapital schlægt, ist nach n Jahren die Summe des Schuldners $T=S(1+\frac{1}{m})^n$.

es wære hier $n=\frac{lt-ls}{l(1+\frac{1}{m})}$ und um den Kapital zu verdoppeln wære $n=\frac{l2}{l\frac{21}{20}}$.

3. *Exem.* Um auch hier m Glieder zwischen a und z einzuschalten ist $a^{m+1}:b^{m+1}=a:z$ und $b=\sqrt[m+1]{a^n b}$ und die Reihe $a:\sqrt[m+1]{a^n b}:\sqrt[m+1]{a^{n-2}b^2}:\sqrt[m+1]{a^{n-2}\ b^3}\ldots\ldots z$.

Um m Glieder zwischen jedes paar z.B der Reihe aq^0; aq^1; aq^2; aq^3 einzuschalten z. B für $m=3$ ist die Reihe $\div aq^0$; $aq^{\frac{1}{4}}$; $aq^{\frac{1}{2}}$; $aq^{\frac{3}{4}}$; aq^1, $aq^{\frac{1}{4}}\ldots\ldots$

Man kann sich dazu auch der Formel $q=\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$ oder $lq=\frac{1}{n-1}\log(\frac{z}{a})$ bedienen.

Um 11 Glieder zwischen 1 und 2 einzuschalten ist hier $q=\frac{1}{12}\log 2 = 0,0250858\ldots\ldots$
und die Glieder 1; 1,059; 1,122; 1,189 u. s. f.

§ 15. *Von der Summirung einiger besondern Reihen nebst einer allgemeinen Interpolations-Formel.*

1. *Exem.* Um die Summe der unendlichen Reihe $\frac{n}{n+1}+\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+1)^3}+\ldots\frac{n}{(n+1)}\infty$ zu finden, kehre man sie um, und da bekommt man

$q=(n+1)$; $a=\frac{n}{(n+1)}\infty=0$ und $z=\frac{n}{n+1}$

also $s=\frac{zq-a}{q-1}=1$, z.B. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$; dergleichen $\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\ldots 1$.

2. *Ex.* Man hat einen gewissen Bruch in 0,575757.....verwandelt, was war das für ein Bruch?

Es ist $0,575757=\frac{57}{100}+\frac{57}{100^2}\ldots\ldots\frac{57}{100}\infty$ und $S=\frac{19}{33}$

3. *Ex.* Um die Summe der Reihe $\frac{b}{c}+\frac{b+d}{cm}+\frac{b+2d}{cm^2}+\frac{b+3d}{cm^3}+$. zu haben, zerlege man sie in eine andere, wo die Zæhler allein b und d wæren so bekommt man $s=\frac{m(bm+d-b)}{c(m-1)^2}$ z.B. $\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\frac{6}{64}=1$.

II. *Allgemeine Interpolations-Formel.* $Z=z+\frac{n}{m}\Delta z-\frac{n(m-n)}{2m^2}\Delta^2 z+\frac{n(m-n)(2m-n)}{2.\ 3.\ m^3}\Delta^3 z-\frac{n(m-n)(2m-n)(3m-n)}{2.\ 3.\ 4.\ m^4}\Delta^4 z\pm\ldots\ldots$

z.B. Man soll den log 94,36 mittelst der Einschaltungs formel berechnen, in der Voraussetzung, dass sie nur bis 100 berechnet sind, und das man ihre Eigenschaften nicht kennt. So ist hier $z=\log 94=9731279$; die Differenz Reihe der næchst grössern Logarithmen ist $\Delta z=+45957$, $\Delta^2 z=-481$, $\Delta^3 z=+0$, $\Delta^4 z=0$; ferner ist $\frac{r}{m}=0{,}63$: Substituirt man alle diese Werthe in die obige Formel so bekommt man $Z=\log 94{,}63=1{,}9760288$.—

Daraus bekømmt man für das allgemeine Glied einer jeden arithmetischen Reihe eines höheren Ranges.

$$T=z+(n-1)\Delta z+\frac{(n-1)(n-2)\Delta^2 z}{2}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\Delta^3 z}{2.\,3.}+\text{ und}$$

für das summatorische Glied,

$$S=nz+\frac{n(n-1)\Delta z}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)\Delta^2 z}{2.\,3.}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta^3 z}{2.\,3.\,4.}+.$$

Die *wiederkehrende* Reihen (series recurrentes) haben keinen besonderen Einfluss auf die ausübende Mathematik.

§ 16. *Von den höhern Gleichungen.*

I. *Von ihren Eigenschaften.* Allgemeine Formel
$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots\ldots+R=0.$

1. *Exem.* Die Gleichung $\frac{4x^2-2x^3}{3}=8-5x$ *geordnet* giebt
$x^3-2x^2-\frac{15}{2}x+12=0.$

2. *Exem.* Die Gleichung $100-20x^2=\frac{500}{x}-4x^3$ geordnet giebt
$x^4-5^3x * +25x-125=0.$

3. *Exem.* Die Gleichung $10x-\sqrt{12x}=2x^2$ geordnet giebt
$x^3-10x^2+25x-3=0.$

4. *Exem.* $(x-3)(x-5)(x-6)(x+10)=0$; giebt $x^4-4x^3-77x^2+540x-900=0$; wovon $3, 5, 6, -10$ die *Wurzeln* sind.—

5. *Exem.* $(x+3)(x+6)(x-9)=0$; giebt $x^3 * -63x-162=0$ wovon $-3, -6, +9$, die *Wurzeln* sind.

6. *Exem.* $(x+\sqrt{-3})(x-4)(x-\sqrt{-3})=0$; giebt $x^3-4x^2+3x-12=0$, wovon $\sqrt{-3}$; 4 und $-\sqrt{-3}$ die *Wurzeln* sind.—

Die drey letzten Beyspiele geben 18 verschiedene Eigenschaften der höhern Gleichungen.—

7. *Exem.* Enthælt das Produkt R, m gleiche Wurzeln $-a$, also m gleiche Factoren $x+a$ so wird dasselbe

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.\,2}a^2x^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}a^3x^{m-3}+\ldots$$

Hieraus findet man auch die Anzahl der Versetzungen der Buchstaben a, b, c, d.

II. *Von den Verwandlungen der höheren Gleichungen, nebst einer allgemeinen Nærerungs Formel.*

1. *Exem.* Setzet man $x=ny$, so verwandelt sich die Gleichung
$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots\ldots+R=0$; (dividirt.
in $y^m+\frac{Ay^{m-1}}{n}+\frac{By^{m-2}}{n^2}+\frac{Cy^{m-3}}{n^3}+\ldots+\frac{R}{n^m}=0$; also alle Glieder durch n

z B. dividirt man in der Gleichung $x^3-6x^2+11x-6=0$ Glied für Glied durch die Reihe $1+2+4+8$.

so erhælt man $x^3-12x^2+44x-48=0$. Die Wurzeln der erſten Gleichung sind 1,2,3 jene der zweiten $\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}$.

2. *Exem.* Setzt man $x=\frac{y}{n}$ so wird sie
$y^m+Any^{m-1}+Bn^2y^{m-2}+Cn^3y^{m-3}+\ldots\ldots n^mR=0$.
In dem beygefügten Beyspiel werden die Wurzeln 2,4,6.
Dadurch kann man die Gleichung von den Bruchen befreyen.

z. B die Gleichung $x^3-\frac{11x^2}{12}+\frac{x}{4}-\frac{1}{48}=0$; wird $x^3-11x^2+36x-36=0$,

die Wurzeln der 1 sind $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$, der 2ten 6, 3, 2.
in der Gleichung $x^3 * -\frac{19x}{36}+\frac{5}{36}=0$; die Glieder durch 6 multiplicirt, giebt $x^3 * -19x+30=0$; und die Wurzeln $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{6}$
in der Gleichung $x^3-x^2\sqrt{2}-x+\sqrt{2}=0$, die Glieder durch $\sqrt{2}$ multiplicirt oder dividirt giebt
im 1. Falle $x^3-2x^2-\ x+4=0$; im 2. $x^3-x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=0$; die Wurzeln der 1. sind $1;-1;\sqrt{2}$, der 2ten $\sqrt{2};-\sqrt{2};2$, der 3ten $\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};+1\ldots$

3. *Exem.* Setzt man $x=y+p$ so wird die Gleichung $y^m+(mp+A)y^{m-1}+\left[\frac{m(m-1)}{2}p^2+(m-1)Ap+B\right]y^{m-2}+\left[\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.}p^3+\frac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2.}Ap^2+(m-2)Bp+C\right]y^{m-3}+\ldots+p^m+Ap^{m-1}+Bp^{m-2}+Cp^{m-3}+\ldots+R=0$.
Nachdem nun p bejahend oder verneinend iſt; so wird jede Wurzel y dieser neuen Gleichung um p kleiner oder gröſser, als jede Wurzel x der gegebenen Gleichung.
Da das zweyte Glied $(mp+A)y^{m-1}$ iſt; so wird dieses Glied$=0$ wenn $p=-\frac{A}{m}$ iſt, und das zweyte Glied verschwindet.
z. B. in $x^3-5x^2-38x+168=0$; wird $p=\frac{5}{3}$ also $y^3 * -46\frac{1}{3}y+95\frac{11}{27}=0$,
Die Wurzel der 1. 4, −6, 7; der 2ten $\frac{7}{3}, -\frac{23}{3}, \frac{16}{3}$.

4. *Exem.* Iſt p ein kleiner Bruch, so bekommt man durchs gehörige ſubſtituiren und reduciren eine allgemeine.

Næherungsformel. $x=\frac{(m-1)y^m+(m-2)Ay^{m-1}+(m-3)By^{m-2}+\ldots-R}{my^{m-1}+(m-1)Ay^{m-2}+(m-2)By^{m-3}+\ldots\ldots}$

weiſst man z. B. daſs von dieser Gleichung $x^3 * -46\frac{1}{3}x+95\frac{11}{27}=0$; eine Wurzel x zwischen 2 und 3 liegt,

und man ſetzet $y=2$; so wird $x=\frac{16\ldots\ldots-95,40}{12\ldots\ldots-46,33}=2,31$, nimmt man wieder $y=2,31$, so erhælt man sehr nahe $x=2,33$.
Eine *Næherungsformel* für die Ausziehung was immer für einer Wurzel, wenn sie beynahe w iſt.

$$\sqrt[m]{x}=w+\frac{2w(x-w^m)}{(m+1).w^m+(m-1)x}$$ sehr genau.

z. B. $\sqrt[3]{572}=\frac{1}{3}\log 572=8,30103=8,3010305005894044\ldots\ldots$

III. *Von der Auflösung der höheren Gleichungen.*

1. *Methode Durchs ſubſtituiren.* Wenn man næmlich ſtatt x die natürlichen

lichen Zahlen ſetzet und das Produkt ſucht.

z.B. die Wurzeln der Gleichung $x^3-11x^2+36x-36=0$; sind 2, 3, 6.
. . . . $x^3-3x^2-7x+6=0$ ......—1, 071;
4,30 (durch die Næherungsformel.)

Kennt man alle Wurzel auſser der zwey letzten, so findet man auch dieſe durchs dividieren z. B. hier durch $(x+2)$.

2. *Methode.* Durch Zerlegung des letzten Gliedes R in ſeine Factoren, oder seine Theiler.

z. B. in $x^3-3x^2-7x+6=0$, thut -2 der Gleichung ein Genügen. Vermittelſt 11. Ex. 3. sind in der Gleichung $x^3-3x^2-7x+6=0$ die Wurzeln 6,3 und 2. und

in der Gleichung $x^3+\frac{11x^2}{12}-\frac{5x}{24}-\frac{1}{4}=0$, sind die Wurzeln $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}$.

1. *Exempel.* Die Factoren der Gröſse $m^4-6m^3+11m^2-6m$ sind m, $m-1$, $m-2$, $m-3$.

2. *Ex.* Und die Gröſse $x^3+2x^2+2x^2y+xy+xy^2-3x-y^2-3y$ in Factoren zerlegt, giebt $x+y$, $x-1$, und $x+y+3$.

3. *Ex.* Der allgemeine Ausdruck einer eingebildeten Function iſt $a+b\sqrt{-1}$ und einer eingebildeten Wurzel $x-a-b\sqrt{-1}=0$.

VON DER DIFFERENZIALRECHNUNG.

§ 17. *Praktik einiger Fælle der Variations-Rechnung als einer besonderer Art der Differenzial-Rechnung.*

Das endliche *Wachſthum* einer verænderlichen Gröſse y oder die beſtimmte *Differenz* y^1-y zwischen ihren erſten und zweiten Zuſtande wird durch Δy angedeutet

Iſt y eine Funktion von x und beyde einander gleich so iſt $\Delta y=\pm\Delta x$ z.b $\frac{Sax}{100}$ (aus § 6. n. 11) wird $\frac{Sa(x+\Delta x)}{100}=\frac{Sax}{100}+\frac{Sa\Delta x}{100}$ und das

Wachſthum $=\frac{500.5\frac{1}{4}}{100}=\pm 6\frac{1}{4}$rth je nachdem $\pm\Delta x$.

I. $\Delta(x+y+z)=\Delta x+\Delta y+\Delta z$ (wenn man næmlich den erſten Zuſtand von dem zweyten abzieht).

II. $\Delta(xy)=y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y$.

III. $\Delta\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\Delta x-x\Delta y}{y^2+y\Delta y}$; Iſt $z=\frac{a}{y}$ so iſt $\Delta z=\frac{-a\Delta y}{y^2+y\Delta y}$.

und für $z=\frac{x}{a}$ iſt $\Delta z=\frac{\Delta x}{a}$.

IV. $\Delta(x^n)=(x+\Delta x)^n-x^n=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-2}\Delta^2 x+\ldots$

Die *zweite, dritte Differenzen* werden durch Δ^2, Δ^3 und uberhaupt durch Δ^n angedeutet.

V. Die *zweyte* Differenz der Funktion $\Delta^2 xy = 2\Delta x \Delta y + 2\Delta y \Delta^2 x + 2\Delta x \Delta^2 y + y\Delta^2 x + x\Delta^2 y + \Delta^2 x \Delta^2 y$.
Ist die erste Differenz eine bestændige Grösse, wie in der arithm. Reihe, so wird $\Delta^2(xy) = 2\Delta x \Delta y + 2\Delta x \Delta^2 y + x\Delta^2 y$.
ist auch Δy bestændig, so wird $\Delta^2(xy) = \Delta x \Delta y$.

VI. Ist $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ eine Funktion von x, so ist $\Delta y : \Delta x$ ein verænderliches Verhæltniss.
næmlich $\frac{\Delta y}{\Delta y} = b + c\Delta x + d\Delta^2 + \ldots$ immer kleiner, wie x. Ist $\Delta x = o$, so wird $\frac{\Delta y}{\Delta y} = b : 1$ die Grænze des Verhæltnisses.
Sind die Differenzen Δy und Δx in ihrem verschwindendem Zustand, so werden sie *Differenziale* genannt und durch dy, dx bezeichnet. so wie oben § 8. n. V.—Daraus fliesst die Erklærung der Differential Rechnung und die Auflösung der allgemeinen

§. 18 *Aufgabe Funktionen in den fünf angeführten Fællen zu differenzieren.*

I. $d(x+y-a) = dz = dx + dy$, Das Differenzial der bestændigen $a = o$.

II. $d(xy) = ydx + xdy$;

III. $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$; $d\frac{a}{y} = -\frac{ady}{y^2}$; $d\frac{x}{a} = \frac{dx}{a}$

IV. $d\, x^n = nx^{n-1}\, dx$.

V. $d^2(xy) 2dxdy + xd^2y + yd^2x$; $d^3(xy) = 3dyd^2x + 3dxd^2y + xd^3y + yd^3x$.
ist dx bestændig so ist $d^2x = o$; und $d^2(xy) 2dxdy + xd^2y$ und $d^3(xy) = 3dxd^2y + xd^3y$.
ist dy auch bestændig so wird $d^2(xy) = 2dxdy$; $d^3(xy) = o$.

VI. Für den Logarithmen $= x$ in der Gleichung $a^x = y$ ist $dx = \frac{dy}{y}$ wie oben (§ 11. nro VI).

§ 19 *Von der Methode das Grösste oder Kleinste zu bestimmen.*

1. Ex Die Summe zweyer Faktoren ist a, man sucht ihr gröstes Produkt.
Der eine Faktor ist $x = \frac{a}{2}$ und das gröste Produkt $\frac{aa}{4}$.

2. *Exeml.* Die Summe von 3 Zahlen sey a, man soll ihr grösstes Produkt bestimmen.
es ist $x = \frac{a}{3} = y$. (Anwendungen davon in der Geometrie).

§ 20. *Von dem Werthe der Brüche, deren Zæhler und Nenner $= o$ sind.*

$\frac{P}{Q} = \frac{P+dP}{Q+dQ}$. Ist so wohl P als $Q = o$, so ist $\frac{P}{Q} = \frac{dP}{dQ} = \frac{o}{o}$.

1. *Exem.* Ist $x = a$, so wird $\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{o}{o} = \frac{2xdx}{dx} = 2x = 2a$.

2. *Ex.* Ist $x = 1$ in einer geom. Reihe, so ist $s = \frac{ax^n - a}{x - 1} = \frac{o}{o} = \frac{nax^{n-1}dx}{dx} = na$.
Ist $a = x$; so wird $s = \frac{(n+1)x^n dx - dx}{dx} = n$. auch bey der Umkehrung der Zeichen.

3. *Exem.* $\infty - \infty = \frac{a}{0} - \frac{b}{0} = \frac{0}{0}$

z. B. Ist $x=1$ so wird $\frac{1}{\log x} - \frac{x}{\log x} = \frac{1-x}{\log x} = -dx : \frac{dx}{x} = -x = -1.$

§ 21. *Beyspiele zur Uebung.*

I. $d\left(\frac{ax^2}{y^3}\right) = d(ax^2y^{-3}) = \frac{2ayxdx - 3ax^2dy}{y^4}$; $d\sqrt[3]{x^2} = \frac{2dx}{3\sqrt[3]{dx}}$

$d(\sqrt[m]{x^n}) = \frac{n}{m}\sqrt[m]{x^{n-m}}dx$; $dx\left(x^3\sqrt[3]{(a+bx^4)^2}\right) = 3x^2+dx\sqrt[3]{(a+bx^4)^2}$
$+ \frac{8bx^6dx}{3\sqrt[3]{a+bx^4}}$

$d\left[\frac{cx^2+a^2}{(b-y)^2}\right] = \frac{6xdx(x^2+a^2)^2}{(b-y)^2} + \frac{2dy(x^2+a^2)^3}{(b-y)^3}$

II. Für das zweite Differential ist $d(max^{m-1}dx) = m(m-1)ax^{m-2}dx^2$ für das dritte Differential von ax^m ist $d[m(m-1)ax^{m-2}dx^2]$ $= m(m-1)(m-2)ax^{m-3}dx^3 = ddd(ax^m)$

III. Für die Differentiale der Logarithmen.

$d\frac{1}{4}(2x \pm b)(x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}b^2\log\left[x \pm \frac{1}{2}b + (x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}}\right] = dx(x^2 \pm bx)^{\frac{1}{2}}$;

$d \log \sqrt{a^2+x^2} = \frac{xdx}{a^2+x^2}$

Für die gemeinen Logarithmen ist $d(\text{gem}\log x) = A\frac{dx}{x} = 0{,}4342945.\frac{dx}{x}$

IV. Für das Differenziale der Exponentialgrössen; weil $d\log x = \frac{dx}{x}$, so wird auch $dx = x\, d\log x$.

$dx(y^z) = x^{y^z}y^z\left(\frac{dx}{x} + dz\log x\log y + \frac{zdy\log x}{y}\right)$ — für die Grundzahl b ist $\log b = 1$ und $b^{(b^x)} = b^{(b^x)}b^x dx$.

VON DER INTEGRALRECHNUNG.

§ 22. *Aufgabe. Aus dem gegebenen und in den obigen Fællen vorkommenden Differenziale einer Funktion die Funktion finden.*

Die am hæufigsten vorkommenden Fælle bey der Auflösung dieser allgemeinen Aufgabe sind die folgenden.

I. Wenn das Differenzial einzeln ist. — (Allgemeine Regel aus §. 18 n. IV.)

z. B $2xdx = \frac{2x^2dx}{2dx} = x^2+C$; $Sxdx = \frac{x^2dx}{2dx} = \frac{1}{2}x^2+C$

$Sa\sqrt[3]{x^2}dx = \frac{3}{5}a\sqrt[3]{x^5}+C.$

$Sax^mdx = \frac{ax^{m+1}dx}{(m+1)dx} = \frac{a}{m+n}x^{m+1}+C.$ — Ist der Exponent $m=-1$, so würde $Sax^{-1}dx = \frac{ax^0dx}{0\,dx} = \frac{a}{0} = \infty$ unmöglich es ist aber $S\ ax^{-1}dx = S\ \frac{adx}{x} = a\log x$. man setze also bei dieser Regel $\frac{x^0}{0} = \log\ x$.

II. Wenn das gegebene Differenziale aus mehrern einzelnen Ausdrücken zusammengesetzt ist.

z. B. $S ax^2dx + \frac{bx^2dx}{e} + edx + fx^{-1}dx = \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3e} + ex + f\ \log x + C.$

III. Enthælt das gegebene Differenziale einen mehrtheiligen Ausdruck, dessen Koefficient dividirt durch das Differenziale eben dieses Ausdruckes einen bestændigen Quotienten giebt.

z.B. in $gdx(a+bx)^q$ ist $\frac{gdx}{bdx} = \frac{q}{b}$ also $S\ gdx(a+bx)^q = \frac{gdx(a+bx)^{q+1}}{(q+1)bdx}$

$= \frac{q}{(q+1)b}(a+bx)^{q+1} + C.$

IV. Ist das Differenziale nicht in dem vorigen Falle, hat aber ganze bejahende Exponenten.—

z.B. $S\ dx(a+bx^2)^3 = S\ dx(a^3+3a^2bx^2+3ab^2x^4+b^3x^6) = a^3x + a^2bx^3 + \frac{3}{5}ab^2x^5 + \frac{1}{7}b^3x^7 + C.$

§ 13. *Von dem Integrale des zweytheiligen Differenzials* $x^n dx(a+bx^m)^p$.

Iedes zweitheilige Differenziale hat diese Gestalt oder kann diese Gestalt erhalten.

I. Wenn beide Theile des zweytheiligen Ausdrucks die Verænderliche x enthalten.

z.B. $x^q dx(ax^r+bx^s)^p = x^{q+rp}dx(a+bx^{s-r})^p$;

$x^{\frac{5}{2}}dx(a^2x+x^3)^{\frac{1}{2}} = a^2x^{-3}dx\ (1+a^2x^{-2})^{\frac{-3}{2}}$

II. Auch wird $x^n dx(a+bx^m)^p = x^{n+mp}dx(ax^{-m}+b)^p$

z.B. $a^2x^{\frac{-3}{2}}dx(a+x)^{\frac{-1}{2}} = a^2x^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{\frac{-1}{2}}$

III. Allgemeine Formel um die Differenzialgrösse $ax^n dx(b+cx^m)^p$ zu integriren, wenn p eine ganze positive zahl vorstellet, es mögen übrigens m und n beschaffen sein, wie sie wollen.

$$S\ ax^n dx(b+cx^m)^p = \text{Const} + ab^p.\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{p.ab^{p-1}}{1}.\frac{cx^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{p(p-1).ab^{p-2}c^2}{1.\ \ 2.}.\frac{x^{2m+n+1}}{2m+n+1} + \ldots$$

z.B. $S\ x^{\frac{-5}{2}}dx(e^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}})^2 = \text{Const} - \frac{2}{3}e^3x^{\frac{-3}{2}} - 2e^{\frac{3}{2}}\log\text{ nat. } x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.$—

IV. Wenn hier $\frac{n+1}{m} = g$, und $g+p=q$, so bekommt man noch ein *algebraisches Integrale* næmlich.

$$S ax^n dx(b+cx^m)^p = \text{Const} + \frac{a}{mcg}\left[\frac{(b+cx^m)^q}{q} - \frac{(q-1)}{1}.\frac{b(b+cx^m)^{q-1}}{q-1} + \frac{(q-1)(q-2)}{1\ \ \ 2}.\frac{b^2(b+cx^m)^{q-2}}{q-2} - \ldots\right]$$

z.B. $Sx^{-\frac{5}{2}}dx(c^2-2x^{-\frac{1}{2}})^{-2} = \text{Const}+\frac{1}{4}c^2-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}c^2 \log\text{nat}(c^2-2x^{-\frac{1}{2}}) -\frac{1}{4}c^4(c^2-2x^{-\frac{1}{2}})^{-1}$.

§ 24. *Von dem Integriren durch Logarithmen.*

I. $S\frac{adx}{x} = a\log x + C$ weil næmlich der Zæhler dividirt durch das Differenziale des Nenners einen beſtændigen Quotienten giebt.

$S\frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\log(1+x^2)+C$; $S\frac{x^{n-1}dx}{(a+bx^n)} = \frac{1}{nb}\log(a+bx^n)$.

II. $S\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \text{Conſt} + \log\text{nat}.(x+\sqrt{x^2-a^2})$.... $S\,adx\sqrt{b+cx^2} = \text{Conſt} + \frac{1}{2}ax\sqrt{b+cx^2}+\frac{ab}{2\sqrt{c}}\log\text{nat}.(x+\sqrt{\frac{b}{c}+x^2})$.

§ 25. *Von der Methode das verlangte Integrale durch ein schon bekanntes zu beſtimmen.*

1. Man kann jederzeit das Integrale $x^n dx(a+bx^m)^p$ auf das bekannte $x^r dx(a+bx^m)^p$ bringen so oft $\frac{n-r}{m}$ einer ganzen positiven Zahl gleich iſt.—Man setze $(1+n-m) = f$, und $(1+n+mp) = g$, so iſt wenn $\frac{n-r}{m} = 3$.

$$S\,x^n dx(a+bx^m)^p = \text{Conſt} + \frac{x^f(a+bx^m)^{p+1}}{bg} - \frac{afx^{f-m}(a+bx^m)^{p+1}}{b^2g(g-m)} + \frac{a^2f(f-m)x^{f-2m}(a+bx^m)^{p+1}}{b^3g(g-m)(g-2m)}.$$

So z B læſst sich $S-Ax^6dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}} = -A.\ S\,x^6dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ durch Hilfe dieser Formel auf $Sx^0dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ bringen denn es iſt $Sx^6dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}x^5(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{6\cdot4}c^2x^3(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{5\cdot3}{6\cdot4\cdot2}c^4x(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}c^6Sx^0dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$

und endlich $S-Ax^6dx(x^2-c^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{Conſt} - \frac{1}{6}Ax^5\sqrt{x^2+c^2} + \frac{5}{6\cdot4}Ac^2\sqrt{x^2+c^2} - \frac{5\cdot3}{6\cdot4\cdot2}Ac^4x\sqrt{x^2+c^2} + \frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}Ac^6\log\text{nat}.(x+\sqrt{x^2+c^2})$

II. Man kann jederzeit das Integrale $x^n dx(a+bx^m)^p$ auf das bekannte $Sx^r dx(a+bx^m)^q$ bringen, so oft $p-q$ einer ganzen positiven Zahl und auch $\frac{n-r}{m}$ oder auch $\frac{r-n}{m}$ einer ganzen positiven Zahl gleich iſt. Man setze $n+1 = g$, und sodann, iſt wenn $p-q = 1$ ausfællt.

$$Sx^n dx(a+bx^m)^p = \text{Conſt} + \frac{x^g}{g}(a+bx^m)^p - \frac{bmp}{g}S\,x^{m+n}dx(a+bx^m)^{p-1}$$

So z.B. læſst sich $Sx^2dx(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$ durch Hilfe des bekannten Integrals

Sx-

$Sx^0dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ = arc. sin. x (siehe Trigon.) bestimmen, denn substituirt man gehörig die Werthe in der allgemeinen Formel, so bekommt man.

$Sx^2dx(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}x^3(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}x^5(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{5}.\ Sx^6dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ und dieses Integral aus nro 1. $= -\frac{1}{6}x^5(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{6.4}x^3(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \ldots\ldots$ $Sx^0dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

folglich auch $Sx^2dx(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \text{Const} + \frac{1}{3}x^3(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}x^5(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{5.6}x^5 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{5.6.4}x^3(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{5.3}{5.6.4.2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{5.3.1}{5.6.4.2}$ arc. sin. x.

§ 26. *Von dem Integriren der rationalen Brüche*

I. Ist das gegebene Differenziale ein rationaler Bruch und der höchste Exponent von x im Zæhler nicht wenigstens um 1 kleiner als der höchste Exponent von x im Nenner; so bringt man ihn auf diese Bedingung auf folgende Art.

$$\frac{x^4dx}{a+bx^3} = x^4dx : a+bx^3 = \frac{xdx}{b} - \frac{\frac{a}{b}x\partial x}{a+bx^3}.$$

II. Wenn sich nun in diesem Fall der Nenner in lauter ungleiche einfache Faktoren auflösen læsst.

So ist $\dfrac{dx}{x(a^2-x^2)} = \dfrac{dx}{x(a-x)(a+x)} = \dfrac{Adx}{x} + \dfrac{Bdx}{a-x} + \dfrac{Cdx}{a+x}$ und

$$S\frac{dx}{x(a^2-x^2)} = a^2\log\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$$

III. Enthælt er mehrere gleiche Factoren.

z.B. $\dfrac{(x^3+x^2+2)dx}{x(x-1)^2(x+1)^2} = \dfrac{Adx}{x} + \dfrac{(Bx+C)dx}{(x-1)^2} + \dfrac{(Dx+E)dx}{(x+1)^2}$ und daraus

$$S\frac{(x^3+x^2+2)dx}{x(x-1)^2(x+1)^2} = 2\log x - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{3}{4}\log(x-1) - \frac{5}{4}\log(x+1) + C.$$

IV. Enthælt der Nenner unmögliche Factoren; so verfæhrt man mit ihrem Produkte wie mit dem Produkte der gleichen Factoren.

z.B. $S\dfrac{(x^2-x+1)dx}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{3}{2}\log(1+x) - \frac{1}{4}\log(1+x^2) - \frac{1}{2}S\dfrac{xdx}{1+x^2} + C.$

(Aus der Geom. ist $\frac{1}{2}S\dfrac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}$arc. tang. x).

V. So oft ein irrationaler Bruch sich durch eine Verwandlung rational machen læsst; so kann auch dieser nach vorigen Regeln integrirt werden. So wird.

$$S\frac{dx\sqrt{x}+adx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}} = S\frac{x^{\frac{3}{6}}dx+adx}{x^{\frac{4}{6}}+x^{\frac{3}{6}}}$$ (und wenn man $x^{\frac{1}{6}} = z$) =

$S\,6z^5dz\,(z+1)^{-1} + S\,6az^2dz(z+1)^{-1}$

$= \frac{6}{5}(\sqrt[6]{x}+1)^5 - \frac{15}{2}(\sqrt[6]{x}+1)^4 + 20(\sqrt[6]{x}+1)^3 + (3a-30)(\sqrt[6]{x}+1)^2 - (12a-30)(\sqrt[6]{x}+1) + (6a-6)\log(\sqrt[6]{x}+1) + C.$

§ 27. *Von dem Integriren der Differenzialen, welche Logarithmen enthalten*

I. Weil $d(uz)=udz+zdu$ ist, so wird auch $uz=S\,udz+S\,zdu$ oder $S\,udz=uz-S\,zdu$.

Also, wenn man $u=\log x$ und $dz=x^m dz$ folglich $du=\frac{dx}{x}$.

und $z=\frac{x^{m+1}}{m+1}$ setzet.

$$Sx^m dx \log x=\frac{1}{m+1}.x^{m+1}(\log x-\frac{1}{m+1})+C.$$

z. B. $Sx^{-4}dx\log x=-\frac{1}{3}x^{-3}(\log x+\frac{1}{3})+C.$

Für $m=-1$ wird $S\frac{dx}{x}\log x=S\log x\,d\log x=\frac{\log^2 x}{2}$

II. Setzet man $u=\log^n x$ und $dz=x^m dx$ so wird

$$Sx^m dx\log^n x=\frac{x^{m+1}}{m+1}\log^n x-S\frac{x^{m+1}}{m+1}.n\log^{n-1}x\frac{dx}{x}=\frac{x^{m+1}}{m+1}\log^n x-\frac{n}{m+1}$$

$$Sx^m dx\log^{n-1}x.=x^{m+1}(\frac{1}{m+1}\log^n x-\frac{n}{(m+1)^2}\log^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{(m+1)^3}\log^{n-2}x-\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^4}\log^{n-3}x+\ldots)+C.$$

z. B. $Sx^4dx\log^3x=x^5(\frac{1}{5}\log^3x-\frac{3}{5^2}\log^2x+\frac{3.2}{5^3}\log x-\frac{3.2.1}{5^4}.)+C$

Für $m=-1$ wird $S\frac{dx}{x}\log^n x=S\log^n x\,d\log x=\frac{\log^{n+1}x}{n+1}$

Für $-n$ und $m=-1$ wird $S\frac{dx}{x}\log^{-n}x=\frac{1}{1-n}\log^{1-n}x+C.$

§ 28. *Von dem Integriren der Differenzialen welche Exponenzialgrössen enthalten.*

I. Weil $d(a^x)=a^x dx\log a$ so wird auch $Sa^x dx\log a=\frac{a^x dx\log a}{dx\log a}=a^x$

und eben so $Sa^{mx}dx=\frac{a^{mx}dx}{mdx\log a}=\frac{a^{mx}}{m\log a}$.

Sodann nach der Formel $Sudz=uz-Szdu$, wenn $a^x dx=dz$ und $x^n=u$ ist

$$Sa^x x^n dx=a^x[\frac{x^n}{\log a}-n\frac{x^{n-1}}{\log^2 a}+n(n-1)\frac{x^{n-2}}{\log^3 a}-n(n-1)(n-2)\frac{x^{n-3}}{\log^4 a}+..]+C$$

z. B. $Sa^x x^3dx=a^x[\frac{x^3}{\log a}-3\frac{x^2}{\log^2 a}.+6\frac{x}{\log^3 a}-\frac{6}{\log^4 a}]+C.$

II. Ist a die Grundzahl der Logarithmen, also $\log a=1$; so wird $Sa^x x^n dx=a^x[x^n-nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}-n(n-1)(n-2)x^{n-3}+\ldots]$ und $Sa^x d^3dx=a^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$

III. Setzet man in der allg. Formel, $Sa^{mx}dx=\frac{a^{mx}}{m\log a}$ anstatt $Sa^x dx=\frac{a^x}{\log a}$; so erhælt man.

Sam-

$$Sa^{mx}x^n dx = a^{mx}\left[\frac{x^n}{m\log a} - n\frac{x^{n-1}}{m^2\log^2 a} + n(n-1)\frac{x^{n-2}}{m^3\log^3 a} - n(n-1)\right.$$
$$\left.(n-2)\frac{x^{n-3}}{m^4\log^4 a} + \ldots\ldots\right] + C.$$

§. 29. *Von dem Intergriren der Differenzialgrösen, welche mehrere veränderliche enthalten.*

I. $S\left[mx^{m-1}y^n z^r dx + nx^m y^{n-1}z^r dy + rx^m y^n z^{r-1}dz\right] = x^m y^n z^r + C.$
$S\left[3x^2ydx + x^3dy + 5xy^4dy + y^5dx\right] = x^3y + xy^5 + C.$
$S\left[x^3dy + 3x^2ydx + x^2dz + 2xzdx + xdx + y^2dy\right] = x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C.$

II. Für die höheren Differenzialgrösen
$S\left[x^3y^2ddy + 2x^3ydy^2 + (2x^2y + 3y^2x^2)dxdy + 2y^2xdx^2\right] = x^3y^2dy + x^2y^2dx + Cdx.$
Aus n° 1 ersieht man die Eigenschaft, welche jedes gegebene Differenziale haben muss, wenn es nach voriger Methode integrirt werden kann.

So læst sich $\frac{y^3dx}{3} + xy^2dy$ intergriren, weil $\frac{y^2dy}{dy}$ und $\frac{y^2dx}{dx}$ gleich sind, hingegen læst sich

$xydx + 2xdy$ nicht integriren, weil $\frac{xdy}{dy}$ und $\frac{2dx}{dx}$ ungleich sind.

§ 30. *Von den Differenzialgleichungen.*

I. Sind die Verænderlichen abgesondert.
z.B. $ax^m y^n dx = by^q x^r dy$, so wird $ax^{m-r}dx = by^{q-n}dy$ also
$$\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = \frac{by^{q-n+1}}{q-n+1} + C.$$

II. In der Gleichung $\frac{adx}{x} = \frac{bdy}{y}$ ist $a \log x = b \log y + \log c$.

In $x^a = \log y^b + \log c$ ist $x^a = Cy^b$.

In $ax^m dx = \frac{bdy}{y}$ wird $\frac{ax^{m+1}}{m+1} = b \log y + \log c$ folglich wenn h die Grundzahl der Logarith: ist.
$$\frac{ax^{m+1}}{m+1}\log h = b \log y + \log c \text{ und } h^{\frac{ax^{m+1}}{m+1}} = Cy^b.$$

III. Hat eine Gleichung diese Gestalt $Adx + Bdy = 0$, und ist im Fall des § 29. so wird sie darnach integrirt; ist sie nicht in diesem Fall aber doch *gleichartig*, so setzet man $\frac{y}{x} = y$

z.B. die Gleiehung $y^3dx + y^2xdy + bx^3dy = 0$; wird $y^4 = c\left(\frac{2y^2 + b}{x^2}\right)$

IV. Für die höheren Differenzialgleichungen befolget man die vorigen Regeln z.B. Aus der Gleichung $yddy + dy^2 + addy + dx^2 = 0$; wird $\frac{1}{2}y^2 + ay + \frac{1}{2}x^2 + Cx + C' = 0.$

V. Ist die Gleichung für ein beständiges dx; $d^3y = ax^m dx^3 + bx^n dx^3$, so findet man

y=

$$y=\frac{ax^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)}+\frac{bx^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\tfrac{1}{2}Cx^2+C'x+C''$$

VI. Wenn eine Veränderliche x fehlt; so erhält man das Integrale, wenn man $\frac{dx}{dy}=z$ setzet.

z.B. Ist die Gleichung $yddy+dx^2+dy^2=0$, so wird $x=\mp(c^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\mp c$. Das Integriren durch Kreisbögen und durch die Trigonometrische Funktionen erfolgt in der Trigonometrie

§. 31. *Von den Gleichungen der partiellen Differentiale.*

Zu der Entdeckung dieser neuen Integral Rechnung (1731.) gab dem *Hr. L. Euler* die Bedinguns Gleichnung $dz=Pdx+Qda$ Anlaſs. Man soll hier die allgemeinſte Werthe von P und Q finden so, daſs sie der Gleichung $Q=Fz+PR$, wo F eine Funktion von a, und R eine von x und a iſt, Genüge leiſte.

Um dieses zu erhalten, sucht er einen Factoren um $dx+Rda$ völlig zu integriren: es sey S dieser Factor und

$Sdx+SRda=dt$; es sey auch $\int Fda=\log B$; so findet er für die gesuchte Werthe

$P=BSf':T$, und $Q=\frac{zdB}{Bda}+BRSf':T$ daraus bekommt man

$$dz=BS\,(dx+Rda)f':T+z\frac{dB}{B}=Bdf:T+z\frac{dB}{B}$$

und folglich $z=Bf:T$.

§. 32. *Fontaine-s Bezeichnungsart.*

Sind $Mdy+Ndx$ zwey Glieder eines Differenzials z in einer Bedingungs Gleichung, so setzt

Fontaine $\frac{dz}{dy}$ ſtatt M und $\frac{dz}{dx}$ ſtatt N. und diese so veränderte Coefficienten heiſsen *partielle Differenzen.*

Um diese Bezeichnung nicht mit einer Verhältniſs zu verwechseln, drücken wir die lezte durch $dx:dx$ aus.

$\frac{dz}{dy}, \frac{dz}{dx}$ ſind die partielle Differenzen der erſter Ordnung; $\frac{dz^2}{dy^2}$; $\frac{dz^2}{dydx}$ jene der zweyten Ordnung u. f.

Mittelſt dieser Bezeichnung, iſt es z. B. leicht auf eine bequeme Art die Bedingungen auszudrücken, um daſs ein gegebenes Differenzial richtig sey. u. f.

Weitere Ausführung der Differential und Integral Rechnug S unter andern. *Traité de Calcul differentiel & de Calcul Integral p. J. S. J.* Cousin. und *Theorie des Fonctions Analytiques p. J. L.* Lagrange.

DIE RAUMLEHRE

Les plus grands Physiciens de chaque Siècle, ceux à qui l'on doit les découvertes les plus importantes par leur utilité, etoient aussi de profonds Géomètres.

COUSIN.

Calcul diff. & Integr.

LONGIMETRIE UND PLANIMETRIE.

§ 1. *Von der Winkelmessung.*

I. *Im Kreise.* Nennt man den Winkel innerhalb des Kreises x, den auf dem Umfang y, und jenen außerhalb denselben z und die Bogen die seine Schenkel umfassen a und b so ist

$$x = \frac{a+b}{2}; \quad y = \frac{a+o}{2}, \quad z = \frac{a-b}{2}$$

Der Winkel am Segment $y = \frac{a}{2}$ Die zwey *Nebenwinkel* $= 2$ R.

II. In *jedem Dreyecke* sind die 3 Winkel $A + B + C = 2 R = 180°$

Der Beweis davon bedarf des §. 2. n°1.

Dieses würde wider die Methode, wenn die Bemerkung in dem Vorberichte nicht zur Rechtfertigung diente.

III. *In jeder Figur.* Nennt man die Anzahl der Seiten n und den Werth aller ihrer Winkel in rechten Winkeln S

so ist $S = 2n-4 = 2(n-2)$ und der Werth der æussern Winkel $= 4$. R. Hieraus folgt dass in jeder regulæren Figur der *æussere* Winkel oder jener am Mittelpunkte $a = \frac{4}{n}$ und der *innere* $b = 2 - \frac{4}{n}$

IV. *Bei den Paralleln* oder gleichlaufenden Linien sind die beiden inneren Winkeln $a+b = 2$R.

Daraus folgt dass auch die *Wechselwinkel* und die *innere entgegengesetzte* gleich sind: und umgekehrt.

Es bestætigt sich durch die kreisförmige Umdrehung einer der beiden Gleichlaufenden um einen Mittelpunkt, dass der Durchgang der entgegengesetzten Grössen oder der unendlich kleinen in die unendlich grosse und umgekehrt, durch o oder ∞ geschehe. (S. Arith: § 7 num: XII.)

V. Um

V. Um die Winkel auf dem Papier zu zeichnen und zu meſsen, bedient man sich des Winkelmeſsers (mit einem beweglichen Halbmeſser). Noch genauer wird diese Arbeit vermittelst des *geradelinichten Transporteurs* verrichtet.

VI. Um die Winkel noch genauer in der Praktik zu meſsen bedient man sich des *Nonius* oder lieber des *Verniers*. Nennt man die Anzahl von Graden des Winkelmeſsers a die ihr entsprechende Anzahl der Abtheilungen des *Verniers* b, einen Theil der 1ⁿ A theilung x, und jenen der 2ⁿ y so hat man $y = \frac{ax}{b}$

z.B. für $a = 31$ Halbgraden, $b = 30$, $x = 30'$ so iſt $y = \frac{31 \cdot 30'}{30} = 31'$ oder der *Vernier* von 1 zu 1 Minute.

VII. Um sogar Sekunden zu bekommen, bedient man sich der *Micrometer Schraube*. z.B. für jede Umdrehung der Schranbe, die 3 Minuten ausmacht, und für eine Umdrehung des Zeigers, der zugleich 60 Abtheilungen durchlauft, entspricht jede Abtheilung der letzten, einen Bogen von 3 Sekunden.

Die Meſsung der Linien kommt unten vor.

§. 2. *Von den Dreyecken.*

I. Ihre Abtheilung. 5 Fælle wo sie in aller Rücksicht gleich sind. Daraus 5 Aufgaben.

II. Setzt man die zwey Katheten a und b und die Hypothenuse h, so hat man $h^2 = a^2 + b^2$. — (Aufgaben daraus.)

III. Setzt man in den schiefwinklichten Dreyecken die dritte Seite c und das Stück der Grundlinie das von der Senkrechten gemacht ist x, so hat man $c^2 = a^2 + b^2 \pm 2bx$.

IV. Zwey Dreyecke die eine gemeinschaftliche Seite haben, macben ein Viereck aus. Diese werden in *Kwadrate, Rechtecke, Parallelogramme* und *Trapeze* eingetheilt.

V. Mehrere Dreyecke, die so mit einander verbunden sind, daſs sie immer eine gemeinschaftliche Seite haben, bilden Vielecke, die ihre Benennung von den Winkeln, bekommen.

Diese laſsen sich in Dreyecke, Rechtecke und Kwadrate verwandeln.

§. 3. *Von den æhnlichen Figuren; von den Proportionallinien und Maaſstæben.*

I. 5. Fælle der Æhnlichkeit der Dreyecke. (Besonderer Fall für die senkrechte Seiten.)

II. Wenn die 4 Linien $a : b = c : d$ sind, so ist $ad = bc$ und umgekehrt. Desgleichen für eine stetige Proportion.

Desgleichen für Parallelogramme und Dreyecke aus solchen Dimensionen.

Hier ist auch die 4*te* propor. Linie $x = \frac{bc}{a}$, die mitlere $x = \sqrt{ab}$ wie in der Arithmetik. *Ihre Konstruktion.*

III. *Aufgaben.* Eine Linie in gleiche, in Proportionaltheile, in sehr kleine zu theilen. Zeichnung der verjungten Maaſstæbe. Geometrische Sætze aus Arithm. § 4 n° IX, X, XI.

IV. *Proportional Linien im Kreise.* Setzt man die beiden Theile einer Sehne a, b und der andern c und d; so hat man $ab = cd$.

Ist der Durchmeſser $2a$, einer seiner Abschnitte x, und die Helfte der auf ihm senkrechter Sehne y, so hat man $y^2 = 2ax - xx$ oder $y^2 = a^2 - x^2$ wenn man x vom Mittelpunkt nimmt.

Diese heiſsen die *Gleichungen des Kreises.*

Setzt man eine Sekante a ihren Theil auſser dem Kreise b, desgleichen c und d für eine andere Sekante, so hat man $ab = cd$. Für die Tangente hat man $x = \sqrt{ab}$.

V. Setzt man zwey æhnliche Figuren A und B und zwey entsprechende oder sie bildende Seiten a und b so hat man $A : B = a^2 : b^2$.

Diese Proportion nebst den Gleichungen in n° 11 und §. 2 numero 11.

geben Stoff zu mancherley Aufgaben zur Uebung. Den ersten Beyspiel solcher Anwendung der Algeber auf die Geometrie gab *Descartes*. Er legte also eine neue Bahn zum Wachstum der Mathematik. Mehrere davon werden vermittelst des Proportionalzirkels aufgelöſst.

Noch mehr Gleichungen dazu giebt die Trigonometrie.

VI. Beyspiele zur Uebung.

1. *Exem.* Mann soll die Seite eines Vielecks finden, das zwey mahl weniger Seiten hat, als ein gegebenes.

Setzt man den Radius des umgeschriebenen Kreises r die Seite des gegebenen Vielecks a, und des gesuchten x so ist $x = \sqrt{2r(r - \sqrt{rr - \frac{aa}{4}})}$; Für $r=1$, ist $x = \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - \frac{aa}{4}})}$. Ist a die Seite eines Sechsecks so ist $x = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0,517$. Setzt man solches Verfahren immer fort, so bekommt man endlich ein Vieleck, indem der Unterschied des Umfanges von jenem des Kreises immer kleiner wird, und daraus das Verhæltniſs des Durchmeſsers zum Kreise $= 1 : 3,141592 = 1 : \pi$

Der Umfang eines jeden Kreises $p = 2\pi r = \pi d$, $\frac{1}{\pi} = 0,31830988\ldots$ $\frac{1}{4}\pi = 0,78539$. $\sqrt{\pi} = 1,77245$. $\log nat \pi = 1,14472$.. $\log vul \pi = 0,49714$.

Jeder Bogen $a = \frac{n^{o}\pi r}{360}$; daraus $r = \frac{180}{n} \cdot \frac{1}{\pi} a$;

Für $r = a$ ist $n = 57^{o}\ 17'\ 44''\ 48'''$

Leichtere Methoden für die Grundverhæltniſs kommen unten vor. Sie vertreten die *Erschöpfungs* Methoden der Alten.

2. *Exem.* Es ist die Entfernung a von zwey Mittelpunkten zweyer Kreisen nebst ihren Halbmeſsern r und ϱ gegeben, man soll die Tangenten, die selbe berühren, führen.

Ist die eine Entfernung eines Durschnitts der beiden Tangenten von Mittelpunkte x, und die andere y, so ist $\frac{x}{y} = \frac{a\varrho}{r \mp \varrho}$; Ist $r = \varrho$ so ist $x = \infty$; u. s. w. Davon eine Anwendung in der Optik und Aſtronomie. Einen Beyspiel der *Unbeſtimmten Aufgaben* giebt.

3. *Exem.* Einen Kreis zu bescreiben, welcher zwo gegebene Geraden berührt. Fügt man noch eine Bedingung hinzu, daſs næmlich dieser Kreis noch eine dritte Gerade, die jene durschneidet berühre, so wird die Aufgabe bestimmt. Die zweyte Anwendung der Rechenkunst auf die Geometrie ist die Lehre

§ 4. *Von der Berechnung der Flæcheninhalte der ebenen Figuren.*

I. Setzt man die Höhe eines Rechtecks a seine Grundlinie b so ist seine Flæche $= ab$; des Kwadrats seine $= a^2$.

II. Daraus ist der Flæcheninhalt eines Dreyecks $= \frac{ab}{2}$.

III. Da sich eine geradelinichte Figur in Dreyecke zertheilen læſst, so ist auch diese Flæche leicht zu finden.

IV. Setzt man in einem *Trapez* die beiden gleichlaufenden Seiten a und b und ihren Abſtand c, so iſt sein Flæchen Inhalt $s = \frac{(a+b)c}{2}$

Ist demnach eine Figur in solche Trapezia durch Parallelinien *A*, *B*, *C*, *D*, *E*.. eingetheilt, und diese Abstænde heifsen a, b, c, d, e.. so ist der Inhalt der Figur $s = \frac{(A-C)a+(B-D)b+(C-E)c...+(E+F)e.}{2}$

V. Die *Wage*-methoden bei Krummlinichten Figuren gehören eigentlich nicht zu Anfangsgründen.
Siehe Monatliche Correfpondenz zur Beförderung der Erd und Himmelskunde, von *Zach* 1800. Februar (S. 165...188.
Guldins Methode kommt unten vor.

VI. Für die *reguläre Figuren*. Ist die Seite des umgeschriebenen Vielecks a, der Radius r, so ift der Polygon $P = \frac{nar.}{2}$

Ift das Apothema a und die Seite des eingeschriebenen Vielecks b, so ift sein Inhalt $p = \frac{nab.}{2}$

VII. Für den Kreis und seine Theile. Der *Kreis* $c = \pi r^2 = \frac{\pi d^2.}{4}$ Der *Auschnitt* $s = \frac{ar.}{2}$

Das Apothema $a = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$. Daraus wird leicht der *Abschnitt* des Kreises gefunden: noch leichter wenn die *Höhe* des Bogens gegeben ist. Der *Ring* des Kreises $= \pi(R^2 - r^2)$.

VIII. *Aufgabe.* Das Kwadrat-Decimal Maafs in Duodecimal-maafs; und umgekehrt zu verwandeln.
z.B. 100□ : 144□ = 63□' 95□'' : 92, 0 88□'

IX. Zwey Methoden für das so genannte Toisiren.

§. 5. *Von der Eintheilung der Figuren in gleiche oder proportionaltheile durch gleichlaufende Linien.*

1. *Aufgabe.* Ein Dreyeck in ein Trapez zu verwandeln der mit dem Dreyeck eine gemeinschaftliche Grundlinie habe, und von defsen die eine Seite auf einer Seite des Dreyecks und die andere auf einer gegebenen Lage, liege.
Setzt man die durch den Gipfel des Dreyecks zur Grundlinie geführte Parallelle a, so ift die gesuchte Seite $x = \sqrt{ab}$.
Zur Auflösung dieser allegemeinen Aufgabe gehören auch,

2. *Aufgabe.* Die Grundlinie a und die Höhe b eines Dreyecks sind gegeben, man soll ihn in einen andern verwandeln, defsen ein Winkel an der Grundlinie und die Höhe c gegeben sind.

Des letzten Grundlinie ift $x = \frac{ab}{c}$. Also kann auch eine jede Figur in ein solches Dreyeck verwandelt werden.

3. *Aufgabe.* Zwey Seiten a und b eines Dreyecks sind gegeben, man soll ihn in ein anderes verwandeln das mit ihm einen gemeinschaftlichen Winkel und den nemlichen Inhalt hat, und defsen eine Seite mit einer gegebenen Linie gleichlaufe.

4. *Aufgabe.* Ein Dreyeck durch Linien, die aus seinem Scheitel fahren, in gleiche oder proportional Theile zu theilen.
Daraus flüfst die allgemeine Auflösung der Aufgabe durch Zeichnung oder durch Rechnung. Auf dem Grund wird diese Arbeit noch leichter verrichtet. Andere Methoden stehen in *Mayers* praktischen Geometrie 3.B. und erfordern Trigonometrische Kenntnifse.

STEREOMETRIE.

§ 6. *Von der Körpermessung, und den Prismatischen Körpern ins besondere.*

I. Hier werden die Eigenschaften der auf eine Ebene *lotrechten Linie*, des Neigungs Winkels einer Linie der Ebene gegen einander, der Köperwinkel u. f. wiederhohlt.

II. Setzt man die drey Abmessungen eines rechtwinklichten Parallepipeds a, b, c, so ist sein körperlicher Inhalt $s = a\,b\,c$. Und algemeiner: ist die Höhe eines *Prismen* a und seine Grundflæche b so ist sein Inhalt $s = ab$.

Ist die Grundlinie eines dreyeckigten Prismen β und die drey Eckseiten a, b, c, so ist sein Inhalt $s = \frac{1}{3}\beta(a+b+c)$.

Hat die Grundflæche mehr Seiten, so wird ein Mittel zwischen allen Eckseiten genommen.

Die Seitenflæche bestehet aus lauter ebenen und geradelinigten Figuren.

III. Eines Cylinders Inhalt $s = ab = a\pi r^2$. und die krumme Flæche eines geraden Cylinders $= 2a\pi r$.

Die Ergænzung davon folgt im § 10).

§ 7. *Von Körper und Flæchen Maasse der* Pyramidischen Körper.

I. Setzt man die Höhe a und die Grundlinie b einer Pyramide, so ist ihr Köperlicher Inhalt $s = \frac{ab}{3}$.

II. In einer geraden Pyramide sind die Seitenhöhen gleich, daraus kann die Seitenflæche leicht gefunden werden.

III. Der Körperliche Inhalt eines *Kegels* ist $s = \frac{1}{3}ab = \frac{1}{3}a\pi r^2$, und seine krumme Flæche $f = a\pi r$.

IV. In dem *gestutzten Kegel*, dessen die eine Grudflæche β, die zweyte γ, und ihre Entfernung α; ist der Inhalt $s = \frac{1}{3}\alpha\ (\beta+\gamma.+\sqrt{\beta\gamma}.)$ und für die Seitenhöhe α ist die krumme Seitenflæche $f = \alpha\pi\ (r+\varrho)$.

Ist die Höhe des ergœnzenden Kegels x so ist $\beta^2 : \varrho^2 = (a+x)^2 : x^2$

§ 8. *Von der Kugel und den Kugelschnitten.*

I. Eigenschaften der Kugel. Grosse, Kleine, Parallelkreise. Sphærische Dreyecke. Das Mass ihrer Winkel. Berührende Ebenen u. d. g.

II. Die *Flæche* der Kugel $f = 4\pi r^2 = \pi d^2$ (Diese Formel wird durch die Differential und Integral Rechnung gefunden und kann als Gegensatz der Exhaustions Methode der Alten dienen.)

Für die Höhe x des Abschnitts ist dessen krumme Flæche $= 2\pi r x$.

Die ganze Kugelflæche ist der krummen Flæche des um sie beschriebenen Cylinders gleich, oder ist $\frac{2}{3}$ des letzten ganzer Flæche.

III. Der *Körperliche Inhalt der* Kugel $S = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{\pi d^3}{6} = \frac{2}{3}$ des umgeschriebenen Cylinders.

Ist die Höhe ihres *Abschnitts* x so ist sein Inhalt $s = \pi x^2\ (r - \frac{x}{3})$

$$S : r^3 = \frac{4}{3}\pi : 1; \quad S : d^3 = \frac{\pi}{6} : 1; \quad \frac{4}{3}\pi = 4{,}18879, \ \frac{\pi}{6} = 0{,}523598.$$

Der *Ausschnitt* einer Kugel ist $= \frac{2}{3}$ des entsprechenden Cylinder stuckes.

Sind die Halbmesser von zweyen Parallelen Kreisen r und ϱ, das Kugelstuck, welches von ihnen begrænzt ist k und das entsprechende Cylinderstuck c, so hat man $k : = \frac{2}{3} r^2 + \frac{1}{3}\varrho^2 : r^2$

Um das Kubik *Decimal* Maass in *Duodecimal Maass* zu verwandeln hat man.

z.B. $1000^c : 1728^c = 24C'\ 68C'' : 41{,}589\ C'$ Duodec.

§ 9. *Von den æhnlichen Körpern.*

Für zwey æhnliche Körper *A* und B und für ein Paar ihrer entsprechenden Seiten *a* und *b*, oder solcher ihrer Dimensionen *a* und *b*, oder ein Paar solcher Abmeſsungen von zwey Flæchen, die durch ihre Umdrehung diese Körper bilden; hat man $A : B = a^3 : b^3$.

Für ein paar Kugeln wære $S : s = R^3 : r^3 = D^3 : d^3$.

§ 10. *Von den* Cylinderstücken *und den daraus enſtehenden* Kappe-Sternen *und Kreuzgewölben.*

I. Für *Viertelcylinder* und seine *Abschnitte* in denen die Grundflæche *b*; hat man die *krumme Flæche* $f = 2b$ und den Körperlichen Inhalt $s = \frac{2}{3}\, rb$. Desgleichen für die *Auschnitte.*

§ 11. *Von dem* Gröſsten *und dem* Kleinſten *als eine Anwendung der Infinitesimal Rechnung auf die Elementar Geometrie.*

1. *Aufgabe.* Man soll in einem Halbkreise das gröſste Rechteck zeichnen.

Iſt der Durchmeſser *a* und das verlangte Stück davon von Mittelpunkt gezehlt *x* so iſt $\frac{a}{2} : x = x : \frac{a}{4}$.

2. *Aufgabe.* Man führe durch einen innerhalb eines Winkels gegebenen Punkt eine Gerade, welche das Kleinste Dreyeck abschneide.

Setzt man das bekante Stück der Grundlinie *a* und die unbekannte Grundlinie *x*, so iſt $x = 2a$.

3. *Aufgabe.* Es sey auf der Grundlinie *a* für dieselbe Summe der Seiten das gröſste Dreyeck zu zeichnen.

Es iſt hier $x = \frac{a}{2}$ und also das *gleichschenklichte* oder das *gleichseitige Dreyeck* das gröſste.

4. *Aufgabe.* Es sey das gröſste rechte Parallepiped für dieselbe Summe der 6 Rechtecke, welche daſselbe einschlieſsen, zu bestimmen.

Sind seine drey Abmeſsungen *x*, *y*, *z*, so muſs in diesem Fall $x = y = z$ seyn.

5. *Aufgabe.* Es sey für dieselbe Oberflæche der gröſste rechte Cylinder zu bestimmen.

Iſt der Durchmeſser der Grundflæchœ *x* und die Höhe des Cylinders *y*, so muſs in diesem Falle $x = y$ seyn.

Anmerkung. Die praktische Geometrie erfodert mehr Theorie aus andern Theilen der Matematischen Wiſsenschaften und kann erst in der Mathematischen Geographie ihren Platz finden.

DIE EBENE TRIGONOMETRIE.

Man kann die Trigonometrie als eine Wiſsenschaft ansehen, welche in Absicht auf ihre Vollſtændigkeit den übrigen Wiſsenschaften zum Muſter dienet. . . . Wenn man sich dermalen noch Mühe giebt, etwas zu dieser Wiſsenschaft beyzutragen, . . so geschiht dieses nur, um die Auflösung der Aufgaben schöner, kürzer und zu jeden Absichten bequemer zu machen, und hierinn læſst sie allerdings noch ein weites Feld zum Nachsinnen offen.

J. H. Lamberts

Beytræge.

§ 1. Einleitung. *Erklærungen und allgemeiner Blick über diese Wissenschaft und ihren Nutzen.*

I. Erklærung der *trigonometrischen Linien* oder der Funktionen der Bögen. Ihr Wachstum.

Zeichen + — in jedem Kwadrant. (In der Astronomie werden die Længen und die geraden Aufsteigungen der Sterne von 0° bis 360° gerechnet) Es wird hier a ∾ b einen bejahenden und a — b einen beliebigen Unterschied bedeuten.

II. Setzt man zwey beliebige *gleichnamige Funktionen* deſselben Winkels A und a in verschiedenen Kreisen, deren Halbmeſser R und r, so iſt immer $A : a = R : r$. Nimmt man $R = 1$ so iſt $a = Ar$. und für zwey *ungleichnamige Funktionen* iſt $A ; B = a : b$

Hat man also einmal diese Funktionen für einen beliebigen Halbmesser berechnet, so dienen sie auch für einen jeden andern. Zudem braucht man sie nur für spitzige Winkel zu haben, denn die Funktionen der stumpfen Winkel, die jene zu 2 R ergænzen, sind die nemlichen. Der Nutzen solcher Tafeln ergiebt sich aus dem

III. *Lehrsatz.* In jedem geradelinigten Dreyeck verhalten sich die Seiten, wie die Sinuſse der gegenüber ſtehenden Winkel.

§ 2. *Berechnung der trigonomischen Funktionen.*

I. Für jeden gegebenen Bogen a iſt $\sec a = \sqrt{r^2 + tg^2 a}$; und $\sec a : tg\, a = r : \sin a$. Daraus sind die Sinuse und Secanten aus den Tangenten bekannt. —

II. $rr. = \tan a \cot g a$. Die Tangenten bis 45° sind also hinreichend.

III. Für den nemlichen Halbmeſser und zwey verschiedene Bögen $\sec a + \sec b : \sec b = tg a - tg b : x$ den Theil, den man zur Tangente des kleinern Bogens addirt um eine mitlere arith. proport. Tangente zwischen den zwey gegebenen zu haben. Daraus folgt.

Iſt $b = 0$; so iſt $\sec a + r : r = tg a : tg a$; iſt $a = 90°$, so iſt $tg\, 45° = r$, u s w.

IV. Setzt man in einem Kreise zwey beliebige gleichnamige Funktionen F und f von zwey Bögen A und a, die sich wenig von einender unterscheiden, so hat man für den mitlern Bogen α und die mitlere Funktion φ die Proportion $A - a : \alpha - a = F - \varphi : \alpha - f$; eine Interpolationsformel, vermittelſt welcher man die Tangenten von jedem Bogen findet, und umgekehrt (R = 10000 000000). Gebrauch der *Unterbergshen* Tabelle der Funktionen.

Diese Formel dient auch zum Interpoliren der Logarithmen, und zur Berechnung der trigonometrischen Funktionen für Bögen mit Sekunden, und umgekehrt.

§ 3. *Von einigen notwendigen trigonometrischen Formeln nebſt einer zweyten Methode die trigonometrische Funktionen zu berechnen.*

I. Setzt man zwey Bogen a und b so iſt $\sin a \pm b = \sin a \operatorname{Cos} b \pm \cos a \sin b$, $\operatorname{Cos} a \pm b = \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b \mp \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b$.

$\operatorname{Sin} 2a = 2 \operatorname{Sin} a \operatorname{Cos} a$; $\operatorname{Cos} 2a = \operatorname{Cos}^2 a - \operatorname{Sin}^2 a = 1 - 2\operatorname{Sin}^2 a = 2\operatorname{Cos}^2 a - 1$.

$\operatorname{Sin} a = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Cos} 2a}{2}}$; $\operatorname{Cos} a = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{Cos} 2a}{2}}$; auch iſt $\sin a = \operatorname{Cos} a \operatorname{Tg} a$

$$\operatorname{Cos} a = \frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Tg} a} = \sqrt{1 - \sin^2 a} = 1 - 2\sin^2 a = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 a}} = \frac{1}{\operatorname{Sec} a}$$

II.

II. Weil Sin $30^\circ = \frac{1}{2}$ und Sin $45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$, Cos $30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, so kann man daraus Sin 75°; 15°; $7^\circ 30'$; $3^\circ 45'$ u.s.w. haben.

Bemerkung. Es sind 10 völlig wahre Sætze unter 31600; die übrigen 31590 sind alle nur beynahe wahr:

Und auf ihnen beruhet die Ausmeſsung des Himmels und der Erden, und faſt die ganze angewandte Mathematik. So richtig iſt es, daſs wir in unsern sicherſten und erhabenſten Kenntniſsen uns der Wahrheit nur næhern, ohne sie völlig zu erreichen.

III. Für die *Tangenten.* Es iſt $\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg}a \pm \operatorname{tg}b}{1 \mp \operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$; $\operatorname{tg}a = \frac{\operatorname{Sin}a}{\operatorname{Cos}a} = \frac{1}{\operatorname{cotg}a}$;

$$\operatorname{cotg}a = \frac{\cos a}{\operatorname{Sin}a} = \frac{1}{\operatorname{tg}a}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a = \frac{\operatorname{Sin}a}{1+\cos a} = \frac{1-\cos a}{\operatorname{Sin}a}\,; \quad \operatorname{Cotg}\tfrac{1}{2}a = \frac{\operatorname{Sin}a}{1-\cos a} = \frac{1+\cos a}{\operatorname{Sin}a}$$

Da diese Formeln hæufig gebraucht werden, so iſt es gut sie im Gedæchtniſse zu behalten,

IV. Für die *Secanten* und *Sinus versus.* Es iſt $\sec a = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a} = \frac{1}{\cos a}$;

$\operatorname{cosec} a = \operatorname{cotg} a + \operatorname{tg}\frac{1}{2}a$ ' $\operatorname{Sin. v}\, a = 1 - \cos a$.

V. Für ein *vielfaches* der Sinusen und umgekehrt. Es iſt leicht eine Reihe für sie zu beſtimmen, denn ihr Gesetz iſt bekannt. Indem nemlich die Bögen in einer arithm. Reihe wachsen, so formiren die Sinuſsen und Cosinusen eine wiederkehrende Reihe deren die Verhæltniſs Scale $2\cos a - 1$ iſt.

z.B. um den Werth von $3a$ zu haben multipliziere man das vorhergehende Glied, sin $2a$ durch $2\cos a$ und den vorhergehenden davon durch -1. So hat man $\operatorname{Sin} 3a = 2\cos a \sin 2a - \sin a$; und $\cos 3a = 2\cos a \cos 2a - \cos a$. Daraus iſt leicht den Sinus und Cosinus in Potenzen des Sinus und Cosinus des einfachen Bogens ausgedrückt, zu bekommen.

VI. Wære der ganze Sinus nicht $=1$, sondern $= R = 10000\,000000$, und folglich $\log R = 10$; so iſt

$$\operatorname{Sec} z = \frac{R^2}{\cos z}\,;\ \operatorname{cosec} z = \frac{R^2}{\sin z}\,,\ \operatorname{sin\,v.} z = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}z}{R}\,;$$

$\log\sec z = \text{Dek. Erg.} \log\cos z + 10$; $\log\operatorname{cosec} z = \text{Dek. Erg.} \log\sin z + 10$.

$\log. \operatorname{sin.vers} z = 2\log\sin\frac{1}{2}z - 9{,}6989700$; $\operatorname{arc}\sec b = \operatorname{arc}\cos\frac{R^2}{b}$;

$\operatorname{arc}\operatorname{cosec} b = \operatorname{arc}\sin\frac{R^2}{b}$; $\operatorname{arc}\operatorname{sin.v}\, b = 2\operatorname{arc}\sin\sqrt{\frac{1}{2}R.b}$.

VII. Endlich iſt auch noch $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b)$;

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\cos(a-b) + \frac{1}{2}\cos(a+b)$;

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\sin(a+b) + \frac{1}{2}\sin(a-b)$; $\cos a \sin b = \frac{1}{2}\sin(a+b) - \frac{1}{2}\sin(a-b)$.

$\operatorname{Sin} a + \sin b = 2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)$; $\operatorname{Sin} a - \sin b = 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b)$;

$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)$; $\cos a - \cos b = 2\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b)$;

$\operatorname{Sin} a + \sin b : \sin a - \sin b = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b) : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)$;

§ 4.

§ 4. *Anwendung der Infinitesimal Rechnung auf die Berechnung der Tafel der Sinus und ihrer Logarithmen.*

I. *Von dem Differenziale der Trigonometrischen Funktionen.*

Wen z jeden Bogen oder Winkel bedeutet, so ist

1) $d\,\mathrm{Sin}z = dz\,\mathrm{Cos}z$. 2) $d\,\mathrm{Cos}z = -dz\,\mathrm{Sin}z$; 3) $d\,\mathrm{Tang}z = \frac{dz}{\mathrm{Cos}^2 z}$;

4) $d\,\mathrm{Cot}z = -\frac{dz}{\mathrm{Sin}^2 z}$; 5) $d\,\mathrm{Sec}z = \frac{dz\,\mathrm{Sin}z}{\mathrm{Cos}^2 z}$ 6) $d\,\mathrm{Cosec}z = -\frac{dz\,\mathrm{Cos}z}{\mathrm{Sin}^2 z}$

7) $d\,\mathrm{Sin\,v.}z = dz\,\mathrm{Sin}z$, 8) $d\,\mathrm{Cos\,v.}z = -dz\,\mathrm{Cos}z$. Es ist demnach z. B. $d(\mathrm{Sin}^m x) = m\,\mathrm{Sin}^m x\,dx\,\mathrm{Cot}x$.; $d(\mathrm{Cos}\,mx) = -m\,dx\,\mathrm{Sin}\,mx$. $d(\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x) = dx\,\mathrm{Cos}^2 x - dx\,\mathrm{Sin}^2 x$. und umgekehrt.

II. *Von dem Differenziale der Kreisbögen.*

Dieses wird durch die Absonderung der *dz* in den 8 vorhergehenden Formeln leicht hergeleitet.

Heifst nun jede trigonometrische Funktion *x*, so wird ihr Differenziale *dx*, folglich aus vorigen Formeln.

1) $arc\ sin\ x = \int dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 2) $arc\ cos\ x = \int -dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

3) $arc\ tgx = \int dx(1+x^2)^{-1}$ 4) $arc\ cotgx = \int -dx(1+x^2)^{-1}$

5) $arc\ secx = \int x^{-1}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ 6) $arc\ cosecx = \int -x^{-1}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$

7) $arc\ sin\ v\ x = \int x^{-1}dx(2x^{-1}-1)^{-\frac{1}{2}}$ 8) $ar.cos\ v\ x = \int -dx(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

Beyspiele zur Uebung.

$d[\frac{1}{2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}arc\ sin\ x] = dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$; $d[\frac{1}{2}arc.cos(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}] = xdx(2x^{-1}-1)^{\frac{1}{2}}$

$d(x^m arc\ sin\ x) = mx^{m-1}dx\ sin\ x + x^m dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$d\ arc.\ tg.\ (b^2+x^2) = \frac{2xdx}{1+b^4+2b^2+x^4}$

Mit Hilfe der Kreisbögen und der logarithm: Tafeln von Hr. *Vega* læfst sich bequem einige Differenzialgrofsen auflösen.

z.B. in $\int \frac{a^2dx}{a^2+x^2} = \mathrm{Const} + a.\ l\,arc\ tang\ \frac{x}{a}$. Setzt man hier Const=0, $a = 13{,}09$ Schuhen, und $x = 19{,}64$ Schuhen, so erhælt man

$\int \frac{a^2dx}{a^2+x^2} = 12{,}866308355$ Schuhen sehr genau.

III. *Von der Methode die Kreisbögen durch Sinuse oder Tangenten und diese durch jene zu bestimmen.*

Setzet man den Bogen=z und sucht seines Differenzials zwey Werthe aus n° II. und vermittelst der Coefficienten A,B,C,D....... so bekommt man für den Sinus x.

1) $z = x + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7} + \ldots\ldots$ und durch die umgekehrte Methode der Reihen.

$2) x = z - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{3} + \frac{1}{2.3.4} \cdot \frac{z^5}{5} - \frac{1}{2.3\ 4.5.6} \cdot \frac{z^7}{7} + \ldots\ldots$

Ist $z = arc\ tang\ x$ so wird. $3) z = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots\ldots$ und

$4) x = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{3.5} \cdot z^5 + \frac{17}{3.3.5.7} \cdot z^7 + \ldots$

Ist z=arc 30°, so wird $x = \frac{1}{2}$ und arc $30° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{3}{2.4\ 5.2^5} + \frac{3\ 5}{2.4.6\ 7.2^7} + \ldots$

Entwickelt man 14 Glieder dieser Reihe; so wird *arc* 30°=0,523598775б. *arc* 180°=3,1415926536. also wie oben 1 : π=1 : 3 1415926536.

1. *Exem.* Den Sinus und Cosin z.B. von 65° zu berechnen.

Es ist 360°: 65°=2π : z und z=1,1344640 daraus x=Sin 65°=0,9063086. Die Logarithmen davon werden wie gewöhnlich gefunden.

Vermittelst der obenangeführten Formeln werden die andern trigonometrischen Linien leicht aus dem Sinus und Cosinus bestimmt.

Hat der Bogen nebst Graden und Minuten, auch noch Sekunden, so wird sein Logarithme aus dem vorhergehenden auch leicht bestimmt, und umgekehrt.

§ 5. *Von der Auflösung der rechtwinklichten Dreyecke.*

Dazu dienen die zwey Sætze. 1) Die Seiten verhalten sich wie die Sinusen der gegenüberstehenden Winkel. 2) Setzt man die Höhe des Dreyecks *a*; die Grundlinie *b*, oder die zwey *Katheten a* und *b*, die *Hypothenuse h*; den spitzen Winkel an der Grundlinie *m* und den ihm gegenüber stehenden *n*, so hat man

$h^2 = a^2 + b^2$; $1 = Sin^2 m + cos^2 n$; $Sec^2 m = 1 + tg^2 m = \frac{1}{cos^2 m}$.

Daraus fliesen 15 Formeln

$1) a = h \sin m = b \operatorname{tg} m = \sqrt{(h+b)(h-b)}$. $2) b = h \cos m = a \cot m = \sqrt{(h+a)(h-a)}$.

$3) h = \frac{b}{\cos m} = \frac{a}{\sin m} = b\sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)}$ $4) \sin m = \frac{a}{h} = \cos n$.

$5) \cos m = \frac{b}{h} = \sin n$; $6) \operatorname{tg} m = \frac{a}{b} = \cot n$.

Exempel. Ist z.B. *a*=752 Klaftern, *b*=439, so wird aus n° 3 durch die drey Methoden und mittelst der Dekadischen Ergænzung *h*=870,76 Klaftern.

§ 6. *Von Auflösung der schiefwinklichten Dreyecke.*

Nehmen wir für alle Fælle ein Dreyeck A,B,C an, dessen die Grundlinie *A B* und die Winkel *A,B,C*; und bezeichnen die den Winkeln *A*, B,*C* gegenüber stehende Seiten, durch die kleine Buchstaben *a,b,c* so hat man

I. *Fall.* Wenn *c,A* und *B* gegeben sind $a = \frac{c\ Sin\ A}{Sin\ C}$; $b = \frac{c\ Sin\ B}{Sin\ C}$

II. *Fall.* Wenn *b,c* und *C* gegeben sind $Sin\ B = \frac{b\ Sin\ C}{c}$

(Vorausgesetzt dass $c > b$).

III. *Fall.* Ist $c < b$; die Gattung von *C* und die Grösse von B bekannt; so ist.

$a = c\ Cos\ B \pm \sqrt{b^2 c^2 Sin^2 B}$. (Das Zeichen — dient für den stumpfen Winkel).

 IV.

IV. Fall. Sind b,c und A bekannt, so ist $a=\sqrt{(b^2+c^2 \mp 2bc \operatorname{Cos} A)}$.

oder $a=\frac{b \backsim c}{\operatorname{Cos} a}$.

und $\operatorname{tang} B=\frac{\operatorname{tg} A}{\frac{c}{b \cos A}-1}$ also hier schon das Verhæltnifs der Seiten hinlænglich.

oder auch $b+c : b-c=\operatorname{tg}\frac{B+c}{2} : \operatorname{tg}\frac{B-c}{2}$

V. *Fall.* Sind a,b.c gegeben, so hat man.

1) $\operatorname{Cos} A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ und bequemer fur die Rechnung.

$\operatorname{Cos} A=\frac{(b+c+a)(b+c-a)-1}{2bc}$

2) $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2}-a}{bc}}$ und letzen wir den halben Umfang des Dreyecks S, so ist 3) $\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A=\frac{\sqrt{(S-b)(S-c)}}{bc}$.

VI. Wollte man in diesem Fall die Flæche des Dreyecks haben, so wære sie $f=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

VII. Sind hier die zwey Segmente x und y, so ist $x \pm y=\frac{(b+a)(b \backsim a)}{c}$

Die Hælfte diefes Werths zur Helfte der Grundlinie addirt, giebt den grösseren Abschnitt: und die Differenz der beiden Helften den kleineren.

§ 7. *Von den Differenzial Analogien der geradelinichten Dreyecke; nebst Anwendung.*

Behalten wir immer das nemliche Dreyeck ABC und betrachten bei ihm zwey Dinge.

I. *Fall: c und A bestændig* und die vier übrigen *verænderlich*, so hat man für den unendlich kleinen Wachstum.

$db : dB=a : \operatorname{Sin} C$, 2) $da : dB=a : \operatorname{tg} C$; 3) $db : da=r : \operatorname{Cos} C$.

In einem rechtwinklichten Dreyeck wære also $da : dm=h : \operatorname{Cos} m$.

Anwendung. Um den kleinsten Fehler in der Mefsung einer Höhe zu begehen, mufs sich der Beobachter mit seinem Instrument in einer ihr gleichen Entfernung stellen.

Exem. Ist $dB=20'$; $B=45°$; $c=83$ Schuh; so wird $db=1{,}4486$ Schuh.

II. *Fall. a und A beftændig.* 1) $dc : dC=c : \operatorname{tang} C$ 2) $dc : db=\operatorname{Cos} C : \operatorname{Cos} B$.

III. *Fall. b und c beftændig.* 1) $dB : dC=\operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C$; 2) $da : dB=a : \operatorname{Cotg} C$. 3). $dA : dB=a : c.\operatorname{Cos} B$ 4). $dA : da=1 : b. \sin C$.

IV. *Ist nur c beftændig* und dA und dB bekannt, so hat man z. B.

$db=\frac{a dB+b \cos C.\, dA.}{\sin C.}$

V. Wenn in einem rechtwinklichten Dreyeck h—b sehr klein ist, so ist

1) $h-b=\frac{\frac{1}{2}a^2}{h}$

2) Ist der Bogen a sehr klein, so ist $\sin v\, a=\frac{a^2}{2}=\sec a-1.=\operatorname{tg} a \operatorname{tg}\frac{1}{2}a$.

§ 8. *Von dem Centriren der Winkel*

I. Behalten wir immer dasselbe Dreyeck A B C dessen Scheitel z. B. in der Mitte eines Thurms, wo man das Instrument nicht stellen kann, sich befindet; und man erhwæhlt einen Stand innerhalb des Dreyecks in E; so hat man $C-E=dE$; und $-dE=\frac{(dAE\cot A}{AE}+\frac{BE\cos B)R''}{BE}$

II. Werden die Senkrechten von E auf b und a gemessen so wird $dE=A+B$. Es wird hier $-dA$, wenn er innerhalb des Dreyecks ist: und $dA=o$ wenn das Instrument auf b steht.
Stellt man das Instrument so das $dAE=o$; so bekommt die Formel n° 1. nur ein Glied.

§ 9. *Einleitung in die praktische Geometrie.*
(Die Ergænzung davon, næmlich Vermessung im Grossen, folgt in der Matematischen Geographie.)

I. Eine gerade Linie zwischen zwey gegebenen Punkten, oder aus der Mitte anszustecken, zu verlængern. Eine Standlinie zu wæhlen.

II. Vermittelst der Kette und Nægel einem auf dem Felde gegebenen Winkel oder Dreyecke ein gleiches auszustecken.

III. Zugængige oder unzugængige Winkel und solche gerade Linien zu halbiren. Desgleichen mit den letzten eine Gleichlaufende oder eine Senkrechte von was immer von einem Punkte auszustecken.
Eine gerade Linie durch einen Wald zu verlængern u. s. w.

IV. Einem auf der Erde gegebenen Dreyeck ein æhnliches zu zeichnen 1) vermittelst der Kette und Nægel 2) vermittelst des Winkelmessers mit oder ohne Eintheilung. 3) vermittelst der Bussole mit oder ohne Eintheilung. 4) Vermittelst des Messtisches durch vor oder rückwarts Einschneiden. 5) Vermittelst des mit einer Bussole versehenen Messtisches: und umgekehrt Mit eben diesen Instrumenten die vorhergehenden Aufgaben aufzulösen

V. Eine auf der Erde gegebene Figur aufzunehmen.
Vermittelst der im n° IV funf Methoden.

VI. Von Festungs, Wirtschafts und Feldplænen: und Zeichnung der Gegenstænden.

VII. Vermittelst des Winkelmessers zugængige und unzugængigæ Höhen zu messen.

VIII. Den Unterschied der Höhen mehrerer gegebenen Punkte einer Linie oder einer Gegend, bestimmen. 1 *Methode* für kleine Entfernungen. Die Ergænzung vom *Nivelliren* folgt in der Math. Geographie.

§ 10. *Anwendung der Trigonometrie auf die praktische Geometrie.*

I. Unzugængige oder sonst unbekannte Grössen bei einem auf der Erde gegebenen Dreyeck, mittelst drey ihn bestimmenden gemessener Grössen durch Rechnung zu bestimmen. (§. 6.)

II. Drey Methoden das trigonometrische Netz der Dreyecke anzufangen und fortzusetzen. Zur dritten Methode gehört die.
Aufgabe. Die Lage von drey Punkten auf der Erde ist bekannt nebst den zwey Winkeln unter welchen man diese drey Punkten aus einem beliebigen vierten Punkt sichet; man soll diesen letzten Punkt bestimmen.
Bilden die drey Punkte ein Dreyeck ABC und man sichet sie unter den Winkeln m und n aus dem Punkte D, so bekommt man vermittelst der Auflösung des Hr. de *Lambre* $\tan \alpha=\frac{b\sin n}{a\sin m}$ und
$\tan\frac{1}{2}(CAD-CBD)=\tan\frac{1}{2}(CAD+CBD)\cot.(45^\circ+\alpha)$.
Giebt das Resultat das erste Glied dieser Gleychung negativ, so schreibt man dafür $+\tan\frac{1}{2}(CBD-CAD)$.

III. Von der Methode die berechneten Dreyecke dem Messtische aufzutragen, und von der Berechnung aller Punkte des Netzes in Ansehung einer Mittags-linie.

Erste Methode die letzte zu bestimmen. (Eine genauere Methode kommt in der Math. Geogr. vor)

IV. Von der Methode die aufgetragenen Figuren auszuarbeiten und in eine Karte zu bringen, und den Grund einer Karte für allzeit unabænderlich zu erhalten.

V. Von dem trigonometrischen Winkelmefser. Berichtigung und Gebrauch seiner Theile. Vernier mit dem Micrometr. Luftblase. *Fernrohr*, Kreuzfaden.

§ 11. *Von einigen besondern neuen Vortheilen bei den trigonometrischen Tafeln.*

I. Sehr schnell abnehmende Reihen für die Logarithmen der naturlichen Zahlen.

Setzt man $\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+dn}{n}$ daraus $x=\frac{dn}{2n+dn}$ so bekomt man aus Arith. §. 10 n° VIII.

$$(A)\ d\log n\ 2=M\left[\frac{dn}{2n+dn}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{dn}{2n+dn}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{dn}{2n+dn}\right)^5+\dots\right] \text{ und}$$

$$(B)-d\log n=2M\left[\frac{dn}{2n-dn}-\tfrac{1}{3}\left(\frac{dn}{2n-dn}\right)^3-\tfrac{1}{5}\left(\frac{dn}{2n-dn}\right)^5-\dots\right]$$

z. B. für *log nat*, setzte man $n=1$; $dn=1$. $\log 4=\log 2^2=2\log 2$.

für log 5 hat man $d\log h=2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\dots\right)$

Nimmt man den Modul M mit 25 decimal Stellen, und verfertigt damit eine Tafel fur 2M, 3M,..9M; und $\frac{1}{M}$, $\frac{2}{M}$, .. $\frac{9}{M}$; so geschieht die Verwandlung der gemeinen Logar. in hyperbolische und umgekehrt, nur durch Addition.

II. Neue Methode die trigonometrischen Functionen in Logarithmen zu berechnen.

1) zB. cos 26°=0, 898794=1—0,101206. Setzt man n=1 und dn=0,101206 so hat man aus (B)

$d\log n=d\log(1-dn)=-0{,}04633993=9{,}9536602.=\log \mathrm{Cos}\ 26°$

2) Hat man eine Tafel der Bögen von 1°, 2°, 3° . . . 90° in Theilen des R=1 und mit 27 Decimal Cyfern, so findet man darnach den Logarithmen von jedem Bogen. Dazu dient die Formel $R''=\frac{1}{arc\ 1''}$

III. Anwendung der Formeln (A) und (B) zur Ausziehung der Wurzeln.

z. B. $\sqrt[5]{161900}=11{,}011573\ 190340$. Dazu mufs man eine Tafel der Primzahlen mit ihren Logar. für 20 Decim. haben.

Daraus fænde man auch z. B. log 1″=4, 68557 48668 23540 51953.

IV. Allgemeine Methode für eine leichte Anwendung der Logarithmen. auf die Addition und Subtraction in allen Fællen.

1. Ift die Gleychung $x=ab\left(1+\frac{cd}{ab}\right)$; so setze man $\frac{cd}{ab}=\mathrm{tang}^2 A$ so wird

$$1+tang^2 A=Sec^2 A=\frac{1}{\mathrm{Cos}^2 A}=1+\frac{cd}{ab} \text{ und } x^2=\frac{ab}{\mathrm{Cos}^2 A}.$$

2.)

2) Wære die Gleychung $y = ab \pm cd \pm ef$, so setze man $ab \pm cd = x$ also $y = x \pm ef$ und verfahre wie oben.

3) Ist $x = \sqrt{(p^2+q^2)}$ gegeben, so setze man $x = p\sqrt{(1+\frac{q^2}{p^2})}$ und $tang\,A = \frac{q}{p}$ so hat man $x = \frac{p}{\operatorname{Cos} A}$

V. Auflösung der Gleychungen des zweyten und dritten Grades durch die Trigonometrie.

1) Es ist $x^2+px=q$, daraus $x = -\frac{1}{2}p(1-\sqrt{1+\frac{4q}{p^2}})$ setzt man $tang\,A = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ so hat man $x = tang\,\frac{1}{2}A\sqrt{q}$. für das negative Radical ist $x = -cot\,\frac{1}{2}A\sqrt{q}$.

z.B. $x^2 + \frac{7}{44}x = \frac{1695}{12716}$ daraus bekommt man $x = \frac{5}{17}$ und $-x = \frac{5}{2,20649}$,

2. Für die Gleichung des dritten Grades ist $x^3+px+q=0$

Verwandelt man diese Gleichung gehörig, und setzt

$tang\,B = \frac{p}{3q}\,2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, und $tang\,A = \sqrt[3]{}\ tang\,\frac{1}{2}B$, so bekommt man

$x = -cot\,2\,A.2\sqrt{\frac{1}{3}p}$.

Ein mehreres davon siehe in dem vortreflichen *Traité de Trigonométrie rectiligne & sphérique par* Cagnoli. Paris 1786. 4[te]

DIE SPHÆRISCHE TRIGONOMETRIE.

§ 12. *Eigenschaften der sphærischen Dreyecke.*

Beschreiben wir auf der Kugel Oberflæche ein sphærisches Dreyeck ABC und setzen die den Winkeln A, B, C entgegengesetzte Seiten *a, b, c* so ist.

I. Jeder Bogen *a, b, c,* das Maſs des Winkels am Mittelpunkte, und jeder Winkel z. B. A ist das Maſs oder der Neigungs Winkel der Ebenen der Bogen *b c.*

II. Jeder Winkel A, B, C, und jede Seite a, b, c ist kleiner als 180°.

III. Jede Seite *a* ist kleiner als *b+c.*

IV. Was sich von den Winkeln der dreyseitingen Pyramide am Mittelpunkt sagen læſst, das gilt auch von den Winkeln des sphærischen Dreyecks.

V. $a+b+c > 90$, und $< 4R$. Hingeben $A+B+C > 2R$ und $< 6R$.

VI. Nennen wir wie oben die zwey Katheten eines rechtwinklichten sphærischen Dreyecks *a*, *b*, seine Hypothenuse *h*, und die beiden andern Winkeln *m* unten, *n* oben: so wird 1) $m = 90°$ wenn $a = 90°$ und b das Maſs von n.

2) Kömmt jeder Winkel dem rechten næher als seine entgegengesetzte Kathete, und 3) *m* und *a*, n und b von derselben Art.

VII.) h næhert sich mehr 1R als *a* und *b* 2) Ist $h = 90°$ wenn z. B. *a* oder $m = 90°$ 3°) h $< 90°$; je nachdem *a* und *b* oder *m* und *n* oder *a* und m von derselben oder von verschiedener Art sind.

VIII.

VIII. Fælle, in denen zwey Kugel Dreyecke in aller Rüksicht gleich sind.
IX Einen ergænzenden Kugel Dreyeck zu verzeichnen
X. In jedem sphærischen Dreyeck verhalten sich die Sinufse der Seiten, wie die Sinufse der ihnen entgegengesetzen Winkel.

§ 13. *Von der Auflösung der rechtwinklichten Dreyecke.*

I. Dazu gehören die drey Sætze.

1) $1 : \text{Sin } m = \text{Sin } h : \text{Sin } a$ und daraus durch das ergænzende Dreyeck. $1 : \text{Sin } n = \text{Cos } a : \text{Cos } m$.

2) $1 : \text{Sin } b = \text{tg } m : \text{tg } a$, daraus $1 : \cos h = \text{tg } n : \text{cotg } m$; und durch das ergænzende Dreyeck.

3) $1 : \text{Cos } m = \cot b : \cot h$, oder $= \text{tg} h : \text{tg} b$. Daraus fliefsen die 8 brauchbare Formeln.

1) $\text{Sin } a = \text{Sin } h \text{ Sin } m$. 2) $\text{Cos } m = \text{Cos } a \text{ Sin } n$. 3) $\text{tg} a = \text{tg} m \text{ Sin } b$.
4) $\text{Cot } m = \cos h . \text{ tg } n$. 5) $\text{tg } b = \text{tg } h \cos m$. 6) $\cot b = \cot h : \cos m$.
7) $\text{tg } n = \cot m : \cos h$ 8) $\text{Cos } h = \text{Cos } a \text{ Cos } b$.

Sind die Bögen, unendlich klein, so verwandeln sich die Sinuse und Tangenten der Seiten in Bogen: und die Cosinuse in 1; so dafs die erfte Proportion sich in $1 : \text{Sin } m = h : a$ verwandelt, wie in dem geradelinichten Dreyecke, aber nicht umgekehrt. Solche Vergleichungen lafsen sich auch in anderen Fællen anftellen.

II. Haben solche zwey rechtwinklichte Kugel-Dreyecke eine gemeinschaftliche Seite: oder fællt man in einem schiefwinklichten sphærischen Dreyeck A, B, C eine Senkrechte CD auf die Grundlinie AB, und setzt die zwey Winkel, die sie am Scheitel macht o links n rechts, so hat man

1) $\text{Sin A} : \text{Sin B} = \text{Sin a} : \text{Sin b}$. 2) $\text{tg AD} : \text{tg DB} = \text{tg} o : \text{tg} n$
3) $\text{Sin AD} : \sin \text{DB} = \text{tg B} : \text{tg A}$ 4) $\text{Cos } AD : \text{Cos } DB = \text{Cos } b \text{ Cos } a$.
5) $\text{Cos } A : \text{Cos B} = \text{Sin } o : \text{Sin } n$. 6) $\text{tg } b : \text{tg } a = \text{Cos } n : \text{Cos } o$.

Es lafsen sich dergleichen Proportionen auch fur solche Dreyecke herleiten, die einen gemeinschaftlichen Winkel oder Hypothenuse haben.

§ 14. *Von der Auflösung der schiefwinklichten Dreyecke.*

Nennen wir so, wie in der ebenen Trigonometrie, das Sphærische Dreyeck ABC, die gegenüber ftehende Seiten a, b, c, so hat man im

I. *Fall:* wenn a, b, c gegeben sind, $\text{Cos A} = \dfrac{\text{Cos a} - \text{Cos b Cos c}}{\text{Sin b Sin c}}$, und umgekehrt.

II. *Fall.* sind A, B, C gegeben, so ist $\text{Cos } c = \dfrac{\text{Cos } C + \text{Cos } A \text{ Cos B}}{\text{Sin } A \text{ Sin B}}$.
Für einen sehr kleinen Bogen ift $\text{Cos } c = 1$.
Und daraus $\text{Cos } c = \text{Sin } A \text{ Sin B} - \text{Cos } A \text{ Cos B}$.

III. *Fall.* Sind b, c und A gegeben, so ift $\text{Cos a} = \text{Cos A Sin b Sin c} + \text{Cos b Cos c}$.

und $\text{tang B} = \dfrac{\text{Sin } A}{\text{Sin } c \cot b - \text{Cos } c \text{ Cos } A}$

IV. *Fall.* Sind c, A und B gegeben, so ift $\text{tang } b = \dfrac{\text{Sin } c}{\text{Sin A cot B} + \text{Cos A Cos } c}$

und $\text{Cos C} = \text{Cos } c \text{ Sin A Sin B} - \text{Cos A Cos B}$.

V. *Fall.*

V. *Fall.* Sind b, c und B gegeben, so ist 1°) Sin Sin $C = \frac{\text{Sin}\, c\, \text{Sin}\, B,}{\text{Sin}\, b.}$

Die Zweydeutigkeit wegen des Winkels C verschwindet bey der Beobachtung der

Regel. Ist die Summe der beiden gegebenen Seiten grösser, kleiner oder gleich zu 180°, so sind auch die gegenüber stehende Winkel $\gtreqless$ 180°

2°). Fællt man von A eine Senkrechte auf a, die den Winkel A in die beiden n unten o oben theilet; so ist $\cot g n = \cos c\, \text{tg} B$.

$\cos o = \cos n \frac{\text{tg} c}{\text{tg} b}$; und endlich $n + o = A$.

Das Zeichen + ist für die Senkrechte innerhalb und — für jene ausserhalb des Dreyecks: oder + für einerley Gattung der Winkel B und C, und — wenn sie verschieden sind.

Wære auch die Gattung des Winkels C unbekannt, so fænde man jene des Winkels *A* vermittelst des *Boscovischen* Regel: ist die Summe der Segmente > 180°; so nehme man den Unterschied, ist sie negativ, so nehme man die Summe. (Fehler im la *Caille*.)

3). Sætzen wir die zwey Segmente der Seite a; x unten y oben. So hat man $\text{tg} x = \text{tg}\, c\, \text{Cos} B$; $\text{Cos} y = \text{Cos} x. \frac{\text{Cos} b}{\text{Cos}\, c}$ und $x \pm y = a$

VI. *Fall.* Sind *B*. *C* und b gegeben, so hat man 1°) $\text{Sin}\, c = \text{Sin}\, b \frac{\text{Sin} B}{\text{Sin} C}$

2°). $\text{tg} y = \text{tg} b \text{Cos}\, c$; $\text{Sin} x = \text{Sin} y. \frac{\text{tg} C}{\text{tg} B}$; $y \pm x = a$

3°). $\text{Cot}\, o = \text{Cos} b. \text{tg} C$; $\text{Cot}\, n = o\, \text{Sin}\, o \frac{\text{Cos} B}{\text{Cos} C}$ und $o \pm n = A$

VII. Diese Aufgaben vermittelst des Zirkels und des Lineals aufzulösen.

VIII. Die Oberflæche eines sphærischen Dreyecks $f = (A + B + C - 180) R$ in Kwadrat Graden.

Indem $R° = 57,29578$. Setzt man $A + B + C - 180 = D$ und R' im andern Mass; so hat man $R° : R' = D° : D'$ also auch die næmliche Oberflœche in einem jeden andern Mass.

§. 15. *Von den Differenzialformeln für Kugeldreyecke.*

I. *Fall. Unveränderlich A und b.*

Verhæltnisse der Diff: der übrigen Seiten 1) da : dc ; und $da = + \text{Cos}\, B\, dc$
- - - - - - Winkel 2). dB : dC und $dB = \text{Cos}\, a\, dC$

3) Die aneinander anliegen dC : da und $dC = \frac{\text{tang} B\, da}{\text{Sin}\, a}$

4) Die einander gegenüb. dC : dc ; und $dC = \frac{\text{Sin} B}{\text{Sin} a}.\, dc$

 II. *Fall.*

II. *Fall. Unveränd.* A *und* a. 1) dC : dc ; und $dc = \frac{\tang c}{\tang C}.DC.$

2) dc : db ; und $dc = \frac{-\text{Cos}C}{\text{Cos}B}$ db. 3) dB : dC ; und $dB = \frac{-\text{Cos}b}{\text{Cos}c}$. dC.

4) dc : dB ; und $dc = -\frac{\text{Cot}C.\text{Sin}c}{\text{Cos}b}$. dB.

III. *Fall. Unveränd.* *b*, *c* : 1) dA : da ; und $dA = \frac{da}{\text{Sin}C.\text{Sin}b}$.

2) da: dB ; und $da = -\tang C.\text{Sin}a.$ dB.

3) dA : dB ; und $dA = -\frac{\text{Sin}a}{\text{Co}\ C.\text{Sin}b}$ dB.

4) dC : dB ; und $\frac{dC}{\text{tg}C} = \frac{dB}{\text{tg}B}$

IV. *Fall. Unver.* *A*, B, 1) da: db ; und $\cot b.db = \cot a.da$

2) dc : da ; und $dc = \frac{\text{Sin}c\,da}{\text{Cos}b\text{Sin}a}$

3) dC : dc ; und $dC = \text{Sin}A\text{Sin}b\,dc$.

4) dC : da ; und $DC = \frac{\text{Sin}C\text{Sin}b}{\text{Cos}b}$. da.

V. Für ein rechwinklichtes Dreyeck ist.

1). $\text{Sin}(h-a) = \frac{1}{2}\text{Cot}c\text{Sin}b^2 = \text{Sin}2c\left(\frac{1}{2}\text{Sin}B\right)^2$ und $h-a = \frac{1}{2}\frac{\text{Sin}c^2.\text{Cos}c}{\text{Sin}c}.B^2$

VI, Der Nutzen dieser Differenzial Analogien bestehet hauptsæchlich darinn.
1). Dafs sie unmittelbare und die einfachste Auflösungen von solchen Aufgaben darbieten, in denen die Dreyecke zwey gemeinschaftliche Theile haben.
2). Dafs sie die Gröfse der Fehler, die man bey Beobachtungen begehet, bestimmen.
Sie sind also besonders in der Astronomie anwendbar. Weitere Ausführung davon findet man in des H. *Cagnoli* Trigonometrie.

§. 16. *Anwendung der Sphærischen Trigonometrie.*

1. *Aufgabe.* Die Geogr. Lange von Warschau ist $38°\ 45'$ und die Breite $52°\ 14'$
- - - - - - - Paris $20°$ " - - $40°\ 50'\ 10''$

Daraus findet man den kürzesten Abstand dieser zweyen Örter $12°\ 24'$ oder 86 deutsche Meilen.

2. *Aufgabe.* Ist der Winkel B auf einer gegen den Horizont schiefen Ebene von $85°\ 11$, und die beiden Winkel die seine Schenkel mit der lotrechten Linie machen $n = 78°\ 45'$; $o = 75°\ 22'$, so ist der auf den Horizont reducirte Winkel $b = 85°\ 48'$
Die Ergænzung der Anwendungen folgt in der Astronomie.
(G. S. *Klügel-s* Analytische Trigonometrie).

Die

DIE HÖHERE GEOMETRIE.

und ins besondere

Von den Kegelschnitten.

§. 1. *Einleitung.*

I. *Mann* nimmt sich hier vor diejenigen Aufgaben aufzulösen, die allen krummen Linien gemein sind, als da sind 1) Die Gleichung einer Krummen zu finden und sie zu verzeichnen. Wie auch Polargleichungen und Gleychungen für die Durchmesser.
2). Ausdrücke und Zeichnung der Subtangenten, Tangenten, Subnormalen, Normalen und der Halbmesser. 3). Rektification der Krummen. 4) Halbmesser der Krümmung 5). Oberflæche. 6). Körperlicher Inhalt. 7). Anwendung der Teorie des *Gröſstsn* und *Kleinſten*. 8). Die umgekehrte Methode der Tangenten. 9). Algemeiner Blick und Gleichungen für Krumme versehiedener Art, und ihre Eintheilung.

II. Beyſpiel, wie man eine Gleychung für eine krumme Linie sucht, erlæutert durch die Gleychung für einen Kreis $yy - 2cy + cc + 2q(bc - cx - by + xy) + xx - 2bx + bb - aa = 0$. (wen man nemlich hier a den Halbmeſser, b und c die Entfernungen des Mittelpunktes von zwey Geraden die mit einander einen Winkel machen, deren Sinus p und Cosinus q sind, setzt). Daraus wird für den einfachsten Fall die Gleichung für den Kreis $yy + xx - 2ax = 0$; oder $y^2 = 2ax - xx$ oder $y^2 = aa - xx$, wenn x vom Mittelpunkt gezæhlt wird, hergeleitet: (wie in der Elementar Geom.) Daraus wird noch $y = \pm\sqrt{2ax - xx}$ und folgt die Verzeichnung eines Kreises, die unmöglich sein würde, wenn man $x > 2a$ nehme. (Beyſpiel für $a = 5$) Hievon werden auch andere Eigenschaften hergeleitet z.B. für den Kreis, daſs die Axe nur zwey gemeinschaftliche Punkte mit dem Kreise hat: daſs seine

$$\text{Subt,g} = \frac{2ax - xx}{a - x}, \text{oder} = \frac{aa - xx}{x} \text{ für x vom Mittelpunkt gerechnet.}$$

Daſs seine Normallinie $= a$: daſs die gröſzte $y = a$; u. f.

III. Durch die Untersuchung des Werths z.B. für die Subtang. des Kreises kann man die Theorie der Infinitesimal Rechnung erlæutern. Es werden hier in den Gleychungen die Differenziale der Verænderliichen, um der Aufhebung der Fehler willen, weggelaſsen. (Siehe *Carnot* Reflexions sur la Metaphysique du Calcul Infinitésimal: übersetzt mit Zusæzen von Fr. *Hauff.*

IV. Die Eigenschaften der Krummen Linien werden mittelst der Analysis des Endlichen und Unendlichen entwickelt. Um den Werth jeder derselben beurtheilen zu können, werden wir die næmlichen Resultate durch diese zwey Methoden zugleich bestimmen.

V. Man kann die algemeine Gleychung für die Kegelschnitte, entweder, aus ihrer Erklærung, oder aus den möglichen Schnitten eines geraden, oder allgemeiner eines schiefen Kegels, oder aus den Gleychungen des zweyten Grades von zwey Unbekannten, oder endlich aus einer allgemeinen Gleychung für alle Krumme Linien auf einer ebenen Flæche herausbringen. Sie ist die folgende.

$$y^2 = px \mp \frac{pxx.}{a}$$

Die Ellipse.

§ 2. I. Die Gleychung für die Ellipse $y^2 = px \mp \frac{pxx}{a}$. Setzt man die grössere Axe *a* die kleinere *b*, so wird diese Gleychung $y^2 = \frac{ybb}{aa}(ax \mp xx)$ oder für x vom Mittelpukt, $y^2 = \frac{bb}{aa}(\frac{aa}{4} \mp xx)$. und a: b : p.

Das unterste Zeichen ist für die Hyperbole.

II. Die Grösste Ordinate ist $y = \frac{b}{2}$ (Anwendung der Theorie de Maximis & Minimis).

III. Zeichnet man einen Halbkreis auf der grösseren Axe, und verlængert *y*, so dass daraus z eine Ordinate des Halbkreises wird, so ist $z : y = a : b$. (Daraus eine neue Verzeichnung der Ellipse)

IV. Zeichnet man einen Halbkreis auf der kleinen Axe, so sind x und y Cosinus und Sinus für z° und fur die Halbmesser *a* und *b*. (Daraus eine andere Verzeichnung).

V, Setzt man den Ausschnitt der Ellipse s und jenen des Kreises S, so ist $s : S = b : a$ (für die wahre und mitlere Anomalie).

V. Die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie ihre zugehörige Rechtecke.

§. 3. I. Setzt man die *Excentricitæt e*, so ist der *Fahrstrahl* $r = a \pm \frac{ex}{a} = 1 \pm ex$

Setzt man den einen Fahrstrahl *m* und den andern *n* so hat man $m \pm n = a$. (Daraus eine neue Zeichnung). Es ist noch $r = a - x + \frac{e(a+x)}{a}$. (für die wahre Anomalie.)

II. Die *Normallinie* $= b\sqrt{1 - xx + bbxx}$. Die *Subnormale* $= \frac{bb}{aa}x$. (Für die Figur der Erde). Daraus eine Zeichnung der Tangente oder

III. *Subtangens* $= \frac{aa \mp xx}{4}$, *Subtg* $+ x = \frac{aa}{x}$.

Eigenschaften der Elllipse in Rucksicht auf ihre Durchmesser.

IV. Uberhaupt sind fur jede krumme Linie.

1). *Subtg* $= \frac{ydx}{dy}$; 2) *Subn.* $= \frac{ydy}{dx}$ 3) *Tang.* $= \frac{yds}{dy}$

4) *Norm* $= y\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx}$

V. Die Fahrstrahlen machen mit der Tangente bey ihrer Zusammenkunft gleiche Winkel: und die Gleichlaufenden zu denselben von den Brennpunkten bis an diese Tangente sind unter sich und zu der halben grossen Axe gleich.

§. 4. I. Die Gleychungen der Kegelschnitte *zu ihren Durchmessern* sind die næmlichen, wie für die senkrechten Axen. Für die Durchmesser *c* und *d* und den Parameter q ist c : d : q Die anderen Eigenschaften sind.

II. Das Kwadrat des Abschnits der einen Ordinate gleicht dem Rechtecke der zweyten Ordinate.

III. Setzt man *p* die Senkrechte vom Ende der *d* auf *c*, den Abschnitt, den sie macht x, und des Winkels zwischen *c* und *d* Sinus und Cosinus *m* und *n*, so ist $px = mn\,(aa - bb)$. (Für das Vorrücken der Nachtgleichen).

IV. $pd=ab$ das ist: die umgeschriebene Paralellogramme um die Ellipse sind gleich grofs. (für die Aberration).

V. Der Winkel am Mittelpuut zwischen den Halbmefsern, welche durch die Endpunkten der verlængerten Ordinaten gehen, ist $=90°$.

VI. $c^2+d^2=a^2+b^2$. oder die Summe der Quadrate von jeder Paar der zugehörigen Durchmelser, ist beftændig.

VII. Setzt man z für die Ordinate des Durchmefsers d so ist z^2: zugehör. Rechteck$=c^2 : d^2$.

§ 5. Die *Polar Gleichung.* $r=\frac{aa-ee}{a-e\cos u}$; u ist hier der Winkel der wahren Anomalie (zur Rechnung der Attraction).

§. 6. *Der Halbmefser der Krümmung* ist für jede Krumme Linie

$$=\varsigma\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}=\frac{n^2dx^2}{y^3ddy}$$

Für die Kegel Schnitte ist $\varrho=\frac{n^3}{\frac{1}{4}p^2}$ (n ist die Normale).

Für $x=0$; ist hier $n=\frac{1}{2}p$. (Durch zwey Methoden).

§. 7. *Von dem Inhalte der durch krumme Linien begrænzten Flæchen und der Ellipse ins besondere.*

I. Jede Ebene Flæche $f=Sydx+C$.

II. Setzt man in der Ellipse für die kleine Axe$=2b$ und die grofse$=2$ also $y=b(1-x)^{\frac{1}{2}}$, so bekommt man wie im Kreise $f=b\,Sdx\ (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ $=b(x-\frac{1x^3}{23}\frac{1}{2.4}.\frac{x^5}{5}\frac{1.3}{2.4.6}.\frac{x^7}{7}.\frac{1.3.5}{7.4\ 6,8}\frac{x^9}{9}-...)$ oder setzt, man die halbe grofse Axe a,

so ist $f=\frac{b}{a}(ax-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3a^2}-\frac{1}{2.4}.\frac{x^5}{5a^3}-\frac{1.3}{2.4\ 6}\frac{x^7}{7a^5}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}.\frac{x^9}{9a^7}-..)$

III. Noch ein anderer Ausdruck für diese Flæche wære dieser $f=\pi ab$.

§ 8. *Von der Rectification der Krummen und der Ellipse ins besondere.*

I. Setzt man den Bogen einer Krummen z so ist $z=S(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}+C$.

II. In der Ellipse ist 1) $z=Sdx\left[\frac{1-(1-b^2)x^2}{1-x^2}\right]^{\frac{1}{2}}$, Setzt man die Excentricitæt $\sqrt{1-b^2}=e$ so ist 2) $z=Sdx\left[\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}\right]^{\frac{1}{2}}$ und vermöge der Binomialformel und der Methode, wie das verlangte Integrale durch ein fchon bekanntes zu beftimmen ist.

$$z=Sdx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-\frac{e^2}{2^3}-\frac{3e^4}{2^2.4^2}-\frac{3^2.5e^6}{2^2.4^2.6^2}-\frac{3^2\ 5^2.7e^3}{2^2.4^2 6^2 8^2}-....)$$

$$+e^2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2^2}+\frac{3.e^2}{2^2.4^2}+\frac{3^2.5e^4}{2^2.4^2.6^2}+\frac{3^2.5^2.7e^6}{2^2.4^2,6^2.8^2}+....)$$

Oder

Oder weil $x = \text{Sin } 45°$, also duch das Intergriren durch Kreisbogen.

$$Sdx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 45$$

$$z = 45\left(1 - \frac{e_2}{2^2} - \frac{3e^4}{2^2.4^2} - \frac{3^2.5e^6}{2^2.4^2.6^2} - \frac{3^2.5^2.7e^8}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \ldots\right) + \ldots$$

III. Ist $x = 1^{\frac{1}{2}}$ so wird $(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 0$ alſo für den halben Umfang der Ellipse p und des Kreises P iſt

$$p = P\left(1 - \frac{e^2}{2^2} - \frac{3e^4}{2^2.4^2} - \frac{3^2.5e^6}{2^2.4^2.6^2} - \frac{3^2.5^2.7e^8}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \ldots\right)$$ also kann man in der Ausübung für $p = a + b$ nehmen.

§ 9. *Von der Berechnung der Körperlichen Inhalte.*

I. Für jeden Körper iſt der Körperliche Inhalt $k = Sy^2dx$.

II. Der Abschnitt einer Ellipsoide $= \frac{\pi b^2}{a^2}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$

III. Für $x = a$ wird die halbe *Elipsoide* $= \frac{\pi b^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{\pi b^2 a}{6}$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi b^2 a}{4} = \frac{2}{3}$ des ihr umschriebenen Cylinders.

§ 10. *Von der Berechnung der Oberflæchen der durch die Flæchenumdrehung entſtandenen Körper.*

I. Allgemeine Formel; $F = S2\pi y(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}$

II. In der Ellipse iſt für die durch einen Bogen beschriebene Zone.

$$Z = \int \frac{2\pi b}{a}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(dx^2 + \frac{b^2x^2dx^2}{a^2(a^2-x^2)}\right)^{\frac{1}{2}} = S\frac{2\pi b dx}{a^2}[a^4-(a^2b^2)x^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Iſt nun $2a > 2b$, so iſt für die Zone der længlichen Ellipsoide.

$$Z = \pi bx\left(1 - \frac{e^2x^2}{a^4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi ba^2}{e}\text{arc Sin } \frac{ex}{a^2}$$

III. Für $x = a$ wird die Oberflæche der halben længlichen Ellipsoide

$F = \pi b(a^2-e^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi ba^2}{e}\text{arcſin}\frac{e}{a}$ und die Oberflæche der halben gedruckten Ellipsoide

$$F' = \pi b^2 + \frac{\pi ba^2}{e}\log\left[\frac{e}{a} + \left(\frac{e^2}{a^2} + \cdot\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

§ 11. *Von der Aehnlichkeit der Ellipsen und wie sie noch entſtehen können.*

I. Ellipsen sind æhnlich, wenn ihre Axen oder die Entfernungen der Brennpunkte von einander und von den Endpunkten ihrer Axen eine geom: Proportion ausmachen.

II. Ein schiefer Durchschnitt eines Cylinders iſt eine Ellipse: desgleichen

III. Die ortografische Projection eines Kreises.

Die Hyperbel.

§ 12. *Eigenschaften der Hyperbel.*

Diese hat sie mit der Ellipse gemein nur mit den entgegensetzten Zeichen.

§ 13. *Eigenschaften der Hyperbel in Rücksicht auf ihre Assymptoten.*

I. Die Senkrechte, welche die Assymptote bestimmt, sey s, so ist $s=\pm b$. (wenn b die halbe Axe ist.)

II. Setzt man $\sqrt{aa+bb}=m$, die Abscisse auf der Assymptote u und ihre Ordinate z so ist die Gleychung an den Assymptoten $m^2=uz$.

und $z=\frac{m^2}{x}$ oder $y=\frac{a^2}{x}$

und die Gleychung zu den Axen $yy=\frac{bbxx}{aa}-\frac{bb}{4.}$

§ 14. *Von der gleichseitigen Hyperbel.*

In der gleichseitigen Hyperbel ist $a=b$; also ist sie in Ansehung der Ungleichseitigen eben das, was der Kreis in Ansehung der Ellipse ist: jede zwey verwandte Durchmesser sind einander gleich, und umgekehrt. Es ist auch hier $z:y=a:b$....

§ 15. *Von den verwandten Hyperbeln.*

Es sind hier die Ordinaten zur Assymptote für dieselbe Abscisse einander gleich: und die verwandten Durchmesser verwechselt.
Ueberhaupt gehören in den Kegelschnitten die Eigenschaften der Axen, die nicht von den Brennpunkten abhængen, auch zu den verwandten Durchmessern.

§ 16. *Von dem Flæcheninhalte der Hyperbel.*

1) Sie ist $f=\frac{b}{a}Sdx(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{b}{a}[\frac{1}{2}x(x^2-a^2)^2+\frac{1}{2}a^2\log(\frac{a}{x+(x^2-a^2)})^{\frac{1}{2}}]$

2) Für die gleichseitige Hyperbel ist $a=b$, folglich $f=\frac{1}{2}x(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}$ $+\frac{1}{2}a^2\log(\frac{a}{x+(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}})$

3) In der gleichseitigen Hyperbel an den Assymptoten ist $y=\frac{a^2}{x}$ also die ganze Flæche $f=a^2\log\frac{x}{0}=\infty$. und ein Stück davon $f=a^2\log\frac{x}{n}=\log x$ Ist z.B. $x=5$ sowird $f=1,609437$. Eben daher werden die natürliche Logarithmen auch *Hyperbolische* genannt.

4) Ohne der Infinitesimal Rechnung würde man finden, dass

$$f=bx+\frac{bx^3}{6a^2}-\frac{bx^5}{40a^4}+\frac{bx^7}{112a^6}-\frac{5bx^9}{115.2a^8}+...$$

für die Ellipse würden alle Zeichen negativ: das hyperbolische Dreyeck$=f-bx$.

und die gleichseitige Hyperbel$=a^2+\frac{1}{6}a^2-\frac{1}{40}a^2+\frac{1}{112}a^2-...$

§ 17 *Von der Rektification der Hyperbel.*

Setzt man $y=b(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$, so ist $z=\int(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}=\int dx[\frac{(1+b^2)x^2-1}{x^2-1}]^{\frac{1}{2}}$

$=\int dx(\frac{e^2x^2-1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ nud

$$z=e(x^2-1)^{\frac{1}{2}}-\text{arc}\ \cos\tfrac{1}{x}\left[\frac{1}{2e}+\frac{1}{2^2.4e^3}+\frac{3^2}{2^2.4^2.6e^5}+\frac{3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8e^7}+\ldots\right]$$
$$-x^{-2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2^2.4e^3}+\frac{3^2}{2^2\,4^2.6e^5}+\frac{3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2 8e^7}+\ldots\right]\ldots+C.$$

§ 18. *Von ihrem körperlichen Inhalte.*

1. Die *Hyperboloide* $h=\int\frac{\pi bbdx}{aa}(ax+xx)=\frac{\pi b^2}{a^2}(\frac{ax^2}{2}+\frac{x^3}{3})$ dem durch das hyperbolische Dreyeck beschriebenen Körper.

2) Für die gleichseitige Hyperbel ist der durch das hyperbolische Viereck beschriebene Körper. $h=\int\pi a^4x^{-2}dx=-\pi a^4x^{-1}+C=\pi a^3-\frac{\pi a^4}{x}$.

3) Und für $x=\infty$ ist $h=\pi a^3=$ dem durch das hyperbolische Quadrat beschriebenen Cylinder.

§ 19. *Von der Oberflæche der Hyperboloide.*

Diese ist $F=\int 2\pi y(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}=\int\frac{2\pi bdx}{a^2}[(a^2+b^2)x^2-a^4]^{\frac{1}{2}}$

$$=\int\frac{2\pi bedx}{a^2}(xx-\frac{a^4}{e^2})^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi bex}{a^2}(x^2-\frac{a^4}{c^2})^{\frac{1}{2}}-\pi b^2-\frac{\pi ba^2}{e}\log\left[\frac{cx+(c^2x^2-a^4)^{\frac{1}{2}}}{a(e-b)}\right].$$

Die Parabel.

§ 20. I. *Bey der Parabel ist* $a=\infty$ *also* 1) *ihre Gleichung* $y^2=px$. Daraus ihre Zeichung, und sogleich ihre andere Eigenschaften. 2) $c=\frac{p}{4}$ 3) Der Fahrstrahl $n=x+\frac{p}{4}$. 4) $y^2:z^2=x:u$. 5) Die subtg $=2x$. 6) Subn $=\frac{p}{2}$; 7) Tang $=\sqrt{px+4x^2}$; 8) Norm. $=(px+\frac{pp}{4})^{\frac{1}{2}}$

Dieses alles auch für die verwandten Durchmesser.

II. Die Flæche, auch durch zwey Methoden gefunden ist $f=\frac{2}{3}xy$

III. Für die *Rectification* ist $z=\int(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}=(x^2+\frac{px}{4})^{\frac{1}{2}}+\frac{p}{8}$. $\log[1+\frac{x+(x^2+\frac{px}{4})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{8}p}]$ oder $z=\frac{y}{p}(y^2+\frac{1}{4}p^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}p\ \log[\frac{y+(y^2+\frac{1}{4}p^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}p}]$

IV. Die *Paraboloide* $=\frac{1}{2}\pi y^2x=$ der Hælfte des ihr umschriebenen Cylinders.

V. Ihre *Oberfleche* $F=\frac{\pi}{6p}[(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}-p^3]$

Von den Krummen Linien überhaupt.

§ 21. I. *Ihre allgemeine Eigenschaften und Abtheilungen.*

Damit x eine verænderliche bleibe, muss eine Funktion von x einer Funktion von y gleich sein. (Ein weites Feld für Untersuchungen wegen dieser Mannigfaltigkeit.)

Sind

Sind x und y *Coordinaten* einer Krummen Linie, so bestimmen ihre Werthe oder ihre Wurzeln die Gattungen der Krummen Linie.— Daraus ihre Abtheilungen in *Algebraische oder Geometrische*, in *Mechänische oder Transcendentische* und in Krumme von *verschiedenen Ordnungen.*

II. Die Eigenschaften einer Krummen Linie können aus ihrer Gleichung hergeleitet werden. *Ramus Curvæ infinitus, Punctum conjungatum,— Nodus, Cuspis.* Beyspiele davon.

§ 22. *Allgemeine Gleichungen für Krumme Linien.*

Diese werden durch den allgemeinsten Fall der Lage der Coordinaten bestimmt. Setzen wir næmlich den Winkel den zwey Linien mit einander machen m, die Abscissen vor ihrem Durchschnittspunkt x und ausser ihm X, X′; ihre Ordinaten y, Y, Y′ und ihren Winkel n; und auf der andern Linie die Abscisse ausserhalb der Durchschnitte T, ihre zwey Ordinaten von beiden Seiten V, V′, und ihren Winkel q, so ist

1). $(X-x)\mathrm{Sin}\, n = T\,\mathrm{Sin}(m+n) - V\,\mathrm{Sin}(m+n-q)$.

2). $(Y+y)\mathrm{Sin}(m+n) = V\,\mathrm{Sin}\, q + \frac{\mathrm{Sin}\, m}{\mathrm{Sin}\, n}[T\,\mathrm{Sin}(m+n) - V\,\mathrm{Sin}(m+n-q)]$

3). $(X'-x)\mathrm{Sin}\, n = T\,\mathrm{Sin}(m+n) \pm V'\mathrm{Sin}(m+n-q)$

4). $(Y'+y)\mathrm{Sin}(m+n) = \frac{\mathrm{Sin}\, m}{\mathrm{Sin}\, n}[T\,\mathrm{Sin}(m+n) \pm V'\mathrm{Sin}(m+n-q)] \mp V'\mathrm{Sin}\, q$.

Uberhaupt können die Krummen der zweyten Ordnung durch die

5). Formel $ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0$ ausgedrückt werden.

Setzt man die Coordinaten rechtwinklicht oder $n=90^0$, macht man die gehörigen Verkürzungen und Reduktionen, und solleh die Anfangspunkte von x und T auch zugleich Punkte der Krummen seyn, so wird die Gleychung für die Kegelschnitte $ay^2+cx^2+ex=0$; woraus $y^2=-\frac{c}{a}(x^2-\frac{ex}{c})$ wie oben,

6). Die Formel kann auch so seyn; $y^2+\frac{ex+c}{f}y+\frac{dx^2+bx+a}{bx}=0$; daraus können die Eigenschaften der Durchschnitts-punkte der *Sehnen*, der *Durchmesser* und der *Tangenten* hergeleitet werden.

7). Könnten wir die höheren Gleichungen auch so volkommen auflösen, wie jene des zweyten Grades, so würde das Verfahren für Krumme höherer Ordnung, dasselbe bleiben.—Die Betrachtungen der Krummen in Ansehung ihrer *Assymptoten* vertreten diesen Mangel, und führen zu der wichtigen *Theorie der Grenzen*, und des *Unendlichen*: wovon *Dalembert* den ersten bestimmten Begriff gegeben, und *Cousin* darauf seine schöne Erklærung der schwersten Elemente der höheren Mathematik gebaut hat. Des Hr: *Sniadecki* 2r Band der Algebra enthælt viel Neues auch in dieser Rücksicht. *Siehe Rachunku Algebraicznego Teorya Tom II w Krakowie* 1783.

§ 23. *Von der umgekehrten Methode der Tangenten.*

1. *Exem:* Die Gleichung der Krummen, deren Subtangente allzeit $\frac{4}{3}$ der Abscisse ist, zu finden.

G Subt:

Subt. $\frac{ydx}{dy}=\frac{4x}{3}$; daraus $y^4=Cx^3$ die Gleichung zur Parabel vom vierten Grade. Wære die Subtg. $=2x$ so wird $y^2=Cx$.

2. *Exem.* Ist die Subtg. $=\frac{aa+xx}{x}$; und daraus $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2+x^2)$ die Gleichung zur Hyperbel.

3. *Exem.* Suche die Gleichung der Krummen z, welche so beschaffen ist, dafs die Flæche zwischen z, x und y allezeit $=\frac{2}{3}$ des umbeschriebenen Dreyecks zxy sey.

Es ist $S\,ydx=\frac{2}{3}S\,xdy$, und $y^3=Cx^2$ die Gleichung der Parabel vom 3. Grade.

4. *Exem.* Man sucht die Gleichung der Krummen, deren Krummungshalbmesser bestændig $\frac{m}{n}$ der Normale gleich ist.

$$-\left(\frac{dx^2+dy^2}{dxddy}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{my}{ndx}(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}} \text{ und } dx=\pm y^{\frac{n}{m}}dy\left(C^{\frac{2n}{m}}-y^{\frac{2n}{m}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Setzt man $m=n$, so wird $x=\mp(c^2-y^2)^{\frac{1}{2}}+C$ die Gleichung zu dem Kreise.

§ 24. *Von der Konstruktion der Gleichungen.*

I. Die bestimmte Gleichung des ersten Grades $Ax-B=o$ kann als zusammengesetzt aus den beyden unbestimmten $1)\,ay=c(x+a)$, und $2)\,by=d(b-x)$ angesehen werden; daraus wird durch die Elimination der y; $3)\,x=\frac{(d-c)ab}{bc+da}$; da aber die zwey ersten, vier Proportionallinien bilden, so hat die Zeichnung der x keine Schwierigkeit.

II. Die bestimmte Gleichung des zweyten Grades ist $Ax^2+Bx+C=o$; ist zusammengensetzt aus

1) $ay=c(a+x)$ und 2) $z^2+a'xy+b'x^2+d'x+c'y+f=o$;

z. B. für den Kreis wære $1)\,ay=c(+x)$ und $2)\,d^2=(x-f)^2+(y-q)^2$; nimmt man also d für den Halbmesser, so bestimmt man auch durch eine leichte Zeichnung die zwey Werthe von x.

III. Bey der Construction, oder der Zusammensetzung der höheren Gleichungen verfæhrt man auf die næmliche Art. So lassen sich die im Alterthum berühmten Aufgaben der Verdoppelung des Cubus, und der Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile, mittelst der Kegelschnitte sehr leicht und mannigfaltig auflösen. Der Gebrauch der Trigonometrischen Tafeln macht diese sinnreiche, aber öfters schwere und nicht hinlænglich genaue Methode, entbehrlich.

§ 25. *Von den Gleichungen, wo sich drey veranderliche befinden.*

I. Sie führen zur Bestimmung der Oberflæchen der Körper und der Linien, die sich mittelst Durschnittsflæchen darauf bilden können. Dazu gehören drey senkrechte Ordinaten x, y, z. (*Planum Diametrale.*)

z B. für die Kugelflæche ist $a^2=x^2+y^2+z^2$ ihre Gleychung: und daraus $a^2=x^2+y^2$ jene ihres Schnitts. *Æquationes homogeneæ.*

Für den *schiefen Cylinder* und den *schiefen Kegel* ist die Gleichung des Schnittes $c^2y^2+d^2x^2=c^2d^2$

Für

Für den Durchmeßer $c = mz$ und $d = nz$ ist die Gleichung der Fläche des schiefen Kegels $m^2y^2 + n^2x^2 = n^2m^2z^2$; in dem geraden Kegel wird sie $y^2 + x^2 = m^2z^2$.

II. Allgemein ist hier $z^m = az^{m-n-p}x^ny^p$ die Formel für drey veränderliche und noch allgemeiner $Ax^{m-n}y^n + Bx^{m-p}y^p + \ldots = 0$.

III. Für den *schiefen Schnitt* z.B. einer Kugel; bestimmen zwey Winkel p und q die Lage des Schnittes. Also müßen die Funktionen dieser Winkel in der Gleichung für die Fläche der Kugel vorhanden seyn. Daraus wird wieder hergeleitet, daß der Schnitt ein Kreis ist.

IV. Für die *Projection* eines schiefen Schnittes hat man 1) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ für die Gleichung der Fläche der Kugel, 2) $Ax + By + Bz = D$ für die Gleychung einer ebenen Fläche: daraus durch die Elimination von z 3) $D^2 - D^2a^2 - 2DBy - 2ADx + (A^2 + C^2)x^2 + (B^2 + C^2)y^2 + 2Bxy = 0$; also diese Projektion für ein sehr entferntes Auge, eine Ellipse.
Eine weitere Ausführung davon, Siehe *Cramers Introduction a l'Analyse des lignes courbes Algebriques* 4° 1750.

§ 26. *Von den Mechanischen Krummen.*

I. Die zwey Arten der höheren Funktionen sind die *Logarithmen* und die *Kreisbögen*, die sich durch unendliche Reihen ausdrücken lassen. Für diese Funktionen gehören die zwey Formeln 1) $y = a^x$ und 2) $y = arc\ \sin. x$; oder $y = arc\ \sin. l. x$. Setzt man für $x = 1, 2, 3, 4 \ldots \pm m$, so bekommt man bestimmte Werthe für y; und die Krumme Linie die aus dieser Zeichnung entsteht, ist die *Logarithmische Linie.*

II. Allgemeine Methode die Subtangente vermittelst der Methode der Gränzen zu finden, nebst einer Anwendung der Methode de *Maximis und Minimis.*

1. Setzt mann die Subtangente $x = p + t$, nämlich aus p einen bestimmten Theil und t ihren Wachsthum zusammengesetzt: und so auch die Ordinate $y = q + u$; so verwandelt sich die Formel $W = 0$ für zwey Veränderliche x und y, in $At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Gt^3 = 0$. In dem verschwindenden Zustand wird $At + Bu = 0$; und die Subt. $= -\frac{Bq}{A}$
z.B. für die *Logarit. Linie* wo $y = a^x$ oder log $y = x$ log$a$ hat man Log $q = p$ loga, und $l(q+u) = (p+t) l.a.$; $1 + \frac{u}{q} = a^t = 1 + mt + \frac{m^2t^2}{1.2} + \frac{m^3t^3}{1.2.3}$
also $\frac{u}{q} = mt$, und Subt $= \frac{1}{m}$,
also unveränderlich und das *Model* der Logarithmen.

2. Eine krumme nach der Gleichung $0{,}1125x^4 - 0{,}725x^3 + 0{,}9375x^2 + 0{,}875x = y$ zu zeichnen, und ihre gröſste und kleinste Ordinaten zu bestimmen. Statt $dy = 0$ wird oft $dy = \infty$.

III. *Höhere Krummen die von den Kreisbögen abhängen.*
Nennen wir den Halbkreis π, so gehören zum Sinus x, die Bogen u; $\pi - 1; -\pi - u; 2\pi + u; -2\pi + u \ldots (2n+1)\pi - u;$
$-(2n+1)\pi - u;$

G 2 daraus

daraus hat man $1 : m = arc\ sin.\ x : y$ auch $1 : m = 2\pi + u : y''$, daraus fliefst die Zeichnung und Eigenschaften der Krummen, deren Gleichung $y = m\ arc.\ sin\ x$. wie auch für andere trigonometrische Linien die Funktionen von den Sinusen und Cosinusen sind: wie

IV. *Die Cykloide.*

1. Setzt man den verlængerten Halbmefser des *bildenten-Kreises b*, den Bogen oder den zurückgelegten Weg z, und die Coordinaten x und y; so wird die Gleichung für die Cycloide $y = \sqrt{(2bx - xx)} + a.\ arc\ sin.\ \frac{\sqrt{(2bx - x^2)}}{b}$. Für die Absciſsen vom Mittelpunk gerechnet, und $b - x = t$; ist $y = \sqrt{(b^2 - t^2)} + a.\ arc\ cos\ \frac{t}{b}$ Weil $cos\ \frac{t}{b}$ unzæhlig viele Werthe hat, so können so viele Cycloiden entſtehen.
2. Der Bogen x des bildenden Kreiſes iſt gleich dem zurückgelegten Wege y,: daraus ihre andere Gleichung $y = x$. und in Rucksicht auf die Axe iſt $y = x + sin\ x$. Andere Eigenschaften der Cycloide sind.
3. Die Sehne des bildenden Kreiſes iſt mit der Tangente der Cycloide gleichlaufend; daraus die Art die letzte zu zeichnen.
4. Iſt die Sehne des Kreiſes b, und der ihr entsprechende Bogen der Cycloide a, so iſt $a = 2b$; also der Umfang der Cycloide $= 4d$. Ihre anderen Eigensefsaften kommen in der Mechanik vor.
5. Die Flæche der Cycloide iſt drey mahl so groſs, als die des bildenden Kreiſes: und der Raum zwischen dem Kreiſe und der Cycloide iſt gleich zu der Helſte des umschriebenen Rechtecks.

V. *Die Spirallinie des Archimedes.* Iſt die Entfernung des sie bildenden Punktes vom Mittelpunkt des Kreiſes y, und der vom Endpunkte des Halbmefsers a zurückgelegte Weg x, so iſt 1) ihre Gleichung $x = 2\pi y$. Fur vershiedene Geschwindigkeiten der sich bewegenden Punkte iſt $y = \frac{x}{2\pi} = \frac{mx}{n}$. 2) Die $Subtg = \frac{xy}{a}$. 3) Für den Radius r iſt ein Stück der Spiralflæche $= \frac{\pi^2 x^3}{24.r}$ und für einen Umlauf des Halbmefsers iſt sie $= \frac{1}{3}\pi r^2$.

4) Bilden die Abſciſsen x auf dem Umfang des Kreiſses eine Arithmetische Reihe, und die Ordinaten y, als Unterschiede zwischen dem Halbmefser und seiner Verlængerung betrachtet, eine Geometrische Reihe, so entſtehet davon eine *Logarithmische-Spirallinie.*

VI. Nimmt man ſtatt des Kreiſes eine gerade Linie, und die erwæhnten Unterschiede gleich, so entſtehet die *Nicomedische Conchoide.* Iſt die ſenkrechte vom Pol auf die Richtungslinie a, der beſtændige Unterschied b, so iſt für sie die Gleichung $yyxx + x^4 + 2ax^3 + aaxx - bbxx - 2abbx = aabb$. und die Richtungslinie zugleich ihre Aſsymptote.

VII. Die *Ciſsoide des Diocles.* Iſt der Durchmefser eines Kreiſes a, auf diesem die Absciſsen x, und durch deſsen zweyten Endpunkt eine Tangente zum Kreiſe geführt; so iſt dieser Krummen Gleychung $y^2 = \frac{x^3}{a - x}$

VIII.

VIII. *Die Quadratrix des Dinostrates.* Ist der ¼ des Umkreises a, der Radius r, die Abscisse auf ihm x, und der ihm entsprechende Bogen des Umkreises y, so ist die Gleichung für diese Krumme $ry = ax$.

Zusammenhang der Grundsætze der reinen Grössenlehre.

1). Einfache und allgemeine Sprache um den Zustand der Grössen und ihren gegenseitigen Zusammenhang auszudrücken.

2). Diese Zusammenstellung der Verhæltnisse veranlasste die Untersuchung der Gleichungen.

3). Ihre natürliche Abtheilung war die in die bestimmte und unbestimmte Gleichungen.

4). Der ersten machten wir eine Anwendung zur elementar Geometrie und der zweyten zu der höheren.

5). Die Betrachtung der in den letzten Gleichungen vorkommenden veränderlichen Grössen veranlasste ihre Untersuchung in ihren æussersten Grænzen: daraus entstand

6). Die Rechnung des Unendlichen oder die Differential und Integral Rechnung.

Kurze Geschichte der reinen Grössenlehre.

La connoissance historique des faits & des découvertes, sert à nous diriger dans nos travaux: elle nous épargne la peine & le tems que nous mettrions peut-être sans succès (toujours inutilement) à nous ouvrir des routes déja tracées, & où il ne s'agit plus que d'avancer: elle assure aux inventeurs la gloire de l'invention; elle en dégrade ceux qui se l'attribuent injustement ou faute de lumières: elle nous garantit enfin d'une illusion semblable, toujours taxée de vanité ou d'ignorance.

de Mairan
Mem. de l'Acad. 1742.

Einleitung. Eigenschaften einer Geschichte der Mathematik. Diese Geschichte vor und nach der Widerherstellung der Wissenschaften: verfasst von *Montucla*, *Saverien* und *Kæstner*. Ueber den Ursprung der Arithmetik bei den Indianern. Bezeichnung der Zahlen und Fortschritte der Arithmetik und Algebra bei den Griechen den Römern und den Arabern. Fortschritte in jedem Jahrhunderte.

Ursprung der *Geometrie* in Egypten unterm *Sesostris*. Sein Minister *Thot* mag wohl *Theut* der Erfinder der Zachlen, der Rechnung und der Geometrie oder *Hermes* oder endlich der *Mercur Trismegistus* seyn. Des letzten geometrische Figuren auf den Sæulen von *Sothis*. *Theodor* aus Samos Baumeister des Tempels zu Ephes erfindet das *Richtscheid* und die *Grundwage*. Ein Enkel des *Dædalus* macht einen Zirkel.

VII. Sæculum ante C. N. Thales. Seine Messung der Ægyptischen Pyramiden.

Geometrie. *Thales* †660 (70) ein Grieche lernt Geometrie von den Priestern zu *Memphis*. entdeckt dass der Winkel im Halbkreis ein rechter Winkel ist, und opfert dafür den Musen. Misst die Höhe der Pyramiden oder der Obelisken. (wird deshalb von *Amasis* bewundert.). Kennt also die æhnlichen Dreyecke: und thut sich noch als Ingenieur des *Kresus* in seinem Feldzug gegen Kyrus vor.

Anaximander sein Schüler bearbeitet die ersten Elemente der Geometrie, ist der Stifter der Schule zu *Milet*: hat zum Nachfolger den *Anaximenes*, dessen Schüler *Anaxagoras* sich schon mit der Kwadratur des Kreises abgiebt, die Sterne für materiel zu halten sich untersteht, und die Wissenschaften den Reichthümern vorzieht.

VIS. Pythagoras. 590. aus Samos ein Schüler von *Thales*: geht auch nach Egypten und von da zu den Indischen Brachmanen oder Gymnosophisten. Stiftet die berühmte Italische Schule: Seine Multiplications-Tafel. Wunderbare Eigenschaften einiger Zahlen.

Geometrie. Pythagoras entdekt seinen Lehrsatz, giebt die erste Grundlage der *Isoperimetrie*: untersucht die Theorie der regulæren Figuren und der irrationælen Grössen. *Hippocrat* aus *Chio*. Seine *Lunulæ*. *Aristip*. (vestigia hominum agnosco.)

IVS. PLATON †348 (81) und EUCLIDES kannten schon die vier Rechnungsarten, die Ausziehung der Quadrat und Kubik Wurzeln, und die Proportionen.

Geometrie. PLATONS Inschrift. Er ist der Stifter der Akademiker, der Erfinder der Geometrischen Analysis und der erste, der die Kegelschnitte untersucht. Diese Theorie wird von MENECHM und DINOSTRAT Erfinder der *Quadratrix*, erweitert: und auf die Auflösung der Verdoppelung des Cubus angewendt. Ursprung des *Geometrischen Orts*. Theilung des Winkels in drey gleiche Theile.

Die *Alexandrinische Schule*. *Euclides* 300. Seine Antwort dem Ptolomæus. Seine Bescheidenheit. Zahlreiche Auflagen seiner *Elemente*.

IIIS. NICOMAKS, *Polygonzahlen*.

ARCHIMEDES. *De Numero Arenæ*. Entdeckung oder Anwendung der Reihen.

Geometrie. ARCHIMEDES †212. (75) entdeckt das Verhæltniſs der Sphære zu dem umgeschriebenen Cylinder. (Nach dieser Figur entdeck Cicero sein Grabmahl). Die Quadratur der Parabel. Die erste Verhæltniſs des Duchmeſsers zum Umfang des Kreiſes: und den ersten ſehr schweren Weg zur Kenntniſs der Eigenschaften der *Conoide*, der *Spheroide* und der *Spirallinie*.

II. APOLLONIUS, der *groſse Geometer*. Sein Werk über die Kegelschnitte. (Ihre Benennung). De *Maximis* & *Minimis*. Über die *Abgewickelte*.

ERATOSTHENES. *De locis ad medietates*. Sein Tod. (80) CONON aus Samos. NICOMEDES Erfinder der *Conchoide*. (für die Krümmung der Sæulen).

DIOCLES findet die *Ciſsoide*. EUTOCIUS schreibt einen Commentar über Archimed und Appollonius.

HIPPARK. Ein berühmter Astronom, erfindet die geradelinichte und sphærische *Trigonometie*.

I. GEMINUS. *Enarrationes Geometricæ*. Die Römer verachten die Wiſsenschaften. Folgen davon.

THEODOS. *De habitationibus, & de diebus & noctibus*.

* * * *

I. *Sec.* post Ch. N. MENELAUS. Schreibt das erste Werk über die Trigonometrie.

II. SERENUS. Erklært die Kegelschnitte: und des Cylinders seine. PERSEUS. Seine ſpherische Linien. PHILON,

IV. DIOPHANTES, *Questiones Arithmeticæ*. (380). enthalten die Fortschritte der Araber in der Algebra. Ihre *Symbolische Rechnung*. *Positive* und *negative* Gröſsen.

Geometrie. PAPPUS. *Collectiones Mathematicæ*. THEON erklært den *Euclid*, und seine Tochter HIPPATIA den *Appollonius*.

V. HYPATHIA, THEONS Tochter verfaſst ein Commentar über den Diophant und wird ermordert.

Geom- PROCLUS. Sucht aber fruchtlos Mathematik im Flor zu erhalten. Dieses thun auch *Marinus*, *Isidore*, und *Anthemius*. Die Bibliothek von Alexandrien wird verbrannt 641. Doch erneuert sich wieder bey den Arabern der Hang zu Wiſsenschaften. Benennung des *Sinus*. Unter den Persern thun sich NASSIR-EDDIN und MAIMON-RASCHID vor. Gænzlicher Verfall der Wiſsenschaften in Griechenland unterm *Machomet* 2. 1453.

VIII. MOHAMMED-ben-MUSA (800) löſet die Gleychung des zweyten Grades auf.

IX. GILBERT oder Pabst *Silvester II.* führt die Zifern in die Abendlændern ein (†1003).

X. SESSA. Anwendung der *Geom. Reihe* bei Gelegenheit seiner Entdeckung des Schachſpiels. Auflösung der Sophismen von *Zenon*.

XV. REGIOMONTAN führt die *Decimal Brüche ein* (1460). *Simon Stevin* empfiehlt sie den *Astronomen*, den Meſskünstlern und zum Gebrauch der Visirkunst.

Geom. PURBACH macht Fortschritte in der Trigonometrie. Sein *geometrisches Quadrat*. und *Fadengewicht*.

REGIOMONTAN. Theilt den Halbmeſser in 1000000 Theile. Berechnet aufs neue die Sinus Tafeln und bedient sich auch der Tangenten.

XVIS. LUCAS de BURGO S.S. *Summa Arithmeticæ & Geometriæ*. (1523). macht die Auflösung der Gleychungen des 1^n und 2^n Grades bekannt. Seine *Regulæ falsæ positionis*. 2). TARTALEA entdeckt die Auflösung der *Gleichung des 3^n Grades*. 3). CARDAN. *De Arte magna* (1545.) entwikelt sie. 4). LUDWIG FERRARI löſst *den 4^n Grad auf*. 5). RAFHAEL BOMBELLI erklært diese Endeckunken. (Benennungen *Cosa* und *Censo*. *Cubo*). Dieses thut auch 6) STIFELS *Arithmetica integra* (1554.)

7) Vi-

7) VIETE bedient sich *der erste der Buchstaben*. Sein grosser Fleiss. Er stellt die unbekannten Wurzeln durch Linien vor.

Geometrie. TARTALEA. Findet die Flæche eines Dreyecks aus seinen drey Seiten. FRIDRICH KOMMANDIN †1575., bestimmt den Mittelpunkt der Schwere in den Körpern. MAUROLYCUS beweist die Eigenschaften der *Assymptote*.
Uneinigkeit wegen den Berührungswinkel zwischen PELLETIER und CLAVIUS.
ORONI FINEUS und PETER RAMUS Wiederhersteller der Philosophie und des Geschmaks zur Geometrie
CANDAL. Erweitert Euclid s Elemente. VIETA bereichert die Geomertie mit analytischen und trigonometrischen Formeln.
NONIUS ein Portugise untersucht die *Loxodromie*.

XVIIS. (a.) HARRIOT *Artis Analyticæ praxis* 1630. Bedient sich der kleinen Buchstaben: führt ein Zeichen für die Multiplikation ein: giebt eine bequemere Form den Gleychungen durch Wegschafftung der Glieder auf eine Seite : entdekt dass die höheren Gleychungen Produkte aus den einfachen sind; und die Anzahl der positiven und negativen Wurzeln. 2). ALBERT GIRARD. *Neue Entdeckung in der Algebra*. 1629. besonders in Ansehung der Wurzeln der. Kubischen Gleychungen.
3). DESCARTES. Verbessert die Bezeichnungen : bedient sich der Zifern für die Exponenten der Potenzen, bestimmt die Zahl der positiven und negativen Wurzeln : und entdeckt die *Methode der Unbestimmten*.
4). NEWTON, entdeckt eine Næherungsformel für die Wurzeln der Gleychung. Seine *Arithmetica Universalis* : und bezeichnet die Exponenten der Potenzen mit Buchstaben.
Also erst in diesem 17ⁿ Jahrhunderte bekommt die Rechenkunst zwey Hauptabtheilungen, næmlich in die eigentliche *Arithmetik* und die *Buchstaben rechnung*.
Für die erste bemerken wir.

(b) NEPERS. *Entdeckung der* LOGARITHMEN. *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio* 1614. H. BRIGS erweitert seine Arbeit in seiner *Arithmetica Logarithmica* 1624. dieses thut auch H. GELLIBRAND in Rücksicht auf den Trigonometrischen Gebrauch in der *Trigonometria Britannica* 1630 ; wie auch VLACK in einer neuen Auflage von *Arithmetica Logarithmitica* 1624, 1633. (Neueste Auflagen von *Sherwin*, *Gardiner*, *Schulze* und *Vega*) Eine minder wichtige Entdeckung ist.
NEPERS *Rabdologie*. 1617. (Rechenbret.) Der blinde *Saunderson* müste sich solcher Entdeckungen bedienen.
Es würden auch Zahlen zu *Ræthselspielen* und Tændeleyen gebraucht.

(c) DIE ANALYSIS INFINITORUM. 1). WALLIS. *Arithmetica Infinitorum* 1655. Diese verursacht folgende Entdeckungen. 2). PASCAL s *Arithmetisches Dreyeck* 1664. 3) MERCATOR. *Logarithmotechnia* 1668. (natürliche oder von nun an hyperbolische Logarithmen) 4). MILORD BRUNCHER † 1684. entdeckt die *zusammenhængende Brüche*. 5). NEWTON *Binomischer Lehrsatz*. *Methodus Fluxionum & Serierum infinitarum* 1669. erlæutert von MACLAURIN. GREGORII Exercitationes 6) BARROW s *unendlich Kleines Dreyeck* 1666. 7). LEIBNITZ entdeckt die eigentliche *Differential* und *Integral Rechnung*. *Acta Eruditorum* Lipsiæ 1684.

Geometrie ADRIAN METIUS. Verhæltniss-zahlen 113 : 335. LUDOLF VANCEULEN bestimmt diese Verhæltniss des Durchmessers zum Umkreise bis zu 36 Decemalstellen. (Sein Grabmal).

JOHANN VERNER. †1528 (59) theilt die Kugel in einem gegebenen Verhæltniss. Sein *Tractatus Analyticus*, *Euclidis datorum pedissequus*. RHETICUS bedient sich auch der Secante und verfertigt eine trigono. Tafel von 1 minute zu 1 minute. JUSTUS BYRGE thut es von 2 zu 2 Sekunden ; und erfindet den

Propotional Cirkel. LUCAS VALERIUS findet den Mittelpunkt der Schwere der *Conoide* und der *Sphæroide*. De *Centro gravitatis solidorum*. SNELLIUS. bestimmt die Grænzen des Kreises.

KEPLER †1631. führt den Gebrauch des Unendlichen in die Geometrie ein.

LACAILLE. 1632. De *Centro gravitatis partium circuli & ellipsis*. GULDIN s *Centrobarica*.

CAVALLERI. *Geometria indivisibilium*. Misst die Parabolen von verschiedenen Ordnungen. u. d. g....

FERMAT. Entdeckt die Spirallinie, die Parabel von höheren Graden; und eine eigene Art die Tangenten zu zeichnen.

MER-

MERSENNE, ROBERVAL, DESCARTES, PASCAL, WALLIS und die Schüler des GALLILEUS, TORRICELLI und VIVIANI entdecken die *Cycloide*, und erweitern ihre Theorie. Streit, den sie veranlafst.

JACOB GREGORI beweifst dafs die Quadratur des Kreises unmöglich ist: und entdeckt die Eigenschaft der um die Kegelschnitte umschriebenen Vielecke: daraus die der abnehmenden Reihen. Streit mit HUYGHENS wegen ihr letztes Glied.

DESCARTES †1650(54) entdeckt die Methode der Tangenten, die Theorie de *Maximis* & *Minimis*: jene der *Inflexions-punkten*: und zeigt der erste die Anwendung der Algebre auf die Geometrie.

ROBERVAL mit WALLIS, Gegner des DESCARTES. BEAUME, SCHOOTEN und P. *Rabuel* erklæren Descartes' Geometrie.

BEAUME entdeckt die *umgekehrte Methode* der Tangenten, TCHIRNHAUSEN. DE la HIRE.

HUDDE, NEIL und VAN-HEURAET enweitern Descartes Geometrie, und entdecken die Methode die Rektifikation einer Krummen auf die einer andern und auf die Rechnung zu bringen,

BARROW. Giebt besonders Anlafs zur Entdeckung der Rechnung des Unendlichen (durch sein *Infinitesimal Dreyeck* 1666) und überlæfst die weitere Ausführung dem

NEWTON, Seinem Schüler. Seine Entdeckung der *unendlichen Reihe* mittelst welcher er die Længe der Krummen, ihre Quadratur, Kubatur, und den Schwerpunkt findet: 1687 macht er seine *Methode der Fluxionen* bekannt.

MERCATOR. Erfinder einer æhnlichen unendlichen Reihe macht mit MANFREDI.

LEIBNITZENS. *Anfangsgründe der Differential Rechnug* bekannt 1684.

XVIIIS. (a). LEIBNITZ † 1716. (71) (*Arithmetica binaria*).

1). NEWTON † 1727 (84.) *Commercium Epistolicum*.

2). JAKOB BERNOULLI † 1705 (51) (*eadem mutata resurgo*).

3). JOHAN BERNOULLI sein Bruder. Erfinder der *Exponential Rechnung*.

4). MARQUIS von *Hofpital* † 1704 (45) Analyse des infiniment petits.

5). VARIGNON † 1722 (68). und SAURIN verbreiten die Differential Rechnung und machen davon Anwendungen. Ihre Gegner sind *Catelan* (Logistica universalis) *Niewent t* und *Rolle*.

6). Weitere Fortschritte der neuen Rechnungen von.

7). CÔTES. *Harmonia menfurarum*. 1727, Vom Integriren *durch Logarithmen und Kreisbögen*.

8). TAYLOR *Methodus incrementorum* 1715.

9.) MOIVRE Allegemeines Glied für wiederkehrende Reihen; und Theorie der Wahrscheinlichkeit.

(b). 10). NICOLAS BERNOULLI. *Bedingungs Gleichungen*. Diese Theorie wird gebraucht und erweitert in Frankreich von

11). FONTAINE. 1739. Allgemeine Theorie der Differential Gleichungen: und von.

12). LEONARD EULER. † 1783. (76) zum Integriren der gleichartigen Funktionen *Introductio ad Analysin infinitorum* 1748, *Institutiones Calculi Differentialis* 1755. und *die Integral Rechnung* 1768.

(c). Die *Bedingungs Gleychungen* gehören zu den *partiellen Differenzen*: und das Integriren jeder Differentialen Gleychung erfordert, dafs man den Werth der Bedingungs Gleichung findet. Dieses ist eine wichtige Aufgabe, die wir nur in einigen besondern Fællen auflösen können. Überhaupt nahmen alle neue Theorien ihren Ursprung in

NEWTONS unsterblichem Buche: *Principia Mathematica Philosophiæ Naturalis*, das besonders dem unsterblichen LA PLACE, HERSCHEL, dem LA GRANGE, CLAIRAUT, DALEMBERT, CONDORCET zu weiteren Fortschritten und Entdeckungen Anlafs gab. Anwendungen der neuen Rechnungen kommen in gehörigen Orten vor.

(d). Nahmen der gelehrten Geselschaften und der jenigen Mænner in jedem Lande die sich, besonders im verflofsenen Jahrhunderte, durch ihre Schriften oder durch ihren mündlichen Unterricht um die Mathematische Wifsenschaften, am meisten verdient gemacht haben. (*Siehe. Pr. Wilh.* MURHARD s. Litteratur der Mathematischen Wifsenschaften. 2 B. gr. 8. Leipzig 1797. 98.)

Erklærung der Kupfertafeln

I. Tafel.

DIE ELEMENTAR GEOMETRIE.

§ 1. *Einleitung. Gegenſtand Eintheilungen und Grundsætze der Geometrie.*
Eintheilung der Geometrie in die *elementar* und die *höhere* Geometrie.
Eintheilung der erſten in die Geometrie der *Linien*, der *Flæchen* und der *Körper.*
Hiezu gehort die *geradelinichte* und die *sphærische Trigonometrie*, die geometrische Auflösung der Aufgaben des erſten und des zweyten Grades, und die *praktische Geometrie.*
Die erſten Grundsætze der *Differential* und *Integral* Rechnung können auch durch geometrische Beyspiele eriæutert werden.
Erklærungen.- Lehrsætze. (Demonſtratio *per absurdum*) Grundsætze der *Congruenz*
Forderungsætze. Lehrsætze. Zusætze. Aufgaben. Auflösung. Bemerkungen

§ 2. *Erklærungen der einfachen Gegenſtænde der Meſskunſt.*

I. *Abgesonderte* und *ſtætige Gröſsen* begreifen die ganze *reine* Gröſsenlehre.
II. *Körper*, *Flæche*, *Linien*, *Punkt.* (*Længe*, *Breite*, *Tiefe.*) Ihre Entſtehung. Zusammensetzung. Werkzeug gerade Linien zu zeichnen. Prufung seiner guten Eigenschaften *Fig.* 1. 2. Beſtimmung der Lage einer geraden Linie. *Zeichen* einer Linie. (Reiſsfeder).
III. *Kreis.* Seine Entſtehung. *Mittelpunkt. Umfang. Bogen. Sehne. Durchmeſser. Halbmeſser. Auschnitt. Fig.* 3. Gute Eigenschaften eines *Handzirkels.*
IV. *Winkel.*
1). Seine *Schenkel*, (*Scheitel.*) Benennung.
In jedem Kreise sind die Bögen welche gleichen Winkeln beim Mittelpunkt entgegenſtehen, einander gleich und umgekehrt. (denn sie paſsen auf einander oder *decken* sich.
2). Eintheilung des Kreiſes in 360°=21600′=1296000″..... (400°=40000′=4000000″) *Grade, Minuten, Sekunden, Tertien...*
3). *Maſs* eines Winkels.
4). *Nebenwinkel*: sie machen zusammen 180° aus, und umgekehrt.
5). Die *an der Spitze entgegengesetzte Winkel* sind gleich und umgekehrt.
V. *Dreyeck.* Seine *Seiten*, - *Scheitel.*

§ 3. *Von den geraden Linien welche man von jedem Punkte bis an den Umfang eines Kreises ziehen kann.* Fig 3 4. 5. 6.
I. Aus allen Geraden welche man von einem andern Punkt *a* als den Mittelpunkt bis an einem Umfang ziehen kann, iſt jene die groiste

welche durch den Mittelpunkt gehet, jene die kleinste deren Verlængerung durch den Mittelpunkt gehet: die übrigen werden immer grösser u. s. w.

II. In zwey Dreyecken welche zwo Seiten wechselweise gleich haben ist jene dritte Seite grösser die dem grösseren Winkel gegenübersteht und umgekehrt.

III. Wenn also zwey Dreyecke alle drey Seiten, oder zwo Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel, oder endlich eine Seite und die zweyn daran liegenden Winkel wechselweise gleich haben; so decken sie sich d. i.

IV. In demselben oder gleichen Kreisen sind.

1). Die Sehnen, gleich welche gleichen Winkeln beym Mittelpunkte gegenüber stehen: und umgekehrt.

2). Hingegen ungleich und næmlich grösser u. s. w.

3). So lange daher Bögen unter 180 Graden stehen, so sind in demselben oder gleichen Kreisen die Sehnen gleicher Bögen, und die Bögen gleicher Sehnen gleich und umgekehrt.

4). Daraus folgt die Art einen Winkel der einem gegebenen gleich ist, zu zeichnen.

§ 4. *Von den geraden Linien, welche von einem Punkte auf eine gerade Linie gezogen werden können.* Fig. 5. 6 7. 8.

I. *Rechter Winkel*=90°; (90°) *Schiefe* Winkel—*Stumpfer*—*spitzer* Winkel. *Senkrechte. Schiefe* Linien. *Fig.* 5.

II. Aus allen Geraden, welche man von einem Punkte auf eine andere Gerade ziehen kann; ist die Senkrechte die kleinste, die andern werden immer grösser, und weichen immer mehr, und die gleiche gleichviel von der Senkrechten ab: durch jeden Punkt ist auf eine und dieselbe Gerade nur eine Senkrechte möglich: und eine Gerade kann den Umfang nur in zwey Punkten *schneiden*, oder in einem Punkte *berühren. Tangente. Berührungspunkt* Fig. 5.

III. Zeichnung einer *Tangente*.

IV. Eigenschaft einer Senkrechten die vom Mittelpunkt einer Linie geführt ist.

V. Diese Eigenschaften auf Sehnen und Bögen angewandt. *Fig. 6.*

VI. Auf das *gleichschenklichte* Dreyeck.

VII. Man kann also durch jeden Punkt auf jede Gerade eine Senkrechte, und durch jeden Punkt eines Umfanges eine Tangente ziehen, und jede Gerade, jeden Winkel, und jeden Bogen halbiren.

VIII. In jedem Dreyecke sind die Winkel, welche gleichen Seiten, und die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüber stehen, einander gleich und umgekehrt.

IX. Je mehr die Geraden welche man von einem Punkte auf eine Gerade zieht, von der Senkrechten abweichen, desto kleiner werden die Winkel welche der Senkrechten entgegenstehen.

X. Daraus entstehen das *rehtwinklichte* das *stumpfwinklichte* und das *spitzwinklichte* Dreyeck. *Hypothenuse. Kathete.* 5. Fælle wo zwey rechtwinklichte Dreyecke vollkommen gleich sind. *Fig.* 7. 8.

XI.

XI. In jedem Kreise sind die Senkrechten welche man von dem Mittelpunkte auf die Sehnen zieht, gleich oder kleiner, nachdem die Sehnen gleich oder gröſser sind: und umgekehrt. *Fig.* 6.

XII. Noch drey Fælle, wo Dreyeke auf einander paſsen. (Ergænzung zu § 3. N° III.) *Fig.* 7. 8.

1). Dreyecke, weche zwo Seiten und den der gröſseren Seite entgegengesetzten Winkel wechselweise gleich haben sind vollkommen gleich.

2). Sie sind noch vollkommen gleich wenn in dem letzten Fall der Winkel der kleineren Seite entgegen gesetzt iſt, und der Winkel welcher der gröſseren Seite gegenuber ſteht, in beyden Dreyecken spitz oder in beyden ſtumpf iſt. Endlich

3). Sind Dreyeke, welche eine Seite, einen anliegenden, und den entgegengesetzten Winkel wechselweise gleich haben, vollkommen gleich.

§ 5. *Von den Senkrechten, welche von den Punkten einer Geraden auf eine andere Gerade gezogen werden können.* Fig. 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

I. Venn man von was immer für Punkten einer Geraden auf eine andere Senkrechte zieht und die erſte Gerade auf eine dieser Senkrechten schief ſteht, so ſteht sie schief auf alle, und alle sind ungleich: umgekehrt; sind zwo von diesen Senkrechten ungleich; so iſt die erſte Gerade schief auf alle, und alle ungleich. *F.* 9. Sind also zwo aus den Senkrechten, welche man von einer geraden zieht gleich; so sind alle gleich und ſenkrecht auf die erſte. *Fig.* 10.

II. *Gleichlaufende* oder *parallele* Geraden. Sie sind es also wenn sie auf eine dritte ſenkrecht sind, oder zwo Senkrechte zwischen ihnen gleich sind.

1). Es læſst sich durch jeden Punkt mit einer gegebenen Geraden allemal eine gleichlaufende ziehen.

2). Gleichlaufende welche einen Punkt gemein haben, machen allemal eine und dieselbe Linie aus; und zwo verschiedene Gleichlaufenden, können einander nirgends begegnen.

3). Wenn eine von zwey Gleichlaufenden auf eine andere ſenkrecht iſt; so iſt es auch die andere.

4). Wenn zwo Geraden mit einer dritten gleichlaufen; so sind sie auch gleichlaufend unter sich.

5). Wen zwo gleichlaufende Geraden von einer dritten geschnitten werden; so sind die *Wechselwinkel*, wie auch der æuſsere und der innere entgegengesetzte Winkel einander gleich, und die zwey inneren entgegengesetzten machen zusammen 180 Grade aus: und umgekehrt. Zeichnung der Gleichlaufenden. Zeichnung mitteiſt eines hölzernen rechtwinklichten Dreyecks und eines Lineals. (Das Dreyeck muſs eine Kathete von 1 Schuh und die andere von 4 bis 6 Zoll zur Længe haben. Seine Prüfung.) *Fig.* 15.

6). Wenn eine Gerade eine aus zwo Gleichlaufenden ſchneidet; so ſchneidet sie auch die andere.

7). Jede zwo Geraden sind also gleichlaufend, oder sie schneiden sich in einem Punkte. Und daher sind jede zwo Geraden welche sich nirgends schneiden, gleichlaufend.

8). Bewegt sich eine der beiden Gleichlaufenden um einen Punkt auf derselben, so læsst sich der erste Durchschnittspunkt mit der zweyten Gleichlaufenden nicht bestimmen, und der Durchgang der *Positiven* in die *Negative* Grösen geschiehet durch o oder ∞. *Fig.* 11.

9). Wenn zwo Geraden welche sich schneiden, mit zwoen andern welche sich auch schneiden, wechselweise gleichlaufen; so sind die Winkel, welche um einen Durchschnitt liegen, den Winkeln, welche um den andern Durchschnitt liegen, gleich. *Fig.* 12.

10). Wenn zwo Sehnen gleichlaufen; so schliessen sie beiderseits gleiche Bögen ein: und umgekehrt. *Fig.* 6.

11). Wenn zwo Geraden zwischen zwo Gleichlaufenden unter gleichen Winkeln mit einer aus diesen Gleichlaufenden gezogen sind; so sind jene Geraden einander gleich und umgekehrt. *Fig.* 13.

12). Gleichlaufende zwischen Gleichlaufenden sind gleich. Und sind zwo gleichlaufenden gleich, so sind auch die Geraden, welche ihre Ende zusammenhængen, gleichlaufend und gleich.

III. Bestimmung und Zeichnung der Dreycke Fig. 7, 8.

1. *Fall.* Gegeben die drey Seiten. Die Zeichnung wird unmöglich, so bald die kleinste nicht gröser ist als der Unterschied der zwo andern.

2. *Fall.* Zwo Seiten und der eingeschlossene Winkel. Diese Zeichnung ist allezeit möglich.

3. *Fall.* Zwo Seiten und der Winkel, welcher der gröseren entgegensteht: allzeit möglich.

4. *Fall.* Zwo Seiten und der Winkel welcher der kleinern entgegensteht, mit der Gattung des Winkels welcher der gröseren Seite gegenüber stehet.

Diese Zeichnung wird unmöglich, so bald die kleinere aus den gegebenen Seiten kleiner ist als die Senkrechte welche von ihrem Durchschnittspunkt auf die dritte Seite geführt ist.

5. *Fall.* Eine Seite nebst den zween anliegenden Winkeln.

Diese Zeichnung wird unmöglich, sobald die gegebenen Winkel zusammen 180 Grade oder über 180 Grade ausmachen.

6. *Fall.* Ist endlich eine Seite, ein anliegender und der entgegengesetzte Winkel gegeben. Die Möglichkeit der Zeichnung ist wie die vorhergehende.

Eben diese Zeichnungen lasen sich auf die rechtwinklichten und gleichschenklichten Dreyecke anwenden, wenn soviel Stücke davon gegeben sind, als das Dreyeck bestimmen. *

§ 6.

---

* Diese Sætze nebst den folgenden, von dem Mase der Winkel auser dem Mittelpunkte, sind gröstentheils aus dem 2. Bande der fortreflichen Analytischen Abhandlung der Aufangsgründe der Mathematik des Hr. v *Hauser*, entlehnt. Ueberhaupt wird der Leser, hæufige Auszüge mit dem beygefügten Nahmen

§ 6. *Von dem Maſse der Winkel, welche ihren Scheitel nicht im Mittelpunkte haben und der Beſtimmung des Kreises.*

I. Der Winkel beim Umfang (er sey von zwo Sehnen, oder von einer Sehne und einer Tangente formirt) hat den halben Bogen, der Winkel inner dem Kreiſe die halbe Summe der Bögen: und der Winkel auſser dem Kreise (er ſey von Sekanten oder Tangenten formiert) den halben Unterschied der Bögen, welche zwischen ihren Schenkeln begriffen sind, zum Maſse. *Fig. 16. u 17.*

Iſt das Maſs z. B. des Winkels den die Tangente mit der sehne macht, einmal gefunden, so kann daraus auf das Maſs aller übrigen, noch auf eine andere Art, geschloſsen werden. *Fig. 18. u 19.*

II. Hieraus folgt daſs die Winkel in einem und demselben Abschnitte gleich sind; und namentlich spitze, rechte oder ſtumpfe sind ie nachdem der Abschnitt gröſser, gleich oder kleiner als der Halbkreis iſt. (*Rückenwinkel.*)

III. Durch jeden Punkt auſser einem Kreise laſsen sich allemal zwo Tangenten auf ebendenselben ziehen. *Fig. 17.* (u. 36.)

IV. Zu jeden zwey Kreisen welche keinen Punkt gemein haben, können allemal vier gemeine Tangenten gezogen werden. *Fig. 20, 21.*

V. Inner einen Winkel einen Kreis beschreiben, welcher die Schenkel deſselben berührt.—Iſt eine unbeſtimmte Aufgabe. *Geometrischer Ort* der Aufgabe.

VI. Setzet man zu dieser unbeſtimmten Aufgabe, noch eine Bedingung hinzu, z. B. daſs der Kreis noch eine dritte Gerade, die die zwey erſten durschneidet berühre, so wird die Aufgabe beſtimmt.

Hier læſst sich allemal auf einer und auf der andern Seite dieser dritten ein Kreis beschreiben, welcher diese drey Geraden berührt.

VII. Der Kreis wird durch drey Tangenten; durch eine Tangente; ihren Berührungspunkt, und was immer für eine Tangente; durch eine Tangente, ihren Berührungspunkt, und was immer für einen andern Punkt des Umfanges; oder durch jede drey Punkte des Umfanges beſtimmt, und kann in jedem Falle gezeichnet werden; und

VIII. Es læſst sich jedem Dreyecke ein Kreis ein und umschreiben. *F. 22.*

§ 7. *Von den Winkeln geradelinigter Figuren.*

I. Die drey Winkel eines jeden Dreyeckes machen zuſammen 180 Grad aus.

II. Zween Winkel, welche zusammen 180° betragen, haben gleiche *Komplemente*; und umgekehrt.

III.

---

men des Verfaſsers, von welchen sie entlehnt sind, hier finden: besonders aber die eines *Maclaurin, Euler, T. Mayer, Klügel, Kæstner* u, d. g. Da es die ausgesuchtesten Stellen sind und meine Absicht dem Leser aus dem Vorberichte bekannt ist, daſs næmlich gegenwærtige Darstellung nicht allein die Sammlung von den wichtigsten mathematischen Wahrheiten, sondern auch die Quellen wo sie meiner Ueberzeugung nach am besten vorgestellt und erwiesen stehen, enthælt, so muſste hier freylich zugleich eine Art vom Compilation statt finden, sie wird aber um desto brauchbarer; setzt den Besitz dieser Quellen zum voraus, oder erwekt den Trieb zu ihrer Anschaffung.

III. Der Winkel, welchen eine Sehne mit dem Halbmeſser macht, iſt allemal das Komplement ſowohl der ſtumpfen als der ſpitzen Winkel beym Umfange, welche auf derſelben Sehne ruhen.

IV. Der æuſsere Winkel eines Dreyecks iſt allemal der Summe der zweyn inneren entgegengesetzten gleich, und folglich gröſser als jeder aus dieſen. *Fig.* 24.

V. Der Halbmeſser eines jeden Kreiſes læſst ſich allemal genau 6 mal als eine Sehne auf den Umfang tragen. *Fig* : 26.

VI. Jedes ordentliche Vieleck, deſsen Anzahl der Seiten eine Potenz von 2. oder ein Produkt aus 6. in eine Potenz von 2 iſt, kann einem gegebenen Kreise ein und umgeschrieben werden.

VII. Es kann in jedem ordentlichen Vielecke der Mittelpunkt gefunden werden, und demselben ein Kreis ein und umgeschrieben werden. F. 27.

VIII. Man erhælt die Summe aller Winkel eines jeden Vieleks, wenn man 180° mit der Anzahl der Seiten weniger zwey multiplicirt, und jeden Winkel in einem ordentlichen Vielecke, wenn man 180° mit der Anzahl der Seiten weniger zwey multiplicirt, und das Produkt wieder durch die Anzahl der Seiten dividirt.

IX. In jedem Vielecke betrægt die Summe aller æuſsern Winkel 360° *Fig.* 25. und

X. In einem ordentlichen Vielecke findet man jeden æuſsern Winkel, wenn man 360° durch die Anzahl der Seiten dividirt, und dann auch jeden innern Winkel, wenn man den æuſsern von 180° abzieht.

§ 8. *Von dem Virecke.*

I. Die entgegengesetzten Winkel eines Vierecks, welches einem Kreise eingeschrieben iſt, machen allemal 180° aus und umgekehrt. *Fig.* 23.

II. In einem ſolchen Viereck machen die zwo *Diagonalen* mit jeden zwey entgegengesetzten Seiten, gleiche Winkel und umgekehrt.

III. *Trapezoid*: *Trapez*: *Parallelogramme.* *Fig.* 14. 28. 29. 30. In jeden Parallelogramme sind die entgesetzten Seiten, und die entgegengesetzten Winkel gleich.

IV. *Rechtwinklichtes*, *Schiefwinklichtes* Parallelogramm. *Quadrat Raute. Længliche Raute.*

V. Jedes Viereck, deſsen zwo entgegengesetzte Seiten gleich und gleichlaufend sind, iſt ein Parallelogramm.

VI. Jedes Viereck, welches jede zwo entgegengesetzten Seiten gleich hat, iſt ein Parallelogram.

VII. 1). Die Diagonale theilet jedes Parallelogramm allemal in zwey vollkommen gleiche Dreyecke.

2). In jeden Parallelogramme wird eine Diagonale durch die andere halbirt: und

3). Jeder rechtwinklichte Parallelogramm hat zwo gleiche Diagonalen, und kann allemal einem Kreise eingeschrieben werden

4). Nach dieser Eigenschaft kann auf einem Bogen Papier ſehr leicht ein Rechteck gezeichnet werden, deſsen Seiten bis an den Rand deſselben fallen. *Fig.* 29.

VIII. Ist die Seite eines Quadrats zweytheilich so besteht das ganze Quadrat aus den Quadraten der beyden Theile, und aus dem doppelten Rechteck dieser Theile. (Dieser Satz ist der Grund von der Ausziehung der Quadratwurzel und der folgende wird auch hæufig gebraucht. *Fig* 28.

IX. Der Unterschied zwischen zwey Quadraten ist einem Rechtecke gleich, defsen die *Grundlinie* der Summe, und die *Höhe* der Differenz der beiden Seiten gleicht.

X. Wenn ein rechtwinklichtes und ein schiefwinklichtes Parallelogram zwischen zwo Gleichlaufenden und auf derselben Grundlinie stehen; so sind sie ihrem Flæcheninhalte nach gleich. *Fig.* 30.

XI. Man findet den Inhalt eines Rechteckes oder eines Parallelogrammes wenn man seine Grundlinie in die Höhe multiplicirt.

XII. und die des Dreyecks wenn man von diesem Produkte die Hælfte nimmt. *Fig.* 30.
Genauer læfst sich dieses nach der Lehre von den proportionirten geraden Linien erweisen.

§ 9. *Von den proportionirten geraden Linien.*

I. Durch fortgesetzte Halbirungen einer Linie, gelangt man zu ihrem solchen Theil, welcher kleiner ist als eine noch so kleine gegebene Linie. *Fig.* 31.
(Giebt die kleinere z. B. 10 mahl wiederholt eine gröfsere Linie, als die gröfsere gegebene, so ist der lezten $\frac{1}{10}$ Theil kleiner als das gegebene Stückchen).

II. Führt man in einem Dreyecke eine Gleichlaufende zu einer Seite, so theilt sie die zwey anderen Seiten, oder ihre Verlængerungen, (oder was immer für Geraden) in Proportiontheile. (Wenn auch die Verhæltnifse irrational sind.) und umgekehrt. *Fig.* 31.
Zum Beweise dieser fundamental Proportion kann man sich auch des Satzes bedienen.

III. Das næmlich Parallelogramme oder Dreyecke die einerley Höhe haben sich wie ihre Grundlinien verhalten: auch wenn der letzten Verhæltnifs irrational ist: und umgekehrt. *Fig.* 32.

IV. Die Dreyecke die in *Fig.* 31. entstehen sind gleichwinklicht und das Verhæltnifs ihrer Grundlinien ist dem Verhæltnifse ihrer *gleichnamigen* Seiten, oder ihrer Höhen gleich.

V. Bilden vier Linien eine geometrische Proportion so ist das Rechteck aus den æufseren dem Rechtecke aus den inneren gleich und umgekehrt: (Sind die zwey inneren gleich, so verwandelt sich das Rechtek in ein Quadrat). Dieses gilt auch für Parallelogramme und Dreyecke wenn ihre Grundlinien mit ihren Höhen, oder die den gleichen Winkel umfafsende Schenkel in einem verkehrten Verhæltnifse stehen. Darauf beruhen die

VI. Verwandlungen der fundamental Proportion.

VII. Wenn zwo Gleichlaufenden von mehreren Geraden welche nicht gleichlaufen, in proportionirte Theile geschnitten werden; so schneiden sich alle diese Geraden in demselben Punkte.

VIII.

VIII. Halbirt eine Gerade einen Winkel eines Dreyeks; so schneidet sie die entgegengesetzte Seite in zween mit den übrigen Seiten proportionirte Theile, und umgekehrt. *Fig.* 31.

IX. Zieht man in einem rechtwinklichten Dreyek durch den Scheitel des rechten Winkels auf die Hypothenuse die Senkrechte; so ist diese die mittlere Proportionirte zwischen den Theilen der Hypothenuse: jede Kathete aber die mittlere Proportionirte zwischen der ganzen Hypothenuse und dem anliegenden Theile derselben. Oder das Quadrat der Senkrechten u. s. w. *Fig.* 33. Hieraus folgt.

1). Das Quadrat der Hypothenuse ist der Summe der Quadraten aus den beiden Katheten gleich, und umgekehrt.
(Dieses kann auch auf eine ganz geometrische Art erwiesen werden. Fig. 34.)

2). Das Quadrat der grösten Seite in dem stumpfwinklichten Dreyeke ist gleich zur Summe, und in dem spitzwinklichten Dreyecke ist das Quadrat der, dem spitzen Winkel entgegengesetzten Seite, zur Differenz der Quadrate aus den beiden andern Seiten die den gegebenen Winkel umfassen, mehr weniger dem doppelten Rechtecke aus der Grundlinie und ihrem Abschnitt zwischen der Senkrechten und dem Scheitel des Winkels. Fig. 34.

X. Ziehet man durch einen beliebigen Punkt innerhalb oder ausser dem Kreis zwey Linien die den Umfang beiderseits begegnen, so sind die Theile der einen, zwischen dem gegebenen und den Durchschnittspunkt, verkehrt zu zwey solchen Theilen der andern proportionirt oder u. s. w. *Fig.* 35. 36.

1). Wird aus einer der beiden Sekanten eine Tangente und aus den beiden Sehnen die eine ein Durchmesser und die andere senkrecht auf ihm; so wird in dem ersten Falle das Quadrat aus der Tangente dem Rechtecke aus der ganzen Sekante und ihrem Theil ausser dem Kreise gleich: und in dem anderen Falle u. s. w.

2). Begegnen sich eine Tangente mit einer Sekante, die durch den Mittelpunkt gehet, so wird das Quadrat aus der Entfernung zwischen dem Mittelpunk und den Durchschnittspunkt, gleich u. s w. Oder halbirt man eine gegebene Linie und nimmt auf ihrer Verlængerung einen beliebigen Punkt an, so ist das Quadrat. u. s. w.

3). Zeichnung der Tangente wenn der Punkt ausserhalb der Kreises gegeben ist.

§ 10. *Anwendungen der proportionirten Geraden Linien.*

I. Eine gegebene Gerade in gleiche Theile oder nach einer gegebenen Verhæltniss einzutheilen. *Fig.* 31.
(Auch wenn das Verhæltniss irrational ist Fig. 33. Durch Zerlegung in Faktoren.)

II. Sechs Methoden zu drey gegeben Geraden die vierte proportionirte zu finden. Eben so für die dritte proportionirte. *Fig.* 31.

III. Zwo Methoden, zwischen zwo gegebenen Geraden die mittlere proportionirte zu finden. *Fig.* 33.

IV. Die

IV. Die *Hypothenuse* ist der *Wurzel* aus der Summe der Quadrate beeder *Katheten*, und jede Kathete der Wurzel aus dem Unterschiede des Quadrates der Hypothenuse und des Quadrates der andern Kathete gleich. *Fig.* 33. 34. Lehrsatz für stumpfwinklichte und schiefwinklichte Dreycke.

V. Die Ausführung der bestimmten Gleichungen des 1ten und des 2ten Grades beruhet auf den dreyen vorhergehenden Aufgaben, mit Zuziehung des Satzes daſs næmlich
Jeder Bruch deſsen Zæhler zwey Faktoren mehr als der Nenner deſselben enthælt, ein Ausdruck eines Rechtecks: jeder Bruch, deſsen Zæhler nur einen Faktor mehr als der Nenner deſselben enthælt, ein Ausdruk einer Linie, und folglich jeder Bruch deſsen Zæhler und Nenner gleichviel Faktoren enthalten, nur ein Ausdruk des Verhæltniſses zweyer Linien oder einer Zahl ist, da jene *Dimensionen (Ausmeſsungen)* heiſsen. z. B.

1). $x = \frac{bc}{a}$. *Fig.* 31. $= x = \frac{bcm}{ae} = \frac{\frac{bc}{a}}{e} \cdot m$; $x = \frac{bc}{a} + \frac{de}{m} - \frac{pq}{n}$;

$$x = \frac{aa - bb}{c} = \frac{(a+b)(a-b)}{c}; \quad x = \frac{ab + ac - ad}{n} = \frac{a(b+c-d)}{n};$$

für $x = \frac{ab + mn - pq}{e}$ setze man $mn = ac$; und $pq = ad$; so erhælt man $x = \frac{a(b+c-d)}{e}$; $x = \frac{abc + abd}{mm - nn} = \frac{\frac{ab}{m-n} \cdot (c+d)}{m-n}$.

2). $x = \sqrt{ab}$. *Fig.* 33. Für $xx = aa - bb$ ist $x = \sqrt{(a+b)(a-b)}$; $xx = \frac{abc}{m}$ und $x = \sqrt{\frac{ab}{m} c}$.

Für $xx = ab + cd - mn$ setze man $cd = ap$; und $mn = aq$ so erhælt man $a : x = x : b + p - q$;

3). $x = \sqrt{mm \pm nn}$. *Fig.* 34. Für $xx = aa + bc - ed$, setze man $bc = mm$; $ed = nn$ und $aa + mm = pp$ so erhælt man $x = \sqrt{pp - nn}$

4). Für die vermischten quadratischen Gleichungen ist die allgemeine Auflösung $x = \pm \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} \pm qq}$ daraus die allgemeine Ausführung. *Fig.* 37. Man ziehe für alle vier Gleichungen auf einer Linie eine Senkrechte $= q$, nimmt nachdem $\frac{p}{2}$ bejahend oder verneinend ist $\frac{p}{2}$ auf der bejahenden oder verneinenden Seite der Unbekannten x, und beschreibt aus 2 nachdem qq bejahend oder verneinend ist, mit dem Halbmeſser 13 oder 21 einen Halbkreis, so werden die zwey Werthe der Unbekannten x, wenn qq bejahend ist, durch den Umfang, und wenn qq verneinend ist, durch die Senkrechten bestimmt.

Ist $q = \frac{p}{2}$; so wird $\sqrt{\frac{pp}{4} - qq} = 0$; und ist $q > \frac{p}{2}$ so wird $\sqrt{\frac{pp}{4} - qq}$

un-

unmöglich: dieses stimmt auch mit der Zeichnung überein. *
Soll man bey einer geometrischen Aufgabe eine Gleichung ausführen, so ist es bequem wenn man die Zeichnung auf der gegebenen Figur selbst anbringt, und von den gegebenen Linien Gebrauch zu machen sucht.

Bey den mehr zusammengesetzten geometrischen Aufgaben werden die fünf Theile wie bei den algebraischen Auflösungen beobachtet. (*Nominatio, Æquatio seu Conditio, Reductio, Solutio, Verificatio.*) Beyspiele davon kommen unten vor.

VI. Es læsst sich aus dem gegebenen Halbmesser und der Sehne eines Bogens allemal auch die Sehne des halben Bogens berechnen. *F. 40 u. 72.* und daraus durch Annæherung die Længe des Umfanges. *Fig. 72.*

VII. Verfertigung der Massstæbe und Methoden für noch kleinere Eintheilungen der Linien und Bögen.

1). Einfache und zusammengesetzte Massstæbe. Fig. 41. (Hr. *Hogrewe*: Prisma). Tausendtheiligter Mamsstab. Für Decimal, Duodecimalmass. *Feder-Zirkel. Fig.* 42. Man muss die Abtheilungen immer vom Anfangspunkt næhmen.

2). *Proportional* Zirkel. Seine Einrichtung. Prüfung und mannigfaltiger Gebrauch. *Fig.* 43.

3). *Geradelinigter Transporteur*: Soll den gemeinen vertreten. *Fig.* 44.

4). Theilung des *Vernier* für sehr kleine Linien und Bögen. *Fig.* 45.

5). *Stangenzirkel* mit einer *Micrometer-schraube* zu *grössern* und *sehr kleinen* Entfernungen. *Fig.* 46:
Mittelst zwey hölzernen rechwinklichten Dreyecken mit den Abtheilungen auf den Katheten, des einen in Linien, und des Vernier auf jenen des andern: oder mittelst eines Stangenzirkels mit einer Micrometer Schraube lassen sich Gleichlaufende in der Entfernung von $\frac{1}{100}$ einer Linie ziehen.

6). Die Micrometer Schraube kann also den Vernier vertreten.

7). Eintheilung des Umfanges in 360° in 400° in noch kleinere gleiche Theile mittelst Bögensdurchschnitte nach *Mascheronischer* Art: *Fig.* 47. (Man s. s. Geometre du Compas 8° 1798 dem Ober-Consul BUONAPARTE zugeeignet).
(Solcher Methoden bedient man sich zur genauen Eitheilung der Quadranten besonders in der Astronomie).

VIII. Man

---

* Diese vier Formeln sind wegen ihrer Allgemeinheit und ihrem hæufigen Gebrauche sehr wichtig. Ich habe mittelst einer geometrischen Verzeichnung, nach Art des Hr. *Hausers*, sie anschaulich gemacht. Des Hr. *Klügels* Bemerkung fællt hier in Sinn: „ Ueberhaupt hat man bey Erlernung der Mathematik zu bemerken, dass man sich nicht zu lange mit Untersuchung einzelner Sætze beschæftige, sondern die allgemeinen Gleichungen zu erhalten suche, worin die Verbindungen der zusammengehörigen Grössen dargestellt werden. Wenn man sich den Gebrauch dieser Gleichungen durch ihre Anwendung auf einige besondere Fælle geläufig gemacht hat, so braucht man nicht auf alle mögliche sich einzulassen, die man im vorkommenden Falle auch ohne fremde Hülfe aufzulösen im Stande seyn wird: Diese Methode erspart viel vergebliches Lesen.

VIII. Man soll eine Gerade *nach dem mittlern und æusseren Verhaltniss* theilen. *Fig.* 48.

1). Der grössere Theil wird der Seite des ordentlichen dem Kreise eingeschriebenen Zehneks gleich und

2). Das Quadrat der Seite des ordentlichen einem Kreise eingeschriebenen Funfecks ist dem Quadrate der Seite des ordentlichen Sechsekes mehr dem Quadrate der Seite des ordentlichen Zehnekes, welche demselben Kreise eingeschrieben sind, gleich. Daraus

3). Die geometrische Zeichnung eines Fünfeks und eines Zehneks. F. 27.

§ 11. *Von den æhnlichen Dreyeken.*

I. *Aehnliche* Dreyeke sind deren Winkel einander gleich, und die gleichnamigen Seiten proportionirt sind.
Die Dreyecke in § 9. n° 11. waren also æhnlich.

II. Fælle wo Dreyeke æhnlich sind. *Fig.* 49.

1). Sind in jeden Dreyeken zwey Winkel einander gleich. 2). zwo Seiten proportionirt und die eingeschlossenen Winkel gleich. 3). zwo Seiten proportionirt, und die den grössern Seiten entgegengeseszten Winkel gleich. 3). zwo Seiten proportionirt, die dem kleinern Seiten entgegengesetzten Winkel gleich, und beyde den grossern Seiten entgegengesetzten Winkel spitz oder beyde stumpf. 5). alle drey Seiten proportionirt, 6). alle drey Seiten gleichlaufend oder. 7) alle drey Seiten senkrecht aufeinander *Fig.* 50. So sind die Dreyeke in jedem Falle æhnlich.

Der Beweis von diesen Sætzen beruhet auf § 9. n° IV. dass næmlich zwey Dreyeke in dem zusammengesetzten Verhæltnisse ihrer Grundlinien und Höhen oder ihrer zwey gleichnamigen Seiten sind.
Hieraus læsst sich auch leicht erweisen dass

III. Æhnliche Dreyecke sich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten verhalten.

IV. Vier Methoden, auf einer gegebenen Geraden ein dem gegebenen Dreyecke, æhnliches Dreyek zu zeichnen. *Fig.* 49. 51.

§ 12. *Von den æhnlichen Figuren.*

I. Figuren sind *æhnlich* in denen die Winkel einander gleich und die gleichnamigen Seiten proportionirt sind.
Sind also zwey Figuren aus æhnlichen Dreyeken zusammengesetzt so sind sie æhnlich.

II. Es læsst sich auf einer gegebenen Seite allemal eine Figur, welche einer gegebenen æhnlich ist, zeichnen: wenn man nach der vierten Methode die gleichnamigen æhnlichen Dreyeke nach einander zeichnet und die Scheitel derselben eben so wie in der gegebenen Figur durch Linien verbindet. *Fig.* 52. 53.
Es hæufen sich aber immer grössere Fehler zusammen, die immer grössere hervorbringen.

III. Dieser Einfluss der unvermeidlichen Fehler verschwindet, wenn man die Punkte auf zwey Geraden die eine bestimmte Lage haben, reducirt. *Fig.* 54. 55.

IV Sind die Seiten grösser, als dass man sie bequem mit dem Zirkel fassen kann; so zeichnet man ein Netz aus Quadraten, und verfæhrt wie es aus der Figur deutlich zu ersehen ist, um eine mit der gegebenen æhnliche und im gegebenen Verhæltniss mit ihr stehende Figur zu bekommen. *Fig.* 56. 57.

V. Æhnliche Figuren können allemal in gleich viel æhnliche Dreyeke, derselben Ordnung nach, eingetheilet werden. *Fig.* 58. 59.

VI. Die Perimeter æhnlicher Figuren verhalten sich wie ihre gleichnamigen Seiten, die æhnlichen Figuren aber wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.
Die Perimeter ordentlicher Vielecke von gleich viel Seiten, verhalten sich wie ihre Halbmesser; diese Vieleke aber, wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

VII. Kreise sind æhnliche Figuren, weil sie auf æhnliche Art hervorgebracht werden, oder als regulære Vielecke von unendlich viel Seiten, angesehen werden können; folglich findet auch bey ihnen das obige Verhæltniss statt. Dieser Satz wird aber noch genauer unten erwiesen.

§ 13. *Von der Berechnung der Flæcheninhalte ebener Figuren.*

I. Man soll das Verhæltniss eines Quadrats zu einem Rechtecke durch Linien oder durch Zahlen ausdrücken. *Fig.* 60.
Man verwandle das gegebene Rechtek in ein anderes das die Seite des Quadrats zur Höhe habe, oder man suche eine vierte proportionirte zu der Seite des Quadrats und zu den beiden Seiten des Rechtecks.
Nimmt man das Quadrat für die Einheit an, so drückt die vierte proportionirte den Flæcheninhalt des Rechtekes aus. Dieses stimmt mit der verkürzten Regel § 8. n° XI. überein.

II. Der Flæcheninhalt eines Dreyeks ist die Hælfte von jenem eines Rechteks: kann aber wenn seine Seiten gegeben sind unmittelbar darnach und sehr bequem für die Rechnung mit den Logarithmen nach der Formel Fig. 61. wo s den halben Umfang des Dreyeks bedeutet, gefunden werden, oder aus den Fig. 34, 36.
Eine æhnliche Formel bekommt man für ein einem Kreise eingeschriebenes Vierek. Sie ist $A=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

III. Es wird also leicht sein den Flæcheninhalt auch einer jeden Figur zu finden, weil sich diese in Dreyeke eintheilen læsst. Bequemer aber erlangt man diese Absicht durch die.

IV. Formel für den Flæcheninhalt eines Trapezes Fig. 62.

V. Daraus læsst sich eine Formel für den Flæcheninhalt einer jeden geradelinichten Figur herleiten Fig. 63. und

VI. die für eine jede krummlinichte Fig. 64.

§ 14. *Ergænzung der Theorie der Tangenten und des Kreises.*

I. Sind die Halbmesser von zwey Kreisen nebst der Entfernung von ihren Mittelpunkten gegeben, so kann man darnach eine Formel für die Entfernung der Durchschnitte ihrer Tangenten von dem Mittelpunkte des einen von diesen Kreisen finden Fig. 65.

Be-

Besondere Fælle giebts hier wenn die Kreise gleich sind, oder einer in Ansehung des andern unendlich klein, oder ihre Entfernung unendlich groſs ist.

(Drehen sich diese Figuren um ihre gemeinschaftliche Axe. So bilden sie Kugeln und Kegel: ist also eine davon z. B die gröſsere eine leichtende Kugel, so wird nach der obigen Formel die Længe des Schattens von der andern bestimmt Man siehet also zum voraus den Gebrauh dieser Formel in der Astronomie wo die erste Kugel die Sonne und die andere die Erde bedeuten wird.)

II. Man soll einen Kreis beschreiben der zwey Linien berühre und durch einen gegebenen Punkt zwischen denselben gehe. Fig. 66. Die Formeln für besondere Fælle und ihre Zeichnungen, können leichte nach der Grundformel gefunden werden.

1). z B. wird $a=\infty$ so wird $x=\pm\sqrt{2bc-cc}$ oder $c:x=x:2b-c$. F. 67.

2). Wird $c=b$ so ist $x=\pm b$.

3). Ist statt der Tangente noch ein Punkt gegeben, also eine Sehne und eine Tangente, so læſst sich auch eine æhnliche Zeichnung nach obiger Grundformel leicht verrichten.

4). Für eine mit der Tangente gleichlaufende Sehne ist die Zeichnung der Figuren 68. und 69. die Formeln dazu $xx=aa+(1-x)^2$ und $xx=aa+(x-c)^2$.

Sind also zwo Tangenten und was immer für ein Punkt des Umfanges, oder eine Tangente und jede zwey Punkte des Umfanges gegeben, so kann der Kreis in jedem Falle beschrieben werden.

III. Ein Kreis kann noch mittelst seiner Gleichung gezeichnet werden, und solche Arbeit heiſst Construction durch Punkte. Fig. 70.

IV. Um die übrigen Eigenschaften des Kreises nach der Erschöpfungs (exhaustions) Methode der Alten entwikeln zu können, müſsen wir sie durch nachfolgende Lehnsætze erlæutern.

1). Theilt man z.B. die Höne eines Dreyeks in gleiche Theile durch gleichlaufende Linien, und macht darauf umschriebene und eingeschriebene Parallelogramme, so ist die Differenz zwischen diesen beiden Summen, dem ersten Parallelogram, næmlich jenem auf der Grundlinie des Dreyeks gleich. Fig. 71.

2). Es læſst sich also dieser Unterschied so klein wie man will folglich kleiner als ein gegebenes Stückchen Elæche machen: (aus § 9. n° I. und Fig. 31). Daraus

3). Læſst sich alles von dem Dreyek als der Grænze der umgeschriebenen und eingeschriebenen Parallelogramme behaupten was man für die letzten Figuren schon entdekt hatte: daſs z. B die Dreyeke, die gleiche Höhen haben sich wie ihre Grundlinien verhalten; denn widrigen Falls wurde was Ungereimtes zum Schluſs des Beweiſes hervorkommen.

V. Auf eine gleiche Art lieſse sich auf den Kreis und seinen Umfang, und überhaupt auf Kreise, alles das anwenden, was für die regulæren Vieleke die man dem Kreise um und einschreiben kann, schon bestimmt und entdeckt worden. Dieser Satz erstrekt sich auch

auf

auf Körper und ihre Flæchen wie wir unten sehen werden. Er bestimmt die sogenannte Grænzmethode, deren sich der Hr. *l'Huilier* bedient um das Unendliche aus der Mathematik schlechterdings zu verbannen.

(M. S. Seine Preisschrift. Exposition élémentarie des Principes des calculs supérieurs &c. Berlin 1786. 4to. Und Seine von der ehemaligen polnischen Educations Kommission genehmigten für die national Erziehung bestimmten mathematischen Elementarwerke.).

Er gründet seine *geometrische* Darstellung auf die Vergleichung der homologen Glieder der Verhæltnisse. Es wære vielleicht zutræglicher für die Jugend die *Aritmetische* Darstellung der Grænzenmethode auf die Betrachtung der Exponenten der Verhæltnisse zu gründen. Dieser Meinung ist auch der Recensent des Hr. *l'Huilier* Werks in der A. L. Z. 1798. n° XVII. p. 152. und Hr. *Hauff* in seiner Uebersetzung der *Carnotschen* Infinitesimal Rechnung mit Zusætzen p. 103.

Ein Beyspiel der letzten Methode ist in Fig. 72.

Für die Vergleichung der Flæcheninhalte müsste man f so erwæhlen, dass auch hier $Cf=(1+\frac{1}{n})r$ sey, und für CF die mitlere proportionirte zwischen CG und Cf næhmen. Daselbst sind auch Formeln

1). für x die Seite eines Vieleks von doppelter Anzahl der Seiten: daraus die

2). für π den Umfang eines Kreises von welchem der Durchmesser$=1$.
(Leichtere Methoden kommen in der *Infinitesimal* Rechnung vor:)

3) für α einen Bogen der dem Halbmesser gleich ist.

4). Für x' einen Bogen in Sekunden wenn sein Werth a in Theilen des Halbmessers gegeben ist.

5). Für p einen beliebigen Kreisumfang.

6). Für c den Flæcheninhalt eines beliebigen Kreises und endlich für eine *Krone*.

§ 15. *Von der Verwandlung der Figuren.*

I. Eine beliebige geradelinichte Figur in ein Dreyek zu verwandeln, wo auch des letzten Scheitel angewiesen seyn mag. Fig. 73.

II. Hat die Figur einwærtsgehende Winkel so vorwandelt man sie in auswærtsgehende wie man es aus der Fig. 74. ersiehet.
(Das ist man *reducirt die gebrochene Grænze*).

III. Da sich ein jedes Dreyek in ein Rechtek verwandeln læsst, so læsst sich auch eine jede geradelinichte Figur in ein Rechtek und in ein Quadrat Fig. 33. verwandeln. Folgende Methode des Hr. T. *Mayer* ist noch bequemer und allgemeiner.

IV. *Aufgabe.* Ein Trapez in ein gleich grosses Rechteck, dessen eine Seite gegeben ist zu verwandeln. Fig. 75.
und daraus die Auflösung der

V. *Allgemeinen Aufgabe.* Eine beliebige geradelinichte Figur in ein Rechteck dessen die Grundlinie gegeben ist zu verwandeln. F 76.

VI. Dieses Verfahren erstreckt sich auch zu den krummlinichten Figuren.
Konstruktion der Gleichung. Fig. 77.
Also braucht man hier nicht einmal die Ordinaten zu messen um die Flæche der Figur zu berechnen.

§ 16. *Von der Theilung der Figuren, und jener durch gleichlaufende Linien ins besondere.*

I. Ein Dreyeck in ein Trapez der die Grundlinie mit ihm gemein habe &c. zu verwandeln. Fig. 78.
Vermöge dieser Aufgabe kann man mittelst der Rechnung oder durch Zeichnung jede Figur durch Linien die zur Grundlinie gleich laufen in gleiche oder beliebige Proportiontheile eintheilen.

II. Ein Dreyek in ein anderes defsen ein Winkel und eine Seite die ihn umschlüfst gegeben sind, zu verwandeln. Fig. 79.

III. Es kann also auch eine beliebige geradelinichte Figur in ein solches Dreyek verwandelt werden.

IV. Ein Dreyek in ein anderes zu verwandeln, davon eine *Seite* eine gegebene Richtung habe Fig. 80.

V. Ein Dreyek durch Linien die aus seinem Scheitel gehen in gleiche oder proportionirte Theile einzutheilen. Fig. 81.

VI. Daraus und aus dem vorhergehenden kann ein Dreyek durch Linien die mit einer von seinen Seiten gleichlaufen in proportionirte Theile eingetheilet werden.

VII. Wære ein Trapez gegeben so vollende man das Dreyek um durch eine æhnliche Verrichtung die Theilungslinien auch bei ihm zu bekomen.

VIII. *Aufgabe.* Eine beliebige geradelinichtete Figur durch Linien die mit einer gegebenen Richtung gleichlaufen, in gleiche oder proportionirte Theile, einzutheilen. Fig. 82.
Durch Vereinigung der obigen Aufgaben wird die Auflösnng der gegenwærtigen leicht.
Es kann aber diese Arbeit auch noch auf folgende *Mayerische* Art verrichtet werden.

IX. Theilungen der Felder durch blofse *Rechnung.*

1). Von einem Trapez ein beliebiges Stück abzuschneiden. Fig. 83. 84.

Soll der Inhalt dieses Stücks $=p$ seyn, so ist $x=\frac{c(y-a)}{b-a}$;

$y=\sqrt{\left(\frac{2(b-a)p}{c}+a^2\right)}$ und $x=\frac{c}{b-a}\left(-a+\sqrt{\left(\frac{2(b-a)p}{c}+a^2\right)}\right)$

(Mittelst der Trigonometrie kann diese Formel für die Rechnung bequemer eingerichtet werden. Nimmt man næmlich hier einen Winkel, defsen Tangente $=\frac{A}{B}=$ dem Ausdruke bey $\surd$ so wird $x=\frac{ac}{a-b}$. tg w tg$\frac{1}{2}$w. Für $b-a$ negativ wære $x=\frac{ac}{a-b}$ sin w tg$\frac{1}{2}$w, und $y=a\,Secw$.)

2). Durch *Zeichnung.* Für die Höhe des dem gegebenen Stücke gleichen Dreyeks ist $m=\frac{2p}{c}$ folglich $x=\frac{c}{b-a}(-a+\surd[(b-a)m+a^2)]$.

Daraus die Zeichnung und eine æhnliche für $b<a$ Fig. 84.

3) Ein

3). Ein vorgegebenes dreyekigtes Feld durch Linien die mit einer Seite deſselben gleichlaufen, in eine beliebige Anzahl gleicher oder ungleicher Theile zu theilen. Fig. 85.

Hier wird $x = \sqrt{\frac{2cp}{b}}$ welches leicht zu berechnen iſt.

4). *Aufgabe.* Von einer vorgegebenen Figur Stucke abzuschneiden; die einen gegebenen Inhalt haben, und deren Scheidungslinien mit einer gegebenen Linie parallel laufen. Fig. 86.

Man setze hier $I = S'$; $I + II = S''$; $I + II + III = S'''$ u.s.w. und das übrige wird aus dem vorhergehenden erleichten.

X. Theilungen der Felder blos durch *Zeichnung.*

1). Ein gegebenes Dreyek dergeſtalt zu theilen, daſs die Theilungslinie mit einer gegebenen Seite parallel geht und des Stuks Inhalt sich zum ganzen Dreyek verhalte $= p : P$. Fig. 87.

2). Ein Dreyek dergeſtalt zu theilen, daſs die Theile sich wie die Theile der Grundlinien verhalten und die Theilungslinien mit der Höhe parallel laufen. Fig. 88.

3). Aus einem gegebenen Punkt in einer Seite eines Dreyeks eine Gerade Linie zu ziehen welche das Dreyck in einem gegebenen Verhæltniſs $m : n$ theile. Fig. 89.

Aus dem bisherigen mit Fig. 75. und 76. wird leicht sein die folgende allgemeine Aufgabe aufzulösen.

4). Eine jede gegebene Figur durch bloſse Zeichnung dergeſtalt zu theilen daſs das erſte Stück einen gegebenen Inhalt $= P$ habe, und die Theilungslinie mit einer angenommenen Richtung parallel laufe. F. 90.

5). Sollen die Theilungspunkte auf der Grundlinie seyn Fig. 73. so iſt zu beweisen, daſs, nachdem man die Figur in ein Dreyek verwandelt hat, eine beliebige Theilungslinie lm angenommen und αn parallel mit ab gezogen hat, u.s.w auch die Linie $\beta 5$ mit ld parallel iſt. Dieses læſst sich analytisch mittelſt der æhnlichen Dreyeke ldi und $\alpha\beta 5$, oder bloſs geometrisch erweisen; und darnach wird die Zeichnung leichter und genauer verrichtet.

6). Soll eine Figur so zu theilen seyn daſs alle Theilungslinien nach einem willkührlichen innerhalb der Figur liegenden Punkt zulaufen, so wird man sich auch in diesem Fall, nach dem vorhergehenden leicht hælfen können.

7). Anwendungen der bisher beygebrachten Theilungsmethoden auf mancherley im gemeinen Leben vorkommende Fælle, kommen in der praktischen Geometrie vor.

Diese sinnreiche Eintheilungsmethoden haben wir dem Hr. T. *Mayer* zu verdanken. Sie waren also den Alten unbekannt. M. s. ein mehreres davon im 3 Bande der praktischen Geometrie der Hr. M. J. Tob. *Mayer.*

§ 17. *Von der Lage gerader Linien und Ebenen.*

I. Der Durchschnitt einer geraden Linie mit einer Ebene iſt ein Punkt, und der Durchschnitt zweyer Ebenen allemal eine gerade Linie. Fig. 91; 92.

Durch

Durch eine gerade Linie, lassen sich unendlich viele Ebenen, und durch eine gerade Linie und einen Punkt ausser derselben allemal eine, aber auch nur eine Ebene führen. Fig. 93.

Es læſst sich also durch jede Gerade und einen Punkt ausser derselben, durch jede zwey Geraden, welche sich schneiden, oder welche mit einander gleichlaufen, durch jede drey Punkte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, oder durch die drey Seiten eines jeden Dreyekes allemal eine, aber auch nur eine Ebene führen.

II. Von den auf eine Ebene senkrechte geraden Linien.

1). Wenn eine Gerade auf zwey Geraden einer Ebene senkrecht ist, so ist sie auch senkrecht auf die Ebene. Fig. 94.

2). Durch jeden Punkt ist nur eine senkrechte Gerade auf dieselbe Ebene möglich, und wenn zwey Geraden auf dieselbe Ebene senkrecht sind und einen Punkt gemein haben, so machen sie nur eine und dieselbe Gerade aus. Fig. 95.

3). Durch jeden Punkt ist nur eine senkrechte Ebene auf eine gerade Linie möglich. Und zwey auf dieselbe gerade senkrechten Ebenen, welche einen Punkt gemein haben, machen allemal nur eine und dieselbe Ebene aus. Fig. 96, 97.

4). Alle Senkrechten, welche man durch einen Punkt einer geraden Linie auf ebendieselbe ziehen kann, liegen in einer und derselben Ebene. Fig. 93.

5). Wenn eine aus zwey gleichlaufenden Geraden auf eine Ebene senkrecht ist, so ist es auch die andere. Fig. 98.

6). Wenn zwey Geraden auf dieselbe Gerade senkrecht sind; so sind sie gleichlaufend. Fig. 98.

7). Die Gleichlaufenden mit einer dritten sind auch gleichlaufend unter sich, wenn auch alle drey nicht in derselben Ebene liegen. F. 98.

8). Es læſst sich durch jeden Punkt auf eine gegebene Gerade eine senkrechte Ebene führen. Fig. 93.

9). Es kann durch jeden Punkt auf eine gegebene Ebene allemal eine senkrechte gerade Linie gezogen werden. Fig. 98.

III. Von den mit einer Ebene gleichlaufenden geraden Linien.

1). Jede Gerade ist *mit einer Ebene gleichlaufend* oder *schneidet* dieselbe. Fig. 98.

2). Es können durch jeden Punkt mit einer Ebene unendlich viele gleichlaufende gerade Linien gezogen werden.

IV. Von den gleichlaufenden Ebenen.

1). Wenn zwey gleichlaufende Ebenen von einer dritten geschnitten werden, so sind ihre Durchschnitte gleichlaufend. Fig. 93.

2). Jede zwey Ebenen welche auf eine und dieselbe gerade Linie senkrecht sind, sind glichlaufend. Fig. 93.

3). Wenn eine Gerade auf eine aus zwey gleichlaufenden Ebenen senkrecht ist; so ist sie es auch auf die andere. Fig. 93.

4). Wenn zwey Ebenen mit einer dritten gleichlaufen; so sind sie auch gleichlaufend unter sich. Fig. 99.

5). Es kann durch jeden Punkt mit einer gegebenen Ebene allemal eine gleichlaufende Ebene gezogen werden. Fig. 99.

6). Wenn zwey Geraden, welche sich schneiden, mit zwey andern, welche sich auch scheiden, gleichlaufen; so ist die Ebene, worinn jene liegen, mit der Ebene, worinn diese liegen gleichlaufend. F. 99.

7). Wenn zwey Geraden welche sich schneiden, mit zwey andern, welche sich auch schneiden, gleichlaufen; so schliesen sie auf derselben Seite gleiche Winkel ein, wenn sie auch in verschiedenen Ebenen liegen. Fig. 99.

8). Mafs des Winkels welche zwey Ebenen die sich durchschneiden mit einander machen. Fig. 99.

9). Wenn zwey Ebenen sich schneiden; so sind die am Durchschnitte entgegengesetzte Winkel gleich, und ihre Nebenwinkel machen zusammen allemal 180° aus. Fig. 100.

10). Was sich von den Winkeln, welche entstehen wenn zwey gleichlaufende Geraden von einer dritten geschnitten werden, sagen læſst eben das gilt auch von den Winkeln, welche entstehen, wenn zwey gleichlaufende Ebenen von einer dritten geschnitten werden. F. 101.

V. Von den auf eine Ebene senkrechten Ebenen.

1). *Senkrechte, schiefe Ebenen aufeinander.*

2) Wenn man durch eine auf eine Ebene senkrechte gerade Linie eine Ebene zieht; so sind diese Ebenen senkrecht aufeinander. F. 100.

3). Wenn zwey Ebenen senkrecht aufeinander sind, und man zieht durch was immer für einen Punkt der einen Ebene eine senkrechte Gerade auf ihren Durchschnitt; so ist diese Gerade auch senkrecht auf die andere Ebene. Und weil durch jeden Punkt nur eine Senkrechte auf eine Ebene möglich ist; so liegt jede Gerade, welche man durch was immer für einen Punkt der einen Ebene senkrecht auf die andere Ebene zieht, allemal ganz in jener. Fig. 100.

4). Der Durchschnitt zweyer Ebenen welche auf eine dritte Ebene senkrecht sind, ist allemal auch senkrecht auf ebendieselbe dritte Ebene. Fig. 100.

5). Es læſst sich durch jede auf eine Ebene schiefe gerade Linie auf eben diese Ebene allemal eine, aber auch nur eine senkrechte Ebene führen. Fig. 95.

6). Wenn man durch die auf eine Ebene schiefe Gerade eine senkrechte Ebene zieht, so macht diese schiefe Linie mit dem Durchschnitte dieser Ebenen auf einer Seite einen spitzen Winkel und auf der andern Seite einen stumpfen; jener ist der kleinste und dieser der gröſste aus allen Winkeln welche diese Schiefe mit den Geraden macht die durch ihren Durchschnittspunkt mit der Ebene, auf der zweyten Ebene geführt sind. Und wird eine davon senkrecht auf die Durchschnittslinie, so wird sie auch senkrecht auf die erste Ebene. Fig. 102.

7). Eine Senkrechte auf eine Ebene zu führen der gegebene Punkt mag auf der Ebene oder auſser ihr seyn. Fig. 102.

8). Sind zwey Geraden in einer oder in verschiedenen Ebenen so werden sie durch gleichlaufende Ebenen in proportionirte Linien eingetheilt. Figuren 103.

VON DER KÖRPERMESSUNG.

§ 18. *Einleitung und Erklærungen.*
Eintheilung der Körper in *Prismen*, *Piramiden*, *Kugeln. Fig.* 104, 105 ...
Ihre besondere Gattungen und Stuke davon.
Zusammenhang der Grundsætze.

§ 19. *Körperwinkel.*

I. In jedem Körperwinkel der von drey ebenen Winkeln umgeben ist, sind zwo davon gröser als der dritte. Fig. 106.

II. In jedem Körperwinkel ist die Summe aller ebenen Winkel kleiner als 4 R. Wæren aber daselbst auch einwærtsgehende Winkel vorhanden, so könnte diese Summe mehr als vier rechte Winkel ausmachen.
(Diese wære vielleicht die einzige Einwendung die man dem *Euclides* machen könnte).

III. Fælle wo gleiche ebene Winkel, Körperwinkel bilden können. Entstehung davon der regulæren Körper. Ihre Benennung und Wichtigkeit bei den Alten.

IV. Sind zwey Körperwinkel won drey ebenen Winkel umgehen, deren jedes Paar der entsprechenden gleich ist, so sind auch ihre *Neigungswinkel* und die Körperwinkel selbst volkommen gleich.

V. Sind drey ebene Winkel in dem Fall n°. 1. gegeben so kann man daraus einen Körperwinkel bilden. Fig. 107.

VI. Aus dieser Zeichung kann man die Verhæltniss zwischen den ebenen und dem Neignugswinkeln bei einem dreyseitegen Körperlichen Winkel bestimmn. Fig. 107.
Dieser Lehrsatz macht die Hauptgleichung der sphærischen Trigonometrie aus.

§ 20. *Von den prismatischen Körpern, und den Parallelepipeden ins besondere.*

I. Grundflæche.—Höhe.—rechtes.—schiefes Prisma.—dreyseitiges, vierseitiges u. s. w. —*Kubus.*

II. Alle Parallelepipeden von gleichen Höhen und Grundflæchen sind gleich.—Besondere Fælle.—

III. Iedes Parallelepiped wird durch die Diagonalebene in zwey gleiche Prismen geschnitten.

IV. Der Körperliche Inhalt eines jeden Parallelrpipedes ist das Produkt der Höhe in die Grundflæche desselben.
Auch hier giebts zwey Methoden für die Bestimmung dieses Körperlichen Inhaltes wie jene für das Rechteck Fig. 30 und 60 waren. und zwey æhnliche Methodn zum *Toisiren.*
Die erste ist wenn man alle Gattungen auf die niedrigste reducirt und die niedrigste kubische Einheiten die man durch die Multipli-

 cation

cation der drey Dimensionen erhælt, wieder durch die Division auf höhere Einheiten bringt.

Die zweyte verkürzte Methode iſt jene wo man für den Flæchen-inhalt die niedrigere Gattungen als Rechtecke von einerley Höhe næmlich einer Klaſter, eines Schuhes, eines Zolles, einer Linie, u. s. w. annimmt. Desgleichen für den körperlichen Inhalt.

Der Flæcheninhalt wird hier also in Quadrat Klaftern, Klafter-Schuh, Kl. zoll.—Kl. lin. u. s. w. ausgedrukt.

Die höchſte Gattung wird bey Erdkörpern, die zweyte bey Holz und Stein, und die dritte bey noch koſtbarern Materien gebræuchlich.

1. *Exem.* Für den Flæcheninhalt.

Iſt die Længe eines Rechtecks $52^{\circ}\ 4'\ 5''$ und die Höhe $= 44^{\circ}\ 4'\ 8''$ so iſt der Flæcheninhalt 2361KK 2Ks. 5Kz. 2K.l. 8K.s.

		$6s^2$	$\frac{1}{2}s^2$	$6z^2$	$\frac{1}{2}z^2$.
oder	$2361K^2$	$14s^2$	$88z^2$	in lauter Quadraten	

2. *Exem.* Für den Körpelichen Inhalt.

Iſt die Længe eines rechten Parallelepipedes $2^{\circ}4'8''$ die Breite $1^{\circ}3'$, und die Höhe $3^{\circ}5'\ 7''$ so iſt sein körp. Inhalt 16KKK 2KKS 3KKz 2KKl. 0KKS

		36	3	$\frac{1}{4}$	36
oder	$16K^3$	$81S^3$	$864z^3$	„	„

in Kubikmaſs ieder Gattung.

V. Der körperliche Inhalt eines jeden Prisma iſt dem Produkte der Höhe in die Grundflæche deſselben gleich.

VI. Jedes schief abgeschnittene dreyseitige Prisma iſt dem Produkte des auf seine Seiten senkrechten Schnittes in das Drittel der Summe seiner Seiten gleich. Und für ein beliebiges abgeschnittenes Prisma nimmt man das arithmetische Mittel dieser Seiten. Fig. 108.

VII Der körperliche Inhalt eines jeden Cylinders iſt das Produkt der Höhe in die Grundflæche deſselben. Fig. 109.
(Denn ein Cylinder iſt die Grænze zwischen den ihm um und eingeschriebenen Prismen.).

VIII. Schneidet man einen schief abgeschnittenen rechten Cylinder durch den niedrigſten Punkt des schiefen Schnittes, so wird der Körperliche Inhalt des Abschnittes, dem Produkte der Grundflæche in die Hælfte des Unterschiedes der gröſsten und Kleinſten Seite gleich. Fig. 109.—Desgleichen für ein Cylinderſtück mit beiderseits schiefen Schnitten.

IX. Die Seitenflæchen der eckichten prismatischen Körpern beſtehen aus lauter geradelinichten Figuren, und die krumme Flæche des rechten Cylinders iſt die Grenze der Seitenflæchen der ihm ein und umschriebenen regulæren Prismen, folglich auch leicht zu finden F. 109. Und jene des cylindrischen Abschittes ohne die Grundflæche iſt dem Produkte des Umfanges der Grundflæche in die Hælfte oben erwæhnten Unterschiedes gleich.

§ 21. *Von den pyramidischem Körpern.*

1. *Dreyseitige.* — *Vierseitige* u. s. w. *Pyramide.* = *rechte*, *schiefe* Pyramide Fig. 118.

II. Jede gleichlaufenden Schnitte zwischen den Seitenflæchen einer Pyramide sind æhnliche Figuren, die sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze verhalten.

III. Wenn Pyramiden von gleichen Hohen und Grundflæchen in gleichen Entfernungen von den Spitzen, gleichlaufend mit den Grundflæchen geschnitten werden; so sind die Schnitte gleich.

IV. Jede zwey dreyseitigen Pyramiden von gleichen Höhen und Grundflæchen sind gleich. (Denn sie sind die Grænze der ein und umschriebenen Prismen. Fig. 71.)

V. Wenn eine dreyseitige Pyramide und ein Prisma dieselbe Grundflæche und eine gemeine Seite haben; so ist sie der dritte Theil des Prisma. Fig. 110.

VI. Daher ist der Körperliche Inhalt einer dreyseitigen, und allgegemein einer jeden Pyramide dem Produkte ihrer Grundflæche in ein Drittel ihrer Hohe gleich.

VII. Ein *Kegel.*—Seine *Achse.—Seite—Grundflæche. — Höhe.*—Ein *rechter schiefer* Kegel.

Der erste ist *gleichseitig*, der zweyte *ungleichseitig*. Fig. 112.

Auch hier findet das alles in Ansehung seiner Schnitte; und körperlichen Inhalt Statt was von den Pyramiden von denen sie die Grænze sind, gesagt worden.

VIII. Die *Seitenflæche* einer geraden Pyramide ist einem Dreyeke aus dem Umfang der Grundflæche und aus der Höhe der Seitenflæche gleich. Fig. 111.

Dieses gilt auch von der krummen Flæche des geraden Kegels, als der Grænze der Seitenflæchen der um und eingeschriebenen regulæren Pyramiden. Fig. 112.

Die ganze Flæche eines geraden Kegels ist noch einem Kreise gleich, dessen Halbmesser eine mitlere proportionirte zwischen dem Halbmesser der Grundflæche und der Summe aus diesem Halbmesser und der Seite des Kegels ist.

Und der gerade Kegel ist noch einem andern gleich, dessen die Grundflæche seiner ganzen Flæche, und die Höhe dem Halbmesser des Kreises, der in seinen durch die Axe gehenden Schnitt, eingeschrieben ist, gleich ist.

IX. *Gestuzte Pyramide* und *gestuzter Kegel.*

Ausdrüke für ihren Körperlichen Inhalt ersieht man aus Fig. 112. wo s diesen Inhalt α die Höhe des gestuzten pyramidischen Körpers, β und γ seine Grundflæchen und A die Seitenflæche bedeuten.

Für die krumme Flæche ist noch ein anderer Ausdruck in Fig. 113. dessen man sich zum Beweise des Ausdrucks für die Kugelflæche bedient.

§ 12. *Von der Kugel.*

I. *Kugel.*—Ihre Entstehung.—Mittelpunkt.—Oberflæche.—Halbmesser.—Durchmesser.

II. Die Eigenschaften der Berührungslinien, der Sehnen, der auf sie vom Mittelpunkte gefællten Senkrechten bei einen Kreise, und umgekehrt, sind auch bey der Kugel anwendbar. Fig. 114.

III. Von den Kugelschnitten.

1). Jeder Kugelschnitt ist ein Kreis desen Mittelpunkt in dem auf die Ebene des Schnittes senkrechten Halbmeser der Kugel liegt.

2). Alle Kugelschnitte, welche durch der Kugel Mittelpunkt gehen, sind gleiche Kreise.

3). Die Kugelschnitte, welche mit der Kugel einen gemeinen Mittelpunkt haben, sind gröser als jede andere.
Deswegen werden jene die *gröſsten* und diese die *kleinern* Kreise der Kugel genannt.

4). Jede zwey kleinern Kreise, welche gleichweit von der Kugel Mittelpunkte abſtehen, sind gleich: und ist einer weiter als der andere von demselben entfernt; so ist dieser gröser als jener.

5). Jeder gröſste Kreis der Kugel theilet dieselbe in zwo vollkommen gleiche Halbkugeln.

IV. Von der *Oberflæche der Kugel.*

Die Oberflæche der Halbkugel ist das zweyfache, und die Oberflæche der ganzen Kugel das Vierfache des gröſsten Kreises der Kugel, oder ist der krummen Flæche des umschriebenen Cylinders mithin $\frac{2}{3}$ des letzten ganzer Flæche gleich.

Dieses læſst sich durch die Exhauſtions methode genau beweisen. F. 115. (Auch mittelſt Infinitesimal Analyse Fig. 130. und Fig. 138.).

V, Von dem *Körperlichen Inhatte der Kugel.*

Durch die Erschöpfunsmethode læſst sich genau beweisen daſs die Kugel mit dem gleich hohen Kegel und der den gröſsten Kreis zur Grundlinie hat, $\frac{2}{3}$ des der Kugel umschriebenen Cylinders gleich ist. Fig. 116.

(Dieses ſtimmt auch mit dem Resultat das man durch die Differential und Integral Rechnung bekommt, überein Fig. 130 und Fig. 138.)

(An der 116 Figur erkannte *Cicero*, als er Proconsul in *Sicilien* war, das Grabmal *Archimedes* des Erfinders dieses wichtigen Lehrsatzes.)

VI. Von den Kugelſtücken.

1) *Ausschnitt* einer Kugel.
Sein körperlicher Inhalt ist auch $\frac{2}{3}$ des ihm entsprechenden Stüks des, der Kugel umschriebenen Cylinders.

2). Desgleichen für den körperlichen Inhalt des *Abschnitts.*
Er læſst sich aber auch durch eine allgemeine Formel aus seiner Höhe x und dem Halbmeſser a der Kugel mittelſt der gemeinen Fig. 114. oder der Infinitesimal Analyse Fig. 138. beſtimmen.

3). Die krumme Flæche des Ausschnitts oder des Abschnitts ist der krummen Flæche des ihm entsprechenden Cylinderſtüks, oder dem Kreise gleich, der die Chorde des halben sie bildenden Bogens zum Halbmeſser hat. Fig. 114.

4). Die *Zone* ist der krümmen Flæche des ihr entsprechenden Cylinderſtükes gleich. Fig. 116.

5). Zwey gleichlaufende Schnitte deren Halbmeſser r und g bilden mit der krummen Flæche der Kugel die zwischen ihnen liegt, einen *Klotz* deſsen der Körperliche Inhalt durch die Proportion,

der

der Klotz : entsprechenden Cylinder $= \frac{2}{3}r^2 + \frac{1}{3}\varrho^2 : r^2$. sich finden læſst. Exempeln davon mit Zahlen nebſt Vortheilen der Rechnung können erſt nach der Trigonometrie gezeigt werden.

§ 23. *Von den æhnlichen Körpern.*

I. Erklærung der æhnlichen Körper. (Oder sie sind eſs noch wenn sie durch æhnliche ebene Figuren gebildet sind.).

II. Es læſst sich in æhnlichen Körpern auch ein æhnlich liegender Punkt beſtimmen.

III. Daraus iſt leicht zu zeigen daſs æhnliche Körper sich wie die Würfel ihrer entsprechenden Seiten verhalten. Dieses læſst sich für jede Gattung der oben untersuchten Körper ins besondere beweisen.

IV. Auch læſst sich dieses aus dem Lehrsatze, daſs næmlich überhaupt die Körper in dem zusammengesetzten Verhæltniſse ihrer drey Dimensionen, ſtehen, herleiten: diese Verhæltniſs ausdrücken, und Verwandlungen der Körper anſtellen.
(Gebrauch der *Linea Solidorum* im Proportionalzirkel.).

V. Die Oberflæchen æhnlicher Körper verhalten sich wie die Quadrate ihrer zwey entsprechenden Seiten, oder der bildenden Linien.

§ 24. *Von den Cylinderſtüken.*

I Für *Viertelcylinder* und seine *Abschnitte* in denen die Grundflæche b, hat man die *Krumme Flæche* $A = 2b$ und den *körperlichen* Inhalt $s = \frac{2}{3}rb$ Fig. 117. Desgleichen für die *Auſschnitte.*

II. Daraus werden leicht Ausdrüke für die *Abschnitte* und *Auschnitte* der Halbcylinder Fig. 118. und

III. Die Zusammensetzung und das Toisiren der *Kappe—Sternen* und *Kreuzgewölben* Fig. 119, 120, 121, 122, 123, 124. hergeleitet.
Für die letzten wære der Lehrsatz.—Die Krumme Oberflæche eines Kreuzgewölbes iſt dem Produkte aus der Summe aller halben Umfænge *dfg* in die Seite *af* weniger dem Doppelten ſeiner Grundflæche: und der Körperliche Inhalt eben dieses vollen Gewölbes dem Produkte aus der Summe der Halbkreise *dfg* in die Seite *af* weniger der Produkte seiner Grundflæche in zwey Drittel seiner Höhe gleich.
(Die Abbildungen dieser Gewölber nach den Modellen des Hr. Obriſtlieutenant d'*Avrange* und die Ausdrüke für ihres Toisiren habe ich von Hr. *Hauser* entlehnt.).

§ 25. *Von der Berechnung der Körpelichen Inhalte jeder* unregulæren *Körper.*

I. Sind die Körper ganz unregulær so miſst man sie in einem regulæren mit Waſser voll gefullten Gefæſs, durch den Raum das sie daselbſt einnemen Fig. 125.

II. Von dem Inhalte der Fæſser Fig. 126.
Um den Körperlichen Inhalt eines Faſses zu berechnen siehet man es bald als das Mittel zwischen dem æuſseren und inneren Cylinder, bald als aus zwey geſtutzten Kegeln zusammengesetzt an.

Hr.

Hr. *Lambert* giebt in seinen schætzbaren Beytrægen zum Gebrauche der Mathematik 1. B. Visirkunſt p. 325. folgende Regel, die er mittelſt der Infinitesimal Rechnung herausbringt.

Mann kömmt der Wahrheit ungleich næher, wenn man den æusserſten Cylinder doppelt genommen zu dem innern addirt, und von der Summe den dritten Theil nimmt. Denn der Fehler betrægt auf 150 Maſs kaum eine, und mehrentheils iſt er geringer.

Iſt die halbe Spundtiefe b der Halbmeſser des Bodens β; $b-\beta=c$ und ihre Entfernung$=x$, so iſt der körperliche Inhalt eines halben Faſses oder wenn x der ganzen Længe gleich iſt, der ganze Inhalt $z=\pi x\,(bb-\frac{2}{3}cb+\frac{2}{9}c^2)$. Nimmt man ſtatt den letzten Theils $\frac{cc}{3}$ so belæuft sich der Unterschied nur auf $\frac{1}{9}cc$ alwo auf 150 Maſs kaum eine fehlt: und dieser Ausdruck giebt die obige Regel.

Von der Verfertigung der *Visirſtæbe* und insbesondere der *Længen*, *Flæchen* und *Kubikseiten* s. m. Hr. *Lamberts* Visirkunst.

Die Ausmeſsung der Fæſser wird leichter wenn sie nach einem beſtimmten Muster und Proportion gemacht sind; Dieses iſt in den Oeſtereichischen Staaten gesetzmæsig eingefuhrt.

§ 26. *Von noch andern Methoden den Flæchen und körperlichen Inhalt zu beſtimmen.*

I. *Guldins* Methode. (Centrobarica).
Man multipliciere den Weg des Schwerpunkts des die Figur bildenden Theils, durch diesen Theil z. B. Fig. 29, *125* u. s. w.

II. Diese Aufgabe und überhaupt jene den Mittelpunkt der Körper zu finden gehört schon in die Mechanik.
Wie dieser in einem Dreyek und in einer Pyramide gefunden wird zeigen die Formeln bey Fig. 127.
Eben so sinnreich obwohl auch nicht mehr geometrisch ſtreng iſt die

III. *Cavallerische* Methode des *Untheilbaren*: die die næmlichen Resultate hervorbringt z. B. Fig. 128.

IV. Es gehört hier also die Summirung der arithmetischen Reihen einfacher Gröſsen und ihrer Potenzen. Von der erſten Art sind Ausdrücke für das *allgemeine* Glied z und das *ſummatorische* s nebſt jenem für die zweyte Potenz und einer Anwendung auf Kugelschlichtungen Fig. *129* beygefügt (m. s. ein mehreres p. 8.)

Für die Theorie der geometrischen Reihen befinden sich die Formeln dieser allgemeinen Glieder bey Fig. 31.

Iſt hier der Exponent $\frac{b}{c} < 1$ also eine abnehmende Reihe so wird

$s=\frac{ab}{a\mp b}$ wo das höhere Zeichen für laute $+$ und das unterſte für $+$ und $-$ womit die Glieder wechselweise mit einander verknüpſt ſtehen, gelten.

V. Auch sind bey der Fig. 129 die wichtigſten Formeln für die *gerade*, die *umgekehrte Methode der Reihen* für die *Logarithmen* und den *Binom* aus der wichtigen Theorie der Reihen, ausgedrükt.

VI. Be-

VI. *Bemerkung.* Die Beyspiele der beiden letzten §§ laden uns also ein die Gröſsen in ihren *veränderlichen* Zuſtande zu untersuchen so wie wir sie bis jezt nur als bekannte und unbekannte behandelt haben. Die Werke der Natur und der Kunſt hængen von unzæhligen besondern Umſtænden ab welche alle dazu beytragen, daſs man in demjenigen so daran auszumeſsen iſt, an keine geometrische Schærfe gedenken kann. (Und dieser wichtiger Satz erſtrækt sich auch auf die moralische Vollkommenheit). Wir müſsen uns in der Anwendung der Theorie öffters mit einer Næherung an die Wahrheit begnügen: glücklich genug wenn wir sie so weit treiben können als uns nöthig iſt. Die Theorie der unendlichen Reihen und die Infinitesimal Rechnung ins besondere, gewæhren uns wichtige Vortheile bey Anwendungen der Theorie auf den wirklichen Nutzen im bürgerlichen Leben. Der Uebergang also von der theorischen in die ausübende Geometrie und in die Anwendung der Rechenkunſt auf die Lehre der ſtætigen Gröſsen, mittelſt welcher Verbindung die beiden Grundwiſsenschaften der Gröſsenlehre ungemein viel gewinnen, geschiehet durch

DIE INFINITESIMALRECHNUNG.

Einleitung. Wichtigkeit der Infinitesimal Rechnung. Begriff des Unendlichen. Absicht der *Carnotschen* Schrift. *

§ 27. *Erklærung der Gründe der Theorie der Infinitesimal-Rechnung.*

I. *Aufgabe* An den gegebenen Punkt *M* der Kreisperipherie eine Tangente zu ziehen Fig. 130.

L Au-

* Ohnstreitig hat der Exdirector CARNOT einen wahren Dienst der Wiſsenschaft durch die Bekanntmachung ſeiner *Methaphysique du Calcul Infinitesimal* 8° 1797. geleistet. Ich bediente mich schon beim ersten Kurs 1799 dieser kurzen Theorie und fand sie für die Jugend sehr einleichtend und faſslich; binn seitdem durch die Uebersetzung mit Zusætzen des Hr. *Hauff* 1800 noch mehr in meiner Ueberzeugung gestærkt worden, und glaube also mit Recht seine Grundsætze auch deshalb beyzubehalten und zu empfehlen weil sie zum Studium vollstændiger Lehrbegriffe eines COUSINS, LA CROIX u. a. m. die Bahn eröffnen, oder wenigstens um sie zu betreten Anlaſs und Lust erwecken.

Des deutschen Uebersetzers Urtheil über diese Schrift, ist dieser (m.s.s. *Zusætze* p. 101). Daſs übrigens niemand vor *Carnot* diese einzig richtige und lichtfolle Theorie der Infinitesimalrechnung wirklich ausgeführf habe, bedarf wohl keines Beweises, da auſser ihm und den beyden zulezt genannten Analysten (Hr l'*Huilier* in seiner Preiſschrift und Hr. la *Grange* in der Theorie des Fonctions analytiques) noch niemand die Idee davon gehabt hat, die letzteren aber es bey der bloſsen Anzeige derselben bewenden lieſsen, und aus Abneigung gegen das Unendliche, die vorerwæhnte Theorie vielmehr auf andere Gründe, der eine næmlich auf die Lehre von den Grænzen der Verhæltniſse, der andere auf die Lehre von den Functionen, zurück zu führen, sich bemüheten. „ Und in der Vorrede p. XIII. (L.) Ich schmeichle mir der Hoffnung, daſs die Schrift nunmehr von jedem Anfænger bei seinem ersten Fleiſse in dieser Wiſsenschaft mit dem gröſsten Vortheile zum Grunde gelegt werden kann. „

Hr. *Doliński* der dem öffentlichen Kurs beigewohnt hat, bearbeitet die næmliche Uebersetzung mit Zusætzen in polnischer Sprache und ist willens sie druken zu laſsen.

Auflösung vermittelst der Gleichung des Kreises Fig. 70 und des Ausdrucks für die Subtangente *TP* den man daraus herleitet. Es ist næmlich

$$\frac{TP}{y} = \frac{MO}{NO} = \frac{2y+NO}{2a-2x-MO} \text{ daraus } TP = \frac{y(2y+NO)}{2a-2x-MO}$$

(in der Voraussetzung dafs der Kreis ein Vielek von unendlich viel Seiten ist).

II. In dieser Gleichung *kann* NO und *MO* weggelafsen werden, und sie wird *subtg.* $= \frac{y^2}{a-x}$

III. Sie wird aber dadurch eine genau wahre Gleichung, weil PT : PM : PC ist, also *müfsen* NO und MO weggelafsen werden.

IV. Die Gleichung wird also *durch Aufhebung der Irrthümer genau richtig: und diese Aufhebung zeigt sich durch die Abwesenheit der Gröfsen MO, NO* Dieses bestætigt sich auch noch wenn man den elementar Begriff des Kreises beybehællt.

Es wird næmlich $\frac{MZ}{RZ} = \frac{2y+RZ}{2a-2x-MZ}$ und daraus die Subtg $= \frac{y^2}{a-x}$

V. *Hauptgröfsen* (quantités désignées) und *Neben* oder *Hülfsgröfsen* (auxiliaires).
Eine *Grænze* ist eine Hauptgröfse welcher eine Hülfsgröfse sich bestændig næhert, so dafs das letzte Verhæltnifs beider eine Verhæltnifs der Gleichheit ist.

VI. *Unendlich kleine Gröfse* ist der Unterschied einer Hülfsgröfse von ihrer Grænze, und umgekehrt.
z. B. $\frac{RZ}{1}$ und $\frac{1}{RZ}$ oder $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$ sind die Ausdrücke für das Unendlich-kleine und das Unendlichgrosse. Sie sind keine eingebildete Dinge. Hieraus sind auch leicht Erklærungen des Unendlichen in Beziehung auf Hülfsgröfsen die einerley Grænze haben, und in Rücksicht auf andere Gröfsen, herzuleiten.

VII. Erklærung der Infinitesimal Rechnung.
(wann hört sie auf eine nicht geendigte oder unvollendete Rechnung zu seyn).

§ 28. *Unvollkommene und vollkommene Gleichung.*

I. *Lehrsaz.* Wenn man in einer unvollkommenen Gleichung an die Stelle einer der darinn begriffenen Gröfsen eine andere Gröfse sezt, die von ihr unendlich wenig unterschieden ist, oder deren Verhæltnifs zur ersten die Einheit zur Grænze, oder zum lezten Werthe hat, so kann die aus dieser Verwandlung entstehende Gleichung keine falsche Gleichung sein; d. h. sie wird vollkommen genau werden, oder zum wenigsten eine unvollkommene Gleichung bleiben.

II. *Lehrsaz.* Eine Gleichung die blos Hauptgröfsen enthælt, kann keine unvollkommene Gleichung seyn.

III.

III. *Lehrsaz.* Jede unvollkommene Gleichung, mit welcher man nur solche Verwandlungen, wie die im ersten Lehrsaze angegebene, vorgenommen, und aus welcher man durch diese Verwandlungen alle Hülfsgrösen weggeschaft hat, ist nothwendig und nach aller Strenge genau.

Alles dieses gilt auch von den Proportionen, Sætzen und allen Schlüsen die sich in solche Gleichungen übersetzen lasen.

IV. Jede unvollkommeue Gleichung læsst sich in zwey andere zerlegen, deren eine blos die Hauptgrösen, die andere aber die willkührlichen enthalten wird.

z, B. in § 2 n° 14 ist $\frac{MZ}{RZ} = \frac{2y+RZ}{2a-2x-MZ}$ daraus folgt

$\frac{TP}{y} - \frac{y}{a-x} = o$; und $\frac{T'T}{y} - \frac{yMZ+2RZ-xRZ}{(a-x)(2a-2x-MZ)} = o$.

§ 29. *Wie die Infinitesimal Rechnung noch angesehen werden kann.*

I. Sie ist eine Anwendung oder eine Erweiterung der *Methode der unbestimmten Coefficienten.* Denn die obigen Gleichungen bekommen die Form

$\frac{MZ}{RZ}MP = TP + \phi$; $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x} + \phi'$ und $\left(\frac{TP}{MP} - \frac{y}{a-x}\right) + \phi'' = o$;

woraus $\frac{TP}{MP} = \frac{y}{a-x}$;

und Können mit dieser $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots = o$, verglichen werden.

II. *Die Methode der Grænzen oder der letzten Verhæltnise.*

Bezeichnet man durch *L* die Grenze oder den letzten Werth, so sind

$L.\frac{MZ}{RZ} = \frac{TP}{MP} = \frac{y}{a-x}$ und daraus auch die letzte, nach der Strenge genaue Gleichung. Aber hier kann man die unendlich kleinen Grösen nicht absondern: sie also nicht in ihrem *verschwindenden* Augenblicke betrachten, dass ist ihren Werth nicht bestimmen.

Die verschwindenden Grösen sind zwar Verstandsdinge, man kann sie aber eben so gut miteinander vergleichen als die eingebildete Grösen.

III. Beantwortung der Einwendungen gegen die Analysis des Unendlichen.

§ 30. *Ausübung der Analysis des Unendlichen oder Begriff der Differential und Integral-Rechnung.*

I. Das *Differentiale* oder der Wachstum einer verænderlichen Gröse ist der Unterschied zwischen ihrem ersten und zweytem Zustande. Ist dieser Unterschied von einer bestimmten Gröse so bezeichne man es mit Δ ist er unendlich klein, mit *d.*

z. B. MZ, *RZ* sind hier *dx, dy* wenn *x* und *y* Coordinaten des Kreises sind.

II. *Zweyte Differentiale*, oder *Differentiale* der *zweyten Ordnung ddx; ddy* oder d^2x, d^2y; (nicht dx^2, dy^2). u. s. w.

III. *Differentiiren. Integriren.* Sdx: Sdy.

Die *Differential* und *Integral* Rechnung ist also die Kunst die Verhæltnisse die zwischen gegebenen Grösen Statt haben, vermittelst ihrer Differentiale zu finden. Oder insbesondere u. s. w.

IV. Die Grundregeln für die Ausübung siehe man F. 131, 132 . . . und pag. 13.

§ 31. *Anwendungen dieser Regeln der Differential und Integral Rechnung an einigen besondern Beyspielen.*

I. *Aufgabe,* Die Subtangente eines Kreises zu finden die einem Punkt *M* zugehört. *Aufl.* Subtg $=\frac{ydx}{dy}=\frac{y^2}{a-x}$

II. *Aufgabe.* Man verlagt den Werth, den man der Grösse x beylegen muss damit die Function $\sqrt{2ax-xx}$ ein *Maximum* d. h grösser wird als wenn man der x jeden andern Werth beylegte

Auflös. Es ist $d(y^2)=2ydy=2adx-2xdx=0$; folglich $x=a$.

Setzet man daher das Differentiale einer Function $=0$; so drükt diese Gleichung den Fall aus in welchem die Function am grösten oder am kleinsten ist, und giebt für die Verænderliche einen Werth, welcher anstatt ihr in die Function gesezt, für diese das Gröste oder das Kleinste bestimmt, je nachdem der um etwas grössere oder um etwas kleinere Werth der Verænderlichen in die Function gesezt, beydesmal etwas kleiners oder beydesmal etwas grössers giebt.

z.B. Die Summe zweyer Factoren sey *a* man suche ihr grösstes Product.

Aufl. Hier wird $x=\frac{a}{2}$ und das gröste Product $=\frac{aa}{4}$.

Denn ist $x=\frac{a}{2}\pm q$; so wird $ax-xx=\frac{aa}{4}-qq$ allzeit kleiner als $\frac{aa}{4}$

1. *Exem.* Man soll in einem Halbkreise das gröste Rechtek zeichnen F. 133.

2. *Exem.* Man führe durch einen innerhalb eines Winkels, gegebenen Punct *P*, eine Gerade, welche das kleinste Dreyek abschneide F. 134.

Aufl. Es ist hier das kleinste Dreyek $d\left(\frac{bxx}{2(x-a)}\right)=0$.

Daraus $x=2a$ und das kleinste Dreyek $=2ab$

Denn ist $x=2a\pm q$ so wird $\frac{b}{2}\cdot\frac{xx}{x-a}=2ab+\frac{bqq}{2a\pm 2q}$

allezeit grösser als $2ab$.

3. *Exem.* Es sey auf der Grundlinie *a* für dieselbe Summe der Seiten das gröste Dreyek zu zeichnen. Fig. 135.

Aufl. Hier wird die Summe der Seiten $=(xx+yy)^{\frac{1}{2}}+[(a-x)^2+yy]^{\frac{1}{2}}+a$, und der Inhalt des Dreyeks $=\frac{ay}{2}$

Die Summe der Seiten soll bestændig seyn, also ist ihr Differentiale $=0$; Ebenfalls für das Dreyek $\frac{ay}{2}$ Daraus bekommt man $x=\frac{a}{2}$

Für

Für dieselbe Summe der drey Seiten ist also das grösste Dreyek, wenn zwey Seiten unbestimmt sind, gleichschenklicht; und also wenn alle drey Seiten unbestimmt sind, gleichseitig.

4. *Exem.* Es sey das grösste rechte Parallelepiped für dieselbe Summe der 6 Rechteke, welche dasselbe einschliessen zu bestimmen F. 136.

Aufl. Wenn seine Höhe$=z$, eine Seite der Grundflæche$=x$ und die andere$=y$ ist; so wird die gesammte Oberflæche$=2xy+2xz+2yz$ wovon das Differential$=0$; der körperliche Inhalt xyz soll ein grösstes sein, folglich sein Differential auch$=0$. Setzt man also den Werth von dz aus der zweyten Gleichung in die erste so bekommt man $x=z$, und $z=y$ das ist.

Unter allen Parallelepipeden von derselben Oberflæche ist der Würfel das grösste; und unter allen gleichen Parallelepipeden hat der Würfel die kleinste Oberflæche.

5. *Exem.* Es sey für dieselbe Oberflæche der grösste rechte Cylinder zu bestimmen.

Aufl. Ist der Durchmesser der Grundflæche$=x$, und die Höhe des Cylinders$=y$ so læsst sichs auf eine æhnliche Art zeigen dass hier $x=y$ sein muss d. i......

II. Eine Function ist am grössten oder am kleinsten eben da wo ihr Differentiale seine Bezeichnung ændert das ist bey 0 und bey ∞. Wenn also das Differentiale einer Function ein Bruch ist, und dieser Bruch$=0$ gesezt das Grösste oder Kleinste der Function nicht bestimmt; so muss derselbe noch unendlichgross, oder welches einerley ist, der Nenner desselben$=0$ gesezt werden; und dann erst, wenn auch diese Gleichung nichts bestimmt, kann man schliessen, dass die gegebene Function keines Grössten oder Kleinsten fæhig ist. (Dieses kann man durch den Werth der Tangente oder der Subtangente, § 31. n° 1. erlæutern.)

§ 32. *Beyspiele für die Integral Rechnung.*

I. *Aufgabe.* Die Flæche eines Kreisabschnitts zu finden.

1). Sind die Coordinaten x und y so ist der allgemeine Ausdruk dafür $A=Sydx+C$. Davon die besonderen Formeln für jede Fælle und ihre wörtliche Ausdrücke leicht gefunden werden können. F. 137.

(Man siehet hier dass dieser allgemeine Ausdruck zu einer jeden Krummlinichten Figur davon man nur die Gleichung weiss anwendbar ist.).

2). Rechnet man die Abscissen von dem Mittelpunkte an; so ist im Kreise für den Halbmesser 1; $Sydx=Sdx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=A'$ Fig. 137:

3). Das Dreyek $123=\frac{x}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x-\frac{1.3}{2.2}\,\frac{x^3}{3}-\frac{1.3.5.}{2.2.4}\,\frac{x^5}{5}-\frac{1.3.5.7}{2.2.4.6}\,\frac{x^7}{7}$.

Dieses Dreyek von der Flæche 0231 abgezogen giebt den

Sektor $021=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2.2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots\ldots$

Ist $01=z$ so ist auch $021=\frac{z}{2}$ also

$$z = x + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{1.4.6} \cdot \frac{x^3}{7} + \ldots\ldots$$

4). Setzet man anſtatt des Halbmeſsers 1 den Halbmeſser *a* so wird

$$o231 = ax - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3a} - \frac{1}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5a^3} - \frac{1\ 3}{1.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} - \ldots\ldots$$

II. *Aufgabe.* Einen allgemeinen Ausdruk für die Oberflæche der durch die Umdrehung der Kreisabschnitte erzeigten Kugelabschnitte zu finden. Fig. 138.

Sie iſt $A = S2\pi y(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$

1). Rechnet man die Absciſsen von dem Mittelpunkte an: so iſt im Kreise für den Halbmeſser *a* die Oberflæche der Zone $A = 2\pi ax =$ der Oberflæche des der Zone umschriebenen Cylinders.

2). Für $x = a$ wird $A = 2\pi a^2$ daraus die Oberflæche der ganzen Kugel, der Flæche des groſsen Kreises 4 mal genommen gleich. Man kann auch dieſe Ausdrüke aus Fig. 130 bekommen.

III. *Aufgabe.* Einen allgemeinen Ausdruck für die Berechnung der körperlichen Inhalte zu finden.

1). Für einen Kugelabschnit iſt dieser $S = S\pi y^2 dx = \pi\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$ Fig. 138. und Fig. 130.

2). Für $x = a$ wird die ganze Kugel $S = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi a^3}{4} = \frac{2}{3}$ des ihr umschriebenen Cylinders.

Anwendungen und Ergænzung der Differential und Integral Rechnung kommen in der Trigonometrie, in der höheren Geometrie und in der angewandten Gröſsenlehre vor.

DIE GERADELINICHTE TRIGONOMETRIE.

Bisher haben wir die Lagen der geraden Linien in einer Ebene und die Lage der Ebenen gegeneinander, nur geometrisch behandelt. Um aber dabey die Rechnung anwenden zu können, diese Lehren zu ergænzen und ihren Gebrauch in allen mathematischen Theilen deſto allgemeiner und vollkommener zu machen; auch umgekehrt algebraische Ausdrücke und die Gleichungen höherer Grade durch geometrische Beyspiele erlæutern zu können; müſsen wir das Maſs der Winkel auf eine andere Art als es bisjezt geschehen konnte, betrachten. Diese Untersuchung iſt der Gegenſtandt der geradelinichten und sphærischen Trigonometrie.

§ 33. *Erklærungen der Trigonometrischen Functionen: ihr Wachſtum Zeichen in jedem Quadrant und einige nothwendige trigonometrische Formeln. Fig.* 139.....145.

I. *Sinus s; Cosinus c; Tangente t; Cotangente cotg; Secante sec; Cosecante cosec; Sinus versus Sin v; Cosinus versus Cos v. Fig.* 139.

II.

II. Zeichen in jedem Quadrant Fig. 139.
III. Ausdrücke für jede dieser Functionen Fig. 139.
IV. Die trigonometrische Functionen können als Linien d. i. als eine Dimension oder als Zahlen betrachtet und gebraucht werden.
z. B. Sin a oder AB ist eine Linie; hingegen $\frac{AB}{AC}$ ist ein Bruch oder eine Verhæltnisszahl.
V. Eben so werden die Tangenten alle mögliche Zahlen ausdrücken können. Ihre Logarithmen werden bis *Tang.* 45° verneint: um also die Umbequemlichkeit des Zeichens (—) zu vermeiden, hat man ihm 10 geliehen, darauf man in der Rechnung Rücksicht nehmen muss.
VI. Ueberhaupt werden die Formeln für den Halbmesser=1 bestimmt, will man sie für r=10 000' 000 000 haben so muss man noch diesen ihren Werth mit r multipliciren.
VII. Es bedeute π die halbe Peripherie für den Halbmesser=1, a einen beliebigen Bogen von n Sekunden; so hat man einen Ausdruck für diesen Bogen a in den Theilen der Peripherie, und umgekehrt in Graden Fig. 140 und α Fig. 72.
VIII. Die gleichnamigen Functionen desselben Winkels in verschiedenen Kreisen, verhalten sich wie die Halbmesser dieser Kreise. Fig. 140.
IX. Jede zwey Functionan von was immer für zwey Winkel im einem Kreise, verhalten sich wie die gleichnamige Functionen derselben Winkel in jedem andern Kreise Fig. 141
Sie brauchen also nur für einen angenommenen Halbmesser berechnet werden.

§ 34. *Von der Berechnung der trigonometrischen Functionen.*

I. Wenn zwey Bogen zusammen 180° ausmachen, so sind alle ihre gleichnamige Functionen gleich. Fig. 139.
II. Es verhælt sich die Sekante zu der Tangente wie der Halbmesser zu dem Sinus Fig. 139; 1 Formel.
III. Das Quadrat des Halbmessers ist dem Rechteke unter des Tangente und Kotangente eines jeden Bogens gleich. 2te Formel.
IV. Es verhælt sich die Summe der Sekanten zu der kleinern Sekante wie der Untershied der gegebenen Tangenten zu jenem Stücke, welches zu kleinern Tangente addirt, die Tangente des mittlern arithmetisch proportionirten Bogens giebt. Fig. 142.
V. Folgerungen daraus für besondere Fælle. Daraus die Art des *Interpolirens* der Sinusse der Logarithmen u. d. g.
VI. Die brauchbarsten zusammengesezten Formeln ersieht man aus den Fig. 144, u. 145. und aus d. S. 28, 29.
VII. Die Tangenten brauchen nur zu tg 45° berechnet werden. Tg 45°=1 Aus Fig. 139. n° 7 und Fig. 142 u 143 können also Tangenten eines beliebigen Bogens und daraus die übrigen trigonometrischen Functionen berechnet werden.
VIII. Die næmliche Absicht erreicht man für die Berechnung der Sinusse aus den bey Fig. 144 vorhandenen Formeln und daraus die übrigen trigonometrischen Functionen.

§ 35. *Analysis der geradelinichten Dreyeke.*

I. Fundamentalgleichungen zwischen der Seiten und der Winkeln eines geradelinichten Dreyeks Fig. 146. u. 147.

Sie dient aus einer gegebenen Seite und den zwey Winkeln oder zwey Seiten und einen Winkel mit der Gattung des Winkels der der zweyten gegebenen Seite gegenüber ſtehet die übrigen Dinge zu finden.

Ohne dieser Bedingung læſst die Rechnung ebenfalls das unbeſtimmt was die Geometrie nicht entscheidet, weil der Sinus eines ſtumpfen Winkels gænzlich derselbe mit dem Sinus des spitzen Supplements iſt.

II. Aus der zweyten und der dritten Gleichung lernt man die Kathete eines rechtwinklichten Dreyeks finden.

III. Die *4te* Formel und die für die Rechnung noch bequemer eingerichtete der *Cotg* B dient aus zwey Seiten mit dem eingeschloſsenen Winkel jeden der übrigen zu finden.

Sie hat den Vorzug vor der gewöhnlichen Fig. 148.

Wenn *A* ſtumpf iſt so wird *cot A* addirt. Iſt der verneinte Theil gröſser als der bejahte, so zeigt dies an daſs *B* oder *C* ſtumpf iſt, man sucht alsdann den Winkel der zu der verneinten Cotagente, als positiv betrachtet gehöret und addirt 90° dazu.

Sucht man *A* so bekommt man Wurzelgröſsen in der Gleichung also zwey Werthe für den Sinus und Cosinus des Winkels *A* wie in der Geometrie wenn zwey Seiten und ein gegenüber ſtehender Winkel gegebenen sind: ein Beyspiel wie die Rechnung alle Fælle der geometrischen Zusammensetzung in eine Formel faſsen kann.

Sucht man *a*, *b* oder *c* in der 4. Formel so findet hier auch die obige Bemerkung ſtatt.

IV. Die *5te* Formel dient die dritte Seite zu finden wenn zwey Seiten und der eingeschloſsene Winkel gegeben sind, ohne daſs es nothig sey auf die gewöhnliche Art Fig. 148 erſt die Winkel zu suchen.

V. Die *6te* dient einen Winkel in einem Dreyeke zu finden wenn seine drey Seiten gegeben sind.

Sie kann noch bequemer für die Rechnung eingerichtet werden F. 149.

VI. Daraus bekommt man nun Formeln für die Abschnitte der Grundlinie, für die Höhe und für den Flæcheninhalt eines Dreyeks wovon die drey Seiten gegeben sind. (verglichen mit Fig. 61.)

VII. Endlich bekommt man aus der 4. die 10. Formel welche sammt den mit einem (*) bemerkten, 4 fundamental Gleichungen ausmacht, welche alles enthalten was über die Verbindung von geraden Linien und Winkeln, die sich aus einander beſtimmen, gesagt werden kann; und aus welchen sich auch alle die Gröſsen (wie es die Höhe, die Abschnitte und die Flæche waren) die von ihnen abhængen unmittelbar beſtimmen laſsen.

Einige der nachſtehenden Exempeln, sind von der vortreflichen analytischen Trigonometrie des Hr. *Klügels* genommen.

§ 36. *Erlæuterung des arithmetischen Gebrauchs der gefundenen Formeln.*

1. *Exem.* Es wird gegeben $\log c = 3{,}8976821$; $\log b = 3{,}6752183$; $A = 40^\circ$ man sucht den Winkel *B*.

Aus

Aus der 4. Formel und aus § 34 n° V ist $B=35^\circ\ 26\frac{2}{3}'$

Wenn man mit den Tangenten selbst rechnet so muss man in den Tafeln immer 7 Zifern von der rechten nach der Linken zu abschneiden, weil der bestændige Nenner 10'000000 ist.

2. *Exem.* Man soll für eben diese Stüke die dritte Seite a finden. Mittelst der 5 Formel ist $a=5247+$

Das næmliche bekommt man aus der 1. Formel, wenn man schon B hat. Sind die Seiten in Zahlen gegeben so ist es genauer sich der Formel Fig. 148 zu bedienen.

Aber auch für den Fall da die Seiten in Logarithmen gegeben sind kann man die letzte Formel bequemer und genauer für die Rechnung einrichten

Es ist næmlich $b+c : b-c$ oder $1+\frac{c}{b} : 1-\frac{c}{b} = \text{Tang}\frac{1}{2}(B+C) : \text{tang}\frac{1}{2}(B-C)$

Sezt man $\frac{c}{b}=\cos 2\alpha$ und $\text{tang}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ aus Fig. 144 n° 5 und 6.

so bekommt man $1 : \text{tang}^2\alpha = \text{tg}\,\frac{B+C}{2} : \text{tg}\,\frac{B-C}{2}$

Oder nimmt man $\frac{c}{b}=\text{tang}\,\beta$ aus § 34 n° V so wird aus Fig. 145 n° 6

$1 : \text{tg}\,(45^\circ-\beta) = \text{tg}\frac{1}{2}(B+C) : \text{tg}\frac{1}{2}(B-C)$.

z. B Es ist gegeben lg. $b=3{,}6752283$; lg $c=3{,}8976821$; $A=40^\circ$ daraus bekommt man durch die zwey Methoden $B=104^\circ\ 33'\frac{1}{4}$ und $C=35^\circ\ 26\frac{3}{4}$.

3. *Exem.* Es ist gegeben $a=5247$; $b=4734$; $c=7901$ man soll A finden. Nach der Formel 6 ist $A=40^\circ$.

Zur Uebung und für besondere Fæile dienen noch die folgende aus des Hr. *v Vega* Logarithmischen Tafeln entlehnte Aufgaben.

I. Gegeben b, c und A; ist $b=1758$; $c=936$ und der eingeschlossene Winkel $A=31^\circ\ 29'\ 11''$ so wird der grössere Winkel $B=121^\circ\ 31'\ 19{,}5''$; und der kleine $C=26^\circ\ 59'\ 29{,}5''$ aus Fig: 148.

II. Für die næmlichen gegebenen Dinge ist $a=1077{,}141$ Schuh aus der 5 Formel.

III. Gegeben a, b, c. Bezeichnet man die halbe Summe der Seiten durch s und die Dekadische Ergænzung eines Logarithmen durch D.E so ist $\log \sin\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}[\log(s-b)+\log(s-c)+\text{D.E}\ \log b+\text{D.E}\ \log b]$ oder auch $\log \sin\frac{1}{2}A=10-\frac{1}{2}[\log b+\log c-\log(s-b)-\log(s-c)]$

Ist also $a=150$; $b=140$; $c=130$ so ist $A=53^\circ\ 7'\ 48''$.

IV. Ist $a=153{,}72$ Schuh; $b=197{,}3$: $c=211$, so ist aus der 9 Formel. Der Elæcheninhalt des Dreyek $q=14478{,}6$ Quadrat Schuh.

V. Sind b, c und A gegeben so ist $q=\frac{\frac{1}{2}bc \text{ Sin } A}{\text{Sint.}}$

Ist $b=1758$ Klaft. $\frac{1}{2}b=879$; $c=936$; und $A=31^\circ\ 29'\ 11''$ so ist $q=427\,63{,}2$ Quadr. Kl.

VI. Sind b, A und B gegeben so ist $q = \frac{b^2}{2(\cot A + \cot B}$

Ist $b=513$, $A=25° \; 13' \; 11''$; $B=133° \; 9' \; 7''$ so ist q=110973,8 Quadrat Schuh.

§. 37. *Von den trigonometrischen Functionen vielfacher Winkel.*

(Als eine neue Art zur Berechnung der trigonometrischen Functionen und eine geometrische Auflösung der höheren Gleichungen).

I. Durch die beständige Hinzusetzung des einfachen Winkels in Fig. 144. kann man die Sinus und Cosinus der vielfachen Winkel finden, und umgekehrt,

Dieses bekommt man auch nach *Maclaurins* Methode auf eine geometrische Art * Fig 150.

Die Auflösung dazu wære diese.

Man mache ein Binom aus dem Sinus und Cosinus, und daraus eine Potenz von dem Grade wie das Vielfache. Die Summe der geraden Glieder dieser Potenz mit den wechselweise nachfolgenden Zeichen + und — dividirt durch die Potenz des Sinus totus von einem Grade weniger, giebt den Werth des Sinus des vielfachen Winkels. Die Summe der ungeraden Glieder dieser næmlichen Potenz mit den næmlichen Zeichen und dem næmlichen Divisor giebt den Werth des Cosinus. (Ist $r=1$ so verschwindet der Divisor).

Noch allgemeiner werden sich diese Formeln so Ausdrücken lassen:

Sin $nz = Axy^{n-1} - Cx^3y^{n-3} + Ex^5y^{n-5} - \ldots\ldots$

Cos $nz = y^n - Bx^ny^{n-2} + Dx^4y^{n-4} - Fx^6y^{n-6} + \ldots\ldots$

und noch einfacher wenn man den Werth von $y = \sqrt{1-xx}$ daselbst substituirt.

(Diese Formeln gelten, nicht allein wenn n eine gerade Zahl ist, sondern auch wenn sie eine gebrochene oder irrationale Zahl bedeutet)

II. Und umgekehrt: Um den Sinus des einfachen Winkels aus dem Sinus des Vielfachen zu finden muss man eine Gleichung von dem Grade auflösen welcher durch die Zahl des vielfachen ausgedrückt wird. Die trigonometrische Tafeln geben hier die Auflösung, welche die Algebre bis jezt nicht allgemein geben kann.—Hier werden die für die Alten unerreichbare Aufgaben (Duplicatio cubi, Trisectio anguli) aufgelöist. Hier lassen sich auch æhnliche Untersuchungen nach Art jener in der Algebra pag. 11. § 10 in Ansehung der Wurzeln welche hier trigonometrische Linien sind, und in den Coefficienten als Summen einzeln, oder zusammengesezt, und im letzten Gliede als Factoren steken, anstellen.

1). Sin

---

* Diese geometrische Vorstellungsart der vielfachen Sinusse und Cosinusse dient auch noch zum Beyspiel, dass die Geometrie wegen der unmittelbaren Zusammensetzung der Winkel, die in der Rechnung nicht so leicht geschieht, sehr oft schöne Kunstgriffe zur Abkürzung der Rechnung an die Hand giebt.

1). Sin nz und Cos nz können als Produkte aus n Faktoren oder als Grösen von n Dimensionen angesehen werden. Will man die Dimensionen der trigonometrischen Funktionen zæhlen so muss man $r\sin z$; $r\cos z$ statt $\sin z$, $\cos z$ welche von der Dimension Eins sind, setzen.

2). Die allgemeine Form eines unbestimmten Theils von dem Werthe des $\sin z$ ist $A \sin z^m . \cos nz^{1:n-m}$ wo A den Coefficienten und m eine ungerade Zahl bedeutet. Ist aber m gerade, so gilt diese Form für einen unbestimmten Theil des Werths von $\cos z$.

3). Sezt man s für nz, so wird $\operatorname{Sin}\frac{s}{n} = \alpha \sin s \cos s^{1:n-1} - \gamma \sin s^3 .$

$\cos^{1:n-3} + \varsigma \sin s^5 . \cos s^{1:n-5}$; $\cos\frac{s}{n} = \cos s^{1:n} - \beta \sin s^2 . \cos s^{1:n-2}$

$+ \delta \sin s^4 \cos s^{2:n-4}$ &c.

4). Bedeuten m und n ganze Zahlen so ist

$$\operatorname{Sin}\frac{m}{n}s = \frac{m}{n}\sin s \cos s^{m:n-1} - \frac{m(m-n)(m-2n)}{1.2.3.\ n^3}\sin s^3 , \cos s^{m:n-3} + \ldots\ldots$$

$$\text{und } \cos\frac{m}{n}s = \cos s^{m:n} - \frac{m(m-n)}{1.2.\ n^2}\sin s^2 \cos s^{m:n-2} + \frac{m(m-n)(m-2n)(m-3n)}{1.2.3.4.\ n^4}$$

$\operatorname{Sin} s^4 \cos s^{m:n-4}$ Auch für irrationale Zahlen die durch die rationale so genau als man will ausgedrükt werden können.

5). *Exempel.* Es sey nz oder $s = 30^\circ$, also $\sin s = \frac{1}{2}$, $\cos s = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $m = 1$, $n = 3$; so wird $\frac{\operatorname{Sin} s}{\cos s} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos s^{1:3} = (\frac{3}{4})^{1:6}$ und

$$\operatorname{Sin} 10^\circ = \tfrac{1}{3} . \frac{1}{\sqrt{3}} . (\tfrac{3}{4})^{1:6} - \frac{1.2.5}{1.2.3.3^3} . \frac{1}{3\sqrt{3}} . (\tfrac{3}{4})^{1:6} + \frac{1.2.5.8.11}{1.2.3.4.5.3^5} .$$

$$\frac{1}{9\sqrt{3}} . (\tfrac{3}{4})^{1:5} - \ldots = 0{,}1735 .$$

III. Es lasen sich æhnliche Formeln auch auf die Vervielfæltigung der Winkel vermittelst der Corden beybringen. (m. S. Hr. *Klügels* analytysehe Trigon. S. 86. und Hr. *Eulers* Introductio in Analysin Infinitorum wovon auch eine französische Uebersetzung von Hr. *Pezzi* 1786 erschien). Wir begnügen uns einige artige geometrische Lehrsætze die sich davon herleiten lasen, hier anzuführen.

1). In einem jeden ordentlichen Vielek von n Seiten, für den Halbmesser $= r$; ist $nr^{n-1} =$ dem Produkte aus allen Diagonalen und zwey Seiten welche mit jenen aus demselben Winkelpunkte gezogen werden, (als welche man auch wie Diagonalen betrachten kan). F. 151.

Nimmt man statt des Winkelpunktes den Mittelpunkt an so ist das Produkt aus allen Halbmesern $= r^n$.

2). Venn man in einem ordentlichen Vielek von n Seiten für den Radius $= r$ den Halbmesser durch einen Winkelpunkt deselben zieht,

 und

und auf demselben oder desen Verlængerung einen Punkt P nimmt, desen Entfernung vom Mittelpunkte $=a$ ist, so ist das Produkt von allen Linien, welche aus diesem Punkte an alle Winkelpunkte des Vieleks gezogen werden, gleich dem Unterschiede zwischen der $n$ten Potenz des Halbmesers und derselben von der gedachten Entfernung.

Oder es ist dieses Produkt $= r^n - a^n$, wenn $r > a$ oder $= a^n - r^n$ wenn $r < a$.

3). *Der Cotesianische Lehrsatz.* Die Factoren der zweytheilichten Grösse $r^n - a^n$, sind die Linien PA, PB, PC.... welche man in einem Cirkel, desen Halbmeser $=r$ ist, von einem Punkte P, desen Entfernung vom Mittelpunkte $=a$ ist, an alle Winkelpunkte eines Vieleks von $2n$ Seiten ziehen kan, je einem um den andern genommen, und den Anfang von dem gemacht, durch welchem OP. gehet.

Und die Factoren der Grösse $r^n + a^n$ sind die Linien, welche von P an die übrigen zwischen jenen fallenden Winkelpunkte gezogen werden.*

§. 38. *Anwendung der Differenzial Rechnug auf die geradelinichte Trigonometrie.*

I. Von dem Differenziale der Trigonometrischen Functionen

Die 8. Formeln dazu können aus Fig. 152 u 153; oder aus n° 1 Fig. 144 bewiesen und hergeleitet werden.

(z ist hier der Kreisbogen und x eine trigonometrische Function.)

Nach diesen 8 Formeln kan nun jeder Ausdruk welcher trigonometrische. Functionen enthælt differezirt werden, m. s. s. 30 § 4. Daraus bekommt man.

II. Die Differenziale der Kreisbögen in trigonometrischen Functionen ausgedrükt. Heist man nun jede trigonometrische Function x; so wird ihr Differenziale dx; dz aber das Differenziale des Bogens z von eben dieser Function x, folglich aus forigen Formeln je nachdem x ein Sinus, ein Cosinus eine Tangente u.s.f. bedeutet.

1). $d(\text{arc. Sin}x^2) = dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 2). $d(\text{arc cos } x) = -dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

3). $d(\text{arc tang } x) = dx(1+x^2)^{-1}$ 4). $d(\text{arc cot } x) = -dx(1+x^2)^{-1}$

5). $d(\text{arc sec } x) = x^{-1}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ 6). $d(\text{arc cosc } x) = -x^{-1}dx(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$

7). $d(\text{arc. sin. v. } x) = x^{-1}dx(2x^{-1}-1)^{-\frac{1}{2}}$

8). $d(\text{arc. cos. v. } x) = -x^{-1}dx(2x^{-1}-1)^{-\frac{1}{2}}$

Nach diesen 8 Formeln kann man nun jeden Ausdruk, welcher Bögen von trigonometrischen Functionen enthælt, differenziren z. B.

9). $d[\frac{1}{2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\text{arc.sin } x] = -\frac{1}{2}dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

10). $d[\frac{1}{2}\text{arc.cos } x - \frac{1}{2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}] = -dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

11).

(*) Hr. *Klügels* Bemerkung læst sich hier anführen. „ Ueberhaupt wære es dem Vortrage der Mathematik zutræglich, wenn man öffterer versucht die Rechnung durch ein Raisonnement abzukürzen, oder zu überschlagen. Jene wird immer beschwerlich, wenn man die Schlusfolge der Begriffe nicht mehr deutlich darin erblickt, und blose Rechnungsvortheile versüsen die Arbeit nur wenig. Dieses bleibt immer unterhaltend und befriedigend. „ Letzte Art kan eine *philosophische Berechnung* heisen.

11). $d[\frac{1}{2}\text{arc.sin}(1-x)+\frac{1}{2}(1-x)(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}]=-xdx(2x^{-1}-1)^{\frac{1}{2}}$.

12). $d[\frac{1}{2}\text{arc.cos}(1-x)-\frac{1}{2}(1-x)(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}]=xdx(2x^{-1}-1)^{\frac{1}{2}}$.

Endlich $d(x^m\text{arc.sin}\,x)=mx^{m-1}dx\ \text{arc.sin}\,x+x^m dx(1-x)^{-\frac{1}{2}}$

$$d\ \text{arc tang}\ (b^2+x^2)=\frac{2xdx}{1+b^4+2b^2x^2+x^4}$$

(Diese nebst den folgenden 4 Formeln sind aus dem 3 Theile der analytischen Abhandlung der Anfangsgründe der Mathematik des Hr. Obristli. *v Hauser* genommen).

III. Von der Methode die Kreisbögen durch Sinusse oder Tangenten und diese durch jene zu bestimmen.

Sucht man zwey Werthe für dz nach den Formeln Fig. 152. und nach der geraden Methode der Reihen, so bekommt man eine Reihe für z und nach der umgekehrten Methode der Reihen eine für x. *m. s.* pag. 30.

Will man anstatt des Halbmessers 1 wieder a setzen, so muss jeder Ausdruk eine Linie seyn folglich im Zæhler eine Dimension mehr oder die Potenzen von a im Nenner haben.

IV. Von den Differenziäl Analogien. Fig. 154.

Die Formeln für besondere Fælle befinden sich S. 32 und können aus der Figur wie z. B. die 154 F. oder durchs differenzieren der 5 Formel Fig. 146 hergeleitet werden. Man kan aber auch nach Art des Hr. *Mayers* sie unter eine allgemeine Form aus den zwey fundamental Gleichungen 1) a Sin $B=b$ Sin A und 2) $a^2=b^2+c^2-2bc$ Cos A so wie bey Fig. 154 stehet bringen.

(Diese allgemeine Gleichung enthælt unter den verschiedenen Voraussetzungen die man den Werthen dA, dB u.s.w giebt eine Menge einzelner Fælle in sich, die man bey Hr. *Marinoni* durch weitlæuftige Beweise und Figuren auseinender gesezt findet.)

z. B. Es seyen $c=100$ Ruthen; $A=20°\ 6'$; $B=140°\ 8'$; würklich gemessen, und man wolte daraus die Seite a finden, und zugleich angeben, wie zuverlæssig die Seite a gefunden würde wenn c um 2 Fuss, der Winkel A aber um 5 Minuten, und der Winkel B um 4 Minuten falsch, und zwar zu gross gemessen worden wæren.

Nach Verrichtung der Rechnung (wovon die S. 346 2 T. der *Mayerischen* pr. Geom. nachzuschlagen ist) erhællet dass die angenommenen Fehler in den Messungen von $A, B\ c$ einen solchen Einfluss auf die Seite a haben, dass man nur bis auf $\frac{2}{100}$ oder $\frac{1}{50}$ ihrer Grösse sicher ist.

Wenn die Seite c um 2 Fuss zu klein gemessen worden, das übrige aber mit vorhergehendem Exempel einerley bliebe, so wære der Fehler in der Seite a auch negativ, betrüge aber nur ohngefæhr 0,006 oder $\frac{1}{166}$ der Seite a.

Daraus kan man leicht finden; unter welchen Umstænden der Werth von $\frac{da}{a}$ am grössten ist.

Der

Der obige Bruch $\frac{1}{50}$ zeigt blos die Gröſse des Fehlers *da* in Verhæltniſs zur Seite *a*, wolte man den wahren Fehler *da* in Ruthen und Füſsen finden so müſste man nur aus den angenommenen Datis die Seite *a* würklich berechnen und ihren 50 Theil nehmen.

Vortheile dieser algebraischen Methode über die gemeine trigonometrische. Wichtige Folgerungen und nüzliche Anwendungen davon werden in der praktischen Geomerie vorkommen.

2). *Aufgabe.* In einem Dreyeke sind die beyden Seiten *b,c* und der eingeschloſsene Winkel *A* etwas falsch gemeſsen worden, man verlangt zu wiſsen, in wie ferne dadurch die Seite *a* unrichtig werde, vorausgesezt daſs die Fehler positiv sind.

Aufl. Aus der Gleichung $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$ Cos A bekommt man.

$$\frac{da}{a} = \alpha \frac{db}{b} + \beta \frac{dc}{c} + \gamma dA, \text{ wo } \alpha = \frac{\text{SinB CosC}}{\text{Sin A}}; \ \beta = \frac{\text{SinC cosB}}{\text{Sin A}}; \text{ und}$$

$$\gamma = \frac{\text{SinB SinC}}{\text{Sin A}} \text{ ist.}$$

Statt dA muſs man hier auch $\frac{dA}{206264}$ setzen, damit man ihren Werth in Decimaltheilen des Sinus tot erhalte.

Wenn man mit Hr. *Marinoni* annimmt, daſs die Fehler in den gemeſsenen Linien, diesen Linien sebſt proportional sind so wird

$$\frac{da}{a} = \frac{db}{b} + \gamma dA.$$

Iſt übrigens auch der Winkel *A* richtig gemeſsen worden, folglich $dA = 0$, so iſt blos $\frac{da}{a} = \frac{db}{b}$; und $a + da : b + db = a : b$ das iſt.

Die fehlerhaften Seiten verhalten sich wie die wahren, und das fehlerhafte Dreyek iſt dem wahren æhnlich.

3). *Aufgabe.* In einem Dreyek wo zwey Seiten und die zwey ihnen entgegengesetzte Winkel gemeſsen worden, die Gleichung zwischen den Fehlern dieser vier Dinge zu finden.

Aufl. Aus der Gleichung a Sin $C = c$ Sin A findet man $\frac{da}{a} + dC \cot C = \frac{dc}{c}$ $+ dA \cot A$.

Diese drey Aufgaben enthalten die gewöhnliehſten Fælle, die beym Feldmeſsen vorkommen. Die Berechnung der Fehler und ihrer Folgen in zusammengesetztern Fællen, gründen sich auf die hier angeführten einſachern, und werden in der praktischen Geometrie vorkommen.

§ 39. *Anwendung der Integral-Rechnung auf die geradelinichte Trigonometrie.*

I. Aus den 8 Formeln Fig. 152 flieſsen unmittelbar die 8 neuen Fig. 153. *und eben so aus der 9,10,11,12. § 38 n° 11.*

9).

9). $Sdx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\text{arc. Sin. } x$;

10). $S-dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\text{arc. cos. } x-\frac{1}{2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

11). $S-dx(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\text{arc.Sin}(1-x)+\frac{1}{2}(1-x)(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}$

12). $Sdx(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\text{arc.cos. }(1-x)-\frac{1}{2}(1-x)(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}$

II. Von dem Integriren der Differenzialen welche Sinus und Cosinus enthalten.

1). $Sdz \cos z=\text{Sin} z$. 2). $Sdz \text{ Sin} z=-\text{Cos} z$ aus Fig. 152 eben so.

3). $Sdz \text{ Cos } mz=\frac{\text{Sin} mz}{m}$; 4). $Sdz \text{ Sin} mz=-\frac{\text{Cos} mz}{m}$;

5). $Sdz \text{ Cos } z \text{ Sin}^n z=\frac{\text{Sin}^{n+1}z}{n+1}+C$. 6). $Sdz \text{ Sin} z \text{ Cos}^n z=-\frac{\text{Cos}^{n+1}z}{n+1}+C$;

Es ist ferner $Sxdy=xy-Sydx$

Wenn also $x=z^n$ und $dy=dz \sin z$ gesezt wird so wird.

7). $Sz^n dz\text{Sin}z=-z^n\text{Cos}z+nz^{n-1}\text{Sin}z+n(n-1)z^{n-2}\text{Cos}z-n(n-1)(n-2)z^{n-3}\text{Sin}z-\ldots$ 8). $Sz^n dz\text{Cos}z=z^n\text{Sin}z+nz^{n-1}\text{Cos}z-n(n-1)z^{n-2}\text{Sin}z-n(n-1)(n-2)z^{n-3}\text{Cos}z+\ldots$ 9). $Sdz\text{Sin}^n z=-\frac{1}{n}\text{Cos}z\text{Sin}^{n-1}z-\frac{n-1}{n(n-2)}\text{Cos}z\text{Sin}^{n-3}z-\frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4}\text{Cos}z\text{Sin}^{n-5}z-\ldots\ldots$

und endlich für ein ungerades n das$\left(\frac{n+1}{2}\right)$teGlied$=-\frac{(n-1)(n-3)\ldots}{n(n-2)\ldots}\text{Cos}z$,

und für ein gerades n, das $\left(\frac{n}{2}+1\right)$te Glied$=+\frac{(n-1)(n-3)\ldots\ldots1}{n(n-2)\ldots\ldots2}z$.

DIE SPHÆRISCHE TRIGONOMETRIE.

Was die ebene Trigonometrie für die Lagen gerader Linien gegen einander ist, das ist die sphærische für die Lagen ebener Flæchen gegeneinander. Die Untersuchung der Eigenschaften der Kugeldreyeke kann nach der Ordnung pag. 35. § 12. und vermittelst der Fig. 155, 156, 157, 158. verrichtet werden, wir können nun also nach Art des Hr. *Klügels*

§ 40. *Die Analysis der rechtwinklichten Kugeldreyeke vornehmen.*

I. In einem jeden sphærischen rechwinklichten Dreyek sind die Katheten kleiner, so grofs, oder gröfser als ein Quadrant, nachdem der gegenuber stehende Winkel kleiner, so grofs oder gröfser als ein rechter ist Fig. 159.

Der Punkt *P* ist hier der *Pol* des Kreises *ABG* und *AB* das *Mafs* des Winkels *APB*.

II. In eineinem rechtwinklichten Kugeldreyek ist die Hypothenuse kleiner, als ein Quadrant, wenn beyde Katheten wie *AB* und *BC* oder *GA* und *GC* zugleich kleiner oder gröfser als ein solcher sind. Sie

ist

ist ein Quadrat, wenn eine der Katheten ein solcher ist. Sie ist grösser wenn eine Kathete kleiner und die andere grösser als ein Quadrant ist.

III. Man kann in einem jeden solchen Dreyek die drey Seiten immer kleiner als Quadranten, und die beiden Winkel ausser dem rechten für spitz annehmen.

Denn *ABC* wird die Ergænzung von *GBC* und eben so *ABd* jene des Dreyeks.

IV. Formeln für die Auflösungen aller Fælle, wie man in einem rechtwinklichten Kugeldreyek aus zwey Stücken ausser dem rechten Winkel das dritte suchen kan. Fig. 160.

(Diese können vermittelst der drey Dreyeke bey D und den vierten *EFB* oder auch mit Hilfe des ergænzenden Dreyeks *BGH* bewiesen werden.)

V. Formeln für zwey solche Dreyeke die eine gemeinschaftliche Kathete haben Fig. 161. Sie sind auch für schiefwinklichte Kugeldreyeke anwendbar.

§. 41. *Analysis der schiefwinklichten Kugeldreycke.*

I. Formeln für besondere Fælle man s. pag. 36 und Fig. 162. Sie können aus den Grundformeln für die rechtwinklichte Kugeldreyeke nach *Cagnolischer* Art oder auch wie z. B. für den 1 Fall. nach der kæstnerischen aus der Fig. 162 hergeleitet werden.

Diese Formeln sind zum Gebrauch der Rechnung wichtig. Sie enthalten erstlich alle Fælle für rechtwinklichte Dreyeke, für welche der Sinus des rechten Winkels die Einheit, der Cosinus=o, und die Tangente ohne Ende gross wird, dass jeder Theil der Gleichung, worin sie nicht vorkörnmt, verschwindet. Ferner wenn eine Seite ein Quadrant ist, welches in Astronomischen Rechnungen hæufig vorkömt, so wird der Sinus die Einheit, u. s. w wodurch die Formeln einfacher und auf zwey Theile gebracht werden Diese Formeln sind auch zur Berechnung der Dreyeke in Zahlen bequem, wobey man jeden Theil der Formel durch die Logarithmen leicht findet; und sie hernach zusammennimt.

Es reduciren sich auch alle Gleichungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Kugeldreyeks auf folgende drey.

1). $\text{Sin } a \text{ Sin} B = \text{Sin} A . \text{Sin } b$. 3). $\text{Cos } a = \cos b . \text{ Cos } c + \text{Sin } b . \text{ Sin } c . \cos A$.

3). $\cos c . \cos B = \text{Sin } c . \cot a . - \text{Sin B. Cot } A$. in welchen man für die Winkel und Seiten, der gegenüberstehenden Seiten und Winkel Ergænzungen zu 180°, mit gehöriger Aenderung der Zeichen, setzen kan. Der Grund von der Zulæssigkeit dieser Substitution erhellt aus der Fig. 158.

Am bequemsten sind die Formeln.

1). $\dfrac{\text{Sin}\frac{1}{2}(A-B)\text{tang}\frac{1}{2}c}{\text{Sin}\frac{1}{2}(A+B)} = \text{tg}\frac{1}{2}(a-b)$ und 2). $\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)\text{tg}\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(A+B)} = \text{tg}\frac{1}{2}(a+b)$

welche die am meisten vorkommende Fælle enthalten und dabey sich die Logarithmen vortheilhaft gebrauchen lassen.

Der

Der Höhe CD oder Sin $p=\sqrt{(2\cos a.\cos b.\cos c-\cos^2 a-\cos^2 b+\sin^2 c)}$: sin c und wenn $c=90°$ so ist Sin $p=\sqrt{-\cos(a+b).\cos(a-b)}$

II. Diese Aufgaben vermittelst der Zirkels und des Lineals aufzulosen F 163.

III. Die Flæche eines Kugeldreyeks bekommt man durch die Formel F. 164. Man findet sie auch leicht durch die Analysis des Unendlichen Fig 165. nemlich.

Der Inhalt eines Kugeldreyeks ist gleich dem Quadrat des Halbmessers durch den Uebershuss seiner drey Winkel über zwey Rechte multiplicirt diese sowohl wie jene durch den Halbmesser als die Einheit ausgedrukt.

§. 42. *Erlæuterung des arithmetischen Gebrauchs der gefundenen Formeln nebst einigen Beyspielen von dem Gebrauch der sphærischen Trigonometrie.*

I. *Aufgabe.* Einen gegen den Horizont geneigten Winkel *auf den Horizont zu reduciren Fig. 166*

Es sey $a=25°$; $b=84°$; $c=86°$; so ist nach dem 1 Fall. Fig. 161.

$$\text{Cos } A=\text{cos Ang. red.}=\frac{\cos a-\cos b.\cos c}{\text{Sin } b \text{ Sin } c.}=25°\ 1'\ 5''$$ — und bequemer für die Rechnung.

$$\text{Sin}\tfrac{1}{2}=\sqrt{\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c).\ \sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{Sin } b \text{ Sin } c}\right]}=12°30'32''$$ und *ang.red.*$=25°1'4+$

Aus diesem, aus Hr. *Klügel* genommenen Beyspiel sieht man zugleich, wie viel der Fehler betragen würde wenn man beym Messen statt horizontal zu visiren, um 4 und 6 Grad abgewichen wære.

II. *Aufgabe.* Die *Declination*, (Abweichung), *Rectascension*, (gerade Aufsteigung) *Længe* und *Breite* eines Gestirns mit einander zu vergleichen Fig. 167.

Stellt *P* den *Pol* der Erde vor, *AQ* den *Aequator*, *CP* die *Axe*, CB die *Ekliptik*, CE ihre *Axe*, *E* ihren *Pol*; APQ den *Kolur* des *Sonenstillstandes*, *PC* jenen der *Nachtgleiche*, S ein Gestirn; so ist dessen *Declination SD*, die *Rectascension CD*, die *Længe CL*, die Breite *SL*; die *Schiefe* der *Ekliptik BQ=EP*, der *Positions Winkel ESP.*

Nennt man diese Dinge mit ihren Anfangsbuchstaben so bekommt man Fig. 162 die nachstehende aus Hr. *Klügels* anal. Trig. genommene Formeln.

1). $\text{tang } L=\dfrac{\text{Sin E. tg D.}}{\text{Cos A}}+\text{cos E. tg A.}$

2). Sin B=Sin D. Cos E—Cos D. Sin E. Sin A.

3). $\text{tang } A=\text{cos E. tg } L-\dfrac{\text{Sin E. tg B}}{\text{Cos } L}.$

4). Sin *D*=Cos E. Sin B+Sin E. Cos B. Sin *L*.

Zieht man den Bogen *CS* so wird aus Fig. 160. n° 4.

5) Cos *L*. Cos B=Cos A. Cos D.

Bey diesen Formeln muss in Acht genommen werden, dass die Bogen oder Winkel alle unter einem Quadranten, und was die Breite

 und

und Declination anlangt, nördlich genommen sind. Wenn die Længe und Rectascension über einen Quadranten grofs sind, so mufs man die Zeichen ihrer trigonometrischen Functionen gehörig ændern. Eben dieses gilt auch von der Declination wenn sie südlich wird.

Exemp. Es sey die Rectascension $A=128^\circ$, die Declination südl. $D=15^\circ$, $E=23^\circ\ 28'\ 16''$ so ift $h=134^\circ\ 59'$— und $B=32^\circ 43'$+südlich.

III. *Aufgabe.* Die *Höhe*...die Declination und das *Azimuth* eines Geftirns mit der *Polhöhe* eines Ortes und dem *Stundenwinkel* zu vergleichen. F. 168

Es sey *HR* der Horizont, *HZR* der Meridian eines Ortes, defsen Zenith in Z. Der næchfte Pol. sey *P*, ein Geftirn in *S*, defsen Höhe *SO*, Entfernung vom Zenith *SZ*, Complement der Declination SP; *Azimuth* der Winkel *PZS* des Meridians mit dem Verticalkreise *ZS*. Schreibt man wieder hier die Anfangsbuchftaben dieser Dinge ftatt jener in den Formeln Fig. 162. so bekommt man.

1). $\text{Sin } H=\text{Sin } A.\ \text{Sin } D+\text{Cos } A.\ \text{Cos } D.\ \text{Cos } S$;

2). $\text{Cos } S=\dfrac{\text{Sin } H.}{\text{Cos } A.\text{Cos} D}-\text{tg } A \text{ tg } D.$

Um das Azimuth zu finden, verwechsle man in der Formel für das Dreyek *ZPS* die Buchftaben Z, P, oder braucht man die vorigen Benennungen und nennt Z den Winkel des Azimuths so wird.

3). $\text{Cos } Z=\dfrac{\text{Sin. } D}{\text{Cos} A \text{Cos} H}-\text{tg } A \text{ tg } H.$ wenn das Geftirn im Horisont ift;

oder wenn $H=0$ ift; $\text{Cos } Z=\dfrac{\text{Sin } D}{\text{Cos} A}$.

Noch bequemer kann man das Azimuth oder den Stundenwinkel nach. Fig. 162. 11 Fall so bekommen.

$$\text{Sin } \tfrac{1}{2}S=\sqrt{\frac{\text{Sin}\tfrac{1}{2}(c\,H+c.A-cD)\ \text{Sin}\tfrac{1}{2}(cH-cA+cD)}{\text{Cos } A.\ \text{Cos } D.}}$$

Für das Azimuth gilt dieselbe Eormel, *H* und *D* verwechselt.

IV. *Aufgabe.* Ein allgemeines Problem für die ganze Gnomonik zu beftimmen und ihn aufzulösen. Fig. 166.

1). Die Gnomonik lehrt die Schattenlinien auf einer ebenen Flæche zu verzeichnen. Ift also *A* der *Pol.* und behalten die Kreise eben die Bedeutung wie zuvor, so müfsen nur die beftændigen *B* und *c* und die verænderliche *A* gegeben werden um darnach die verænderliche *a* beftimmen zu können.

Hiezu dient also der 4 Fall Fig. 162 næmlich.

$\text{Cot } a=\dfrac{\text{Sin } B\ \ \text{Cot } A}{\text{Sin } C.}+\text{Cos } B \text{ Cot } c.$

Für die Nachmittagsftunden nimmt man cot *A* und cot *a* negativ. Man mufs bei der Anwendung dieser Formel die Zeichen der trigonometrischen Functionen gehörig zu setzen wohl in Acht nehmen.

2). Ift die Ebene BOD der Horizont so ift $B=90^\circ$, $\text{Sin } B=1$, $\text{Cos} B=0$; folglich $\text{cot } a=\dfrac{\text{cot. } A}{\text{Sin } C}$ oder $\text{tg } a=\text{Sin c. tg } A.$ d. i.

Die

Die Tangente des Schattenwinkels ist gleich der Tangente des Stundenwinkels multiplicirt durch den Sinus der Polhöhe.

3). Es sey *BOD* eine Verticalflæche so ist *c* die Entfernung des Ortes vom Pol also Sin *c* der Cosinus der Polhöhe, cotg *c* die Tangente derselben und daraus der wörtliche Ausdruk für die Formel n° 1.

4). Wenn die Ebene durch die Axe geht so wirft der Zeiger oder die Axe keinen Schatten auf sie, weil er ganz in sie fællt. Die Aufgabe wird alsdenn durch die ebene Trigonometrie aufgelöst.

5).* Will man die Formel auf einer Sonnenuhr verzeichnen so muss man BO und den Winkel B suchen. Dieses bewirkt man vermittelst eines vertikalen Stiftes auf derselben und seines Schattens zur Zeit des wahren Mittages: oder vermittelst einer horizontalen oder verticalen Ebene wenn jene zu Mittage nicht von der Sonne beschienen wird. Wenn die Lage der Ebene gegen der Horizont gegeben ist, so findet man daraus ihre Lage gegen die Mittagsflæche durch die Auflösung des rechtwinklichten Kugeldreyeks *EBD*.

6). Wen CA der Entfernung der Sonne vom Pole gleich ist so kan man fur iede Declination der Sonne die Zeitfinden, da eine gegebene Seite der Ebene, von der Sonne beschienen zu werden anfængt oder aufhört. Die Zweydeutigkeit in Ansehung des Winkels A ist de Natur der Sache gemæss.

§, 43. *Von den Differentialformeln für Kugeldreyeke.*

Man s. pag. 39 Sq. Diese kan man mittelst der Figur wie Fig. 168, oder durch ein zweckmæssiges Differenzieren nach Art jener fur die geradelinichte Dreyeke Fig. 154. herleiten und beweisen

Man s. ein mehreres davon in Hr. *Cagnoli* mehrmals angeführten Trigonometrie pag. 309 Sqq;

§. 44. *Anwendung dieser Differenzial Analogien.*

Bey der 168. Figur sind die Paar Analogien bemerkt die aus dieser Figur hergeleitet werden können, und wovon wir nebst den zwey übrigen (aus pag. 40. III. Fall, n° 1 und 3.) sogleich Gebrauch machen werden.

Auch dient die 169 Figur nebst der bey ihr befindlichen Formel, dass næmlich die *Pallaxe der Höhe (p)* dem Produkte aus der scheinbaren Entfernung *(α)* des Sternes vom Zenith durch die *Horizontalparallaxe (h)* gleich ist, zu den næchst folgenden Anwendungen.

1. *Aufgabe.* Man soll aus der Horizontalparallaxe eines Gestirns finden, welchen Einfluss die Parallaxe fur eine gewisse Höhe auf die Declination und Rectascension habe.

Aufl. Fig. 169, 170. wo *P* die *Polhöhe d* die scheinbare Distanz des Gestirns vom Meredian ist, und die übrigen Buchstaben die vorige Bedeutung beybehalten ....

Dieses ist auch von den nachfolgenden Formeln zu verstehen, die im Grunde nichts als die berechneten Formeln mit benannten Grössen enthalten.

Ist das Gestirn auf der Ostseite so wird die scheinbare Rectascension durch die Parallaxe grösser als die wahre, und kleiner wenn das Gestirn in der westseite sich befindet.

Ist die Declination nördlich oder positiv, so ist die wahre kleiner als die scheinbare, und umgekehrt.

2. *Aufgabe.* Die Fortrückung der Nachtgleichen verursacht, dass die Længen der Sterne grösser werden, ohne dass ihre Breite sich ændert, Diese Fortrückung betrægt jæhrlich $50''\frac{1}{3}$.

Man sucht aus der Verænderung in der Længe die daher entstehende Verænderung in der Declination und Rectascension.

Aufl. Fig. 170. Die Zeichen müsen auch hier genau beobachtet werden.

3. *Aufgabe.* Es soll der Unterschied zwischen der Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyeks und der Kathete gefunden werden, vorausgesezt dass der Winkel zwishen ihnen ziemlich klein sey, etwa unter 8 Grad wie die Winkel der Planetenbahnen mit der Ekliptik.

Aufl. Fig. 168. wo *h* die Hypothenuse, *a*, die Kathete und *v* den Sinus versus bedeuten.

Diese Formel wird in der Astronomie zur Reduction der Planeten auf die Ekliptik bequem gebraucht. Die grösste Reduction ist $\frac{1}{2}v$ wenn sin $2a=1$, oder wenn der Planet 45^{o} von dem Knoten entfernt ist.

4. *Aufgabe.* Man soll bey eben diesen Voraussetzungen den Cos *b* der, dem Winkel *B* gegenüberstehenden Seite *b* durch Næherung ausdrücken.

Aufl. Fig. 168. (Zur Auflösung dieser Aufgabe dient der Ausdruk n° 8 Fig. 144).

Dieser Satz der nebst den vorhergehenden aus Hr. *Klügels* anal. Trigon. genommen ist, wird bey der Berechnung der Bewegung des Mondes gebraucht.

A N H A N G.

§ 45. *Gebrauch der Logarithmen.*

Die folgenden Aufgaben die aus den hæufig gebrauchten vortreflichen Logarithmischen Tafeln des Hr. *Vega* genommen sind, erlæutern zugleich den bequemen Gebrauch so wohl dieser als auch der *Schulzischen* neuen Auflage der *Scherwinschen* Tafeln.

1. *Aufgabe.* Zu einer gegebenen Zahl den zugehörigen Logarithmen zu finden. (§ 11. n° VIII).

1. *Exem.* Lg. 1564=3,1942367; lg. 1564000000=10,1942367;
2. *Exem.* Lg. 15646=4,1944033; lg. 15638=4,1941812.
3. *Exem.* L. 234568=5,3702688 l. 2345685=6,3702697.
4. *Exem.* L.23289427.=7,3671588 l. 232894271359=11,3671588.
5. *Exem.* L.2,3289427=0,3671588 l. 23289,427=4,3671588.

6. Ex.

6. *Exem.* L. $234\frac{3}{4}$ = l. $\frac{939}{4}$ = l. 234,75 = 2,3706056.

7. *Exem.* L. 0,4332 = $\frac{4332}{10000}$ = −0,3633116 = 0,6366884 − 1.

8. *Exem.* L. $\frac{5}{144}$ = −1,4593925 = 0,5406075 − 2.

l. 0 0 0993077 = 0,3130761 − 2.

9. *Exem.* Lg. $\sqrt[3]{\frac{5}{144}}$ = 0,5135358 − 1; lg. $\sqrt[7]{\frac{5}{144}}$ = 0,7915153 − 1.

2. *Aufgabe.* Es ist ein gemeiner Logarithmus gegeben, man soll die dazu gehörige Zahl finden.

1. *Ex.* 3,5485123 = lg. 3536; 6,5450224 = lg. 3507700;
2. *Ex.* 2,3669224 = lg 232,767 9,3669223 = lg. 2327675000.
3. *Ex.* 2,5450224 − 5 = 0,5450224 − 3 = lg. 0,0035077.
4. *Ex.* −1,6330917 = 0,3669083 − 2 = lg. 0,023276.

Anmerk. Die Regeln dazu gründen sich auf dem Lehrsatz § 11 n° XII. Man kan mit Hilfe der Tafeln, zu einem gegebenen Logarithmen, die zugehörige Zahl nur mit 7 Ziffern verlæßlich finden. Man kan noch beim Gebrauche öfters die *dekadische Ergænzung*, mit Nutzen anwenden.

z.B. lg 74256 + lg 0,00347 + lg. 2045 − lg. 2,56 − lg. 203,47 = 3,0050140.
lg. 2,56 − lg 0,00347 = 2,8679105.

Wie man zu einer gegebenen Zahl mittelst der Tafeln den zugehörigen naturlichen Logarithmus finden kan, und umgekehrt, erhellt aus § 11 n° VIII, u IX.

3. *Aufgabe.* Man soll zu einem in Graden Minuten und Sekunden gegebenen Winkel den zugehörigen Logarithmen finden und umgekehrt.

1. Exem. Lg 0°49'26" = 8,1577311; lg. tg. 0°49'26" = 8,1577758.
lg cotg. 0°49'26" = 11,8422242. lg. cos 0°49'26" = 9,9999551.

2. *Exem.* Lg. sin. 88°53'42" = 9,9999192. lg. tang = 11,7147065.
lg. cot = 8,2852935.

Das beim 1 Exempe*l* beobachtete Verfahren gründet sich auf dem Satze dass Sinus und Tangenten von sehr kleinen Winkeln mit den dazugehörigen Winkeln oder Bögen in einer geometrischen, und folglich ihre Logarithmen in einer arithmetischen Proportion stehen. Diese Proportion gilt für die Winkel die unter 1° 19' stehen.

Wie die zugehörige Function eines Winkels der über 1° 19' und unter 88° 41' stehet gefunden wird, ersieht man aus folgenden Beyspielen.

3. *Exem.* Lg. sin 10°36'25" = 9,2649841. lg. cos 10°36'25" = 9,9925152.
lg tg 84°22'17" = 11,0063211. lg cot 8[illegible]°22'1[illegible]" = 11,0063212.

4. *Exem.* Für einen stumpfen Winkel ist lg. cos 100°12'50" = 9,2487628.

5. *Exem* Für den Sinus tot = 1 ist z. B. cos 86°27'20" = 0,7911485 − 2.

Sucht man zu einer gegebenen Function den entsprechenden Winkel z.B.

6. Ex.

6. *Exem.* Ist 9,1756843 der Logarithmus der Cotagente eines Winkels gegeben so ist dieser Winkel $81^\circ 28' 37\frac{6''}{10}$ Imgleichen $0^\circ 29' 35''$ der Winkel wenn 7,9347679 den log. seines Sinus bedeutet.

Für andere trigonometrische Linien bedient man sich der bekannten Formeln.

Um den Gebrauch der logarithmischen Tafeln sich eigen zu machen, dient die aus dem 1 Bande und der zweyten Auflage der Vorlesungen des Hr. *Vega* genommene.

Anwendung der geometrischen Reihen und der Logarithmen auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

1. *Aufgabe.* Es hat jemand einen Metzen Waizen ausgesæet; die Erndte hievon sæet er im zweyten Jahr wieder ganz aus, und von dieser 2ten Aufsat hat er wieder die ganze Erndte im 3ten Jahr ausgesæet u. s. w. Wie viel würde er wohl auf diese Art im 10ten Jahr erndten, wenn man annimmt, dass jeder Metzen Aufsat jæhrlich 4 Metzen Erndte bringet.

Auflösung. $t = aq^{n-1} = 1048576$ Metzen. (§ 14).

2. *Aufgabe.* Es spielt Jemand in die Lotterie, und sezt das erstemal 3 Groschen: dupplirt aber jedesmal seinen vorhergehenden Satz. Wie viel wird er wohl durch 12 Setzungen verspielen?

Aufl. $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = 12285.$

3. *Aufgabe.* Zwischen 1 und 2 sollen noch 11 Glieder eingeschaltet werden, damit eine geometrische Reihe von 13 Gliedern enstehe. M. s. pag. 10. 3 Exemp.

4. *Aufgabe.* Jedes Glied der geometrischen Reihe $a, aq, aq^2, aq^3 \ldots$ in m solche Theile zu theilen, damit alle Theile wieder in einer zusammenhængenden geometrischen Reihe stehen.

Das erste Glied dieser Reihe ist $x = \frac{a\sqrt[m]{q} - a}{q - 1}$, und der Quotient $y = \sqrt[m]{q}$.

z. B. in der Reihe 7, 56, 448.... soll jedes Glied in drey solche Theile getheilet werden.

so ist $x = \frac{7(\sqrt[3]{8} - 1)}{7} = 1$; $y = \sqrt[3]{8} = 2$ und die Reihe 1, 2, 4, 8, 16, 32.

Die Summe z. B von 7 Gliedern dieser Reihe fænde man auf eine zweyfache Aat $= 127$.

5. *Aufgabe.* Es bestellt Jemand bey einem Juwelier einen Diamenten mit diesem Akkord, dass er ihm für den ersten Karat, den der Diamant wiegt 40 fl für den zweyten 120 fl. u. s. w. næmlich für jeden folgenden Karat 3mal so viel als für den vorhergehenden zahlen wolle. Nun ist das Gewicht des Diamanten $4\frac{1}{4}$ Karat, wie viel muss er dem Iuvelier bezahlen?

Aufl. Der ganze Werth des Diamantes ist $s = \frac{40(\sqrt[4]{3^{17}} - 1)}{2} = 696$ fl. 41 kr.

Ohne dieser Regel könnte man leicht um 99 fl. 19 kr: oder gar um 303 fl. 6 kr: zu viel zahlen.

6. *Aufgabe.* Es hat jemand ein Fass Wein, welches $a=100$ Maass enthält, wovon jede Maass $c=36$ kr. kostet; er zapfet $b=1$ Maass heraus, und füllet das Fass wieder voll mit Wasser an. Nachdem sich das Wasser mit dem Weine volkommen vermischt hat, zapft er abermal $b=1$ Maass heraus, und füllet das Fass wieder mit Wasser an. Wie oft kann nun dieses wiederholt werden, damit jede Maass der Vermischung, welche sich noch im Fass befindet $d=24$ kr. werth sey?

Aufl. Nach dem *nten* Abzapfen werden noch $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ Maass im Fass verbleiben.

Der Werth der Vermischung $ad=\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}.c$, woraus folgt

$$n=\frac{\lg.c-\lg\ d}{\lg.a-\lg(a-b)}=40.$$

Wiederholt man aber die Abzapfung 41 mal, so ist ein Mass der Vermischung nicht mehr 24 kr. werth.

7. *Aufgabe.* Es legt Jemand ein kapital $a=20,000$ fl. zu $c=5$ pr. Zento jæhrlichen Interessen an, und schlægt mit Ende jeden Jahres die Interessen zum Kapital, oder welches einerley ist, er erhebt solche, und legt selbe gleich wieder als ein Kapital an. Wie gross wird nun diess Kapital nach der Zeit von $n=12$ Jahren.

Aufl. $s=a\frac{(100+c)^n}{100}=ap^n=35917$ fl. $7\frac{1}{2}$ kr.

Diese Formel kann aber nicht unmittelbar angewendet werden, , um den Anwachs des kapitals zu berechnen, wenn die Anzahl der Jahre n ein Bruch sein sollte.

In den K K. Staaten werden die Interessen in den öffentlichen Fonds halbjæhrig ausbezahlet. Wollte man mit Ende eines jeden halben Jahres die Interessen wieder zum Kapital schlagen; (welches leicht angeht; weil die Interessen um 8 auch 14 Tage vor dem verfallenen Termin schon ausgezahlet werden); so würde der Anwachs dieses Kapitals betræchtlicher sein, als im vorigen Falle.

z.B Es legt Jemand in das wiener Banko-Amt ein Kapital von 25000 zu $3\frac{1}{2}$ pr. Zento jæhrlichen Interessen an, und legt mit Ende eines jeden halben Jahres die Interessen wieder als ein Kapital an; wie hoch wird dieses Kapital in 20 Jahren anwachsen?

Antwort $s=ap^n=50019{\cdot}8$. Würde man aber nur mit Ende jeden Jahres die Interessen zum Kapital schlagen so wære $s=49744,6$;

Aus der Formel $s=\log a+n\log p$ fliesen folgende.

$\log.\ a=\log s-n\log p$; $\lg.\ p=\frac{\lg.s-\lg a}{n}$; $n=\frac{\lg s-\lg.a}{\lg p.}$;

nach denen nun verschiedene hieher gehörige Rechnungsfragen beantwortet werden konnen.

8. *Auf-*

8. *Aufgabe.* Ein Kapital a wird angelegt, und nach Verlauf eines jeden Jahres nicht nur mit seinen gefallenen Interefsen sondern auch noch überdies mit einer Summe b vermehrt. Wie grofs wird wohl die ganze Summe nach n Jahren

Aufl. Man sehe §. 14. Exem. 1 und 2. oder

Die Summen, auf welche die jæhrlich zugelegten Theile b anwachsen, stehen in der geom: Reihe $bp+bp^2+bp^3+\ldots bp^{n-1}$ wovon die Summe mit dem Anwachs des Kapitals a; $s=ap^n+\frac{bp(p^{n-1}-1)}{p-1}$

z.B. Es sey $a=6000$; $b=500$; $n=10$, und die Interefsen sind zu 5 pr Zento, næmlich $p=1{,}05$ so ist $s=\frac{bp(p^{n-1}-1)}{p-1}=15562{,}31$.

Setzet man aber hier $b=a$ so ist $s=\frac{ap(p^n-1)}{p-1}$ und

1). $\lg.s=\lg a+\lg p+\lg (p^n-1)-\lg.(p-1)$

2). $\lg.a=\lg.s+\lg.(p-1)-\lg p-\lg.(p^n-1)$

3). $n=\frac{\lg[ap+s(p-1)]-\lg a}{\lg.p}-1$. Jede dieser Formeln löset nun wieder verschiedene daher gehörige Rechnungsfragen auf.

9. *Aufgabe* Ein Kapital a wird zu c pr. Zento angelegt, und das Interefse jæhrlich zum Kapital geschlagen: es wird aber hingegen mit Ende eines jeden Jahres eine Summe b hinweggenommen; wie grofs wird der Rest R nach n Jahren noch seyn?

Aufl. 1) $R=ap^n-\frac{b(p^n-1)}{p-1}$ daraus 2). $a=\frac{b(p^n-1)}{p^n(p-1)}+\frac{R}{p^n}$;

3). $b=(ap^n-R).\frac{p-1}{p^n-1}$; 4). $n=\frac{\log[(p-1)R-b]-\log[(p-1)a-b]}{\log p.}$

Einige Beyspiele zur Anwendung dieser Formeln.

1. *Frage* Es legt Jemand ein Kapital von 30000 fl. zu 4 pr. Zento an, und nimmt jæhrlich von den Interefsen 800 fl. zu seiner Unterhaltung weg; den Ueberrest aber schlægt er zum Kapital. Wie grofs wird dieses Kapital nach 15 Jahren seyn

Antwort. Nach der 1ten Formel ist R=38009.41.

2. *Frage.* Es hat jemand durch 6 Jahre hinter einander eine Rente von 500 fl. zu geniefsen: er ist gesinnt diese Rente zu verkaufen; was wird sie wohl izt werth seyn wenn die Interefsen zu $3\frac{1}{2}$ pr. Zento vorgeschrieben sind?

Antwort. Nach der zweyten Formel ist $a=2665$ fl.

3. *Frage.* Es ist ein Rittergut zu verkaufen, und es melden sich drey Kæufer: der erste will dafür 34500 fl. alsogleich baar bezahlen; der 2te bietet 38000 fl. aber so dafs er 6000 fl. alsogleich, und 4 Jahre hintereinander mit Ende eines jeden Jahres 8000 fl. erlegen will; der dritte bietet 40000 fl. jedoch so, dafs er 4000 alsogleich, und 6 Jahre hintereinander mit Ende eines jeden Jahres 6000 fl. erlegen will. Wer hat nun am meisten geboten, wenn die Interefsen zu 5 pr. Zento gerechnet werden.

Antwort. Nach der 3ten Formel ist $b=230{,}97$ fl. also des ersten der gröfste Anboth.

Anmerkung. Diese Aufgaben sind hinreichend um den Nutzen der Logarithmen, auch bei dem gemeinen Leben vorkommenden Rechnungen zu zeigen, und wie schwer es dem blos mechanischen Rechner fallen müfse, solche aufzulösen, wenn ihm die Theorie der Logarithmen unbekannt ist.

II. Tafel.

DIE PRAKTISCHE GEOMETRIE.

§. 1. *Erklærung der Feldmeſskunſt und allgemeiner Blik über ihre Gegenſtænde.*

I. Proiection unebener Flæchen auf dem Horizont — Vertical oder lotrechte Linien und Ebenen. — Wahre Entfernungen. — *Horizontalabſtand.* — *Grundriſse.* — *Profilriſse.* — *Fig.* 1.

II. *Reduction* der Linien und Winkel auf dem Horizont (aus Taf. I. *fig.* 166.)

III. Grænzen der gemeinen Feldmeſskunſt. — (höchſtens bis auf 4. Meilen). fig. 2. (Wenn die Spitzen zweyer Thürme, jeder 100. Fuſs hoch, um 1388. Fuſs oder ohngefæhr 200000. Lin, von einander entfernt wæren, so würden sie am Fuſse doch nicht mehr als um 1. Lin. næher bey einander ſeyn.)

IV. Die nöthigſten Kenntniſse eines Feldmeſsers.
Kenntniſs der theoretischen Elementargeometrie; — der Trigonometrischen und Algebrischen Rechnung. — Geschicklichkeit beim Gebrauch der Inſtrumente. — Erkenntniſs ihrer Fehler um den Grad der Zuverlæſsigkeit anzugeben zu wiſsen. — Kentniſse der Naturlehre &c. — Der *wiſsenschaſtliche* und *handwerksmæſsige* Feldmeſser.

V. Hulfsquellen. — *Marinoni.* — *Hauser.* — *Zaborowſki.* — *Hogrewe.* — *Liesganig* — *Delambre* &c. und ins besondere, *M. Joh. Tob. Mayers*, Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie. — 4. Theile 8° Gottingen 1792. aus welchem letzten Werke hier hæufige Auszüge vorkommen werden. —

§. 2. *Von Vergleichung und Verwandlung der Længen maaſse untereinander nebſt einigen Vortheilen beim trigonometriſchen Rechnen.*

I. Bemühungen ein allgemeines Længenmaaſs zu finden.

Der am 31. Jul. 1793. decretirte Französische *Metre* ist der $\frac{1}{10000000}$ Theil des Meridianquadranten. Er enthælt 3. Schuh 0 Zoll 11,44 Lin = 443,44. paris. Lin und ist die Einheit des Længenmaaſses.

Ein Quadrat Metre der sogenannte *Are* wird in Frankreich als die Einheit des Flæchen oder Feldmaaſses gebraucht.

Der Würfel von $\frac{1}{10}$ des Metre oder die *Litre* ohngefæhr unseres Maaſs zu Getrænken ist die Einheit des Hohlmaaſses.

Endlich heist der Cubus des $\frac{1}{100}$ eines Metre vom gefrorenem und von der Luft gereinigten Regenwaſser ein *Gramme* und ist die Einheit des Gewichts.

II. Verwandlungen der Længenmaaſse in einander.

z. B. 1. Rhein: 1. Lond. F. = 13918,30 : 13511,54. also sind: 13918,30. Lon. F. = 13511,54. Rh. und 125. Rh. = $\frac{13918,30.}{13511,54}$ 125. = 128,763. L. F.

O

$$\frac{\text{1. Pariser Schuh}}{\text{1. Wiener Schuh}} = \frac{102764.}{100000.} = 1{,}02764. = \frac{114400.}{14012.}$$

Zulæſsigkeit solcher Verhæltniſse in des Hr. *Vega* neuen Logaritm. Tafeln.

Die von *Sigismundus Augustus* in Pohlen, als ein allgemeines Længenmaaſs eingeführte warschauer Elle enthælt 2640. solcher Theile deren ein Pariser Schuh 1440. hat. Man kann also ziemlich nahe die warschauer Elle von 27. par. Z. annehmen. Der Fehler macht etwa 1 Elle auf 200. Ellen Unterschied.

Laut Rectification der Constitution vom J. 1764. enthælt eine polniſche wie auch die krakauer Musterelle 22″7‴ Wiener Maſs ⟹ 22,61. Zoll unterm 15° der Temperatur (Reaumur).

Eine Elle zu $22''\frac{1}{2}$ gerechnet machen 64. Polnische Ellen 20. Wiener Klafter. Eine Pol. Ruthe auf Wiener Maſs reducirt giebt 2°2′2″.

Eine Schnur in Polen hælt 10. Polniſche Ruthen. —

Ein Wiener *Joch*, oder Tagbau enthælt 1600. Qu. Kl. — Der Polnische, oder der sogenannte Morgen $1672.\frac{49}{108}$ Wiener Qu. Kl.

Der *Chelmiſche Lan*, deſsen man sich auch hæufig zur Vermeſsung der Felder in Pohlen bedient enthælt 49802,52. W. Qu. Kl.

Zur Kenntniſs der Polnischen Maaſse empfiehlt sich, das Werk des Graf. *CZACKI o Litewſkich i Polſkich Prawach &c.* das ins deutsche auf hohem Befehl übersezt wird.

Eine oestereichische Meile enthælt 4000. W. Kl. — Eine geographische Meile zu 4000. Schritt enthælt 23661. reinl. Schuhe, davon gehen 15. auf 1. Grad.—

Die deutsche neue kleine Meile 20,000. r. S.

Man bedient sich auch in Deutschland einer Meile von 1000. Rein. Ruth. wovon $29{,}567\frac{1}{4}$ auf einen Grad des Æquators gehen.

Der Durchmeſser der Erdkugel ist 6543210. Pariser Toisen. —

III. Verwandlung des Decimalmaaſses in Duodecimal, und umgekehrt. Bezeichnen wir die Zollen, Linien, Skrupel, Quarten us. w. mit Z. L. S. Q. im Decimalmaaſs und mit z, l, s, q, im Duodecimalmaaſs so ist:

$Z = z + 2l + 4s + 9{,}6q$; $L = l + 5s + 3{,}3q$; $S = s + 8{,}7q$.

so wære z. B. $9Z.\ 8L\ 4S = 11z\ 9l,\ 3{,}6q$.

oder $x = \frac{1728\cdot 984}{108} = 1700\,s. = 11\,z\,9l\ 8{,}s$ und umgekehrt.

auf eine æhnliche Art verfæhrt man mit den Flæchenmaaſsen: so wære $Z^2 = 2z^2 + 10l^2 + 86{,}1\ldots s^2$; $L^2 = 2l^2 + 141{,}9.\ s^2$; $S^2 = 1{,}3\ s^2$.

zB. $4F^2 + 9Z^2 + 20L^2 = 5f^2 + 128z^2 + 74l^2 + 64{,}5\ s^2\ldots$

IV. Vortheile beim trigonometrischen Rechnen.

weil d. log. $x = \frac{dx}{x}$ so ist für A den Model des logarithmischen Systems.

1) d. log.

1) d. log. sin. $a = \frac{Ad \, Sin a}{sin a} = Ad \, a. \, cot a$

2) d. log. cos $a = - Ad a$ tang a

3) d. log. tang $a = \frac{2 \, Ad \, a}{sin \, 2a}$

4) d. log. cota $= - \frac{2 \, Ada}{sin \, 2a}$

5) d. log. sec a = Ada tang a

6) d. log. cosec$a$ = — Ada cot$a$.

Diese Formeln ergænzen jene der 152. fig. I. Taf. und sind sehr brauchbar um die Berechnungen der Fehler in den Mesſungen abzukurzen. Ein Beyspiel davon S. m. S. 91.

7) Ist für r. = 1 ein Bogen a in Theilen des Halbmeſsers gegeben so sind seine Sekunden

$x = a. \, 206264$, denn $\pi : a = 648000'' : x''$

und log. $x'' = 5,31445252 + \log a$.

8) Ist der Bogen α sehr klein so ist sin $\alpha = \alpha$; und tang $\alpha = \alpha$.

9) Nimmt man für x einen sehr kleinen Bruch so ist $(1 + x)^2 = 1 + 2x$; und umgekehrt $\sqrt{(1 \pm m)} = 1 \pm \frac{1}{2} m$ (völlig genau s. m. S. 7. §. 12)

10) Da cos $\alpha = \sqrt{(1 - \sin^2 \alpha)}$ so ist für α sehr klein cos $\alpha = 1 - \frac{1}{2} a^2$

Für ein Paar Zahlen B und A und $A < B$ ist $\sqrt{(B^2 \mp A^2)} =$

$B \sqrt{(1 \mp \frac{A^2}{B^2})}$ = B cos φ oder = B sec φ; je nach = dem man $\frac{A}{B}$ = Sin φ oder tang φ setzet. (*)

§. 3. *Von der wirklichen Beſtimmung und Ausmeſsung gerader und krummer Linien auf dem Felde und auf dem Papier.*

I. *Abſteckung der verticalen Flæchen*, oder der geraden Linien, und Werkzeuge dazu. Eine gerade Linie abzustecken — Sie zu verlængern fig. 5. Horizontaler und wahrer Abstand fig. 1.

Absteckstæbe — Meſsfahnen — Zeichenstæbe.

Die Durschnitte gerader Linien auf dem Felde zu bestimmen.

Eine gerade Linie aus der Mitte abzustecken *fig.* 3. — Grundsatz dazu. Verticalflæche über krumme Flæchen abzustecken fig. 4. Nothige Vorsichten dabey. — Vortheilhafte Lage des Auges. — Fehler die von der Dicke der Stæbe, und aus ihrer schiefen Stellung zu befürchten sind fig. 5. u. 6. O 2 Ist

(*) Uebrigens gewæhren hier die Trigonometriche Tafeln des Hr. *Vega* durch ihre bequeme Einrichtung, volstændige und richtige Berechnung und faſsliche Erklærung ihres Gebrauches sowohl als auch der nützlichen darinn enthaltenen Formeln vielerley Dienste. Die neueste Auflage davon ist deutsch, und lateinisch unterm Titel. *Georg* VEGAS, *Logarithmisch Trigonometrische Tafeln nebst andern, zum Gebrauch der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln;* zweyte, verbeſserte, vermehrte, und gænzlich umgearbeitete Auflage. Leipzig 1797, 2 B. gr. 8. erschienen, und in der Weidmannischen Buchhandlung zu haben, Diese Tafeln machen die Bearbeitung anderer Logarithmischer Tafeln, auf eine lange Zeit entbehrlich.

Ist die Dicke der Stange ab $= a$ und die Weite des Auges von ihr $=$ b so ist tgo. $= \frac{a}{b}$. Folgerungen daraus. fig. 5.— Stellung des Auges in o.

Sin hai $= \frac{hi}{ah}$ *fig. 6.* Folgen daraus.

II. Meſsung gerader Linien, und Werkzeuge dazu. (10. Klaft = 60 Schuh)

1) Meiskette *fig. 7.* — Ihre Eintheilungen. — Anfangspunkt. — Kettenstab fig. 8. Verticaler Maasstab *fig. 9.* — Horizontaler, oder Setzlatte.— Klafterstange von 6; 12. Schuh. Schemmel fig. 10. Setzwage Fig. 11.

2) Bestimmung der Længen durch Schritte. — Ihre Gleichförmigkeit. — Verhæltniſs mit einem bekannten Maaſstab. — ($2\frac{1}{2}$ Fuſs) — Schritzæhler (Pedametre). —

3) Meſsung mit der Kette auf ebenen Boden. *fig. 3.* — Kettenzieher *A* und *B* (10. sechs zöllige eiserne Nägel bei A). — Hinderniſse im Wege.

4) Junge, muntere aufmerksame Gehülften. Meſsung auf nicht sehr abhængigen Boden mit Maſsstæben (Gebrauch der Schemmel). — So würde in Lappland zwischen Torneo, und Kitti eine Grundlinie von 7400. Toisen und 5. Schuhen zu verschiedenen mahlen gemeſsen, und man fand nur einen Unterschied von 4 Zoll. bei wiederholten Meſsungen)

5) Meſsung auf einem sehr abhængigen Boden *fig. 12.*
Die wahre Weite AB $= \sqrt{(Aa^2 + aB^2)}$— Negative Erhöhungen. Durchschnittsfigur. —

Ihre Projection auf *aB* *Aa* durchs Nivelliren. —

III. Von den Fehlern, die man in der Meſsung einer geraden Linie begehen kann.

1) Fehler aus der Unvollkommenheit der Werkzeuge.
Prüfung der angeblichen Længe der Kette (100) — Gelenke. — Prüfung der Eintheilung.

2) Fehler aus Unvorsichtigkeit. — Krumme Glieder. — Einsetzung der Kettenstangen. — Wenn die Kette nicht gehörig angespannt wird. — Wenn man bei jedem Kettenzuge von der geraden Linie abweicht *fig. 13.* — Ist hier die Kettenlænge $= r =$ ab so ist af$= \frac{r - bf^2}{2r}$ und ae $= 4r - \frac{C}{2r}$ (wo $C = bf^2 + (bf + ch)^2 + (ch + di)^2 + di^2$) Folgerungen davon *ae* Sind die Abweichungen wie hf gleich groſs und $= \varepsilon$: so wære für n Kettenlængen $ae = n.\, r - \frac{(2n-3)\,\varepsilon^2}{r}$. — Folgerungen aus $\frac{C}{2r}$ $= \frac{(2n - 3).\,\varepsilon^2}{r} = \frac{bf^2 + (bf + ch)^2}{2r} \ldots$

3) Fehler bei Meſsung mit Maaſstæben. —
Wenn man keine Schnur ausspannt. — $\left(\frac{C}{2r}\right)$. — Fehler bei den Umschlægen. — (zu kurze Linie). — Wenn man sich das Bücken er spart fig. 14. — Der Fehler be $=$ ac $- 2\sqrt{(\frac{1}{4}\,ac^2 - df^2)}$.

4) Fehler wegen Einfluſs der Wærme nnd der Kælte auf die Werkzeuge. Die hölzernen Maſsstæbe sind mit Oelfarbe und Lakfürniſs zu überziehen. — Platina.

5) Fehler wegen Krümmung der Kette *fig.* 15. Die *Kettenlinie.* Ist $hr = c$, $ah = \frac{1}{2}b$; so ist $ar + br = h + \frac{2c^2}{h}$ und $ar + rb - h = \frac{2c^2}{h} = x$. zB. ist $c = 1$, $h = 50'$ so ist $x = 0{,}04$ Fuſs $= 4$ Lin.

IV. Einige Methoden, Entfernungen nur ohngefæhr zu bestimmen.—

1) Durch den Schall. Da solcher in einer Zeitsekunde ohngefæhr 1040. pariser Fuſs zurücklegt, welches also 20 Sec. auf eine deutsche Meile bringt. — Eine Reihe von Beobachtungen auf der göttingischen Sternwarte, mit einer Tertienuhr gab 1038. par. Schuh auf 1. Sekunde.

2) Durchs Augenmaaſs. — Nutzen davon. — Ein roher Entwurf der ganzen Gegend nur nach dem Augenmaaſse erleichtert die Auswahl der Standlinie und befördert dadurch die Gute und die Genauigkeit der Meſsung. — Anhaltende Uebung auf dem Papier und im Felde befördern das Augenmaſs. fig. 16.

Optische Teuschungen *fig.* 16. u. 5. — Vortheilhafte Lage des Auges. — Sind die Objekte *A*, *B* hre Entfernungen vom Auge *a*, *b* und die Sehewinkel O, o so ist $A : B = a \sin \frac{1}{2} O : b \sin \frac{1}{2} o$. — Folgerungen für gleiche Entfernungen. — Für sehr kleine Sehewinkel. — Scheinbare Verhæltniſse *fig.* 17. —

V. Bestimmung und Meſsung krummer Linien auf dem Felde fig. 18. Abscisſen und Ordinaten einer krummen Linie. — Zeichen für sie + —; 0; (Længen — Breiten), — Manuale für sie. — H und E für Hohl und Erhaben. z. B für Fluſse — Eckpunkte von Gebäuden, Grænzsteine u s. w. — Messschnur. —

VI. Leichte Methoden senkrechte und parallele Linien auf dem Felde zu ziehen.

1) Für $ad = \frac{ac^2 + ab^2 - bc^2}{2\,ab}$; $bd = \frac{cb^2 + ab^2 - ac^2}{2\,ab}$ fig. 19.

z. B für $ac = 50'$; $bc = 60'$; $ab = 82'$ ist $ad = 34', 29$.
auf das Ende einer Linie *ab* ein Perpendikel *ad* aufzurichten fig. 20. Winkelhaaken fig. 23. Aus einem willkührlichen Punkt c fig. 19. Rechtwinklichtes Dreyek dazu — (3, 4, 5.) fig. 20.

2) Parallellinien auf dem Felde zu ziehen. fig. 21. — mittelst æhnlicher Dreyeke *fig.* 22. Gebrauch enfernter Objekte zur Ziehung paralleler Linien fig. 24.

Es ist hier $ab - de = \frac{eb.\ ab}{cb}$ d. h. der Fehler ist desto kleiner. u. s. w.

z B. ist $cb = 2$ Meilen $= 50000'$ Fuſs; $ab = 50$ Fuſs; $eb = 100$ F. so ist $ab - de = 1''$

$\sin c = \frac{ab}{bc} = c = \frac{ab}{bc}$ 206264 Secunden $= 3' 26,'' 26$.

3) Anwendungen davon. — Fig. 21. — Desgleichen bei Feldertheilungen u. s. w.

VI. Vom Abtragen gerader Linien aufs Papier, nebst verschiedenen Methoden sie in gegebenen Verhæltniſsen zu theilen.

Dieses

Diese Aufgaben waren schon in der I. Taf. fig. 2; 15; 31, 32 33. 41, 42, 43, 45, und 46. aufgelöst. Das Verhætniss jeder Paar gerader Linien kann mit Zahlen ausgedrukt werden.—

VII. *Unterschied zwischen den theoretischen und praktischen Grösen.*—

Ist eines Kreises Durchmesser $= a$, die Grænze des deutlichen Sehens b und die sheinbare Grose des Durchmesser φ so ist $tg\ \varphi = \frac{a}{b}$ 206264 Sek. Ins Mittel ist gewöhnlich $\varphi = 40''$ bis $60.''$ — Fixterne $1''$ und umgekehrt ist $a = b\ tg\ \varphi$. z B. für $b = 8$ und $\varphi = 2'$. ist $a = \frac{1}{215}$ Zoll. — Um so viel kann also diese Person fehlen oder $\frac{1}{107}$ eines Zolles genau mit dem Zirkel fassen. — Für eine Gerade von 6 Zollen wære $\frac{1}{107}: 6 = 1 : 642$. — Dieses gilt auch von dem Winkelmesser.

VIII. Auflosung verschiedener praktischen Aufgaben mittelst der Kette und der Nægel. — Vortheile bei diesem Verfahren um Fehlern auszuweichen — Aufnahme einer ganzen Gegend mittelst senkrechter Linien und einem Instrummente mit senkrechten Absehen.— fig. 32. Kann ziemlich genau und geschwind verrichtet werden. Hauptpunkte und Punkte einer Figur. —

§. 4. *Messung der Winkel auf dem Felde, vermittelst des Messtisches und dessen Gebrauch.*

Bei jedem Aufnehmen im Felde kommt es hauptsæchlich darauf an die Længen der Linien und ihre Lage zu bestimmen.— Ein Messtisch ist ein Instrument mittelst welchem man zugleich eine detaillirte Zeichnung der Gegend verrichten kann: Es verreinigt also alle Vortheile und Absichten die man sich beim Aufnehmen, wenn dieses nicht ins Grose gehet, zu erreichen vornimmt — und befördert das Augenmaass.

I. Einrichtung eines Messtisches — und dessen gute Eigenschaften. — Die des H. J. T. *Mayer* — Grobe und sanfte Bewegungen.— Hr. *Marinoni* Messtisch. *fig.* 25. — Nutzen für das Tischblat. Hr. *Branders* neuer geometrischer Universalmesstisch. — Hr. *Hogrevens* Messtisch. — Magnetnadel und Maasstab auf den Diopteru. — Winkelhacken d.

II. Die *Wasserblase fig.* 26. und 27. — Berichtigung der Wasserblase mittelst der beweglichen Ebene cd. — (Doppelter Winkel). — Billardkugel zur horizontaler Stellung des Messtisches.— Wassercylinder. —

III. Die *Diopteru. fig.* 28. — Ist der Schlitz in der Oculardiopter zu weit so giebts eine Parallaxe.— Dioptrische Ebene.

Für die Entfernungen a und b der Objekte A und B von t und die halbe Breite des Diopterlinials c; ist $\sin A = A = \frac{c}{a}\ 206264''$

und $\sin B = B = \frac{c}{b}\ 206264''$

Fehler wenn die Sehelinie nicht durch die Mitte der Absehen gehet.

daraus $A-B = \frac{(b-a)}{ab} \cdot c. \ 206264''$

zB. Ist b = 100 Fuſs = 1000 Zoll; a = 50 Fuſs = 500 Zoll, und c = ¼ Zoll so wird A—B = 1′43″ — Dieser Fehler würde ganz verschwinden wenn b=a wäre: und desto gröſser je ungleicher *a* und *b* sind.

IV. Gebrauch des Meſstisches.

1) Ausmeſsung unzugænglicher Weiten fig. 30.
Hr. *Hogreves* Meſstischchen bei deſsen Diopteru sich die Magnetnadel und der Maſstab befindet; so daſs man des Zirkels entbehren kann, erleichtert den Unterricht im Fedlmeſsen und das Aufnehmen selbst ungemein; indem es dabey nur darauf ankömmt, eine Standlinie und einige Hauptpunkte auf dem Felde und auf dem Meſstische zu bestimmen, woraus sich alle unbekannte Punkte durch das Vor- oder Rückwertseinschneiden Fig. 31. sogleich auf dem Papiere finden und berichtigen laſsen. — (M. S. Hr. *Hogrews* Feldmeſsung und meine polnische Uebersetzung mit Zusætzen Warschau 1791. —

2) Das Rückwærtseinschneiden erklært sich mittellst der *Aufgabe.* Es sind drey Punkte *A*, *B*, *C* auf dem Felde gegeben, man soll einen vierten *D* bestimmen von dem die drey ersten zu sehen aber nicht zugængig sind fig. 31.

Also sind im Dreycke A B C die drey Seiten nebst den Winkeln *m*, *n* gegeben. Die Lage der Punkte A, B, C untereinander und in Rücksicht auf *D* kann verschiedentlich ausfallen. *Dieses* bestimmt verschiedene Fælle die durch geometrische Verzeichnung oder durch Rechnung mittelst der *Delambrischen* Förmel. S. 33 §. 10 n°11. aufgelöset werden. —

Nach J. T. Mayer Art wære $\cot x = \cot \mu + \frac{b \sin n}{c \sin m . \sin \mu}$

alwo C A B = o und $\mu = 360° - m - n - o$.

z B. Es sey $o = 115°$; $m = 25°$; $n = 45°$; $b = 1112$ Fuſs, $c = 2000$ F. so wird $\mu = 175°$ daraus $x = 128° 6'$

Hr. *Branders* mechanische Auflösung dieser Aufgabe, und ihre geometrische Verzeichnung durch zwey oder durch einen Kreis. — Fast alle Fælle kommen in der *fig.* 50. vor.

3) Eine Figur zu Papiere zu bringen.
Dieses geschiehet aus einem Stande, indem man einen Standpunkt auf dem Umfang der Figur oder innerhalb der Figur erwæhlt, oder aus zwey oder mehrern Standpunkten *fig.* 30. 32. Einfluſs der anfänglichen Fehler bei jedem Verfahren auf die übrigen Punkte. — Proben. — Das zurückvisiren. . — Versicherungsdioptern. — Chordentafel. —

4) Linien und Figuren abzustecken. — z. B. bey Festungswerken.

V. Unvermeidliche Fehler beim Gebrauch des Meſstisches.

Die Möglichkeit des zu begehenden Fehlers setzt hier *Marinoni* auf 5 Minuten, vorausgesetzt daſs man sonst mit aller möglichen Vorsicht zu Werke gehet.

IV.

VI. Die Zollmannische Scheibe; in wiefern sie sich vom Mefstische unterscheide; und ob sie unentbehrlich sey.

VII. Wichtigkeit der Aufgabe *fig. 30.* und wie man sich dabey das Forttragen des Mefstisches ersparen kann.

§. 5. *Die Boussole.* Fig. 33.

I. Gebrauch der Magnetnadel in der Feldmefskunst; Lehrsætze dazu aus der mathematischen Geographie fig. 2. — Folgerungen daraus in Absicht auf den Gebrauch der Magnetnadeln zur Ziehung der Mittagslinien, paralleler Linien u. s. w.

II. Nothwendige Eigenschaften guter Magnetnadeln.

III. Gebrauch der Magnetnadel auf dem Mefstische.

IV. *Mefsung* der Winkel mit der Bussole, und ihr vorzüglicher Gebrauch in Wældern, Minen und bei Militairischen Vermefsungen. — Winkel damit auf dem Papier zu zeichnen fig. 33.

§. 6. *Einrichtung und Gebrauch des Winkelmefsers.*

Bey wichtigern Vermefsungen und die ins Grofse gehen ist der Winkelmeiser unumgænglich nöthig. —

I. Einrichtung eines gewöhnlichen Winkelmefsers *fig. 34.*

1) Die Abtheilungen des Randes müfsen sehr fein sein.

Ist die Dicke eines Teilstriches b bey einem Kreise defsen Halbmefser a so ist $\pi. 2a : b = 1296000 : x''$ daraus $x'' = 206264.\frac{b}{a}$ Sek.

z. B. Es sey $a = 1$ Fufs $= 10$ Zoll $b = 0{,}001$ Zoll so wird $x = 20{,}'.62$. — Vergröfserungsglas von 2 Zoll in Brennweite. Stæhlerne Punzen.

2) Die Grade selbst müfsen gleich sein. — Wie diese Abtheilung selbst zu verichten und zu prüfen, — nach T. *Mayer.* — *Ramsden.* — *Mascheroni* fig. 47. Tab. I. — Stangenzirkel. — Federzirkel. — (2 Platten). — Man kann der Abtheilung entbehren.

2) Die Diopteru müfsen eine concentrische Bewegung haben.

Fehler wegen der Excentricitæt. *fig. 29.*

Ist der Abstand der Mittelpunkte c, der Radius r der Winkel am Rande $A\,C\,B = \varphi$ und $C\,t\,B = \alpha$ so ist $A\,t\,B - A\,C\,B = \frac{c\,(\text{Sin}\,(\alpha+\varphi) - \text{Sin}\,\alpha)}{r}$

$= \frac{2c}{r} \cos\left(\frac{1}{2}\varphi + \alpha\right) \text{Sin}\,\frac{1}{2}\varphi.\ 206264.$

z. B. Ist $\varphi = 20°$; $\alpha = 10°$; $c = 1 : r = 1000$ so ist der Fehler $1'7{,}''3$ und der wahre Winkel $A\,C\,B = 20°\ 1'7{,}''3$. — Es ist schwer diese Untersuchung anzustellen.

II. Einrichtung eines trigonometrischen Winkelmefsers, und defsen Vorzüge. fig. 35. und 36.

III. *Vernier.* Formel dazu *Tabl. I. fig. 45.* — Einrichtung für den æufseren Rand des Winkelmefsers *fig. 37.*

z. B.

z. B. Hat der Rand 11. Theile wovon jeder $\frac{1}{3}$ eines Grades = 20 Minuten und der Nonius 10 Theile: so ist $y = \frac{a}{b} \; x = \frac{11}{10} \; 20 = 22'$ also der Vernier von 2 zu 2 Minuten und der Index oder Zeiger (la ligne de foi) wiese hier 22° 22'.

Hælt der Rand wie bey meinem Hadleyschen Spiegelsextanten 29. Halbgrade und der Vernier 30. Theile so ist hier $y = \frac{29, 30'}{30}$ also der Vernier von 1 zu 1 Minute, und man braucht hier seine Theile nicht rückwærts zæhlen. —

Ist b die Anzahl der Theile des Vernier $= r \mp 1$ so ist der Ueberschufs oder der erste Unterschied $\frac{x}{r \mp 1}$ und der beliebige; $\frac{mx}{r \mp 1}$ so dafs ein Bogen $z = ny + \frac{mx}{r \mp 1}$ wo also n die Anzahl der Theile des Randes und m jene der Unterschiede des Vernier bedeuten.

z. B. Es sey ein gerader Rand etwa die længere Kathete eines hölzernen Dreyekes von 10 Zollen = 100 Linien, und die kürzere Kathete eines andern Dreyeks von 11 Linen in 10 gleiche Theile getheilt: so wird ein Theil auf dem Vernier um 11 Scrupel gröfser als ein Theil des ersten Randes.

Bey den Kreisbögen ist auch der erste Unterschied des Vernier $= \frac{x}{r-1}$

z. B. für $y = \frac{a}{r-1} = \frac{300''}{r-1} = 15''$ ist $r = 21$; folglich mufs der Bogen des Vernier in 20. Theile eingetheilet werden.

V. *Micrometer Schraube. Tab. I. fig. 46.* und pag. 23. §. I. n° VII.

Der sel. Abt. *Lisganig* hat auf der Ebene bey Belwedere in Wien eine Standlinie von 221 Wien. Kl. 7,623 Zoll 15929, 623. W. Z. duodec. M. angenommen: in dieser Entfernung eine Stange vertical gestellt worauf er die *Punkte* für die Tangenten von 1', 5', 10'.... bis 30' durch Rechnung bestimmt hatte. Nach 6. wiederholten Beobachtungen hat er für $\frac{1}{100}$ eines Schraubenganges 1,"3 gefunden. M. S. S. *Dimensio Graduum Meridiani Viennensis & Hungarici* 4° *Vindobonae* 1770. —

Um aber dieses Verfahren und den Gebrauch des Fernrores statt der gewöhnlichen Diopteru verstehen zu können dienen die folgende,

VI. *Dioptrische Lehnsaetze.*

1) *Dünneres — dichteres Mittel. — Einfallender — gebrochener Strahl fig.* 38. *Neigungswinkel — gebrochene* Winkel. — *Ausfahrender* Lichtsrahl.

Beiderseits erhabene Linse fig. 39. *Brennpunkt — Brennweite.* — *Sammlungs — Zerstreungs punkt.* Achse des doppelten Strahlenkegels. — Mittelpunkt der Strahlenbrechung. — (das Auge.).

2) *Das Fernrohr.* fig. 40. Ist die Brennweite eines Glases $= l$;

 die

die Entfernung eines Objekts von dem Glase $= b$ und die Weite dessen Bildes hinter dem Glase $= f$; so ist $f = \frac{bl}{b-l}$

z. B. für $l = 8Z$, $b = 5F = 50Z$. ist $f = 9\frac{1}{2}z$; für $l = 8z$; $b = 1000Z$, würde $f = 8{,}06 Z$.

3) Für die scheinbare Gröfse α eines senkrechten Gegenstandes und sein Bild $rp = h$ ist $h = f \tan \alpha$.— Folgerungen daraus.

Für mæfsig weit entfernte Objekte wird $h = l \tan \alpha = l\alpha$.

4) ist die Brennweite des *Objectivs* $= l$; die des *Oculars* $= \lambda$ so ist des Fernrohrs Vergröfserung $= \frac{l}{\lambda}$. Siehet also das blofse Auge einen Gegenstænd unter der scheinbaren Gröfse φ so siehet es im Fernrohr unter dem Winkel $\frac{l}{\lambda}.\varphi = W$. Für einen andern Gegenstand wære $w. = \frac{l}{\lambda}\psi$. — Folgen daraus. —

5) $qp : qs = h : i = \varphi : \psi = W : w$ das ist.. Auch für die zu der Axe schief stehende Objekte PV.

VI. Mittel besonders kleine Winkel auf dem Felde zu mefsen. —

1) Aus 5) folgt dafs $\psi = \frac{i}{h}\varphi$. z. B für $\varphi = 60$ Min., $h = 50$ Theile eines Maafsstabes, $i = 12$; wære $\psi = 14\frac{2}{5}$ Min.—

2) Das Verhæltnifs $i : h$ erhælt man mittelst der Anzahl der Schraubenumdrehungen.

3) Der Werth einer Umdrehung ist $= \frac{a}{n}$ wenn a die Længe lk oder fh z B die eines Zolles ist *fig.* 41.

Dieser Werth $vw = l\alpha = \frac{a}{n}$; folglich $\alpha = \frac{a}{nl}$ 206264 Sekund.

z. B. für $l = 78{,}66$ rein. Z; $a = 1{,}69$ r. z, $n = 45{,}5$ Gænge ist $\alpha = 1'37''39$.

4) Diesen Werth noch anders zu finden.—(für jenes Beyspiel von Abt Liesganig n° III.

Für den verticalen Stab PQ von m Zollen und n Umdrehungen für pq ist $\varphi = \frac{m}{b}$ und $\frac{\varphi}{n} = \frac{m}{b.n}$ 206264.

Für einen entferntern Gegenstand M und einen næhern N deren die Brennweiten λ und L für ein Schraubengang sind *fig.* 43. davon die Werthe in $w = \gamma$ und in $z = \delta$, so ist $\gamma : \delta = L : \lambda$ folglich $\delta = \frac{\lambda}{L\gamma}$

Für sehr weit entlegene Objekte ist $\delta = \frac{\lambda}{l}$ $\gamma = r$.

Weil $\lambda = \frac{b}{b-l}$ so ist $r = \frac{b}{b-l} r = \frac{m.\ 206264}{n.\ (b-l)}$ Sekunden.

Für obiges Exemp. n° 3. war $PQ = m = 110{,}6$ Leipz. Zoll; $n = 14 + \frac{9{,}5}{12} = \frac{88{,}75}{6}$; $b = 15921{,}25$; $l = 78{,}66$ rein. Z. $= 87$ Leip. Zoll; und

und $b - l = 15834,25$ Leip. z mithin $r = 1' 37,'' 4$. wie oben. Daraus könnte man leicht eine Tafel für den Werth jeder Menge von Umdrehungen berechnen

Der Werth eines Schraubenganges $w = \frac{l}{Lr}$ und $\mu w = \frac{l}{L} \mu r$.

Zeichen bei *h* und *i*. — Für $hi = x$ ist $\mu w = \frac{l}{l + x} \mu r$.

Für weit entfernte Gegenstænde ist $\frac{l}{L} = l$.

5) Noch eine und die beste Art næmlich der Glas Micrometre fig. 44. *Zwischenræume.* Es ist hier $\alpha = \frac{ik}{2l} . 206264$ Sek.

Für eine scheinbare Grösse von β Sekunden und die Zahl der Theile x ist $\beta = \frac{\alpha}{x} = \frac{ik}{lx} . 206264$. daraus $x = \frac{ik}{l.\beta} 206264$.

z B. für $\beta = 60'' = 1'$ wære $x = \frac{ik . 3438}{l}$.

Auf solche Art erspart sich Hr. *Brander* an einem Winkelmesser sowohl den Vernier als die Micrometerschraube. — 3 Erfordernisse für die Theillinien. — Militairischer Taschenfernrohr mit einem Micrometer um die Entfernung des feindlichen Heers zu bestimmen. —

6) Der *Paceccianische Pantometer* dienet noch besonders kleine Winkel auf dem Felde zu messen. — Seine Konstruktion beruhet auf der *fig.* 24. Sind næmlich in *a* und *b* zwey Fernröhre die genau parallel gestellt werden können; und man wisirt mit dem einem gegen *c* und beobachtet die Schraubengænge bei dem andern in *a*, bis man darinn den Gegenstand *c* auf dem verticalen Faden erblickt, so bekommt man dadurch den *parallactischen* Winkel *c*; oder den Werth der scheinbaren Grösse *ab* aus *c* gesehen. —

6) Dieses Instrument dienet auch Entfernungen aus einem Stande zu messen, wenn man die Længe *ab* des Instruments von etwa 4 bis 5 Fuss annimmt. Denn es ist $ac = cb = \frac{ab}{c} . 206264$.

VII. Zusammensetzung der Theile des trigonometrischen Winkelmessers. Die *fig.* 35. stellet ihn von oben vor und die *fig.* 36. von der Seite.

1) Es wird mittelst den 4 Schrauben bei x und der Luftblasen bey *p*, *q* horizontal gestellt.

2) Die grobe horizontale Bewegung geschiehet um die Hilse *o* und die feinere mittelst der Schraube *g*.

3) Die Kleinen horizontalen Winkel werden mittelst der Micrometer Schraube bei *c* und dem Vernier oder mittelst einem Glasmicrometers gemessen.

4) Es bekommt eine verticale Bewegung um die Axe bei *o* mittelst der Micrometerschraube bei *b*.

5) Das unterste sogenannte Versicherungsfernrohr *l* dient um sich

zu überzeügen ob sich das Instrument wæhrend der Arbeit nicht verrückt hat.

VIII. Von den Fehlern beym Winkelmeſser und ihrer Berichtigung. —

1) Prüfung der Abtheilungen des Randes mittelst eines Stangenzirkels. Feinere Prüfung und Berichtigung mittelst eines abgesteckten Dreyeks *fig.* 45.

Erst muſs man aber wiſsen einen rechten Winkel genau abzustecken *fig*. 46.

Ist z B. $b = 500$ Klaft $= 18000$ Sechstel Schuh und 1 tens für den Zeiger auf dem Theilstriche von 3 Graden, $a = 26$ Klaft 1 Schuh 2 Zoll $= 943$ Sechstel Schuh; so wird $c = 2° 59' 56''$. —

Ist 2tens für den Zeiger auf dem Theilstrich von $3° 20'$, $a = 29$ Kl. 10 Zoll $= 104$ Sechstel Schuh so wird $c = 3° 20' 7''$ u. s. w. bis etwa auf $30° 40'$, worauf man wieder eben so von $31°$ bis $60° 40'$ fortfæhrt um sich daraus eine *Berichtigungstabelle des Randes* verfertigen zu können. — Sie bestehet aus zwey senkrechten Rechen in der ersten sind die *Theilstriche* von 20 zu $20'$ und in der zweyten *Jhre wahre Werthe.*

2) Auf eine æhnliche Art wird die Berichtigung des Vernier vorgenommen und eine Tabelle dazu verfertigt. —

3) Die Berichtigung der Micrometerschraube.

Miſst man a *fig.* 45. z. B. für $c = 40$ Grade, und miſst wieder a' für c um 10 Umdrehungen der Schraube vermehrt, und bestimmt darnach den Winkiel c'; so giebt c' — c den Werth der 10 Schraubengængen: daraus sicht leicht der Werth einer Umdrehung und eines 60ten Theils davon, oder einer Abtheilung der Scheibe *d fig.* 37. finden læiſt.

Schærferes Verfahren. — Die Berichtigungs Tabelle dazu bestehet aus drey verticalen Reihen, næmlich. *Anzahl der Umdrehungen, Wertbe aller, Werthe einer jeden.*

4) Die Berichtigung der Luftblasen geschiehet mittelst *fig.* 27.

5) Die Berichtigung des Kreuzfadens *fig*: 42. geschiehet mittelst der Schnur eines in der Ferne aufgehængten Perpendikels, oder einer ausgesteckten senkrechten Ebene.

IX. Gebrauch des Winkelmeſsrs.

1) Einen oder mehrere Winkel mit einem gewöhnlichen Winkelmeſser zu meſsen. — Nullpunkt. — Das Abzæhlen der Grade von der Linken gegen die Rechte z. B. für *A* und *F fig.* 32.

2) Mit dem trigonometrischen Quadranten werden nur so viel spitze Winkel gemeſsen daſs sie zusammen $< 90°$ ausmachen.

Beobachtungs-

Beobachtungstabelle der Winkel in A.

I.	II.		III.	IV.
Nam der Punk.	Beobachtungen.		Ihre Werthe	Winkel.
B.	Erh.	3° 40′	0′ 15″	
C.	Erh. Umd. Vern. Rand	4° 20′ $\frac{25}{60}$ 11 13° 20′	+ 10″ 56″ 3° 50′ 37″ 13° 21′ 41″	17° 13′ 24°

So verfæhrt man bis zum Punkt E der zugleich der Anfangspunkt für die folgenge Winkel wird, u. s. w.

§. 7. *Bestimmung der Fehler die man beym Aufnehmen selbst begehen kann.*

I. Von der *Standlinie.*

1) Die Wahl der Standlinie bestimmt öfters die Güte der ganzen Vermessung. — Soll man darnach einen Punkt E bestimen so zeigt schon die *fig.* 47. dafs bei dem næmlichen unvermeidlichen Fehler den man bei dem Winkel A begehets die Længe der Standlinie *AD* eine weit gröfsere Abweichung in der Seite *a* verursacht, als wenn man sich der Standlinie *AB* bediente. — Es læfst sich aber aus den Grundformeln *Tab. I. fig.* 154. beweisen dafs die vortheilhafteste Lage für die Standlinie diejenige sey wenn die Winkel *A* und B von 60° sind, dafs also *ABC* ein gleichseitiges Dreyek ist. — Wenn ein Winkelmefser die Winkel nur auf 1 Minute genau mifset, so kann mann auch bei der vortheilhaftesten Lage der Standlinie, die Seiten eines Dreyeks nicht genauer als auf $\frac{1}{1000}$ ihrer Længe sicher finden, und man kann zufrieden seyn, mit einem solchen Werkzeuge, die Entfernungen nur auf $\frac{1}{450}$ ihrer Længe sicher zu finden.— Anwendungen davon auf zusammengesetztere Fælle.

II. Vom *Centriren* der Winkel *fig.* 48.

Ist bei *C* etwa ein Thurm dafs man also den Winkel *E. E′*, oder *E″* statt C mefsen mufs, so bestimmt sich darnach C: denn E C+a+b; E′ = C + a ; E″ = C + a—b. — Für E′ ist der leichteste Fall, alwo um a zu finden man nur die Senkrechte E′ D zu mefsen braucht.

Ist

Ist z. B. $AB = 5478$ Klaf. der Winkel $A = 32°\ 45'\ 0''$ und man beobachtet den Winkel $E'' = 113°\ 4'\ 10''$ und mifst die Senkrechten $p = 4$ Kl $q = 2\frac{1}{2}$ Kl. so wird wenn man $C = E''$ setzet der Winkel $ABC = 34°\ 10'\ 50''$. und 1) lg $AC = 3{,}5144036$.
2) lg $BC = 3{,}5079966$. 3) $a = 0°\ 4'\ 6''$, 4) $b = 0°\ 1'\ 37''$ 5) $C = 113°\ 5'\ 39''$ und $B = 34°\ 9'\ 21''$. — Berechnet man nun das Dreyeck ABC nach diesen verbefserten Winkeln; so hat man $AC = 3343{,}054$; $BC = 3221{,}63$. woraus man den naemlichen Winkel C findet.—

Man verfæhrt auf eine æhnliche Art wenn man zwey Winkel centriren soll. *Mayersche* Methode 3 B §. 358

Uebrigens læfst sich diefse Aufgabe mittelst der *Cagnolifchen* Formel S. 33. auflöfen: alwo der Radius in Sekunden $R'' = 5{,}3144251331$. Diese Formel ist aus den neuen endlichen und unendlich kleinen Differenzial Analogien des Hr. *Cagnoli* Trigon. art 318 und 283 hergeleitet.

III. Wære der Winkel C gegen dem Horizont geneigt so müste man ihn auf den horizontalen Winkel vermöge der Formel *fig.* 166. *Tab. I.* reduciren — Wære B höher und C niedriger als A so ziehet man den Höhenwinkel von 90° ab und addirt den Tiefenwinkel zu 90°.

z. B. es fey $BA'C = 95°\ 48'$; der Höhenwinkel $= 4°\ 50'$ und der Tiefenwinkel $= 11°\ 30'$ so wird der gesuchte Horizontalwinkel $= 94°\ 57'\ 0''$.

Vortheil dieser Methode bey dem trigonometrischen Netzen der Dreyeke.

§. 8. *Vom trigonometrifchen Aufnehmen.*

Will man überhaupt eine Anwendung der Trigonometrie auf die Auflösung solcher Aufgaben machen wo die Betrachtung der Dreyeke statt findet, so mufs man die Formeln für die Fælle wo sie bestimmt werden im Gedæchtnifs haben. — Das zu suchende Stück oder die Bedingung bestimmt die Wahl des Falles.

I. Eine *Figur* aus einer Standlinie zu entwerfen oder
Erste Methode das trigonometrische Netz der Dreyeke anzufangen und fortzusetzen.

1) *Aufgabe*. Eine Weite zu mefsen, zu deren keinem Endpunkte man hinkommen kann *fig.* 30.

Diese wichtige Aufgabe kann auf verschiedene Art mit und ohne Instrumente aufgelöset werden; man kann sich auch dazu mit Vortheil der entfernten Objekte bedienen. — (Das Zurückwisiren beim Gebrauch des Mefstisches). *Auflöfung* mit dem Winkelmefser und durch Hülfe trigonometrischer Rechnung.

Ist $BCD = \alpha$; $ACD = \beta$; $CDA = \gamma$; $CDB = \delta$; $CAD = A$; $CBD = B$; die

Standlinie $CD = m$ so ist $AC = \dfrac{m \text{ Sin } \gamma}{\text{Sin } A}$; $BC = \dfrac{m \text{ Sin } \delta}{\text{Sin } B}$

Es sey $\dfrac{CAC \pm ABC}{2} = \varphi$ soist $\text{tg } \varphi = \dfrac{BC - AC}{BC + AC} \cot \frac{1}{2} ACB$.

und

und für $\frac{AC}{BC} = tg\,\psi$ ist $tg\,\varphi = \frac{tg\,(45^\circ - \psi)}{tg\,\frac{1}{2}\,ACB.}$

z. B. Ist $m = 1517,7$ F; $\beta = 63^\circ\ 38$; $\alpha = 49^\circ\ 44'$; $\gamma = 89^\circ\ 54$... $\delta = 95^\circ\ 13'$ so ist AB = 1060 Fuſs.

2) *Auflöſung* durch Zeichnng. — Hier müſsen die Punkte *A* und *B* durch Senkrechte bestimmt werden. So wære in unserem Exempel *CE* = 1512; AE = 3051, DF = 183; BF = 2008 F. (E viele hier rechter Hand C).

So würden sich z. B. zwey Bergspitzen oder Thurme *A* und *B* bestimmen laſsen: deren Entfernung gewöhnlich für eine Standlinie angenommen wird, daraus die Wichtigkeit dieser genauen Berechnung und Verzeichnung zu ersehen ist.

3) Sezt man auf solche Art die Arbeit immer weiter fort *fig. 32.* so bekommt man ein sogenanntes trigonometrisches Netz der Dreyeke, wobey man aber hæufige Proben anstellen muſs um sich von der Richtigkeit der Arbeit zu überzeugen und die eingeschlichene Fehler zu verbeſsern. Verfahen dabey, — Beobachtete Berichtigungswinkel. Unbekannte Entfernungen durch zwey Reihen der Dreyeke berechnet und umgekehrt, — Hauptpunkte. — (Bæume ohne Aesten. — Stein oder Erdhaufen. — Kirchthürme. — Feuer &c.) — Ihre Bezeichung mit a°, b°, c°, .. a' b' c',... a^2 b^2 c^2.... u. s. w.

Auf eine æhnliche Art læst sich die

4) *Aufgabe fig. 49.* auflösen. — Man soll die Entfernung, und Lage zweyer sehr entfernten, von den Endpunkten einer Standlinie nicht gesehenen und unter sich unzugængiger Punkte *a* und *b* durch Rechnung bestimmen.

Es sey *cd* = 740 Kl: die Winkel *ecd* = 77° 32'; *edc* = 9° 22'; *fde* = 102° 42', *fed* = 22° 33' ief = 112° 21'; jeg = 53° 46'; ife = 30° 57' = kfi = 100° 10'; bfk = 37° 9'; bkf = 118° 28' kif = 36° 5', gie = 94° 54; hig = 49° 13 hgi = 37° 22; agh = 87° 52' ahg = 51 53 so findet man darnach *ab* = 5493,329 Kl. = 5493 Kl. 1 Schuh 11 $\frac{5}{8}$ Zoll.

II. *Zweite Methode* das trigonometrische Netz der Dreyeke fortzusetzen.

1) Aufgabe. Es sind drey Punkte *ABC* gegeben, nebst den Winkeln *m* und *n* unter welchen man sie von einem vierten Punkte *D* siehet, man soll darnach diesen letzten Punkt D finden. *fig. 31.* M. s. die Auflösung davon §. 4 n° IV.

Für zusammengesetztere Fælle *fig. 60.*

z. B. Es sey die Standlinie *ab* = 2500 Klafter.

und die Winkel *cab* = 32° 10', *dab* = 81° 10'; *dae* = 113° 24'; *dba* = 51° 55'; *cba* = 99° 15'; *cbf* = 54° 20'; *cbi* = 74° 20'; *bci* = *bcf* = 70° 36'; *cgf* = 20° 0'; *fgi* = 60° 0'; *ade* = 30° 12'; *hde* = 70° 28'; *hed* = 41° 34'; *bmc* = 42° 20'; *dmc* = 31° 10'; *eka* = 29° 0'; *akh* = 82° 30'; *elk* = 95° 18', *klh* = 111° 30' man soll darnach ein trigonometrisches Netz der Dreyeke berechnen.

Aufl. Es ist *ca* = 3290,34 Kl. *cb* = 1774,80 K. *da* = 2694,27 K. k. *db* = 3382,37 K. *cd* = 2540,00 K. *mb* = 2300,52 Kl.; *mc* = 834 78, *md* = 3216, 67 K. *fb* = 1677, 13 K; *fc* = 1023, 11 K. *ic* = 2771,54 k.

ib = 1661, 29 *if* = 1748, 43 K. *gi* = 1692, 56 K. *gf*. = 1799' 31 K. *gc* = 2507, 83 K. *ed* = 4106, 83 K. *ea* = 2283, 83 K. *he* 4679, 42 K. *hd* = 3317, 14 K. *ha* = 4836, 97 K. *kc* = 2714, 33 K. *kh* = 2945, 14 K. *ka* = 4240, 61 K. *le* = 2411, 72 K. *lh* = 2399, 18 K. *lk* = 1042, 43 Kl.

3) Von der Methode die berechnentem Dreyeke einer Tabelle einzu tragen.

Namen der Winkiel	Ihr Werth.	Glieder der Prop. in log.	Seiten des Dreyeks.
c	49° 58' 36"	9,9731778 3,6596310 0,1180290	4567,00
a	70° 4' 11"	3,7508378	5634,27
		9,9387791 3,6596310 0,1180290	
b	60° 17' 13"	3,7164391	5203,22.

III. Von der Methode die Lage des trigonometrischen Netzes nach der Mittagslinie zu bestimmen.

1) Man muſs zu dem Ende vorserst wiſsen eine Mittagslinie auf dem Felde auszusteken oder auf dem Meſstische su bestimmen. Dieſes geschiehet unterandern mittelst des Schattens von einem lotrechten Stift auf einer horizontalen Ebene, oder mittelst eines geraden darauf gestellten Kegels und concentrischer Kreise *fig.* 51; oder endlich mittelst der Beobachtung des Mittelpunkts S der Sonne bei ihrem Aufgang oder Untergang, oder ihrer gleichen Höhen in der Vor und Nachmittagsstunden: wozu die Astronomie Mitteln giebt.

2) Hierauf læst sich die Lage eines ieden Punktes in Ansehung einer Mittagslinie bestimmen.— Es ist næmlich z. B. für den Punkt *b*; *am* = *ab* Cos *bam*; und bm = *ab* Sin *bam*. u. s. w.

Die berechneten Senkrechten und ihre Abstænde von dem Punte *a* können auf folgende Art in eine kleine Tafel von drey Spalten eingetragen werden.

Entf.	Gegen Nord	Gegen Ost
a	0 Kl.	0 Kl.
b	2306	1321
d	3542	1516

3) Zum Beyspiel und Erlæuterung für noch gröſsere Strecken kann ein Stück des trigon. Netzes bei *Krakau* dienen *fig.* 52. — Es ist aus der

der *Lusganigischen* Karte von Ost Galizien entlehnt, alwo 1 Wiener Zoll 1 Wiener Meile oder 4000 W. Kl. vorstellt. — Man fand durch Rechnung dafs der Punkt *m* von der *Lembergischen* Mittagslinie 143951 W. Kl gegen Westen, und von ihrer Senkrechten 14815 Kl. gegen Nord etfernt war. —Die Rechnung liefse sich nach der folgenden Tabelle ordnen.

Beobachtete Winkel.	Glieder der Prop. in logarithmen	Entf. von dem Meridian.	Glieder der Prop. in log.	Entf von der Senkrechten.
Statua				
μ m S 53° 54'	m S 3,401917		m S 3,401917	
m S σ 53 54	m S σ 9,907406	m 143951	Copl. 9,770260	m 14815
Copl. 36 9	3,309323	+ 2038	3,172177	— 1486
m S 2523		S 145989 W.		+ 13329
Wieliczka				
W S m 81° 40'	S W 3,438384		S W 3,438384	
σ S m 53 54	σ W μ 9,668266	S 145989	Comp. 9,946870	S 13329
σ S W 27 46	3,106650	+ 1278	3,385244	+ 2428
S W μ 27 46		W 147267 W.		15757 N.
Compl. 62 14				
S W 2744				

§. 10. *Von der Methode eine genaue Karte zu verfertigen und auszuarbeiten und den Grund davon für allzeit anabænderlich zu erhalten.*

I. Sind einmal die zwey Senkrechten für jeden Punkt berechnet so kann man sie dem Mefstische wie es die *fig.* 53. zeigt auftragen, worauf die detaillirte Aufnahme, Ausarbeitung der Figuren und die

II. Zeichnung der Gegenstænde ins besondere kann vorgenommen werden. Dieses zeigen die Muster zur Seite.

1) Reifsbret.— Papier.— Reifsbley.— Reifsfeder.—Rabenfedern.— Federmefser. — Zirkel. — Federzirkel. — Stangerzirkel. — Mundleim. Linial von Ebenholz (auf einer Glasplatte mit Schmergel abgerieben).

2) *Farben.* — Mit der chinesischen Tusche. —Berlinerblau. — Gummigutti und Karmin oder feinen florentinerlak können die schönsten Rifse (so wie auch die Landschaften) verfertiget werden. —

Tusche mufs die herschende Farbe sein. — Andere Farben sehr blas angelegt dienen nur zur Unterscheidung der Grænzen, des Wafsers

u. d. g. — Umstændlicher wird davon in meiner Feldmeſskunst gehandelt. — Vom Kopieren.

III. Zusammensetzung der besonderen Theile. —

IV. Gröſse der Maaſstæbe. —

V. Die Hauptpunkte sind also der Grund wornach besondere Vermeſsungen können ergænzt und verbeſsert und Proiekte zur Beförderung der politischen Oekonomie eines Landes vorgenommen und ausgeführt werden. — Dauerhafte Zeichen. — Ihre Numer und Bezeichnung z. B. beym Richter des Ortes u. s. w. —

Die Lehre von den trigon. Netzen der Dreyeke kann erst nach den folgenden §§. ergænzt werden.

§. 11. *Von Höhenmeſsung.*

I. Berichtigung des Verticalen Randes. *fig. 54.*

II. Meſsung nicht sehr entfernter, zugængiger oder unzugængiger Höhen.

1) Wenn die Standlinie in der Verticalen Ebene der Höhe sich befindet *fi. 55.*

3) Wenn sie höher als die Spitze der gegebenen Höhe sich befindet.

4) Auf solche Art kann die Lage mehrerer Punkte über dem Horizont bestimmt werden: Vorschlag des sec. pol. Gen. *Jaſinſki* übers Aufnehmen von einem Thurm.

III. Meſsung sehr entfernter und ansehnlicher Höhen *fig. 57.*

1) Zu diesen muſs der Unterschied zwischen dem *wahren* und *ſcheinbaren* Horizont addirt werden.—

Es ist aber $pq = H = \frac{q^2}{2a} = \frac{B^2}{2a} = \sqrt{a^2 + B^2} - a$ wo B die Entfernung der Standpunkte und *a* der Halbmeſser der Erde ist.

z. B. für B = 1000 W. Kl. und $a = 3360500$ W. Kl. ist $H = 128,5$ Lin = 10 Zoll $8\frac{1}{2}$ Lin.

Es ist auch $B^2 : b^2 = H : h$.

z. B. für $b = 200$ W. K. ist $h = 5,14$ W. Lin. Man fand *af* in Peru = 6274,057 Toisen und den Winkel $daf = 1^\circ 5' 43''$. Für $a = 6543373$ Tois ist $h = 6,02$ und $fb = 125,97$ T.

2) Verbeſserung des Höhenwinkels *W*.

Der wahre Höhenwinkel ist $W + \frac{1}{2}c$ und $c = \frac{180.\ b}{a\pi.}$ Grade = $\frac{10800.\ b}{a\pi}$ Min.

z. B. für $W = 4^\circ 57'$ und $b = 1960$ W. K. ist $W = 4^\circ 57' + 0,00051.$ 1960 M. $= 4^\circ 58'$ Diese Verbeſserung kann man also in den meisten Fællen auſser Acht laſsen.

3) Ist der Tiefenwinkel *w* so ist $W - w = c$.

4) Verbeſserungen wegen *Refraction.*

Für gröſsere Entfernungen ist eigentlich $c = W - W + R$ woraus $R = c - W + w$ wenn *R* die Gröſse der beyden Refractionen bedeutet.

Man

Man konnte also aus der Formel 3) die Grösse der Erde finden wenn man sich auf die Bestimmung der Refraction verlassen könnte.

5) Der Weg des Lichstrahls ist der Bogen af der mit dem Halbmesser $ao = 7a$ nach Hr. Lambert beschrieben ist. — Daraus ist $o = \frac{1}{n} c$ und $R = \frac{1}{2} . \frac{1}{n} c = \frac{1}{14} c$. so wære also hier $cf = \frac{\text{Sin } caf}{\text{Sin } afc}$. a und $bf = CF - a$.

Man nimmt die Meersflæche für die *niedrigste Horizontalflæche* an. Die Hrr. *Boscowich* und *Maire* (*) næhmen den $\frac{1}{18}$ Theil des Erdbogens für die Refraction an M. S. *Voyage astronomique & geographique.* — Im Mittel wære also $\frac{1}{16}$ zu nehmen.

IV. Von der Vergleichung des berechneten und des auf der Okerflæche der Erde angenommenen Netzes in Ansehung ihrer Horizonte.

Das berechnete oder auf der Oberflæche der Erde angenommene Netz der Dreyeke ist in dem Horizonte der Standlinie AB fig. 58. — Aehnliche Netze. — Mitlere Standlinie.

1) $an = \frac{AB.\ Aa}{AO}$; 2) $mr = \frac{AE.\ Am}{AO}$. Folgen daraus für an : mr wenn $Aa = Am$; oder $AB = AE$ ist. — z. B. ist $AB = 10000°$ und $Aa = 1000°$; an 3°,05 einmal bekannt so ist für AE = 6000 und Am = 300°; mr = 0,55 u. s. w.

Es verhalten sich næmlich jene Unterschiede *an* und *mr* der Standlinien 1tens wie die Produkte der Standlinien in ihre Erhöhungen, wenn sowohl diese als jene abændern: 2tens wie die Standlinien bei gleichen Erhöhungen, und 3tens wie die Erhöhungen bei denselben Standlinien. —

V. Mefsung der Höhen mittelst eines Barometers. fig. 59, 60, 61 (Aus Hr. *Vega* 2 und 4ten Bande).

1) Lehnsætze aus der *Hydrostatik* und *Aerostatik*.

Die Gewichte der verschiedenen Luftsæulen von ungleichen Höhen und gleichen Grundflæchen verhalten sich gegen einander wie die Höhen auf welchen sie das Quecksilber im Barometer erhalten: oder $G : g = apm : bpm = a : b$.

2) Die wirklichen Gewichte der athmosphærischen Luft in gleichen Ræumen verhalten sich gegen einander, wie die Kræften, oder wie die Gewichte, womit die Luft in diesen gleichen Ræumen zusammengepresst erhalten wird.

Q 2 3)

(*) Sie beobachteten næmlich beym Ausfluss der *Ausa* den Gipfel des Berges *Carpegna* und fanden den scheinbaren Höhenwinkel = 2° 7'. und den scheinbaren Tiefen oder Depressionswinkel = 2° 24' 10'' daraus $W - w = 17' 20''$; die Entfernung *ab* war durch Rechnung 18218,25 Toisen gefunden; dieses giebt c = 19' 9''. Also ist die Summe der beyden Refractionen 19' 9'' — 17 10'' = 1' 59'' und die halbe Summe 1' daraus also der wahre Werth des Winkels ∂af = 2° 6' bfl = 2° 25' 10° und bf = 18218,26. 2° 15' 34'',5 = 718, 85 Toisen = Höhe des Berges *Carpegna*.

3) Es seyen *fig.* 59. in den gleichen Ræumen Mn, mq, pv... die Gewchte der Luft a' b' c' welche vom Gewichte B, C, D, ... der Luftsæulen der Athmosphære mQ, pQ, rQ, ... geprefst sind.— Die Barometerhöhen an den Stelten M, m, p, q,... sollen a, b, c, d,... sein so ist A : B : C ; D.... næmlich die Gewichte der in einer arithmetischen Reihe auf einander folgenden Luftsæulen nehmen gegen der Athmosphære hinaufwærts in einer geometrischen Reihe ab.

4) Es ist aber A : B : C : D... = a : b : c : d :... næmlich die Barometrhöhen nehmen in den Stellen m, p, q, r... in einer geometrischen Reihe ab, wenn die Erhöhungen dieser Stellen über den Horizont in einer arithmetischen Reihe auf einander folgen.

5) Für $MR = k$; $MS = x = nk$; ist $n = \frac{x}{k}$; Es sey die Barometerhöhe in $R = f$ und in $S = q$, so sind Barometerhöhen a, f, $\frac{f^2}{a}$ $\frac{f^3}{a}$... $a\left(\frac{f}{a}\right)^n$; und $q = a\left(\frac{f}{a}\right)^n = a\left(\frac{f}{a}\right)^{\frac{x}{k}}$.

6) Daraus $x = k\left(\frac{\log.\, a - \lg. q}{\lg.\, a - \lg.\, f}\right)$. Folgerungen daraus.

z. B. Es sey a 336 Wiener Linien am Fuſs des Stephansthurms in Wien, und $g = 325{,}5$ W. L. am Kahlenberge am Herizonte der Kirche; k = 37 W. Kl. das Stück des Stephansthurms bis auf die Achse worauf der Uhrzeiger befestiget ist, und hier f = 333,15 W. L. so findet man daraus x = 137,9 = 138 W. L.

Oder es sey an dem höchsten Thurmfenster am Kahlenberge die Barometerhöhe f = 324 W. L. und hier k = 20,07 W. K. und am Fuſse $a = 325{,}5$ Lin. und am Fuſse des Stephansthurms $g = 336$ so wird x = — 138 W. Kl.

7) Das Gesetz 4) læſst sich auch auf eine kurze Art mittelst der Infinitesimal Rechnung aus dem *Mariottiſchen* Gesetz ableiten ,,Daſs ,, nemlich die Dichtigkeit und Elasticitæt der Athmosphærischen ,, Luft, bey einerley Wærme und Trockenheit der zusammendrückenden Kraft proportional ist.,,

Es sey *fig.* 60 A, C, zwey Orte in verschiedenen Erhöhungen über ebendenselben Horizonte: die zu A, C zugehörigen Barometerhöhen bei einerley Temperatur seyen a c, die Dichtigkeit aber oder das eingenthümliche Gewicht der Luft bey A verhalte sich zum eigenthümlichen Gewichte des Quecksilbers wie 1 : α oder = $\frac{1}{\alpha}$ für das eigenthümliche Gewicht des Quecksilbers = 1; an einem andern Ort C ist also die Dichtigkeit $= \frac{c}{\alpha a}$.

Es sey $AC = x$ so ist $dc : dx = \frac{c}{\alpha a} : 1$; $dc = -\frac{c\,dx}{\alpha a}$ und

$Sdx = -\alpha a. \frac{Sdc}{c}$ + Const., also $x = -\alpha a$ log. nat. c + Const

$= \alpha$

$= a \log nat \frac{a}{c}$

Für *h* die Grundzahl des natürlichen logarithmischen Systems wird $h^{\frac{x}{\alpha a}} = \frac{a}{c}$ und daraus $c = \frac{a}{h^{\frac{x}{\alpha a}}}$ und dieses ist das obige Gesetz 4)

8) Aus dem Vorhergehenden folgt $\alpha = \frac{B. \log. nat (a : c)}{\log. nat (a : b)} = \frac{B. \log. vulg. (a : c)}{\log. vulg (a : b)}$

Man findet durch Vergleichung mehrerer Beobachtungen daſs am Meerhorizonte die mittlere Barometerhöhe $a = 345$ Wien. Duod. Lin. und daſs in einer Erhöhung von $15\frac{1}{4}$ W. K. (B) über dem Meerhorizont die Barometerhöhe um 2 W. Duod. L. abnimmt, also in dieser Entfernung nur 343 W. L. (*b*) gleich ist.

Sezt man hier also die Werthe gehörig, so ist $x = \frac{25\frac{1}{4} \log. (345 : c)}{\log. (345 : 343)}$
$= 10000 (\log. 345 - \log. c)$ W. Kl. —

Und eben so für die Erhöhung eines andern Orts $x' = 10000 (\log. 345 - \log. c'$ W. Kl. daraus $x' - x = 10000 (\log. c - \log. c')$ W. K. oder $y = 10000 (\log. a - \log. b)$ W. K.

Für das obige 1 Exem. 6) ist $a = 336$; $b = 325,5$ folglich $y = 138$ W. K. wie zuvor.

2. *Exem.* Nach Hr. *Bouguers* Beobachtung (Figure de la Terre Paris 1749) ist auf dem Gipfel des Berges *Pichincha* in Peru die Barometerhöhe $b = 191$; und zu *Carabourou* ist $a = 254,75$ Par. Lin. folglich ist die Erhöhung der Pichincha über Carabouru 1250,8 W. Kl.

Durch genaue Berechnung fand er diese Höhe um 8 Klafter kleiner. — Einfluſs der Wærme und der Kælte. — Verbeſserungen nach Hr. *de Luc.* — Einfluſs des Windes.

9) Bequeme Einrichtung für das Abzæhlen der Linien vom Nulpunkt an *fig.* 61. — Uebereinstimmige Barometer u. s. w.

10) Da die Barometerhöhen sich gegen einander verhalten wie die eigenthümlichen Gewichte der Luft næmlich $a : b = m : n$ so ist $b = \frac{an}{m}$ woraus $\log. n = \log. m - 0,0001_4 x$ und $n = mh^{-0,00023 x}$.

Es lieſse sich z. B. daraus zeigen daſs ein Luftballon der mit seinem Zubehör in einem luftlleren Raume 4 Zentner wiegt, wenn er schon am Wiener Horizonte mit einer Kraſt von 100 Pf. in die Höhe zu steigen anfienge; würde in einer Erhöhung von 1000 W. K. zum Steigen und Fallen gleich geneigt sein.

(Hier wære 1 W. Kub. Sch. athmosp. Luft = 2 W. Loth also $m = 2$ daraus $n = 1,589$ u. s. w.).

§. 10. *Vom Nivelliren.*

I. Erklærung vom *Nivelliren* (abwægen). fig. 62.

II.

II. Instrumente dazu. — Vier Arten. — Die *Waſserwage.* — Die *Huguenſche* Nivellirwage. — Die *picardſche.* Die von *Siſson Liesganig.*—..

1) Für die Ausübung ist die Waſserwage mit der Luftblase und dem einfachen Fernrohre das bequemste und das genaueste Instrument *fig. 63. x* ist die *Elevationsſchraube*, *y* die *Rectificirſchraube.* — *Nivellirstange ik.* Die *Tafel* y . — Rollen bei *i* und *k.*

2) Erste Berichtigungsmethode des Nivellirinstruments *fig. 64.* Zweyte Berichtigungsmethode fig. *65.* (500 W. K.

III. *Erste Methode* zu Nivelliren fig. *62.* u. *66.* für ſtationen von höchſtens

1. *Aufgabe.* Den Höhenunterſchild zweyer Punkte *A* und B durch Nivelliren zu finden, wenn sie so beschaffen sind

1. *Fall.* daſs man mit einer dazwischen gestellten Waſserwage nach beyden visiren kann; Standpunkt in der Mitte.

2. *Fall.* Wenn diese Punkte *A* und B so weit von einander entfernt sind, daſs man aus einem einzigen Zwischenstande nicht nach beyden Punkten visiren kann. — *Vergleichungsplan xy.*

2. *Aufgabe.* Die Abstænde mehrerer Punkte von dem Horizonte eines angenommenen Punktes A durch das Nivelliren zu finden, es mögen die zu nivellirenden Punkte entweder alle in einer næmlichen Verticalebene sich befinden oder in einer Gegend zerstreut liegen fig. 67.

Diese erste Methode mit der beigefügten Tabelle gilt nur für Entfernungen vom Punkte A die nicht 300 Kl. übersteigen.

Etfern. von dem Punkt A.		Abstænde von dem Horizonte AZ.
A	0Kl.	0′ 0″ 0‴
B	18	+ 3 9 4
C	59	+ 3 8 6
F	101	— 2 3 11

IV. *Zweyte Methode* oder von dem *trigonometriſchen Nivelliren.*

1) Hier muſs man auf den Unterschied zwischen dem wahren und scheinbaren Horizonte und auf die *Refraction* Rücksicht nehmen. Hiezu dient die folgende Tabelle.

Stænde des Instr.	I. Entfernungen von dem Instr.	II. Gemeſsene Tiefen unter der Gesichtslinie.	III. Erhöhungen über den wahren Horizont.	IV. Wahre Tiefen unter der Gesichtslinie.	V. Tiefen unter dem Vergleichungsplane.
Angenommene Tiefe des Punktes					A. 20′ 0″ 0‴
P	A. 800°	6′ 7″ 8‴	0′ 6″ 0‴	6′ 1″ 8‴	p 13′ 10″ 4‴
	B. 575	9. 8. 2.	0. 3. 1.	9. 5. 1.	23. 3. 5.
	C. 325.	8. 10. 5	0. 1. 0.	8. 9. 5.	22. 7. 9.
	D. 750.	11. 2. 0.	0. 5. 4.	10. 8. 8.	24. 7. 0.

2) Beobachtet man nebst den horizontalen auch so viele verticale Winkel, als zur Bestimmung der Höhen aller Punkte über dem Horizonte

zonte. der Standlinie nöthig sind; so kann man diese Höhenwinkel in eine fünfte Reihe der Beobachtugstabelle S. 125. schreiben und nach dem einmal die horizontalen Dreyeke berechnet sind, noch eine Nivellirtabelle von drey Reihen z. B. für fig. 58. wie folgt verfertigen.

Trigonomesrische Nivellirtabelle.

Stænde des Insrum:	Höhen über der Gesichtslinie.	Höhen über dem Horizonte der Standlinie.
A		— 11, 17
B		+ 11, 17
	C + 127, 46.	+ 138, 63
D	C + 231, 45	D — 92, 82
	E — 39, 45	— 132, 27
	F + 289, 56	— 196, 74

V. Praktische Aufgaben vom Nivelliren.

1) Einen Berg abzutragen fig. 68.

2) Eine gerade Linie über die höchsten Berge zu nivelliren und den Durchschnitt der Oberflæche der Erde nach der geraden Linie *AL* bestimmen. *fig. 69.*

3) Einen mit dem Punkte A gleichhohen, höhern oder tiefern Punkt in einer geraden AB und in einer auf ihr angewiesenen Stelle bestimmen *fig. 66.*

4) Einen Punkt f auf der geraden *bf* welche in einer gegebenen Tiefe *ab* durchgeht und von *b* gegen *f* einen gegebenen zB. auf jede Klafter 2 Zoll Fall hat, zu bestimmen *fig. 70.* und umgekehrt wenn

5) bey der vorigen Aufgabe die Linie *bf* anstatt von *b* gegen *f* izt von *f* gegen *b* fællt. *fig. 71.*

6) Eine ganze Gegend zu nivelliren *fig. 72.*

7) Einen Flufs mit einem andern zur Beförderung der Schiffarth durch einen Kanal zu vereinigen *fig. 73, 74.* oder

8) Einen Morast durch ein Kanal in einen Flufs abführen und austrocknen, oder was immer für eine Wafserleitung ausführen. *fig. 74.*

9) Verfahren wenn man an einem Orte eine Festung anlegen will *fig. 75.* Aus dem nivellirten Plane læfst sich die Höhe der Schleusen, des Dammes und die Gröfse der Ueberschwemmung bestimmen.

10) Einen Berg bis auf eine scheinbare horizontale Ebene welche in einer gegebenen Tiefe unter dem Punkte A durchgeht abzutragen, und

der

den Körperlichen Inhalt der zur verführenden Erde zu berechnen. *fig. 76.* und umgekehrt

11) wenn man Vertiefungen mit Erde anfüllen und ihre Inhalte berechnen soll *fig. 77.* und endlich

12) wenn eine schiefliegende Ebene nach der geraden *mn* einen, und nach der geraden *pq* einen andern gegebenen Fall haben soll. *fig. 78.* (Diese Aufgaben sind aus des Hr. *Hauser* 2. B. entlehnt)

§: 11. *Von einigen praktischen und andern geometrischen Aufgaben zur Uebung.*

I. Anwendung der beigebrachten Theilungsmethoden *Tab. I. fig. 73... 90.* auf mancherley in gemeinem Leben vorkommende Fælle (aus Hr, *Mayers* 3 Bande).

1. *Aufgabe.* Ein Grundstück dessen Güte durchaus einerley ist, gehöret mehren Interessenten. Diese werden untereinander eins, ihre in dem Grundstücke zerstreuet liegende Antheile dergestalt gegen einander zu vertauschen, dass einjeder das seinige beysammen erhælt *fig. 79.*

Auflösung. Gesezt es gehören die Stücke *m* und *p* der Person *A*, *n* und *q* dem Besitzer *B*, und *o* der Person *C*.

Ist die ganze Figur gemessen; berechnet um *nv* gegeben; so theile man diese Figur durch *ab* und *cd* so dass $aABCb = m + p$; $abcd = n + q$ und $cdDFE = o$ werde.

2. *Aufgabe.* *m* und *n* *fig. 80.* sind zwey Stücke Feldes von unterschiedener Güte; *m* gehört der Person *A* und *n* der Person *B*. Beyde wollen einen Tausch mit einander treffen; dergestallt dass A den Theil *abcd* seines Feldes *m* gegen ein gewisses Stück des Feldes *n*, an die Person B überlassen will.

Aufl. Verhælt sich die Güte dieser Grundstücke gegen einander wie 4 : 5; und das Stück *abcd* betrægt zB. 460 Q. Kl. so ist $x = 368$ Q. Kl. das was *A* von dem Felde *n* bekömmt.

3. *Aufg.* Durch eine Flur von Aeckern *ABCD fig. 81.* soll eine Chaussée geführt werden. — Die erste Person *A* verliert dadurch von ihrem Acker den Theil *x* die andere B den Theil *y* und die dritte *C* den Theil *z*. — Zur Entschædigung will man ein anderes Stück Landes, dessen die Flæche *F* heise unter diese drey Person theilen, wie viel wird eine jede bekommen?

Aufl. A bekommt $\frac{x}{x+y+z}F$; $B = \frac{y}{x+y+z}F$; $C = \frac{z}{x+y+z}F$;

4. *Aufg.* *A* und *B* *fig. 82*, sind zwey Bauerhöfe; die zu A gehörige Lænderey *abcd* liegt unmittelbar hinter beyder Höfen, und hinter *abcd* liegt die zu B gehörige Lænderey *aefb*. — Beyde wollen um Streitigkeiten wegen der Ausfarth zu vermeiden, das ganze Stück Land *cefd* dergestalt theilen, dass ein jedes seinen Antheil gleich unmittelbar hinter seinem Hofe habe. Wie wird die Theilungslinie

zu

zu führen sein, daſs keinem von beyden Intereſsenten zu nahe geschehe?

Aufl. Hier ist also F gegeben, folglich Fn nach *Tab. I. fig.* 73. bestimmt. — Sind aber beyde Lændereyen von ungleicher Güte so wird die Theilungslinie eine gebrochene Linie seyn.

5. *Aufg.* Ein Stück Holzung, deſsen Inhalt $= P$, soll dreyen Dörfern A, B, C zugemeſsen werden, dergestalt daſs A zweymal so viel bekommt als B, und C fünf mal so viel als B. Wie viel wird jeder Dorf bekommen.

Aufl. Der erste Antheil ist $x = \frac{1}{4}$ P; der zweyte $y = \frac{1}{8}$ P und der dritte $z = \frac{5}{8}$ P.

5. *Aufg.* Zwey Felder haben eine gemeinschaftliche unordentliche Grænze *fig.* 83; die Intereſsenten wünschen statt ihrer eine geradelinigte Grænze doch so daſs der Grænzpfahl e beybehalten werde.

Aufl. Aus *Tab. I. fig.* 74. Was andere Repartitionsaufgaben wobey die Güte der Grundstücke mit in Betrachtung kommen anbetrift, ferner was eine Waune sey nebst den Eigenschaften derselben, Bonitirung und Taxation s. m. H. *Mayers* 3 Th. § 331 u. f.

6. *Aufg.* $\alpha\ \mu$ *fig.* 84. ist eine in einem Fluſse enstandene Insel AB, CD sind Grænzen von daran stoſsenden Grundstücken. Man soll die Insel unter die Besitzer der Grundstücke dergestallt zertheilen, wie es denen hieher gehörigen Vorschriften der Rechtslehrer, gemæſs ist.

II. Von Anlegung und Leitung der Straſsen.

1. *Aufg.* Von einem Orte zum andern eine Straſse zu führen.

1. *Fall.* Wenn man ein offenes Land und einen feſten Boden voraussezt.

2. *Fall.* Wo dieses nich statt findet. Besondere Fælle und Verfahren dabey *fig.* 85.

Hr. *Gautier* Tractat von dem Bau der Wege Anlegung der Straſsen (Leip. 1773.).

2. *Aufg.* Von einem gewiſsen Orte A nach zween andern B und C Straſsen zu führen *fig.* 66. und 87.

III. Anwendung der Lehre der Reihen auf die Bestimmung der Længe des Kreisumpfanges *fig.* 88. (aus Hr. *Vega* 2. B.) als Anhang zu *Tab. I. fig.* 72.

Ist der Halbmeſser eines Kreises $= a$; AC und BM senkrecht auf CD und $CM = x$ so ist der Flæcheninhalt des Stücks

$$CMBAC = ax - \frac{x^3}{2.3.a} - \frac{1.\ x^5}{2.4.5.a^3} - \frac{1.3.\ x^7}{2.4.6.7.a^5} - \frac{1.3.5.\ x^9}{2.4.6.8.9.a^7} - \ldots$$

auf eine æhnliche Art læſst sich die Flæche des Dreyeks BCM, und auf eine zwifache Art jene des Kreisausschnittes BAC finden woraus

$$\text{der Bogen } BA = z = x + \frac{1.\ x^3}{2.3.a^2} + \frac{1.3\ x^5}{2.4.5.a^4} + \frac{1.3.5x^7}{24.67\ a^6} + \ldots$$

R Sezt

Sezt man $x = \frac{1}{2} a$ so wird $z = \text{arc } 30^\circ$ leicht nach gehöriger Substitution gefunden: daraus auch 12. arc 30° = arc 360°. =

$$= 12\, a. \left(\frac{1}{1.2^1} + \frac{1.1}{1.2.3.2^3} + \frac{1.1.3.3}{1.2.3.4.5.2^5} + \frac{1.1.3.3.5.5}{1.2.3.4.5.6.7.2^7} + . \right)$$

Setzen wir in dieser letzten Reihe das erste Glied A, das zweite B das dritte C u. s. w.
so wird noch $arc\ 360^\circ = 12\, a \left(\frac{1}{2}. + \frac{1}{4} A \frac{1}{2}. \frac{1}{3}. + \frac{1}{4}. B. \frac{3}{4}. \frac{3}{5}. + \frac{1}{4}. C \frac{5}{6} \frac{5}{7} + .. \right)$
$= 0{,}523598776$ und für den Durchmesser $= 1$ oder $a = \frac{1}{2}$ ist
$\pi = 3{,}14592653589793 2 \ldots$ bis ins unendliche.

Vergleichen wir die Summe aller Elemente des Stücks $CMBA$ mit dem letzten Elemente $qB = \frac{x}{\infty} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{ax}{\infty} - \frac{x^3}{2.a\infty} - \frac{1.x^5}{2.4\, a^3 \infty} - \frac{1.3.x^7}{2.4.6\, a^5\, \infty}$ so ersieht man sogleich wie man darnach diese Summe finden kann. — Und allgemein ist das letzte Element

$$w = \frac{Az^m}{\infty} + \frac{Bz^n}{\infty} + \frac{Cz^p}{\infty} + \ldots \text{ so ist } S = \frac{Az^m}{m} + \frac{Bz^n}{n} + \frac{Cz^p}{p} + \ldots$$

$$\text{zB. } QNPQ = \tfrac{2}{3}\, 2^{\frac{1}{2}}\ a\ \tfrac{1}{2}\ x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{5}. \frac{2.^{\frac{3}{2}}\ x^{\frac{5}{2}}}{2.\ a^{\frac{1}{2}}} - \tfrac{2}{7}. \frac{1.\ 2^{\frac{5}{2}}\ x^{\frac{7}{2}}}{2.\ 4\ a^{\frac{3}{2}}} \ldots$$

IV. Gebrauch des Maafsstabes bei Auflösung der Aufgaben.

Mittelst des Maafsstabes kann man unter andern die für die ab-sen unzugængige Aufgaben mit hinlænglicher Schærfe auflösen.

1. *Aufgabe.* Zwischen zwey gegeben Linien a und b sollen zwey mittlere Proportionalen x und y gefunden werden.

1. *Aufl.* $x = \sqrt[3]{a^2 b}$; und $y = \sqrt[3]{ab^2}$. z. B. es sey auf dem Maafstab $b = 333{,}3$; und $a = 72$, so ist x 120; und y 200.

Diese Aufgabe kann noch so ausgedrückt werden. — Es ist die Seite a eines Würfels gegeben, man soll die Seite eines andern Würfels finden, deſsen Kubikinhalt sich zu dem gegebenen verhælt wie $n : m$.

2. *Aufg.* Es ist $x = a \sqrt[3]{\frac{n}{m}}$. zB. für $a = 5000$ Punkten auf dem Maafsstab $n = 2$ und $m = 1$ st $x = 5000 \sqrt[3]{2} = 6299\frac{3}{5}$ Punkten eines Wiener Schuhes.

2. *Aufg.* Man soll den Durchmeſser einer gegoſsenen eisernen Kugel von 24 Wienerpfunden nach dem wienerschuhe bestimmen, vorausgesezt daſs. zB. 1 Wiener Kubikschuh des gegoſsenen Eisens 420 Wienerpfunde wiege.

Aufl. $x = \sqrt[3]{\frac{12}{35\pi}} = 0{,}47788$ Wienerschuhe $= 5''\ 8'''\ 10^{\text{iv}}$

3. *Aufg.* Es ist der Durchmeſser einer Kugel gegeben man soll die Seite eines Würfels von gleichem Inhalte finden.

Aufl.

Aufl. $x^3 = \frac{1}{6} d^3 \pi$ und $x = d \sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi} = d. 0,8059959711 = \frac{25}{31} d.$

§. 12. *Von der Markscheidekunst.*

Eigentlich ist die ganze Markscheidekunst ein Problem der praktischen Geometrie, das also mittelst obiger Vorschriften aufgelöst werden kann, und unterscheidet sich nur im Ausdruke der von den Bergleuten gebraucht wird. *fig. 89.*

I. *Makscheiderstunde.*

Eine Markscheiderstunge macht 15 Grade aus, 2 Stunden 30 Gr: u. s. w. daraus ist leicht eine Tafel zu 12 Stunden und für ihre *Achttheile* zu verfertigen. – Um zu wifsen nach welcher Richtung man *gefahren* ist braucht man nur zur Stunde *N* oder *S* zuzuschreiben.

II. *Vom Lachtermafse.* Die *Freybergische* Lachter = 75,895833 rhein Zoll = 6,324653 rhein Fufs.

III. Hr. *Kæstners* Vorschlag die Gradbogen aus einem Halbkreise in einen Quadrant zu verwandeln und einen Vernier von 1 Minute anzubringen *fig. 90.*

IV. *Marscheidercompas*, giebt die Lagen söhliger Linien gegen die Magnetnadel und die Stunde jeder söhligen Linie in der horizontalen Flæche *fig. 91.*

Der *Hængecompas* in einer donlegigen Schnur giebt die Stunde jeder söhligen Linie in der Verticalflæche durch die Schnur *fig. 92.*

V. Stellt man sich durch einen beliebigen Punkt *k* der Linie *AB* eine Magnetnadel und nennt *z* den Winkel den sie mit der nördlichen Hælfte der Nadel macht, und heifse ihn nach der Lage von *AB* östlich oder westlich zo ist $z = m$ Stunden östlich oder $z = 12 - m$ Stunden westlich. — Ferner ist

z im ersten Fall spitzig wenn n $<$ 6 im 2ten spitzig wenn m $>$ 6
stumpf $>$ stumpf $<$

Verfahren bei Eisenscheiben.

VI. Winkel mit donlegigen Schenkeln auf söhlige zu bringen ist das næmliche was *Tab. I. fig. 166.*

Die Stöllenrösche ist insgemein 1 Lachter auf 400.

VII. *Grubenrifs fig. 95. Söhligerrifs fig 96.* — (Seigerrifs) solchen *zulegen.* — *Stundentrasporteur.* — Verjüngter Lachtermaafsstab.

IX. Auf einem Berge einen Punkt anzugeben, von dem eine Linie seiger herabgelafsen, ein gegebenes Stück einer söhligen Linie abschneidet. *fig. 97.* und.

das Austreiben eines Ganges zu Tage anzugeben.

X. Allgemeine Kenntniste zur Anwendung der Geometrie auf Klüfte und Gænge.

Das *Fallen* und *Streichen* einer Ebene durch einen Berg in willkührlicher Lage. — *Kluft.* — *Gang.* — *Gangart.* — *Bergart.* — *Saalbænder.* — *Mæchtigkeit.* — *Zu Tage streichen.* Das *Hangende.* — Das *Liegende.*

M. S. *Kæstners.* Anmerkungen über die Markscheidekunst, wovon dieser kurze Auszug gemacht worden.

§. 13. *Die ersten Begriffe von der geographischen Ortsbestimmung.*

(Entlehnte Bruchstücke aus des Hr. *Bohnenberger* vortreflichen Anleitung zur geogr. Ortsbestimmung einem Werke aus dem man lernt, wie man mit kleinen und weniger kostbaren Werkzeugen die Geographische *Lage* eines Orts mit hinlænglicher Genauigkeit bestimmen kann).

I. Von der Art die geographische Lage eines Orts durch Astronomische Beobachtungen zu bestimmen und der geographischen Breite ins besondere.

1) Die *geographische Lage* eines Orts o wird durch seine *Breite ao* und durch seine Længe *Aa* bestimmt. *fig. 98.*

(Pole, Axe, Aequator Mittagskreis *Pop, Stunden Winkel* APa = Aa. — *Erster Mittagskreis* oder Længe der Pariser Sternwarte = 20°. *Nordliche südliche* Breite.).

2) Die *Breite* eines Orts ist seiner *Polhöhe* gleich. — *fig. 99.*

3) Für den *Zenith* z eines Orts und dessen *Horizont* HO ist die Æquatorshöhe $AH = ZP$ und die *Polhöhe* $PO + HA = 90°$.

4) $2\,Po = Om + On$ und $b = h \pm d$ wenn h die Höhe des Sterns *d* seine Polardistanz und *b* die Breite des Orts ist.

5) Ist die Æquatorshöhe e, die *Abweichung* des Sterns (declination) δ und die Höhe des Sterns *h* so ist $e = h \mp \delta$ das obere Zeichen ist für den nördlichten und das unterste für den südlichen Theil des Meridians.

Für den südlichen Pol ist $e' = h \pm \delta$.

6) Für die Zenithdistanz z ist $b = z \pm \delta$ nördlich oder südlich.

Für den Stern unter dem Pole ist $b = 180° - (\delta + z)$

7) Sind die Mittagshöhen zweyer Oerter *H* und *h* und ihre Breiten B und *b* so ist $H - h = B - b$. Also ist die Breite des Orts o gegeben wenn man die des Orts O kennt und umgekehrt *fig. 100.*

8) Verbesserung der beobachteten Höhen.

a) Astronomische *Stralenbrechung* und Formeln zu ihrer Berechnung. Die für einen gewissen Stand des *Barometers* und *Thermometers* berechnete Stralenbrechung heisst die *mittlere*, welche nach der von den meisten Astronomen angenommenen *Bradleyschen* Regel für die Barometerhöhe von 29,6 engl. oder 27,775 paris. Zollen und für 50° des *Fahrenheitischen* oder 8° des 80 theiligen Queksilberthermometers so gefunden wird. Es sey der scheinbare Abstand des Sterns vom Scheitel = z, die Strahlenbrechung = ϱ so ist $\sin(z - 5{,}9807\varrho) = 0{,}9983487 \sin z$).

Nach dieser Formel befindet sich eine berechnete Tafel in Hr. *Bohnenbergers* geogr. Ortsb. vermittelst welcher die mittlere Strahlenbrechung für alle Höhen kann gefunden werden.

Um

Um aus der mittlern Strahlenbrechung die *wahre* zu finden gab T. *Mayer* im J. 1753, folgende mit allgemeinem Beyfall aufgenommene Regel an: *Die mittlere Stralenbrechung für 28 Zoll Barometerhöhe und 10 Grad Wærme verændert sich bey 15. Lin. Verænderung des Barometers und bey 10 Grad. Werænderung des Reaumurschen Thermometers um den 21. Theil ihrer Gröſse.* Hr. *Borda* nahm ebenfalls diese Regel an, sezte aber den zu der Bradleyschen mittlern Stralenbrechung gehörigen Stand des Barometers = 28 par. z. 3. Lin und den Stand des 80 theiligen Queksilberthermometers = + 12°. Hiernach berechnete er eine Tafel, welche Hr. *v. Zach* genauer von neuem berechnet hat und die die IVte in Bohnenbergers mehrmals angeführtem Werke ist.

Kleine Höhen werden in den astronomischen Beobachtungen so viel als moglich vermieden. Wird die Stralenbrechung von der beobachteten Höhe abgezogen oder zu der beobachteten Zenithdistanz z addirt, so erhæit man die wahre Höhe, wenn das Gestirn deſsen Höhe man genommen hat, so weit entfernt ist daſs man Linien nach denselben aus dem Mittelpunkt der Erde und dem Mittelpunkt ihrer Oberflæche, wo sich der Beobachter befindet gezogen als *parallel* ansehen kann. — Ist dieses nicht verstattet so muſs noch folgende Reduktion der beobachteten Höhe vorgenommen werden.

b) Höhenparallaxe und Formeln zur Berechtung derselben *fig. 101.* Die *Höhenparallexe q* ist der Unterschied der Höhen eines Sterns für zwey Beobachter davon man sich den einen im Mittelpunkt C der Erde und den andern bey O vorstellt. — Sie bringt eine der Stralenbrechung entgegengesezte Wirkung hervor; den Weltkörper rückt sie aber nicht aus dem Verticalkreis.

Ist h' die Ergænzung von h und π die *Horizontalparallaxe* so ist $q = \pi \cos h'$.

Die V. Tafel des Hr. *Bohn*, giebt für verschiedene Höhen und für jeden Monat die Höhenparallaxe der Sonne an, wenn die mittlere Horizontalparallaxe = 8", 5 gesezt wird.

II. Von der geographischen *Længe fig. 98.*

1) Jst die Zeit der ganzen Umdrehung der Erde um ihre Axe = 24 Stunden und die Zeit der Umdrehung für zwey Oerter = t so ist $T : t = 360 : l$ wenn l dem Unterschied der Længe der beyden Oerter O und o, oder den Bogen *Aa* vorstellt.

2) Der Beobachter in O zæhle M Stunden in dem Augenblick einer gewiſsen Erscheinung und M' Stunden da der Stern in O *culminirt*: wenn m' und m das næmliche für einen andern Ort o und für diese næmliche Erscheinung die sich in einem *absoluten Augenblick* für beyde Oerter ereignet, bedeuten, so ist $l = 15$ (M'—M—(m'—m) Graden.

3) Der *Mittagsunterschied* nach *wahrer Sonnenzeit*, zeigt um wieviel die Sonne fruher an dem einen Ort culminirte als an dem andern: rechnet man also für die *Sternzeit* 15° auf eine Stunde so bekommt man

daraus den Længen Unterschied der beyden Oerter. — Dieses gilt auch für die *mittlere* Zeit — Bedeckungen der Fixsterne und Planeten vom Monde und von Planeten, Vorübergænge der Venus und des Merkurs vor der Sonnenscheibe, Jupiters Trabanten &c. sind Erscheinungen von denen hier die Rede ist: Ihre Bestimmungen mufsen aber erst auf den Mittelpunkt der Erde reducirt werden.

4) Aber die leichteste und bequemtse Art die Meridiandifferenz sehr genau zu bestimmen ist vermittelst einer guten *tragbaren Uhr*, die in dem sie von einem Ort zu dem andern gebracht wird, ihren Gang nicht ændert. — Also sind zu den hier nöthigen astronomischen Beobachtungen.

Instrumente zu Höhenmefsungen und zu Zeitmefsungen nöthig.

III. Vorstellung und Beschreibung des *Hadleyschen* spiegelsextanten *fig.* 105 dazu dienen

1) Einige *catoptrische* Lehnsætze.

a) m = 2n das ist der gedoppelte Neigungswinkel der beyden Spiegel ist dem Winkel gleich der von einem Lichtstral und seiner Richtung, nachdem er durch eine gedoppelte Reflexion zurückgeworfen ist, erzeugt wird *fig.* 102.

Dieses læfst sich leicht vermittelst des catoptrischen Lehrsatzes dafs næmlich o = r, und mittelst der Eigenschaft der æufsern Winkel in einem Dreycke beweisen.

b) Wenn der einfallende Leichtstral mit dem durch doppelte Reflexion zurückgeworfenen parallel wird, so sind die Ebenen beyder Spiegel ebenfalls mit einarder parallel, und beyde Punkte E und I liegen immer auf einerley Seite von GH *fig.* 103.

c) Stelt mar sich vor die Verænderung der Lage des Lichtstrals *FG* gegen den Spiegel AB seye durch eine gemeinschaftliche Bewegung beyder Spiegel bewirkt worden, so seht man leicht dafs durch die Bewegung beyder Spiegel die Lage des zurückgeworfenen Strals nicht könne geændert werden.

Denn es ist r = w und g = v; folglich y = z; eben so y = k und x = k + q = n. Man braucht also kein Fufsgestell, nur einer Handhabe.

2) Will man nun den Winkel *OGF* mefsen (fig. 104.) so bringe man den Mittelpunkt des Gradbogens in den Punkt G und wende das ganze Instrument so lange, bis man durch die Oefnung der Platte *cd* und den unbedekten Theil des Spiegels CD den Gegenstand O erblikt. Nun wird es leicht seyn durch die Bewegung des grofsen Spiegels *AB* die beyden Theile des Gegenstandes O die man gerade zu und durch gedoppelte Zurückwerfung sieht, so übereinander zu bringen dafs der Gegenstand nicht mehr gebrochen erscheint. — Man bemerke den Punkt des Gradbogens auf welchen der Alhidade zeigt. — Nur bewege man noch den grofsen Spiegel bis beyde Gegenstænde O und F zusammen fallen so wird *FGO* = 2*GAa*.

3) *Gebrauch* des Spiegelsextänten zur Mefsung der Höhe der Sonne.

Herr

Herr *v. Zach* und Hr. Gr. *Brühl* machten dieses fortrefliche Instrument in Deutsland bekannt, und erfanden Mittel es zu Beobachtungen auf dem Lande sicher gebrauchen zu können.

Man bedienet sich nemlich zu dem Ende eines *Künstlichen Horizonts* der die Stelle eines natürlichen vertritt, welchen der Seefahreer in der weiten See findet. — Seine Theorie beruhet darauf *fig.* 106.

Ist *AB* die Ebene eines Planspiegels der genau horizontal gelegt ist, so darf man nur mit dem Sextanten den Winkel mefsen, welchen der geradezu von der Sonne kommende Lichtstral σ E mit dem von dem Spiegel *AB* zurückgeworfenen macht um σ *Es* = S *Cs* die gedoppelte Höhe zu haben

Wenn man einen Planspiegiel vermittelst einer Libelle genau horizontal stellte, so hætte man ebenfalls einen Künstlichen Horizont den man noch überdies so unterstützen könnte, dafs er durch die Bewegung der Luft nicht leicht aus seiner Lage, gebracht werde. Hierauf gründet sich der von Hr. Gr. *Brühl* und Hr. *v. Zach* ausgedachte Künstliche Horizont wovon die *fig.* 106. nebst einer *Libelle* Fig. 107, zu seiner Berichtigung, die Vorstellungen geben.

Die Stelle des Spiegels vertritt hier eine auf der einen Seite matt geschliffene runde Platte von dunkelrothen oder blauem Glas. — Diese liegt in einer Fafsung vom Marmor oder Porcellainerde (Biscuit) in einer eingedreheten Vertiefung und auf Stellschrauben u. s. w. Eine ausführliche von Hr. *Zach* selbst gegebene Beschreibung davon befindet sich in der *Canzler* und *Meisnerischen* Quartalschrift für *ältere Literatur* und *neuere Lektüre.*

4) Das Verfahren bey jeder Höhenmefsung und der Gebrauch dieses Instrumentes zum Nivelliren gründet sich auf dem vorhergehenden und ist daraus leicht zu ersehen.

5) Genauigkeit dieses Instruments beym Winkelmefsen.

Der gröfste Fehler der aus der etwas unrichtigen Lage (von 4 Min.) der Axe des, 5 zölligen Sextanten entstehen könnte wære 0″ 7. — Ein Fehler von 3 *Min.* in der senkrechten Lage des grofsen Spiegels auf die ebene des Sextanten giebt hier den gröfsten Fehler von 6″, 3, Bey dem Ablesen der Winkel kann man einen gröfsten Fehler begehen von 15″, und bei der Berührung der beyden Bilder einen von 8″; Die beyden letzten haben auch auf die Bestimmung des Fehlers des Index einen Einflufs, folglich 23″;

Fallen also alle Fehler auf eine Seite so ist der gröfste mögliche Fehler 47″.

IV. *Astronomische Uhren.*

Sie sind von zweyerley Art nemlich die *Pendeluhren* und die *tragbare Uhren.* Die erste Art von Uhren ham man fruher zu einer sehr grofsen Volkommenheit gebracht als die letztere, die aber nach dem *Harrison* die Bahn gebrochen, und *Mudge* ein neues Stoswerk erfunden hatte, auch in einer sehr grofsen Vollkommenheit verfertigt werden, dafs man eine Pendeluhr schon als gut ansehen kann, welche einen so gleichförmigen Gang hat, als die tragbaren Uhren eines *Mudge* und *Emery*; oder eines *Breguet* in Paris.

Beschreibungen beyder Arten von Uhren, nebst Formeln zur Bestimmung des Schwerpunktes bey den *einfachen* und *zusammengesetzten Pendeln*, wovon die Beweise erst in der höheren Mechanik vorgetragen werden können, und andere hier brauchbare Formeln findet man in Hr. Bohn. Anleitung.

Statt dieser führe ich nur die folgenden an, um den Nutzen dieser Theorie zu zeigen.— Verrichtet ein einfaches Pendel seine Schwingungen in sehr kleinen Bögen so ist die Dauerzeit eines Pendelschlages $t = \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}$, wo $\pi = 3,141592$. *a* die Længes des Pendels und g die *Beschleunigung der Schwere* z. B. in Wien 15,51512 Wienerschuhe bedeutet.— In Paris ist $g = 15,09809$ par Fuſs. — Daraus laſsen sich nun verschiedene Folgen ableiten.

1) Für 1 Sekunde ist $a = \frac{2g}{\pi^2} = 3,144021 = 3$ F 1 Zoll 8,739 Lin.

Nimmt man also Fæden von Aloebiættern fig. 107 hænget daran vertical eine metallene Kugel in der Entfernug $37\frac{3}{4}$ Wien. Z. vom Anhængungspunkte, so ist ein solches zusammengesetztes Pendel von dem einfachen Sekunden Pendel nicht merklich verschieden.

2) Man kann die Dauer einer Zeitsekunde dadurch deutlich bestimmen wenn man sagt 1 Sekunde ist der 86164te Theil der Dauerzeit zwischen zweyen auf einander folgenden Eintritten eines næmlichen Fixsterns in einem næmlichen Scheitelkreis, so daſs diese Dauerzeit 23 Stunden 56 Minut: 4 Sekunden = 86164 Sekunden beträgt: volkommen genau ist diese Dauerzeit 23 St. 56 Min. $4\frac{1}{10}$ Sek. man kann diese Erinnerung bey der Prüfung und Berichtigung der *Uhren* benutzen. (Aus des Hr. *v. Vega* Vorles. über die Mathem. 3 B. 1788).

3) Aus der bekannten Længe des Sekundenpendels læſst sich die Beschleunigung der Schwere finden: denn es ist $g = \frac{1}{2} a \pi^2$, — *Bouguer* fand in *Quito* 15,46364 W. s. = *g*.

(Der Wiener Schuh ist genau $\frac{100000}{102764}$ Paris Schuh.

4) Sind die Længen von zwey einfachen Pendeln *a* und *A*, und die Anzahl ihrer Schwingungen in der næmlichen Zeit *n* und *N*; So ist $n^2 : N^2 = A : a$, oder $an^2 = AN^2$ Daraus læſst sich die Længe des Sekundenpendels $= p$ finden.

Denn weil $pt^2 = bn^2$; so ist $p = \frac{bn^2}{t^2}$ wo alles auſser *p* bekannt ist.

Ist z. B. $b = 151$ W. Z., $t = 420$ Sek. und $n = 210$ so ist $p = 37\frac{3}{4}$ W. Z.

6) Auf die Pendeluhren wirkt hauptsæchlich die verschiedene Temperatur der Luft, so daſs die Pendeluhren im Sommer langsammer als in Winter gehen:

Die

Diesem abzuhelfen bedient man sich der *Compensationspendel*.

Man hat jetzo einfachere Compensationspendel, zu welchen nur fünf Stangen erfordert werden, zwey von *Zink* und drey von *Eisen*. Auf der Herzoglichen Sternwarte in Gotha befindet sich eine fortrefliche von *Arnold* verfertigte Pendeluhr *fig.* 108.

		Pz.	Lin.
Die Længe der Stahlfeder fc ist	=	0	11, 0.
Længe der Eisenstange cq	=	35	11, 8
— — der Zinkstangen qq	=	21	4, 0.
— — der Eisenstangen —	=	22	11, 8.

σ) Das leichteste Mittel zur Bestimmung der Zeit der *Culmination* eines Sterns sind *correspondirende Höhen*. — Nimmt man nemlich gleiche Höhen vor und nach der Culmination des Sterns an, und die Helfte der Zeit zwischen den zwey Zeitpunkten der Beobachtungen, so bekommt man den Augenblik der Culmination.

Um die Zeit desto genauer zu bekommen næhme man mehrere correspondirende Höhen und für die Zeit der Culmination ein arithmetisches Mittel.

Diese Stundenwinkel sind gleich, denn die Höhe *h* eines Sterns wird durch den Stundenwinkel *t* seine Abweichung δ und seine Breite *b* bestimmt. Die letzen Dinge sind aus den Ephemeriden bekannt, $\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$. Für die Sonne: weil sich δ ændert und nachmittag *d* wird, muſs man die folgende Mittagsverbeſserung anstellen $\mp \frac{d-\delta}{30}\left[\frac{\tan \varphi}{\sin t} - \tan \delta \cot g t\right]$ in Sekunden und das unterste additive wenn die Sonne in den niedersteigenden Zeichen ist.

Noch eine von Hr. *v. Zach* vorgeschlagene Methode diese Zeit durch einzelne Höhen zu bestimmen wære diese.

Man berechne für einen gewiſsen Stundenwinkel die Höhe der Sonne reducire diese wahre Höhe auf die scheinbare, stelt den Winkelmeſser auf die voraus berechnete Höhe; und wartet die Zeit ab, da die Sonne diese Höhe erreicht, so gibt diese Zeit mit dem in Zeit verwandelten Stundenwinkel für welchen man die Höhe berechnete, der Uhr Abweichung von der wahren Zeit. Die Höhe bekommt man nach obiger oder folgenden Formel $\sin h = \frac{\sin \varphi}{\cos M} \sin (M + \delta)$ (wo $\tan M = \cos t \cot g\, b$).

§. 14. *Anwendungen der bisherigen Lehren.*

Man weis schon die Art die *Længe* und die Breite eines Ortes zu finden. So wære zB. die auf der hiesigen Sternwarte bestimmte *Længe* von Krakau 37° 34′ 45″
und die Breite 50 3 52.

Es bleibt also noch zu zeigen wie darnach Landkarten zu verfertigen sind.— Dazu gehört die sogenante *stereographische Projektion.*

I. Schneidet man einen geraden oder einen schiefen Kegel durch einen *antiparallelen Schnitt* so wird dieser ein Kreis, denn man bekommt für ihn eine Gleichung des Kreises *fig.* 109. Die *Mittags* und *Parallelkreise* werden solche Schnitte, für ein irgend auf der Erdoberflæche befindliches Auge. Ist es auf dem Æquator so heisst sie eine *Æquatorial Projektion.*

II. Setzt man für diese Projektion die Længe α und die Breite β so ist der Halbmesser für den Mittagskreis = Sec α, und für den Parallelkreis = cotg β. *Fig.* 110. u. 111.

Daraus ist die Zeichnung der Planiglobien leicht zu ersehen *fig.* 112.

In der Figur 113 sind so die Lagen der Sternwarten von *Paris*, *Greenwich*, *Gotha Wien* und *Krakau* mit Punkten und den Anfangsbuchstaben bestimmt.

III. Verlangt man Landkarten von einzelnen Lændern so verfertigt man besondere Netze in denen sich die Grade der æusseren Parallelkreise durch das Verhæltniss des Sin t. zum Cos. der Breite, bestimmen lassen. *fig.* 114. M. s. Hr. J. *Mayers* 3. Th. §. 342. Sq.

IV. Sind Karten von noch kleinerer Ausdehnung zu zeichnen, so nimmt man auf diese Verminderung keine Rücksicht. — So wære die oben angeführte Karte von Ost Galizien. — Einfluss der praktischen Geometrie auf die Geographie.— Das Detail wird vermittelst dem Astrolabio, der trigonometrischen Rechnung und mit dem Messtisch ergænzt.

V. Endlich giebts noch Seekarten wo die Meridian Grade nach dem Verhæltniss des Sint. zum Cosin. der Breite wachsen, und wo die Grade der Parallelkreise gleich bleiben. Solcher bedient sich ein Seefahrer um den Weg zu bestimmen den sein Schiff zurücklegt in dem er die *Loxodromie* beschreibt. Und solche werden von dem Erfinder, *Mercators* Seekarten genannt *fig.* 115 und 116.

VI Astronomische Bestimmung der Mittagslinie.

1) Eine sinnreiche und einfache Methode schlægt unter andern Hr. J. *Mayer* dazu vor *fig.* 117. In dem Augenblicke næmlich da ein Gehülfe die Sekunde zæhlet da der Stern kulminiren muss, lasse man die Diopter *c* durch die man den Stern von dem Faden *hl* bedeckt siehet, unverrückt stehen, und so ist der Stern hinter dem Faden in der Mittagsflæche. — Berechnungen in Ansehung des genauern Auftragens s. m. §. 361. Sq.

2) Die unterm Titel. *Verschiedene Tafeln zu astronomischen Ergözungen eingerichtet* von Seite 176 bis 220 in dem öfters angeführten *Vegaischen* neuem Werke, enthalten verschiedene hieher gehörige Gegenstænde.

Es ist z. B. mittelst dieser Tafeln sehr leicht für jeden gegebenen Augenblick vor oder nach dem Pariser Mittag und für mehrere nach 1800 folgende Jahre die gerade Aufsteigung und Abwei-

chnng

ehung der Sonne und der vornehmsten Sterne zu berechnen, woraus wieder viele Aufgaben die in der Anwendung der Astronomie auf die praktische Geometrie und Geogoaphie von grossen Nutzen sind, folgen.

Der Fig. 118 bedient sich Hr. *Vega* um mancherley solche nützliche Aufgaben aufzulösen.

So stelle z. B. *AF* einen Thurm vor. — Ist man mit einem *Theodolit* oder mit jenem Spiegelsextanten und einer Sekundenuhr die nach der mittlern Sonnenzeit berichtigt ist versehen, ist zudem die Breite des Orts bekannt, so kann man darnach die Richtung der Mittagslinie aus einem beliebigen Standpunkte in Absicht eines andern schon bestimmten Punktes finden. — Dazu dienet die Formel Sin $\frac{1}{2}$ Azimuthi $= \sqrt{\left[\frac{\text{Sin } p \text{ Sin } (p-c)}{\text{Sin a Sin b}}\right]}$ wo *p* die halbe Summe der Seiten des Kugeldreyeks, *MCB* der Azimuth und *s* der Sonnenpukt ist.

Die wahre Zeit der beobachteten Sonnenhöhe berechne man mittelst einer der zwey Formeln Sin $\frac{1}{2}$ Stundenwinkel =

$$\sqrt{\left[\frac{\text{Sin } (p-b) \text{ Sin } (p-c)}{\text{Sin b Sin c}}\right]}$$

oder Cos $\frac{1}{2}$ Stundenwinkels $= \sqrt{\left[\frac{\text{Sin p Sin } (p-a)}{\text{Sin b Sin c}}\right]}$ Statt einer Sekundenuhr kann man sich einer Vorrichtung *Fig.* 107. bedienen.

Daselbst befinden sich auch Tafeln um durch die Beobachtungen der Umlæufe eines Sterns den Gang einer Uhr zu prüfen.

„ Wenn næmlich eine Uhr gleichförmig gehet, und nach der „ mittleren Sonnenzeit eingerichtet ist; so vollendet jeder Fixstern „ seinen scheinbaren Umlauf um die Erde in 23 Stunden 56 Min: „ 4, 1 Sek. der mittlern Sonnenzeit; das ist jede Umdrehung der „ Erde um ihre Achse in Absicht eines Fixsterns geschiehet in die„ ser Zeit, und daher im Mittel genommen um 55, Min. 9 Sek. „ eher als in Absicht der Sonne, woraus die scheinbare Voreilung „ der Fixsterne enstehet. „

Darauf folgt eine Tafel um die wahre Sonnenzeit in mittlere und umgekehrt zu vervandeln.— " Die wirkliche Dauer von ei„ nem Mittage zum nachfolgenden an einem næmlichen Orte, die „ man die wahre Sonnenzeit nennt, ist nicht immer gleich grofs sie „ ist im halben December bei 50 Sekunden gröfser als im halben „ September. — Hingegen am 15 April, 16 Jun, 1 September und „ 24 December mufs eine solche Uhr in der wahren Mittagszeit, „ wo der Mittelpunkt der Sonne sich im Mittagskreise befindet auch „ æufserst nahe 12 Uhr zeigen. — Trift dieses nicht zu, so ist die „ Bewegung einer solchen gleichförmig gehenden Uhr in Absicht der „ Mittleren Sonnenzeit entweder zu schnell oder zu langsam, wel„ ches mittelst der letzten Tafel der Seite 197 sehr leicht zu ent„ scheiden ist. — Es kann daher auch diese Tafel zur Prüfung der „ Uhren öffters mit Nutzen gebraucht werden. „

III. Tafel.

DIE HÖHERE GEOMETRIE.

§. 1. *Einleitung.* m. s. S. 41.

I. Allgemeine Gleichung für einen Kreis *fig.* 1. und S. 41. n° 11.
II. Gleichung für eine krumme Linie mit einer Afsymptote *fig.* 2.

1) Diese ist $y = \pm a \sqrt{\frac{x}{x-a}}$; alwo $AP = x$; $PM = y$; $AC = a$.

2) Für $x = a + z$, wære $y = \pm a \sqrt{-1-\frac{a}{x}}$ eine unmögliche Gröfse.

3) Für $x = a - t$ und t sehr klein ist $y = \pm a \sqrt{\left(\frac{a}{t} - 1\right)}$.

4) Für $-x$ ist $y = \pm a \sqrt{-\frac{x}{a-x}}$.

5) Für $x = 0$ ist $y = \pm a \sqrt{\frac{0}{a-0}} = 0$.

6) Beschreibung dieser Krummen z. B. für $a = 100$ des verjungten
33,3; 42; Maafsstabes, für $x = 5, 10, 15, 20 \ldots$ wird $y =$ ~~22,9~~; 33,3; 42; ...

7) Für die Krumme *fig.* 3. wære die Gleichung $y = \pm x \sqrt{\left(\frac{b+x}{a-x}\right)}$ auch leicht zu verzeichnen.

8) Wære die Gleichung *fig* 2. $y^2 = \frac{a^2 x}{a-x}$ und man nimmt izt CE für die Abscifsenlinie so wird ihre Gleichung $x^2 = \frac{a^2 (a-y)}{a-(a-y)}$ und $y = \frac{a^3}{a^2+x^2}$

9) Nimmt man den Anfangspunkt der Abscifsen bey C und wieder auf CA so wird die Gleichung $y = \pm \sqrt{(a^3 x^{-1} - a^2)}$.

III. Die Gleichung einer krummen Linie ist ein allgemeines Glied einer Reihe bei der die Stellen der Glieder durch die Abscifsen bezeichnet werden.

Eine beliebige Funktion einer verænderlichen Gröfse z. B. $\frac{x^2}{1+x^2}$ ist das allgemeine Glied einer Reihe wenn man durch x die Stellen der Glieder bezeichnet, und zugleich eine Gleichung einer Krummen Linie wenn man durch die verænderliche x die Abscifsen bezeichnet und daraus ein linearischen Ausguck bildet z. B.

$y = \frac{ax^2}{a^2+x^2}$ wie die vorige Gleichung.

IV.

IV. *Linie der zweyten Ordnung* oder eine *Krumme von der ersten Ordnung.*
Krumme Linien von der næmlichen Familie z. B. $y^4 = px^3$; $y^{m+n} = p^m x^n$. — Aufgaben die man sich hier aufzulösen vornimmt S. 41. n° 1.

§. 2. *Von der Parabel fig. 4.*

I. Erklærung der *Parabel.* — *Leitlinie.* — *Leitpunkt* oder *Brennpunkt.* — Art die Parabel zu beschreiben. — durch eine ununterbrochene Bewegung.

II. *Aufgabe.* Eine Gleichung für die Parabel zu finden.
Aufl. Sie ist $y = \pm\sqrt{4cx}$ sie kann auch aus *fig.* 5. hergeleitet werden.

III. Folgerungen aus dieser Gleichung.
1) *AN* ist die *Axe* und A der Scheitel der Parabel.
2) Sie hat diesseits der Leitlinie von *A* angefangen zwey gleiche unendliche Schenkel.
3) Kein einziger Punkt der Parabel liegt über *A* hinaus nach der Gegend *AT*.
5) $x : y = y : p$. Daraus eine zweyte Verzeichnung.
6) Es ist $y^2 : Y^2 = x : X$.
7) Jeder Fahrstrich $FM = x + \frac{1}{4}p$.

IV. *MT* ist eine Berührungslinie.
1) *Die Subtangente* $= 2x$ daraus eine bequemere Art die Tangente zu zeichnen.
2) Die *Subnormallinie* $= \frac{1}{2}p$. Alles ist also bei einer Parabel bestimmt wenn die Lage ihrer Axe gegeben ist.
3) Die *Tangente* $= \sqrt{4x(x + \frac{1}{4}p)}$ und die *Normale* $\sqrt{p(x + \frac{1}{4}p)}$.
4) Ist die Senkrechte $Fk = v$ und der Fahrstrich z so ist $v^2 = \frac{1}{4}p\,z$. Daraus $v^2 : V = z : Z$.
5) Die Winkel *m* und *n* sind gleich. — Folgerungen daraus.

V. *Aufgabe.* Eine Gleichung für die Parabel zu finden, wenn man eine Gerade *DC fig. 6.* die zu der Achse parallel læuft, für die Abscissenlinie annimmt, und die Ordinaten zu der Tangente *DT* parallel ziehet.
Aufl. Ist hier $DP = x$; $PM = y$, $FD = c$, $aT = u$ so ist $y = \pm\sqrt{4cx}$, oder setzet man hier $4c = q$ so ist $y = \pm\sqrt{qx}$. — Folgerungen daraus.
1) Sie sind die næmlichen wie für die erste Gleichung.
2) Man kann die Axe der Parabel leicht finden.
3) Ist $2\,DG = b$ und der Winkel $TDG = m$ so ist $p = b.\cot.\ m$.

VI. Der Flæcheninhalt $APM = \frac{2}{3}xy$ *fig.* 4.
Denn die Summe aller der unendlich kleiner Rechtecke $= \frac{p^{\frac{1}{2}}\ x^{\frac{3}{2}}}{\infty^{\frac{3}{2}}}$ $(1^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + \ldots + \infty^{\frac{1}{2}})$. Dieses næmliche Resultat bekommt man

man auch indem man immer das gröſste Dreyek im Parabolischen Abschnitt einschreibet *fig.* 6.

VII. Und der Kubikinhalt des Paraboloides ist $= \frac{1}{2} xy^2\pi =$ dem halben Cylinder von der næmlichen Grundflæche und Höhe.

Denn es wird hier die Summe aller der unendlich kleinen eingeschriebenen Cylinder $= \frac{px^2\pi}{\infty^2} (1+2+3+4+\ldots\ldots+\infty)$

Setzt man $\frac{x}{\infty} = dx$ so wære das allgemeine Glied für die parabolsiche Flæche $= ydx$, und für die Elemente des Paraboloides $= \pi y^2 dx$.

§. 3. *Von der Ellipse.*

I. Erklærung der Ellipse. — Brennpunkte F und *f*. *fig.* 8.

Daraus Beschreibung durch eine ununterbrochene Bewegung.— Mittelst Durchschnitte mit der Zirkels Oefnungen *Fm*. *fm*.

II. *Aufgabe.* Eine Gleichung für die Ellipse zu finden.

Aufl. Ist $CP=x$; $PM=y$. Die Excentricitæt $CF=Cf=e$ $MF+Mf=Z+z=2a$ so ist $y=\pm\sqrt{a^2-e^2-\frac{x^2}{a^2}(a^2-e^2)}$ Folgerungen daraus.

1) *AB* ist eine Achse.—

2) Die Ellipse ist eine in sich selbst zurückkehrende Linie. (Dieses folgt aus $x=a$; $x>a$ u. s. w.).

3) Sowohl *AB* als *DE* theilet die Ellipse in zwey volkommen gleiche Theile.

4) $CD=CE$ ist die gröſste Ordinate.

5) $FA=FB$. 6) $z=a-\frac{ex}{a}$ und $Z=a+\frac{ex}{a}$. 7) $AB=2a$.

8) Ist die halbe kleine Axe b so ist $b^2=a^2-e^2=(a+e)(a-e)$ das ist..

9) Setzen wir b^2 in die obige Gleichung so wird sie $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$

10) Setzt man endlich $e=0$, oder $b=a$ so wird $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ eine Gleichung des Kreises.

III. Folgerungen aus der Gleichung $y^2=\frac{bb}{aa}(aa-xx)$ oder $\frac{4b^2}{4a^2}(a+x)(a-x).=y^2$.

1(Die erste Proportion ersicht man sogleich aus der zweyten Verwandlung der Gleichung.

2) $y^2 : Y^2=(a+x)(a-x) : (a+X)(a-X)$.

3) $PM : PM = a : b$. u. s. w. *fig.* 10.

Daraus wieder eine Art die Ellipse mittelst des Kreises zu verzeichnen.

IV

IV. Versezt man den Anfangspunkt der Abscissen in *A fig.* 8. so dafs $AP = x$; so wird die Gleichung $y^2 = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$, woraus wieder alles das obige folgt.

V. Erklærung des Parameters einer Ellipse. Es ist $2a : 2b : p$ daraus $p = \frac{2b^2}{a}$, und $2b : 2a : P$.

1) $2FG$ *fig.* 10 ist ein Parameter der grofsen Achse der Ellipse. — Der Parameter der kleinen Achse læfst sich in der Ellipse durch keine Ordinate vorstellen.

2) Die obige Gleichung wird also auch $y^2 = px - \frac{pxx}{2a}$ die man auch aus *fig.* 9. herleiten kann.

3) Man kann sehr excentrische Ellipsen bei ihren Scheiteln (z. B. die Laufbahnen der Cometen bei ihren Sonnennæhen) für parabolische Linien ansehen.

VI. Næhme man CP' *fig.* 12. für x, $P'M'$ für y so fænde man $y^2 = \frac{aa}{bb}(bb - xx)$. — Und für $DP = x$ wære $y^2 = \frac{aa}{bb}(2bx - xx)$.

1) Daraus lafsen sich wieder die obige Eigenschaften für die kleinere Achse herleiten.

2) Die *Figur* 11. erklært was S. 42. §. 2. n° III. und IV. fagen.

VII. Wenn man an was für einen Punkt *M* der Ellipse *fig.* 12. aus beiden Brennpunkten die Fahrstriche zieht, einen derselben z. B. *fM*. verlængert, und den Winkel *GMF* durch die Gerade *MT* halbiret, so berühret diese Gerade MT die Ellipse in dem Punkt *M*.

1) Hieraus ist leicht eine Tangente durch einen Punkt *M* oder *L* aufserhalb der Ellipse zu ziehen.

2) Der Winkel $m = n$.

VIII. Werthe der Linien die mittelst der Tangente bestimmt werden können. *fig.* 12.

1) Die *Subnormale* $PN = \frac{bbx}{aa}$; für $AP = x$ wære $PN = \frac{b^2}{a} - \frac{b^2 x}{a^2} = \frac{1}{2}p - \frac{px}{2a}$.

2) Die *Normale* $MN = b\sqrt{\left(1 - \frac{e^2 x^2}{a^4}\right.}$ oder $= b\sqrt{1 - xx + bbxx}$.

3) Die *Subtangente* $PT = \frac{a^2 - x^2}{x}$.

4) Für $x = 0$ ist $PT\ \infty$; für $x = a$ ist $PT = 0$; für $AP = x$ ist $PT = \frac{2ax - xx}{a - x}$. Für $x > a$ wird *PT* negativ.

5) $CT = \frac{aa}{x}$ 6) $AT = \frac{a(a-x)}{x}$

Desgleichen für die kleine Achse.

IX. *Aufgabe.* Eine Gleichung für die vereinigte Durchmeſser der Ellipse zu finden *fig.* 13.

Aufl. Setzt man $CP=x$; $PM=y$; $CE=c$; $CA=d$, $GT=s$; $AE=t$ $CG=u$, und $AT=q$; so ist $\left(\frac{a^2 t^2}{b^2 q^2} + \frac{s^2}{q^2}\right) y^2 + \left(\frac{a^2 t^2}{b^2 c^2} + \frac{u^2}{c^2}\right) x^2 = a^2$ oder $Ay^2 + Bx^2 = a^2$.

Sezt man einmal $x=o$; und zweytens $x=c$ so wird $A = \frac{aa}{dd}$ und $B = \frac{aa}{cc}$ woraus die Gleichung $y^2 = \frac{dd}{cc}(cc - xx)$ welche mit jener für rechtwinklichte Ordinaten auf der groſsen oder kleinen Achse, vollkommen, übereinstimmt und daraus man also die næmlichen Folgerungen wie oben herleiten kann.

X. $c^2 + d^2 = a^2 + b^2$.

XI. Sezt man den Winkel $DCA = q$ so ist $cd \sin q = ab$.

1) Folgerungen aus diesen zwey Gleichungen.

1) Ist der Neigungswinkel $ACF = v$ so ist $\operatorname{tg} v = \frac{a^2 - c^2}{a^2} \operatorname{tg} q$

$$= (a+c)\frac{(a-c)}{a^2} \operatorname{tg} q;$$

XII. Der Flæcheninhalt einer Ellipse $R = ab\pi$ *fig.* 10.

Oder gleicht einem Kreise aus $\sqrt{ab}$ weil $ab\pi = (\sqrt{ab})^2 \pi$.

XIII. Und der Kubikinhalt eines Elliptoides $R = \frac{4}{3} ab^2 \pi$ und das halbe Elliptoides ist $\frac{2}{3}$ des ihm umgeschriebenen Cylinders.

Desgleichen für die kleine Achse.

XIV. Noch einige Eigenschaften der Ellipse für den Astrononomischen Gebrauch. Diese werden mittelst der Figuren 14, 15, 16, und S. 42. §. 4. n° II, III, IV, V, VI, VII, und §. 5. erklært.

§. 4. *Von der Hyperbel.*

I. Erklærung der Hyperbel.— Ihr *Mittelpunkt.* — *Brennpunkte.* — *Fahrstrahlen.* — Zwifache Verzeichnung *fig.* 16.

II. *Aufgabe.* Eine Gleichung für die Hyperbel zu finden.

Aufl. Giebt man hier die næmliche Benennungen wie bei der Ellipse so ist $y = \pm\sqrt{\frac{e^2 - a^2}{a^2}(x^2 - a^2)}$ — Daraus folget.

1) Der gröſsere Fahrstral $Z = a + \frac{ex}{a}$ und der kleinere $z = \frac{ex}{a} - a$.

2)

2) Für $-x=$ ist $y=y'$ 3) Für $x=+a=-a$ ist $y=0$. 4) Für $x=a-v$ oder ist die Ordinate unmöglich. 5) Für $x=\infty=-\infty$ ist $\pm y=\infty$

III. Die obige Gleichung abgekürzt wird $y^2=\frac{bb}{aa}(xx-aa)$; $=\frac{b^2}{a^2}\cdot(x+a)(x-a)$.

1) Hier ist $b^2=e^2-a^2$. — die zweyte oder kleinere Halbachse.

Aus den beiden Halbachsen kann man also auch die Brennpukte finden.

2) $y^2 : Y^2=(x+a)(x-a)$.

3) Für $Cp=x$ und $pm=y$ ist $y^2=\frac{a^2}{b^2}(x^2+b^2)$.

4) Ist $AP=x$; $PM=y$ so ist $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2+2ax)$.

IV. *Parameter* der ersten und der zweyten Achse.

1) Es ist auch hier $p=\frac{2b^2}{a}$ und $P=\frac{2a^2}{b}$.

2) Daraus wird $b^2=\frac{1}{2}ap$ und die erste fundamental Gleichung

$y^2=px+\frac{pxx}{2a}$ die auch aus der *fig.* 18. hergeleitet werden kann.

3) Die hæufig vorkommende vier Gleichungen der Hyperbel sind also

$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$; $y^2=\frac{a^2}{b^2}(x^2+b^2)$; $y=\frac{b^2}{a^2}(x^2+2ax)$; $y^2=px+\frac{pxx}{a}$

4) Die zweyte Achse kann hier kleiner oder grösser seyn.

Auch können die zwey Achsen der Hyperbel unter einander, und folglich auch dem Parameter gleich sein. — Im letzten Falle ist die Hyperbel *gleichseitig*.

V. Gleichungen für die gleichseitige Hyperbel.

1) $y^2=x^2-a^2$; 2) $y^2=x^2+a^2$ 3) $y^2=x^2+2ax$.
4) $y^2=x^2-ax$.

VI. Die Linie *MT* die den Winkel *fMF* halbirt ist eine Berührungslinie.

1) Die *Subnormale* $PN=\frac{b^2x}{a^2}$ bey der gleichseitigen Hyperbel ist sie der x gleich.

2) Die *Subtangente* $PT=x-\frac{a^2}{x}$; $CT=\frac{a^2}{x}$ und $AT=a-\frac{a^2}{x}$.

Für $x=\infty$ wird $AT=a$.

3) $AR=\frac{b}{x}\sqrt{x^2-a^2}$.

4) Für $x=\infty$ würde $AR=b$. — Folgerungen daraus. — *Assymptote*

§. 5. *Von der Hyperbel zwischen ihren Afsymptoten fig. 19.*

I. Hier ist $PN^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$; $PM^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2$ folglich $PN^2 - PM^2 = b^2$ das ist.

1) $MN = \frac{b^2}{PN + PM}$; 2) Für $CP = \infty$ ist $MN = \frac{b^2}{\infty}$

3) $MN = \frac{b^2}{MN}$ und 4) $MN.\ MN' = b^2$.

5) Ziehet man BR gleichlaufend zu GC so wird die *Potenz* der Hyperbel $BR^2 = RC^2\ \frac{1}{4}\ (a^2 + b^2)$.

II. *Gleichung der Hyperbel zwischen ihren Afsymptoten.*

1) Es sey $BR = q$; die Abscifse $CQ = q$, die zur Afsymptote CG parallele Ordinate $QM = y$ und MK parallel zu CH so ist $y = \frac{q^2}{x}$. Daraus eine andere Verzeichnung.

2) Für $x = \infty$ ist $y = \frac{q^2}{\infty}$; für $x = 0$ ist $y = \frac{q^2}{0}$ für $-x$ wird $-y$;

3) $xy = q^2 = XY$. oder y ; $Y = X : x$.

III. Gleichung der Hyperbel für ihre Durchmesser und noch eine Art sie zu zeichnen *fig. 20.*

1) Wenn man durch was immer für einen Punkt E der Hyperbel nach was immer für einer Richtung eine gerade AB ziehet so ist nämlich $AE = DB$.

2) Folglich ist in der gleichlaufenden Tangente $TM = tM$. und

3) $PT = PC$ næmlich die Substangente der Abscisse gleich.

4) Da allenthalben $AE = BD$, $DK = DQ$ u. s. w. so ist es auch sehr leicht zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels ACH eine Hyperbel zu beschreiben die durch einen gegebenen Punkt D geht;—

5) MM' ist ein *Durchmesser* der Hyperbel M, M' seine Scheitel.— und die *Tangente* Tt der *Vereinigte Durchmesser* von MM'.

6) Sezt man hier wieder wie in der Ellipse $CM = c$, $MT = d$ so wird $FA = \frac{dx}{c} = FB$.

7) Und für $CF = x$; $FD = y$; ist $y^2 = \frac{d^2}{c^2}\ (x^2 - c^2)$ woraus zu ersehen ist dafs die Hyperbel in Rücksicht der vereinigten Durchmefser die næmlichen Eigenschaften habe, wie in Rucksicht ihrer Achsen.

IV. Gleichung der Hyperbel wenn man A für den Anfangspunkt der Abscifsen annimt fig. 21.

1) Setzt man $CA = AB = a$, $AP = x$, $PM = y$ und den Afsymptotenwinkel $HCG = m$. so ist die verlangte Gleichung $y = \frac{a^2}{a+x} = a - x + \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^4}{a^3} - \ldots\ldots$

2)

2) Die Senkrechte $Mn = y$ Sin $m =$ Sin $m\left(a - x + \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^4}{a^3} - \ldots\right)$

V. Von dem Flæcheninhalte der Hyperbel.

1) Stellet man sich hier wieder wie für den Kreis, die Parabel und die Ellipse den Flæchenraum *ABMP* in seine Elemente aufgelöset vor, so wird PMpm das allgemeine Glied in dieser unendlichen Reihe der Elemente. $=$ *Pp. Mn.* und die Summe aller dieser Elemente (aus S. 127.) oder $ABMP = a^2$ Sin m. lognat $\left(\frac{a + x}{a}\right)$

2) Sezet man den Asymptotenwinkel $HCG = 90^\circ$ so wird die Hyperbel *gleichseitig*, und $ABMP =$ log. nat. *CP.* und daraus die Benennung der *hyperbolischen oder natürlichen Logarithmem.*

3) Doch ist diese Benennung nicht schicklich. — Denn zB. können die gemeinen oder briggischen Logarithmen durch die Flæchenræume einer Hyperbel an der Asymptote vorgestellet werden, deren Asymptotenwinkel $= 25^\circ\ 44'\ 25\frac{1}{2}''$ und die unverænderliche Gerade $AB = 1$ ist, weil das Modell der gemeinen Logar. $= 0{,}43429448$ ist und zu diesem Sinus der obige Winkel gehört.

4) $PMNG = AB^2$ Sin m log. nat. $\frac{CG}{CP}$; zB. für $AB = 2$ Schuhen, $m = 30^\circ$, $CG = 60$, und $CP = 12$ Sch. ist $PMNG = 4\frac{1}{2}$ log. nat. $5 =$ lg. nat. $25 = 3{,}2188758$ Quadratschuhen.

§. 6. *Wie die Gleichungen für die Kegelschnitte noch allgemeiner bestimmt werden können.*

I. Diese untersuchte Krummen mit senkrechten Ordinaten enstehen auf der Oberflæche eines geraden Kegels *fig.* 22.

1) Es sey *PG* parallel zu *BC* und AF parallel zu *CD* oder zur Grundflæche. Zudem sey $AP = x$; $PM = y$; $AB = c$, der Winkel $CBD = n$, und $QAD = m$; so ist $y^2 = \frac{\text{Sin } m}{\cos^2 \frac{1}{2} n}\left[cx \text{ Sin } n - x^2 \text{ Sin}(m - n)\right]$

2) Diese allgemeine Gleichung læfst sich auch so einrichten.

$y^2 = \frac{c.\ \text{Sin } m.\ \text{Sin } n}{\cos^2 \frac{1}{2} n}\, x - \frac{c.\ \text{Sin m. Sin n}}{\cos^2 \frac{1}{2} n} \cdot \frac{\sin(m - n)}{c.\ \text{Sin } n}\, x^2$ oder wenn wir den gemeinschaftlichen oder den ersten Coefficienten *p* und den zweyten verschiedenen Factor *a* nennen so wird $y^2 = px - \frac{pxx}{a}$.

3) Setzen wir nun $m = n$ so wird die Gleichung $y^2 = px$ für die *Parabe* deren Parameter $p = 4c$ Sin $^2\ \frac{1}{2} n$.

4) Für $m > n$ wird $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ und der Schnitt eine *Ellipse.*

5) Für $m < n$ wird $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ und der Schnitt eine *Hyperbel*.

6) Für $m = 90°$ wird $y^2 = 2cx \sin \frac{1}{2} n - x^2$ eine Gleichung für den Kreis.

7) Für $c = 0$; und dabey $m < n$ ist $y^2 = \frac{x^2 \text{ Sin m. Sin } (n-m)}{\cos^2 \frac{1}{2} n}$ eine Gleichung für die Ordinaten eines geradelinigten Dreyeks.

II. Diese Gleichungen können allgemeiner auch noch von den möglichen Schnitten eines schiefen Kegels nach *Mayerischer* Art hergeleitet werden. *fig.* 23. M. s. J. T. *Mayer* 4 Theil § 60 Sqq.

1) Die Durchschnittsfigur einer ebenen Flæche *ikE* mit der krummen Seitenflæche eines Kegels, bestimmt sich blos nach dem Verhalten des Winkels *CFE* gegen diejenigen Winkel, welche die Seitenlinien *BO*, *AO*, mit dem Durchmeßer *ACFB* der Grundflæche machen.

Ist $CEF = \varepsilon$ und $CBO = \nu$ so ist der Schnitt eine Ellipse eine *Ellipse* eine *Parabel* oder eine *Hyperbel* je nachdem $\varepsilon <=> \nu$ ist.

2) Man nenne die Axe $Oc = c$, ihre Neigung *OCS* gegen die Grundflæche $= \beta$, $CWF = \varkappa$; $AE = r$, den Perpendikel $CF = f$ und den Neigungs-Winkel des Schnittes *kEi* gegen $BDA = \psi$ so ist noch der Schnitt *kEi* eine Ellipse, Parabel, oder Hyperbel je nachdem der Ausdruck $c(\sin\beta \cot\psi + \cos\beta \sin\varkappa) >=< r$ ist.

Dieses læßt sich mittelst der sphærischen Trigonometrie und den beygefügten Kugeldreyeken erweisen.

Der Ausdrück $\text{tang } \psi =<$ oder $> \frac{c \text{ Sin } \beta}{r - c \text{ Sin } \varkappa \cos\beta}$ zeigt wie man in jedem Falle den Neigungswinkel des Schnittes zu nehmen habe damit dieser Schnitt eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel sey.

3) Nimmt man in dem Umfange des Schnitts einen beliebigen Punkt *q* an, und gedenke sich durch denselben einen mit der Grundflæche gleichlaufenden Schnitt, der also ein Kreis ist, so wird *Ee* ein Durchmeßer des Kegelschnittes.

Ziehet man noch *eq* und *Eh* parallel zu *AB*, und sezt $Ee = a$ $Ep = x$; $mp = y$; $Eh = m$, und $eg = n$. und zur Verkürzung $\frac{m.n}{a.a} = b$ so bekommt man aus den æhnlichen Dreyeken die einfache und allgemeine Gleichung für den Kegelschnitt $y^2 = abx - bx^2$,

4) Es ist $a = \frac{(r+f)\sin\mu}{\text{Sin}(\mu+\varepsilon)} + \frac{(r-f)\text{ Sin }\nu}{\text{Sin C}(\nu-\varepsilon)}$; $b = \frac{\text{Sin}(\nu-\varepsilon)\text{ Sin }(\mu+\varepsilon)}{\text{Sin }\nu \text{ Sin }\mu}$

das Produkt $ab = c = \frac{(r+f)\text{ Sin }(\nu-\varepsilon)}{\text{Sin }\nu} + \frac{(r-f)\ (\mu+\varepsilon)}{\text{Sin }\mu}$

und die allgemeine Formel wird noch $y^2 = cx - bx^2$

zB. Für die Parabel wird $\varepsilon - \nu = 0$ folglich ihre Gleichung $y^2 = cx$.

5) Es wird auch aus dieser Gleichung hergeleitet daß der antiparallele Schnit des Kegels (Sectio subcontraria) ein Kreis ist *Tab.* II. *fig.* 109

III.

III. Noch allgemeiner können diese Gleichungen aus *fig.* 24. hergeleitet werden. — Man sehe selbe S. 47. §. 22.

IV. Endlich lafsen sich noch obige Gleichungen und neue Verzeichnungen aus der Erklærung dafs ein Kegelschnitt eine krumme Linie sey, bei welcher das Verhæltnifs der Entfernungen einesjeden Punktes von einem gegebenen Punkt und einer Linie bestændig ist, hergeleiten. — Bei der Parabel ist dieses Verhæltnifs ein Varhæltnifs der Gleichheit, bei der Ellipse ist er *kleiner* und bei der Hyperbel gröfser als die Einheit.

§. 7. *Von der Konstruction der Gleichungen* M. s. S. 45. §. 24.

I. Fur die Erklærung des n° I. dient *fig.* 25.

II. Die zwey Werthe der Wurzel x fur n° II. wird durch die *fig.* 26. erlæutert.

Sie sind hier *AP* und *AQ*.

III. So liefse sich auch die Aufgabe der Verdoppelung des Würfels mittelst der Durchschnitte z. B. zweyer Parabel auflösen *fig.* 27. — Wir haben aber oben S. 128 §. 11. n° IV. gesehen, dafs sich solche Aufgaben mittelst des Maafsstabes genauer auflösen lafsen.

IV. Von den Gleichungen wo sich drey verændliche befinden siehe man daselbst §. 25. Zur Erlæuterung defsen dienet die *fig* 28.

Es ist also bequem eine krumme Linie die sich auf verschiedenen Flæchen befindet auf eine Ebene zu *projciren*. — Eine Anwendung davon werden wir unten sehen.

§. 8. *Von den Mechanifchen krummen Linien.* m. s. S. 49. §. 26.

Zur Erlæuterung dienen die *fig.* 29. 30. für §. 26. n° III. u. s. w.

I. Die *logarithmische Linie* oder die *Logistik fig.* 29.

1) Ist der Anfangspunkt der Abcifsen in A seine Ordinate c, die Abcifse $AP=x$; und die Ordinate $PM=y$; eine andere gegebene Ordinate die gröfser als AB ist b; ihr Abstand $AC=a$; so ist $x=na$;

$n=\frac{x}{a}$ und die gesuchte Gleichung $y=c\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{x}{a}}$ daraus $x=\frac{a\log\frac{y}{c}}{\log\frac{b}{c}}$

2) Nimmt man a so an das $\frac{b}{c}=2{,}718281828\ldots\ldots=h$ der Grundzahl der natürlichen Logar. und folglich log. nat $\frac{b}{c}$ log. nat. $h=1$ sey so wird $y=ch^{\frac{x}{a}}$ und $x=a.$ log. nat. $\frac{y}{c}$. Folgerungen daraus.

3) Die Abscifsenlinie AP ist eine *Afsymptote*.

4) Sezt man $c=1$, so ist $x=a$ log. nat. y das ist..... und durch die Logistik kann jedes logarithmische System vorgestellt werden.

5) Für $AQ=x$ und $MQ=y$; ist $y=$ alog nat. $\frac{x}{c}$ und $x=ch^{\frac{y}{a}}$.

6) Für $BQ=x$ ist $y = a \log. \text{nat.} \left(1 + \frac{x}{c}\right)$ und $x=c\left(h^{\frac{y}{a}} - 1\right)$.

7) Für die Abscissenlinie AP ist noch $y=ch^{\frac{x}{a}} = c + \frac{cx}{a} + \frac{cx^2}{1.\,2.\,a^2}$ $+ \frac{cx^2}{1.\,2.\,3.\,a^3} + \ldots$

8) Daraus der Flæcheninhalt von $ABMP = \frac{x\,(y-c)}{\log.\ \text{nat.}\ y - \log\ \text{nat.}\ c}$

II. *Die Cycloide* oder *Radlinie. Erzeugungskreis, Grundlinie. Scheitel fig.* 31.

1) DE ist dem ganzen Umfang des Erzeugungskreises gleich.

2) $QM=AQ$.

3) Für $AQ=u$, und $QM=z$ ist $z=u$ die Gleichung der Cycloide und für $AP=x$; $PM=y$ nnd $AC=a$ ist eine andere Gleichung

$y=\sqrt{(2ax-x^2)} + a.$ arc. cos $\left(\frac{a-x}{a}\right)$ alwo der zweyte Theil $=AQ$

z. B. Für $AC=a=50$, $AP=x=80$, ist $\frac{a-x}{a} = -\frac{30}{50} =$ $-0{,}6000000 = \sin 53^\circ\, 7'\, 48'' = \text{Cos}\ 126^\circ 52'\, 12''$ und arc $126^\circ\, 52' 12''$ $= 2{,}214299 =$ arc. cos. $\frac{a-x}{a}$ und folglich a *arc.* cos $\left(\frac{a-x}{a}\right) =$ $110{,}71495$. Da nun der erste Theil $=40$ so ist $PM=150{,}71495$.

4) Für die Erklærung des §. 20. n. IV. gehört die *fig.* 32.

III. *Die Archimedische Spirallinie. fig.* 33.

1) Entstehungsart solcher Krummen bei denen die Ordinaten nicht parallel laufen. Ihr *Pol.* Gleichförmigkeit der Bewegung des sie bildenden Punktes.

2. Beschreibt man mit AC einen Kreis so ist $CM : Cm : CA : LM' \ldots$ $=AP : APQ : APQA : APQA + AP : \ldots$

3) Nimmt man A für den Anfangspunkt der Abscissenlinie, und sezt $AC=c$; $AP=x$, $CM=y$ und $APQA=p$, so ist gesuchte Gleichung $y=\frac{cx}{p}$.

4) Für $x=0$, ist auch $y=0$, für $x=\frac{1}{3}p$ ist $y=\frac{1}{3}c$, für $x=p$ ist $y=c$, für $x=2p$, ist $y=2c$, für $x=\infty$ ist $y=\infty c$ das ist.... für $x=$ $-\frac{1}{3}p=-AQ$ ist $y=-\frac{1}{3}c=Cm'$.

5) Sezt man $p=2c\pi$ so ist $y = \frac{x}{2\pi}$.

6) Sind die Ordinaten unter gleichen Winkeln geneigt, und folgen in geometrischen Reihe auf einander so heifst die Krumme eine *logarithmische Spirallinie.*

7) Ist also *fig.* 34. $AC=c$; $APQA=p$, $AP=x$; $CM=y$, $CD=b$ so ist $y=c\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{x}{p}} = c\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{x}{2c\pi}}$. und $x=\frac{2c\pi\,(\log.\ y - \log.\ c)}{\log.\ b - \log\ c.}$.

8)

8) Ist AP in Graden $=u$ so wird die Gleichung $y=c\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{u}{360}}$ und eben so ist für die archimedische Spirallinie $y=\frac{cu}{360}$.

9) Nimmt man zB. den Brenpunkt einer Parabel für den Mittelpunkt des Abscisenkreises und den Abstand von dem Scheitel $=c$ für den Halbmeſser dieses Kreises, diesen Scheitel für den Anfangspunkt, und die Anzahl der Grade u für einen beliebigen Fahrstrich oder jetzige Ordinate so wird $y=\frac{2c}{1+\cos u}$ für den Sint $=1$. Ist die wirkliche Længe der Abscisenlinie $=x$; so findet man

$$y=\frac{2c}{1+\cos\left(\frac{180x}{c\,\pi}\right)}.$$

IV. Für die *Nicomedische Conchoide*, — für die *Cissoide des Diocles* und die *Quadratrix* des *Dinostrates* die von keinem Gebrauche sind dienen die *fig:* 35, 36, 37. deren die Gleichungen S. 50. §. 26. n° VI, VII, VIII.

§. 9. *Anwendung der Differenzial Rechnung auf die krumme Linien.*

(Auch bei dieser Anwendung werden wir gröſstentheils die Ordnung des Vortrags des *Hr. v. Vega* aus Seinem 2. B. beobachten und dieses um deſsen Gute und um der Uebereinstimmung des Unterrichts willen).

I. Anwendung der Differenzialrechnung auf die Bestimmung der Subtangenten, Tangenten, Normalen, Subnormalen, und Aſsymptoten der krummen Linien.

1) *Aufgabe.* Eine allgemeine Formel für die *Subtangente* einer jeden krummen Linie von parallelen Ordinaten zu finden. *fig.* 38.

Aufl. $PT=\frac{ydx}{dy}$ oder auch $PT=\frac{y}{dydx^{-1}}=ydxdy^{-1}$.

z. B. Für die *Parabel* ist $PT=2x$.
Für die *Hyperbel* an der Aſsymptote *fig.* 20. ist $PT=-x$.
Für die *Logistik* *fig.* 29. ist $PT=a$.

Für die *Cycloide* *fig.* 19. ist $PT=\frac{xy}{\sqrt{2ax-xx}}$ oder

$PQ : PA=PM : PT$. folglich QA mit MT gleichlaufend.

2) Die *Subnormale* $PN=\frac{ydy}{dx}$ *fig.* 38. oder auch $PN=\frac{y}{dxdy^{-1}}=ydydx^{-1}$.

3) Die *Normale* $MN=\sqrt{\left(y^2+\frac{y^2dy^2}{dx^2}\right)}$ oder $MN=y\,(1+dy^2dx^{-2})^{\frac{1}{2}}$.

4) Die *Tangente* $TM=\sqrt{\left(y^2+\frac{y^2dx^2}{dy^2}\right)}$ oder $TM=\left(y^2+\frac{y^2}{dy^2dx^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

z. B. Aus der allgemeinen Gleichung für die ganze Familie der Parabeln $y^{m+n}=p^m x^n$ folgt die Subnormale $PN=\frac{n}{m+n}\cdot p^{\frac{2m}{m+n}}\,x^{\frac{2n}{n+m}-1}$; für $m=n$ und $n=1$ ist $NP=\frac{1}{2}p$.

Für den Kreis ist die Normale $=a$.

5) $AT=\frac{ydx}{dx}-x$ und $AG=y-\frac{xdy}{dx}$.

Nach diesen zwey Formeln læſst sich die Lage der Aſsymptote einer krummen Linie von parallelen Ordinaten bestimmen.

z. B. bei der *Hyperbel* an der ersten Achse alwo $y=\frac{b}{a}\sqrt{(x^2+2ax)}$ ist $AT=\frac{ax}{x+a}$ und $AG=\frac{bx}{\sqrt{(x^2+2ax)}}$ für $x=\infty$ ist $AT=a$ und $AG=b$.

bei der *Logistik* alwo $y=ch^{\frac{x}{a}}$ muſs man $x=-\infty$ setzen daraus $AT=\infty$ und $AG=\frac{\infty c}{ch^{\frac{\infty}{a}}}$ wird das ist....

Man kann auch aus diesen zwey Gleichungen herleiten daſs die Parabel keine Aſsymptoten hat; imgleichen kann die *fig.* 2, und die verſchiedene Gleichungen für sie können manche hieher gehörige Fælle erlæutern.

6) Bei den Krummen Linien, deren Ordinaten alle aus einem Punkte gehen, wird die *Subtangente* BT *fig* 40. auf der geraden *BT* gezæhlet; welche auf *BM* senkrecht ist.

Ist $AB=c$, $AP=x$; $BM=y$ so ist $BT=\frac{y^2dx}{cdy}=\frac{y^2}{cdy.dx^{-1}}$.

z. B. bei der *logistischen Spirallinie* ist $BT=\frac{2\pi y}{Lb-Lc}$.

daraus sich auch der Winkel BMT bestimmen læſst.

est ist næmlich *tang* $BMT=\frac{2\pi}{\log\ \text{nat.}\ b-\log\ \text{nat.}\ c.}$

Die *Subnormale* $BN=cdy.dx^{-1}$;

Die *Normale* $MN=(y^2+c^2dy^2.dx^{-2})^{\frac{1}{2}}$ und die *Tangente*

$$TM=\frac{y}{c}\cdot\left(c^2+\frac{y^2}{dy^2.\,dx^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

II.

II. Anwendung der Differenzialrechnung auf die Bestimmung des *Krümmungshalbmessers* der krummen Linien. *fig.* 41.

Davon ist bereits S. 43. § 6, etwas gesagt worden, wobey ϱ vor dem Gleichheitsstriche, und der Exponent von n in 3, muss verwandelt werden.

Es ist hier $AP=x$; $PM=y$; $AM=z$; $M=u$; und der *Krümmungshalbmesser* $MC=k$.

1) Die Formel $k=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ oder $k=\frac{(1+dy^2.\,dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{-ddy.\,dx^{-2}}$ oder $k=\frac{n^3}{-y^3ddy.dx^{-2}}$. Für die Kegelschnitte ist $k=\frac{n^3}{\frac{1}{4}p^2}$ und an ihren Scheiteln $k=\frac{1}{2}p$.

2) Es wird noch $k=\frac{n^2}{n-ydn.\,dy^{-1}}$. Es wird daraus z. B. für die Parabel $k=\frac{n^3}{\frac{1}{4}p^2}$.

3) Aus der ersten Formel wird für die *Logistik* $k=-\frac{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{ay}$, die Krumme zeigt also ihre *erhabene* (convexe) Seite der Abscissenlinie.

4) Für die gleichseitige Hyperbel an der Assymptote ist $k=-\frac{(a^2+x^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^2x^3}$. z. B. für $x=1000\,a$ und $a=1$ Duodecimalzolle, ist bey einer solchen Hyperbel in der Entfernung von 13 $\frac{8}{9}$ Klaftern auf der Assymptote von dem Anfangspunkte gezæhlet der Krümmungshalbmesser schon grösser als der ganze Durchmesser unser Erdkugel.— Es ist hier næmlich $k=500$ Millionen Zoll mehr $\frac{75}{100000}$ eines Zolles (rigor geometricus).

5) Für die Cycloide *fig.* 39. ist $k=2\sqrt{(2a(2a-x)}$. Næmlich $MM=2BQ$ und parallel mit BQ. Für $x=0$ ist ist bei A; $k=AD'$; für $x=2a$ ist $k=0$.

$A'C=arc.\ A'Q'$, oder $Q'M'=arc.\ A'Q'$ das ist die *Evolute* $A'M'D'$ der *Cycloide* $A'MA'$ ist selbst eine *Cycloide* von dem næmlichen Erzeugungskreise.

Anwendung auf die Schwingung eines Pendels. — $A'M'=MM'=2A'Q'$. die Cycloide læsst sich demnach genau *rectificiren.*

6) Aus der gegebenen Gleichung der *Evolvente AM fig.* 41. læsst sich die Gleichung für die *Evolute* bestimmen.— Es sey hier noch $AB=b$; die Abscisse $BQ=t$ und $CQ=u$ so ist $t=\left(\frac{1+dy^2.dx^{-2}}{-ddy.dx^{-2}}\right)-y$ und $u=x+\left(\frac{dy.\,dx^{-1}+dy^3.\,dx^{-3}}{-ddy.\,dx^{-2}}\right)-b$.

U z. B.

z. B. für AM eine gemeine Parabel ist $t = 4p^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$; und $u = 3x$ und endlich $u^3 = \frac{27}{16} pt^2$ das ist u. s. w.

7) Für einen schiefen Winkel zwischen den Ordinaten wære z. B. die Subnormale $= \frac{y. \cos m + ydy.\ dx^{-1}}{1 + \cos m.\ dy.\ dx^{x-1}}$.

8) Für Ordinaten die aus einem Punkte gehen *fig.* 40. ist

$$k = \frac{(y^2 + c^2 dy^2 . dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{y^2 + 2c^2 dy^2 . dx^2 — c^2 yddy . dx^{-2}}.$$ z. B. aus der Gleichung für die archimedische Spirallinie $y = \frac{x}{2\pi}$ folgt $k = \frac{(4\pi^2 y^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi(4\pi^2 y + 2c^2)}$; für $y = 0$ ist $k = \frac{c}{4\pi}$ und für $y = c$ ist $k = \frac{c\,(4\pi^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{8\pi^3 + 4\pi}$. folglich verhælt sich bei dieser Spirallinie die Krümmung im Anfangspunkte zur Krümmung am Ende des ersten Schraubenganges $= \sqrt{(4\pi^2 + 1)^3} : 2\pi^2 + 1$.

Sezt man statt y seinen Werth so ist $k = \frac{(x^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi(x^2 + 2c^2)}$ durch die Abseisse ausgedrück.

9) Wenn man *fig.* 40. $PM = y$ sezt so ist $BM = y + c$ und folglich für diesen Fall $k = \frac{(y + c)^2 + c^2 dy^2 . dx^{-2})^{-\frac{2}{3}}}{(y + c)^2 + 2c^2 dy^2 . dx^{-2} — c^2 (y + c)\ ddy . dx^{-2}}$ für $c = \infty$ wird

$$k = \frac{(1 + dy^2 . dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{—ddy.\ dx^{-2}}$$ wie zuvor.

Ubrigens rügt hier Recht der Hr. *v. Vega* mit Recht den fehlerhaften Ausdruck für solche Krümmungshalbmesser und für die Ordinaten aus einem Punkte in mehreren Abhandlungen z. B. in L'Abbé *Sauri* Cours complet de Mathem. Paris 1778, pag. 176; C. *Scherffer* Calcul. diff. Viennæ 1771. pag. 98. u. a. m.

III. Anwendung der Differenzialrechnung auf die Bestimmung der grösten und kleinsten Werthe der Funktionen (*de Maximis & Minimis*).

Das wesentlichste davon ist bereits S. 82. §. 31. gesagt worden und mit Beyspielen erleutert.

1) Wenn eine Funktion von x so beschaffen ist, dafs sie bis auf einen gewifsen Werth zunimmt und von da wieder abnimmt indem x bestændig abnimmt so heist dieser ihr Werth ein Gröfstes.

z. B. $10x — x^2 + 2$ ist eine solche Funktion; denn sezt man nach der Ordnung die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... so erhælt man die entsprechende Werthe der Funktion 2, 11, 18, 23, 26, 28, 26, 23 ... das Gröfste der Funktion ist also 27 für den Werth von $x = 5$;

Desgleichen wære für die Funktion $x^2 — 8x + 18$ der kleinste Werth 2 wobey $x = 5$. Diese Werthe bekommt man leicht durch die Infinitesimal Rechnung und bey der Beobachtung der Regel §. 31.

und

und n° II. Mann findet z. B. dafs bey der Krummen deren die Gleichung $y = \frac{1}{2} p + p^{\frac{1}{3}}(x-p)^{\frac{1}{3}}$ ist, der Abscifse $x=p$ die *kleinste Ordinate* entspreche, und dafs die kleinste Ordinate $y=\frac{1}{2} p$ sey.

2) *Fig.* 42. kann durch die Gleichung $y=p-p^{\frac{1}{3}}(x-p)^{\frac{2}{3}}$ und *fig.* 44. durch $y=p+p^{\frac{1}{3}}(x-p)^{\frac{2}{3}}$ auf der Abscifsenlinie *AP* ausgedrückt werden. — Sezt man für die gröfste oder die kleinste Ordinate $y=X$ wenn die Tangente entweder mit der Abscifsenlinie parallel læuft, oder mit der Ordinate zusammen fællt, so wird im ersten Falle $dX=o$, und im zweyten $dx=o$ in Rücksicht dy. — Im ersten Falle ist næmlich die *subtg.* $\frac{ydx}{dy} = \infty$ und im zweyten $= o$.

Wendungspunkt (punctum flexus contrarii) *fig.* 45. die Krumme wird z. B durch die Gleichung $y=p+p^{-2}(x-p)^3$ auf der Abscifse AP ausgedrückt und jene *fig.* 200 mit einem *Schnabel* (cuspis) durch $y=sp \pm \sqrt{(p^{-1}(sp-x)^3)}$.

Beypiele zur Uebung.

3) Eine Krumme zu beschreiben deren Gleichung
$y=0,1125x^4-0,725x^3+0,9375x^2+0,875 \cdot x$ *fig.* 46.

Aufl. Für die Abscifsen $x=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6....$ sind die Ordinaten $y=0,1,2;1\,5;0,6;0,9;7.5;28;2,73;5;$ Für die gröfsten und die kleinsten Ordinaten defferenciere man die gegebene Gleichung und setze $dy=o$ woraus man $x=1,6925$; $x=3,472$; und $x=-3891$ und daraus für *r*, *t* und *p*; $y=0,342$ und $y=0,675$ bekommt.

4) Aus einer gegebenen Kreisflæche ABD *fig.* 46. soll ein Stück ACB ausgeschnitten, und aus dem Ueberreste ein Kegel EFG gebildet werden; wie viel Grade, Minuten und Sekunden mufs der Bogen AB des wegzunehmenden Ausschnittes enthalten, damit der Kubikinhalt des Kegels EGF ein Gröfstes wird?

Aufl. Der Bogen AB oder der Winkiel ACB mufs 66° 3' 40'' enthalten.

5) In einen gegebenen Kreis das gröfste Rechteck zu verzeichnen *fig.* 47.

Aufl. Das gesuchte Rechteck ist ein Quadrat.

Für den stærksten Balken ist die Stærke dem Produkte $BC^2 . AB$ proportional.

Da wird $x=\frac{1}{3}a$ und $AB : BC = 1 : \sqrt{2}$ oder beynahe $= 2 : 3$.

§. 10. *Anwendung der Integralrechnung auf die Bestimmung des Flæcheninhaltes krummlinigter Figuren, auf die Rektifikation der krummen Linien, und auf die Berecknung der Oberflæchen und des Kubikinhaltes der Körper.*

I. Das wesentlichste davon ist auch bereits S. 43, §. 8, 9, und 10 gesagt worden; die *fig.* 49, kann allenfals noch zur Erlæuterung dinen.

II. Ueberhaupt ist diese Anwendung der Integralrechnung nichts anders als eine abgekürzte Summirung der Elemente, nichts anders als eine sehr leichte und geschwinde Methode aus dem allgemeinen oder lezten Gliede in der unendlichen Reihe der Elemente die Summe selbst zu finden. — z. B. fur *Tab. II. fig.* 88, wære der Flæchenraum $CMBA = R = S dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$ und das Resultat davon kommt mit jenem S. 127. §. 11. n° III. überein.

III. Ist *fig.* 49, AMD eine gleichseitige Hyperbel bei der jede Halbaxe $= a$ ist, so ist $R = \frac{1}{2}a^2 . La + \frac{1}{2} x \sqrt{(x^2 - a^2)} - \frac{1}{2}a^2 . l(x + \sqrt{(x^2 - a^2)})$.

IV. Bei den krummen Linien *fig.* 40, ist $APMA = R = S\left(\frac{dx(y^2 - c^2)}{2c}\right) + C$.

und $ABMA = R = S\frac{y^2 dx}{2c} + C$ und für die Grade von $AP = u$ ist

$$R = \frac{\pi y^2 du}{360\ c} + C,$$

V. Für die *Længe des Bogens* $AM = z$ *fig.* 49, ist $dz = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

$$= dx\ (1 + dy^2 . dx^{-2})^{\frac{1}{2}} \text{ oder } z = S dy\ (1 + dx^2 . dy^{-2})^{\frac{1}{2}} + C.$$

1) z. B. für die *Cycloide* ist $z = S dx\ (1 + 2ax^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2ax}$, für $x = 2a$ ist $z = 4a$ und $A'M' = 2A'Q$ *fig.* 39.

2) Für die Parabel wære AM *fig.* 49. oder $z = \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4} px)} + \frac{1}{8} p\ L(x + \frac{1}{8} p + \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4} px)} - \frac{1}{8} p L \frac{1}{8} p$.

für $x = \frac{1}{4}p$ wære $z = \frac{1}{4}p\ [\sqrt{2} + \text{log. nat.}\ (1 + \sqrt{2})]$.
wolte man ihn durch die Ordinate haben so wære

$$z = \frac{y}{p} . \sqrt{(y^2 + \frac{1}{4}p^2)} + \frac{1}{4}\ p\ L\left(\frac{y + \sqrt{(y^2 + \frac{1}{4}p^2)}}{\frac{1}{2}p}\right).$$

z. B. Es sey $y = \frac{p}{2}$ so ist $z = \frac{1}{4}p\ [\sqrt{2} + \text{log. nat.}\ (1 + \sqrt{2})]$ wie zuvor und $2z = \frac{1}{2}p\ [\sqrt{2} + \text{log. nat.}\ (1 + \sqrt{2})]$. Die gemeine Parabel læſst sich demnach mittelst der natürlichen Logarithmen rectificiren.

3) Für *fig.* 40 ist $z = S\frac{dx}{c} . (y^2 + c^2 dy^2 . dx^{-2})^{\frac{1}{2}} + C$.

4) Für die logistische Spirallinie ist $z = \frac{y}{c}\left(c^2 + \frac{4c^2\pi^2}{(Lb - Lc)^2}\right)^{\frac{1}{2}} + C$.

$$= \left(\frac{y}{c} - 1\right)\left(c^2 + \frac{4c^2\pi^2}{(Lb - Lc)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

für $y = 0$; ist $\left(c^2 + \frac{4c^2\pi^2}{(Lb - Lc)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ die wirkliche Længe der logist. Spirallinie vom Anfangspunkt bis in dem Mittelpunkt des Abscifsenkreises. — Und statt y seinen Werth gesetzt

ist

ist $z = \left[\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{x}{2c\pi}} - 1 \right] . \left(c^2 + \frac{4c^2\pi^2}{(Lb - Lc)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$.

VI. Für die *krumme Oberflæche* jener Körper ist $Q = S\, 2\pi y dy$

$(1 + dx^2 dy^{-2})^{\frac{1}{2}} + C$. *fig.* C 49. M. s. S. 44. §. 9. n° I.

1) Für die *Parabel* ist $Q = \frac{\pi}{6p} (p^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} p^2 \pi$.

2) *Es* ist auch $Q = S\, 2\pi y dx\, (1 + dy^2 . dx^{-2})^{\frac{1}{2}} + C$.

z. B. für den Elliptoides und die Abscifsen vom Mittelpunkt

ist $Q = S \frac{2be\pi dx}{a^2} . \left(\frac{a^4}{e^2} + - x^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C$ wenn man $a^2 - b^2 = e^2$ für $a > b$ oder $b^2 - a^2 = e^2$ für $b > a$ setzet. — Für *fig.* 10 und fig. 12.

Für $CP = x$ *fig.* 16, ist die Oberflæche von $MD =$

$\frac{a^2 b\pi}{e} .$ arc. sin $\frac{ex}{a} + \frac{bex\pi}{a^2} \left(\frac{a^4}{a^2} - x^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ und für $x = a$ ist die

Oberflæche von $AMB = \frac{a^2 b\pi}{e}$. arc. sin $\frac{e}{a} + b^2\pi$

Für $a = b$ ist die Kugelflæche $= 4b^2\pi$.

Und für $CP = x$ *fig.* 12. ist für die Oberflæche aus AN;

$$Q = \frac{be\pi x}{a^2} \left(\frac{a^4}{e^2} + x^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^2 b\pi}{e} . \ L \left[\frac{e}{a^2} \left(x + \sqrt{\frac{a^4}{e^2} + x^2} \right) \right]$$

für $x = CD = a$ ist die halbe Oberflæche $=$

$$\frac{a^2 b\pi}{e} . \ L \left(\frac{e}{a} + \sqrt{1 + \frac{e^2}{a^2}} \right) + b^2\pi.$$

Für $b = a$ wird wieder die Kugelflæche $= 4b^2\pi$.

Für die *Hyperboloide* s. m. S. 46 §. 19.

VII. Für den *Kubikinhalt* jener Körper. — Ist $K = S\pi y^2 dx + c$ *fig.* 49.

1) z. B für die *Paraboloide* ist $K = \frac{1}{2}\pi y^2 x$ der Helfte des ihr umgeschriebenen Cylinders:

2) Von der *Ellipsoide* ist bereits oben gesagt worden m. s. auch S. 44. §. 9. n° II. und III. Und für die Hyperboloide §. 18. Hier ist der Kubikinhalt von *AB* oder *PM* aus *fig.* 21. længst *AG* angeblich.

3) Ist $AB = c$ und *APM* drehet sich um *BG* so wird die cylindrische Röhre $dK = 2\pi y\, (c + x)\, dx$, und folglich $K = S\, 2\pi y\, (c + x)\, dx + C$. Ist *AQ* die Umdrehungsaxe so wird $C = 0$.

4) Für eine *Afterpyramide fig.* 50. deren Höhe $QP = a$, die Grundflæche $= b$; $QR = x$; und die Durchschnittsflæche $EF = l$ ist

$$K = \left(\frac{2bxdx}{a} - \frac{bx^2dx}{a^2}\right) = \frac{bx^2}{a} - \frac{bx^3}{3a^2}$$ für $x=a$ ist $K=\frac{2}{3}ab$

wie *Tab.* I. *fig.* 119.— Desgleichen wenn die Seitenlinien Parabeln, Ellipsen oder andere bekannte Linien wæren.

§. 11. *Von der umgekehrten Methode der Tangenten* m. s. S. 47. §. 23...

Man sucht eine Gleichung für eine krumme Linie von der Beschaffenheit, dafs der Krümmungshalbmefser der *n* fachen Normale gleich sey.

Aufl. Vermöge der Aufgabe ist $\frac{(1+dy^2.dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{-ddy.\ dx^{-2}} = ny(1+dy^2.dx^{-2})^{\frac{1}{2}}$

Nach gehöriger Verwandlung und Integriren findet man dafs die Gleichung jene eines Kreises wovon der Halbmefser $=c$ ist.

§. 12. *Von einigen Anwendungen der Kegelschnitte.*

Von den Kegelschnitten werden wir in den *Mechanischen* und *Aftronomifchen* Wifsenschafften einen hæufigen Gebrauch machen; hier begnügen wir uns ihren Nutzen in einigen Beyspielen zu zeigen.

I. Ist der *Minentrichter* eine Paraboloïde *fig.* 51. bei der die *kürzesten Widerstandslinie* $FA=a$, so ist der Kubikinhalt des Minentrichters $=\frac{1}{4}\pi\ (1+\sqrt{2})a^3 = 1{,}896\ a^3$.
z. B. für $a=20$ Schuhen ift $K=15168$ Kubikschuhen.

II Wie die Parabel allein oder mit der Ellipse vereinigt zur Erklærung des freyen Falles schwerer Körper, der acoustischen Instrumente, des Widerschalls, der vortheilhaften Einrichtung der Kamine, wobei allem mehrere Feuer oder Licht oder Stimmstrahlen mit der Axe parallel einfallend dienen, erlæutern die *Figuren* 52, 53, 54, 55, 56, 57, und 58.

Ein geschickter polnischer Baumeister Hr. *Aigner* entwarf auch einen Ziegelbrennofen mit einem parobolischen Gewölb *fig* 59. Die Erfahrung hat die Güte dieser Einrichtung in Rücksicht der Holzersparung und des Ziegelbrennens bestætigt: und sein polnischer Aufsatz wurde ins rufsiche und ins deutsche *Riga* und *Mietau* 1796 übersezt. M. s. ein mehreres davon in Hr. *Büsch* Uebersicht der Fortschritte in den Wifsenschaften Künsten u. s. w. 2. B. Erfurt 1798. S. 548.

III. Es war manl in Frankreich vom B. *Monge* ein Vorschlag gemacht einen Saal für die gesetzgebende Versammlung mit einem Gewölbe in Gestalt einer Ellipsoide zu bauen. Man siehe davon das Detail im *Journal polytechnique* 2 *Cahier S.* 145.

Sind die drey Halbaxen *a*, *b*, *c*, *fig.* 60, dafs also die Ellipsen aus *a* und *c*; und aus *b* und *c* die Linien der Krümmung der Ellipsoide bilden, und den drey senkrechten Ordinaten *x*,*y*,*z*, entsprechen; so findet H. M. aus der Gleichung für die Oberflæche der

der

Ellipsoide $b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2$ und aus den Gleichungen für die gemeinschaftliche Halbaxen

der *Hulfsellipse* $\frac{a\sqrt{(a^2-b^2)}}{\sqrt{(a^2-c^2)}}$ und der Hulfshyperbel $\frac{b\sqrt{(a^2-b^2)}}{\sqrt{(b^2-c^2)}}$, dafs

die *proicirten* Punkte aus der Krümmung in der Længe, Ellipsen und jene aus der Krümmung in der Breite Hyperbeln auf der horizontalen Ellipse bilden *fig.* 61. Um also diese proicirte Punkte verzeichnen zu können bedient er sich der *Hülfshyperbel* Of und der *Hülfsellipse* OG deren die Anfasgspunkte O und G leicht zu bestimmen sind. Denn sind FF die Brennpunkte der grofsen horizontalen Ellipse, f, f, jene der mittleren verticalen und f', f', jene der kleinern so næhme man $KF'=KF$: $Kf''=Kf$; ziehe Bf' und mit dieser die Parallele $F'O$.— Für G næhme man $Kf''=Kf'$ zieche $f'''D$ und mit ihr die Paralle $F'G$.

Die proicirten Punkte auf der verticalen Ellipse aus *a* und *c* bilden laute Ellipsen zu deren Verzeichnung nur eine Hülfsellipse gehöret.

IV. Noch eine schöne Anwendung der Kegelschnitte können wir in der Zeichenkunst machen und dieses um desto williger da diese schöne Kunst durch Einschrænkung defsen was sie noch willkührliches und unbestimmtes hat, und durch philosophische Untersuchungen zu einer eben so angenehmen als nützlichen und interefsanten Wifsenschaft sich bildet. Um auf einer flachen Ebene einen Körper oder die Lagen von verschiedenen Ebenen auszudrücken, stellet man sie so vor als wæren ihre Grænzpunkte und Linien auf derselben proicirt.— Wie dieses bewerkstelliget wird werden wir es in der Perspektiv sehen — Zur gænzlichen Tæuschung aber gehöret noch dafs sogenannte *Lauiren* mit der chinesischen Tusche das nebstdem bei den architektonischen und mechanischen Rifsen so viel reizendes bewirket. Nur müfsen hier Regeln beobachtet werden die auf wahren Grundsætzen beruhen — Wir bedienen uns hiezu eines Beyspiels aus dem Journal polytechnique 1, Cahier pag. 167. *fig.* 62. u. 63.

Um dieses *Probleme des teintes* aufzulösen bedienten sich mehrere Zöglinge der obengedachten Schule

1° der Formel $F=\frac{p^2+a^2 q^2}{1+p^2+q^2}$ um die Intensitæt des Lichts in einem willkührlichen Punkt auf der beleichteten Oberflæche auszudrücken: in der Voraussetzung das der leichtende Punkt und das Auge unendlich entfernt sind, dafs *ds* ein beleichteter Punkt ist, dafs seine senkrechte Ordinaten x, y, z; x', y', z', jene des Auges und x'' y'', z'' jene des leichtenden Punktes sind:

dafs $p=\frac{dz}{dy}$, $q=\frac{dz}{dx}$, $y''=ax''$ und endlich dafs der Plan

durch

durch x, y durch den Sehestrahl und Lichtsrahl gehen, und die Axe von x den Winkel den diese zwey Strahlen bilden in zwey gleiche Theile theilet. Für die næmliche Vorausetzungen wære für die Flæche von gleicher Tinte $K = \frac{p^2 - a^2 q^2}{1 + p^2 + q^2}$.

2) Næhmen wir nun für die Gleichung der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ behalten alle die Voraussetzungen die wir für die letzte Gleichung $K = \frac{p^2 - a^2 p^2}{1 + p^2 + q^2}$ gemacht haben, und setzen in dieser letzen Gleichung statt *p* und *q* ihre Werthe aus der ersten Gleichung so wird $\frac{x^2 - a^2 y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = K$ und diese Gleichung mit jener für die Kugel in Verbindung gesezt giebt die drey Gleichungen $x^2 - a^2 y^2 = K$; $(1 + a^2) y^2 + z^2 = 1 - K$ und $(1 + a^2) x^2 + a^2 z^2 = a^2 - K$: die erste næmlich der Hyperbel und die zwey letzten der Ellipse um darnach die Projektion der Krummen von gleicher Tinte auf der Kugel zu bestimmen.— Wir wæhlen dazu die zweyte und bemerken dafs man die Krummen als Durchschnitte der Kugelflæche mit Cylindern ausehen kann, die diese Ellipsen zu Grundflæche haben und deren die Axe aus *x* ist.

Setzt man *r* für den Halbmefser des kreisförmigen Schnitts so wird $r^2 = 1 - K$ eine Gleichung mittelst welcher man die entsprechenden Werthe vom r bey ieder Voraussetzung der Werthe für *K* wird zeichnen können.— Die Grænzen die wir uns vorgeschrieben haben lafsen es aber nicht zu uns hier længer aufzuhalten.— Wir begnügen uns also nur zu erinnern dafs *fig.* 63, den horizontalen Durchschnitt für die Projektion, L den leichtenden Punkt, l' c V den Winkel zwischen den Sehestral und Lichtstrahl vorstellen, und dafs die Punkte *X*, *Y* aus *x*, y der Hyperbel und diese aus *p*, *r*, welche aus jenen des kreisförnigen Durchschnitts gebildet werden.

V. Um wahre Ellipsen ohne Berechnung der Brennpunkte sehr leicht beschreibzn zu können dient der Ellipsograf *fig.* 64, wovon eine Beschreibnug nebst etwas Neues fur den Brucken nnd Gewölben Bau und den Steinschnitt von dem Verfafser der zweckmæfsigen Luftreiniger mit 2 Kupf Gotha 1794, erschienen ist–

1) Es ist hiebey das *grofse Linial EF; die Stellschrauben in E* und *F*; *C der Zapfen des Mittelpunkts*, der *Rollzafen* in B; der *Leitzapfen* in *A*, der *Bleystift* in *P*, das *Central Lineal CD*; *das Stiftlineal BG*.

2) Gebrauch des Ellipsografs.— Um wahre Ellipsen zu zeichnen mufs immer $AB = BC$ sein.— Ist die halbe grofse Axe *a* die halbe kleine

Axe

Axe b und die Længe des Centrallineals R so muſz $R=\frac{a+b}{2}$ und $AP=b$ sein.

z. B. für $a=9$ Schuh, $b=5$ S. ist GB$=7$ und $AP=5$.

3) Die Zeichnung der irregulæren Ellipsen geschiehet indem man $AP>AB$, $AB>BC$ oder endlich $AB<BC$ nimmt *fig.* 65, 66, 67.

Ist im 2ten Fall das Stiftlineal $AB=p$ so ist $AP=x=\frac{bp}{a}$

z. B. für das obige Beyspiel und $b=12$ ist $x=6\frac{2}{3}$ Schuh.

4) Gebrauch der irregulæren Ellipsen oder der eigentlichen Ovale zu Brücken und Gewölbenbau *fig.* 68, 69, 70.

Wie wichtig die Einführung solcher Bögen sey, bei Gewölben von allen Arten die ungleiche Lasten zu tragen haben, zeigt der Verfaſser, für diejenigen die mit der bloſsen Theorie nicht zufrieden sind, ein praktisches Beyspiel das sich in Karlsruhe zugetragen hat.

5) Die Einrichtung der zweyten Gattung des Ellipsografs ersieht man aus der *fig* 71. $CD=CE$ ist von 12 bis 20 Schuh. — Die Dicke dieser Seiten ist 2 Zoll und die Breite 3 Zoll. — AB das bewegliche Lineal, A der erste Leitzapfen; B der bewegliche Leitzapfen. — P der Bleystift. Zum Gebrauch næhme man $AP=b$ und $PB=a$; man kann also die Eintheilungen auf AB ersparen.

Die *fig.* 72 dienet zur Erklærung seiner Theorie. Es sey næmlich $AH=x$; $CH=y$, $EC=a$; $CD=b$ so ist $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$. und diese Auflösung gilt auch für den Ellipsograf der ersten Gattung.

VI. Anwendung der Teorie des Krümmungshalbmeſsers für den Brücken und Gewölben Bau und für den Steinschnitt.

1) Wie die Længen der Krummungshalbmeſser die Krümmungen und die Gestallt des Steinschnitts bilden können, ersiehet man aus *fig.* 73. und 74, man kann sich also auch hier mit Vortheil des Grundsatzes bedienen, daſs næmlich die Tangente jeder Krummen Linie auf den Radius ihrer Krümmung ſenkrecht ist. — Ist die Verhæltniſs der Axen $m:n$ die gröſsere Halbaxe a; die kleinere b und die obere Dicke des gewölbes x so ist $x=\frac{na-mb}{m-n}$; z. B. für $a=18'$; $b=9'$ und $m:n=11:6$, ist $x=1\frac{4}{5}$ Schuh.

2) Methode die Ellipsen mit sammt ihren Radiis zu beschreiben wenn ihre Gröſse jene der gewöhnlichen Ellipsographen übersteigt *fig.* 75. z. B. ist hier $a=60$ Schuh und $b=24$ Schuh.

Für die Axen der Evolute FC ist hier $AF=\frac{bb}{2a}$ daraus $FD=y=a-\frac{bb}{2a}$ und $CD=x=\frac{aa}{b}-b$. z. B. für $AD=60$ Schuh und $Da'=24$ Schuh, ist $x=126$, Sch. und $y=56\frac{1}{30}$ S.

W.

Zeichnung der Viertel Ellipse auf dem Reifsbrette, und Bestimmung ihrer Ordinate ec, ec... nach dem Maafsstab.— Umfang des Rechtecks $FDCE$, und des Bogens FcC aus schmalen horizontalen Brettern.— Bestimmung darauf der Punkte $c\ c\ c$... mit einer schwarzen Zimmermannsschnur.

Etwa 125, starke Drathnægel in $c\ c\ c$... Endlich beschreibe man aus C mittelst eines eisernen Draths Ca' und eines Bleystifts in a' aus C die Ellipse $a\ a\ a\ A$.— Desgleichen $b\ b\ b$ B, wobei man auch den Steinschnitt $a\ b$, $a\ b$. bestimmen kann.

VII. Vom *Pantograf.*

Endlich bleibt uns von den æhnlichen krummen Linien und ihrer mechanischen Zeichnung als eine Ergænzung zum Kopieren der Figuren S. 120. §. 10. n° II. zu reden übrig.

1) Geradelinigte Figuren sind æhnlich deren die Winkel gleich und die entsprechende Seiten proportionirt sind. Aus *fig.* 77. ersiehet man die Einrichtung eines *Pantographs* oder eines *Storchschnabels* um damit æhnliche Figuren zeichnen zu können.— Es mufs hier $BH : BA = HE : AC = AJ : AC = BE : BC$ seyn; folglich $BH = HE = AJ$. die Eintheilungen auf den vier gleichen Linialen gleich seyn: das Verhæltnifs $AJ : AC$ in dem gegebenen Verhæftifse $m : n$, die Stifte in H und J gesteckt und B unverrückt auf dem Tische stehen; damit der Bleystift in E nach dem in C længst Cc geführten Stift eine Figur BEe die der BCc æhnlich sey und sich zu ihr verhælt $m^2 : n^2$, beschreibe.

2) Verændert man in der Gleichung für eine Krumme ihren Parameter so ændert sich die Krumme nur in Ansehung ihrer Gröfse. z. B. alle Kreise sind æhnlich weil ihre Gleichung $y^2 = 2ax - xx$

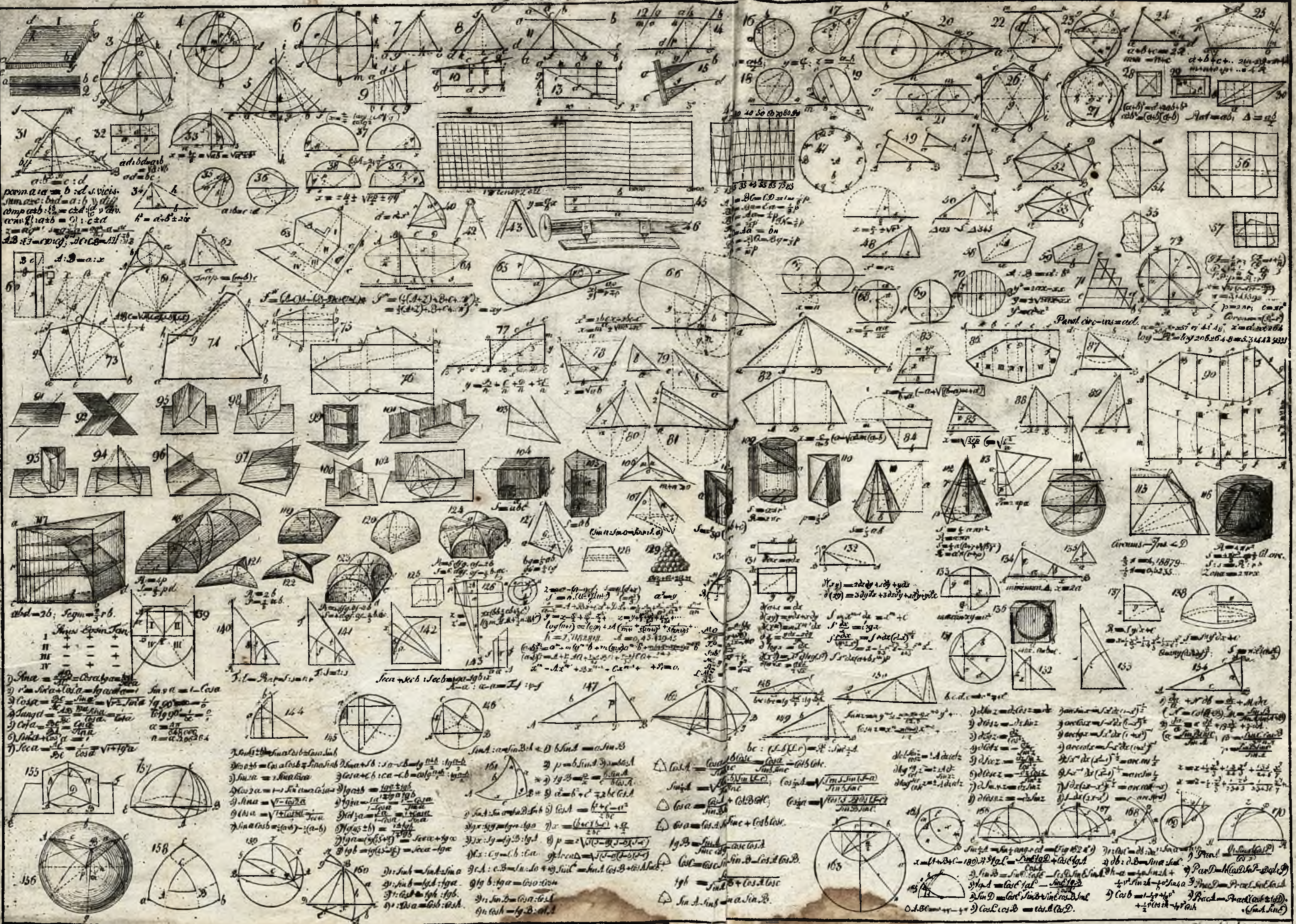
In $y^3 - 1x^3 + ay^2 X + 2a^2 y = o$ für fig. 77, u. 78, wobei AB, CD beständige Gröfsen sind, so dafs $AB = a$ und $CD = \frac{a}{n}$; wird $CL = \frac{x}{n}$ und $LN = \frac{y}{n}$ dafs also $AP : CL = AB : CD = PM : LN = MO : NQ$ und daraus bestimmt sich die Methode æhnliche krumme Linien, aufser jener mechanischen noch mittelst der proportionirten Ordinaten oder Axen, zu zeichnen.

* * * *

Die Beschreibung der beygefügten Kupfertafeln ist weitlæüftiger ausgefallen als ich mir anfænglich vornæhmen konnte. Eine sinnliche Darstellung der mathematischen Wahrheiten und einen kurzen Leitfaden beim Unterricht zu liefern war immer die Hauptabsicht bei der gegenwærtigen Bearbeitung. Indem ich aber den zweyten Kurs verrichtete müfsten manche Ergænzungen wæhrend dem Drucken dieser Blætter statt finden. Ich habe mich vorzüglich bei dieser letzten Arbeit, die Theorie mit der Praktik in eine genauere Verwandschaft zu bringen, bemüht. Freylich kann sich der wahre Nutzen dieser Schrift erst bei einer mündlichen Erklærung jedes Resultats zeigen, da sich dann der Lehrer mit Vortheil des Grundsatzes vom *Plinius* "Authorem non efse longum si materiæ immoratur„ mit Vortheil bedienen kann... Der Beyfall der Kenner wird die Fortsetzung des gegenwærtigen Versuches bestimmen.

Geometria elementaris.

Tab I.



DARSTELLUNG DER THEILE DER MATHEMATIK

die wehrend dem zweiten Jahrgange des Kurses in der Krakauer Universitæt öffentlich und in den privat Stunden im Jahr 1800 vorgetragen waren.

Ein Gelehter kann den Wiſsenſchafften durch weitere Bekanntmachung und Zusammenſtellung der bereits gefundenen Wahrheiten oft weit mehr Vortheil gewæhren als durch Erweiterung ihrer Grænzen ... Die Wiſsenſchaften müſsen demnach in der Landessprache vorgetragen, und syſtematisch dargeſtellt werden.

Stevin
Leiden 1634.

MECHANIK.

EINLEITUNG.

1. *Erklærung.* Von dem physischen Körper ... Seine Eigenſchafften...
   (Ursprung der menschlichen Kenntniſse. .. der mathematiſchen Wiſsenſchaften.)
2. Die Begriffe der Undurchdringlichkeit und der Bewegung sind der Mechanik eigen... Das Maas der Bewegung læſst sich aus der Erscheinung die sie begleitet herleiten...

   $V = \frac{E}{T}$ Verhæltniſs Zahl...

   Gleichförmige. .. ungleichförmige Bewegung. .. Gröſse der Bewegung...
3. *Kraft...* (Umſtændliche Erklærung davon)... Ihr Maaſs... (*Druck... Gewicht... Stoſs*)... Eigenthümliche oder *specifiſche Schwere... Dichtigkeit ... Maſse...*, Bewegende Kræfte... Ihr Maaſs... *Die anziehende Kraft.*
   (Erlæuterung dieses ihres Geſetzes)... Grundſætze... Urſachen und ihre Wirkungen. .. oder eigentlicher. ..
4. Die ganze theorische Mechanik gründet sich.

   1. auf den zwey Gleichungen $v = \frac{de}{dt}$ & $p = \frac{dv}{dt}$
   2. auf den drey Grundſætzen der *Trægheit*, des *Gleichgewichts* und dem *Kræftenparallelogram.*

   Die praktiſche Mechanik iſt eine Anwendung der theoretiſchen auf Machinen die man im *Hebel* und der *ſchiefen Ebene* betrachtet...
5. Andere Eintheilungen der Mechanik... Diejenige die wir befolgen werden.

DIE STATIK.

I. HAUPTSTUCK. *Von dem Kræftenparallelogram.*

1. *Die zusammengetzte* von drey . . . von mehreren *wirkenden Kræften* .'. und umgekehrt für die Zerligung... wenn die Kræfte gleichlaufend . . . in einer Ebene . . . auf verschiedenen Ebenen sich befinden... Art dieselbe... auf drey senkrechte und durch ein punkt gehende Axen zu bringen... Grafische Methoden und Auflösungen durch die gradlinichte und sphærische Trigonometrie...
2. Die erste algemeine Eigenschaft des Gleichgewichts in Rücksicht der fortschreitenden Bewegung. . . .
3. Von den *Momenten*... *Statische* nnd *mechanische* Momente. .. Gleichung für das Gleichgewicht zwischen den Produkten von drey Kræften... besondere Fælle . . . Moment der bewegenden Kraft...
4. Zweite Eigenschaft des Gleichgewichts... Anwendung der Theorie der Momente zum Gleichgewicht der Umdrehung.

II. HAUPTSTUCK. *Von dem Mittelpunkte der Schwere.*

Erklærung davon... Integraler Ausdruck um den Mittelpunkt der Schwere von mehreren Elementen zu finden. .. Anwendung dieser Formel um den Mittelpunkt der Schwere von verschiedenen Linien, Flæchen und Körpern zu finden... Mehrere Beispiele... Eigenschaft der Mittelpunkte der Schwere für das Maafs der Flæchen und der Körper (V. Dyn. IV. Haupt.)

III. HAUPTSTUCK. *Vom Gleichgewicht der einfachen und einiger zusammen gesetzten Maschinen.*

1. *Von der Seilen Machine.* Was hier die Wirkung und die Richtung der bewegenden Kraft vorstellt. Anwendung der Rechnung zur Bestimmung des Gleichgewichts eines Sistems von Seilen.... Ausdruck für besondere Fælle... graphische Methoden.. Von dem Seilen Fieleck... (Formel für die Kettenlinie.) . . .
2. *Vom Hebel.*

   Sein Ursprung...Theile. . . Seine Theorie ist jene vom Kræftenparallelogramm nur unter einem gewifsen Gesichtspunkt vorgestellt... Haupteigenschaft eines Hebels... Sein Nutzen in der Machinenlehre...

   Allgemeine Untersuchungen über das Gleichgewicht des Hebels. . . Die drey Arten der Hebel. . . Gekrümmter Hebel. . . Bedingungen des Gleichgewichts beim schweren Hebel unter verschiedenen Voraussetzungen. .. Formeln für den Schwerpunt und Unterlage....

   Anwendungen... Gebrauch der Hebel... Verschiedene Wagen... Ihre Güte... Kurbel... Krumzapfen. Allgemeine Bemerkung wegen Kraft und Geschwindigkeit.
3. *Von den Rollen und Flaschenzügen.*

   Feste und *bewegliche* Rollen... Flaschenzüge... Bedingnifse des Gleichgewichts bey festen und beweglichen Rollen...und bey den verschiedenen Zusammenstellungen einer gewifsen Anzahl von festen und beweglichen Rollen... Vorzüge dabey... Bedingnifse des Gleichgewichts bey den Flaschenzügen ins besondere... gleichlaufende Seilen...
4. *Von dem Rade an der Achse... Haspel, Winde und Ræderwerk.*

   a) Beschreibung und Gebrauch des Wellrads..: Defsen Theorie in Ansehung der Bedingnifse des Gleichgewichts. Richtung und Gröfse der Last eines jeden Unterstuzungs punktes, bei jeder Richtung und Gröfse der bewegenden Kræfte und der Hindernifse bei einem Wellrad... Eigenschaften die sich aus dieser Theorie herleiten lafsen... Allgemeine formel... Sechs Arten von Haspeln... &c.

b)

b) Von des *Rosskünsten*, Lauf und Tretrad, Tretscheibe nnd den Pferdegöpeln... Fortsetzung folgt. Dynam. IX. Haupt.

c) Die ganz neue Theorie der Schwungræder von Hr. *Langsdorf* bearbeitet... formeln dazu (Dyn. VIII. Haupt. Nro 4.)

d) Von den *Ræderwerken*.. Kamm und Stirnrad... Drilling... Verschiedenes Eingreifen...

Bedingnisse des Gleichgewichts... Verhætnisse zwischen den Umdrehungszahlen der Ræder die vermittelst der Getriebe in einander eingreifen... desgleichen zwischen der Umdrehungszahl des ersten Getriebes und jener des letzten Rades... und umgekehrt um die Anzahl der Ræder zu finden. *Anwendung* Beschreibung und theorie der Hebewinde... Aus den gegebenen Umlaufszeiten bei dem Ræderwerke die Anordnung desselben zu berechnen... Beschreibung einer astronomischer Pendeluhr, und des dabey angebrachten grahamischen Ankers.

5. *Von der schiefen Ebene.*

Erklærung der schiefen Ebene... Bestimmung der Bedingnisse des Gleichgawichts eines auf einer schiefen Ebene gelegten Körpers, bei einer jeden Richtung, Grösse und Anzahl der bewegenden Kræste die auf ihm wirken,.. Besondere Fælle ... Werth des ganzen Druckes auf der schiefen Ebene... Einige Anwendungen ... (Fortsetzung Dyn. III. Haupt. Nro 3.)

6. *Von der Schraube.*

Die Schraube... die Schraubenmutter... Schraubengewinde oder Gænge... ihre Höhe... Scharfe und flache Gænge... Verhættniss der kraft zur Last bei der Schraube... Durch die Schraube einen kleinen Raum zu messen, ..Die Schraube ohne Ende; und dabey Bedingnisse des Gleichgewichts... Anwendungen ...

7. *Von dem Keile.*

Vom Keile,.. seinen Vorzügen und Nutzen... Gebrauch bey den Künsten und Handwerken... und Gegenstænde in der Natur die sich auf diese Maschine beziehen... Bedingnisse des Gleichgewichts beim Keile und Schwierigkeiten der Theorie welche von unserer Unwissenheit der Eigenschaften der Körper horrühren... Anwendungen....

Beyspiele der Verbindungen einfacher Maschinen, um darans zusammengesetzte zu bilden...

(Die Fortsetzung davon am Ende.)

IV. HAUPTSTUCK. *Von den Hindernissen welche der Bewegung der Maschinen entgegenwirken.*

1. *Von der Reibung.*

Schwierigkeit ihrer Theorie... Gleitende und wælzende Reibung... Zwey Arten diese Reibung zu bestimmen... (Müschenbröcks Tribometer)... Mittel zur Verminderung der Reibung... Reibungs coefficient... Tafel der Reibungs coefficienten aus des Hr *Coulomb* Beobachtungen entlehnt... Reibung einer Seile die sich um eine Walze umwikelt... Bedingnisse des Gleichgewichts bei enfachen Maschinen mit Rücksicht auf die Reibung... Nutzen der Reibung...

2. *Von der Unbiegsamkeit der Seile.*

Verhæltnisse die diese Unbiegsamkeit bestimmen... wie solche durch Versuche zu bestimmen... Coefficient der Unbiegsamkeit... Art diese Unbiegsamkeit bey den Maschinen zu berechnen. .Noch andere Hindernisse und Mittel sie zu vermindern... *Anwendung* dieser Grundsætze bey einem Kranich um sehr schwere Lasten zu heben,.. und zu Berechnungen bey Haspeln... Reibung zwischen den Zæhnen und Triebstöcken... zwischen Daumen an einer Welle und Zapfen an einem Stempel. u. d. g.

V. HAUPTSTUCK *Über Festigkeit der bei Maschinen vorkommenden Materialien und über Maas und Gewicht der Massen.*

Erklærung der *Festigkeit*. . . der absoluten nnd relativen . . . Bedingnise des Gleichgewichts bei jeder derselben . . . Aufgaben für die Kraft des Holzes und der Balken ins besondere. . . Beobabchtungen von *Müschenbröck*. . . *Belidor* und *Buffon* . . .
Tafel fur die specifische Festigkeit mehrerer Körper. . . Formel und Tafel für sp. Fest. der ungetheerten Seilen. . .
Formel und Tafeln für das Maas und Gewicht der in der Maschinenlehre vorkommenden Massen.
Andere Art fur die eigenthümliche Schwere unten. (Hydrost. IV Hauptst.)

Anhang zum ersten Hauptstück Noch einige Anwendungen des Hebels,

1. Thæorie der Zogbrücke.
2. Theorie der Gewölbe und ihre Anwendung bei dem Bau der Kupel der Kirche H. Genewefa zu Paris. . . Ergænzung der Theorie des Ellipsografs (vom vergangenen Jahr) nebst Anwendung.
3. Untersuchung einer Formel zur Bestimmung der grösten Oeffnungen der Bögen und der kleinsten Længe der Schlufssteine, mit Rücksicht auf die Hærte der Steine die man dabei gebraucht. . . Bemerkungen über diese Formel und die Dreistigkeit der Ausmefsungen die daraus enstehen.

DIE DYNAMIK.

Einleitung. Die Anflösung der Aufgaben über die Bewegung steht mit jener des Gleichgewichts in Verbindung. . . Die Dinamik ist eine Wissenschaft der neuern Zeiten. . . Eintheilung der Dynamik. . .
Aigemeiner d'Alembertscher Grundsatz. . . Man findet in diesem Grundsatz und jenem der virtuellen Geschwindigkeiten die Bestætigung defsen was wir oben erwæhnt haben; dafs næmlich die *Trægheit* das *Gleichgewicht* und das *Kræftenparallelogram*, die Grundlagen der Auflösung der Fragen aus der Statik und Dinamik seyen. . .

VON DER BEWEGUNG AN SICH SELBST.

I. HAUPSTUCK. *Allgemeine Grundsætze der Bewegung.*

Erklærungen der Bewegung . . . der *absoluten* . . . der *relativen* . . . der *geradelinichten*. . . . und der *krummlinichten* . . . Die Ruhe . . . *absolute* und *relative* . . . Der zurückgelegte Weg bei der Bewegung. . . Die *Zeit* und ihre Abtheilungen . . . Bestimmung der *Zeitsecunde* . . . *Geschwindigkeit* . . . *Gleichförmige* und *værenderliche* Bewegnng. . . *Bewegende Kræfte*. . . Verzeichnifs einiger der bekanntesten. . . Jhr Maas (Druck . . . Gewicht). . . *Richtung* derer Kræfte . . . *Unverænderliche* oder absolute und relative Kræfte. . . Die Abtheilung der bewegenden Kræfte in *lebendige* und *todte* ist überflüfsig. . . *Trægheit* der Körper . . . Es giebt keine Trægheits kraft. . . Erinnerung wegen dem *Leibnitzischen* und *Cartesischen* Kræften Maas. . .

II. HAUPTSTUCK. *Die gleichförmige Bewegung und ihre Zusammensetzung und Zerlegung.*

Füof Dinge sind hier zu erwegen. . . Sætze und Formeln bey der Vergleichung der

gleich

gleichf. Bewegungen. . . Ihre Zusammensetzung und Zerlegung. (S. den Kræften parall. Statik. 1. Haupt.) . . .
Desgleichen für die Geschwindigkeiten. . . Scale dieser Bewegung. . . *Anwendung.*

III. HAUPTSTUCK. *Die gleichförmig beſchleünigte und verzögerte Bewegung, nebſt Anwendung.*

1. Erklærung dieſer Bewegungen. . . (durch ein Versuch) Die zwey Fundamentalgleichungen für die gleichförmig beschleunigte Bewegung (2. Methoden). . . Daraus folgen zwölf Formeln womit alle Eigenſchaften der gleichf. beſchle. Bewegung. . . (alwo aber die Gröſse der bewegenden Kraft und des bewegten Körpers noch nicht in die Rechnung gezogen iſt.) abgebildet sind.
2. Anwendung der gleichförmig beschleu. Bewegung auf den freyen Fall der Körper. . . Die *gleichförmig verzögerte* Bewegung. . . was die *Geswindigkeits Höhe* sey? . . . Eigenſchaften der Begegung wenn unverænderliche Kræfte von gegebener Gröſse auf gegebene Körper wirken die sich frey bewegen können . . . Drey Anwendungen dieser Theorie. . . *Scalen* oder *Maaſstæbe* dieser Bewegung.
3. *Anwendung* der vorigen Grundſætze auf die Bewegung ſchwerer Körper auf einer schiefen Ebene . . . in einigen krummen Linien. . . Zwey Fundamentalgleichungen. . . Daraus werden die übrigen Eigenschaften der freyen Bewegung eines ſchweren Körpers auf der ſchiefen Flæche abgeleitet. . . (Beschleunigung der Schwere) . . Eine algemeine Eigenschaft des Falles eines schweren Körpers in einer ieden Krummen Linie von ununterbrochener Krümmung . . .
Die Zeit des Falles in der Cycloide. . . Die Fortsetzung folgt VII. Haupts Sq.

IV HAUPTSTUCK. *Die verænderliche Bewegung.*

Die Eigenschaften der geradlinichten Bewegung wenn verænderliche Kræfte auf gegebene Körper wirken, werden durch vier Differenzialgleichungen vollſtændig abgebildet. . . *Anwendung* der verænderlichen Bewegung. . . z. B auf den freyen Fall der Körper bey verænderlicher Schwere in verschiedenen Erhöhungen. . . auf die Zusammenpreſsung einer *elaſtischen Feder* . . . Gesetz der Stetigkeit. . . (Das Boscowichische Syſtem von der Elementarkraft der Materie) . . . Anwendung auf das Eindringen der Kanonenkugeln in ein gleichförmig dichtes Erdreich. . . auf den Stoſs der Körper unten VI. Haupts. . . Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeit bei dieser Bewegung. . . Ihre Scalen. . .

V. HAUPTSTUCK. *Von der Bewegung des Schwerpunktes.*

1. Algemeine Eigenschafften der Bewegung dieſer Punkte. . . von zwey Körpern *æhnlich* beschriebene Linien. . . Theorie dieser Bewegung . . . *Zusammengesetzte* der gleichlaufenden Kræfte. . . Fall wo sie nicht durch den Schwerpunkt gehet. . . Folgen. . . *Anwendung* beim Ausfüllen der Graben und umgekehrt.
2. *Anwendung* per Bewegung des Schwerpunktes auf das Maas der Ausdehnung. . . (Guldins Regel) Mehrere Beyspiele. . .

VON DER MITTHEILUNG DER BEWEGUNG.

VI. HAUPTSTTCK. *Von dem Stoſse der Körper.*

1. *Harte elaſtische* und *weiche* Körper. . . Gesetze des *geraden* Stoſses *harter* Körper. . . jene der *elaſtischen* Körper . . . Formel für die Kraft des *geraden* Stoſses . . . *Anwendung* dieser Formel für einen Stæmpfer der beſtimmt iſt einen gewiſsen Stoff zu zermalmen . . . auf eine Maschine um Pfæhle einzuschlagen. . . Münze und Meda-

illen.

illen zu pregen... auf den Stoſs eines Hammers... Unterschied der Wirkung des Stoſses und des Drucks...

2. Sætze zur Beſtimmung des *ungeraden* Stoſses der harten und elaſtischen Körper... Von der Bewegung eines freyen Körpers der in einer Richtung die nicht durch sein Schwerpunkt geht getrieben wird... Sætze die sich darauf beziehen... *Anwendung* auf das Billardspiel.

VII. HAUPTSTUCK. *Von der Bewegung der einfachen und zuſammen geſetzten Pendel und den Mittelpunkt des Stoſses.*

1. *Erklærung* des *einfachen* Pendels... des *zuſammengeſetzten*... Eigenſchaften der Schwingungsbewegung eines einfachen Pendels... Dauerzeit eines Pendelschlages in einem sehr kleinen (unendlich kleinen) Kreisbogen... in einem Schwingungsbogen von gegebener Gröſse... Daraus werden verschiedene wichtige Folgen abgeleitet, als z. B. aus der Længe des einfachen Sekundenpendels die Beschleinigung der Schwere zu finden, und umgekehrt u.d.g. Der Gebrauch der Cycloide bei dem Uhrperpendikel iſt unrichtig.

2. Erklærung und Beſtimmung des *Schwingungspunkts* oder des Stoſses... Fall wo sie einerlei sind... *Moment der Trægheit* oder Drehungsmoment... Integral Formel... Formel für verschiedene Elemente die mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegt sind... Berechnung der Momente der Trægheit für die wichtigſten Fælle der Ausübung. *Anwendung* dieser Theorie um den Schwingungspunkt einer gleichartigen Stange und verschiedener Flæchen und Körper zu finden... Besondere Fælle... (ſtatt der Entfernung von der Axe)... (auf einen gewiſsen Punkt reducirte Maſse.);

3. *Schwingung* der elaſtichen Körper... z. b. der Seiten... metallener Plætchen... Formel dazu... Fortsetzung VIII. Haupt. Nro 4.
Ton der dadurch hervorgebracht wird... (S. Hydraul. III. Haupt. Nro 2.)
Moment der Trægheit für *flüſsige Maſsen*... mehr davon (Hydr. VIII. Haupt. Nro 3.)

VIII. HAUPTSTUCK *Theorie der krummlinichten Bewegung.*

1. Allgemeine Grundsætze dieser Bewegung... (Dyn. IV. Haupt. Nro 3.) Bemerkungen über die Rechnung der verænderlichen Bewegungen in den krummen Linien... Differentiale Formeln...

2. *Die freye Bewegung geworfener schwerer Körper.*.. Die Fundamentalgleichung für die Bahn des geworfenen Körpers wird aus der vorhergehenden Lehre vom Kræftenparallelogram abgeleitet... daraus werden die übrigen Eigenschaften abgeleitet... und verschiedene Aufgaben aufgelöſet... Vergleichung dieser Theorie mit der Erfahrung... Ursachen der Abirrungen... Die Theorie des Luft-Widerſtandes beim Bombenwerfen, weicht von der Erfahrung noch mehr ab als die parabolische... Hilfs-tafeln beim Bombenwerfen... Praktiſcher Gebrauch... Ricoschet Tafeln...

3. *Die Gleichförmige Kreisbewegung.*
Zur Kreisbewegung iſt auſser der *Tangentialgeswindigkeit* auch noch eine *Centralkraft* erforderlich. *Fliehe* oder *Schwungkraft*. Beſtimmung der zu einem gegebenen Kreise erforderlichen Centralkraft, und verschiedene daraus abgeleitete Folgen... Umlaufszeit... ihre Berechnung und Folgen daraus... *Anwendung* auf die Bewegung der Planeten um die Sonne... Es fehlt ein Planet zwischen Jupiter und Mars... Kreisbewegung auf einem beſtimmten Weg... Die *logarithmische Spirallinie.*

4. *Die ungleichförmige Kreisbewegung.*
a) Vier Differentialgleichungen für dieſe Bewegung. Die Drehungs-Beschleinigung... ihr coefficient... Zwey andere Ausdrücke für die Umdrehungs-Beschleunigung... Die letzte Formel zeigt daſs sie zur Beschleunigung der Schwere multiplicirt durch das ſtatische moment der Kraft, und dividirt durch das Drehungs moment des Körpers,

pers, gleich ist. . Beschleunigte Bewegung des Wellrades, des Ræderwerks und des Flaschenzuges. . . Differentiale der Winkelgeschwindigkeit des Wellardes... Folgen daraus... Bestimmung des Umdrehungs moments und der gleichförmig beschleunigten Bewegung beym Schwungrad... Ganz neue von Hr. *Langsdorf* bearbeitete Theorie....

b) Die Schwingungsbeweguug eines *zusammengesetzten Pendels* zu bestimmen. (Geschwindigkeit... Schwingungszeit)... Bestimmung des Schwingungspunktes bei jedem zusammengesetzteu Pendel... Die Længe eines Sekunden pendels durch Beobachtnng zu finden... Z. B. jene des Hr. *Liesganig* für Wien... Nutzen dieser Untersuchnng an verschiedenen Orten der Erde... *Robins* balistischer Pendel...

5. *Die Central Bewegung.*
Allgemeine Eigenschaften einer jeden freyen Centralbewegung. . . und insbesondere in der Ellipse...
Die *erste* ... *die zweite* Keplerische Regel... Drey Differential Fundamental Gleichungen... für die Bahn des Körpers wenn die Centralkraft eine Function der Entfernung ist... *Anwendung* auf den elliptischen Umlauf der Planeten um die Sonne... *Die gerade* und *vorkehrte* Aufgabe der Centralkræfte. . . *dritte* Keplerische *Regel. Erklærung* der *Aphelie... Perihelie...* die *wahre* und *mittlere Anomalie*... Formel für die Auflösung der *Keplerischen Aufgabe*...

IX. HAUPTSTUCK. *Mathematische und Physische Betrachtungen über sich bewegende Maschinen.*

1. Die gebraüchliste bewegende Kræfte bey der Maschinenlehre... Die Reibung, die Steifigkeit der Seilen, die Festigkeit und Federkraft waren schon oben untersucht... Das Wafser... ihr Dampf und die Luft kommen unten vor (S. Hydraulik)... Es bleiben hier also noch die *lebendigen bewegende Kræfte* zu untersuchen übrig... Diese wirken auf die Maschineu mittelst ihrer *Nervenkraft* oder durch ihr *Gewicht*... Tafel der verschiedenen Gewichte von Menschen und Thiere die man bei Maschinen gebraucht. . . Desgleichen ihrer Nervenkraft und Geschwindigkeit... (der Erfahrung gemæs.)... *Mechanische* und *œkonomische Effekte.* ..
Der Praktiker verlacht feine mathematische Berechnungen über thierische Kræfte in ihrer Anwendnng bei Maschinen uud wahrlich mit Recht... *Lamberts* Untersuchungen...
3. Fundamental formel der Machinenlehre für die jedesmal erforderliche Ueberwucht... *Beharrungsstand*...
3. Nachtrag zu (Statik III. Haupt. Nro. 4. 6.) von den Rosskünsten.

HYDROSTATIK.

Einleitung. Die Theorie der flüssigen Körper wird von den næmlichen Grundsætzen als jene der harten, hergeleitet... Erklærung der *Flüssigen*... Wesentliche Eigenschaft der flüssigen Körper die als Grundsatz angenommen werden kann... Die natürlichen Körper bilden eine Kette deren eusserste Grenzen die volkommen harte und die volkommen flüssige Körper ausmachen... Dieses æusserste existirt nicht... *Halbe flüssige... Gleich* und *Ungleichartige* Körper... Andere Eintheilungen... *Elastische Flüssige... Condensator... Luftpumpe... Thermometer...* Neue physische Entdükungen für Zerlegung des Wassers, und der Luft.

I. HAPTSTUCK. *Allgemeine Grundsætze für das Gleichgewicht der flüssigen Körper.*

1. Sie werden aus dem in der Einleitung erwehnten Grudsatz hergeleitet... Be-

weis

weis dieses Grundsatzes und des umgekehrten... Folgen und Sætze die daraus flüſsen... Gleichgewicht der Flüſsigen deren Theile der Wirkung was für Kræften es auch sein mögen, ausgesetzt sind... (Allgemeine Gleichung)...

2. Gleichung des Gleichgewichts der Flüſsigen die durch Kræften deren Richtung gegen einen beſtimmten Punkt gekehrt iſt, und die eine Funktion von den Entfernungen dieſes Mittelpunktes sind, bewegt werden... *Bouguers gravicentrische Krumme.* Flæche in zwei vereinigten Röhren... Anwendungen auf die Erscheinungen der Natur... Niveau... (S. die Theorie des Nivellirens im 1 Kurs und im III. Haupt. Nro 1.)... Haarrörchen....

3. Formel für den *Druck* auf alle Seiten eines flüſsigen Theilchens... Druck auf einen beſtimmten Theil des Bodens oder der Wænde des Gefæſses... Fall für die horyzontale Grundflæche... Folgen und Anwendungen.

4. Formel für den *Druck* einer Maſse von ſtehenden Waſser gegen die Wehre einer Schleuse... wenn die Figur des Theils der Seitenwænde ein Dreyeck,.. ein Parallelogram u. d. g. iſt... Formel für den *Mittelpunkt des Drucks*... Desgleichen für die *geneigte* Seitenflæche... *Anwendung* auf den Druck bei Deichen... Formeln für besondere Fælle,.. Theoriæ des Drucks der Erde gegen die Futtermauer.. ſtimmt mit den Erfahrungen des Hr. *Gauthey* überein...

5. Formel für das Gleichgewicht der *ungleichartigen Flüſsigen.*.. Formel für den Druck des Bodens eines Gefæſses in dem die Lagen von verschiedenen Flüſsigen sind...

II. HAUPTSTUCK *Von der Dicke der Waſserröhren, um dem Drucke des ruhig ſtehenden Waſsers zu widerſtehen.*

Erklærung desselben... Formeln für die Tension der Umkreise der Grundflæchen von zwey Cylindern die mit verschiedenen Flüſsigen gefüllt ſind... Verhæltniſs der Dicken die zwey aus bigſamen Ringen zusammengeſetzte Cylinder haben müſsen um der Kraft die ſie zu zerbrechen ſtrebt zu widerſtehen... Formeln für besondere Fælle... Erfahrungen die angeſtellt waren um die Dicke einer beſtimmten Röhre die dem Drucke eines beſtimmten Flüſsigen widerſtehen soll, zu erforschen... *Mariots* Sætze... Einige *Anwendungen*...

III. HAUPTSTUCK. *Vom Gleichgewicht der Luft.*

1. Erklærung der Luft... Sie iſt ein ſchwerer flüſsiger Körper... Barometer... *Pascals* Erfahrung... (Ihre physiſche neu entdekte Eigenschaften)... Gewicht der ganzen Athmosphere (formel)... Gleichgewicht von zwey Sæulen ungleichartiger Flüſsigen... Druck der Athmosphere.., Ercheinung des Hebers... Die Luft iſt ein elaſtisches Flüſsiges... Die elaſtische Kraft der zusammengedruckten Luft gleicht jener die diese Zusammenpreſsung werursachet... (*Herons Brunnen*) Die Luft drückt sich durch ihr eigenes Gewicht zusammen... (Erf.)... Verkehrtes Verhæltniſs zwiſchen der zusammen gepreſsten Luft und den Kræften die es verursachen... Folgen... Bis ins Unendliche abnehmende geom. Reihe der Lagen der Athmosphere... Allgemeine Gleichung des Gleichgewichts der flüſsigen elaſtischen Körper... Anwendung des Barometers zum Nivelliren... Theorie und Anwendungen v *Tremblei.* de *Luc*, *Sauſsure*, *Oriani* (*Aeroſtatik* und *Aerometrie*)...

2. Von *den Pompen* und überhaupt Waſserſchoepfenden Maſchinen...

a) *Saugwerk*... *Saugröhre*... *Kolbenröhre*... Klappe... *Kolben*... Abmeſsungen des Saugwerks... Formeln für die Höhe (für die gröſste Höhe) bis zu welcher das Waſser über den tiefſten Kolbenſtand ſteigen kann... Besondere Fælle, Folgen davon und Anwendungen... *Windkeſsel.*

b) *Druckwerk*... Gleichung... Saugwerk mit Druckwerk vereinigt... Gleichung für die bewegende Kraft... (Windkeſsel)... Andere Schöpfmaschinen kommen unten vor..., Fortſetzung der Theorie... (Hydrodyn. VII, Haupts.)

IV.

IV. HAUPTSTUCK. *Von dem Gleichgewichte der flüſsigen mit den in sie eingentauchten feſten Körpern.*

1. Allgemeiner Grundsatz dieses Gleichgewichtes. . (Archimedischer Versuch.) Kraft womit ein feſter im Flüſsigen eingetauchter Körper gehoben wird. . . Gleichung fürs Gleichgewicht. . . Folgen . . . Gleichung für die eigenthümliche Schwere von zwey verschiedenen Flüſsigen. . . Areometer (Bierwage). . . Eigenthümliches Gewicht der schwerern Körper als das Flüſsige, . . *Archimedische* Aufgabe . . . Anwendungen. . . . (Innerer Werth v. Münzen) (Hydroſtatische wage.)
2. Untersuchung der Gleichgewichts Lage bey verschiedenen schwimmenden Körpern . . .
3. Sætze die den feſten Stand der schwimmenden Körper zum Ziel haben. . . Schwingungen deren solche Körper ausgesetzt sind wenn sie aus der Gleichgewichts-lage gebracht sind . . .
   Anwendungen. . . für ein Schiff. . . für ein Luftbalon . . . für eine Skafandre. . .
4. Von der Figur der Erde in soviel sie von den Gesetzen der Hydroſtatik abhængen kann. . .
   Haupt-Resultate der Théorie von *Huygens* und *Newton*. . .

HYDRODYNAMIK.

I. HAUPTSTUCK. *Allgemeine Grundſætze der Bewegung der Flüſsigen.*

Warum man hier die Zuflucht zu der Erfahrung nehmen muſs. . . Was man beim Ausfluſs des Waſsers durch eine Oefnung im Boden oder in den Wænden beobachtet. . . *Verengung der Waſserader*. . . Ausfluſs durch Oeffnungen in dünnen Platten und in kurzen Ansatzröhren. . . Verbeſserte Oefnungen . . . Formel für die Menge des ausflieſsender Waſsers. . . Verhæltnis für die ausflüſsenden Waſserlage. . . wenn die Oeffnung unendlich klein iſt. . . Feſte und biegsame Gefæſse. . . Nutzen der Hydraulik fürs bürgerliche Leben,

II. HAUPTSTUCK. *Vom Ausfluſs des Waſsers aus beſtændig vollen Gefæſsen durch Oefnungen in dünnen Platten oder durch kurze Ansatzröhren, und von der Bewegung des Waſsers in Kanælen und ihrem Abfluſs durch Röhren.*

1. Kleine Ausfluſsöffnung gegen den Querſchnitten des Gefæſses. . . Algemeine Formeln für Geschwindigkeit und Menge des ausflüſsenden Waſsers für diese Oefnungen. (höchſtens der vierte Theil der Tiefe). . . Formeln wenn diese Voraussetzung nicht Statt findet. . . *Anwendungen* vorſtehender Formeln auf Oefnungen, die ſich durch Ziehung der Stellfallen ergeben, und auf den Abfluſs bey Wehren. . . *Waſser* und *Sanduhr*. . . (Bewegung der Wogen.)
2. Gleichungen für die *Reibung der Waſsers* gegen die Rænder der Oefnung, oder gegen die Wænde einer langen Röhre. . . Wichtige Versuche v. *Boſsut.*
3. Allgemeine Formel für die Bewegung des Waſsers in regulairen Kanælen. . . Vergleichung mit der Erfahrung. . . *Du Buat*. . . Formel für die Menge des ausflüſsenden Waſsers. . . 2. Fælle . . . Formel für die Senkung des Bodens. . .
   Anwendung auf Schleusen. . . Werkzeuge zur Meſsung der Geschwindigkeit des Waſsers (S. III. Haupt. N° 3)
4. *Springwerke* . . Vier Haupt-Beſtimmungen hierbei. . . Oefnung des Strahls bey gröſter Höhe . . . Allgemeine Formel dazu . . .

III. HAUPTSTUCK. *Von der Bewegung der Luft.*

1. Ausdruck der Geschwindigkeit mit welcher die Luft aus einem Gefæfs in einen leeren Raum blæft. . in eine mindere Dichtigkeit. .. Besondere Voraussetzungen. .. Anwendung auf *Windbüchsen.* .'. Gleichung um die Geschwindigkeit der Kanonkupel bey der Mündung zu finden... Durch Erfahrung ... Længe der Kanone damit V das maximum sei... Sætze die den Grundsatz der Einrichtung der Dampfmaschine zum Zweck haben...
2. *Die Schwungbewegung der Lufttheile*... ift die Grundlage der *Tonkunft*... Bernoullis Lehre ... Drei Arten der tönenden Röhren. . . Dieselbe methode für die schwingende Seiten. ..Benennung der Töne... (Formeln)...
3. *Werkzeuge* womit man die Geschwindigkeit der Luft müfst. . .jene der Ströme. .. Der *Woltmannsche* hydrometrische Flügel... Seine Beschreibung und Gebrauch... Allgemeine Formel,..Abmefsungen der Fliegel. . . (*Pitot, Gerlach*).
4. Werkzeüge für die andere Eigenschaften der Luft. . . *Thermometer*. . . *Barometer* ... *Manometer*... *Anemometer, Elatometer, Hygrometer, Eudiometer, Areometer*. . .
5. Vom *Cylindergeblæse*... Zweck dieser Maschine... ihre Einrichtung. . . und Berechnung. . .

IV. HAUPTSTUCK. *Vom Wafserftofs nnd Windftofs.*

1. Erklærung davon... *Widerftand*. .. *Kraft des Stofses*... Ihr Maas. . . Sætze zur Vergleichung des geraden mit dem schiefen Stofse wenn die leidende Flæchen ruhig ftehen. . . wenn sie sich bewegen ... Maas des Stofses eines unbegrenzten Flüssigen.. . Einige Anwendungen auf gleichschenklichte Dreyecke... auf einen Viereck,.. einen Halbkreis... auf jede krumme Flæche oder einen Körper... (Cœficient des Stofses.) . . .
   Isolirter Wafserstrahl... Wafser im *Gerinne*. ... *unbegrenztes Wafser*. . . Allgemeine Ausdrücke für die besondere Fælle.
2. *Vom Windftofs*. . . Algemeine Bemerkungeu über den Windftofs. .. Windræder und Windflügel . . .

V. HAUPTSTUCK. *Besondere Theorie der hydraulischen Maschinen die durch den Stofs oder durch das Gewicht des Wafsers bewegt werden.*

Erkl. hydraulische Maschine. . . Art die bewegunde Kræfte und die wirkliche und nützliche Wirkungen bey diesen Maschinen zu mefsen... *Eulers* und *Parents* Theorie . . .

1. *Theorie der unterschlægtigen Wafserræder.*
   Ihre Eintheilung. Wirkung einer Schaufel bey einem senkrechten Stofs des Flüsigen... Beftimmung der Gröfse der Wafserftofses bei seinen verschiedenen Richtungen. . . Das *maximum* des *Wafserftofses* und des *Effekts* der Maschine. . . für *unbegrænztes Wafser*, .. für den *isolirten Strahl*... für das Rad im *Gerinne*. . . im *gemeinen*. . . im *Kropfgerinne*... Formeln für verschiedene Fælle und Voraussetzungen . . .
   Desgleichen für die wagerechte Wafserræder die vom Wafserftofs bewegt werden. .'. Figur der Schaufeln.
2. *Theorie der oberschlæchtigen Wafserræder.*
   Erklærung davon... Die Gröfte Wafsermenge in denfelben ... Gleichförmige Bewegung... Beftimmung der bewegenden Kraft in diesen Wafserrædern... Der Gröfste Nutzeffekt bei diefer Maschine. . . Tiefsinnige Theorie wære hier übel angebracht. . . Abgekürzte Beftimmungen für die Ausübung... Vergleichung der Wirkungen beider Wafserræder... Mittelschlæchtige Ræder...

VI.

VI. HAUPTSTUCK. *Von den Maschinen die durch die Rückwirkung des Waſsers bewegt werden.*

Erklærung dieser *Rückwirkung*. .. Ausdruck der Geschwindigkeitshöhe des Ausflusses einer Röhre von beliebiger Figur bei einem beſtændigen Waſserſtand und sich um eine lothrechte Achse umdrehend. . . Moment der Kraft &c. Folgen... Allgemeiner Ausdruck der Wirkung der *Saugschwungmaschine*... Vergleichung mit dem *Segnerischen Waſserrad*.. Hieher gehörige Formeln. . . Die *Kempelsche* Rückwirkungsmaschine...

VII. HAUPTSTUCK. *Theorie der Bewegung des Waſsers in den Saug- und den Druckwerken.*

1. Wichtigkeit dieser Untersuhung... *Saugwerk*... Ausdruck der Geschwindigkeit mit der das Waſser frey in die Saugröhre ſteigt, wenn daselbſt ein leerer Raum gemacht iſt... Differentiale Formeln... Ausdruck des Drucks des Waſsers gegen den Boden des Kolbens. . . u. d. g. Beyspiele mit Zahlen. . . Ausdruck der Geswindigkeit mit der ein Kolben sich von seiner gröſten Höhe senkt... Die Theorie dieses Theils der Hydraulik wurde von den H. *Langsdorf* bearbeitet... Hauptresultate seiner Untersuchung... Formeln für die erforderlichen Kræfte. . .
2. *Druckwerk*... Die wichtigſten Formeln dazu... Besondere Erwæhnung der Fehler wodurch andere Theorien unbrauchbar werden.
3. Beſtimmung des *Moments der Trægheit* einer in einer Röhrenleitung verbreiteten und in Bewegung gesetzten Waſsermalse...

VON EINIGEN AM MEISTEN BRAUCHBAREN MASCHINEN.

Vorerinnerung.

Allgemeine Bemerkungen über die Maschinen... über Erfindung neuer Maschinen... Was zur Kenntniſs und Beurtheilung einer Maschine gehöre. ... (Sechs Artikel)... Eintheilung der Maschinen *in wirkende* und *leidende Schiebende* und *Umdrehungsmaschinen*...

Ueber die Art Maschinen mit einander zu verbinden...

Balancier mit einer Uhrkette... Schleife... Verbindungsſtangen u. d. g... doppelter Krumzapfen... Blæuelſtange... Welle des Hauptrades mit Triebſtöcken... Stangenkunſt. . . Von den Kæmmen oder Zæhnen und den Triebſtöcken beim Ræderwerk... (Es wurden schon oben im jedem Theile de Mechanik hæüfige Anwendungen der Theorie und besonders der einfachen Maschinen gemacht, es bleibt also noch hier einige der im bürgerlichen Leben nützlichſten zusammenegsetzten Maschinen zu erwehnen übrig.)

I. Von den Getraidemühlen.

1. Eintheilung der Mühlen in Absicht auf die bewegende Kræfte... auf ihren Gebrauch.... Hauptheile einer Mahlmühle... Der Steg... Anzahl der Umlæufe des Læufers in einer Minute .. Beſtimmung des Widerſtandes, welchen die Frucht entgegen setzt. . . Druck des Læufers auf das Mühleisen... Algemeiner Ausdruck für die erforderliche Kraft... für den Halbmeſser des Waſserrades .. Der vortheilhaftes te... Halbmeſser des Waſserrades und vortheilhafteſte Einrichtung des Getriebes... Beschaffenheit des Ræderwerks. . . Allgemeiner Ausdruck für die Menge des Mehls. welches eine gut eingerichtete Mühle bei viermaligen Aufschütten ſtündlich liefern kann... Teutsche und französische Mühlſteine... Gebrauch horizon-

taler

ıtaler Waſserræder und des Segnerschen Waſserrades bey Mühlen. . . Einige besondere Umſtænde. . . Hand- und Roſsmühlen.
Die Theorie der Wæſserræder... obem V. Nro 1. 2.

2. Von den *Windmühlen*...Ihre allgemeine Einrichtung. . . Allgemeiner Ausdruck für die Gröſse des Windſtoſses. . . Das Gröſte seines statischen Moments... Geſtalt gebogener Flügel... ihr Vorzug vor ebenen.. Allgemeiner Ausdruck für den Widerſtand... für beide Arten von Flügeln).. Einrichtung für den gröſten Nutzeffekt... Vortheil schwerer eiserner Schienen, welche am Ende der Flügelruthen angeschroben werden.

II. Von den Schneidemühlen.

Allgemeine Beschreibung davon. . . Zwifache Bewegung. . Beſtimmung des Widerſtandes bei Schneidemühlen... Formel für die Kraft bei einer beſtimmten Geswindigkeit. . . Regel für das Gewicht des Gatters... Beilænfige Beſtimmungen für die specifiſche Hærte verschiedener Hölzer. . . Die obige Formel für einen besonderen Fall... Jhre noch allgemeinere Einrichtung, so daſs dabei auf die Schrænkung der Sæge mit Rücksicht genommen wird... Erinnerung bei anzuſtellenden Beobachtungen. . .

III. Von den Stampfmühlen überhaupt,

1. Ihre allgemeine Einrichtung und Erklærung hieher gehöriger Benennungen... Beschreibung der Pulvermühle zu la Fere und ihr Effekt... Allgemeiner Ausdruck für den Erhebungswinkel der *Daumen*... Wie viele Daumen höchſtens zu einem Stampfer gehören dürfen... Beſtimmungen für die gröſte Længe des Heblings und des Dæumlings, und für die Reibung. . . Geschlitzte Stempel... Die Kraft zu beſtimmen, welche an einen Waſserrad wirken muſs, um die Daumenwelle mit einer verlangten Geschwindigkeit zu betreiben... Je mehr Schlæge oder Stoſse bei einem Umlauf der Daumenwelle bewirkt werden, deſto vollkommener iſt bei sonſt gleichen Umſtænden das Stampfwerk... Vorzug gekrummter Heblinge vor graden Daumen... Schnelle Umdrechung der Heblings - oder Daumenwelle erfordert ein Vorgelege...
2. Die *Pochwerken* gehören im Allgemeinen zu den Stampfmühlen... Die vorigen Benennungen ændern sich hier etwas ab... Abmeſsungen und Gewicht der Pochſtempeln... Gewöhnliche Anordnung eines Pochwerks... Fortsetzung dieser Beschreibung. . . Oelmühlen und Gewürzmühlen u. d. g.

II. Von den Hammerwerken.

Kurze Beschreibung... Geschwænzte und nicht geschwænzte Hæmmer... Gewicht und Schnelligkeit der Hæmmer. . . Hauptregel für ihren Betrieb... Hiehergehörige Berechnung... Hammerwerke erfordern Ræder mit vorzüglich schweren Krænzen.

V. Von den Papiermühlen.

Kurze Beschreibung der hier vorkommenden Maschinen... ihr Zweck und Wirkung...

VI. Von den Feuerspritzen.

Begrif der Feuerspritzen im Allgemeinen... Formel für die Höhe und Weite des Strahls... Bei der Neigung des Gaſsrohres unter einem Winkel von 45° erreicht der Strahl die gröſste horizotale Weite... Formeln für die Kraft welche bei Spritzen mit doppelten Druckwerk angewendet werden muſs, um das Waſser auf eine beſtimmte Höhe zu treiben. . . Verbindung der Kolbenſtangen mit den Kolben... Spielraum... Praktische Beſtimmungen. . .

VII.

VII. Von der Archimedischen Wafserschnecke.

Allgemeine Vorschriften für die Ausübung... Dabei Formeln zwischen Zeit, ausgegofsener Wafsermenge, erforderlicher Kraft oder Anzahl von Arbeitern, lotrechter Höhe der Schnecke, ihren einzeln Abmefsungen und ihrer Neigung gegen den Horizont...

VIII. Von den Kaftenkünften: Paternofter - und Schaufelwerken u. d. g.

Begriff einer Kaftenkunft... Allgemeiner Ausdruck für die in einer gegebenen Zeit ausgegofsene Wafsermenge... Begrift von Rosenkrantzmühlen überhaupt... Püschel- und Schaufelwerke insbesondere... Allgemeiner Ausdruck für die Wafsermenge welche durch Rosenkranzmühlen in einer gegebenen Zeit gehoben wird... Umftænde, unter welchen man den gröfsten Effekt erhælt...

Wirkungsart der *Weraschen* wafserhebenden Seilmaschine... Ihre Theorie ift noch nicht bearbeitet...

IX. Von den Dampfmachinen.

Beschreibung einer nach der neuern Einrichtung gebauten Dampfmachine...

Was den Grundsatz dieser Einrichtung und Wirkungsart anbetrift war in der Hydraulik III. Hauptstuck N° 1. angezeigt...

Der zweite Band der *Pronyschen* Wafserbaukunft enthællt alles was hier noch zu verlangen übrig bleibt, sowohl in Ansehung der details der Theorie als auch der umftændlichen Beschreibung und Darftellung der Theile.

Beilage.

I. Die vornehmften Werke über die Mechanische Wifsenschafften.
II. Das wichtigfte davon aus der *Belidorschen* und *Pronyschen* Wafserbaukunft. (Praktische Vorschriften welche in der vorftehenden Darftellung nicht haben Platz finden können... Der Deich- und Brückenbau... Schifbare Flüfse und Canæle.)
III. Von einigen *Bergwerksmaschinen... (Poda.. ; Calvörs.., Delius.., Cancrin...)*
IV. Kurzgefafte Gechichte der Maschinenlehre.

Der næmliche beftimmte Plan und Einfachheit der Grundsætze, ftanden dem Unterzeichneten beim Vortrage und der Bearbeitung des diesjæhrigen Kurses, auch ftets vor Augen... Da doch die Hauptabsicht eines Lehrers sein mufs, seinen Lehrlingen eine Fertigkeit in der Erlernung der Wahrheiten die er vortrægt zu verschaffen... und den Muth auch neue selbft zu erfinden, einzuflöfsen, so hat man beim Vortrage die analitische Methode erwæhlt, als die schicklichfte næmlich um zu dieser wichtigen Absicht zu gelangen...Es war um defto thunlicher sich dieser Methode beim öffentlichen Unterricht zu bedienen, da man in den privat Stunden öffters Gelegenheit hatte die synthetische zu gebrauchen... Es ift hier der Ort nicht den Nutzen dieser analitischen Methode und ihre Beschaffenheit næher zu beftimmen. Wer davon befriedigende Erklærungen und Beweise sucht, der findet sie in einer neuerlich in Göttingen erschienenen und Sr. K. K. Majeftæt FRANZ DEM ZWEITEN zugeeigneten Schrift des Hr. Prof. *Murhard.* (Syftem der Elemente der allgemeinen

Gröfsenlehre nach ihrem Zuftande am Ende des 18 Jahrhunderts nebft Litteratur und Geschichte) . . . In diesem Werke wird unterandern umftændlich erwiesen, dafs die Verbreitung der Kenntnifse der Mathematik reelle Beförderung des Menschenglücks und einem jeden Gelehrten schlechterdings unentbehrlich sei: dafs ferner der wichtigfte Nutzen ihrer Kenntnifs in der Schærfung des Verftandes und der Uebung desselben in gründlichen Urtheilen, ja selbft im Erfinden beftæhe. . . .

Um sich aber von meinem Ziele — dem Publico Rechenschaft von dem zweiten Jahrgange meines erften Kurses bei der hiesigen Universitæt abzuftatten... nicht zu entfernen; begnüge ich mich hier zu erklæren.., dafs die ersten Mufter die uns die *Warignons*, *Eulers*, *Dalemberts*, gegeben haben, (wie man sich næmlich der *Leibnizischen* Rechenkunft bedienen mufs um die Grundfætze der Mechanik zu erforschen)... uns am vorzüglichften behülflich waren den diesjæhrigen Kurs zu beendigen...

Dafs es aber nützlich sei die mechanischen Wifsenschaften mit den ganz geometrischen Betrachtungen zu beginnen oder derselben Sætze damit zu erleutern, hat der unterzeichnete in dem französischen Aufsatze zu zeigen gesucht, und begnügt sich hieselbft nur noch des Hr. Hofr. *Kæstner* Meinung (da hier das Ansehen viel vermag) der des Hr. *Prony* beizufügen... "Der gewöhnliche Vortrag, sagt er in den *Aftron. Abhandl.*, erfordert die Figur genauer zu betrachten, und übt dadurch in dem eigentlichen geometrischen Nachdenken: . . Gelegenheiten zu dergleichen Uebungen sind noch immer mit beizubehalten, da sie durch die jetzt gebrænchliche Anwendung der Analysis auf die Geometrie schon so sehr vermindert werden... Erft wenn man solche Uebungen zulænglich getrieben hat, braucht man die analytischen Formeln mit Verftande; sieht, wenn sie zur Abkürzung der Arbeit dienlich sind, und wenn es nützlich ift die Figur selbft zu betrachten... Auch mufs man die gewöhnlichen Regeln wifsen, weil so viel Schriftfteller sich derselben noch bedienen... .

Die Betrachtung der Figur führt oft auf unerwartete Uebereinftimmungen, zeigt dafs Aufgaben einerley sind, die zuerft ein ganz unterschiedenes Ansehen hatten."

Um den praktischen Nutzen der Theorie zu zeigen, unterlies der Unterzeichnete nicht hæufige Anwendungen anzuftellen: lies seinen privat Schülern Abmefsungen der neu angelegten Mühlen an der Rudawa verrichten und die Güte der Verhæltnise der Theile selbft wie auch die Wirkung der ganzen Machine, der neuen Entdeckungen und Theorien gemæfs, untersuchen und prüfen.. Hierbei lies er Zeichnungen im Grundrifs Durschnitt und Perspectiv, verfertigen... Er vernachlæfsigte nicht an die allgemeine Formeln auch Beispiele mit Zahlen um sich besonders mit dem Gebrauch der Logarithmen zu vertrauen, mit anzuschlüfsen.

Auch suchte er durch Beyspiele zu zeigen wie man die Mathematische Wissenschaften in der Baukunft gebrauchen kann, wovon allem ein mehreres in dem französischen Aufsatze: — es wird daselbft unterandern von der glücklichen Ausführung der schönen Kupel der Kirche der H. Genewefa zu Paris, der Theorie gemæfs, eine Erwæhnung gemacht. ..

Diese Beispiele, ftellte er der herschenden Art zu denken entgegen welche dem Streben nach gründlichen Kenntnifsen in der Machinenkunde mit Macht entgegen wirkt. — Man wirft næmlich der wifsenschaftlichen Machinenlehre vor, "dafs sie wenig Nutzen hat, und belohnt durch das wenige wahre, was sie lehrt, bei weitem nicht für die grofse Anftrengung, die ihr Studium erfordert. — Uberall weichen ihre Resultate von dem wirklichen Erfolg in der Ausübung aufserodentlich ab: und alle die tiefsinnigen Berechnungen und weitlæuftigen Formeln sind blofses analitisches Gewebe, blofses Spiel des Verftandes völlig unnutz für die Ausübung. — Es werden unzæhlige Machinen, heift es weiter, von Jahr zu Jahr angelegt ohne dafs sich die

Werk

Werk - oder Baumeister dabey um die Theorien der Schriftsteller zu bekümmern" haben, und dieses wird sich um so weniger jemals ændern, als die Werk - und Baumeister fast ohne Ausnahme Leute sind, welche von Existenz einer Theorie entweder gar nichts wissen, oder der Theorie lachen, ihre Weisheit unendlich höher schætzen und der Meinung sind, das grade nur das in Schriften einigen Werth habe was von ihren Anlagen entlehnt sey. . . Es wird also alle Theorie nur in den Schriften vergraben oder ein Eigenthum und Prærogativ wahrer Machinenkenner bleiben, aber im bürgerlichen Leben wird sie so gut als gar nicht angewendet, man braucht da keinen solchen Machinenverständigen. . . Allerdings sind diese Sætze der Erfahrung gemæss, nur beweisen sie nichts gegen die Nothwendigkeit und gegen den Nutzen eines gründlichen Studiums der mechanischen Wissenschaften, wovon uns schon die oben angeführten Beyspiele überzeigen. Uebrigens beantwortet der Hr. *Langsdorf*, in der Vorrede seines, mehrmal angeführten vortreflichen Werkes, alle diese Einwendungen hinlænglich; und zeigt dabey dass es dem Staate allerdings obliget solche Mænner zu haben welche Kenntisse dieser Art auszubreiten suchen, und wiederum andere, welche von diesen Bemühungen Nutzen zu schöpfen bereit sind. . .

Zur Ergænzung des gedruckten Plans des vorigen Jahres müssen noch daselbst beigefügt werden. Vor der Differetial Rechnung.

N ° 22. Kurz gefasste *Theorie der Analytischen Functionen*, und in der Differ. rechn. am Ende.

N ° 1. *Methode der Variationen*. . . 23. Gleichungen der *partiellen Unterschiede*. . .

Noch andere Zusærze wæren. . .

In der Algebra Nach dem.

N ° 14. Theorie der *Elimination*. . .

N ° 20. Von der *Combination*.

N ° 21. Ergænzung des *Gebrauchs der Logarithmen*. . . In der Geometrie.

N ° 8 1/2 *Proportional Zirkel* und dessen mannigfaltiger Gebrauch. . .

Wir haben unsere Meinung in Rücksicht des ersten Theils dieser Zugaben in dem französischen Aufsatze von dem diesjæhrigen Kurs geæussert. Statt dieser fügen wir alhier einiges was den Plan des Kurses anbetrift an, und wozu uns das obenangeführte Werk des Hr. Prof. *Murhard*, Anlass ~~gegeben~~. . .

Freylich ist die Eintheilung der ~~Mathematik~~ die der Verffasser in seinem Werke vorschlægt, næmlich in die *reine* und *angewandte Grössenlehre* die einfachste und der Würde der Wissenschaft die angemessenste: man getrauet sich sogar zu sagen dass die Zeit kommen wird dass die Würde und die Wichtigkeit dieses Studiums zu allgemein erkannt sein wird, als dass mann bei einem Lehrlinge vorauszusetzen nöthig hætte, dass er nicht hinlengliche Geduld und Musse besæsse, alles das theoretische zu erlernen was die reine Grössen und Raumlehre in sich umfasst, ehe er die Anwendungen davon wahrnimmt. . . Allein so erwünscht auch dieser Zeitpunkt sein mag so entspricht dennoch die Erfahrung diesem Wunsche gar nicht. . . Der Lehrling oder der Zuhörer bezeigt stets seine Sehnsucht nach Anwendungen. . . und der Lehrer hællt sich für glücklich wenn diese seinen Ehrgeitz anspornen und Musse findet auch der Theorie nachzuspiren. — So viel Nutzen wir uns also von einer systematischen Abhandlung der Grössenlehre versprechen können, so sehr sind wir anderseits überzeugt, dass der praktische Nutzen indessen noch immer in solchen Abhandlungen der gesammten Theile der Mathematik zu suchen sey wo die Anwendungen schon zeitig mit den Theorien in Verbindung stehen. . . Seit der Zeit dass der Unterzeichnete sich mit diesem Studium beschæftigt scheint ihm der von dem Seeligen *Kæstner* erwæhlte Plan in seinen Anfangsgründen der Mathematischen Wissenschaften der vollkommenste zu sein, — der bei der möglihst kleinsten Ausdehnung in der Ausführung

führung nicht nur das wesentlichste der sæmmtlichen Theile der Wifsenschaft umfafst, sondern auch die Möglichkeit erleichtert diese bei ihrem Wachsthum, daselbst nach und nach ergænzen zu können. Es ist wenigstens dem Unterzeichneten kein vollstændigeres Elementar-Werk bekannt in dem man alle Theile der Mathematik übersehen könnte, (die alten wolfischen Elemente nicht zu gedenken) so sehr er sich bemüht sich die vorzüglichsten davon in der deutschen und französischen Sprache zu erwerben... Diese und mamche andere Vorzüge waren es die den Unterzeichneten bewogen eine Uebersetzeng der *Kæstnerischen* Anfangsgründe in der Vorrede seines 1790 zu Warschau gedruckten polnischen Werkes anzukündigen: von deren Ausführung ihn aber seine verænderte Lage, die das Schicksal seines Vaterlandes mit sich zog, abgehalten hatte. Zwar hat er sich zu seinen Vorlesungen, vielmehr zu seinem mündlichen Vortrag (und dieser ist ja immer für den Zuhörer viel verstændlicher, vielleicht auch angenehmer als die eigentlichen Vorlesungen) einen andern Plan erwæhlt, defsen Güte die Erfahrung bestætigt, indefsen behælt er sich immer den Vorsatz, wenigstens das wesentlichste des Kæstnerischen Plans, bei der Bearbeitung der sæmmtlichen Theile der Wifsenschaft als Leitfaden, beizubehalten, und die Erleuterungen und weitere Fortschritte eines *Karstens*, *Lempe*, *Langsdorfs*, *Pasquich* u. d. g. zu benutzen. Als Muster aber eines durch die Zeit erprobten Vortrags der den allgemeinen Beyfall in unsern Staaten, erreicht hat, dürfte ich jenen des, in dem matnematischen Gebiethe sowohl, als im Vaterlande verdienstvollen Mann, den der Seelige *Kæstner* mit dem *Archimedes* zu vergleichen, nicht Anstand nahm, vorzüglich erwæhlen; und dieses um desto williger, da ich dem Glücke zu verdanken habe, mit dem Uberarbeiter der zweiten Auflage seiner Vorlesungen, den Hr. *Gernrath* Oberlieutenant und Lehrer der Mathematik des K. K. Bombardierkorps, — jetzigen hiesigen Kreisingenieurs, die Bekantschaft zu machen. — Ich verdanke seiner Freundschafft das Vergnügen womit ich beim Lesen der Handschrift der Uberarbeitung des zweiten Theils unseres ehrwürdigen Hr. Major *Vega*, durchdrungen war.... Eine wahre literarische Ergötzung, — die in jedem Freund der Wifsenschaft den Wunsch erregt, sie bald zum Drucke befördert zu sehen. — Möchten doch die praktischen Geschæfte des Bearbeiters — nicht mehr lange, diesem Wunsche entgegen stehen. —

Uebrigens was die diesjæhrigen Erfahrungen anbetrift, mufs ich noch hieher erinnern; dafs die unbestimmte Angaben der praktischen Schriftsteller öffters zu unnützen Ausgaben verführen. Ich war bei einem Versuche anwesend den ein Gutbesitzer ohnweit Krakau, nach einer solchen Vorschrift, mit einer Maschine um damit Wurzeln auszuziehen, verrichten lies. — Sie bestand aus einem Flaschenzuge von fünf Rollen und einer Winde; und glich im Wesentlichen der Einrichtung eines gemeinen Artillerie-Hebzeugs. — Da aber bei ihrem Bildchen kein Maasstab vorhanden war, so mufste man die Verhæltnifse der Theile erst selbst ersinnen. — Kurz, man verfehlte durchaus seinen Endzweck, indem der obere Hacken, immer in der næmlichen Stelle zerbrach, obgleich man ihn vom guten Eisen, und seine Dicke zu einem Zoll und vier Linien wiener Maas, vergröfserte; und den Versuch zwar in einem ziemlich starken Boden, doch aber an einem mittelmæfsigen Stamm, etwa von 3/4 Ellen im Durchmefser, anstellte. —

Man kann sich bei dieser Gelegenheit nicht entwehren, diejenige praktische Vorschriften und Versuche hoch zu preisen, und zu empfehlen, die neuerlich von einem *Bofsut*, *Buat*. *Coulomb* um die Grundsætze der Bewegung des Wafsers, der Reibung u. d. g. zu erforschen, angestellt waren; und deren Resultate man in Texte am schicklichen Orte anzuzeigen, nicht unterlafsen hat.

Im französischen Aufsatze wird der Leser gebeten statt Roue d'oscillation, *Volée* gütigst zu verbefsern.

Krakau den 15 Juilij 1800.

Jozef Łeski,

Inhalt.

Die allgemeine Größenlehre.

Seite 1.
§.1. Einleitung ——— — —
§.2. Die vier Rechnungsarten mit ganzen Zahlen —
§.3. - - - — - mit gebrochenen Größen. —
§.4. .. Rechnungsarten mit Potenzen und Wurzeln. —
§.5. Von den Verhältnissen und Proportionen — 2
§.6. Von der Regel Detri und den einfachen Gleichungen.
§.7. Von den Gleichungen des 2ten Grades und den unendlichen Größen —
§.8. Von den Veränderlichen Größen, und den Reihen überhaupt — — — — — — 4.
§.9. Von der geraden Methoden der Reihen — 5.
§.10. Von der umgekehrten ——— — 7.
§.11. Anwendung der Reihen auf die Beschaffenheit, Berechnung und Gebrauch der Logarithmen 11
§.12. Auf die Entwickelung der Potenzen —— 7.
§.13. Von den arithmetischen Reihen ——— 8.
§.14. Von den geometrischen Reihen - - — — 9.
§.15. Von einigen besonderen Reihen ——— 10
§.16. Von den höheren glei

Von der Differenzial Rechnung.

§.17. Praktik der Variations rechnung. — 13.
§.18. .... Der differenzial rechnung — 14.