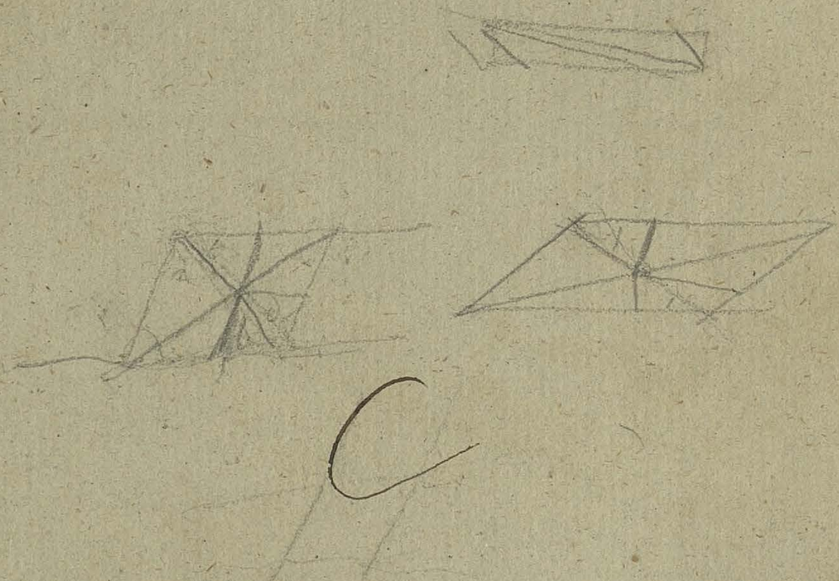
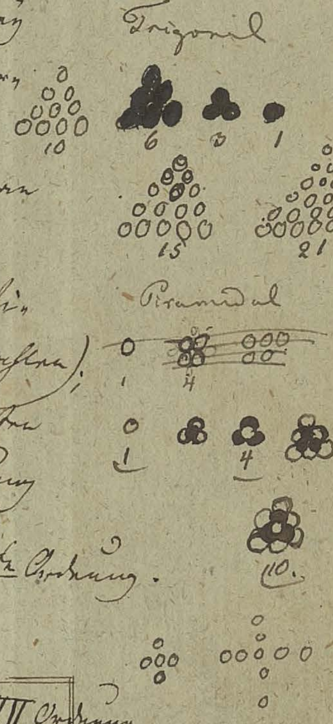


Von Entwickelung der Functionen in Reihen, vorzüglich durch Anwendung des Polynomischen Lehrsatzes

Erster Abschnitt.

Von den figurirten Zahlen.

1. Wenn man von der Reihe der natürlichen Zahlen nach und nach die Summe, des ersten Gliedes, der zwey ersten der 3 ersten Glieder u.s.w. nimmt, so erhält man die Reihe der figurirten Zahlen der zweyten Ordnung (Trigonalzahlen), summirt man von diesen wieder das erste Glied, die 2 ersten, die 3 ersten und s.w. so entsteht die Reihe der figurirten Zahlen der 3ten Ordnung (Pyramidalzahlen); und ~~der~~ das ersten Glieder der 2 ersten d. 3 ersten Glieder, dieser Reihe, die Reihe d. 4ten Ordnung u.s.w.



2. Es sind also 1. 3. 6. 10. 15 .... figurirte Zahlen d. 2ten Ordnung.

Figurirte Zahlen

der I.	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	VIIII Ordnung
1	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1	1.
2	3.	4.	5.	6.	7	8	9.	10.
3.	6.	10	15.	21.	28	36.	45	55
4	10.	20	35.	56	84.	120	165	220
5	15.	35.	70.	126	210.	330.	495	715
6	21.	56.	126.	252	462.	792.	1287.	2002.
7	28.	84.	210.	462	924.	1716.	3003.	5005
8	36.	120	330.	792	1716.	3432.	6435.	11440
9.	45.	165	495.	1287.	3003.	6435	12870	24310
10.	55.	220.	715.	2002.	5005	11440.	24310.	48620

§3.

Wir werden unter diesen figurirten Zahlen in jeder Ordnung diejenigen die ersten nennen welche in dieser Tafel in der obern Zeile stehen, und diesem zufolge die 2te 3te 4te und nte bestimmen.

§4.

Aufgabe. Jede nte Zahl der zweiten Ordnung zu bestimmen.

Auflösung. Da diese nte Trigonalzahl gleich ist der Summe der n ersten natürlichen Zahlen, so ist sie $\frac{1}{2}(n+1)n$.

~~Die Reihe~~ Summe einer arithm: Reihe: da die Summe des 1sten und nten, des 2ten und $n-1$ten, des 3ten und $n-2$ten u. s. f. immer dieselbe, also die Hälfte der Glieder $\frac{n}{2}$ multipl. mit ~~der~~ einer Summen z. B. aus $(n+1)$ ist = der Summe aller Glieder

Der Beweis hierfür ist schon aus d. Arithmetik bekannt. Man kann ihn aber auch so führen, daß man zeigt die Bestimmung sey richtig für die nte, wenn sie gilt für die $(n-1)$te Zahl der zweiten Ordnung $\frac{1}{2}(n-1)n$. Aus ihr aber entsteht die nte der zweiten Ordnung, wenn man zu jener die nte natürliche Zahl $= n$. addirt. Die nte Zahl d. 2ten Ordnung ist also $= \frac{1}{2}n(n-1)+n = \frac{1}{2}(n+1)n$. und dieser Ausdruck gilt folglich für jede nächst höhere Zahl, wenn er für die vorhergehende gegolten hat.

Beispiel die 100ste Trigonalzahl ist

$$\frac{100\cdot(101)}{2} = 5050.$$

§5.

Aufgabe. Jede nte Zahl d. dritten Ordnung zu finden.

Auflösung. Sie ist $= \frac{n\cdot(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3.}$

Beweis. diese Form gilt für die erste Zahlen der 3ten Ordnung wenn $n=1, =2 =3$ ist; gilt sie aber für die nte so gilt sie auch für die nächst folgende $(n+1)$te und ist folglich allgemein.

Wir wollen annehmen die n^{te} Zahl der dritten Ordnung sey wirklich $\frac{n.(n+1)(n+2)}{1.2.3.}$ so ist die $(n+1)^{te}$ Zahl der dritten Ordnung = der n^{te} der dritten Ordnung + der $(n+1)^{te}$ der 2^{te} Ordnung $= \frac{n.(n+1).(n+2)}{1.2.3.} + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2.} = \left(\frac{n}{3}+1\right)\frac{(n+2)(n+1)}{1.2} =$ $\frac{(n+1).(n+2).(n+3)}{1.2.3.}$, aber dies ist derselbe Ausdruck in Beziehung auf $(n+1)$ wie der in der Auflösung in Beziehung auf n. da nun dieser Ausdruck für $n=1.\ n=2.\ n=3.$ $n=4$ etc gilt, so gilt er für alle folgende und ist allgemein.

Beispiel. die hundertste Pyramidalzahl ist.

$$\frac{100.\ 101.\ 102.}{1.\ 2.\ 3.} = 171700.$$

§6.

Aufgabe. die n^{te} Zahl der vierten Ordnung zu finden.

Auflösung. die n^{te} Zahl d. 4^{te} Ordnung ist =

$$\frac{n.(n+1).(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$$

Beweis. Gilt dies für die $(n-1)^{te}$ Zahl so gilt es auch für die n^{te}; denn die n^{te} der vierten Ordnung ist $= (n-1)^{te}$ der 4^{te} Ordnung + d n^{te} der 3^{te} Ordnung.

Wenn also die $(n-1)^{te}$ der vierten Ordnung $= \frac{(n-1).\ n.(n+1)(n+2)}{1.2.3.4.}$ so ist die n^{te} d. vierten Ordnung $= \frac{(n-1).\ n.(n+1).(n+2)}{1.2.3.4} +$ $+ \frac{n.(n+1)(n+2)}{1.2.3.} = \frac{n.(n+1)(n+2)}{1.2.3.}\left(\frac{n-1}{4}+1\right) = \frac{n.(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4.}$

diese Regel gilt nun für $n=1.$ ~~und~~ 2 und also auch für alle folgende Zahlen der 4^{ten} Ordnung.

§7.

§7.

Wenn es läßt sich für jede m^{te} Ordnung der figurirten Zahlen zeigen, daß die n^{te} Zahl der m^{te} Ordnung sey: =

$$= \frac{n.(n+1)(n+2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(n+m-1)}{1.\,2.\,3.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,m!}$$

Denn gilt diese Regel für die $(m-1)^{te}$ Ordnung so ist in dieser $(m-1)^{te}$ Ordnung die n^{te} Zahl =

$$= \frac{n.\,(n+1)\,(n+2)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(n+m-3).\,(n+m-2)}{1.\,2.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(m-2)\;(m-1)!} = \alpha.$$

Gilt diese Regel für die $(n-1)^{te}$ Zahl der m^{te} Ordnung, so ist diese $= \frac{(n-1)\,n.(n+1)(n+2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(n-1+m-1)}{1.\,2.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,m!} = \beta.$

die n^{te} Zahl der m^{te} Ordnung ist aber die Summe beider $\alpha+\beta$ also $= \frac{n.(n+1)(n+2).\,.\,.\,.\,.\,.\,(n+m-2)}{1.2.3.\,.\,.\,.\,.\,(m-1)}.\left\{\frac{(n-1)}{m}+1\right\}$

~~gilt die Regel für die $(n-1)^{te}$ Zahl der m^{te} Ordnung so ist diese~~ $= \frac{n.\,n+1.\,n+2.\,n+3.\,.\,.\,.\,.\,n+m-2\,.\,n+m-1}{1.2.3.\,.\,.\,.\,.\,.\,m!}$

Gilt also diese Regel für die $(m-1)^{te}$ Ordnung und zugleich für die m^{te} bis zum $(n-1)^{te}$ Gliede, so gilt sie auch bis zum n^{ten} und folglich für jedes folgende. Wir haben aber gezeigt daß diese Regel gilt für die zweite, dritte, vierte Ordnung und folglich gilt sie für die fünfte, sechste, und jede folgende, indem sie für jede gewiß, in Beziehung auf das erste Glied gilt.

Cf. p. 59.

Zweiter Abschnitt.

Von den arithmetischen Progressionen höherer Ordnungen.

§ 8.

Eine arithmetische Progression der ersten Ordnung ist eine Reihe von Zahlen, wo der Unterschied zweyer auf einander folgender bei allen derselbe ist.

z. B. 1. 2. 3. 4. . . . . .

Eine arithmetische Progression der zweiten Ordnung ist eine Reihe von Zahlen, deren Unterschiede, zwischen jeden zwey auf einander folgenden, wenn man sie nach der Folge setzt eine arithmetische Progression der ersten Ordnung bilden

z. B. 1. 4. 9. 16. . wo die Unterschiede 3, 5, 7, sind.

Auf ähnliche Weise heißt eine Reihe von Zahlen eine arithmetische Progression der dritten Ordnung, wenn die Reihe der Unterschiede, eine Progression d. zweiten Ordnung ist, und eine Progression der n^{te} Ordnung wenn die Differenz Reihe, von der $(n-1)^{te}$ Ordnung ist.

§ 9.

Die allgemeinste Darstellung einer arithmetischen Progression der ersten Ordnung ist bekanntlich: a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$ . . . . $a+nd$ und die Summe ihrer $(n+1)$ ersten Glieder ist $(n+1)a + \frac{n.(n+1)d}{2}$ oder der n^{te} Glied ist $= a$ multiplicirt mit n, $+ d \times$ mit der $(n-1)^{ten}$ Triangularzahl.

$$= an + \frac{(n-1)nd}{2} = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)d\right)$$

§10.

Nimt man dieser Reihe Summe bis zum ersten, bis zum zweiten, dritten, u. s. f. Gliede, so entsteht eine Progression der 2ten Ordnung. f

Weil die Unterschiede
$a+d$
$a+2d$
$a+3d$
$a+(n-1)d$
eine arith. progr. d. 1ten Ordn. bilden

Summe eines Gliedes $= a.$
" zweier Gl. $= 2a+d$
" dreyer Gl $= 3a+3d$
" vierer Gl $= 4a+6d$
" fünf Gl. $= 5a+10d$
" sechs Gl. $= 6a+15d$
n Gl $= n.a + \frac{n.(n-1)}{2} d$

denn 1, 3, 6, 10 etc bilden figur. Reihe 2ter Ordn. so ist das letzte Gl: weil es $(n-1)$ Ausdr: giebt $= \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
also $S = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$

§11.

Allgemein könnte also eine Reihe der zweiten Ordnung folgende Form haben.

als erstes Glied $= b$
zweites Glied $= b+a$
drittes Gl $= b+2a+d$
4te Gl $= b+3a+3d$
fünftes Gl $= b+4a+6d$
sechstes Gl $= b+5a+10d$
nte Gl $= b+(n-1)a+\frac{(n-1).(n-2)}{1.2} d$
n+1te Gl $= b+n a+\frac{n.(n-1)}{1.2} d = b+\frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$

Auch hier ist die Summe des ersten und letzten Gliedes = der Summe je 2 von der Mitte gleichweit entfernten Ausdrücken auch = dem doppelten mittleren Ausdruck.

Die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe ist also zusammengesetzt aus $n.b$ +
+ a. multipl. mit der Summe der $(n-1)$ ersten natürlichen Zahlen d. h. mit der $(n-1)$te figurirten Zahl d. 2ten Ordnung $= \frac{(n-1)n}{2}$.
+ d. multipl. mit d. Summe der $(n-2)$ ersten ~~figurirten~~ Zahlen d. 3te Ordnung (Trigonalzahlen) $= \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}$.

also $S = nb + a(n-1)\frac{n}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} d = \frac{n}{2}\left(\frac{6b+3a(n-1)+(n-1)(n-2)d}{3}\right)$
$= \frac{2.3.nb + 3a(n-1)n + nd(n-1)(n-2)}{1.2.3}$

§12

Beispiel. 1. 4. 9; 16. 25, 36, 49. 64, 81, 100.
ist eine Progression der zweiten Ordnung denn ihre Differenzen bilden eine arith. Progression der 1ten Ordnung, als

3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; der Differenz

die Zahl 2 ist. Im Vergleich gegen die Reihe b, $b+a$; $b+2a+d$, $b+3a+3d$, ist also hier $b=1$. $b+a=4$.
$b+2a+d=9$; also hieraus b, a; und d entwickelt so ist $b=1$; $a=3$; $d=2$.

Die Summe dieser Reihe bis zum 20ten Gliede würde also seyn $= 20b + \frac{19.20}{2}.a + \frac{18.19.20}{1.2.3}d =$

$= 20 + 570 + 2280 = 2870$

als die Summe der Quadratzahlen von 1 bis 20^2.

nach der Formel

$10(\cancel{2}+\cancel{3}.19+19.\cancel{18}.2) =$

$=10(2+15.19) = 10.287 = 2870$

§13.

Beispiel. Es sey $b=2$, $a=3$, $d=1$, so ist die Reihe

2; 5; 9; 14; 20; 27; 35; 44; 54; 65;

und die Summe der 10 ersten Glieder $= 20+135+120 = 275$

§14.

Wenn man die Summen einer Progr: der zweiten Ordnung nach einander bis zum 1ten 2ten 3ten u. s. w. Gliede sucht, so entsteht eine Progression der 3ten Ordnung, die nach §11, so ausgedrückt würde:

1te Gl $= b$
2te Gl $2b+a$
3te Gl $3b+3a+d$
4te Gl $4b+6a+4d$
5te Gl $5b+10a+10d$
6te Gl $6b+15a+20d$
7te Gl $7b+21a+35d$

nte Glied $= nb + \frac{n.(n-1)}{2}a + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}d$.

Die Differenzen sind $(b+a)$, $(b+2a+d)$, $(b+3a+3d)$ also eine Progress: der 2ten Ordnung

Eine Progression der 3ten Ordnung könnte also allgemein so dargestellt werden:

erstes Glied .... c.

zweites ——— $c+b$

drittes ——— $c+2b+a$.

viertes ——— $c+3b+3a+d$

fünftes ——— $c+4b+6a+4d$

~~[illegible]~~

$$n\text{tes Glied} = c+(n-1)b+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}a.+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.}$$

$$n+1\text{tes Glied} = c+nb+\frac{n.(n-1)}{2}a+\frac{(n).(n-1)(n-2)}{1.2\,3}.d$$

§ 15.

Hier ist offenbar die Summe von n Gliedern $=$ nc +

\+ b, multiplicirt mit der Summe der $(n-1)$ ersten natürlichen Zahlen $=\frac{n.(n-1)}{2}$

\+ a, multip: d. d. Summe der $(n-2)$ ersten figur: Zahlen der zweiten Ordnung $=\frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3.}$

\+ d, multipl. d. d. Summe d. $(n-3)$ ersten figur: Zahlen der 3ten Ordnung $=\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.}$

$$S = nc+b\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)+a.\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}+d\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} =$$

$$=\frac{4!nc+3.4bn(n-1)+4a.n(n-1)(n-2)+d\,n.n-1.n-2.n-3}{4!}$$

$$=\frac{n}{4!}\left(4!c+3.4.b(n-1)+4a(n-1)(n-2)+d(n-1)(n-1)(n-3)\right)$$

§ 16.

Beispiel. Die Cubi von Zahlen, die in einer gewöhnlichen arithmetischen Progression fortgehen, bilden eine arithmetische Progression der dritten Ordnung. Will man daher die Summe der Cuben der ungeraden Zahlen 1, 27, 125; 343, 729, u.s.w. bis zum 10ten Gliede finden so ist hier $c=1.$ $b=26$ $a=72$; $d=48$. Daher ist hier die Summe von 10 Gliedern $=10+45.26+120.72+210.48=19900$.

Cf. pag 68.

§ 17.

Wenn man in einer numerischen Gleichung eines höhern Grads nach und nach für x Werthe setzt, die um gleich viel verschieden sind, so bilden die so gefundenen Werthe für die Summen der Glieder eine arithmetische Progression von eben der Ordnung von welcher die Gleichung ist.

Beispiel. Die Gleichung sey $x^4 - px^2 + qx + r = 0$, oder wenn man andre Werthe als die wahre Wurzel für x setzt, $x^4 - px^2 + qx + r = y$ oder wenn man andre Werthe als die wahren Wurzeln für x setzt. †

$$x^4 - px^2 + qx + r = y.$$

wo p, q, r bestimmte Zahlen sind. Setzt man hier

$x = a$, $x = a+1$; $x = a+2$; $x = a+3$; $x = a+4$.

so wird

$$y = a^4 - pa^2 + qa + r$$

$$y = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1 - pa^2 - 2pa - p + qa + q + r$$

$$\text{Diff.} = 4a^3 + 6a^2 + (4-2p)a + 1 - p + q;$$

$$y = a^4 + 8a^3 + 24a^2 + 32a + 16 - pa^2 - 4pa - 4p + qa + 2q + r$$

$$\text{Diff.} = 4a^3 + 18a^2 + (28-2p)a + 15 - 3p + q;$$

$$y = a^4 + 12a^3 + 54a^2 + 108a + 81 - pa^2 - 6pa - 9p + qa + 3q + r$$

$$\text{Diff.} = 4a^3 + 30a^2 + (76-2p)a + 65 - 5p + q;$$

$$y = a^4 + 16a^3 + 96a^2 + 256a + 256 - pa^2 - 8pa - 16p + qa + 4q + r$$

$$\text{Diff.} = 4a^3 + 42a^2 + (148-2p)a + 175 - 7p + q;$$

† der Grund liegt darin daß bei Erhebung der Werthe für x, in die verschiedenen Potenzen die zufolge 1, 2, 3 etc oder eine andere arithm: Progr: zu denselben Potenzen erhoben werden müssten daher arithm progress: dieselben Ordnungen bilden, und zu denen gezeigtermassen addirt die Summe wieder solche Progressionen bilden. so sind 1, 16, 81, 256 etc die biquadrate von 1, 2, 3, 4 eine Progr: der 4 Ord.

Diese Unterschiede welche ich die ersten Unterschiede nennen wollen, bilden eine Progression der dritten Ordnung, ihre Unterschiede welche die zweiten Unterschiede der Hauptreihe heissen bilden eine der zweiten Ordnung u. s. w.

Erste Unterschied. | Zweite Differenz | Dritte Differenz | Vierte Diff:

$$\left.\begin{array}{l} 4a^3+6a^2+(4-2p)a+1-p+q; \\ 4a^3+18a^2+(28-2p)a+15-3p+q; \\ 4a^3+30a^2+(76-2p)a+65-5p+q; \\ 4a^3+42a^2+(148-2p)a+175-7p+q; \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 12a^2+24a+14-2p; \\ 12a^2+48a+50-2p \\ 12a^2+72a+110-2p \end{array} \quad \begin{array}{l} 24a+36 \\ 24a+60 \end{array} \quad +24$$

Da nun jede vollst. Gl. der m^{ten} Ordn. aus $m+1$ Gliedern besteht, so folgt, daß bei den erhaltenen Differenzen die Glieder die ersten Glieder der Gleichungen m^{ten} Ordn. also stets = seien müssen, die zweiten eine progr. der 1 Ordn., die dritten der 2^{ten} Ordn. u. s. w. bilden. Ist daher die Gl. der m^{ten} Ordn. für $x=a$ bekannt, so sind dadurch alle übrigen Gl. für $x=a+2$, $a+3$ etc. nach den Lehren der arithm. progr. zu erhalten, wenn man die Gl. durch Coeff. vollständig macht und die Diff. ... ist ferner die Gl. für $x=a+1$ da schon immer eine vollst. ist, bekannt. Da aber bei der 3^{ten} Ordn. 2 Diff. also 3 Gl. bei der 9^{ten} 4 diff. also 5 Gl. nöthig sind so ist diese Bestimmungsweise nur illusorisch.

der vierte Unterschied hängt gar nicht mehr von a oder den ersten für x willkürlich angenommenen Werthe ab und ist folglich unveränderlich; die Reihe der dritten ~~Ordnung~~ Differenzen ist eine Progression der ersten Ordnung, die Reihe der zweiten Differenzen eine Progression der zweiten Ordnung; die Reihe der ersten Differenzen eine Progression der dritten Ordnung, die Reihe nach den Werthe der Gleichung selbst also eine Progression eben der Ordnung zu welcher die Gleichung gehört.

§ 18.

Diese Betrachtung dient, um aus den Resultaten gewisser gleichförmig zunehmender Werthe von x mehrere Bestimmungen zu finden. Es sey

$$x^5-180x^2+7x-9=y,$$ und man sucht die Werthe für x, wogegen y verschwindet.

x =	zahl y =	1te Diff.	2te Diff.	3te Diff.	4te Diff.	5te Diff.
0	−9	−172	−330	+150	+240	+120
+1	−181	−502	−180	+390	+360	
+2	−683	−682	+210	+750		
+3	−1365	−472	+960			
+4	−1837	+488				
+5	−1349					

Die fünfte Differenzreihe ist in allen Gliedern gleich; das nächste Glied der früheren Differenz Reihe wird also leicht gefunden

x =	y =	1 Diff.	2te Diff.	3te Diff.	4te Diff.	5te Diff.
						+120
					+480	+120
				+1230	+600	+120
			+2190	+1830	+720	
		+2678	+4020	+2550		
+6	+1329	+6698	+6570			
+7	+8027	+13268				
+8	+21295					

Dritter Abschnitt.

Von den Permutationen.

§ 19.

Wenn eine Anzahl verschiedener Größen a. b. c. d u. s. w. gegeben ist, so nennt man es: diese Größen permutiren, wenn dieselbe Größe in eine andere Ordnung gestellt wird. z. B. abcd kann in abdc permutirt werden. Unsere Absicht ist hier zu bestimmen wie viele solcher Versetzungen bei gegebener Zahl und Art der Größen möglich sind.

§20.

Lehrsatz. Wenn m von einander verschiedene Größen gegeben sind, so ist die Anzahl der möglichen Permutationen gleich dem Producte aller natürlichen Zahlen von 1 bis m, letztere mit eingeschlossen.

Beweis. Sind nur zwei verschiedene Größen a und b da, so sind nur zwey Anordnungen ba, ab möglich, nämlich b vor a, oder nach a.

Sind 3 verschiedene Größen a, b, c, so kann man in jede jener zwey Anordnungen der zwey Größen die dritte an drei verschiedene Plätze setzen; und ab wird also. abc; acb, cab, und ba wird:

bac, bca, cba;

drey unter sich verschiedene Größen erlauben also 2 mal 3 Versetzungen.

Sind vier verschiedene Größen a, b, c, d, da, so läßt sich in jede Anordnung dreier von ihnen, die vierte an vier verschiedenen Stellen setzen (nämlich 1te, vornen, 2te nach der ersten 3, nach der 2ten, 4te nach der dritten) Jede Permutation der drey ersten Größen giebt also vier Permutationen aller; folglich die sechs Permutationen jeder drei geben 4×6, d.h. 1.2.3.4. Permutationen der vier Größen.

Es wird aus abc .... $abcd$, $abdc$, $adbc$; $dabc$.
acb .... $acbd$, $acdb$. $adcb$; $dacb$.
cab .... $cabd$, $cadb$, $cdab$, $dcab$.
bac .... $bacd$, $badc$, $bdac$, $dbac$.
bca — $bcad$, $bcda$; $bdca$, $dbca$.
cba —— $cbad$, $cbda$, $cdba$ $dcba$

und so ist klar daß mehrere Permutationen nicht möglich sind.

Setzt man zu diesen 4 Größen eine fünfte, so kann diese in jeder dieser Permutations Formen fünf verschiedene Plätze einnehmen, jede jener 24 Permutations formen, giebt also nun 5, alle also 5 . 24. d. h. 1.2.3.4.5. Permutationsformen für die fünf Größen a, b, c, d, e.

Eben so kann man fortschließen und zeigen daß für m verschiedene Größen die Anzahl der Permutations formen $= 1\,2\,3\,4 \ldots m$ ist $= m!$ (nach Kramp)

§ 21.

<u>Lehrsatz</u>. Ist zwar die Anzahl der zu permutirenden Größen $= m$ aber sie sind nicht alle verschieden, sondern einige einander gleich, so findet man die Zahl der möglichen Permutationen wenn man jenes Produkt $1.2.3.4 \ldots m$, dividirt durch die Anzahl derjenigen Permutationen, welche die unter sich gleiche Größen zulassen würden, wenn sie ungleich wären.

<u>Beweis</u>. Sind unter den Größen a, b, c, d, e die Größen $a = b$, so ist ab nicht mehr von ba verschieden, sondern beide gehen in aa über; eben so ist die Form acdb nicht mehr von bcda verschieden, sondern beide gehen in acda über. Die Anzahl der vorhin möglichen Permutationen, vermindert sich also auf die Hälfte, wenn unter den m Größen zwei gleiche sind, oder ist $= \frac{m!}{2!}$ wo 1.2. die Permutationszahl

der gleichen Größen ist.

Wären drei Größen gleich $a = b = c$, so gehen die sechs Formen abc, acb, bac, bca, cab, cba, in eine einzige aaa über, jede sechs Permutations Formen (worin nämlich grade nur diese Größen permutirt sind, wie in fabcdegh und fcaedgbh und ähnliche) geben nur eine, und die Anzahl der Permutationen ist $= \frac{m!}{3!}$.

Eben so läßt sich zeigen, daß, wenn unter m Größen vier gleich sind, die Permutationszahl $= \frac{m!}{4!}$ ist, und für n gleiche Größen die Anzahl der Permutationen $\frac{m!}{n!}$.

Befänden sich außer jenen n Größen noch andere wiederum unter sich gleiche Größen, unter der gesuchten Anzahl, so würde ihretwegen die Zahl der Permutationen ebenfalls vermindert. Gesetzt unter den m Größen ~~komme~~ a, n mal, b, p mal vor, so gehen ihretwegen allemal $n!$, $p!$ Permutationen in eine zusammen, und die ganze Zahl aller noch möglichen Permutationen, beträgt nur $= \frac{m!}{n!.p!}$.

So läßt sich der Beweis für alle Fälle fortführen.

§ 22.

Beispiel. Es sind 10 Größen gegeben unter denen 4 gleich $= a$, 3 gleich $= b$, und die ungleichen: c.d.e sind. Diese geben $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.\,1.2.3}$ Permutationen deren Zahl $5.7.8.9.10$ ist.

Beispiel. Wenn unter den 10 Größen, 4 gleiche $= a$, und 6 gleiche $= b$, so ist die Anzahl der Formen $= \frac{1.2.\dots 10}{1234.\,12\dots 6}$.
deren einige folgende sind.

aaaabbbbbb
aaababbbbb
aaabbabbbb

Beispiel. Unter 6 Größen sind 4 gleiche $= a$ und zwey gleiche $= b$, giebt $\frac{6!}{4!\,2!} = 15$ Formen, nämlich:

1. aaaabb	6. aabbaa	11. abbaaa
2. aaabab	7. abaaab	12 baaaba
3. aaabba	8. abaaba	13. baabaa
4. aabaab	9. baaaab	14 babaaa
5. aababa	10 ababaa	15 bbaaaa

mehrere sind nicht da.

Beispiel. Unter 5 Größen sind 3 gleiche $= a$, und zwey andere $= b$ und c, Anzahl der Formen $= \frac{5!}{3!} = 20$.

1. aaabc	5, aaacb.	9. aabca	13. bcaaa	17. abcaa
2, aabac	6. aacab	10 abaca	14. aacba	18 cbaaa
3. abaac	7 acaab	11 baaca	15 acaba	19. acbaa
4 baaac	8 caaab.	12 bacaa	16 caaba	20. cabaa

§ 23.

Bestehen die m Größen aus n gleichen $= a$ und aus $m-n$ gleichen $= b$, so ist die Anzahl der Permutationsformen $\quad m > n$

$$= \frac{12.34\dots(m-2)(m-1).m}{12.34\dots n.\ 123\dots(m-n)} = \frac{123\dots\cancel{(m-n-2)}\cancel{(m-n-1)}\cancel{(m-n)}(m-n+1)\dots m.}{\cancel{123\dots(m-n)}.\ 123\dots n.}$$

$$= \frac{m.(m-1)(m-2)(m-3)\dots\dots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\dots\dots n.}$$

Die bequemere Formel ist aber $= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\dots m}{1.2.3\dots\dots m-n}$

§ 24.

Beispiel. Für 7 Größen, die aus 5 gleichen $= a$ und 2 gleichen $= b$ bestehen, ist die Permutationszahl $= \frac{7.6}{1.2}$.

Beispiel. Für 12 Größen, unter denen 8 gleich a und $4 = b$ sind, ist die Anzahl der Formen $= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

~~Dieser Satz ist die Umkehrung der Formel der figur. Zahlen, allein er ist dem §15 analog und ergiebt sich wenn man statt m in die bekannte Formel $m-(n+1)$ setzt, denn da die m^{te} $(n+1)^{te}$ Ordnung ist, so gilt es auch in diesem $m(n+1)$ Ausdrucke.~~ ~~Cf. pag 75.~~

§25.

Der Ausdruck $\frac{m.(m-1)(m-2) \ldots\ldots (m-n+1)}{1.2.3 \ldots\ldots n}$ welcher die $(m-n+1)^{te}$ figurirte Zahl der n^{te} Ordnung ist, stellt also die Anzahl der Permutationen für den Fall dar, da unter den m Größen n gleiche und wieder $(m-n)$ gleiche sind. Dieser Ausdruck wird $= m$ oder die m^{te} natürliche Zahl wenn $n = m-1$ ist; er wird $= \frac{m.(m-1)}{1.2}$ oder die $(m-1)^{te}$ figurirte Zahl der zweiten Ordnung, wenn $n = (m-2)$ ist; er wird $= \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}$ = der $(m-2)^{ten}$ figurirten Zahl der dritten Ordnung, wenn $n = m-3$ ist, und allgemein = der $(n+1)^{ten}$ figurirten Zahl der $(m-n)^{te}$ Ordnung ~~oder~~ welches einerley ist, = der $(m-n+1)^{te}$ Zahl der n^{te} Ordnung.

§26.

Daß dies einerley ist, läßt sich so beweisen:

Es ist der Ausdruck (§23) $= \frac{1.2.3.4 \ldots\ldots m}{1.2.3 \ldots n . 1.2.3 \ldots m-n}$ sowohl als $\frac{m(m-1)(m-2) \ldots\ldots (m-n+1)}{1.2.3 \ldots\ldots n}$ also =

$$= \frac{1.2.3 \ldots\ldots (n-1) n . (n+1) \ldots\ldots (m-1) . m}{1.2.3 \ldots\ldots (n-1) n . 1.2.3 \ldots\ldots (m-n)}$$

$$= \frac{m.(m-1)(m-2) \ldots\ldots (n+1)}{1.2.3 \ldots\ldots (m-n)}$$

Jenes war der Ausdruck für die $(m-n+1)^{te}$ Zahl der n^{ten} Ordnung; dieses ist der Ausdruck für die $(n+1)^{te}$ Zahl der $(m-n)^{te}$ Ordnung.

Es ist z. B. die dritte der sechsten Ordnung gleich der 7^{te} der zweiten Ordnung, denn die dritte der sechsten Ordnung ist $\frac{3.4.5.6.7.8}{1.2.3.4.5.6}$, die 7^{te} der 2^{te} Ordnung $= \frac{7.8}{1.2}$; eben so die 4^{te} d. 9^{te} Ord. = d. 10^{te} d. 3^{te} Ordn. nemlich

$$\frac{4.5.6.7.8.9.10.11.12}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} = \frac{10.11.12}{1.2.3}$$

Vierter Abschnitt.

Von den Combinationen.

§27.

Wenn mehrere gleiche oder ungleiche Größen gegeben sind: so heißt es, sie zu zwey combiniren, wenn man sie je zwei und zwei zusammenordnet; man combinirt sie zu dreien, wenn man je drei und 3 zusammenordnet, u.s.w.

§28.

Die Combinationen werden als verschieden angesehen wenn sie nicht aus denselben Größen zusammengesetzt sind; auf die Ordnung in der Stellung kömt es dabei nicht an. So sind aus den 3 Größen a, b, c nur drey verschiedene Combinationen zu zwey möglich, nämlich: ab, ac, bc.

§29.

Aufgabe. Es sind m Größen, alle von einander verschieden gegeben, man sucht wie viele Combinationen zu zwey, wie viele zu drei, zu vier zu n, möglich sind.

Auflösung. Die Anzahl der Combinationen zu zwey ist $= \frac{m.(m-1)}{1.2.}$, die Anzahl der Combinationen zu drei ist $= \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}$, die Anzahl der Combinationen zu vier ist. $\frac{m.(m-1)(m+2)(m-3)}{1.2.3.4.}$, die Anzahl der Combinationen zu jeden n Größen ist $= \frac{m.(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1\,2\,3\ldots\ldots n}$.

Beweis. Wenn jede Größe a, b, c, d, e u.s.w. m an der Zahl gegeben sind, so kann man die mögliche Anzahl der Combinationen zu zwei, worin keine der Größen doppelt vorkommen soll, so übersehen,

a

a kann mit allen $(m-1)$ übrigen Größen verbunden werden, b, kann (da die Verbindung mit a schon da ist) noch mit $(m-2)$ Größen, c kann noch mit $m-3$ Größen verbunden werden, und die Anzahl der Combinationen ist die Summe der Reihe $m-1$, $m-2$, $m-3$, bis zu 1 fortgesetzt also = der $(m-1)^{ten}$ Trigonalzahl = $\frac{m.(m-1)}{1.2.}$

Aus diesen Combinationen zu zwei leitet man die zu drei ab, indem man jede von jenen mit einer der $(m-2)$ übrigen Größen verbindet, z. B. ab verbindet mit c, mit d, u. s. w. das giebt, wenn man alle verbundenen Combinationen zu zwei durchgeht $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.}$ Verbindungen; Aber es ist offenbar, daß ab mit c verbunden eben das giebt wie ac mit b, und eben das wie bc mit a verbunden, daß wir also nach jenem Verfahren eine jede Combination 3 mal erhalten, und daß die wahre Anzahl der Combinationen zu drei also nur ist. $\frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3.}$ = der $(m-2)^{ten}$ figurirten Zahl der dritten Ordnung.

Aus der Combination zu drei leitet man die Combinationen zu vier her, indem man jede der Combinationen zu drei mit jeder der $m-3$ übrigen Größen verbindet. Aber abc mit d verbunden, giebt eben das wie abd mit c verbunden, wie acd mit b oder bcd mit a verbunden; wir würden also durch jede Combination viermal erhalten, und die wahre Anzahl der Combinationen = $\frac{m.m-1.m-2.m-}{1.2.3.4.}$ = der $(m-3)^{te}$ figurirten Zahl d. vierten Ordnung.

Der Zähler für die Anzahl jeder folgenden Combinations Art, die nämlich eine Größe mehr enthalten soll, ein Factor gleich der Anzahl der übrig gebliebenen Größen hinzu, und ein Divisor gleich der Zahl der jetzt zu verbindenden Größen hinzu, woraus sich die allgemeine Form für die Combinationen zu n ergiebt, welche einerlei ist mit der $(m-n+1)^{te}$ figurirten Zahl der n^{te} Ordnung.

§ 30.

Beispiel. Wie viele Combinationen geben 10 Größen

Also auch hier kann ab ... gefunden zu n Combinationen sind die Combinationen zu n = gleich den Combinationen zu $m-n$ aus dem grunde der figurirten Zahlen

Sie geben $\frac{10.9}{1.2}$ Combinationen zu zwei; 45

$\frac{10.9.8}{1\ 2\ 3}$ Combinat: zu drei; 120

$\frac{10.9.8\,7}{1.2.3.4}$ Combinat. zu vier; 210

$\frac{10.9.8.7.6}{1.2\,3.4.5}$ Comb: zu fünf; 252

$\frac{10.9.8.7.6\,5}{1\,2\,3\,4\,5\,6} = \frac{10.9.8\,7.}{1\,2\,3\,4}$ zu sechs; 210.

$\frac{10.9.8.7.6\,5.4.}{1.2.3.4\,5\,6\,7.} = \frac{10.9\,8}{1.2.3}$ zu sieben; 120

$\frac{10.9.\cancel{8}.\cancel{7}.\cancel{6}\cancel{5}\cancel{4}\cancel{3}}{1.2.\cancel{3}.\cancel{4}\cancel{5}\cancel{6}.\cancel{7}\cancel{8}} = \frac{10.9}{1.2}$ zu acht; 45

~~10.9.8.7.6.5.4.3.2~~ 10. Combinationen zu 9. — 10

abcdefghik, geben ab, ac, ad, ae, af, ag, ah, ai, ak,
bc, bd, be, bf. bg, bh, bi, bk
cd, ce, cf, cg, ch, ci, ck,
de, df, dg, dh, di, dk,
ef, eg, eh ei, ek,
fg, fh, fi, fk,
gh, gi, gk,
hi, hk,
ik,

und zu neun Combinationen geben sie

abcdefghi. abcdefghk.
abcdefgik. abcdefgik.
abcefghik. abcdefhik. acdefghik.
abdefghik. abcdfghik. bcdefghik.

Combinationen zu 8.

abcdefgh,	abcdefgi	abcdefgk,
abcdefhi,	abcdefhk,	abcdefik,
abcdeghi,	abcdeghk,	abcdegik
abcdehik,	abcdfghi,	abcdfghk,
abcdfgik,	abcdfhik,	abcdghik,
abcefghi,	abcefghk,	abcefgik,
abcefhik,	abceghik,	abcfghik,
abdefghi,	abdefghk,	abdefgki,
abdefhik,	abdeghik,	abdfghik
abefghik,	acdefghi,	acdefghk,
acdefgik,	acdefhik,	acdeghik,
acdfghik,	acefghik,	adefghik,
bcdefghi,	bcdefghk,	bcdefgik,
bcdefhik,	bcdeghik,	bcdfghik,
bcefghik,	bdefghik,	cdefghik.

45 Combinationen.

Variationen

heißen Permutationen sämtlicher Combinationen —
die Combin. zu 2. sind $\frac{m(m-1)}{1.2}$, jede Ambe gibt aber 1.2
permut. daher ist die Zahl der Var. $m(m-1)$
die Ternen sind $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$, jede Terne gibt aber 1.2.3
permut. daher ist die Zahl der V. $= m(m-1)(m-2)$
Allgemein die Zahl der Var. von m Größen
zu n gibt

$$m(m-1)(m-2).\,....(m-n+1)$$

Fünfter Abschnitt.

Vom binomischen und polynomischen Lehrsatze.

für ganze, positive Exponenten.

§31.

Wir nennen eine Größe monomisch, wenn sie aus einem einzigen Gliede besteht, binomisch wenn sie aus zwey durch + oder − verbundenen Gliedern besteht; polynomisch, wenn sie aus mehreren Gliedern besteht.

Der binomische Lehrsatz lehrt die Potenzen binomischer Größen entwickeln, der polynomische Lehrsatz die Potenzen polynomischer Größen.

§32.

Wenn man zwei polynomische Factoren in einander multiplicirt, so enthält das Product m.n. Glieder, wenn einer der Factoren m. Glieder, der andre n Glieder hatte. Die ganze Multiplication wird dadurch vollendet, daß man jedes Glied des einen Factors mit jedem Gliede des andern Factors verbindet. Eben so geben 3 polynomische Factoren von m, von n, und von p Gliedern ein Product von m.n.p. Gliedern.

denn es seien die beiden polyn: Factoren A und B, so muß A mit B multipl. n Glieder geben Aα, Aβ, Aγ etc — jeder dieser Producte hat m Glieder, weil A aus m Gliedern besteht, also ist die Zahl aller Producte = m.n

Sind, wie dies gewöhnlich der Fall ist, die Factoren nach Potenzen einer Hauptgröße x geordnet, so läßt sich aus der regelmäßigen Folge der Combinations Verbindungen eine bequeme Regel herleiten, um alle Glieder des Products, welche eine gewisse Potenz von x enthalten, zu finden.

z.B.

z. B. $a + bx + cx^2 + dx^3$

und $f + gx + hx^2 + ix^3$

und $l + mx + nx^2 + px^3$

multiplicirt. Hier erhält man alle Glieder die x^1 enthalten wenn man aus zwey Factoren die von x freyen sind Glieder nimt und aus einem Factor das Glied welches x^1 enthält, das Product kann also x^1 nur in folgenden Gliedern enthalten: $afmx$, $algx$, $flbx$, dagegen kann x^2 auf eine doppelte weise vorkommen.

Erstlich indem 2 von x freien Glieder in ein Glied das x^2 enthält multiplicirt werden, zweitens indem ein Glied mit x^0 in zwey mit x^1 multiplicirt wird, Alle Glieder die x^2 enthalten sind also: $afnx^2 + alhx^2 + flcx^2 + agmx^2 + fbmx^2 + lgbx^2$.

Da allemal drei Glieder und zwar aus jedem Factor eins genommen wird, so kann x^3 entstehen aus $x^0 . x^0 . x^3$; aus $x^0 x^1 x^2$ und $x^1 x^1 x^1$ und alle Glieder die x^3 enthalten sind: $afpx^3 + alix^3 + agnx^3 + bfnx^3 + fmcx^3 + glcx^3 + amhx^3 + blhx^3 + bgmx^3 + fldx^3$. — u. s. w.

§ 33.

Sind alle Factoren gleich, so entsteht eine Potenz dieses Factors; die $n$te Potenz wird wenn der Factor m Glieder hat, m^n einzelne Glieder enthalten, worunter indess mehrere gleiche vorkommen können. Jedes dieser Glieder enthält n Factoren, die aus den gleichen oder verschiedenen Gliedern der gleichen Größen, die

Wenn auch die Factoren nicht = wären, aber wenn sie = polynomisch sind ist die Zahl der Glieder = m^n. Denn sind's n Factoren jeder von m Gliedern so wird nach § 32. die Zahl der Glieder des Productes = seyn $m.m.m.\ldots$ (n mal) also = m^n also die 2te Potenz des binoms = 4 Gl:
die 3te — 8 —
die 4te — 16 —
die 5te — 32 etc

die in einander multiplicirt werden hergenommen werden. Denn die Glieder des quadratischen Polyn: sind amben, des kubischen ternen, des biquadrat: quaternen u.s.f. aus dem Grunde der algebr: Multiplication. Das Polynom in der n^{ten} Potenzen, hat also $n$ternen zu Gliedern.

Es sey von dem Binom $(a+b)$ die n^{te} Potenz zu suchen. Jedes ihrer Glieder enthält n Factoren und da diese nur $= a$ oder $= b$ seyn können: so finden folgende Verschiedenheiten statt: erstl: a wird n mal als Factor genommen zweitens a wird $(n-1)$ mal als Factor und b einmal genommen drittens a wird $(n-2)$ mal und b, 2 mal als Factor genommen u.s.w. Es ergeben sich nur $(n+1)$ verschiedenartige Glieder, da doch die Potenz 2^n Glieder enthalten muss es ist aber leicht zu übersehen, daß manche Glieder (gleichartige) mehrmal wiederholt vorkommen müssen. Jede gleichartige Terne kömmt nämlich so oft vor als sie Permutationen formen zuläßt, cf p. 76.
z.B. $a^{n-2}b^2$ kömmt vor $\frac{1.2.3.\dots n-2.\ n-1.n.}{1.2.3.\dots(n-2).1.2.} = \frac{n.n-1}{1.2.}$ mal daß sie so oft vorkommen, erhellt, wenn man sich erinnert daß aus jedem der n gleichen Grundfactoren ein Glied genommen wird; stellen wir nun also diese Glieder in der Ordnung vor wie sie dem ersten, zweiten, dritten z. Factor angehören, so können ja diese $aaa\dots\ bb\dots$ auf so mannigfaltige Art genommen werden, als Permutationen möglich sind. (unklar)

Die Potenz $(a+b)^n$ besteht also aus Gliedern die in Beziehung auf a und b von folgender Form sind, a^n; ~~ak~~ $a^{n-1}b$; $a^{(n-2)}b^2$; $a^{(n-3)}.b^3$ .... u.s.w. Jede derselben kömmt so oft vor als sie permutirt werden kann, und die ganze Potenz ist also entwickelt, wenn man alle diese Formen jede mit ihrer Permutationszahl multiplicirt und in eine Summe vereinigt.

Folglich ist für alle positiven ganzen Exponenten

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n.(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.} a^{n-4} b^4 + \dots\dots \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3.} a^3 b^{n-3} + \frac{n.(n-1)}{1.2} a^2 b^{(n-2)} + n.a b^{(n-1)} + b^n$$

welches die Form des binomischen Lehrsatzes ist

§35.

Die den Formen $a^{n-2} b^2$ und den übrigen beigefügten Coefficienten heißen nun die der n^{te} Potenz entsprechenden Binomial-Coefficienten, und man bezeichnet sie wohl für das r^{te} Glied der n^{te} Potenz mit $\overset{n}{\mathfrak{B}}{}^r$, so daß $\overset{n}{\mathfrak{B}}$ den ersten $\overset{n}{\mathfrak{B}}{}^2$ den zweiten u. s. w. darstellt.

das 6^{te} Glied $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} a^{n-5} b^5$

§36.

Jedes r^{te} Glied der entwickelten Potenz $(a+b)^n$ läßt sich nun angeben, es ist nämlich $\frac{n.(n-1)\dots(n-r+2)}{1.2.\dots(r-1)} a^{n-r+1} b^{r-1}$ und in diesem allgemeinen Gliede ist die ganze Entwicklung der Reihe gegeben.

§37.

Die Entwickelung ist nun nicht schwierig wenn auch die auf die Potenz n zu erhebende Wurzel ein Polynom ist. Sucht man $(a+b+c+d+e+f)^n$, so besteht jedes Glied dieser Potenz aus n Factoren, diese n Factoren können alle gleich seyn, dann ist das Glied von der Form a^n es können $(n-1)$ gleich seyn dann ist das Glied von der Form $a^{n-1}b$, es kann einer $(n-2)$ und einer 2 mal vorkommen, $a^{n-2}b^2$, es kann einer $(n-2)$ mal ein zweiter einmal ein dritter einmal vorkommen, $a^{n-2}b.c$, es

d. h. wenn einer (n-3) mal und ein zweiter dreimal $a^{n-3}b^2$

d. h. wenn einer (n-3) mal, einer zweimal, und einer einmal vorkommen, $a^{n-3}b^2c$. d. h. wenn einer (n-3) mal und drey andere einmal vorkommen u. s. w. Jedes Glied kömmt so oft vor als die Permutationszahl angiebt, die in allen erwähnten Fällen würde entstehen. Unsere Potenz wird demnach werden:

der zweite Coeff: entstand aus $\frac{1.2.3\ldots\ldots(n-3)(n-2)(n-1).n}{1.2.3\ldots\ldots(n-3)(n-2).1.2}$

der 4te Coeff: entstand aus $\frac{1.2.3\ldots\ldots(n-3)(n-2)(n-1).n}{1.2.3\ldots\ldots(n-3).1.2}$

$$(a+b+c+d+e+f)^n = a^n + na^{n-1}(b+c+d+e+f)$$

$$+\frac{n.(n-1)}{1.2}a^{n-2}(b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$$

$$+\frac{n.(n-1)}{1}a^{n-2}(bc+bd+be+bf+cd+ce+cf+de+df+ef)$$

Combinat. mit Wiederhol. zu zwei

$$+\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}(b^3+c^3+d^3+e^3+f^3)$$

$$+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.1}a^{n-2}(b^2c+b^2d+b^2e+b^2f+c^2b+c^2d+c^2e+c^2f+d^2b+d^2c+e\ldots)$$

$$+\frac{n.n-1.n-2}{1.1.1}a^{n-3}(bcd+bce+bcf+cde+cdf+def)$$

$$+\quad+\quad+\quad+\quad+$$

Combin. mit Wied. zu drei

§ 38.

Es ist nicht der Mühe werth bei einem Polynom zu verweilen, dessen Glieder so ganz ohne Regel an einander gehängt sind. Gewöhnlich ist das nach einer Potenz zu erhebende Polynom nach den Potenzen einer Hauptgröße so geordnet, daß diese regelmäßig fortgehe, und dann ergeben sich einige bestimmte Regeln für die Potenz Erhebung.

Es sey $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+gx^6+hx^7+ix^8+kx^9+lx^{10}++\ldots$ ein solches allgemeines nach fortlaufenden Potenzen Polynom.

Wollen wir hier die Entwicklung der $n$te Potenz suchen, so werden wir diese wieder nach den Potenzen von x

Das erste Glied ist
a^n das zweite ist mit x
verbunden, das erste
ist, und also bloß mit
a^{n-1} verbunden werden
kann, es wird also sein
$a^{n-1}.bx$ und der Coeff.
dazu ist $\frac{1.2.3....(n-1)n}{1.2.3..(n-1)} = n$
Das 3te Gl. ist mit x^2
verbunden, das kann
aus $x^0.x^2$ und $x^1.x^1$ entstehen also
$(a^{n-2}.c + a^{n-2}.b^2)x^2$
und mit dem Coeff:
$n(n-1)x^2.a^{n-2}\left(c+\frac{b^2}{1.2}\right)$
u. s. f.

geordnet vorlegen, und es ergiebt sich also hier ein anderer
Kunstgriff, welches uns in Stand setzt, gewisse Glieder
vollenständig einzeln specifisch anzugeben. Gesetzt es soll
das Glied ganz gefunden werden welches x^5 enthält
so müßten wir überlegen, wie x^5 aus n Factoren,
welche als einzelne Glieder unseres Polynoms vorkommen
kann zusammengesetzt werden. Dies kann geschehen, wenn
wir das Glied fx^5 mit $a^{(n-1)}$ multipliciren, denn a^{n-1}
stellt $n-1$ Factoren aus dem Polynom dar, und fx^5 einen,
es kann geschehen, wenn ex^4 mit bx und $a^{(n-2)}$ multiplicirt
wird, u. s. w.

Ueberhaupt kann die Potenz x^5 aus folgenden Zusammensetzungen hervorgehen; aus x^5; $x^4.x$; $x^3.x^2$;
aus $x^3.xx$. aus $x^2.x.xx$; aus x^2x^2x; aus $x.x.x.x.x$.
und dies giebt uns an, wie wir vollständig das gesuchte
Glied entwickeln, indem wir nämlich die gehörigen Factoren
zusammennehmen und mit ihrer Permutationszahl
multipliciren, dann aber alle so gefundenen einzelnen Theile summiren. So findet sich das Glied welches
x^5 enthält. =

$$n.a^{n-1}.fx^5 + n.n-1.a^{n-2}.ebx^3 + n.n-1)\,a^{n-2}.dcx^5$$
$$+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.1.}a^{n-3}db^2x^5 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.1.}a^{n-3}c^2bx^5$$
$$+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.1.2.3.}a^{n-4}cb^3x^5 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5.}a^{n-5}b^5x^5.$$

Sollte das Glied gefunden werden, welches x^{10} enthält

und

und denken wir uns das Polynom bis zu x^{10} fortgesetzt,
so läßt sich die Anzahl der einzelnen Theile dieses ganzen
Gliedes so übersehen. 10 kann entstehen, aus:

die Zahl dieser Combin: zu bestimmen kommt zur besondern [illegible]

10.	9.1.	8.1.1.	7.1.1.1	61111	5.1.1.1.1.1.	4.1.1.1.1.1.1.	
	8.2	7.2.1.	6.2.1.1	521.1.1.	42.1.1.1.1	321.1.1.1.1.	
	7.3	631.	5.3.1.1	4.3.1.1.1.	3.3.1.1.1.1	2.22.1.1.1.1.	
	6.4	622.	5.2.2.1	4.2.2.1.1	3.2.2.1.1.1.		
	5.5.	541.	4.4.1.1.	3.3.2.1.1.	2.2.2.2.1.1.		
		532.	4.3.2.1.	3.2.2.2.1.			
		442.	4.2.2.2.	2.2.2.2.2.			
		433.	3.3.3.1.				
			3.3.2.2.		3.1.1.1.1.1.1.1.	2.1.1.1.1.1.1.1.1.	
					2.2.1.1.1.1.1.1.		
						1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.	

das 10te Glied besteht also aus 42 Theilen und ist vollständig folgendes:

$$n.\ a^{n-1} l x^{10} + n.n-1.\ a^{n-2} x^{10} \left\{ bk + ci + dh + eg + \frac{f^2}{1.2} \right)$$

$$\cancel{+ \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2} f^2 x^{10}}$$

$$n.n-1.n-2.\ a^{n-3}.x^{10} \left\{ \frac{ib^2}{2} + hbc + gdb + \tfrac{1}{2} gc^2 + feb + fdc + \tfrac{1}{2} e^2 c + \tfrac{1}{2} e d^2 \right)$$

$$+ n.n-1.n-2.n-3.\ a^{n-4} x^{10} \left(\frac{h.b^3}{1.2.3.} + \frac{gcb^2}{1.2.} + \frac{fdb^2}{1.2.} + \frac{fc^2b}{1.2} + \frac{e^2b^2}{1.2.1.2} + edcb + \frac{ec^3}{1.2.3} + \frac{d^3b}{1.2.3.} + \frac{d^2c^2}{1.2.1.2.} \right)$$

$$+ n.n-1 \ldots\ldots n-4.\ a^{n-5} x^{10} \left(\frac{gb^4}{1.2.3.4} + \frac{fcb^3}{1.2.3} + \frac{edb^3}{1.2.3.} + \frac{ec^2b^2}{1.2.1.2.} + \frac{d^2cb^2}{1.2.1.2.} + \frac{dc^3b}{1.2.3} + \frac{c^5}{1.2.3.4.5} \right)$$

$$+ n.n-1 \ldots\ldots\ldots n-5.\ a^{n-6}.x^{10} \left(\frac{fb^5}{1.2.3.4.5} + \frac{ecb^4}{4!} + \frac{d^2b^4}{1.2.1.2.3.4} + \frac{dc^2b^3}{1.2.1.2.3} + \frac{c^4b^2}{4!\,2!} \right)$$

$$+ n.n-1 \ldots\ldots n-6.\ a^{n-7}.x^{10} \left(\frac{eb^6}{6!} + \frac{dcb^5}{5!} + \frac{c^3b^4}{1.2.3.1.2.3.4.} \right)$$

$$+ n.n-1 \ldots\ldots n-7.\ a^{n-8} x^{10} \left(\frac{db^7}{1.2\ldots 7.} + \frac{c^2b^6}{2!\,6!} \right)$$

$$+ n.n-1 \ldots\ldots n-8.\ a^{n-9} x^{10}.\ \frac{c.b^8}{8!}$$

$$+ n.n-1 \ldots\ldots n-9.\ a^{n-10}.x^{10}\ \frac{b^{10}}{10!}.$$

Betrachtet man x^{10}, aus so bekommen wir eine Parenthese wo die grössern nach a geordnet, und deren Parenthesen nach b geordnet, enthalten

§ 39.

Enthielte das Polynom nicht alle Glieder bis zu dem x^n, welches x^{10} enthalten sollte, so sind die Coeffizienten der fehlenden Glieder als $= 0$ zu betrachten; schlösse sich z. B. unser Polynom mit dem Gliede gx^6, so wären h. i. k. l. sämtlich $= 0$, und in unserem Ausdrucke für das Glied x^{10} würden viele Glieder wegfallen.

§ 40.

Wäre die gesuchte Potenz n niedriger als die in unserem Gliede vorkommende Potenz von x, so könnten wir nicht alle Zerlegungen der Zahl welche im letzten Beispiel 10 war, gebrauchen. Sucht man z. B. die 4te Potenz von $(a+bx+cx^2+ + + \dots lx^{10}++)$ so soll jeder einzelne Theil nur aus 4 Factoren zusammengesetzt werden, oder aus 4 Gliedern des gegebenen Polynoms bestehen. Producte also wie $b^{10}x^{10}$ dürfen nicht vorkommen, sondern von den Zerlegungen der Zahl 10 würden hier nur diej. brauchbar, wo sie in 1. oder 2. oder 3. oder 4 Theile zerlegt ist, das deutet sich auch in der allgemeinen Formel dadurch an, daß alle übrigen Glieder den Factoren $n-4$ enthalten, der jetzt gleich 0 wird.

§ 41.

Die Glieder des gegebenen Polynoms brauchen nicht gerade nach den ganzen auf einander folgenden Potenzen von x fortzugehen. Es sey das Polynom:

$$ax^{\alpha} + bx^{\alpha+b} + cx^{\alpha+2b} + dx^{\alpha+3b} \text{ etc.}$$

zur Potenz n zu erheben, denn geht diese Potenz fortlaufend

daß ihr erstes Glied $x^{\alpha n}$, ihr zweites $x^{\alpha n + b}$ u. s. w.
enthält, und man kann nach ähnlichen Ueberlegungen
jedes Glied finden. Verlangt man das Glied worin
$x^{\alpha n + 6b}$ vorkömmt, so kann dies aus n Factoren auf
folgende Weise entstehen:

aus $x^{\alpha(n-1)}$ und $x^{\alpha+6b}$.

aus $x^{\alpha(n-2)}$ und $x^{\alpha+b}$; und $x^{\alpha+5b}$

o. $x^{\alpha+2b}$ und $x^{\alpha+4b}$

o. $x^{\alpha+3b}$ und $x^{\alpha+3b}$.

aus $x^{\alpha(n-3)}$ und $x^{\alpha+b}\cdot x^{\alpha+b}\cdot x^{\alpha+4b}$;

oder $x^{\alpha+b}\cdot x^{\alpha+2b}\cdot x^{\alpha+3b}$;

oder $x^{\alpha+2b}\cdot x^{\alpha+2b}\cdot x^{\alpha+2b}$;

aus $x^{\alpha(n-4)}$ und $x^{\alpha+b}\cdot x^{\alpha+b}\cdot x^{\alpha+b}\cdot x^{\alpha+3b}$

oder $x^{\alpha+b}\cdot x^{\alpha+b}\cdot x^{\alpha+2b}\cdot x^{\alpha+2b}$

aus $x^{\alpha(n-5)}$ und $x^{\alpha+b}\cdot x^{\alpha+b}\cdot x^{\alpha+b}\cdot x^{\alpha+b}\cdot x^{\alpha+2b}$.

aus $x^{\alpha(n-6)}$ und $x^{\alpha+b}\cdot x^{\alpha+b}\cdot x^{\alpha+b}\cdot x^{\alpha+b}\cdot x^{\alpha+b}\cdot x^{\alpha+b}$

Das erste Glied entsteht
durch ax^{α} n mal genommen
also $a^{n}\cdot x^{\alpha n}$
das 2te Glied entsteht
durch ax^{α} (n−1) mal und
$bx^{\alpha+b}$ ein mal genommen
also $a^{n-1}\cdot bx^{\alpha(n-1)}\cdot x^{\alpha+b}$
$= a^{n-1}\cdot bx^{\alpha n+b}$ mit dem
Coeff: n.
das 3te Glied entsteht durch
ax^{α} (n−2) mal genommen
und durch $bx^{\alpha+b}$ 2 mal
genommen, oder durch
ax^{α} (n−1) mal und $cx^{\alpha+2b}$
ein mal genommen.
Im ersten Fall ist es =
$ax^{\alpha(n-2)}\cdot bx^{2(\alpha+b)} =$
$= abx^{\alpha n+2b}$
Im 2ten Fall ist es =
$ax^{\alpha(n-1)}\cdot cx^{\alpha+2b} =$
$acx^{\alpha n+2b}$ das ganze
Glied also ohne ~~mit~~ Coeff.
$= a(b+c)x^{\alpha n+2b}$ mit Coeff.
$;\ na\left(\frac{(n-1)b}{1.2}+c\right)x^{\alpha n+2b}$

Dritter Abschnitt.

Von der Richtigkeit des binomischen Lehrsatzes für negative und gebrochene Exponenten.

§ 41.

Unsere bisherige Entwickelung und Beweise gelten
offenbar nur, wenn das Binom oder Polynom auf
eine Potenz mit positiven, ganzen Exponenten erhoben
wird, oder nur da, wo der Begriff der Potenz in
seiner ursprünglichsten eigentlichen Bedeutung

vor.

verbunden. die Arithmetik zeigt daß wir diese Begriffe auf eine doppelte Art erweitern können. Haben wir einer aus gleichen Factoren zusammengesetzte Größe, so führt uns fortgesetztes Dividiren durch einen derselben Factoren zu einer niedrigeren Potenzen und endlich zu der, was wir Potenz mit negativen Exponenten nennen $(a+b)^{-n} = \frac{1}{(a+b)^n}$ d. h. eine Erweiterung des Begriffes der Potenz. Ferner haben wir irgend eine Größe und verlangen diese, als aus gleichen Factoren zusammengesetzt anzusehen, und einen dieser gleichen Factoren anzugeben so haben wir den Begriff der Wurzelausziehung oder der Potenzen mit gebrochenen Exponenten $(a+b)^{\frac{1}{m}}$ m mal als Factor gesetzt giebt $(a+b)$

Begriff einer negativen Potenz.

Begriff der Wurzel und der gebr. Potenz

§ 42.

Die Frage wie $(a+x)^{-n}$ in entwickelter Form dargestellt werden kann, läßt sich offenbar beantworten, denn da $(a+x)^{-n} = \frac{1}{(a+x)^n}$ ist so haben wir $(a+x)^{-n} = \frac{1}{a^n + n.a^{n-1}x + \frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}x^2 + \dots}$ und die Division würde die Entwickelung dieser Form angeben. Wir können auch so dazu gelangen daß wir setzen $(a+x)^{-n}$ sey $= A + Bx + Cx^2 + \dots$ und nun A, B, C zu bestimmen suchen. da $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots = \frac{1}{a^n + n.a^{n-1}x + \frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}x^2 + \dots}$ seyn soll so muß, wenn man beide Größen mit dem Nenner der Letzteren multiplicirt Gleichheit herauskommen das ist nämlich:

$A.a^n +$

$$A.a^n + Ba^n x + Ca^n x^2 + Da^n x^3 + \ldots$$
$$+ nAa^{n-1}x + nBa^{n-1}x^2 + nCa^{n-1}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2}Aa^{n-2}x^2 + \frac{n.n-1}{1.2}B.a^{n-2}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}Aa^{n-3}x^3 + \ldots = 1.$$

Dies soll gelten für jeden Werth von x, folglich muss

$Aa^n = 1$; $A = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$; denn $x=0$ bleibt $Aa^n = 1$.

$Ba^n = -nA.a^{n-1} = -na^{-1}$; $B = -n.a^{-n-1}$

$Ca^n = -nB.a^{n-1} - \frac{n.n-1}{1.2}A.a^{n-2} = n^2.a^{-2} - \frac{n.n-1}{1.2.}a^{-2}$

$C = a^{-n-2}\left(n^2 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right) = \frac{-n(-n-1)}{1.2.}a^{-n-2}$;

ferner

$Da^n = -nCa^{n-1} - \frac{n.n-1}{1.2}B.a^{n-2} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}A.a^{n-3}$;

$= -\frac{n.n(n+1)}{1.2}a^{-3} + \frac{n.n.n-1}{1.2.}a^{-3} - \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}a^{-3}$;

$= \left(-n^2 - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\right)a^{-3} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)}{1.2.3}a^{-3}$;

$$D = -\frac{n(-n-1)(-n-2)}{1.2.3}a^{-n-3};$$

Diese Coefficienten entsprechen dem Gesetze, dass auch für ein negatives n: $(a+x)^n = a^n + n.a^{n-1}x + \frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}x^2 + \ldots$

Bsp. 7.

$(a+x)^{-n} = a^{-n} - na^{-n-1}x - \frac{n(-n-1)}{1.2.}a^{-n-2}x^2 - \frac{n.(-n-1)(-n-2)}{1.2.3}a^{-n-3}x^3$ u.s.w.

Der vollständige Beweis sollte eigentlich angeben dass es für jedes Glied gilt, wenn es für alle vorhergehende gilt. dass aber die Verbindung der Glieder immer auf eine ähnliche Art das nächstfolgende Glied giebt, lässt sich übersehen, wenn man die regelmässige Verbindung der einzelnen Theile verfolgt.

$$\therefore Ea^n \text{ wird} = nD.a^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2} C a^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} B a^{n-3} +$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4.} A a^{n-4}$$

Hier ist sogleich zu übersehen daß alle Glieder nach dem Gleichheitszeichen a^{-4} enthalten; also E enthält a^{-n-4}; wir brauchen also nur die Binomial Coefficienten zu betrachten.

Es soll seyn.

$$-Ea^{n+4} = \frac{n(-n).(-n-1).(-n-2)}{1.2.3.} + \frac{n.(n-1)}{1.2.}\left(\frac{-n.-n-1}{1.2.}\right) +$$

$$\frac{n(n-1).(n-2)}{1.2.3}.-n + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}$$

die beiden letzten Glieder vereinigt geben

$$\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\left(-4n+n-3\right) = \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.4.}.3(-n-1)$$

diese mit dem nächst vorhergehenden Glied vereinigt geben

$$\frac{n.n-1}{1.2}.(-n-1)\frac{(-6n+3n-6)}{3.4.} = \frac{n.n-1.(-n-1)3(-n-2)}{1.2.3.4.}$$

verbindet man sie mit dem ersten Gliede so geben sie

$$\frac{n(-n-1)(-n-2)}{1.2.3.4}.(3n-3-4n) = \frac{n.(-n-1)(-n-2)(-n-3)}{1.2.3.4}.$$

$$E = \frac{-n.(-n-1)(-n-2)(-n-3)}{1.2.3.4}.a^{-n-4};$$

Ferner soll seyn:

$$-F.a^{n+5} = \frac{n.(-n).(-n-1)(-n-2)(-n-3)}{1.2.3.4.} + \frac{n.(n-1).(-n)(-n-1).(-n-2)}{1.2.1.2.3}$$

$$+ \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.\frac{(-n).(-n-1)}{1.2.} + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(-n)}{1.2.3.4.}$$

$$+ \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3.4.5.}$$

die beiden letzten geben:

$$\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4.}.\left(\frac{-5n+n-4}{5}\right) = \frac{n.n-1.n-2.n-3.4.(-n-1)}{1.2.3.4.5.}$$

die drey letzten vereinigt geben:

Die drei letzten vereinigt geben:

$$\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\cdot\frac{(-n-1)(-10n+4n-12)}{4\cdot 5} = \frac{n.n-1.n-2.(-n-1).6(-n-2)}{1.2.3.4.5}$$

Die vier letzten vereinigt geben

$$\frac{n.n-1}{1.2}\cdot\frac{(-n-1).(-n-2)}{3}\cdot\frac{(-10n+6n-12)}{4\cdot 5} = \frac{n.n-1.(-n-1)(-n-2).4.(-n-3)}{1.2.3.4.5}$$

Also zusammen geben

$$\frac{n.(-n-1)(-n-2)(-n-3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{(-5n+4n-4)}{5} = \frac{n.(-n-1)(-n-2)(-n-3)(-n-4)}{1.2.3.4.5}$$

$$F = \frac{-n.(-n-1)(-n-2).(-n-3)(-n-4)}{1.2.3.4.5}\,a^{-n-5}.$$

Es läßt sich allgemein zeigen daß nach ähnlichen Gesetzen die Verbindung der einzelnen Glieder immer weiter fortgeht.

§ 43.

Der Begriff von Wurzelgröße ist, daß sie so oft als die Wurzelausziehung angezeigt ist, als Faktor gesetzt werden müßte, um die Größe zu geben, deren Wurzel sie sind. Hätte man also einen Ausdruck für $(a+b)^{\frac{n}{2}}$, der [illegible] einen Ausdruck für $(a+b)^n$ giebt, so ist das der richtige Ausdruck für die Quadratwurzel aus $(a+b)^n$.

Hätte man einen Ausdruck für $(a+b)^{\frac{n}{3}}$, so würde sich die Richtigkeit dadurch darthun lassen daß er dreimal als Faktor gesetzt $(a+b)^n$ geben müßte u.s.w. Nun aber läßt sich folgendes allgemein darthun. Nimmt man eine Reihe.

$$a^n + n.a^{n-1}x + \frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}a^{n-3}x^3 + + \ldots\ldots$$

und eine zweite:

$$a^m + m\,a^{m-1}x. + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}x^2. + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}x^3 + \ldots\ldots$$

so

so giebt das Product, man rechne so weit fort als man wolle, eben die Form in Beziehung auf $m+n$, wie sie sie in Beziehung auf n und auf m war. Sind also sie m und n jedes $= \frac{1}{2}p$, so ist diese Form die richtige für die Quadratwurzel aus $(a+x)^p$; ferner ist $m = \frac{2}{3}$ und $n = \frac{1}{3}p$ oder $m=n=\frac{1}{3}p$. so ergiebt sich eine ganz übereinstimmende Form für $(a+x)^{\frac{1}{3}p}$, $(a+x)^{\frac{2}{3}p}$ und das Product giebt richtig $(a+x)^p$ und so für alle Fälle. Es ist also nur nöthig zu zeigen daß das Product jener Formen giebt $a^{m+n} + (m+n)a^{m+n-1}x + \frac{m+n.(m+n-1)}{1.\ 2.} a^{m+n-2}x^2 + \ldots$ m und n mögen ganze oder gebrochene Zahlen seyn.

§44.

Die wirkliche Multiplication giebt folgende einzelne Glieder

I. .... a^{m+n}

II. .... $(m+n)a^{m+n-1}.x$

III. .... $\left(\frac{m.m-1}{1.\ 2.} + mn. + \frac{n.n-1}{1.\ 2}\right) a^{m+n-2}x^2$;

IV. .... $\left(\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3.} + \frac{m.m-1}{1.\ 2}.n + \frac{m.\ n.\ n-1}{1.\ 1.\ 2.} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\right) a^{m+n-3}x^3$;

V. .. $\left(\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + \frac{m.n-1.m-2.n}{1.\ 2\ 3\ 1.} + \frac{m.m-1.\ n.n-1}{1.\ 2.\ 1.\ 2.} + \frac{m.n.n-1.n-2}{1.1.2.3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.\ 2\ 3.\ 4}\right) a^{m+n-4}x^4$

deren regelmäßigen Fortgang sich leicht übersehen läßt; es ist also zu zeigen, daß

III. .. in $\frac{(m+n)}{1.}\frac{(m+n-1)}{2.} a^{m+n-2}x^2$

IV. .. in $\frac{(m+n).(m+n-1)(m+n-2)}{1.\ 2.\ 3} a^{m+n-3}x^3$;

und s. w. übergehen, und daß dies wegen des regelmäßigen

39

Achter Abschnitt.

Entwickelung der Exponentialgrößen und logarithmischen Größen

§ 48.

Wir haben bisher die Entwickelung der Potenzen immer so gemacht, daß ihre Glieder nach Potenzen einer in der Wurzelgröße vorkommenden Hauptgröße x fortgiengen; dagegen kann man auch verlangen, die Entwickelung so zu ordnen, daß der Exponent in jedem Gliede zu gleichen Potenzen erhoben werden kann. Diese Entwickelung ist besonders da von Wichtigkeit, wo man dieselbe Basis zu mancherlei Potenzen zu erheben wünscht, und daher die Abhängigkeit der entwickelten Potenz vom Exponenten zeigen will.

§ 49.

Man nennt Größen wie $(1+a)^x$ oder e^x Exponentialgrößen, weil hier die Größe als deren Funktion die entwickelte ~~Funktion~~ Potenz soll angesehen werden, der Exponent selbst ist. Der binomische Lehrsatz zeigt, daß $(1+a)^x$ in eine nach den ganzen steigenden Potenzen von x geordnete Reihe kann entwickelt werden, denn es ist

$$(1+a)^x = 1 + xa + \frac{x.x-1}{1.2}a^2 + \ldots\ldots$$

wo nach und nach Glieder vorkommen, welche $x.\ x^2.\ x^3 \ldots$ enthalten, andere Potenzen können dagegen nicht vorkommen.

§ 50.

Hiernach ist es und also erlaubt, anzunehmen daß $(1+a)^x$ in eine Reihe $= 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$ entwickelt werde deren Coefficienten bestimmt werden müssten. Gilt diese Regel allgemein, so müssten die A, B, C &c. von x unabhängig unverändert bleiben für alle Werthe von x; sie müssten also auch dieselben bleiben, wenn man für x, schreibt $2x$.

$(1+a)^{2x}$ lässt sich folglich auf doppelte Art entwickeln; erstlich ist es $= 1 + A2x + B(2x)^2 + C(2x)^3 + D(2x)^4 + + \dots\dots$

Zweitens ist es $= ((1+a)^x)^2 = (1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots)^2$ und die Vergleichung beider Entwickelungen kann uns die Bestimmung der Coefficienten liefern.

Die erste Entwickelung giebt: $1 + 2Ax + 4Bx^2 + 8Cx^3 + 16Dx^4 + 32Ex^5 + 64Fx^6 + + \dots 2^r R\,x^r + \dots\dots$

Die zweite giebt =

$$1 + 2Ax + \left.\begin{matrix}2B\\+A^2\end{matrix}\right)x^2 + \left.\begin{matrix}2C\\2AB\end{matrix}\right)x^3 + \left.\begin{matrix}2D\\2AC\\B^2\end{matrix}\right)x^4 + \left.\begin{matrix}2E\\2AD\\2BC\end{matrix}\right)x^5 + \dots \left.\begin{matrix}2R\\2A\overset{r-1}{R}\\2B\overset{r-2}{R}\end{matrix}\right\}x^r$$

diese Reihen sollen gelten für jeden Werth von x und daher müssten sie Glied für Glied gleich seyn. Die Vergleichung des zweiten Gliedes zeigt daß, weil $2A = 2A$, A hier unbestimmt bleibt, das dritte giebt $4B = 2B + A^2$; $B = \frac{A^2}{2}$

das vierte $8C = 2C + 2AB$; $6C = A^3$; $C = \frac{A^3}{1.2.3}$

das fünfte $16D = 2D + 2AC + B^2$; $14D = \frac{A^4}{3} + \frac{A^4}{4}$;

$D = \frac{7}{12.14} A^4 = \frac{A^4}{12.34}$

$32E = 2E + 2AD + 2BC$

$(16-1)E = AD + BC = A^5\left(\frac{1}{12.34} + \frac{1}{12.123}\right) = A^5\left(\frac{1+2}{12.34}\right.$

$E = \frac{A^5}{12345}$

So scheint sich.

Es scheint sich also deutlich zu ergeben daß

$$(1+a)^x = 1 + Ax + \frac{A^2}{1.2}x^2 + \frac{A^3}{1.2.3.}x^3 + \frac{A^4}{1.2.3.4}x^4 + + \cdot + \frac{A^r}{1.2.3....r}x^r + -$$

werde; aber dieses Gesetz ist nicht so abgeleitet, daß wir solches sicher behaupten könnten, es gelte für alle Glieder. Wir wollen daher einen allgemeinen Beweis so versuchen, daß wir annehmen, das Gesetz gelte bis zu dem Coefficienten des Glieds welches x^{r-1} enthält, und dann beweisen, es gelte auch für das nächstfolgende, welches x^r enthält. Um für die Coefficienten eine bequemere Bezeichnung einzuführen, mag $\overset{r}{R}$ den Coefficient in der Reihe $(1+a)^x$ bedeuten welcher mit x^r zusammengehört, und $\overset{r-1}{R}$ den der mit x^{r-1}, $\overset{r-2}{R}$ der mit x^{r-2} u. s. w. zusammengehört. Nach dieser Bezeichnung können wir statt A schreiben $\overset{1}{R}$, statt B, $\overset{2}{R}$; $C = \overset{3}{R}$ u. s. w. dann ergiebt unsere erste Reihe die zu x^r gehörigen Coefficienten in $(1+a)^{2x} = 2^r.\overset{r}{R}$; die zweite ergiebt dieselben $= 2.\overset{r}{R} + 2A.\overset{r-1}{R} + 2B\overset{r-2}{R} + 2C\overset{r-3}{R} + 2D\overset{r-4}{R}$....

Es soll also

$(2^r-2)\overset{r}{R} = 2A\overset{r-1}{R} + 2B.\overset{r-2}{R} + 2C\overset{r-3}{R} ++ \ldots\ldots$ seyn, das ist.

$$(2^{r-1}-1)\overset{r}{R} = A\overset{r-1}{R} + B\overset{r-2}{R} + C\overset{r-3}{R} + D\overset{r-4}{R} + \ldots\ldots$$

da wir annehmen die gefundene Form gelte für alle Glieder die niedriger sind als x^r; so ist

$\overset{r-1}{R} = \frac{A^{r-1}}{1.2.3.(r-1)}$; $\overset{r-2}{R} = \frac{A^{r-2}}{1.2.3..(r-2)}$ u. s. w. ... also enthalten alle Glieder A^r, so daß wir setzen können $(2^{r-1}-1)\overset{r}{R} =$

$$A^r\left(\frac{1}{1.2.3(r-1)} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{1.2..(r-2)} + \frac{1}{1.2.3.}\cdot\frac{1}{1.2.3.(r-3)} + \frac{1}{1.2.3.4.1.2.3...(r-4)}\right. \text{ u. s. w.}$$

Wir können die letzte Reihe in jedem Gliede mit 1.2.3.... r multipliciren, und zugleich aber diese Produkte der ganzen Reihe als gemeinschaftlichen Divisor geben; denn ist:

$$(2^{r-1}-1)R^r = \frac{A^r}{1.2..r}\left(\frac{1.2..r}{1.2..(r-1)} + \frac{1.2..r}{1.2.1.2..(r-2)} + \frac{1.2....r}{1.2.3.1.2..(r-3)} + \frac{1.2....r}{1.2.3.4.1.2.3..(r-4)}\right)$$

$$= \frac{A^r}{1.2..r}\left(r + \frac{r.r-1}{1.2} + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} + \frac{r.r-1.r-2.r-3}{1.2.3.4} + \dots\right)$$

Nun zeigt aber der binomische Lehrsatz, daß $2^r = (1+r)^r =$

$$1+r+\frac{r.r-1}{1.2}+\frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} + + \dots - \frac{r.r-1.....r-(r-2)}{1.2.....r-1} + 1$$

also $2^r-2 = r+\frac{r.r-1}{1.2}+\frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} + + + \dots$

Es war aber.

$$\frac{(2^r-2)}{2}R^r = \frac{A^r}{1.2..r}\left(\frac{1.2....r}{1.2..(r-1)} + \frac{1.2...r}{1.2.1.2....r-2} + \frac{1.2...r}{1.2.3.1.2..(r-3)} + + \right)$$

und die eingeschlossene Reihe läuft bis dahin fort wo im Nenner die beiden Factorenreihen einander begegnen, d.h. z.B. für $r=20$ bis $\frac{1.2.......20}{1.2....10.1.2...10}$

für $r=19$ bis $\frac{1.2.......19}{1.2....9.1.2...10}$

Es läßt sich daher leicht übersehen, daß diese Reihe verdoppelt $=2^r-2$ ist und folglich

$$\frac{(2^r-2)}{2}R^r = \frac{A^r}{1.2..r}\left(\frac{(2^r-2)}{2}\right) \text{ und } R^r = \frac{A^r}{1.2....r}$$

Man erhält also, daß ganz allgemein die Reihe für

$$(1+a)^x = 1+Ax+\frac{A^2}{1.2}x^2+\frac{A^3}{1.2.3}x^3+\frac{A^4}{1.2.3.4}x^4 + + \dots \frac{A^r x^r}{1.2...r} + + \dots$$

ist.

§ 57.

A ist hier unbestimmt geblieben und hängt offenbar von der Basis

$$x = A + Bax + Bbx^2 + Bcx^3 + Bdx^4 + Bex^5$$
$$\quad Ca^2x^2 + 2Cabx^3 + 2Cacx^4 + 2Cadx^5$$
$$+ Cb^2x^4 + 2Cbcx^5$$
$$+ Da^3x^3 + 3Da^2bx^4 + 3Da^2cx^5$$
$$+ 3Dab^2x^5$$
$$+ Ea^4x^4 + 4Ea^3bx^5$$
$$+ Fa^5x^5 +$$

Setzt man nun hier die Glieder der gleichen Potenzen von x einander gleich, so ist $A = 0$; $Ba = 1$; $B = \frac{1}{a}$;

$Ca^2 = -Bb = -\frac{b}{a}$; $C = -\frac{b}{a^3}$

$Da^3 = -Bc - 2Cab = -\frac{bc}{a} + \frac{2b^2}{a^2}$; $D = -\frac{bc}{a^4} + \frac{2b^2}{a^5}$;

und so ließen sich mehrere finden.

Das allgemeine Gesetz mußte hier ziemlich umständlich aus der Form der Reihe hergeleitet werden. Jeder gesuchte Coefficient z. B. F. kommt zuerst in dem Gliede vor, wo x in der der Potenz erscheint, welche als Potenz von y jenen Constanten F begleitete hier der 5te. Mit ihm zusammen kommen vor: der nächst vorhergehende Coefficient kommt vor multiplic: mit den Gliedern der nächst kleinern (4te) Potenz, deren Exponentensumme in diese gehört (5 beträgt); der zweite vorhergehende kommt vor multiplicirt in d. Glieder d. zweiten nächst kleinern Potenz die Exponenten Summe eben so viel beträgt u. s. w.

So würde also z. B. aus

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + gx^7 + hx^8 + + \ldots\ldots 5.$$

zur

zur Bestimmung von

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6 + Gy^7 + Hy^8 + \ldots$$

folgen

$$0 = \begin{cases} H.a^8 + G(7a^6b) + F(6ca^5 + 15a^4b^2) \\ \quad + E\left(5a^4d + 20a^3bc + 10a^2b^3\right) + D\left(4a^3e + 12a^2bd + 12ab^2c + b^4 + 6a^2c^2\right) \\ + Ah + C\left(3a^2f + 6abe + 6acd + 3b^2d + 3bc^2\right) + B\left(2ag + 2bf + 2ce + d^2\right) \end{cases}$$

und hieraus ist H vermittelst der vorhergehenden, d. i. vorauswärts völlig bestimmt.

Das Gesetz dieser Bestimmung erhellt. Ueberall giebt die Summe der zu * gehörigen Exponenten eben das, was der in dem Gliede bei H vorkommende Exponent von y beträgt. Die Glieder aber aus welchen jeder Theil erwächst, sind hergenommen aus den verschiedenen Potenzen des Polynoms, und zwar bei G aus der siebenten Potenz, gleichsam aus der Zerlegung von 8 in 7 Theilen, nämlich (= 1.1.1.1.1.1.2)

in 6 Theile $\left(= \begin{matrix} 1.1.1.1.1.3 \\ 1.1.1.1.2.2 \end{matrix}\right)$

bei E aus der fünften Potenz mit Hülfe der Zerlegung der 8 in fünf Theile $= \left(\begin{matrix} 1.1.1.1.4 \\ 1.1.1.2.3 \\ 1.1.2.2.2 \end{matrix}\right)$;

bei D aus der 4ten Potenz durch Zerlegung $\left(= \begin{matrix} 1.1.1.5 \\ 1.1.2.4 \\ 1.1.3.3 \\ 1.2.2.3 \\ 2.2.2.2 \end{matrix}\right)$

bei C aus d. 3ten durch Zerlegung $\left(= \begin{matrix} 1.1.6 \\ 1.2.5 \\ 1.3.4 \end{matrix} \text{ und } \begin{matrix} 2.2.4 \\ 2.3.3 \end{matrix}\right)$

bei B aus d. 2ten durch Zerlegung $\left(= \begin{matrix} 1.7 \\ 2.6 \\ 3.5 \\ 4.4 \end{matrix}\right)$.

bei A aus der ersten durch 8 = 8.

§58.

Um zu sehen, wenn solche Umkehrung möglich sind, wollen wir allgemein

$y = ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} + dx^{\alpha+3\delta}$ setzen und die Form der Reihe suchen, die dann für x möglich ist.

Es sey: $x = Ay^{\varepsilon} + By^{\varepsilon+\gamma} + Cy^{\varepsilon+2\gamma} + Dy^{\varepsilon+3\gamma} \ldots$

so gebe jenen Werth in dieser Reihe substituirt.

$$x = \begin{cases} A\left(ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} + +\right)^{\varepsilon} \\ + B\left(ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} + +\right)^{\varepsilon+\gamma} \\ + C\left(ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} + +\right)^{\varepsilon+2\gamma} \end{cases}$$

$+ + +$

Die Anfangsglieder dieser Reihe sind.

$A a^{\varepsilon} x^{\alpha\varepsilon}$; $B a^{\varepsilon+\gamma}. x^{(\alpha\varepsilon+\alpha\gamma)}$;

$C. a^{\varepsilon+2\gamma}. x^{(\alpha\varepsilon+2\alpha\gamma)}$

Nun kann offenbar die mit A vorkommende Potenz von x nicht gleich denen seyn, die mit B, C, vorkommen; wäre also nicht $\alpha\varepsilon = 1$, damit die Glieder x und $Aa^{\varepsilon}x^{\alpha\varepsilon}$ gleichgesetzt werden könnten, so stünde das Glied $Aa^{\varepsilon}x^{\alpha\varepsilon}$ einzeln da und A müßte $=0$ seyn; dann würde aber eben die Schwierigkeit für B u. s. w. eintreten; also muß wenn ε die kleinste vorkommende Potenz von y seyn soll, $\alpha\varepsilon = 1$. oder $\varepsilon = \frac{1}{\alpha}$ seyn.

Die in A multiplicirte Reihe hat also nun, da $\varepsilon = \frac{1}{\alpha}$ ist, die Anfangsglieder $Aa^{\frac{1}{\alpha}}.x + \frac{1}{\alpha}Aa^{\frac{1}{\alpha}-1}bx^{1+\delta} + \frac{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}{1.2}Aa^{\frac{1}{\alpha}-2}b^2x^{1+2\delta}$
$\left\{+\frac{1}{\alpha}Aa^{\frac{1}{\alpha}-1}cx^{1+2\delta}\right.$

Der mit B multipl. Anfangsgl. $= Ba^{\frac{1}{\alpha}+\gamma}.x^{1+\alpha\gamma} + \left(\frac{1}{\alpha}+\gamma\right)Ba^{\frac{1}{\alpha}+\gamma-1}bx^{1+\alpha\gamma+\delta}$

die

die mit C mult. Reihe hat zum Anfangsgliede

$$= C \cdot a^{\frac{1}{\alpha}+2\gamma} \cdot x^{1+2\alpha\gamma}$$

Hier erhellt es daher daß die untereinanderstehenden Glieder zusammengehören mußten, also

$$1+\delta = 1+\alpha\gamma$$
$$1+2\delta = 1+\alpha\gamma+\delta = 1+2\alpha\gamma$$

kurz $\delta = \alpha\gamma$; $\gamma = \frac{\delta}{\alpha}$ seyn muß.

Unsre gesuchte Reihe hat also die Form

$x = Ay^{\frac{1}{\alpha}} + By^{\frac{1+\delta}{\alpha}} + Cy^{\frac{1+2\delta}{\alpha}}$ und A, B, C, würden nun nach ähnlichen Regeln wie oben bestimmt, nur daß hier die Summe der Exponenten werden mußten $= 1$; u. $1+\delta$ u. s. w.

§ 59.

Einen Ausdruck wie $y = A + Bx + Cx^2 + \dots$

läßt sich also nicht umkehren, daß $x = \alpha y^{\beta} + \beta y^{\beta+\delta}$ u. s. w. werde, denn da y im ersten Gliede die Potenz x^0 enthält, so müßte die Potenz $\beta = \frac{1}{0} = \infty$ seyn

der Ausdruck $y = A + Bx + Cx^2 + \dots$ läßt sich aber so umkehren, daß $x = \alpha(y-A) + \beta(y-A)^2 + \gamma(y-A)^3 + \dots$ ist.

§ 60.

Ein Beyspiel von der Umkehrung der Reihen können uns die Ausdrücke für Logarithmen geben. Es war, wenn wir unter $\log y$ den natürl. Logarithmen von y verstehen,

$$y = 1 + \log y + \tfrac{1}{2}(\log y)^2 + \tfrac{1}{6}(\log y)^3 + \tfrac{1}{24}(\log y)^4 + \dots$$

Es werde gesucht, wie $\log y$ durch $y-1$ ausgedrückt werde. Es sey

$\log y = A(y-1) + B(y-1)^2 + C(y-1)^3 + \dots$ also

$$\log y = A\cdot\log y + A\tfrac{1}{2}(\log y)^2 + A\cdot\tfrac{1}{2\cdot3}(\log y)^3 + A\tfrac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}(\log y)^4$$

also $B-\frac{1}{6}=0$; $B=\frac{1}{6}$

$$C=\frac{1}{12}-\frac{1}{120}=\frac{9}{120}=\frac{1.3}{1.2.4.5}$$

$$D-\frac{5}{6}C+\frac{1}{12}B+\frac{1}{40}B-\frac{1}{5040}=0$$

$$D=\frac{1}{16}-\frac{1}{72}-\frac{1}{240}+\frac{1}{5040}=\frac{45}{72.14}=\frac{1.3.5}{2.4.6.7}$$

Wenn man weiter verfährt so findet man

$$x=\sin x+\frac{1.\sin^3 x}{1.2.3}+\frac{1.3\sin^5 x}{1.2.4.5}+\frac{\sin^7 x.1.3.5}{1.2.4.6.7}+\frac{\sin^9 x.1.3.5.7.}{1.2.4.6.8.9}$$
$$+\frac{\sin^{11} x.1.3.5.7.9}{1.2.4.6.8.10.11}\ldots\ldots$$

$$\cancel{+\frac{\sin^{11} x.1.3.5.7.9}{1.2.4.6.8.10.11}+\sin x.1.3.5}$$

$\frac{1}{5040}=$

a+b
a+b
a+b
a+b

Moja najlepsza pamiątka
po Panu moiemu Dobrodzieiowi
W: Zobeltowi

a+b

Moja ~~najlepsza~~

Zu §. 44.

Es sey $y = a^x$ so ist: wo a constant ist.

$\log y = x \log a$ und $d.\log y = dx \log a$

$$\frac{M dy}{y} = \log a\, dx.$$

$$M dy = y \log a\, dx = a^x.\log a.dx \text{ : und}$$

$$dy = \frac{a^x.\log a.dx}{M}.$$

Es sey nun y durch eine F. von x ausgedrückt, so wird die Reihe mit 1 anfangen müssen weil für $x = 0$. jede Größe $= 1$ wird. Also:

$$a^x = y = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \ldots \text{ und}$$

$$dy = \left(A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + 6Fx^5 + \ldots\right) dx$$

Nun war $dy = \frac{a^x.\log a.dx}{M}$ Also:

$$a^x.\log a.dx = M\left(A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots\right) dx.$$

durch dx beide Seiten dividirt und für a^x den Werth $= 1 + Ax + Bx^2 + \ldots$ gesetzt, giebt:

$$(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6).\log a = AM + 2BMx + 3CMx^2 + 4DMx^3 + 5EMx^4$$

Hieraus ist also:

$AM = \log a$ und $A = \frac{\log a}{M}$

$2BM = A \log a$ und $B = \frac{(\log a)^2}{2M^2}$

$3CM = B \log a$ $\quad C = \frac{(\log a)^3}{2.3.M^3}$

$4DM = C \log a.$ $\quad D = \frac{(\log a)^4}{2.3.4\, M^4}$

Daher

$$y = a^x = 1 + \frac{\log a}{M} x + \frac{(\log a)^2}{2M^2} x^2 + \frac{(\log a)^3}{2.3.M^3} + \frac{(\log a)^4}{2.3.4.M^4} + \frac{(\log a)^5}{2.3.4.5\, M^5} + \ldots$$

Für $x = 1$ erhält ich a selbst als:

$$a = 1 + \frac{\log a}{M} + \frac{(\log a)^2}{2M^2} + \frac{(\log a)^3}{2.3\, M^3} + \frac{(\log a)^4}{2.3.4\, M^4} + \frac{(\log a)^5}{2.3.4.5.M^5} + \ldots$$

also wird [illegible] der Modul im Numerator der Function und nicht im Zähler, wie Seite 44 gezeigt worden.

Die natürlichen Logarithmen wo $M = 1$ ist, würde stehen:

$$a = 1 + \log a + \frac{(\log a)^2}{1.2} + \frac{(\log a)^3}{1.2.3} + \frac{(\log a)^4}{1.2.3.4} + \frac{(\log a)^5}{2.3.4.5} + \dots$$

Da nun wie bekannt in jedem logarithmischen Systeme der log. der Grundzahl $= 1$ ist, so wird man, wenn man für $\log a = 1$ setzt, die Grundzahl der natürlichen Logarithmen erhalten

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} + \dots$$

entwickelt giebt für e wie Seite 43:

$$e = 2,718281828459045235360287471$$

$$a + b$$
$$a + b$$
$$a + b$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$
$$a + b$$

$$a^3 + 2a^2b + ab^2$$
$$+ a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$
$$a + b$$

$$a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + a^3b + 2a^2b^2 + ab^3$$
$$a^3b + a^2b^2 \qquad 2a^2b^2 + ab^3$$
$$+ 2ab^3 + b^4$$

$$a^4 + 3a^3b + 2a^2b^2 + a^3b + 4a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$a - b$$

$$a^5 + 3a^4b + 2a^3b^2 + \cancel{a^4b} + 4a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4$$
$$- 3a^3b^2 - a^4b \qquad - 2a^2b^3 - 4ab^4$$
$$- a^3b^2 \qquad - 4a^2b^3 + \quad - b^5$$

$$a^5 + 3a^4b - 2a^3b^2 + 4a^3b^2 - 2a^2b^3 + b^5 - 3ab^4 - b^5$$
$$- a$$

$$- a^6 \pm 3a^5b + 2a^4b^2 - 4a^4b^2 + 2a^3b^3 + 3a^2b^4 + ab^5$$

$$+ 2a^3b^2$$
$$- 4a^3b^2$$
$$- 2a^3b^2$$

$$- 3a^3b^2$$
$$- a^3b^2$$
$$- 4a^3b^2$$

4

Bemerkung

die Kenntniß der figurirten Zahlen sind mechanisch, zwar analytisch wichtig, gewähren aber keine Einsicht in die Natur der Dinge.

Beweis für die 1. Ordnung

Nennt man eine arithm: Reihe $a+(a+d)+(a+2d)+\ldots\left[a+(n-1)d\right]$ wo jedes folgende Glied um die Differenz d wächst so ist das letzte Glied, wie schon angegeben $a+(n-1)d$ addirt mit dem ersten verbunden $= 2a+(n-1)d$ ist dasselbe geben, das 2te und vorletzte Gl: das 3te und drittletzte, weil das erste immer um a und soviel Differenzen hat, als das andere immer von $(n-1)$ weniger hat. Ist die Reihe umgewandt, dann ist das doppelte = derselben Summe.

Hieraus ergiebt sich die Bestimmung der Summe einer arithm: Reihe sie ist nemlich = der Summe des ersten und letzten Gliedes multiplicirt mit der Hälfte der Zahl der Ausdrücke, oder

$$s = \frac{n}{2}\left(2a+(n-1)d\right)$$

die natürliche Zahlenreihe 1.2.3.4 etc ist auch eine arithm Reihe mit $d=1$. die Summe der n Glieder wird also = sein $s = \frac{n}{2}\left(2+(n-1)1\right) = \frac{n}{2}(n+1)$

Jetzt ergiebt sich auch jedes $n$te Glied der 2ten Ordng figur: Zahlen, es ist nemlich = der Summe der natürlichen Zahlen, nennt man dies Glied u so ist es also $u = \frac{n(n+1)}{2}$

dieser Beweis könnte mit folgender analog geliefert werden.

$1 = 1$
$2 = 1+1$
$3 = 1+1+1$
$4 = 1+1+1+1$
$5 = 1+1+1+1+1$
$\vdots$
$n = 1+1+1\ldots\ldots+n$

parab: $S = 1+2+3+4+\ldots\ldots+n$
umgek: $S = n.1+(n-1)1+(n-2).1+(n-3)3+\ldots+1$

$2S = (n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)$
$2S = n(n+1)$
$S = \frac{n}{2}(n+1)$

Beweis für die 2te Ordng

das $n$te Glied der 2ten Ordng der fig: Zahl ist = der Summe der n Glieder der 1ten Ordng, also dieses ist zu finden. Die Differenzen der 2ten Ordng sind nicht dieselben sondern die natürlichen Zahlen 2, 3, 4, 5 etc

Es ist also die Summe des 1 und letzten Gliedes, nebst der respect. Summen des 2 und vorletzten etc =, also auch nicht $= \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$

Es muss daher die Summe der Glieder der figur. Zahl der 2ten Ordn. auf eine andere Weise gefunden werden. Die Zahlen der 2ten Ordn. sind

β) $\underline{1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ 36}$ etc

die Diff: 2 3 4 5 6 7 8 etc

die figur. Zahl. der 2ten Ordn bilden also eine Arith. Reihe der 2ten Ordn.

Um die Summe der Glieder einer solchen Reihe zu finden muss man ihre Bestandtheile erforschen

Es ist aber
$$1 = 1$$
$$3 = 1+2$$
$$6 = 1+2+3$$
$$10 = 1+2+3+4$$
$$15 = 1+2+3+4+5$$
$$21 = 1+2+3+4+5+6$$
$$28 = 1+2+3+4+5+6+7$$
$$\vdots$$
$$n^{te} = 1+2+3+4+5+\cdots\cdots+n$$

Betrachtet man die Bestandtheile in der senkr. Richtung so ist die Summe aller =

$\varphi = S = n.1 + (n-1)2 + (n-2)3 + (n-3)4 + \cdots\cdots$ so dass zu letzt die Glieder folgen $3(n-2) + 2(n-1) + 1.n$

Betrachtet man aber die Bestandtheile in paralleler Ordn. so ist die Summe aller = (nach der Formel für die natürl. Zahl. und von dem n^{ten} Gliede angefangen)

$\varphi = S = \frac{n}{2}(n+1) + \frac{(n-1)}{2}(n) + \frac{(n-2)}{2}(n-1) + \frac{(n-3)}{2}(n-2) + \cdots\cdots$ so dass zu letzt die Glieder folgen

$$+ \frac{(n-(n-3))}{2}(n-(n-4)) + \frac{(n-(n-2))}{2}(n-(n-3)) + \frac{(n-(n-1))}{2}(n-(n-2))$$

oder $\frac{3}{2}.4 \quad + \quad \frac{2}{2}.3 \quad + \quad \frac{1}{2}.2$

Nun ist wohl zu bemerken, daß uns keiner dieser angegebenen Gleichungen durch S andere Hülfe werden kann, weil man immer auf die Reihe selbst kommt, oder auf eine andere der 2ten 1, 3, 6, 10, 15, Ord. bei der Summirung der bestehenden Theile stößt, daher man auch irgends andern Beweis, findet als durch eine schlechte induction, wo die Annahme a priori als richtig angenommen wird.

S. m.

Wir müssten daher um S zu entwickeln beide Gleichungen addiren. Wir geben ihnen daher folgende Form.

$$\frac{S}{2} = 1.\frac{n}{2} + \frac{(n-1)}{2}.2 + \left(\frac{n-2}{2}\right).3 + \left(\frac{n-3}{2}\right)4 + \frac{(n-4)}{2}.5 + \ldots \frac{3}{2}(n-2) + \frac{2}{2}(n-1) + \frac{1}{2}n$$

$$S = (n+1)\frac{n}{2} + \frac{(n-1)}{2}n + \frac{(n-2)}{2}(n-1) + \frac{(n-3)}{2}(n-2) + \frac{(n-4)}{2}(n-3) + \ldots \frac{3}{2}.4 + \frac{2}{2}.3 + \frac{1}{2}.2$$

$$\frac{3S}{2} = (n+2)\frac{n}{2} + (n+2)\frac{(n-1)}{2} + (n+2)\frac{(n-2)}{2} + (n+2)\frac{(n-3)}{2} + (n+2)\frac{(n-4)}{2} + \ldots (n+2)\frac{3}{2} + (n+2)\frac{2}{2} + (n+2)\frac{1}{2}$$

oder $3S = (n+2)n + (n+2)(n-1) + (n+2)(n-2) + (n+2)(n-3) + (n+2)(n-4) + \ldots (n+2)3 + (n+2)2 + (n+2)1$

$$S = \left(\frac{n+2}{3}\right)\left[n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + (n-4) + \ldots + 3 + 2 + 1\right]$$

$$S = \frac{(n+2)}{3}\frac{(n+1)n}{2}$$

Wir wollen nun die Ergebnisse dieses Beweises sehen. Wenn wir die Reihe ... betrachten, so ergiebt es sich daß die Formel $S = \frac{(n+2)(n+1)n}{3.2.1}$ auch für folgende Productensummen gilt wie

$7.1 = 7$
$6.2 = 12$
$5.3 = 15$
$4.4 = 16$
$3.5 = 15$
$2.6 = 12$
$1.7 = 7$
$\overline{84}$

$\frac{7.8.9}{2.3} = 7.4.3 = 84$

$8.1 = 8$
$7.2 = 14$
$6.3 = 18$
$5.4 = 20$
$4.5 = 20$
$3.6 = 18$
$2.7 = 14$
$1.8 = 8$
$\overline{120}$

$\frac{8.9.10}{2.3} = 4.3.10 = 120$

Betrachtet man die Reihe φ so ist sie durch Aufhebung der Klammern folgende

$$\varphi = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = n(n+1) + (n-1)n + (n-2)(n-1) + (n-3)(n-2) + \dots$$

die Formel φ gilt also für folgende figurirte Zahlen etc

$6 \cdot 7 = 42$
$5 \cdot 6 = 30$
$4 \cdot 5 = 20$ $\quad \frac{6.7.8}{3} = 14.8 = 112$
$3 \cdot 4 = 12$
$2 \cdot 3 = 6$
$1 \cdot 2 = 2$
$\overline{112}$

$9.10 = 90$
$8 \cdot 9 = 72$
$7 \cdot 8 = 56$
$6 \cdot 7 = 42$ $\quad \frac{9.10.11}{3} =$
$5 \cdot 6 = 30$
$4 \cdot 5 = 20$ $= 30.11 =$
$3 \cdot 4 = 12$
$2 \cdot 3 = 6$ $= 330.$
$1 \cdot 2 = 2$
$\overline{330}$

Beweis der 3ten Ordn. figur. Zahlen

Wenn wir analog verfahren so ist die Reihe der 3ten Ordn. nach ihren Bestandtheilen. –

$1 = 1$
$4 = 1 + 3$
$10 = 1 + 3 + 6$
$20 = 1 + 3 + 6 + 10$
$35 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15$
$56 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21$
$84 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28$
$\vdots$

nte Glied $= 1 + 3 + 6 + 10 + \dots\dots \frac{n}{2}(n+1)$

bei der Bildung der Summ. Reihe sieht man, daß man $S = (n.1 + (n-1)3 + (n-2)6 + \dots$ bekommen, also bei Summirung müßte man die Reihe mit 2.3 dividiren, so kommt also $S + \frac{S}{6} = \frac{7S}{2.3}$, wo 7 eine unpassende Zahl ist.

$$n = n\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 =$$

Es ist daher zweckmäßiger die Factor-Glieder zu suchen zu bilden, der erhellt

$$\psi \quad S = 1\cdot\frac{n}{2}(n+1) + 2\cdot\frac{(n-1)}{2}\cdot n + 3\cdot\frac{(n-2)}{2}(n-1) + 4\cdot\frac{n-3}{2}(n-2) + \ldots\ldots\; n\cdot\frac{(n-(n-1))}{2}(n-(n+2))$$

die parallele Reihe besteht aus Reihen 2ter Ordnung

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3} + \frac{(n-1)n\cdot(n+1)}{2\cdot 3} + \frac{(n-2)(n-1)n}{2\cdot 3} + \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{2\cdot 3} + \ldots\; \frac{(n-(n-1))(n-(n-2))(n-(n-3))}{2\cdot 3} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 3} = 1$$

dividirt man die erste Reihe mit drei so ist

$$\chi \quad \frac{S}{3} = 1\cdot\frac{n(n+1)}{2\cdot 3} + 2\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2\cdot 3} + 3\cdot\frac{(n-2)(n-1)}{2\cdot 3} + 4\,\frac{(n-3)\cdot(n-2)}{2\cdot 3} + \ldots\ldots\; 1\cdot\frac{n\cdot 6}{2\cdot 3} \;(=n)$$

addirt man die Reihen ψ und χ so wird man nun zugleich mit 3 multipliciren

$$4S = \frac{n(n+1)}{2}(n+3) + \frac{(n-1)n}{2}(n+3) + \frac{(n-2)(n-1)}{2}(n+3) + \frac{(n-3)(n-2)}{2}(n+3) + \ldots \frac{(n-(n-1))(n-(n-2))}{2}(n+3)$$

$$4S = (n+3)\left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-2)(n-1)}{2} + \frac{(n-3)(n-2)}{2} + \ldots\ldots \frac{(n-(n-1))\cdot(n-(n-2))}{2}\right]$$

$$4S = (n+3)\left[\frac{(n+2)(n+1)n}{2\cdot 3}\right]$$ weil der Reihe ψ pag. 60

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4.}$$

die Anwendung auf andere figurirte Producten Summen ist folgende:

weil S wenn man mit 2 multiplicirt

$$\begin{aligned} 6.5.1 &= 30\\ 5.4.2 &= 40\\ 4.3.3 &= 36\\ 3.2.4 &= 24\\ 2.1.5 &= 10\\ \hline &\;140 \end{aligned} \quad = \frac{5.6.7.8}{3.4} = 5.2.7.2 = 140$$

weil ψ wenn man mit 2.3. multiplicirt

$$\begin{aligned} 5.6.7 &= 30.7 = 210\\ 4.5.6 &= 20.6 = 120\\ 3.4.5 &= 12.5 = 60\\ 2.3.4 &= 6.4 = 24\\ 1.2.3 &= 2.3 = 6\\ \hline &\qquad\;\; 420 \end{aligned} \quad = \frac{5.6.7.8}{4} = 5.6.7.2 = 420$$

Endlich ist weil der Reihe $S = n.1 + (n-1)3 + (n-2)6 + \ldots$

$$\begin{aligned} 6.1 &= 6\\ 5.3 &= 15\\ 4.6 &= 24\\ 3.10 &= 30\\ 2.15 &= 30\\ 1.21 &= 21\\ \hline &\;126 \end{aligned} \quad \frac{6.7.8.9}{2.3.4} = 7.2.9 = 63.2 = 126$$

Beweis der 4ten Ord. figur. Zahl.

$$1 = 1$$
$$5 = 1+4$$
$$15 = 1+4+10$$
$$35 = 1+4+10+20$$
$$70 = 1+4+10+20+35$$
$$126 = 1+4+10+20+35+56$$
$$\vdots$$
$$n^{\text{te}}\text{ Zahl} = 1+4+10+20+35+\ldots\frac{n(n+1)(n+2)(\ldots)}{1\cdot2\cdot3\cdot(\ldots)}$$

paral.
$$S = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4!} + \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4!} + \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{4!} + \frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}{4!} + \ldots$$

4 =

das n^{te} Glied ist $+\ldots\frac{[n-(n-1)][n-(n-2)][n-(n-3)][n-(n-4)]}{4!} = \frac{4!}{4!} = 1$

Wir sehen auch hier, daß um die Ausschließung zu befördern auch hier bei den gewöhnlichen Gliedern von dem letzten angefangen werden muß.

$$4 \quad S = 1\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{3!} + 2\cdot\frac{(n-1)n(n+1)}{3!} + 3\cdot\frac{(n-2)(n-1)n}{3!} + 4\,\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{3!} + \ldots\frac{[n-(n-1)][n-(n-2)][n-(n-3)]}{3!}\cdot n$$

dividirt man diese Reihe durch 4 und addirt sie mit der ersten so ist

$$\frac{S}{4} + S = \frac{n(n+1)(n+2)}{4!}(n+4) + \frac{(n-1)n(n+1)}{4!}(n+4) + \frac{(n-2)(n-1)n}{4!}(n+4) + \ldots\ldots [n-(n-1)][n-(n-2)][n-(n-3)](n+4)$$

ausgeschlossen und mit 4 weggemultipl. giebt

$$5S = \left[\frac{n(n+1)(n+2)}{3!} + \frac{(n-1)n(n+1)}{3!} + \frac{(n-2)(n-1)n}{3!} + \ldots\ldots [n-(n-1)][n-(n-2)][n-(n-3)]\right](n+4)$$

$$5S = (n+4)\left[\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}\right]$$ nach der Formel 4 p. 63

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}$$

die Beweise sind hier analog und man auch auf drei Sachen formen die Zahlenprodukt summiren.

Nach S wenn mit 4! weggedividirt wird — Nach φ wenn mit 3! wegdiv: wird

$$\left.\begin{array}{l}5.6.7.8 = 30.56 = 1680\\ 4.5.6.7 = 20.42 = 840\\ 3.4.5.6 = 20.18 = 360\\ 2.3.4.5 = 20.6 = 120\\ 1.2.3.4 = 24 = 24\\ \hline \quad 3024\end{array}\right\} = \frac{5.6.7.8.9}{5} = 48.63 = 3024 \quad \left\{\begin{array}{l}7.6.5.1 = 30.7 = 210\\ 6.5.4.2 = 20.12 = 240\\ 5.4.3.3 = 20.9 = 180\\ 4.3.2.4 = 24.4 = 96\\ 3.2.1.5 = 10.3 = 30\\ \hline \quad 756\end{array}\right\} = \frac{5.6.7.8.9}{4.5} = 6.7.2.9 = 63.12 = 756$$

endlich nach der formel $S = n.1 + (n-1)4 + (n-2)10 + (n-3)20 + \ldots$

$$\left.\begin{array}{l}6.1 = 6\\ 5.4 = 20\\ 4.10 = 40\\ 3.20 = 60\\ 2.35 = 70\\ 1.56 = 56\\ \hline \quad 252\end{array}\right\} = \frac{6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5} = 7.2.9.2 = 63.4 = 252$$

Allgemeiner Beweis für die m^{te} Ordn.

Da m unbestimmt ist, so können die Bestandtheile der Reihe nicht im Speciellen, nur im allg. angegeben werden, und daher muß man auch mit dem n^{ten} Gl: anfangen

das n^{te} Gl. $= \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+(m-1))}{1.2.3\ldots\ldots m}$

$n-1^{te}$ $= \dfrac{(n-1)(n)(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+m-2)}{m!}$

$n-2^{te}$ $= \dfrac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-3)}{m!}$

$n-3^{te}$ $= \dfrac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)\ldots\ldots(n+m-4)}{m!}$

$\vdots$

das 1^{te} Gl. $= \underbrace{\dfrac{[n-(n-1)][n-(n-2)][n-(n-3)][n-(n-4)]\ldots\ldots[n-(n-1)+m-1]}{(m!)}}$ (weil $\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots m} = 1$.)

das n^{te} Gl ist = dem S von $(m-1)^{ter}$ Ordn. wo n Glieder sind

das $(n-1)^{te}$ Gl ist = der S von $(m-1)^{ter}$ Ordn wo $(n-1)$ Glieder sind

u. s. f.

das sind die parallelen Glieder von $S = \varphi$

ist und dann successive mit 1, 2, 3, 4 bis n. multiplizirt:

Um die Glieder der hunderts[ten] Reihen zu finden, muß man erst, ~~muß man erst~~ die Glieder des n^{ten} Gliedes der m^{ten} Reihe aufstellen und gehen vom n^{ten} Glied das n^{ten} Gliedes ver… diese Glieder sind bekanntlich Glieder der $(m-1)^{ten}$ Reihe

das n^{te} Glied des n^{ten} Glied ist die Summe $(m-2)^{ten}$ Ordnung von n Gliedern und das n^{ten} Gl. $(n-1)^{te}$ Glied ist = der S. d. $(m-1)^{te}$ Ordnung von $(n-1)$ Gliedern etc

$$= 1.\ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+m-2)}{(m-1)!} = \text{dem } n^{ten} \text{ Gl.}$$

$$2.\ \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-3)}{(m-1)!} = \text{dem } (n-1)^{ten}$$

$$3.\ \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)\ldots\ldots(n+m-4)}{(m-1)!} = \text{dem } (n-2)^{te}$$

$$4.\ \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)\ldots(n+m-5)}{(m-1)!} = \text{dem } (n-3)$$

$$5.\ \frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)\ldots(n+m-6)}{(m-1)!} = \text{dem } (n-4)$$

$$\vdots$$

$$n.\ \underbrace{\frac{[n-(n-1)][n-(n-2)][n-(n-3)]\ldots\ldots[n-(n-1)+m-2]}{(m-1)!}}_{\textstyle \| \atop \textstyle S} = \frac{(m-1)!}{(m-1)!} = 1$$

$$S = 4$$

dividirt man diese Gl. mit m um sie mit S zu addiren, so erhält man, durch eine folgendes bekannt…

$$S + \frac{S}{m} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-2)}{m!} \\ \dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m-3)}{m!} \\ \dfrac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-4)}{m!} \\ \dfrac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)\ldots(n+m-5)}{m!} \\ \vdots \\ \dfrac{(n-(n-1))(n-(n-2))(n-(n-3))\ldots(n-(n-1)+m-2)}{m!} \end{array} \right\} \times [n+m]$$

Dividirt man die Gl. mit m, im Nenner weg, so wird erstes der Nenner $(m-1)!$ als dann ist die Parenthese = der Summe der Reihe der $(m-1)^{ten}$ Ordnung

$$\text{Reihe}\,(m+1)\ S = (n+m)\left[\frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-1)}{m!}\right]$$

$$X = S = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)(n+m)}{(m+1)!}$$

Anmerkung wenn man in der Formel 4 mit $(m-1)!$ und in 4 mit $m!$ wegmultiplicirt so ergiebt sich diß nach der Formel X,

1° die Summen jeglicher Producte gefunden werden können, deren Factoren im 1 Producte von n immer um 1 ~~[illegible]~~ steigen und die übrigen Producte immer um 1 resp: abnehmen z.B.

$4.5.6.7.8.9.10 = 120.7.720 = 604800$
$3.4.5.6.7.8.9 \quad 120.7.72.3 = 181440$
$2.3.4.5.6.7.8 \quad 120.7.48 \quad 40320$
$1.2.3.4.5.6.7 \quad 120.7.6 \quad 5040$
831600

$$= \frac{4.5.6.7.8.9.10.11}{8} =$$

840
720
168
588
604800

216
840
8640
1728
181440

840
48
6720
336
40320

504
120
10080
504
60480
110
604800
6048
$\frac{6652800}{8} = 831600$

2° die Summen derselben Producte zu finden, wenn diese resp: nach durch die natürl. Zahl: 1.2.3 etc multiplic. werden z.B.

$4.5.6.7.8.9.10.1 = 604800$
$3.4.5.6.7.8.9.2 = 362880$
$2.3.4.5.6.7.8.3 = 120960$
$1.2.3.4.5.6.7.4 = 20160$
1108800

$$= \frac{4.5.6.7.8.9.10.11.12}{8.9} = 840.1320$$

84
52800
1056
1108800

$=$

3tio ist $m=8$, also die Reihe 1, 9, 45, 165, 495, 1287. etc folgende Producte zu finden wenn $n=6$ ist.

$6.1 = 6$
$5.9 = 45$
$4.45 = 180$
$3.165 = 495$
$2.495 = 990$
$1.1287 = 1287$
3003

$$= \frac{\cancel{6}.\cancel{7}.\cancel{8}.\cancel{9}.\cancel{10}.11.\cancel{12}.13.14}{1.\cancel{2}.\cancel{3}.\cancel{4}.\cancel{5}.\cancel{6}.\cancel{7}.\cancel{8}.\cancel{9}} =$$

13
14
52
13
182
182
2002

Progressionen.

Eine nähere Darstellung der progress: verschied. Ordnungen ist folgende.

Prog: der 1. Ord. ist a

$a+d$

$a+2d$

$a+3d$ .... bis $a+(n-1)d$ für n Gl.

$$S = na + (1+2+3+\ldots\ldots(n-1))d$$

$$= na + \left(\frac{n-1}{2}\right)(n+1-1)d = na + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$

Progress: der II Ordn. ist für n Glieder

a	weil die	d
$a+d$	Differenz:	$2d$
$a+3d$		$3d$
$a+6d$		$4d$
$a+10d$		
bis $a+\frac{n(n-1)}{2}d$		$(n-1)d$,

eine Progress: der 1. Ordn. bilden, es ist daher

$$S = na + \left(1+3+6+10+\ldots\ldots\frac{(n-1)n}{2}\right)d$$

$$S = na + \frac{n(n-1)(n+1)}{2 \cdot 3}d$$ (entst. aus $(n-1)(n-1+1)(n-1+2)$)

$$S = \frac{n}{2 \cdot 3}\left(3 \cdot a + (n-1)(n+1)d\right)$$ u. s. w.

Allein hier wird vorausgesetzt, daß die Differenz (der ersten 2 Glieder) der beiden Reihen dieselbe bleibt, also z. B.

1, 4, 10, 19, 31, 46 $= 6\left(\frac{6+5\cdot 7\cdot 3}{6}\right) = 6+105 = 111.$

3 6 9 12 15

3 3 3 3

Und aber die Differenzen verschieden wie

1 4 9 16 25 36 49

3 5 7 9 11 13

2 2 2 2 2

dann paßt die Formel nicht auf und man muß sich um die allgemeine Darstellg. selbst an beiden diff. umgesehen werden.

Es ist nun also noch, wie dieser allg: Verscheinung der Summe für die arithm: progr: der m^{ten} Ord: zu entwickeln. Es war aber früher

1. Ord:
a
$a+d$
$a+2d$
$a+3d$
bis $a+(n-1)d$.

$s = na + \frac{n(n-1)d}{2}$

II. Ord:
a
$a+b$
$a+2b+d$
$a+3b+3d$
$a+4b+6d$
$a+5b+10d$
$\vdots$
$a+(n-1)b+\frac{n(n-1)}{2}d$

$s = na + \frac{n(n-1)}{2}b + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}d$

III. Ord:
a
$a+b$
$a+2b+c$
$a+3b+3c+d$
$a+4b+6c+4d$
$a+5b+10c+10d$
$a+6b+15c+20d$
$\vdots$
$a+nb+\frac{n(n-1)}{2}c+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}.d$

$s = na + \frac{n(n-1)}{1.2}b + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}c + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}.d$

Nach der analogie wird also die Summe der

IV. Ord $= s = na + \frac{n(n-1)}{2!}b + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}c + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}d + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\delta$

und daher die Summe der m^{ten} Ordnung, wo also m Differenzen die letzte unveränderliche $= \delta$ mit ... fortgeführt werden müssten würde sein

$s = na + \frac{n(n-1)}{2!}b + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}c + \ldots\ldots \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m-2)(n-m-1)}{m!}.r + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m-1)(n-m)}{(m+1)!}\delta$

das n^{te} Glied der m^{ten} Ordn: ist

$t = a + nb + \frac{n(n-1)}{2}.c + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}d + \ldots \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m-3)(n-m-2)}{(m-1)!}r + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m-1)}{m!}.\delta$

Außer den arithm: giebt es geometrische Progressionen, wo jedes nachfolgende Glied mit einem factor multiplic: wird. Sind die factoren immer dieselben ist es eine Progr: I. Ord z.B. $a + ab + ab^2 + ab^3 + \ldots\ ab^{n-1} = t$ bilden die factoren unter sich eine geom Prog 1. Ord ist es eine prog: der 2ten Ord: u. s. f.

Um die Summe der geom: Reihe 1. Ord zu finden ist $t = a(1+b+b^2+b^3+\ldots b^{n-1})$, also auf arithm. progr: nicht zu reduciren

Allein der ein Glied in dem andern enthalten aufheben ist zu bilden sein proport. Verhältniß, so ist jedes Glied außer dem letzten Vorderglied und jedes außer dem ersten Hinterglied ist

$a : ab = ab : ab^2 = ab^2 : ab^3 = ab^3 : ab^4 \ldots\ldots = ab^{n-2} : ab^{n-1}$

also $s - u : s - a = a : ab = 1 : b$

$$bs - bu = s - a$$

$$(b-1)s = bu - a$$

$$s = \frac{bu-a}{b-1} = \frac{ab^n - a}{b-1} = \frac{(b^n-1)}{b-1} a =$$

$$= \left(\frac{b^n - 1^n}{b-1}\right) a = \frac{(b-1)(b+1)^{n-1}}{(b-1)} = (b+1)^{n-1} \cdot a$$ nach den

bekannten Producten entwickelt also

$s = [1^{(n-1)} + 1^{n-2} \cdot b + 1^{n-3} \cdot b^3 + \ldots\ldots 1^{n-n} \cdot b^{(n-1)}] a$

wenn sich aber das gewöhnliche Formel

$s = \frac{(b^n-1)}{b-1} \cdot a$ vorzuziehen ist

Sucht man die Summen einer geomet. Reihe 1. Ord. von 1 bis n Gliedern zusammen, so ergiebt sich eine geomet. Reihe 2ter Ord. wie bei den andern Reihen

z. B. 1. O. $= a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + ab^5 + \ldots ab^{n-1}$

Die Summe von 1 Gl. $a \cdot 1$

— von 2 Gliedern $a(1+b)$

— 3 — $a(1+b+b^2)$

— 4 — $a(1+b+b^2+b^3)$

— n — $a(1+b+b^2+b^3+\ldots\ldots b^{n-1}) = \frac{(b^n-1)}{b-1} a$

daraus die Grundf. die Summe jeglicher Potenzen einer Zahl b zu finden, mit a dividirt und mit b multipl. giebt

$b+b^2+b^3+\ldots b^n = \frac{b^n-1}{b-1} \cdot b$, wie es sich auch ergiebt wenn $a=b$ gesetzt wird

Zum § 25 der m-ten Ordn.

Das n-te Glied der figur. Zahlen ist $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+m-2)(n+m-1)}{m!} = \varphi$

nun ist es zu untersuchen das Band der permutationen

§ 25 derselben ist. Es ist der $\dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{n!} = \psi$

1° sieht man gleich, es ist jeder factor des Zählers um 1 von dem anderen grösser, so dass $(m-n+1)$ der kleinste und m der grösste ist; setzt man daher statt n, $(m-n+1)$ in φ, oder statt $(m-n+1)$, n in ψ, so erhalten wir durch ψ für φ, nur in umgekehrter Ordnung.

2° Es folgt schon daraus dass die Zahl der factoren auch dieselbe ist. Aber dies erhellt auch aus folgendem. Wenn m wird zuerst $-n+1$, dann $-n+2$, $-n+3$ u.s.f. addirt, so ist also statt $(m-1)$ im 2ten factor zu setzen wären $(m-(n+n-1)) = (m-1)$ und statt m, $(m-(n+n)) = m$. Also giebt es n factoren so viel als im Nenner. derselbe ist in φ wie der 1te Anblick zeigt, und auch nach den figur. Zahlen gefordert ist.

Dieser ist der Ausdruck ψ das $(m-n+1)$te Glied der figurirten Zahlen $n$ter Ordnung

Ist $n = m-1$ so ist $\varphi = \dfrac{(n+1)(n-1)(n-2)\ldots\ldots(3)(2)(1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots3.2.1} = n+1 = m$

also ist $m = n+1$

oder besser statt n, $(m-1)$ gesetzt wird

$$\psi = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{(m-1)(m-2)\ldots\ldots\ldots(m-m+3)(m-m+2)(m-m+1)} = m$$

da $m = n+1$, $-m = -n-1$ $\quad (m-n+2)(m-n+1)(1)$

Ist $n = m-2$ so ist $\psi = \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{(m-2)(m-3)(m-4)\ldots\ldots(m-m+4)(m-m+3)(m-m+2)(m-m+1)}$

da $m = n+2$, $-m = -n-2$ so ist $\ldots\ldots(m-n+2)(m-n+1)(2)(1) = \dfrac{m(m-1)}{1.2}$

u.s.f. Zählen ich also 10 Ausdrücke von a und b wo a 9 mal b 1 mal vorkommt, so ist die Zahl der Permutationen $= 10$ (10te figur. Zahl 1. Ordn.)

kommt a 8 mal, b 2 mal vor so ist die Z. d. Perm. $= \dfrac{10.9}{1.2} = 45$ (die 9te figur. Zahl 2ter Ordn.)

kommt a 7 mal b, 3 mal vor so ist die Z. d. Perm. $= \dfrac{10.9.8}{1.2.3} = 120$ (die 8te fig. Z. 3te Ord.)

kommt a 6 mal b, 4 mal vor so ist die Z. d. Per. $= \dfrac{10.9.8.7}{1.2.3.4} = 210$ (die 7te fig. Z. 4te Ord.)

Kommt a 5 mal und b, 5 mal vor, so ist die Z. d. Perm.
$= \frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5} = 252$ (die 6te fig. Z. 5t Ordn.)
Die 3 folgenden Fälle sind mit den obigen einerl einerlei gleich, so daß die 3te figurirte Zahl 8ter Ordn. = ist der 9ten fig. Zahl 2ter Ordn.
Kommt a 1 mal b, 9 mal vor so ist der Fall der erste und die 2te figur. Zahl 9ter Ordn. ist = der 10ten fig. Z. 1ter Ordn.
Allgemein ist also $m > n$ ~~und $n = m - n$~~ so ist die Zahl der Permutationen von m Dingen, wo a n mal und b, m−n mal vorkommt, gleich der $(n+1)$ten figurirten Zahl der $(m-n)$ten Ordn.
Ferner ist die letzte figur. Zahl = der $(m-n+1)$ten figur. Zahl der nten Ordn.
Der Beweis des letzten Satzes ergiebt sich aus der Formel § 23 indem man bald den 1ten Theil des Nenners, bald den zweiten mit dem Zähler hebt, als nach diesen 2 Gleichheiten, die die obigen beweisen.
Zugleich erscheint die Lehre der Permutationen als Supplement der figur. Zahlen.

Zu § 33

Nimmt man die 2te Potenz des Polynoms z. B.

$a + b + c + d \ldots$ } so wird das Product aus Buchstaben, wo die Potenzen
$a + b + c + d \ldots$ } nur einfach vorkommen

können, die Producte 2 verschied. Factoren immer doppelt nach ihrer Permutat. Zahl.

also $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2\ldots$

$+ 4.3 + 4 = 16 = 4^2$ Die Anzahl der Glieder ist also = der Variationen von m (4) + ~~2te~~ m Potenzen von der respect. m Gliedern ohne Zusammensetzg. = der doppelten Comb. von m Gliedern + den bezeichneten m Potenzen

Multiplicirt man die Amben mit $a+b+c+d$, so entstehen lauter Ternen, darunter werden die zu m lichen von den respect: m Gliedern verbindbaren, die nur einzeln vorkommen, und wieder zu Comb: nach Tern: gehören, denn finden alle möglichen Ternen statt, wie sie die Comb: von m (4) Gliedern liefern nebst den Permutat: davon. Ferner die Ternen in welche die Glieder im Quadrat vorkommen verbunden mit einem besondern factor. also 12 amben jede mit 3 factoren = 36 — etc

$$\left.\begin{array}{r} 4.3.2+4 = 28 \\ +36 = \underline{36} \\ 64 \end{array}\right\} 4^3$$

Es ergeben sich hier ~~Combinationen~~ Variat zu 2, 3, etc mit Wiederholung der Ausdrücke, und es ergiebt sich daraus die Zahl der ~~Comb~~ Vari von m Gl: zu n mit Wiederholg $= m^n$

Leichter ist die Einsicht beim Binom. von dem allein im § 33 die Rede ist.

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a+b} \\ aa+ab+ba+bb = a^2+1.2.\,ab+b^2 \\ \underline{a+b} \\ aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb = a^3+\frac{1.2.3}{1.2}a^2b+\frac{1.2.3}{1.2}ab^2+b^3 \\ \underline{a+b} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} aaaa+aaab+aaba+aabb+abaa+abab+abba+abbb+ \\ +baaa+baab+baba+babb+bbaa+bbab+bbba+bbbb \end{array}\right\} =$$

$$\Big\{ = a^4+\frac{1.2.3.4}{1.2.3}a^3b+\frac{1.2.3.4}{1.2.1.2}a^2.b^2+\frac{1.2.3.4}{1.2.1.2}a^3.b+b^4$$

Es sind demnach ~~Combinationen~~ Variationen mit Wiederholg deren Anzahl ist $= m^n$ sollen sie zusammengezogen werden, so müssten die möglich vorkommenden Glieder hier also $a^4 — a^3.b — a^2.b^2 — a^3.b' — b^4$ aufgestellt werden, wodurch die Permut: die Coefficienten dazu liefern.

Combinationen mit Wiederholung

Die Formel der Comb: ohne Wiederholung ist folgende

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots\ldots(m-n+1)}{n!}$$

Wenn 4 Buchst. a b c d, sind die amben
ab, ac, ad, bc, bd, cd
nun können aber Wiederholungen statt finden also aa, bb, cc, dd mit. es giebt also 6 amben ohne und 10 amben mit Wiederholung. Um die Zahl der letzteren zu finden, sehen wir dass a mit sich selbst und mit andern ~~c~~ combinirt wird, eben so jedes andere Glied, es giebt also

$$\frac{m(m-1)}{1.2}+m=\frac{m^2-m+2m}{1.2}=\frac{m^2+m}{1.2}=\frac{m(m+1)}{1.2.}$$

Die Ternen ~~wieder~~ ohne Wiederholung sind

abc	die mit Wieder-	aaa	bbb	ccc	ddd
abd	holung	aab	bba	cca	dda
acd		aac	bbc	ccb	ddb
bcd		aad	bbd	ccd	ddc
		abc	abd	acd	bcd

also 16 mehr. Um sie zu finden stelle man folgende Betrachtung an.

die Comb: mit Wiederhol. bestehen

1° aus Comb: ohne Wied: $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$

2° aus m Ternen wo jedes Glied sich zur Terne wiederholt 3° aus Ternen, wo jede repetirte ambe (wie aa, bb, cc etc) mit den $(m-1)$ übrigen Gliedern verbunden wird also =

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+m(m-1)+m=$$

$$\frac{m^3-3m^2+2m}{1.2.3}+m^2=\frac{m^3+3m^2+2m}{1.2.3}=\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}$$

Die Quaternen ohne Wiederholg. von a, b, c, d ist bloß 1.ne
mit Wiederholg. sind folgende:

aaaa	bbbb	cccc	dddd	
aaab	bbba	ccca	ddda	
aaac	bbbc	cccb	dddb	
aaad	bbbd	cccd	dddc	
aabc	bbac	ccab	ddab	
aabd	bbad	ccad	ddac	
aacd	bbcd	ccbd	ddbc	
aabb	bbcc	ccdd		= ab bc cd / ac bd / ad
aacc	bbdd			
aadd				
abcd				

Die Quaternen bestehen also
1º aus Quat. ohne Wiederholg.
2º aus m sich repetirenden quaternen
3º aus quat. die aus sich repetirenden ternen bestehen verbunden mit den (m-1) übrigen Gliedern
4º aus quat. der sich repetirenden Amben verbunden mit der Zahl der amben aus (m-1) Größen
5to aus quat. ~~zwei~~ sich repetirenden verschiedenen Amben deren Zahl der einfachen Amben von m Größen ohne Wiederholg. gleicht, also

$$= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + m + m(m-1) + m\cdot\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$$

$$= \frac{\qquad}{} + m^2 + \frac{m^3-2m^2+m}{1\cdot 2}$$

$$= \frac{\qquad}{} + \frac{m^3+m}{1\cdot 2}$$

$$= \frac{m^4-6m^3+11m^2-6m+12m^3+12m}{4!} = \frac{m^4+6m^3+11m^2+6m}{4!} =$$

$$= \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4!}$$

Ganz allgemein bestehen die nternen mit Wiederholg.
1º aus nternen ohne Wiederholg.
2º aus m sich repetirenden nternen
3º aus (n-1) sich repetirenden ternen verbunden mit den (m-1) übrigen Größen
4º aus (n-2) sich repet. ternen verbunden mit den amben ohne Wiederh. aus (m-1) Gr.
5º aus sich rep: (n-3) tern: ———— ternen ————

⋮

rto aus sich repet: (n-2) tern: ———— mit sich repet. amben der übrigen (m-1) Größe
pto (n-3) tern ———— ternen ————

uto aus sich repet. amben, ternen, quat. etc deren 4, 5 etc Glieder,
nach dem sich mannigfache Combinationen giebt

Bei r^{ten} ist zu bemerken, daß wenn die n^{te} aus ~~...~~ zwei amben, oder drei ternen, 4 quater- etc bestehet die Anzahl immer = ist der amben, ternen, quater: ohne Wiederholung. Ist die Anzahl der amben 3fach, 4fach, 5fach, so ist ihre Zahl immer = der Zahl der ternen quatern: quinter: ohne Wiederholung

$$
\begin{array}{lcl}
3^{\text{te}}\text{-}aabbcc & & abc \\
aabbdd & = & abd \qquad aabbccdd = abcd \\
aa\,ccdd & & acd \\
bb\,ccdd & & bcd
\end{array}
$$

Ebenso ist die Anzahl der 2fachen amben (4fachen 5fachen etc ternen) gleich der Zahl der quaternen quinten: etc:

Uebersicht: Jede n^{te} aus r ternen bestehend ist zu betrachten als wenn sie aus einfachen Größen bestünde

wonach das Inductionsverfahren weiter geführt werden kann

die Bestandtheile der n^{ten} sind also.

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)}{n!} + m + m(m-1) + m\frac{(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)}{(n-1)!} \; (=A)$$

$$+ m\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2} + m\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots\cdots$$

$$= A + (m-1)\frac{m(m-1)}{2!} + (m-2)\frac{m(m-1)(m-2)}{3!} + (m-3)\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!} + \cdots$$

$$= B + \frac{m^2}{1} + (m-1)^2\cdot\frac{m}{2!} + (m-2)^2\frac{(m-1)m}{3!} + (m-3)^2\cdot\frac{(m-2)(m-1)m}{4!} + \cdots$$

$$\cdots + (m-n+2)^2\cdot\frac{(m-n+1)\cdots(m-2)(m-1)m}{(n-1)!}$$

+ die nicht zu bemerkende n^{ten} Größen. Der Beweis kann also nicht völlig geführt werden

Läßt man die Comben mit Wiederholg. permutiren, so entstehen
Variationen mit Wiederholg.

Da aber in den Comb: mit Wiederholg. die sich repetir. Amben Ternen etc. wie aaaa, bbbb, cccc, nicht permutirt werden können, so muß auf Rücksicht genommen werden

Die Zahl der Amben aus der Comb: ist $\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}$, läßt man sie permutiren, so entsteht $m(m+1)$, nun sind aber die m sich repet. Amben nicht permutirbar es sind also m Amben zu viel die Var: sind also
$m^2+m-m = m^2$

Oder man stellt die m Amben gleich ab und läßt sie unpermutirt so werden $\frac{m^2+m}{1\cdot 2}-m = \frac{m^2-m}{1\cdot 2}$ erst permutirt wird und m dazu addirt wird die V: sind also $m^2-m+m = m^2$

Ebenso die Ternen $\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}$ läßt man sie permutiren, so ist $m(m+1)(m+2)$. Nun sind aber m Ternen die aus = Buchst: bestehen mit 1.2.3 zu viel multiplic, $5m$ müssen also abgezogen werden ferner geben die $m(m-1)$ Ternen wo ein Buchstab 2 mal vorkommt nicht 1.2.3 permutat: sondern bloß $\frac{1.2.3}{1.2} = 3$ permut: daher müssen $3m(m-1)$ abgezogen werden. die Vari: sind also

$$= m(m+1)(m+2) - 5m - 3m^2 + 3m$$
$$= m^3+3m^2+2m-3m^2-2m = m^3$$

Bei größeren Fortschritten wird das Abziehen immer complicirter, daher nimmt man lieber Vari mit Wied: aus Vari: ohne Wiederholg.

Bei Amben sind sie $= m(m-1)+m = m^2$

bei Ternen $= m(m-1)(m-2) + m + \frac{m(m-1)}{\cancel{1.2}}\frac{3!}{2!}$

$$= m^3-3m^2+2m+m+3m^2-3m$$
$$= m^3$$

es sind die permutirten Bestandtheile der Comben: die p. 79 aufgezählt sind

bei Quaternen $= m(m-1)(m-2)(m-3) + m + m(m-1)\frac{4!}{3!} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\frac{4!}{2!} +$
$+ \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{4!}{2!\,2!}$

$$= m^4-6m^3+11m^2-6m+m+(m^2-m)4+(m^3-3m^2+2m)6+(m^2-m)3$$
$$= m^4$$

Bei den quinternen sind die bestandtheile

1º Var: ohne wied: $= m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) =$

2º m repet: quint $= m$

3º Perm: von quint: wo der eine aus 4mal vorkommt $= m(m-1)\frac{5!}{4!} = m(m-1)5$

4º Perm: von quint wo der eine aus dr: 3mal gesetzt verbunden mit den amben aus (m-1) $= m\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\frac{5!}{3!} = m(m-1)(m-2)10$

5º Perm: wo der eine 2mal gesetzt mit den ternen aus (m-1) $= m\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{3!}\frac{5!}{2!} = m(m-1)(m-2)(m-3)10$

6º Perm von quint wo der eine aus dr 3mal der andere 2mal vorkommt $= \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{5!}{2!3!} +$ $\Big\} = m(m-1)10$

7º Perm von quint wo der eine aus d. 2mal der andere 3mal vorkommt $= \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{5!}{2!3!}$

8º Perm von quint wo zwei Amben übrigen verbunden mit den (m-2) [illegible] vorkommen $= \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)\frac{5!}{2!2!} = m(m-1)(m-2)15$

$$m^4 = \left(15m(m-1) + 25m(m-1)(m-2) + 10m(m-1)(m-2)(m-3) + m(m-1)\ldots(m-4)\right)$$

$$= m\left[1 + 15(m-1) + 25(m-1)(m-2) + 10(m-1)\ldots(m-3) + (m-1)\ldots m-4\right]$$

$$= m\left[1 + 10(m-1)\left[5 + 15(m-2) + (m-2)(m-3)\right] + (m-1)\ldots m-4\right]$$

$$5 + (m-2)\left[15 + m - 3\right] + \ldots$$

$$= m \cdot m^4 = m^5$$

$m(m-1)(m-2)(m-3) = m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m$

durch m getheilt $= m^3 - 6m^2 + 11m - 6$

$m - 4$

$m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m$

$-4m^3 + 20m^2 - 44m + 24$

$m^4 - 10m^3 + 33m^2 - 50m + 24$

$12 + m$

$m - 2$

$12m + m^2$

$-2m - 24$

$m^2 + 10m - 24$

5

$m^2 + 10m - 19$

$10m - 10$

$10m^3 + 100m^2 - 190m$

$-10m^2 - 100m + 190$

$10m^3 + 90m^2 - 290m + 190$

Weit einfacher aber ist der Beweis folgender: Var. ist die möglichste verschiedenheit der Compositionen der Glieder, die und erreicht, wenn man von jedem Glied der gegebenen Glieder jedes Glied vorsetzt also $m.m = m^2$ die Zahl der Amben, vor jede Ambe ein Glied vorgesetzt $= m^2.m = m^3$ die Zahl der Ternen u. s. w. Man kann auch zugleich einsehen, daß das product zweier polynome von m gliedern, gleich der Anzahl mit [illegible] zu zwei, ~~[illegible]~~ [illegible] polyn: = den Var. von M zu 2 [illegible] ist.

$m(m-1)$

9 10

5678 56789 678910
45679 567810
5610

Cl
120