Edukacja 2012, 3 (119), 75-86
ISSN 0239-6858

Dwucyfrowe kodowanie zadań z matematyki

Agnieszka Sułowska*, Marcin Karpiński*

Różne stosowane na świecie sposoby oceniania zadań na egzaminach końcowych dają informacje o osiągnięciach uczniów, pozwalają porównywać wyniki szkół, nie pozwalają jednak na formułowanie wniosków o koniecznych modyfikacjach metod nauczania. Istnieją jednak metody oceniania zadań, które pozwalają nie tylko opisać osiągnięcia i niepowodzenia uczniów, ale także umożliwiają ocenę przyczyn tych niepowodzeń. Jedną z takich metod oceniania zadań otwartych rozbudowanej odpowiedzi jest kodowanie dwucyfrowe (*double-digit coding*). Stosowana jest ona w niektórych międzynarodowych badaniach edukacyjnych. W artykule przedstawiamy pierwsze polskie doświadczenia związane z zastosowaniem tej metody: zadanie z matematyki oraz klucz kodowy, na podstawie którego odbywało się jego ocenianie. Przedstawiamy również doświadczenia zdobyte podczas przygotowywania klucza kodowego i podczas jego zastosowania w procesie oceniania oraz płynące stąd wnioski.

Niepełne wykorzystanie informacji z egzaminów ogólnokrajowych

W większości krajów europejskich egzaminy ogólnokrajowe służą głównie do podsumowania osiągnięć uczniów na koniec określonego etapu kształcenia oraz do monitorowania i ewaluacji szkół lub całego systemu kształcenia. Niektóre kraje (np. Francja, Dania, Szwecja, Węgry) deklarują, że celem egzaminów ogólnokrajowych jest też rozpoznanie potrzeb edukacyjnych i wskazanie odpowiednich metod nauczania (Eurydice, 2009). Oznaczałoby to, że taki egzamin spełnia także w pewnym aspekcie rolę oceny kształtującej.

Problem jaki stawiamy w tym artykule wynika z obserwacji, że ogólnokrajowe egzaminy w większości krajów nie spełniają tych deklaracji, albo czynią to w dość ograniczonym zakresie. Zgadzamy się z poglądem, że główną ich rolą jest faktycznie podsumowanie osiągnięć uczniów na koniec danego etapu kształcenia. Niemniej widzimy możliwość – i dokumentujemy ją przykładem empirycznym – pełnienia przez nie także roli oceniania kształtującego w znacznie większym zakresie niż dotychczas. Tak przygotowane egzaminy bardziej efektywnie przyczyniałyby się do rozwoju umiejętności uczniów, a także pomagałyby w syste-

Artykuł powstał na podstawie badania *Diagnoza kompetencji gimnazjalistów 2011* wykonanego w ramach projektu systemowego „Badanie jakości i efektywności edukacji oraz instytucjonalizacja zaplecza badawczego" realizowanego przez Instytut Badań Edukacyjnych i współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego (Program Operacyjny Kapitał Ludzki 2007–2013, priorytet III: Wysoka jakość systemu oświaty).

* Pracownia Matematyki, Instytut Badań Edukacyjnych. E-mail: a.sulowska@ibe.edu.pl

matycznym podnoszeniu jakości metod nauczania.

Aby jednak z wyników egzaminu można było odczytać informacje pozwalające ocenić i doskonalić metody nauczania, potrzebna jest dostosowana do tego celu analiza uczniowskich rozwiązań zadań egzaminacyjnych oraz taka metoda zakodowania wyników tej analizy, by można było dokonać ich opracowania statystycznego. Bez tego nie można wyciągnąć ogólnych, obejmujących całą badaną populację, wniosków dotyczących metod nauczania czy przyczyn niepowodzeń uczniowskich. Narzędzia i metody wykorzystywane do takiej analizy mogą również posłużyć wszystkim nauczycielom do badania sposobów rozumowania ich uczniów oraz diagnozowania przyczyn ich niepowodzeń w celu doskonalenia własnych metod nauczania. W dalszej perspektywie może się to przełożyć także na osiągnięcie przez uczniów lepszych wyników na egzaminach.

Przegląd egzaminów końcowych z matematyki w różnych krajach pokazuje, że podobnie jak w Polsce, ani metody kodowania rozwiązań, ani sposób komunikowania wyników egzaminu nie dają możliwości głębszej analizy przyczyn niepowodzeń uczniowskich. Nie pozwalają też na wykorzystanie ich do doskonalenia rozwiązań metodycznych. Oto kilka typowych przykładów.

Francja. *Diplôme nationale du brevet* jest egzaminem ogólnokrajowym, ale mimo centralnych procedur jego przeprowadzania i oceniania, w praktyce ocenianie i interpretacja wyników nie są jednorodne (Eurydice, 2009). Arkusz zadań matematycznych (*série collège*) zawiera około 20 zadań, większość to zadania otwarte, których ocenianie polega na przydzielaniu punktów za kolejne etapy rozwiązania. Osobne punkty przydzielane są za redakcję i sposób prezentacji rozwiązań w całej pracy – można za to zdobyć 4 punkty (za zadania można otrzymać w sumie maksymalnie 36 punktów). Wyniki egzaminu służą głównie do monitorowania szkół i przedstawiane są w raporcie na temat podstawowych kompetencji matematycznych uczniów.

Holandia. Egzamin VWO to odpowiednik polskiej matury, z tym, że silniejsza niż w Polsce selekcja uczniów po wcześniejszym etapie nauczania powoduje, że dochodzi do niego ok. 20% holenderskich uczniów. Arkusz matematyczny składa się wyłącznie z zadań otwartych (jest ich ponad 20). Ocenianie zadań polega na przydzielaniu punktów za kolejne, dość drobno podzielone etapy rozwiązania. W modelu oceniania etapy te są dokładnie opisane, zwykle chodzi o podanie wartości kolejnych obliczanych wielkości. Wyniki egzaminu służą głównie do oceny osiągnięć uczniów.

Rosja. Egzamin państwowy po 11. klasie. W arkuszu egzaminacyjnym znajduje się 20 zadań podzielonych na dwie grupy. Za każde z 14 zadań z pierwszej grupy uczeń otrzymać może maksymalnie 1 punkt. Mimo że zadania te mają formę zadań otwartych, nie wymaga się od ucznia przedstawienia całego toku rozwiązania – wystarczy podać odpowiedź, która zawsze jest liczbą całkowitą lub ułamkiem dziesiętnym. Dla pozostałych sześciu zadań uczeń musi zapisać pełne rozwiązanie. Ich ocenianie polega na przydzieleniu punktów za kolejne etapy rozwiązania. Opis tych etapów jest na tyle ogólny, że obejmuje różne sposoby rozwiązania zadania.

Systemy międzynarodowych egzaminów International Baccalaureate (IB) oraz International General Certificate of Secondary Education (ICGSE). W obu tych systemach stosowane są podobne sposoby kodowania zadań. Za każde zadanie przydzie-

lane są przez oceniającego kody składające się z litery i cyfry. Litera określa rodzaj wykazanej przez ucznia umiejętności, a cyfra – osiągnięty poziom. W schemacie oceniania każdego z zadań opisano, jakie litery należy przydzielić i jakie cyfry w wypadku konkretnych zapisów ucznia. Oznaczenia literowe obejmują na przykład: M – użycie poprawnej metody, A – podanie poprawnej odpowiedzi, R – przedstawienie poprawnego rozumowania, G – uzyskanie rozwiązania za pomocą kalkulatora graficznego.
W egzaminie IB każdy z egzaminatorów, oprócz zakodowania przydzielonych mu prac, jest też proszony o sporządzenie sprawozdania, w którym powinien podać przykłady charakterystycznych rozwiązań uczniowskich (poprawnych i błędnych). Te przykłady są wykorzystywane do sporządzenia części oficjalnego raportu o wynikach egzaminu, która nosi tytuł „Rekomendacje i wskazówki dotyczące nauczania przyszłych zdających". Wskazówki te są jednak nadzwyczaj lakoniczne i za cel mają raczej osiągnięcie lepszego wyniku egzaminu, a nie poprawę metod nauczania.

Propozycja rozwiązania: kodowanie dwucyfrowe

Tradycyjnie w praktyce szkolnej, w egzaminach zewnętrznych i badaniach edukacyjnych, w których sprawdzana jest wiedza i umiejętności uczniów w zakresie matematyki, do oceny uczniowskich rozwiązań zadań stosuje się ocenianie kryterialne. Polega ono z grubsza rzecz biorąc na tym, że każdemu rozwiązaniu przyporządkowuje się ocenę (liczbę punktów) zgodnie z kryteriami opisanymi w schemacie oceniania.

Odmianą oceniania kryterialnego jest kodowanie dwucyfrowe (*double-digit coding*). Łączy ono w sobie tradycyjne ocenianie ze zbieraniem dodatkowych informacji. Kodowanie dwucyfrowe polega na przyporządkowaniu każdemu rozwiązaniu dwóch cyfr. Pierwsza cyfra, podobnie, jak w ocenianiu tradycyjnym, odpowiada przyznanej liczbie punktów lub ogólniej poziomowi poprawności rozwiązania. Natomiast druga cyfra informuje o metodzie rozwiązania zadania, zastosowanym przez ucznia rozumowaniu lub strategii, bądź rodzaju popełnionego błędu. Stosowanie tego sposobu oceniania wymaga przygotowania schematu oceniania zwanego kluczem kodowym – systemu dostępnych kodów wraz z ich dokładnym opisem oraz przeszkolenia osób oceniających – koderów (Dossey, Jones i Martin, 2002).

Kodowanie dwucyfrowe stosowane jest między innymi w badaniach międzynarodowych TIMSS i PISA (Olson, Martin i Mullis, 2008; OECD, 2005). W każdym z tych przeprowadzanych cyklicznie międzynarodowych programów badawczych część używanych zadań to zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi, które są ocenianie przy użyciu kodowania dwucyfrowego.

Raporty międzynarodowe z kolejnych edycji tych badań zawierają bardzo wiele analiz i informacji dotyczących wszystkich krajów biorących w nich udział. Jednak na tak wysokim poziomie ogólności, na którym są one prowadzone i podawane, nie wykorzystuje się analizy opartej na wynikach kodowania dwucyfrowego (Mullis, Martin i Foy, 2008; OECD, 2004).

Analiza szczegółowych informacji na temat poszczególnych zadań: metod rozwiązania, zastosowanych rozumowań lub strategii, czy rodzajów błędów popełnianych przez uczniów – informacji dostępnych dzięki dwucyfrowemu kodowaniu, ma większy sens na niższym poziomie ogólności – w analizach porównawczych prowadzonych dla kilku krajów, w badaniach wewnątrzkrajowych lub w analizach prowadzonych na poziomie szkoły lub klasy.

Przykłady analiz wykonywanych z wykorzystaniem kodowania dwucyfrowego

Przykład takiej analizy porównawczej przeprowadzonej dla grupy państw nordyckich został przedstawiony w publikacji „Northern lights on PISA. Unity and diversity in the Nordic countries in PISA 2000" (Turmo, Kjærnsli i Pettersson, 2003).

Autorzy prezentują w niej jedno zadanie „Antarktyda", używane w badaniu PISA 2000 oraz szczegółowo omawiają jego sposób kodowania. W zadaniu tym poszczególne kody informują o przyjętej metodzie rozwiązania oraz o ewentualnym popełnionym błędzie. Autorzy porównują wyniki otrzymane za to zadanie w każdym z pięciu krajów nordyckich (Dania, Finlandia, Islandia, Norwegia, Szwecja) zarówno na poziomie ogólnym, jak i na poziomie kodów. Analizują częstość użycia poszczególnych metod rozwiązania w każdym z wymienionych krajów. Stawiają także hipotezy, dlaczego we wszystkich krajach to zadanie okazało się tak trudne oraz jaka była przyczyna tak częstego jego opuszczania.

Wymieniona publikacja oparta jest na danych z badania PISA 2000. Niestety, nie udało się znaleźć analogicznej publikacji dotyczącej późniejszych edycji badania, mimo że autorzy zapowiadali jej przygotowanie. Także norweskie i fińskie raporty z badań PISA 2003, PISA 2006 i PISA 2009 lub ich skróty dostępne w wersji angielskiej nie zawierają żadnych wzmianek, odniesień i analiz opartych na wynikach kodowania dwucyfrowego.

Przykładem wykorzystania informacji dostępnych dzięki kodowaniu dwucyfrowemu do prowadzenia analiz na skalę międzynarodową jest publikacja *Learning mathematics for life. A perspective from PISA* (OECD, 2010b). W rozdziale „Mathematical problem solving and differences in students' understanding", podobnie jak w omówionej powyżej pozycji, autorzy przedstawiają jedno zadanie, „Kroki", użyte w badaniu PISA 2003 oraz szczegółowo omawiają jego sposób kodowania. W tym zadaniu poszczególne kody informują o rodzajach popełnianych błędów. Autorzy analizują częstość występowania poszczególnych błędów w skali całego badania, jak również w poszczególnych krajach. Na przykład zauważają, że Polska jest w gronie kilku krajów, których uczniowie, częściej niż uczniowie w innych krajach OECD, popełniają błąd w zamianie jednostek. Analiza częstości występowania poszczególnych kodów w wybranych krajach służy autorom także do weryfikacji postawionych wcześniej hipotez dotyczących podobieństw między tymi krajami w zakresie umiejętności matematycznych ich uczniów.

W podsumowaniu wspomnianego rozdziału autorzy podkreślają, że na podstawie danych z badania PISA trudno analizować sposoby rozwiązań, strategie czy popełniane błędy w odniesieniu do konkretnych zagadnień z powodu zbyt małej liczby zadań dotyczących poszczególnych zagadnień i z powodu zbyt małej liczby zadań kodowanych dwucyfrowo. Podkreślają, że PISA jest badaniem masowym, prowadzonym na tak szeroką skalę, że uniemożliwia to gromadzenie wszystkich potrzebnych danych o sposobach rozwiązania i stosowanych rozumowaniach. Zachęcają także do używania tych lub podobnych zadań w codziennej pracy w szkole, gdzie można wzbogacić je o dodatkowy element dyskusji lub prosić uczniów o podanie argumentacji. Podkreślają również, że na poziomie krajowym można prowadzić głębsze i bardziej szczegółowe analizy i porównywać ich wyniki z badaniami międzynarodowymi[1].

[1] Więcej zadań z badań międzynarodowych wraz z pełnymi kluczami kodowymi można znaleźć w publikacji Foy i Olson (2010) lub pod adresem: https://mypisa.acer.edu.au/images/mypisadoc/pisa_relitems_maths_2.pdf

W polskich badaniach dotyczących wyników egzaminu gimnazjalnego także można znaleźć próby analiz zbliżone do kodowania dwucyfrowego. W roku 2005 w Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej w Krakowie przygotowano system kodowania zadań otwartych, w którym oprócz punktów za rozwiązanie zadania używano też osobnego kodu literowego, za pomocą którego oznaczano różne kategorie błędów popełnionych przez ucznia (Kołodziej, 2007).

Zastosowanie kodowania dwucyfrowego w badaniu *Diagnoza kompetencji gimnazjalistów 2011*

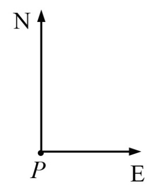
Poniżej przedstawiamy zastosowanie kodowania dwucyfrowego w badaniu *Diagnoza kompetencji gimnazjalistów 2011* (DKG): jedno z zadań otwartych użytych w badaniu, różne sposoby jego rozwiązania oraz przede wszystkim klucz kodowy, na podstawie którego odbywało się jego ocenianie. Przedstawimy również nasze doświadczenia zdobyte podczas przygotowywania tego klucza kodowego i podczas jego zastosowania w procesie oceniania oraz płynące stąd wnioski.

W powszechnej *Diagnozie kompetencji gimnazjalistów*, przeprowadzanej przez Centralną Komisję Egzaminacyjną we współpracy z Instytutem Badań Edukacyjnych w 2011 roku, uczestniczyli uczniowie prawie wszystkich gimnazjów w Polsce – wszystkich, które chciały wziąć w niej udział. Zestawy zadań, które rozwiązywali uczniowie, były przygotowane przez CKE. Prace tych uczniów były sprawdzane w szkołach przez nauczycieli, na podstawie tradycyjnego schematu oceniania również przygotowanego przez CKE.

W części badawczej DKG przeprowadzonej przez IBE, uczniowie rozwiązywali te same zestawy zadań, co w *Diagnozie* powszechnej. Jednak prace tych uczniów były sprawdzane i kodowane przez przeszkolonych egzaminatorów zewnętrznych według przygotowanych przez IBE schematów oceniania – kluczy kodowych. Poniżej przedstawiamy jedno z trzech zadań otwartych użytych w badaniu.

Zadanie 21. „Kutry" (pierwsze zadanie otwarte w zestawie)

Z portu rybackiego (punkt *P*) wypłynęły jednocześnie na połów dwa kutry: jeden na północ ze stałą prędkością 4 węzłów, drugi na wschód ze stałą prędkością 3 węzłów.



Oblicz odległość między tymi kutrami po dwóch godzinach od wypłynięcia. Wynik podaj w kilometrach. Zapisz obliczenia.

Do rozwiązania zadania skorzystaj z informacji: 1 węzeł to 1 mila morska na godzinę, 1 mila morska = 1852 m.

Wszystkie trzy zadania otwarte zawarte w zestawie sprawdzały opanowanie tzw. umiejętności złożonych. Należą do nich m.in. umiejętność użycia lub stworzenia strategii rozwiązania oraz umiejętność prowadzenia rozumowania i argumentacji. Zadanie 21. sprawdzało opanowanie umiejętności stworzenia odpowiedniej strategii rozwiązania. Znaczenie umiejętności złożonych w kształceniu jest szczególnie akcentowane przez nową podstawę programową. Stawia to przed twórcami zadań i schematów oceniania (kluczy kodowych) nowe wyzwanie – takiego ich przygotowania, aby wydobyć, uchwycić i odpowiednio ocenić te zaprezentowane w rozwiązaniu rozumowania czy użyte strategie.

Sposoby rozwiązania zadania

Na rozwiązanie tego zadania składają się trzy kroki:

1. obliczenie z twierdzenia Pitagorasa odległości między kutrami;

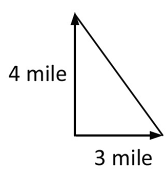
2. pomnożenie wyniku przez 2, aby uwzględnić czas ruchu wynoszący 2 godziny;
3. przeliczenie mil na kilometry.

Kroki te mogą być wykonane w dowolnej kolejności. W pierwszym przedstawionym poniżej rozwiązaniu (I) kroki te wykonano w takiej kolejności, jak wymieniona powyżej: 1., 2., 3. W drugim rozwiązaniu najpierw wykonano 2. krok, następnie 1. i na końcu 3., natomiast w trzecim rozwiązaniu najpierw mamy krok 3., następnie 2. a na końcu 1.

Użycie odpowiedniej strategii rozwiązania tego zadania polega właśnie na wyborze odpowiedniej kolejności wykonywania tych kroków, bo choć każda kolejność prowadzi do poprawnego rozwiązania, to w zależności od dokonanego wyboru w sposób znaczny zmienia się trudność zadania.

I sposób rozwiązania:

Po godzinie od wypłynięcia:
jeden kuter przepłynął 4 mile morskie,
drugi kuter przepłynął 3 mile morskie.
Kierunki, w jakich poruszały się kutry są prostopadłe, zatem można użyć twierdzenia Pitagorasa.
Korzystając ze szczególnego przypadku twierdzenia Pitagorasa, tzw. trójkąta egipskiego (trójkąt prostokątny o bokach 3, 4, 5) wiemy, że odległość między kutrami po godzinie od wypłynięcia jest równa 5 mil morskich.

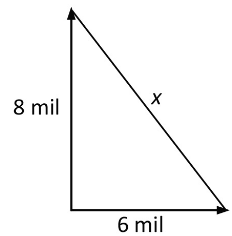


Po 2 godzinach od wypłynięcia odległość między kutrami będzie dwa razy większa, czyli będzie wynosiła $2 \cdot 5 = 10$ mil morskich.
10 mil morskich, to $10 \cdot 1852$ m = 18 520 m = 18,52 km

Jest to optymalna strategia rozwiązania tego zadania – nie wymaga właściwie żadnych rachunków. Stosując tę strategię można zadanie rozwiązać w pamięci.

II sposób rozwiązania:

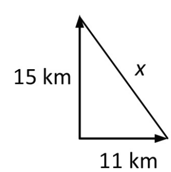
W ciągu dwóch godzin jeden z kutrów przepłynął $2 \cdot 4 = 8$ mil morskich, drugi $2 \cdot 3 = 6$ mil morskich. Odległość między kutrami (x) obliczamy, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa.
$x^2 = 8^2 + 6^2$
$x^2 = 64 + 36$
$x^2 = 100$
$x = 10$ (mil morskich)
10 mil morskich, to
$10 \cdot 1852$ m = 18 520 m =
= 18,52 km



Ten sposób rozwiązania jest również bardzo dobry, choć obliczenie odległości między kutrami wymaga już wykonania pewnych obliczeń. O prostocie i skuteczności tego rozwiązania decyduje fakt, że podobnie, jak w rozwiązaniu poprzednim, do twierdzenia Pitagorasa podstawia się odległości wyrażone w milach, czyli jednocyfrowe liczby całkowite.

III sposób rozwiązania:

1 węzeł to 1 mila morska na godzinę, czyli 1852 km/h. Zatem w ciągu 1 godziny pierwszy kuter przepłynie 7,408 km, a drugi 5,556 km.
Po 2 godzinach będzie to odpowiednio 14,816 km (w przybliżeniu 15 km) i 11,112 km (w przybliżeniu 11 km).
Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy odległość między kutrami po 2 godzinach:
$x^2 = 15^2 + 11^2$
$x^2 = 225 + 121$
$x^2 = 346$
$x = \sqrt{346}$
$18 < x < 19$
Odległość między kutrami wynosi około 18,5 kilometra.



Jest to najgorsza i zarazem najbardziej rutynowa strategia rozwiązania. Rutyna w tym rozwiązaniu bierze się z bezkrytycznego zastosowania zasady: najpierw wszystkie podane odległości zamień na kilometry. Konsekwencją takiej zamiany jest otrzymanie dwóch liczb pięciocyfrowych, które, aby móc zastosować twierdzenie Pitagorasa, powinny zostać podniesione do kwadratu. Jednak podczas egzaminu gimnazjalnego i podczas badania uczniowie nie mogli używać kalkulatorów, było to więc praktycznie niemożliwe. Jedynym wyjściem z sytuacji było zaokrąglenie otrzymanych liczb, na przykład do pełnych liczb całkowitych. Jednak stosowanie przybliżeń nie jest dla uczniów łatwe ani oczywiste – dość często mają oni wątpliwości, kiedy wolno je stosować i jak to poprawnie zrobić.

Na kolejną trudność uczniowie natrafiali po zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa – otrzymana liczba 346, z której należało wyciągnąć pierwiastek, nie jest bowiem kwadratem liczby naturalnej. W tej sytuacji część uczniów decydowała się na podanie odległości w postaci „$\sqrt{346}$ km", co nie jest informacją szczególnie użyteczną i stoi w sprzeczności z praktycznym kontekstem zadania. Jedynym sposobem podania odległości między kutrami w sensownej postaci jest więc oszacowanie wielkości tego pierwiastka, co na poziomie gimnazjum również nastręcza wiele trudności.

Założenia i ograniczenia klucza kodowego

Wszystkie klucze kodowe przygotowywane na użytek badania opracowane zostały w taki sposób, aby możliwe było wydobycie i zebranie informacji o sposobie rozwiązania zadania zastosowanym przez ucznia, zaprezentowanym rozumowaniu lub strategii oraz popełnionych błędach. Jednak, jeśli chodzi o efekty zastosowania opracowanych kluczy, z punktu widzenia oceny ucznia nie mogły one odbiegać od schematów oceniania opublikowanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną. Uczeń, który za swoje rozwiązanie, oceniane według schematu CKE otrzymywał *x* punktów, powinien otrzymać dokładnie taką samą liczbę punktów po zastosowaniu klucza kodowego używanego w badaniu.

Schemat oceniania CKE pod względem poziomu wykonania zadania

Poziom wykonania:

P_6 – *pełne rozwiązanie* – 3 punkty
obliczenie odległości w km między kutrami po dwóch godzinach od wypłynięcia (18,52 km);

P_4 – *zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne* – 2 punkty
obliczenie odległości w milach między kutrami po dwóch godzinach od wypłynięcia (10 mil morskich);

P_2 – *dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane* – 1 punkt
obliczenie drogi przebytej przez każdy kuter w ciągu dwóch godzin (8 mil morskich, 6 mil morskich),
lub
obliczenie odległości między kutrami po godzinie od wypłynięcia (5 mil morskich);

P_0 – *rozwiązanie niestanowiące postępu* – 0 punktów
rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania (CKE, 2011).

Klucz kodowy opracowany na użytek badania

Kategoria 3. Rozwiązanie pełne: obliczenie odległości w km między kutrami po dwóch godzinach od wypłynięcia – 3 punkty.

- kod 3.1 – 18,52 km – do twierdzenia Pitagorasa podstawione wartości podane w milach (6 i 8 mil lub 3 i 4 mile);
- kod 3.2 – liczba w postaci dziesiętnej o wartości pomiędzy 18 km i 19 km, np. „około 18,5 km" – do twierdzenia Pitagorasa podstawione wartości podane w kilometrach z przybliżeniem (np. 15 km i 11 km lub 14,8 km i 11,1 km);

- kod 3.3 – pierwiastek lub wyrażenie zawierające pierwiastek, o wartości pomiędzy 18 km i 19 km, np. $\sqrt{346}$ km lub $2\sqrt{86}$ km – do twierdzenia Pitagorasa podstawione wartości podane w kilometrach z przybliżeniem (np. 15 km i 11 km lub 14,8 km i 11,1 km);
- kod 3.4 – $\sqrt{342{,}9904}$ km lub $2\sqrt{85{,}7476}$ km – do twierdzenia Pitagorasa podstawione wartości podane w kilometrach bez przybliżeń (14,816 km i 11,112 km lub 5,556 km i 7,408 km).

Kategoria 2. Zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera błędy – 2 punkty.
- kod 2.1 – obliczenie odległości w milach między kutrami po dwóch godzinach od wypłynięcia (10 mil morskich);
- kod 2.2 – obliczenie odległości w metrach lub kilometrach między kutrami po godzinie od wypłynięcia (9260 m lub 9,26 km);
- kod 2.3 – rozwiązania zadania do końca (obliczenie odległości w kilometrach między kutrami po dwóch godzinach od wypłynięcia), ale z błędem rachunkowym lub z błędem w zamianie jednostek.

Kategoria 1. Dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane – 1 punkt.
- kod 1.1 – obliczenie drogi przebytej przez każdy kuter w ciągu dwóch godzin w milach (8 mil morskich, 6 mil morskich);
- kod 1.2 – obliczenie drogi przebytej przez każdy kuter w ciągu dwóch godzin w metrach (14 816 m, 11 112 m) lub w kilometrach (14,816 km i 11,112 km);
- kod 1.3 – obliczenie odległości w milach między kutrami po godzinie od wypłynięcia (5 mil morskich).

Kategoria 0. Rozwiązanie niestanowiące postępu – 0 punktów.
- kod 0 – rozwiązanie błędne;
- kod 9 – brak rozwiązania.

Zastosowanie przygotowanego klucza kodowego

Podczas zastosowania przygotowanego klucza kodowego do oceniania rozwiązań uczniowskich uzyskanych w trakcie badania okazało się, że pojawia się typ rozwiązań, dla którego nie ma odpowiedniego kodu oraz, że dwa typy rozwiązań, istotnie różne z punktu widzenia zaprezentowanych umiejętności ucznia, nie są przez klucz kodowy odpowiednio rozróżniane.

Rozwiązania, których klasyfikacja przy użyciu przedstawionego klucza kodowego okazała się problemem, to niepełne rozwiązania (takie, jak opisano w kodzie 2.1 lub 2.2) na dodatek z błędem rachunkowym lub z błędem w zamianie jednostek z metrów na kilometry. Ogólna zasada, którą przyjęliśmy przy tworzeniu kluczy kodowych była taka, że rozwiązanie z błędem rachunkowym jest klasyfikowane do kategorii o jeden niższej niż analogiczne rozwiązanie, ale bez błędu. Zgodnie z tą zasadą, takie niepełne rozwiązania z błędem rachunkowym powinny spadać z kategorii 2 do kategorii 1 i powinien istnieć dla nich odpowiedni kod w tej kategorii.

Drugi problem, który się pojawił to zbyt duża „pojemność” kodu 1.2. Trafiały do niego zarówno rozwiązania, których autor nie wiedział, jak rozwiązać dane zadanie i wykonał tylko rutynowe rachunki pomocnicze, jak i rozwiązania, w których widać pełne, poprawne rozumowanie, które jednak zostało zarzucone i niedoprowadzone do końca z powodu złej przyjętej strategii i w konsekwencji napotkanych trudności rachunkowych. Skutek obu tych sytuacji jest co prawda taki sam – uczeń nie potrafił obliczyć odległości między kutrami. Ale z punktu widzenia zaprezentowanych przez ucznia umiejętności, rozwiązania takich dwóch typów powinny zostać rozdzielone.

Analiza uzyskanych wyników kodowania

W Tabeli 1 przedstawiono odsetki rozwiązań uczniowskich zaklasyfikowanych do poszczególnych kategorii i poszczególnych kodów: od kategorii 3 – rozwiązań pełnych, do kategorii 0 – rozwiązań niepoprawnych. Kod 9 oznaczał niepodjęcie przez ucznia próby rozwiązania, czyli opuszczenie zadania.

Kategoria 3

Okazuje się, że tylko 13% uczniów w pełni rozwiązało zadanie, czyli uzyskało za swoje rozwiązanie kod z kategorii 3.

Spośród tych 13% uczniów znacząca większość (prawie 10%) otrzymała kod 3.1, czyli rozwiązywała zadanie w optymalny, nierutynowy sposób, wstawiając do twierdzenia Pitagorasa odległości przebyte przez kutry wyrażone w milach. Są to ci uczniowie, którzy potrafią myśleć nieschematycznie – nie wpadli w pułapkę podążania utartą, ale tym razem niedobrą drogą. Część z nich od początku szukała własnego sposobu rozwiązania. Inna część rozpoczynała rozwiązywanie tradycyjnie, od zamiany mil na kilometry, ale widząc, dokąd ta droga prowadzi, potrafili ją porzucić i rozpocząć rozwiązywanie od nowa, szukając nowej, lepszej drogi.

Trzy razy mniej uczniów (3,2%) zdołało rozwiązać zadanie poprawnie do końca, wykorzystując bardziej narzucającą się, ale gorszą strategię. Uczniowie ci najpierw przeliczali odległości przebyte przez każdy z kutrów z mil na kilometry, a dopiero tak uzyskane wielkości (dokładne lub w przybliżeniu) podstawiali do twierdzenia Pitagorasa. Na tę drogę rozwiązania wkraczało znacznie więcej uczniów, bo tak, jak już wspominaliśmy, jest to szlak utarty. Jednak tylko 3,2% wszystkich uczniów rozwiązujących to zadanie zdołało tą drogą dojść do celu.

Wśród tych uczniów tylko 4 (i aż 4) na 1000 otrzymało kod 3.4, czyli rozwiązało zadanie bezbłędnie do końca, wstawiając do twierdzenia Pitagorasa wielkości bez przybliżeń, czyli podnosząc do kwadratu bez kalkulatora liczby pięciocyfrowe! Są to uczniowie na tyle biegli w rachunkach, że nawet tak nadzwyczajnie skomplikowane zadanie są w stanie doprowadzić do końca. Nie świadczy to oczywiście najlepiej o ich krytycznym myśleniu – raczej o jego braku połączonym z biegłością rachunkową.

Więcej, bo 21 uczniów na 1000 otrzymało kod 3.3. Uczniowie ci przybliżyli otrzymane wielkości przed wstawieniem ich do twierdzenia Pitagorasa, ale nie potrafili lub nie widzieli potrzeby oszacowania otrzymanej odpowiedzi i podali ją w postaci pierwiastka. Jest to naszym zdaniem postępowanie niewłaściwe w przypadku zadania umieszczonego w kontekście praktycznym, choć nie stanowi błędu w rozwiązaniu. Niestety, jak widać, większość spośród tych 3,2% uczniów, którzy zastosowali skutecznie tę gorszą strategię rozwiązania, tak właśnie postąpiła.

Bardzo niewielu uczniów, średnio 7 na 1000, otrzymało kod 3.2. Uczniowie ci przybliży-

Tabela 1
Odsetek rozwiązań zadania „Kutry" w podziale na kody

Kod	3.1	3.2	3.3	3.4	2.1	2.2	2.3	1.1	1.2	1.3	0	9
[%]	9,9	0,7	2,1	0,4	0,6	3,5	9,3	4,1	23	1,2	41,2	4

li otrzymane wielkości przed wstawieniem ich do twierdzenia Pitagorasa oraz oszacowali otrzymaną odpowiedź, podając ją w praktycznej postaci, na przykład „około 18,5 km". Naszym zdaniem, spośród tych 3,2% uczniów, tych 7 uczniów poradziło sobie najlepiej – zdawali sobie sprawę, że w takiej sytuacji należy zastosować przybliżenia i umieli to zrobić.

Kategoria 2

W kategorii 2. w kodach 2.1 i 2.2, znajdują się rozwiązania uczniów, którzy pokonali zasadniczą trudność zadania, czyli poprawnie zastosowali twierdzenie Pitagorasa do obliczenia odległości między kutrami, ale nie doprowadzili rozwiązania do końca. Takich uczniów było łącznie 4,1%.

Spośród nich 6 uczniom na 1000 do pełnego rozwiązania zabrakło jedynie przeliczenia obliczonej odległości między kutrami wyrażonej w milach na kilometry.

Większość z nich (35 osób na 1000), obliczyło odległość między kutrami w kilometrach, ale po godzinie od wypłynięcia, a nie po dwóch godzinach. Zabrakło im zatem tylko pomnożenia wyniku przez 2. Uczniowie ci albo zagapili się i zapomnieli o tej prostej czynności, albo, co bardziej prawdopodobne, nie w pełni rozumieją sytuację przedstawioną w zadaniu i w konsekwencji nie zdają sobie sprawy, że powinni takie mnożenie przez 2 wykonać.

W tej samej kategorii, w kodzie 2.3, znajdują się wyniki uczniów, którzy rozwiązali zadanie do końca, ale popełnili przy tym błędy rachunkowe lub błędy w zamianie jednostek. Takich uczniów było aż 9,3%. Oznacza to, że prawie co dziesiąty uczeń spośród wszystkich uczestniczących w badaniu wiedział, jak rozwiązać to zadanie, ale nie otrzymał poprawnego wyniku i w konsekwencji nie otrzymał pełnej liczby punktów, ponieważ zrobił błąd rachunkowy. Większość tych błędów wzięła się, jak wspominaliśmy wcześniej, ze wstawiania do twierdzenia Pitagorasa odległości w kilometrach bez przybliżeń. Pomyłka rachunkowa w takiej sytuacji nie jest rzeczą dziwną. Jest ona konsekwencją wyboru złej strategii rozwiązania.

Kategoria 1

W tej kategorii znalazło się łącznie 28,3% uczniów. Rozpoczęli oni rozwiązywanie zadania, wykonali pewne sensowne kroki, ale nie potrafili pokonać zasadniczej trudności tego zadania, czyli poprawnie zastosować twierdzenia Pitagorasa.

Uczniowie, których rozwiązania umieszczone zostały w kodach 1.1 i 1.3 wykonali tylko jeden mały krok na drodze do rozwiązania. W kodzie 1.1 było to pomnożenie danych wielkości przez 2. Takich uczniów było 4,1%. W kodzie 1.3 była to zamiana mil na metry lub kilometry. Takich uczniów było 1,2%.

Znaczna większość uczniów (23%), których rozwiązania znalazły się w kategorii 1. otrzymała kod 1.2. Uczniowie ci wykonali poprawnie dwa pomocnicze kroki rozwiązania – zamienili dane wielkości na metry lub kilometry i pomnożyli je przez 2, czyli obliczyli drogę w kilometrach przebytą w ciągu 2 godzin przez każdy z kutrów. Dalszych obliczeń nie było, były niepoprawne lub zostały rozpoczęte, ale niedoprowadzone do końca.

Duża część spośród uczniów, którzy otrzymali ten kod odejmowała od siebie obliczone odległości, co jest oczywiście niepoprawne. Inni uczniowie, którzy również otrzymali kod 1.2, wstawiali do twierdzenia Pitagorasa uzyskane odległości wyrażone w kilometrach bez stosowania przybliżeń. Niestety, podnoszenie do kwadratu bez użycia kalkulatora liczb pięciocyfrowych przekraczało ich możliwości i porzucali rozpoczęte obliczenia, nie doprowadzając ich do końca. Oznacza to, że uczniowie ci dostrzegali drogę rozwiązania zadania, ale nie potrafili jej wykorzystać, gdyż – mimo iż poprawna – była dla nich zbyt trudna rachunkowo.

Skutek obu tych sytuacji jest niestety taki sam – uczniowie ci nie potrafili policzyć odległości między kutrami. W efekcie oba te typy rozwiązań trafiały do kategorii 1., co oznacza, że ich autorzy otrzymywali za nie tylko 1 punkt na 3 możliwe. W tym drugim opisanym powyżej typie rozwiązań jest to dość dramatyczny efekt przyjęcia złej strategii postępowania.

Kategoria 0

Kategoria ta zawiera tylko dwa kody: 0 i 9. Kod 0 otrzymali uczniowie, którzy tylko zamieniali dane wielkości na metry lub kilometry i na tym kończyli rozwiązywanie zadania oraz uczniowie, których rozwiązanie było po prostu całkowicie błędne. W obu tych sytuacjach mamy do czynienia z rozwiązaniami niestanowiącymi postępu. Niestety, uczniów, którzy przedstawili takie rozwiązania było aż 41,2% spośród wszystkich rozwiązujących to zadanie.

Natomiast kod 9 otrzymywali uczniowie, którzy w ogóle nie podjęli próby rozwiązania zadania. Co ciekawe, było ich zaledwie 4%, co świadczy, że prawie wszyscy postrzegali to zadanie jako będące w zasięgu ich możliwości.

Przeprowadzona powyżej analiza uzyskanych wyników kodowania w pełni potwierdza, że dla osiągnięcia sukcesu w tym zadaniu zasadnicze znaczenie miał wybór odpowiedniej strategii rozwiązania. W sumie dobrą strategię obrało około 11,7% uczniów, co wbrew pozorom nie jest wynikiem złym, wymagało bowiem od ucznia samodzielnego oderwania się od rutynowych nawyków. Zdecydowana większość tych uczniów rozwiązała zadanie w pełni poprawnie. Natomiast wśród uczniów podążających rutynową drogą proporcje rozwiązań poprawnych do niepoprawnych były odwrotne. Przedyskutowanie z uczniami tego rodzaju przykładu może dać im impuls do nowego spojrzenia na strategię rozwiązywania także innych problemów.

Wnioski

Wszystkie trzy zadania otwarte zawarte w zestawie DKG sprawdzały opanowanie tzw. umiejętności złożonych. Należą do nich m.in. umiejętność użycia lub stworzenia strategii rozwiązania oraz umiejętność prowadzenia rozumowania i argumentacji. Szczegółowo omówione wyżej zadanie „Kutry". sprawdzało opanowanie umiejętności stworzenia odpowiedniej strategii rozwiązania. Znaczenie umiejętności złożonych w kształceniu jest szczególnie akcentowane przez nową podstawę programową. Stawia to przed twórcami zadań i schematów oceniania (kluczy kodowych) nowe wyzwanie – takiego ich przygotowania, aby wydobyć, uchwycić i odpowiednio ocenić te zaprezentowane w rozwiązaniu rozumowania czy użyte strategie.

Najczęściej stosowany sposób oceniania zadań egzaminacyjnych powoduje, że jedynym sygnałem otrzymywanym przez uczniów i nauczycieli jest informacja o poziomach rozwiązania poszczególnych zadań. Powoduje to, że wpływ wyników egzaminu na modyfikacje metod nauczania ogranicza się do zwiększania w procesie nauczania liczby takich zadań, które na egzaminie wypadły gorzej. Skutkiem jest zatem zjawisko uczenia pod egzamin. Zaproponowany przez nas model oceniania dwucyfrowego daje szansę na przekazanie do systemu edukacyjnego dużo bogatszej informacji. Pozwala rozpoznać najważniejsze rodzaje (a czasem przyczyny) błędów popełnianych przez uczniów, umożliwia odkrycie obszarów wiedzy uczniów, w których posługują się oni nieracjonalnymi schematami. Ten sposób kodowania umożliwia też zbadanie wybieranych przez uczniów strategii rozwiązań oraz jakości prowadzonych przez nich rozumowań. Daje to podstawy do korekty metod nauczania eliminujących te błędy.

Literatura

Centralna Komisja Egzaminacyjna (2011). Badanie diagnostyczne w roku szkolnym 2011/2012. Część matematyczno-przyrodnicza. Matematyka. Odpowiedzi i propozycje oceniania zadań. Pobrano z: http://www.cke.edu.pl/images/stories/000011_gim_pr/matem/GM-M1.zip

Dossey, J. A., Jones, C. O. i Martin, T. S. (2002). Analyzing student responses in mathematics using two-digit rubrics. W: D. F. Robitaille i A. E. Beaton (red.), *Secondary analysis of the TIMSS data*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Eurydice (2009). *National testing of pupils in Europe: objectives, organisation and use of results.* Bruxelles: The Education, Audiovisual and Culture Executive Agency (EACEA) – Eurydice.

Foy P. i Olson J. F. (red.). (2010). *TIMSS 2007 user guide for the international database*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Kołodziej, K. (2007). *Kategoryzacja rozwiązań zadań otwartych części matematyczno-przyrodniczej egzaminu gimnazjalnego.* Materiały z XIII Konferencji Diagnostyki Edukacyjnej. Łomża.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O. i Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 international mathematics report: findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades,* Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

OECD (2004). *Learning for tomorrow's world – first results from PISA 2003.* Paris: OECD.

OECD (2005). *PISA 2003. Technical report.* Paris: OECD.

OECD (2007). *PISA 2006 science competencies for tomorrow's world (volume I).* Paris: OECD.

OECD (2009). *PISA 2006. Technical report.* Paris: OECD.

OECD (2010a). *PISA 2009 results: what students know and can do. Student performance in reading, mathematics and science (volume I).* Paris: OECD.

OECD (2010b). *Learning mathematics for life. A perspective from PISA*. Paris: OECD.

OECD (2012). *PISA 2009. Technical report*. Paris: OECD.

Ruddock, G. J., O'Sullivan, Ch. Y., Arora, A. i Erberber, E. (2008). *Developing the TIMSS 2007 mathematics and science assessments and scoring guides. W:* J. F. Olson, M. O. Martin, i I. V. S. Mullis, (red.). *TIMSS 2007 technical report* (s. 30–32). Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Turmo A., Kjærnsli M. i Pettersson A. (2003). Mathematical literacy and competency classes. W: S. Lie, P. Linnakylä i A. Roe (red.), *Northern lights on PISA. Unity and diversity in the Nordic countries in PISA 2000*. Oslo: University of Oslo.