Edukacja 2013, 3(123), 60–75
ISSN 0239-6858

Gry planszowe jako narzędzie wspomagania rozwoju wczesnych kompetencji matematycznych

Krzysztof Cipora, Monika Szczygieł
Instytut Psychologii, Uniwersytet Jagielloński*

Poziom kompetencji matematycznych ma bardzo duże znaczenie dla osiągnięcia sukcesu edukacyjnego, wpływa również znacząco na jakość i poziom życia w wieku dorosłym. Niski poziom kompetencji matematycznych może być dla jednostki bardziej dotkliwy niż deficyty w zakresie czytania. Największe możliwości wspierania rozwoju kompetencji matematycznych pojawiają się na początku edukacji, gdyż z czasem deficyty te się pogłębiają. Liniowo zorganizowane gry planszowe z kolejno ponumerowanymi polami stanowią interesujące narzędzie wspomagania kompetencji matematycznych u dzieci. Pomagają wykształcić odpowiednią reprezentację liczebności, a efekty interwencji z ich wykorzystaniem wykraczają poza poprawę w zadaniach, które przypominają bezpośrednio trenowane umiejętności. W pracy przedstawiono przegląd wyników badań nad skutecznością takiej interwencji oraz propozycję zastosowania ich na polskim gruncie. Co więcej, interwencje z ich wykorzystaniem można przeprowadzić w krótkim czasie i przy niewielkim wkładzie finansowym.

Słowa kluczowe: psychologia, gry planszowe, interwencja, kompetencje matematyczne, podstawy matematyki, poznanie matematyczne, zmysł numeryczny.

Znaczenie kompetencji matematycznych

John Beddington i in. (2008) wskazują, że trudności w uczeniu się prowadzą do obniżenia dobrostanu psychicznego i samooceny, wzrostu frustracji i zmniejszenia motywacji do dalszej nauki. Autorzy podkreślają, że wczesna identyfikacja i podjęcie kroków mających na celu przeciwdziałanie trudnościom związanym m.in. z liczeniem lub czytaniem zwiększa szansę na uniknięcie ich negatywnych konsekwencji. Niski poziom kompetencji matematycznych jest dla jednostki bardziej odczuwalny w życiu codziennym, niż niski poziom umiejętności czytania (por. Butterworth, Varma i Laurilland, 2011). Uczniowie mający trudności z matematyką potrzebują większego wsparcia w szkole, natomiast brak takiego wsparcia może skutkować w życiu dorosłym niskimi zarobkami czy zwiększoną podatnością wejścia w konflikt z prawem. Mimo tego, jak wskazuje Brian Butterworth (2011), badaniom nad wczesnymi trudnościami w matematyce (łącznie z dyskalkulią rozwojową) poświęcane jest zdecydowanie mniej uwagi, niż badaniom nad wczesnymi trudnościami w czytaniu (łącznie z dysleksją rozwojową). Różnica w sumach środków przeznaczanych na badania w zakresie dysleksji i dyskalkulii odzwierciedla bardzo wyraźnie tę dysproporcję. Od 2000 do 2010 r. na badania w zakresie dysleksji amerykański *National Institute of Health* przeznaczył

* Adres do korespondencji: Krzysztof Cipora, Instytut Psychologii, Uniwersytet Jagielloński, al. Mickiewicza 3, 31-120 Kraków. E-mail: krzysztof.cipora@uj. edu.pl

prawie 46 razy więcej środków niż na badania dyskalkulii (odpowiednio 107,2 mln dol. i 2,34 mln dol.; za: Bishop, 2010).

Niski poziom kompetencji matematycznych nie jest problemem jednostkowym, lecz przekłada się na konkretne konsekwencje ponoszone przez gospodarkę. *Organizacja Współpracy Gospodarczej i Rozwoju* (OECD, 2010) opublikowała raport poświęcony długoterminowym konsekwencjom gospodarczym niskiego poziomu edukacji. Wynika z niego, że poprawa wyników w zakresie matematyki i nauk przyrodniczych o pół odchylenia standardowego w teście *Programme for International Student Assessment* (PISA) prowadziłaby do zwiększenia tempa wzrostu PKB na osobę o 0,87% rocznie we wszystkich krajach OECD. Co więcej, poprawa tych wyników jedynie przez najsłabszych uczniów tak, by osiągnęli minimalny poziom określany przez PISA, mogłaby prowadzić do zwiększenia tempa wzrostu PKB na osobę o 0,68% rocznie.

Wczesne deficyty w zakresie kompetencji matematycznych i ich konsekwencje

Poziom wiedzy i umiejętności w zakresie matematyki, jakie posiada dziecko w wieku przedszkolnym, pozwala przewidywać osiągnięcia matematyczne w późniejszym okresie. Związek ten jest niemal dwukrotnie silniejszy, niż ma to miejsce w przypadku umiejętności czytania (Duncan i in. 2007). Jak wskazują Geetha Ramani i Robert Siegler (2011), dysproporcje w zakresie wiedzy i umiejętności matematycznych dzieci na wczesnych etapach edukacji szkolnej z czasem pogłębiają się, zamiast niwelować (tzw. efekt Mateusza[1]). O ustawicznym pogłębianiu się deficytów w zakresie matematyki pisze również Edyta Gruszczyk-Kolczyńska (2013) i wskazuje jako przyczynę skierowanie energii uczniów na reakcje obronne, zamiast na aktywne uczenie się. Natomiast odpowiednio wcześnie przeprowadzone interwencje mogą pomóc wyrównać początkowe dysproporcje i zapobiegać ich pogłębianiu się (Ramani i Siegler, 2011).

Problemy ze zrozumieniem podstaw matematyki są powszechne również w Polsce. Jak podaje Gruszczyk-Kolczyńska (2013), na poziomie edukacji wczesnoszkolnej co czwarty uczeń doświadcza niepowodzeń w zakresie matematyki. W starszych klasach odsetek ten znacząco rośnie, i tylko co czwarty uczeń nie ma problemów z matematyką.

Jednym z czynników, który determinuje pojawianie się wczesnych dysproporcji w zakresie umiejętności matematycznych jest status społeczno-ekonomiczny (*socioeconomic status*, SES). Dzieci z rodzin o niskim SES mają większe problemy z opanowaniem podstaw matematyki, łącznie z nabyciem pojęcia liczby czy ukształtowaniem prawidłowej reprezentacji wielkości liczbowej (Siegler i Ramani, 2008). Za przyczyny tego zjawiska uznaje się m.in. fakt, że w takich rodzinach dzieci mają rzadszy kontakt z liczbami, np. podczas gotowania na podstawie przepisów kucharskich, zabaw z grami planszowymi, grami w karty itp. (Ramani i Siegler, 2011).

Dysproporcje w zakresie kompetencji matematycznych w zależności od czynników środowiskowych dostrzega się również w Polsce. Wyniki *Ogólnopolskiego badania umiejętności trzecioklasistów* (OBUT) wskazują na przewagę dzieci pochodzących ze średnich i dużych miast nad dziećmi z małych miast i wsi (Dąbrowski i Szymczak, 2007; Dąbrowski i Żytko, 2008; Dąbrowski i Wiatrak, 2012). Różnice te utrzymują się również w wynikach egzaminu gimnazjalnego (Chrostowska, 2008). Z drugiej strony, gdy w analizie uwzględnia się potencjał kulturowy domu (rozumiany jako poziom

[1] Nazwa tego zjawiska została zaczerpnięta z Ewangelii i odnosi się do słów, z przypowieści o talentach: „Każdemu bowiem, kto ma, będzie dodane, tak że nadmiar mieć będzie. Temu zaś, kto nie ma, zabiorą nawet to, co ma” (Mt 25, 29, tłum. za *Biblią Tysiąclecia*).

wykształcenia rodziców, obecność książek i materiałów wspomagających edukację w domu) oraz SES, znika różnica w zależności od wielkości miejscowości (Kondratek, 2012).

Rozwój szkolnych kompetencji matematycznych

Nabywane w szkole kompetencje matematyczne nie kształtują się wyłącznie na skutek oddziaływań dydaktycznych. Wielu badaczy jest zdania, że u ich podłoża leżą wrodzone zdolności umysłowe, wspólne dla człowieka i wielu gatunków zwierząt, które umożliwiają operowanie liczbami (por. Butterworth, 1999; Dehaene, 2011). Ten zestaw elementarnych i wrodzonych zdolności umożliwiających między innymi szacowanie, porównywanie i określanie liczebności (Dehaene, 2001) jest często określany mianem zmysłu numerycznego (*number sense*; Dehaene, 2011; Berch, 2005). Na nim nadbudowywane są bardziej złożone kompetencje matematyczne (zwłaszcza w zakresie arytmetyki i operowania liczbami; Dehaene, 2001). Badania zespołu Nancy Jordan (Jordan, Kaplan, Locuniak i Ramineni, 2007) wskazują, że sprawność zmysłu numerycznego, rozumianego jako: (a) zdolność liczenia; (b) wiedza o liczbach (np. zdolność porównywania liczb, umiejętność wskazania liczby kolejnej po podanej przez eksperymentatora); oraz (c) umiejętność prostego dodawania i odejmowania (na zbiorach, na podstawie danych z zadań tekstowych czy prostych zadań typu: „ile jest dwa i trzy"); oraz tempo jego rozwoju w wieku przedszkolnym wyjaśniają 66% wariancji w zakresie osiągnięć z matematyki na koniec I klasy. Ponadto sprawność wykonywania operacji arytmetycznych w wieku przedszkolnym stanowi dobry predyktor późniejszych osiągnięć w zakresie matematyki (Booth i Siegler, 2008).

Umysłowe reprezentacje stanowią punkty rozmieszczone na tzw. mentalnej osi liczbowej (*Mental Number Line*, MNL; Restle, 1970; Dehaene, 2011). Za taką organizacją reprezentacji przemawiają liczne wyniki badań psychologicznych, neurobiologicznych i międzykulturowych, które zostaną pokrótce omówione niżej. Czasy porównywania liczb wydłużają się wraz ze zmniejszeniem się różnicy między porównywanymi liczbami: szybciej porównamy liczby 1 i 9 (które są daleko od siebie na MNL) niż liczby 5 i 6 (które znajdują się blisko siebie na MNL). Zjawisko to nosi nazwę *dystansu numerycznego* (Moyer i Landauer, 1967). Naturalna reprezentacja liczb różni się od tego, jak są one rozumiane w sensie matematycznym. Punkty odpowiadające kolejnym liczbom (naturalnym) nie są rozmieszczone na MNL w równych odległościach, lecz są logarytmicznie skompresowane. Innymi słowy, „psychologiczny" dystans między liczbami 1 i 2 jest większy niż między 30 i 31. Dowody na logarytmiczną kompresję MNL są bardzo różnorodne. Po pierwsze, pomimo tego, że bezwzględna różnica między porównywanymi liczbami jest stała, to czasy porównywania liczb małych są krótsze niż liczb dużych (tzw. efekt rozmiaru; por. Fayol i Seron, 2005). O logarytmicznej kompresji reprezentacji na MNL świadczą również wyniki badań neurofizjologicznych Andreasa Niedera i Earla Millera (2003), którzy wykryli w korze makaków neurony reagujące na określone liczebności. Te, które reagują na małe liczebności, są dużo bardziej wybiórcze – reagują tylko na ściśle określoną liczbę elementów. Neurony reagujące na większe liczebności są bardziej tolerancyjne, tzn. częściej reagują na liczebności odbiegające od „docelowej". Również wyniki badania przeprowadzonego w amazońskim plemieniu Munduruku potwierdzają, że MNL jest logarytmicznie skompresowana (Dehaene, Izard, Spelke i Pica, 2008). W badaniu tym wykazano, że niezależnie od wieku osób, które posługują się językiem o niewielkim zasobie słów służących do określania liczebności, reprezentacja liczb jest logarytmiczna.

W toku edukacji matematycznej, umysłowa reprezentacja logarytmiczna zmienia się w liniową. W początkowych latach kształcenia reprezentacja liniowa i logarytmiczna mogą występować jednocześnie. Na przykład dziecko ma rozwiniętą reprezentację liniową dla liczb z zakresu 0–10, ale dla liczb z zakresu 0–100 pozostaje logarytmiczna (Siegler, 2009; Siegler i Opfer, 2003).

Najbardziej popularnym sposobem pomiaru liniowości reprezentacji jest zadanie szacowania na osi liczbowej[2] (*number line estimation*), utożsamiane przez niektórych badaczy z pomiarem samego zmysłu numerycznego (Siegler i Ramani, 2011). Zadaniem osoby badanej jest wskazanie na odcinku z opisanymi końcami określonej wartości. Przykładowo odcinek posiada oznaczone końce 0 i 20, a zadaniem osoby badanej jest zaznaczenie, gdzie znalazłaby się liczba 13. Na podstawie szeregu takich oszacowań można po pierwsze określić, czy rozmieszczenie liczb w oszacowaniach dokonywanych przez badanego jest liniowe (odległości między liczbami są takie same), czy logarytmiczne (odległości między małymi liczbami są większe niż miedzy dużymi). Drugim parametrem poprawności w tym zadaniu jest nachylenie indywidualnej linii regresji, gdzie predyktorem jest liczba, jaką osoba badana ma wskazać, a zmienną zależną liczba, jaką wskazuje. Idealnie nachylenie powinno wynosić 1. Jeżeli jest mniejsze od 1, to osoba badana ma tendencję do niedoszacowania we wszystkich próbach zadania (bez względu na wielkość zadanej liczby). Parametry liniowości dopasowania i nachylenia są niezależne od siebie. Trzecią, czasami używaną miarą, jest ogólna suma różnic między oszacowaniem a poprawną odpowiedzią. Dla każdej próby oblicza się odległość między wskazaniem osoby badanej a poprawną odpowiedzią. Następnie sumuje się wartości bezwzględne tych odległości. Obliczenie wartości bezwzględnej jest konieczne, aby niedoszacowania i przeszacowania z różnych prób nie niwelowały się.

Pomiar liniowości reprezentacji jest zasadny, ponieważ istnieje związek między poziomem ukształtowania reprezentacji liniowej danego dziecka a jego poziomem osiągnięć w zakresie matematyki. Zależność ta jest szczególnie wyraźna na etapie edukacji przedszkolnej oraz początkowych klas szkoły podstawowej (od pierwszej do czwartej; Siegler, 2009). Poziom liniowości reprezentacji koreluje nie tylko z wynikami zadań związanych z szacowaniem, ale również z poziomem osiągnięć w standaryzowanych testach osiągnięć matematycznych. Korelacje osiągają wartości 0,5–0,6 (Siegler, 2009). Można znaleźć również dowody na to, że zdolności szacowania na osi liczbowej są przyczynowo związane z poziomem bardziej złożonych umiejętności (Siegler i Booth, 2005).

Jak wskazują Siegler i Ramani (2008), dzieci pochodzące z rodzin o niskim SES osiągają gorsze wyniki w zadaniu szacowania na osi liczbowej. John Opfer i Robert Siegler (2007) wskazują, że możliwe jest ćwiczenie poprawności szacowania na osi liczbowej i może się to odbywać m.in. poprzez dostarczanie informacji zwrotnej o poprawności w samym zadaniu szacowania na osi liczbowej. Taka interwencja jest bardzo skuteczna nawet w sytuacji, gdy informację zwrotną dostarczono tylko raz. Najsilniejsze oddziaływanie treningu zaobserwowano, gdy informacja dotyczyła położenia liczby, której miejsce na osi różniło się najbardziej między reprezentacją liniową

[2] Określenie „oś liczbowa" nie do końca oddaje potoczne znaczenie angielskiego *number line* i jednoznacznie kojarzy się z prostą w rozumieniu matematycznym. *Number line* jako potocznie rozumiana linia z zaznaczonymi liczbami może stanowić również odcinek i jako taki jest stosowany w zadaniu szacowania lub grach (dziękujemy recenzentowi za wskazanie tej nieścisłości). Termin „wyścig na osi liczbowej" pojawia się również w polskiej literaturze (Gruszczyk-Kolczyńska, 1994).

a logarytmiczną. Opfer i Siegler (2007) są zdania, że interwencja powoduje przyspieszenie skokowej zmiany rozwojowej i zastąpienie reprezentacji logarytmicznej przez liniową. Co więcej, zmiana ta jest ogólna, tzn. obejmuje całą aktualnie ćwiczoną część osi liczbowej, a poprawa nie jest zależna od różnicy między szacowaną liczbą a miejscem, co do którego uprzednio dostarczono informacji zwrotnej.

Zdolność tę można ćwiczyć również, wykorzystując odpowiednio opracowane gry planszowe (zob. Siegler i Ramani, 2011). Zostaną one szczegółowo omówione w kolejnych częściach pracy, lecz wcześniej konieczne jest opisanie alternatywnego podejścia do wyjaśnienia rozwojowej zmiany reprezentacji logarytmicznej na liniową.

Alternatywne podejście do rozwojowej zmiany reprezentacji i znaczenia zmysłu numerycznego

Nie wszyscy badacze zgadzają się z poglądami Sieglera w kwestii stopniowego przechodzenia od reprezentacji logarytmicznej do liniowej (por. Barth, Slusser, Cohen i Paladino, 2011; Slusser, Santiago i Barth, 2013). Ich zdaniem najmłodsze dzieci nie rozumieją natury zadania szacowania na osi liczbowej. Początkowo nie uwzględniają wszystkich dostępnych w zadaniu punktów odniesienia, ale z czasem odnajdują i zaczynają wykorzystywać ich coraz więcej. Dla najmłodszych jedynym punktem na osi jest jej początek (może to wynikać stąd, że dziecko zna i rozumie tylko mniejszą liczbę, opisującą początek osi). Stopniowo zaczynają dodatkowo wykorzystywać jako punkt orientacyjny koniec osi, by następnie jako punkt odniesienia wykorzystywać również jej środek (który nie jest zaznaczony na osi). Na dalszych etapach zaczynają spostrzegane połówki dzielić jeszcze raz na połówki. Dodatkowo, krytycy podejścia Sieglera twierdzą, że dane uzyskiwane w szacowaniu na osi liczbowej lepiej wyjaśnia psychofizyczna cykliczna funkcja potęgowa (Hollands i Dyre, 2000), która opisuje szacowanie proporcji. Zespół Emily Slusser (2013) podkreśla, że zadanie szacowania na osi liczbowej w rzeczywistości stanowi szacowanie proporcji – osoba badana ma za zadanie określić położenie mniejszej liczby, mając określony punkt zerowy i położenie liczby od niej większej. W toku rozwoju, oprócz zwiększania się liczby punktów odniesienia, zwiększa się również dokładność każdego oszacowania, a co za tym idzie – wzrasta jego trafność. Zgodnie z tą krytyką nie powinno mówić się o rozwojowej zmianie z reprezentacji logarytmicznej na liniową.

Zwraca się również uwagę na złożoność zadania szacowania na osi liczbowej. Poza wspomnianym wyżej ocenianiem proporcji liczbowej, wymaga ono również jej zamiany na proporcję przestrzenną. W związku z tym, wnioskowanie na podstawie wyników z tego zadania wyłącznie o reprezentacji liczbowej zakłada zupełne pomijanie komponentu przestrzennego tego zadania (Slusser i in., 2013). Należy jednak pamiętać, że ten sposób ujmowania zadania szacowania na osi liczbowej jest zgodny z założeniem, że reprezentacje liczb i reprezentacje przestrzeni są ze sobą ściśle powiązane. Jednak w zadaniach sprawdzających zdolności przestrzenne (np. zaznaczanie na linii wcześniej zapamiętanej proporcji – bez komponentu liczbowego) również można zaobserwować tendencyjności. Przykładowo w zadaniu, w którym osoby badane mają określić zapamiętaną wcześniej lokalizację obiektu w podłużnym pudełku, rodzaj popełnianego błędu zależy od pozycji tego obiektu (lewa strona, środek lub prawa strona pudełka; Huttenlocher, Newcombe i Sandberg, 1994).

Istnieje także podejście, które zakłada, że u wszystkich dzieci reprezentacja ma postać liniową, tylko u młodszych dzieci ta linia jest przełamana – w pewnym momencie zmienia się jej nachylenie. To, w którym miejscu to następuje, zależy od granicznej liczby, do której dziecko jest w stanie doliczyć. Omawiany model zakłada, że zmiana rozwojowa nie polega na przejściu z reprezentacji logarytmicznej do liniowej, lecz na zintegrowaniu reprezentacji w jedną linię (por. Moeller i Nuerk, 2011).

Krytyka koncentruje się przede wszystkim na kwestiach teoretycznych i naturze reprezentacji, ale wydaje się, że nie podważa zasadności stosowania opisywanych w niniejszej pracy interwencji opartych na kwestionowanej teorii. W przypadku gier planszowych, które omówione zostaną w kolejnych paragrafach, pozytywne efekty obserwowano również w zadaniach niezwiązanych z szacowaniem na osi liczbowej. Co więcej, poziom liniowości reprezentacji (rozumianej jako poziom liniowego dopasowania oszacowań w zadaniu szacowania na osi liczbowej) wiąże się zarówno z aktualnym, jak i przyszłym poziomem osiągnięć matematycznych (Siegler, 2009).

Gry planszowe

Już kilkadziesiąt lat temu badacze podkreślali rolę manipulacji na konkretnych przedmiotach dla zrozumienia abstrakcyjnego pojęcia liczby czy istoty operacji na liczbach, takich jak dodawanie i odejmowanie. Operując np. na guziczkach, licząc je, dokładając bądź zabierając, dzieci z czasem rozwijają abstrakcyjne pojęcia matematyczne, oderwane od operacji na konkretnym przykładzie. Rolę kontaktu z przedmiotami w czasie nabywania abstrakcyjnych pojęć czy formalnych operacji podkreślał m.in. Jean Piaget (1977). Na rolę bezpośredniego doświadczenia w uczeniu się podstaw matematyki zwracają również uwagę Dorota Klus-Stańska i Alina Kalinowska (2004). Brak rozumienia redukuje naukę arytmetyki do zapamiętywania nic nieznaczących dla dziecka ciągów słów (np. „dwa plus dwa równa się cztery”; por. Ramani, Siegler i Hitti, 2012). Na bardzo niekorzystne konsekwencje bezmyślnego i pozbawionego zrozumienia stosowania algorytmów obliczeniowych przez polskich trzecioklasistów (np. stosowanie metody pisemnej do obliczenia 8 + 4 czy 1007 – 999) zwraca uwagę Mirosław Dąbrowski (2011), używając terminu „antyzaradność arytmetyczna”.

Istnieje wiele programów korekcyjnych, wspomagających rozwój wczesnych kompetencji matematycznych, np. *Number Worlds* (Griffin, 2004), *Building Blocks* (Sarama i Clements, 2004), *Big Math For Little Kids* (Greenes, Ginsburg i Balfanz, 2004) czy *Pre-K Mathematics* (Starkey, Klein i Wakeley, 2004). Mają one wspomagać rozwój kompetencji matematycznych u dzieci poprzez systematyczne wprowadzanie elementów matematyki do zajęć edukacyjnych. Charakterystyczną cechą wymienionych programów jest to, że wprowadzają kolejne zagadnienia w kolejności, w jakiej (według teorii leżącej u podstaw danego programu) określone pojęcia i umiejętności pojawiają się w sekwencji rozwojowej. Zapewniają odpowiednią liczbę powtórzeń poszczególnych ćwiczeń, pokazują użycie liczb w różnych kontekstach (np. liczba przedmiotów, miejsce w szeregu itp.), uczą analitycznego sposobu myślenia. W programach tych, duży nacisk jest kładziony na zrozumienie przez dzieci, że tę samą liczbę można wyrazić jako cyfrę arabską (np. 3), liczebnik (trzy) i że odnosi się ona do konkretnej liczebności (***).

Programy obejmują ćwiczenia w małych grupach lub indywidualne. Wykorzystuje się w nich specjalnie opracowany zestaw materiałów w formie rymowanek, gier (symulacyjnych, strategicznych itp.), zagadek czy ćwiczeń ułatwiających zrozumienie relacji między ilościami oraz podstaw operacji arytmetycznych. W ćwiczeniach wykorzystywane są również obiekty codziennego użytku i specjalnie przygotowane gry komputerowe.

Skuteczność tego rodzaju programów wykazywano wielokrotnie. Przykładowo Prentice Starkey i współpracownicy (2004) podają, że półroczna interwencja z wykorzystaniem programu *Pre-K Mathematics* doprowadziła do znaczącej poprawy ogólnych kompetencji matematycznych dzieci – wartości *d* Cohena dla grupy pochodzącej ze środowisk o niskim i średnim SES wynosiły odpowiednio 2,17 i 1,52 (zatem uzyskano duże efekty w obu grupach). Pomimo niekwestionowanej skuteczności, programy te są trudne do wprowadzenia pod względem organizacyjnym, czasochłonne i bardzo kosztowne. Wymagają m.in. starannego i długotrwałego szkolenia nauczycieli. W przypadku *Building Blocks* obejmuje ono 34 godziny szkolenia teoretycznego i 16 godzin praktyk, w trakcie których nauczyciel jest obserwowany podczas prowadzenia zajęć. Początkowo nauczyciele stosujący program *Number Worlds* konsultowali się z badaczami dwa razy w tygodniu w ciągu całego roku. W przypadku *Pre-K Mathematics* szkolenie nauczycieli obejmuje ośmiodniowe warsztaty i konsultacje przynajmniej raz w miesiącu (Siegler i Ramani, 2011). Dodatkowo, elementy szkolenia muszą przechodzić również rodzice, gdyż część ćwiczeń niekiedy jest wykonywana w domu.

Równie efektywną, ale znacznie tańszą i łatwiejszą w zastosowaniu alternatywą dla takich interwencji, jak wskazują Siegler i Ramani (2011), są odpowiednio opracowane gry planszowe. W kolejnych częściach omówione zostaną zasady konstruowania gier planszowych, które mogą zostać wykorzystane jako narzędzia wczesnego wspomagania rozwoju kompetencji matematycznych.

Zdaniem Sieglera (2009) interwencja z wykorzystaniem gier planszowych może pomóc w ukształtowaniu liniowej reprezentacji liczb, która zastąpi reprezentację logarytmiczną. Gra tego rodzaju powinna być skonstruowana według czterech zasad:

- pola są oznaczone kolejnymi liczbami;
- wszystkie pola mają taką samą wielkość;
- pola są uporządkowane liniowo;
- numery pól wzrastają od lewej do prawej strony[3].

Dzięki temu budowa planszy odzwierciedla liniowe uporządkowanie liczb (następowanie liczb po sobie, takie same odległości między polami, które się oddzielone taką samą liczbą pól – dystans między polami 1 i 3 jest taki sam, jak między polami 8 i 10), a tym samym pozwala dziecku lepiej je zrozumieć i utrwalić. Reprezentacja liniowa jest tworzona i wzmacniana poprzez różne wskazówki, z jakimi dziecko ma w czasie gry kontakt. Wskazówki te pojawiają się w różnych modalnościach zmysłowych (Siegler, 2009). Im większa liczba w polu, na którym aktualnie znajduje się pionek, tym dziecko: (a) musi wykonać więcej ruchów, by do niego dotrzeć (wskazówka kinestetyczna); (b) słyszy więcej nazw liczb (wskazówka dźwiękowa); (c) dostrzega większy dystans, o jaki został przesunięty pionek (wskazówka wzrokowo-przestrzenna); (d) poświęca więcej czasu na rozgrywkę (wskazówka czasowa). Warto zwrócić uwagę, że za pomocą każdej wskazówki przekazywana jest również informacja o tym, że odległości między wszystkimi liczbami są takie same, w związku z tym jeszcze wyraźniej kształtowana jest reprezentacja liniowa.

W większości dotychczasowych badań interwencja z wykorzystaniem gry planszowej była przeprowadzana w formie gry 1:1 z osobą dorosłą. Gra przebiega bardzo podobnie do innych gier planszowych. Uczestnicy ustawiają pionki w punkcie startu. Następnie każdy z graczy losuje liczbę (np. rzucając kostką, losując kartę)

[3] Tak zorganizowana plansza przypomina chodniczek liczbowy opisywany przez Edytę Gruszczyk-Kolczyńską (1994).

i przemieszcza się po planszy o wylosowaną liczbę pól. Uczestnicy powinni podczas przemieszczania pionka po planszy liczyć na głos, nazywając kolejne pola (np. „osiem", „dziewięć"). Przez cały czas osoba dorosła poprawia ewentualne błędy dziecka. Podpowiedzi na początku obejmują tylko ogólne sugestie zachęcające dziecko do powtórzenia i poprawy (niekiedy jedynie zapowiadają kolejną czynność), a gdy nie radzi sobie, wskazówki stają się coraz bardziej dyrektywne. Gdy ogólne podpowiedzi nie przynoszą skutku, osoba dorosła nazywa na głos kolejne liczby i zachęca dziecko do głośnego ich powtórzenia podczas przesuwania pionka (por. Ramani, Siegler i Hitti, 2012). Dzięki temu może ono natychmiast korygować błędy, co zapobiega ich utrwalaniu. Jedna rozgrywka, czyli przejście całej planszy od startu do mety, trwa od 2 do 4 minut.

Pozytywne efekty interwencji uzyskano w przypadku zastosowania gier o większej liczbie pól ułożonych w kolejnych rzędach np. po 10 pól (por. Siegler i Ramani, 2011). Jak pokazuje eksploracyjne badanie Ramani i in. (2012) skuteczna jest również gra w małych grupach (2–3-osobowych), które są nadzorowane przez osobę dorosłą. Grupowa rozgrywka zwiększa zaangażowanie dzieci, daje możliwość wzajemnego korygowania błędów oraz rozwija kompetencje społeczne, podczas gdy skuteczność interwencji nie jest ograniczona. Dobre efekty udało się uzyskać nawet w sytuacji, gdy osoby nadzorujące rozgrywkę przeszły zaledwie godzinne przeszkolenie.

Skuteczność wczesnych interwencji z wykorzystaniem gier planszowych

Zespół Sieglera przeprowadził wiele badań nad skutecznością interwencji z wykorzystaniem gier planszowych. Na gruncie europejskim podobne wyniki uzyskały Jemma Whyte i Rebecca Bull (2008). Szczegółowe informacje na temat każdego z nich (wielkość próby, wiek, charakterystyka próby, czas trwania interwencji i zadania wykorzystane do pomiaru jej efektów) przedstawiono w Tabeli 1. Warto zaznaczyć, że w żadnym badaniu czas interwencji nie przekraczał 2 godzin.

Tam, gdzie było to możliwe, jako standardową miarę efektów wykorzystano *d* Cohena. Statystyka ta pozwala ocenić wielkość efektu (w tym przypadku skuteczność interwencji), można ją również wykorzystać do porównań między eksperymentami (Cohen, 1990). Wartość *d* można interpretować jako różnicę między pomiarami wyrażoną w jednostkach odchylenia standardowego dla danych z obu pomiarów łącznie (*d* Cohena jest obliczane wg wzoru $d = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s}$; gdzie X_1 i X_2 to średnie z poszczególnych pomiarów, a *s* to odchylenie standardowe danych z obu pomiarów łącznie). Jacob Cohen (1988) podaje następujące zakresy interpretacji wartości *d*: 0,2–0,3 – efekt mały; około 0,5 – efekt średni; od około 0,8 – efekt duży. Jako efekty o praktycznym znaczeniu, np. przy porównywaniu dwóch metod interwencji, programów szkolnych itp., uznaje efekty większe niż 0,25. Wartości *d* podane w tabelach odnoszą się do testu post hoc, w którym porównywano poziom wykonania danego zadania w grupie eksperymentalnej przed i po interwencji. Należy zaznaczyć, że w każdym przypadku autorzy podają, że podobnego efektu nie uzyskano w grupie kontrolnej oraz że uzyskano istotne wyniki przy porównaniu wyników posttestu w grupach eksperymentalnej i kontrolnej (chyba że w danym polu tabeli zaznaczono inaczej).

We wszystkich badaniach zadaniem, za pomocą którego badano charakter reprezentacji liczb – a co za tym idzie również skuteczność interwencji – było szacowanie na osi liczbowej. Jest to uzasadnione, ponieważ właśnie takie zadanie pozwala bezpośrednio mierzyć stopień wykształcenia się reprezentacji liniowej. Szczegółowe wyniki uzyskane w ramach tego zadania przedstawiono w Tabeli 2.

Tabela 1
Charakterystyki prób i zadania, jakie wykorzystano do pomiaru kompetencji matematycznych w poszczególnych badaniach nad skutecznością interwencji z wykorzystaniem gier planszowych

Badanie	Osoby badane/grupy			Interwencja		Zadania mierzące efekty interwencji**				
	N/grupa	Wiek średnia i zakres (jeśli podany)	Pochodzenie dzieci	Jaka	Czas	1	2	3	4	5
Ramani i Siegler (2008), eksp. 1	ok. 60	4;9 (4;1–5;5)	rodziny o niskim SES	liniowa gra planszowa z liczbami*; gra planszowa, kolorowe pola bez liczb	4 sesje po ok. 15–20 min.	+	+	+	–	+
Siegler i Ramani (2008), eksp. 2	18	4,7	rodziny o niskim SES	liniowa gra planszowa z liczbami*; gra planszowa, kolorowe pola bez liczb	4 sesje po ok. 15 min.	+	–	–	–	–
Whyte i Bull (2008)	ok. 15	3,8	z rodzin robotniczych i klasy średniej	liniowa gra planszowa z liczbami*; gra planszowa, kolorowe pola bez liczb; szacowanie liczebności zbiorów	4 sesje po 25 min.	+	+	+	–	+
Siegler i Ramani (2009)	ok. 30	4;8 (4;0–5;5)	rodziny o niskim SES	liniowa gra planszowa z liczbami*; gra planszowa ułożona kołowo	4 sesje po ok. 15–20 min.	+	+	+	+	+
Ramani i Siegler (2011), eksp. 1	ok. 30	4;0 (3;5–4;8)	rodziny o wysokim SES	liniowa gra planszowa z liczbami*; gra planszowa ułożona kołowo; inne aktywności związane z liczbami	3 sesje po 15–20 min.	+	+	+	+	+
Ramani i Siegler (2011), eksp. 2	ok. 20	grupa o niskim SES 4;7 (4;0–5;5) grupa o wysokim SES 4;0 (3;5–4;8)	rodziny o niskim SES oraz dopasowana pod względem kompetencji matematycznych grupa z rodzin o wysokim SES	liniowa gra planszowa z liczbami*; gra planszowa ułożona kołowo; inne aktywności związane z liczbami	3 sesje po 15–20 min.	+	+	+	+	+
Ramani, Siegler i Hitti (2012), eksp. 1	ok. 30	4;7 (3;6–5;7)	rodziny o niskim SES	liniowa gra planszowa z liczbami*; gra planszowa, kolorowe pola bez liczb; gra w 2–3-osobowych grupkach pod nadzorem eksperymentatora	4 sesje po 20–25 min.	+	+	+	–	+
Ramani, Siegler i Hitti (2012), eksp. 2	ok. 50	5;5 (3;3–5;8)	rodziny o niskim SES	liniowa gra planszowa z liczbami*; gra planszowa, kolorowe pola bez liczb; gra w 2–3-osobowych grupkach pod nadzorem przeszkolonego pracownika centrum opieki dziennej	4 sesje po 20–25 min.	+	+	+	–	+

* Grupa eksperymentalna.
** Oznaczenia zadań: 1 – szacowanie na osi liczbowej; 2 – porównywanie liczb; 3 – identyfikacja/rozumienie liczb; 4 – operacje arytmetyczne; 5 – liczenie do 10.
Znak „+” oznacza, że w danym badaniu wykorzystano określone zadanie.

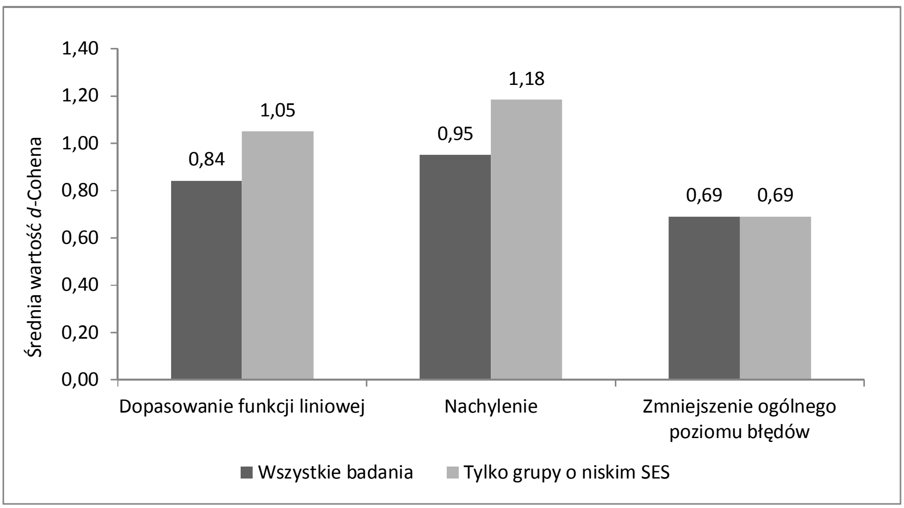
We wszystkich badaniach uzyskano istotną poprawę. W zakresie zwiększenia liniowości reprezentacji efekty, zgodnie z interpretacją Cohena, były średniej wielkości i duże. Efekty małe (choć wciąż znaczące) uzyskano jedynie w eksperymentach, w których brały udział dzieci z rodzin o średnim i wysokim SES. Jak wskazują Ramani i Siegler (2008), dzieci z takich środowisk mają większy kontakt z różnego rodzaju grami planszowymi, stąd można wnioskować, że już wcześniej miały możliwość przejść podobny, choć mniej ustrukturyzowany trening, a sama interwencja nie była im tak pomocna. Uśrednione wartości *d* Cohena przedstawiono na Rysunku 1.

Jako oddzielne słupki przedstawiono średnie, przy obliczeniu których uwzględniono grupy badawcze pochodzące ze środowisk o niskim SES. Wielkości efektu dla każdej miary wykonania tego zadania można zakwalifikować zgodnie z wytycznymi Cohena jako efekty duże (średnie/duże w przypadku zmniejszenia ogólnego poziomu błędów).

Poza szacowaniem na osi liczbowej wykorzystano również zadania: (1) porównywania liczb; (2) identyfikacji liczb; (3) operacji arytmetycznych oraz; (4) liczenia. Wyniki z tych zadań zestawiono w Tabeli 3.

W zadaniu porównywania liczb uzyskano istotne efekty poprawy tylko w grupach ze środowisk o niskim SES. W grupach tych, po uśrednieniu danych ze wszystkich eksperymentów, wartość *d* Cohena wyniosła 0,52, co można interpretować jako wynik średni. Wydaje się on znaczący o tyle, że nie wiąże się bezpośrednio z zadaniem, jakie dzieci wykonywały podczas gry.

W przypadku identyfikacji liczb, we wszystkich eksperymentach uzyskano istotne efekty poprawy na skutek treningu. Średnia wartość *d* Cohena wyniosła 0,40. Ponownie najsłabsze efekty uzyskano w grupach pochodzących ze środowisk o wysokim SES (średnio 0,27). Średnia wartość w grupach pochodzących z rodzin o niskim SES wyniosła 0,46. Można zatem stwierdzić, że w przypadku identyfikacji liczb zaobserwowano średni efekt interwencji w grupach o niskim SES oraz mały (choć znaczący) efekt w grupach o średnim i wysokim SES.



Rysunek 1. Średnie wielkości efektu dla poprawy w uwzględnieniem poszczególnych miar wykonania zadania szacowania na osi liczbowej.

Tabela 2
Poprawa uzyskana w zadaniu szacowania na osi liczbowej na skutek interwencji z wykorzystaniem gier planszowych

Badanie	Poprawa – wartość *d* Cohena dla porównania pretest – posttest w grupie eksperymentalnej			Uwagi
	Dopasowanie F liniowej	Nachylenie	Zmniejszenie ogólnego błędu	
Ramani i Siegler (2008), eksp. 1, posttest	1	0,99	0,76	Dla dopasowania liniowego w postteście różnice między grupami: d = 1,08.
Ramani i Siegler (2008), eksp. 1, posttest odroczony	0,56	0,69	0,47	Dla dopasowania liniowego różnica między grupami w postteście odroczonym: d = 0,55.
Siegler i Ramani (2008), eksp. 2	1,8	1,66	0,71	Dla dopasowania liniowego w postteście różnica między grupami: d = 1,62; dla slope różnica istotna statystycznie (wartości d nie podano).
Whyte i Bull (2008)	b.d.	b.d.	brak wartości d, $t(15) = 4{,}37$; $p = 0{,}001$*	Brak różnic między pretestem a posttestem w grupach kontrolnych.
Siegler i Ramani (2009)	1,03	1,26	1,01	Dla dopasowania liniowego różnice między grupami kontrolnymi a eksperymentalną: d = 0,65 i 0,76, dla nachylenia: d = 0,71 i 0,88, dla błędów: d = 0,67 i 0,63.
Ramani i Siegler (2011), eksp. 1	0,28	0,29	b.d.	W przypadku liniowości poprawa istotna tylko w grupie, która w preteście radziła sobie gorzej. Dla nachylenia poprawa istotna u wszystkich.
Ramani i Siegler (2011), eksp. 2, grupa z rodzin o niskich dochodach	0,86	1,32	b.d.	Brak różnic pretest – posttest w grupach kontrolnych.
Ramani i Siegler (2011), eksp. 2, grupa z rodzin o średnich i wysokich dochodach	0,36	0,44	b.d.	Brak różnic pretest – posttest w grupach kontrolnych.
Ramani, Siegler i Hitti (2012), eksp. 1	b.d.	b.d.	0,69	Brak różnicy pretest – posttest w grupie kontrolnej.
Ramani, Siegler i Hitti (2012), eksp. 2	b.d.	b.d.	0,48	Brak różnicy pretest – posttest w grupie kontrolnej.

* d obliczone na podstawie wartości statystyki t i liczby stopni swobody wg wzoru Hedgesa i Olkina (1985) wynosi 2,26. W ten sposób oszacowane d nie jest zgodne z d podawanymi w pracach Sieglera, nie jest zatem włączone do Rysunku 1. Wielkości d podawane w pracach zespołu Sieglera są niższe niż obliczane z wartości t.

Tabela 3

Poprawa uzyskana w pozostałych zadaniach na skutek interwencji z wykorzystaniem gier planszowych

Badanie	Porównywanie liczb	Identyfikacja liczb	Operacje arytmetyczne*	Liczenie do 10
Ramani i Siegler (2008), eksp. 1, porównanie pretest – posttest	*d* = 0,79	*d* = 0,44	Brak tego zadania	Największa poprawa w grupie z grą liczbową, *d* = 0,65; poprawa zarówno w średniej liczbie, do której dzieci były w stanie policzyć, jak i w zakresie proporcji dzieci, które osiągały maksimum.
Ramani i Siegler (2008), eksp.1, porównanie pretest – odroczony posttest	*d* = 0,57	*d* = 0,63	Brak tego zadania	Największa poprawa w grupie z grą liczbową, *d* = 0,69; poprawa zarówno w średniej liczbie, do której dzieci były w stanie policzyć, jak i w zakresie proporcji dzieci, które osiągały maksimum.
Whyte i Bull (2008)	Efekty w obu grupach gry z liczbami i innych aktywności liczbowych. Większa poprawa w grupie eksperymentalnej.	Efekty w obu grupach gry z liczbami i innych aktywności liczbowych. Większa poprawa w grupie eksperymentalnej.	Brak tego zadania	Poprawa w grupie z grą zorganizowaną liniowo; brak różnic z grupą kontrolną, w której pojawiały się liczby.
Siegler i Ramani (2009)	*d* = 0,51	*d* = 0,47/*d* = 0,23 w warunku z planszą zorganizowaną kołowo	Dla liczby poprawnie rozwiązanych problemów *d* = 0,78.	Efekt sufitowy już w preteście.
Ramani i Siegler (2011), eksp. 1	Brak efektów treningu	*d* = 0,24/*d* = 0,24 w warunku z planszą zorganizowaną kołowo	*d* = 0,59/*d* = 0,91 w warunku z planszą zorganizowaną kołowo. Efekt tylko u dzieci, które w preteście były poniżej mediany.	Efekt sufitowy już w preteście.
Ramani i Siegler (2011), eksp. 2, grupa z rodzin o niskich dochodach	*d* = 0,53	*d* = 0,51/*d* = 0,18 w warunku z planszą zorganizowaną kołowo	*d* = 0,83	Efekt sufitowy już w preteście.
Ramani i Siegler (2011), eksp. 2 grupa z rodzin o średnich i wysokich dochodach	Brak efektów treningu	*d* = 0,29/*d* = 0,19 w warunku z planszą zorganizowaną kołowo	*d* = 1,12	Efekt sufitowy już w preteście.
Ramani, Siegler i Hitti (2012), eksp 1	*d* = 0,46	*d* = 0,34	Brak tego zadania	Wzrost proporcji dzieci, które wykonały zadanie bezbłędnie w grupie eksperymentalnej.
Ramani, Siegler i Hitti (2012), eksp 2	*d* = 0,28	*d* = 0,35	Brak tego zadania	Wzrost proporcji dzieci, które wykonały zadanie bezbłędnie w obu grupach.

* Miarą jest zmniejszenie średniego absolutnego dystansu od podawanej odpowiedzi do odpowiedzi prawdziwej.
Wartości *d* podawane dla porównania pretest – posttest w grupie z planszą z liczbami ułożoną liniowo (chyba, że podano inaczej).

We wszystkich badaniach, w których wykorzystano zadanie sprawdzające umiejętność rozwiązywania problemów arytmetycznych, uzyskano istotne efekty poprawy. Wartości *d* Cohena mieściły się w zakresie efektów średnich i dużych. W tym zadaniu nie zaobserwowano różnic w wielkości efektu między grupami pochodzącymi z rodzin o wysokim i niskim SES. Warto zaznaczyć, że w jednym z badań istotny efekt poprawy zaobserwowano tylko w grupie, która w preteście osiągnęła wyniki poniżej mediany.

Zadanie, w którym sprawdzano, do jakiej liczby dzieci są w stanie bezbłędnie doliczyć, w kilku przypadkach nie było diagnostyczne, gdyż już w preteście większość dzieci osiągnęła w nim maksymalny wynik. W pozostałych badaniach wykazano istotny efekt poprawy.

Niestety, jak dotąd zdecydowana większość opublikowanych badań nad wykorzystaniem gier planszowych była prowadzona jedynie przez zespół Sieglera. Wyjątek stanowi praca Whyte i Bull (2008). Warto jednak zaznaczyć, że efekt poprawy uzyskany w tym badaniu jest silniejszy niż w badaniach Sieglera i współpracowników. Z racji tego, że niniejsza praca poświęcona jest wykorzystaniu gier planszowych, dokładny przegląd badań i analiza wielkości efektu poprawy ogranicza się do takich właśnie interwencji. W literaturze przedmiotu dostępne są metaanalizy badań nad skutecznością różnego rodzaju interwencji służących wspomaganiu wczesnych kompetencji matematycznych. Najnowsze badania (z lat 2000–2012) podsumowano w pracy Ursuli Fischer, Korbiniana Moellera, Ulrike Cress i Hansa-Christopha Nuerka (2013). Evelyn Kroesbergen i Johannes Van Luit (2003) oraz Yan Ping Xin i Asha Jitendra (1999) podsumowali badania prowadzone przed rokiem 2000. Szczegółową analizę efektów interwencji z wykorzystaniem komputerów (CAI – *Computer-Assisted Intervention*) przedstawił zespół Pekki Räsänena (Räsänen, Salminen, Wilson, Aunio i Dehaene, 2009).

Podsumowanie

Opanowanie podstaw arytmetyki przez dzieci w wieku przedszkolnym ma podstawowe znaczenie dla dalszego rozwoju ich kompetencji w tym zakresie. Nie wszystkim dzieciom zrozumienie pojęcia liczby i wykształcenie odpowiedniej reprezentacji liczebności przychodzi z łatwością. Początkowe deficyty z czasem się pogłębiają, niosąc ze sobą wiele dotkliwych konsekwencji. Wczesne interwencje pozwalają zapobiegać niekorzystnym skutkom niskich umiejętności matematycznych, nie tylko na gruncie edukacji, ale także w szerszym kontekście społecznym i gospodarczym. Największe korzyści z gier planszowych uzyskały dzieci, które w początkowych testach wypadały najsłabiej (odwrócony efekt Mateusza) stwarza to szansę rzeczywistego wyrównania wczesnych dysproporcji edukacyjnych.

Ze względu na stosunkową łatwość stosowania, gra planszowa może być polecana przez nauczycieli rodzicom tych dzieci, które mają problemy ze zrozumieniem pojęcia liczby. Optymistyczne w tym kontekście jest odkrycie, że korzystne efekty uzyskano w interwencjach prowadzonych przez osoby, które przeszły bardzo krótkie szkolenie. Gra planszowa może stanowić uzupełnienie zajęć, choć w takiej sytuacji wymagana jest duża uwaga ze strony nauczyciela, by dzieci wykonywały zadanie. Nauczyciel powinien na bieżąco udzielać prostych wskazówek, a w razie konieczności modelować poprawne rozwiązanie i zachęcać dziecko do jego powtórzenia. Możliwe jest również wykorzystanie gry podczas różnego rodzaju zajęć świetlicowych i korekcyjnych. Fabuła gry dodatkowo podnosi motywację dziecka, przez co ułatwia nabywanie doświadczenia z liczbami.

Warto zaznaczyć, że zaangażowanie w grę planszową może stanowić dla nauczyciela dobre narzędzie dla poznania dziecka. Dla rodzica jest to z kolei ciekawa forma wspólnego spędzenia z nim czasu. Poza bezpośrednim wspieraniem rozwoju kompetencji matematycznych, gry planszowe wpływają pozytywnie na rozwój kompetencji społecznych, przyswajanie norm, czy wyrażanie emocji (element rywalizacji). Stanowią także trening koncentracji uwagi (Rosenfeld, 2005).

Pomimo tego, że dotychczasowe badania prowadzono w Ameryce i w Europie, zasadne jest przeprowadzenie szczegółowych badań nad skutecznością gier planszowych na polskim gruncie. Polskim narzędziem, które można wykorzystać zarówno w pracy z dziećmi, jak i do prowadzenia kolejnych badań, jest opracowana przez autorów niniejszej pracy gra *Kurczak i Królik na prostej*[4].

Należy również pamiętać, że zastosowanie gier planszowych nie zastąpi stopniowego wprowadzania elementów podstaw matematyki do programów nauczania przedszkolnego. Duże znaczenie ma opracowanie programów, które elementy matematyki wprowadzają w sposób systematyczny, umieszczając je w różnych kontekstach, możliwie bliskich codziennemu doświadczeniu. Programy te, w miarę dostępnej wiedzy powinny wprowadzać kolejne zagadnienia i problemy zgodnie z tym, jak u dziecka przebiega rozwój kompetencji matematycznych (por. Starkey i in., 2004) i ogólnych zdolności poznawczych.

[4] Wraz z pełnym zestawem materiałów i szczegółową instrukcją jest ona dostępna bezpłatnie do pobrania na stronie internetowej: https://sites.google.com/site/krzysztofcipora/gry_planszowe. Korzystanie ze wszystkich materiałów dostępnych na tej stronie jest całkowicie bezpłatne w każdej możliwej formie. Narzędzie to jest wzorowane na grze stosowanej przez zespół Sieglera. Możliwe jest również wykorzystanie innych pomocy, na przykład centymetra krawieckiego itp. (por. Gruszczyk-Kolczyńska, Dobosz i Zielińska, 1996).

Literatura

Barth, H., Slusser, E., Cohen, D. i Paladino, A. (2011). A sense of proportion: commentary on Opfer, Siegler and Young. *Developmental Science, 14*, 1205–1206.

Beddington, J., Cooper, C. L., Field, J., Goswami, U., Huppert, F. A., Jenkins, R., Jones, H. S., Kirkwood, T. B. L., Sahakian, B. J. i Thomas, S. M. (2008). The mental wealth of nations. *Nature 455*, 1057–1060.

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: implications for children with mathematical disabilities. *Journal of learning disabilities*, *38*(4), 333–339.

Bishop D. V. M. (2010). Which neurodevelopmental disorders get researched and why? *PLoS ONE 5*(11), e15112.

Booth, J. L. i Siegler, R. S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child Development, 79*(4), 1016–1031.

Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain*. Londyn: Macmillan.

Butterworth, B. (2011). Foundational numerical capacities and the origins of dyscalculia. W: S. Dehaene i E. Brannon (red.), *Space, Time and number in the brain: searching for the foundations of mathematical thought* (s. 249–265). London: Elsevier.

Butterworth, B., Varma, S. i Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: from brain to education. *Science 332*(6033), 1049–1053.

Chrostowska, T. (2008). Osiągnięcia matematyczne uczniów kończących gimnazjum w 2007 roku. *Egzamin, Biuletyn Badawczy CKE*, *15*, 108–112.

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (wyd. 2). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cohen, J. (1990). Things I have learned (so far). *American Psychologist*, *45*(12), 1304–1312.

Dąbrowski, M. (2011). Edukacja matematyczna na I etapie kształcenia. *Kwartalnik Pedagogiczny, 219*, 223–257.

Dąbrowski, M. i Szymczak, M. (2007). Środowisko rodzinne dziecka a poziom umiejętności. W: M. Dąbrowski i M. Żytko (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Część I Raport z badania ilościowego* (s. 135–160). Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Dąbrowski, M. i Wiatrak, E. (2012). Umiejętności matematyczne trzecioklasistów. W: A. Pregler i E. Wiatrak (red.), *Raport z badania OBUT* (s. 8–64). Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Dąbrowski, M. i Żytko, M. (2008). Konteksty osiągnięć szkolnych uczniów – wybrane wyniki. W: M. Dąbrowski i M. Żytko (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Część II Konteksty szkolnych osiągnięć uczniów* (s. 50–62). Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Dehaene, S. (2001). Précis of the number sense. *Mind & Language, 16*, 16–36.

Dehaene, S. (2011). *The number sense. How the mind creates mathematics?* New York, NY: Oxford University Press.

Dehaene, S., Izard, V., Spelke, E. i Pica, P. (2008). Log or linear? Distinct intuitions of the number scale in Western and Amazonian indigene cultures. *Science*, *320*(5880),1217 – 1220.

Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P. i in. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*, *43*(6), 1428–1446.

Fayol, M. i Seron, X. (2005). About numerical representations. Insights from neuropsychological, experimental, and developmental studies. W: J. B. Campbell (red.), *Handbook of mathematical cognition* (s. 3–22). New York, NY: Psychology Press.

Fischer, U., Moeller, K., Cress, U. i Nuerk, H-Ch. (2013). Interventions supporting children's mathematics school success. A meta-analytic review. *European Psychologist*, *18*(2), 89–113.

Greenes, C., Ginsburg, H. P. i Balfanz, R. (2004). Big math for little kids. *Early Childhood Research Quarterly, 19*, 159–166.

Griffin, S. (2004). Building number sense with Number Worlds: a mathematics program for young children. *Early Childhood Research Quarterly, 19*, 173–180.

Gruszczyk-Kolczyńska, E. (1994). *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki. Przyczyny, diagnoza, zajęcia korekcyjno-wyrównawcze.* Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Gruszczyk-Kolczyńska, E. (2013). Grzechy matematycznej edukacji. *Matematyka, 3,* 33–39.

Gruszczyk-Kolczyńska, E., Dobosz, K. i Zielińska, E. (1996). *Jak nauczyć dzieci sztuki konstruowania gier?* Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Hedges, L. V. i Olkin, I. (1985). *Statistical methods for meta-analysis.* New York, NY: Academic Press.

Hollands, J. G. i Dyre, B. P. (2000). Bias in proportion judgments: the cyclical power model. *Psychological Review*, *107*(3), 500–524.

Huttenlocher, J., Newcombe, N. i Sandberg, E. H. (1994). The coding of spatial location in young children. *Cognitive Psychology*, *27*(2), 115–147.

Jordan, N. C., Kaplan, D., Locuniak, M. N. i Ramineni, C. (2007). Predicting first-grade math achievement from developmental number sense trajectories. *Learning Disabilities Research and Practice*, *22*(1), 36–46.

Klus-Stańska, D. i Kalinowska, A. (2004). *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak".

Kondratek, B. (2012). Konteksty osiągnięć uczniów. W: B. Murawska i M. Żytko (red.), *Uczeń, szkoła, dom. Raport z badań* (s. 187–217). Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Kroesbergen, E. H. i Van Luit, J. E. H. (2003). Mathematics interventions for children with special educational needs. A meta-analysis. *Remedial and Special Education*, *24*(2), 97–114.

Moeller, K. i Nuerk, H.-C. (2011). Psychophysics of numerical representation: why seemingly logarithmic representations may rather be multi-linear. *Journal of Psychology*, *219*(1), 64–70.

Moyer, R. S. i Landauer, T. K. (1967). Time required for judgments of numerical inequality. *Nature*, *215*, 1519–1520.

Nieder, A i Miller E. K. (2003). Coding of cognitive magnitude: compressed scaling of numerical information in the primate prefrontal cortex. *Neuron*, *37*(1),149–57.

OECD (2010). *The high cost of low educational performance: the long-run economic impact of improving educational outcomes*. Paris: OECD.

Opfer, J. E. i Siegler, R. S. (2007). Representational change and children's numerical estimation. *Cognitive Psychology*, *55*(3), 169–195.

Oszwa, U. (2009). *Psychologiczna analiza procesów operowania liczbami u dzieci z trudnościami w matematyce.* Lublin: Wydawnictwo UMCS.

Piaget, J. (1977). *Dokąd zmierza edukacja?* Warszawa: PWN.

Ramani, G. B. i Siegler, R. S. (2008). Promoting broad and stable improvements in low-income children' s numerical knowledge through playing number board games. *Child Development*, *79*(2), 375–394.

Ramani, G. B. i Siegler, R. S. (2011). Reducing the gap in numerical knowledge between low- and middle-income preschoolers. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *32*(3), 146–159.

Ramani, G. B., Siegler, R. S. i Hitti A. (2012). Taking it to the classroom: number board games as a small group learning activity. *Journal of Educational Psychology*, *104*(3), 661–672.

Räsänen, P., Salminen, J., Wilson, A. J., Aunio, P. i Dehaene, S. (2009). Computer-assisted intervention for children with low numeracy skills. *Cognitive Development*, *24*(4), 450–472.

Restle, F. (1970). Speed of adding and comparing numbers. *Journal of Experimental Psychology*, *83*(2, Pt.1), 274–278.

Rosenfeld, A. (2005). The benefits of board games. *Scholastic Parent & Child*, *12*, 52–54.

Sarama, J. i Clements, D. H. (2004). "Building Blocks" for early childhood mathematics. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*, 181–189.

Siegler, R. S. (2009). Improving the numerical understanding of children from low-income families. *Child Development Perspectives*, *3*(2), 118–124.

Siegler, R. S. i Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: a review. W: J. B. Campbell (red.), *Handbook of mathematical cognition* (s.197–212). New York, NY: Psychology Press.

Siegler, R. S. i Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, *14*(3), 237–243.

Siegler R.S. i Ramani G. B. (2008). Playing linear numerical board games promotes low-income children's numerical development. *Developmental Science*, *11*(5), 655–661.

Siegler, R. S. i Ramani, G. B. (2009). Playing linear number board games – but not circular ones – improves low-income preschoolers' numerical understanding. *Journal of Educational Psychology*, *101*(3), 545–560.

Siegler, R. S. i Ramani, G. B. (2011). Improving low-income children's number sense. W: S. Dehaene i E. Brannon (red.), *Space, time and number in the brain: searching for the foundations of mathematical thought* (s. 343–354). London: Elsevier.

Slusser, E. B., Santiago, R. T. i Barth, H. C. (2013). Developmental change in numerical estimation. *Journal of Experimental Psychology: General*, *142*(1), 193–201.

Starkey, P., Klein, A. i Wakeley, A. (2004). Enhancing young children's mathematical knowledge through a Pre-Kindergarten mathematics intervention. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*(1), 99–120.

Xin, P. X. i Jitendra, A. K. (1999). The effects of instruction in solving mathematical word problems for students with learning problems: a meta-analysis. *The Journal of Special Education*, *32*(4), 207–225.

Whyte, J. C. i Bull, R. (2008). Number games, magnitude representation, and basic number skills in preschoolers. *Developmental psychology*, *44*(2), 588–596.