Notte sur le degré de confiance que peut mériter le résultat moyen de plusieurs observations.

La mesure de la confiance que l'on doit avoir dans le résultat moyen de plusieurs observations est le degré d'approximation, où l'on est obligé de s'arrêter, pour que la probabilité d'une erreur ne surpasse pas $\frac{1}{2}$; la certitude étant représentée par l'unité. Supposons, par exemple, qu'ayant mesuré une longueur plusieurs fois de suite, on ait obtenu pour résultat moyen

2m.463 millimètres

Supposons de plus que pour ce même résultat la probabilité d'une erreur positive ou négative plus grande qu'un demi-centimètre soit $\frac{1}{5}$, et que la probabilité d'une erreur positive ou négative plus grande qu'un demi millimètre soit $\frac{46}{50}$; en sorte qu'il y ait 4 à parier contre 1 que le second chiffre décimal du résultat moyen est exact, et 46 à parier contre 4 que le troisième chiffre décimal ne l'est plus; il est clair qu'on sera autorisé à pousser l'approximation jusqu'aux centimètres, mais non pas au delà. En général si l'on désigne par $\alpha$ les unités d'un certain ordre, par exemple, des centimètres, des millimètres etc. s'il s'agit de longueurs, ou des minutes, secondes etc ... s'il s'agit d'angles; pour savoir si l'on doit conserver dans le résultat moyen les unités de l'ordre $\alpha$, il suffira de chercher la probabilité que l'erreur positive ou négative de ce résultat tombe entre les limites 0 et $\frac{1}{2}\alpha$, et de voir si cette probabilité surpasse $\frac{1}{2}$. Dans le cas contraire, on devra supprimer les unités de l'ordre $\alpha$. La probabilité dont il est ici question pourra toujours être déterminée de la manière suivante.

Soient $r'$ $r''$ $r'''$ etc .... les observations données; $R'$ leur résultat moyen, ou la somme des observations divisée par leur nombre. Soit $K$ la limite des plus grandes erreurs que puisse admettre le moyen d'observation employé. On commencera par rejeter les observations qui sont en erreur sur le résultat $R'$ d'une quantité supérieure à $K$. Désignons maintenant par

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots\ v_s$$

les observations restantes, soit $s$ le nombre de ces dernières, et $R$ leur résultat moyen, en sorte qu'on ait

$$R = \frac{v_1+v_2+\ldots+v_s}{s}$$

Représentons par $\lambda$ la somme des quarrés des différences respectives entre les observations restantes et le résultat moyen, en faisant en conséquence

$$\lambda = (v_1-R)^2+(v_2-R)^2+\ldots+(v_s-R)^2$$

Enfin soit $P$ la probabilité que l'erreur positive ou négative du résultat moyen $R$ tombera entre les limites $0$ et $\frac{1}{2}\alpha$. On aura

$$P = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\,\frac{s^2}{\lambda}\right)}\,.\int du.\, e^{-\frac{s^2}{2\lambda}u^2}$$

$\pi$ désignant à l'ordinaire le rapport de la circonférence au diamètre, et l'intégrale étant prise entre les limites

$$u=0,\quad u=\frac{1}{2}\alpha\,.$$

Pour une valeur déterminée de $\alpha$, la valeur de $P$ dépend uniquement du rapport $\frac{s^2}{\lambda}$. Cette valeur reste donc la même lorsque le nombre des observations croît dans un certain rapport, et qu'en même temps elles s'écartent dans le même rapport du résultat moyen.

Lorsque $\frac{1}{2}\alpha$ est une quantité très petite, les valeurs que reçoit la variable $u$ entre les deux limites $0$ et $\frac{1}{2}\alpha$ étant aussi très petites, on a à très peu près dans cet intervalle

$$e^{-\frac{s^2}{2\lambda}u^2} = e^{-0} = 1$$

et par suite

$$\int du.\, e^{-\frac{s^2}{2\lambda}u^2} = \frac{1}{2}\alpha$$

$$P = \frac{1}{2}\alpha\,\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\,\frac{s^2}{\lambda}\right)}$$

On sera autorisé à pousser l'approximation jusqu'aux unités de l'ordre $\alpha$, si la valeur précédente de $P$ surpasse $\frac{1}{2}$, ou si l'on a

$$\alpha > \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}.\frac{\lambda}{s^2}\right)}$$

Ainsi toutes les fois que $\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}.\frac{\lambda}{s^2}\right)}$ sera une quantité très petite, on pourra regardés comme exacts les chiffres du résultat moyen qui seront de même ordre qu'elle.

<u>Exemple</u>. Supposons qu'une même longueur ait été mesurée à 67 reprises différentes, et qu'on ait obtenu à un demi-centimètre près

| | | |
|---|---|---|
| une seule fois | ………… | $2^{m}.44^{c}$ |
| 8 fois | ………… | 2.45 |
| 45 fois | ………… | 2.46 |
| 12 fois | ………… | 2.47 |
| 1 fois | ………… | 2.48 |
| Total …… 67 | | |

Le résultat moyen sera $\dfrac{164^{m}.86}{67} = 2^{m},4606\ldots\ldots$

De plus on aura dans ce cas

$$\lambda = 45.0^2 + 20.\,0,0001 + 2.\,0.0004 = 0,0028$$

$$\frac{\lambda}{2} = 0,0014 \qquad \pi = 3.1415\ldots \qquad \frac{\pi}{2}.\lambda = 0.004398\ldots$$

$$s = 67 \qquad s^2 = 4489$$

On aura donc, par suite, à très peu près

$$\frac{\pi}{2}.\frac{\lambda}{s^2} = 0,0000001$$

et $\qquad \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}.\frac{\lambda}{s^2}\right)} = 0^{m},001$

Ainsi le résultat moyen pourra être considéré comme exact jusqu'aux millimètres, et ce résultat devra être écrit avec trois chiffres décimaux de la manière suivante $\quad 2^{m}.461$