Edukacja 2017, 1(140), 27–38
doi: 10.24131/3724.170102
issn: 0239-6858

Tworzenie różnych reprezentacji przez dzieci podczas rozwiązywania problemu matematycznego

Ewa Swoboda
Wydział Ekonomii, Uniwersytet Rzeszowski*

Matematyka w szerokim zakresie posługuje się zapisem symbolicznym, ale symbol matematyczny nie jest jedynym sposobem kodowania informacji. Zwłaszcza na etapie nauczania wczesnoszkolnego stosuje się różne sposoby reprezentowania pojęć i relacji matematycznych. Na ogół to nauczyciel decyduje o wyborze formy reprezentacji. Jednak w procesie rozwiązywania matematycznych problemów jest zaangażowany uczeń, a zastosowany sposób kodowania związków powinien wspierać jego pracę umysłową. W badaniu opisanym w tym artykule sprawdzono, w jaki sposób różne reprezentacje mogą wpłynąć na efekt pracy nad nietypowym zadaniem matematycznym. Zadanie było rozwiązywane przez uczniów 7–8-letnich w ramach kółka matematycznego. Wybrane do analizy przykłady wskazują na silny związek między wyborem reprezentacji, a końcowym wynikiem pracy ucznia.

Słowa kluczowe: matematyka, rozwiązywanie problemów, symbol matematyczny, reprezentacje enaktywne, reprezentacje ikoniczne.

Matematyka jest postrzegana jako nauka posługująca się abstrakcyjnymi pojęciami i relacjami. Rzeczywiście, nie ma możliwości, aby zmysłami doświadczyć, czym jest określone szczegółowe pojęcie matematyczne, albo na czym polegają związki i relacje między pojęciami. Te obiekty i związki można jedynie re-prezetować poprzez słowo, obraz, symbol, gest. Każda taka reprezentacja niesie ze sobą określoną treść, jest kodem dla pewnego znaczenia. Niezależnie od swej zewnętrznej formy, reprezentacja powinna oddawać określony matematycznie sens. Jego odczytanie można porównać do umiejętności posługiwania się językiem, którego należy się nauczyć. Można więc stwierdzić, że uczenie się matematyki musi przebiegać równolegle z uczeniem się języka, którym matematyka się posługuje. Przyjęcie takiego założenia w naturalny sposób otwiera szerokie pole badawcze dla dydaktyków, historyków matematyki, językoznawców. Badacze języka w obrębie matematyki analizują to zjawisko z bardzo różnych punktów widzenia. Ladislav Kvasz (2014, s. 207) stwierdził:

> Matematyka jest zazwyczaj rozumiana jako język nauki. Jest postrzegana jako narzędzie, za pomocą którego takie dyscypliny jak fizyka czy ekonomia, osiągają swoją precyzję. Przez to często nie zwraca się uwagi na fakt, że sama matematyka swój wymiar językowy: ta sama matematyczna treść może być wyrażona na wiele różnych sposobów.

* Adres: Al. Rejtana 16c, 35-959 Rzeszów.
E-mail: eswoboda@ur.edu.pl

W badaniach dydaktycznych analizuje się szerokie spektrum „języków": wypowiedzi słowne (matematyczne i potoczne), język niewerbalny, symboliczny, rysunki i grafy, język quasi-matematyczny (Guidoni, Iannece i Tortora, 2005; Pirie, 1998; Slezáková-Kratochvílová i Swoboda, 2006). Dydaktyk matematyki patrzy na język w specyficznym celu. Bada jego związek z procesami myślowymi zachodzącymi podczas uczenia się, uprawiania matematyki. Bardzo ważnym źródłem takiej wiedzy mogą być wszelkie formy języka pisanego. Zapisy tworzone samodzielnie przez uczniów mogą informować nauczyciela o ich procesach myślowych. Candia Morgan (1998, s. 33) stwierdziła:

> Założenie ścisłego związku między myślą a językiem jest niezbędnym elementem w tych badaniach, które starają się wykorzystać tekst (pisemny lub ustny) tworzony przez uczniów jako dowód ich myślenia.

Oczywiście, w szkolnej rzeczywistości ten naturalny proces może być w różny sposób korygowany. Na tworzone zapisy wielokrotnie mają wpływ obowiązujące w szkole umowy społeczne (dotyczące np. sposobu prowadzenia zapisu rozwiązywania zadania), preferencje i umiejętności ucznia. Jednakże zarówno konstruktywiści, jak i naukowcy odwołujący się do teorii społeczno-kulturowych, zgadzają się, że wiedza jest subiektywnym odbiciem wcześniejszych doświadczeń, jest atrybutem podmiotu. Jeżeli przyjmujemy, że język jest wyrazem myśli (Wygotski, 1989), oraz że „język kształtuje się stosownie do nawyków myślenia" (Piaget 1992, s. 144), to wszelkie zapisy, stwierdzenia, kody i znaki używane w obrębie matematyki powinny być w ścisłym związku z myśleniem oraz wspierać indywidualne rozwiązania i strategie.

Teoretyczne podstawy badania

Mylne jest utożsamianie sposobów prezentowania matematyki jedynie ze stosowaniem symboliki matematycznej, niezależnie od faktu, że symbol rzeczywiście odgrywa ważną rolę. Historia matematyki pokazuje, że wprowadzenie wielu symboli bardzo uprościło zapis (Ifrah, 1990; Struik, 1963) i ułatwiło prowadzenie rozumowań. Współcześnie niekiedy wręcz podkreśla się, że matematyczny symbol „myśli" za matematyka (Krygowska, 1977). W nauczaniu szkolnym okres budowania związków między znakiem a obiektem (sytuacją), którą reprezentuje, powinien być długi. Tylko w ten sposób można oswoić się z informacyjną funkcją znaku lub symbolu i zagwarantować jego użyteczność.

> […] znak zawsze będzie utrzymywał związek z praktyczną aktywnością jednostki i [powinniśmy] odbierać znak jako semiotyczny obiekt funkcjonujący w takim środowisku, w którym jest brana pod uwagę specyfika określonej aktywności (Radford, 2003, s. 50).

Choćby dlatego matematyki nie należy sprowadzać do systemu arbitralnie podawanych znaków i symboli ani nawet do formalnie wprowadzanych pojęć i relacji. Heinz Steinbring (Steinbring, 2005, s. 19) ujął to następująco:

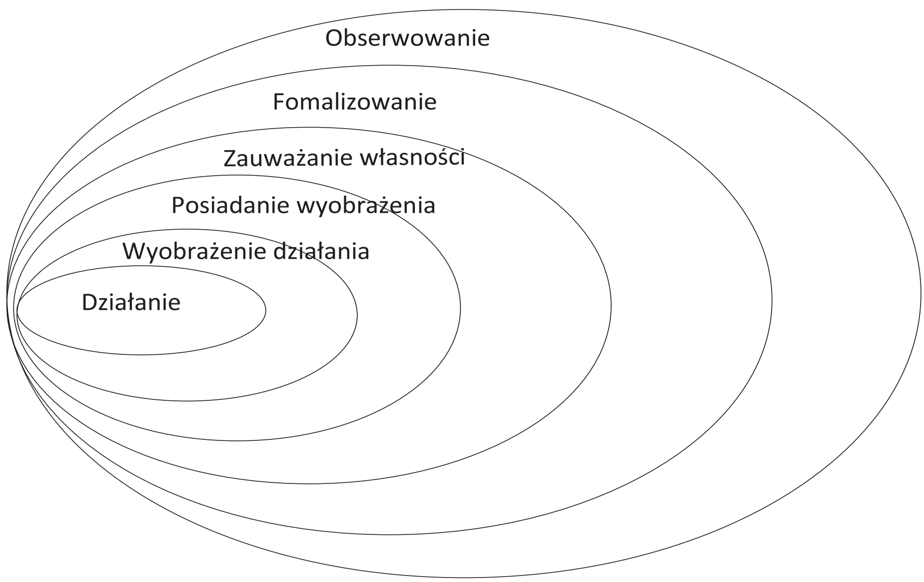
> Pojęcia matematyczne reprezentują stosunkowo autonomiczne jednostki epistemologiczne. W celu doprowadzenia do tego, by uczniowie rozumieli pojęcie matematyczne, […] muszą oni aktywnie zachowywać się w tym środowisku kulturowym i muszą wykryć możliwą interpretację pojęcia matematycznego. Matematykę należy rozumieć jako aktywność.

Aktywność podkreślana przez Steinbringa jest związana z istotą działalności matematycznej na każdym etapie jej uprawiania. Taka aktywność wymaga nadawania własnego znaczenia zarówno pojęciom, relacjom między pojęciami, jak i symbolom kodującym pojęcia i relacje. Umiejętność odpowiedniego zastosowania różnych form reprezentacji może odgrywać bardzo istotną rolę. Bez wątpienia taka różnorodność jest bardzo pomocna zwłaszcza na początkowych etapach edukacji matematycznej. Szerokość i swoboda w korzystaniu z różnych reprezentacji czyni je użytecznymi narzędziami, a nie przeszkodami.

Analizując rozwój rozumowań, warto wykorzystać pewne ustalenia tworzone przez dydaktyków (Pirie i Kieren,1989). Zwracają one uwagę na „rekurencyjność" matematycznego rozumienia – konieczność nieustannego powracania do wcześniejszych poziomów rozumienia i umiejętność spojrzenia na nie z wyższego poziomu. Dziecko wykorzystuje swoją wewnętrzną, intuicyjną wiedzę do budowania wiedzy bardziej kompleksowej. Daje to szansę na integrację różnych fragmentów wiedzy, głębsze doświadczanie matematycznych faktów, lepsze rozumienie języka. Na Rysunku 1 przedstawiono fragment diagramu pokazującego związki pomiędzy różnymi poziomami.

Nachodzące na siebie pętle wskazują, że działanie może mieć różne funkcje na różnych etapach prowadzenia rozumowań. Dopiero na pewnym poziomie zapoznania się z materiałem można zwrócić uwagę na nieoczywiste własności, a sformalizowanie empirycznych faktów może prowokować do dalszego działania w celu obserwowania wywnioskowanych zależności. Jedno ze skojarzeń takiego diagramu może iść w kierunku znanego z pedagogiki odwołania do spiralnego układu treści. Umiejętności i doświadczenia nabywane na niższych poziomach winny umożliwiać rozumienie ich na poziomie wyższym. Wiadomości powinny być zatem nabywane w sposób wiążący je w strukturę, a fakty łączone według pewnych zasad i pojęć ogólnych, z których można je wyprowadzić (Filipiak, 2008).

Powyższy diagram można również odnieść do znanych ustaleń czynnościowego nauczania matematyki (Krygowska, 1977; Siwek, 1988). Działania możemy



Rysunek 1. Rekurencyjny model tworzenia wiedzy matematycznej.

Źródło: Pirie i Kieran (1989, s. 7).

interpretować jako czynności konkretne (na pierwszym etapie), wyobrażone (poziom wyższy) i pomyślane (najwyższy). W tradycji szkolnego nauczania utarła się taka hierarchiczna budowa, która sugeruje, że wyższe poziomy edukacyjne raczej powinny odbiegać od działań na konkretach, zastępując je manipulacjami umysłowymi. Wydaje się, że taka interpretacja jest niesłuszna i prawdopodobnie niezgodna z intencjami twórców czynnościowego nauczania matematyki. Przeciwko takiemu wąskiemu traktowaniu czynności przemawiają również wyniki płynące z innych obszarów nauki. Potrzeba różnorodnych form wsparcia dla myślenia abstrakcyjnego jest potwierdzana przez badania prowadzone w obszarze neuropsychologii, a nawet filozofii matematyki (Brożek i Hohol, 2017). Krzysztof Cipora, Monika Szczygieł i Mateusz Hohol (2014, s. 62) wskazali na „związki między umysłową reprezentacją palców a zdolnością liczenia" i potwierdzili, że wykonywanie pewnych ruchów palcami dla reprezentowania wielkości liczbowych odciąża pamięć roboczą i pozwala na pełniejsze poznanie matematyczne. Autorzy ci, powołując się na szerokie światowe badania, stwierdzili, że „Zarówno na poziomie behawioralnym, jak i neuronalnym przetwarzanie liczb wiąże się z aktywacją umysłowych reprezentacji palców" (s. 63). A przecież palce są podstawowym, najbardziej oczywistym zbiorem liczmanów, które dziecko ma do dyspozycji. Samo reprezentowanie wielkości na palcach i wykorzystanie zmysłu kinestetycznego jest niewystarczające. Potrzebne jest wsparcie kodem werbalnym, wykorzystanie wzrokowego rozpoznania wzorców. Tak myślowe manipulowanie abstrakcyjnymi obiektami ujął Albert Einstein:

> Słowa i język, czy to mówione, czy pisane, nie grają żadnej roli w moim procesie myślowym. Psychologicznymi cegiełkami, które służą za budulec moich myśli, są pewne znaki lub obrazy, mniej lub bardziej klarowne, które mogę do woli przywoływać i rekombinować (za: Brożek i Hohol, 2017, s. 193)[1].

To podejście teoretyczne zostanie wykorzystane w analizie pracy wybranej grupy ośmioletnich uczniów. Nacisk położono na różne formy reprezentacji, w których symbol, słowo, obraz, gest w różnym stopniu wpływały na efekt pracy.

Organizacja obserwacji, narzędzie badawcze, metodologia

Celem obserwacji było poszukiwanie odpowiedzi na następujące pytanie: Jaka jest funkcja różnego sposobu kodowania informacji w procesie rozwiązywania zadań? Szczegółowe pytania badawcze brzmiały następująco:

- Jak odczytywana jest przez uczniów słowna informacja, opisująca quasi-matematyczny problem?
- W jaki sposób uczniowie potrafią reprezentować informacje podane w zadaniu?
- Jaka forma reprezentacji zadania okaże się najkorzystniejsza z punktu widzenia sukcesu w rozwiązaniu podanego problemu?
- Czy istnieją jakieś formy reprezentacji zadania, które mogą być przeszkodą w prowadzeniu rozumowania, w znajdowaniu odpowiedzi na sformułowany problem?

Jako narzędzie badawcze zostało wykorzystane następujące zadanie:

> 7 wiewiórek zdecydowało się na wyścig. Na nagrody przeznaczono 31 orzeszków. Sowa zdecydowała, że najszybszy dostanie więcej niż najwolniejszy, a dodatkowo każda wiewiórka powinna otrzymać inną liczbę orzeszków. Jak to zrobić? Ile istnieje rozwiązań? (Baggett i Erhenfeucht, 1998).

[1] Według Bartosza Brożka i Mateusza Hohola jest to cytat z listu Alberta Einsteina do Jacquesa Hadamara (W: Ghiselin, B. (red.). (1980). *The creative process: reflection on invention in the art and sciences* (s. 43–44). Los Angeles: University of California Press.

Problem został przedstawiony w postaci słownej, jako tzw. „zadanie tekstowe". Jedyne symbole matematyczne występujące w tekście dotyczyły ilości i były to: liczba uczestników biegu oraz wartość nagrody. Wszelkie inne związki należało samodzielnie odkodować i w tym przypadku trudno było się dopatrywać jakiegoś słowa-klucza, które mogło by naprowadzić na znane matematyczne relacje. Sama historyjka w była płaszczykiem dla problemu matematycznego, jakim jest rozkład liczby 31 na sumę siedmiu różnych składników. Dodatkowo odniesienie do zwyczajów panujących podczas zawodów, w których lepszy dostaje więcej a gorszy mniej, narzucało malejące (lub rosnące) uporządkowanie składników. Ten warunek nie został wprawdzie w jednoznaczny sposób zapisany, jednak wcześniejsze doświadczenia w pracy z tym zadaniem pokazywały, że dzieci interpretują je właśnie w taki sposób. Skrócenie opisu ułatwiało im zapamiętanie zawartych w zadaniu warunków.

To zadanie może być bardzo łatwe, jeżeli jest rozwiązywane na poziomie reprezentacji za pomocą liczmanów, poprzez zastosowanie odpowiedniej manipulacji. Wystarczy wyznaczyć w jakiś sposób siedmiu uczestników wyścigu (siedem guzików, siedem karteczek). Potem kolejno rozdzielać wyliczonych 31 żetonów, np. pierwszemu jeden, drugiemu dwa, trzeciemu trzy... albo: wszystkim po jednym, potem od drugiego do siódmego dodać znów po jednym, potem od trzeciego do siódmego dodać znów po jednym… W ten sposób zostanie rozdzielonych $1 + 2 + + 3 + \ldots + 7 = 28$ żetonów. Pozostałe żetony można: albo dać ostatniemu wszystkie trzy, albo dać ostatniemu dwa i przedostatniemu jeden, albo po jednym trzem ostatnim. I to są wszystkie możliwe rozwiązania – każdy uczestnik biegu ma inną liczbę orzeszków, przy czym zachowana zostaje zasada sprawiedliwego rozdziału nagród.

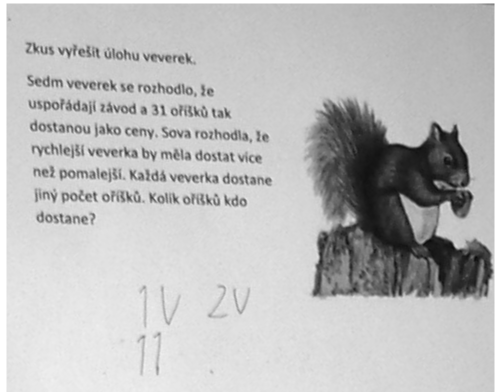
Taką rzeczywistą manipulację można zastąpić manipulacją wyobrażoną, wspartą od razu zapisem symbolicznym. Wtedy konieczna będzie nieco inna refleksja nad zadaniem. Zapis $1 + 2 + 3 + \ldots + 7$ może odzwierciedlać myślowe rozdzielanie nagród między siedmiu uczestników biegu, z zachowaniem warunku nierównoliczności. Obliczenie wartości tej sumy (znalezienie liczby 28) da podstawę do dalszych myślowych działań, które będą się uzewnętrzniać w podwyższaniu wartości pewnych składników wcześniej zapisanej sumy i obserwowaniu pozostałych relacji między składnikami.

Zadanie było rozwiązywane przez 17 uczniów 7–8-letnich w ramach kółka matematycznego prowadzonego w jednej ze szkół podstawowych w Pradze. Zajęcia odbywały się w klasie wyposażonej w stoliki, ale podczas pracy nad zadaniem dzieci siedziały na dywanie. Mogły więc swobodnie się przemieszczać, pracować w grupie lub osobno, dzielić się swoimi pomysłami. Autorka tego artykułu była obecna w klasie w charakterze obserwatora. Cały przebieg zajęć został sfilmowany, zaś zebrany materiał (film, arkusze pracy dzieci, zdjęcia wykonane w trakcie) był podstawą do dalszej analizy. Zadanie najpierw zostało głośno przeczytane przez prowadzącą zajęcia. Potem uczniowie dostali tekst zadania na kartce papieru, na której mogli również zapisywać swoje rozwiązania. Dodatkowo mogli skorzystać z liczmanów (fasolek), które prowadząca zajęcia wysypała z dużego worka. Przebieg ich pracy będzie służyć jako ilustracja wniosku, że wybór różnych form reprezentacji w różny sposób może wpływać na procesy myślowe związane z rozwiązaniem zadania.

Wyniki obserwacji

Zadanie było nowe dla dzieci. Wiedziały, że jest to zadanie matematyczne i wydawało im się, że jako takie powinno być rozwiązywane w sposób tradycyjny, czyli z zastosowaniem symboliki matematycznej. Jednak widać było, że tak naprawdę nie wiedzą, jak

Zdjęcie 1. Próby zastosowania tradycyjnego kodu matematycznego do rozwiązania zadania.



Zdjęcie 2. Początek pracy pierwszego chłopca nad zadaniem o wiewiórkach.

wykorzystać arkusz papieru do zapisywania rozwiązań lub prowadzenia rozumowania. Czasami podejmowały one chaotyczne próby liczenia „czegoś", co widać na Zdjęciu 1.

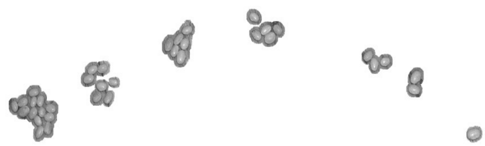
Jednak nawet tam, gdzie uczeń miał określoną ideę, która mogła doprowadzić do znalezienia rozwiązania, nie zawsze potrafił ją pogodzić z formalnym zapisem. Nawyk reprezentacji zadania poprzez zapis symboliczny okazał się dużą przeszkodą.

Symbol

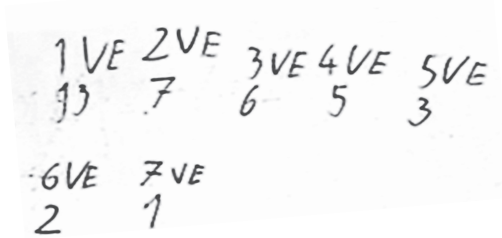
Jeden z chłopców rozpoczął pracę od zapisywania (rozdzielanych orzeszków) metodą prób i błędów. Zapisał na kartce „1ve, 2ve" (zaznaczając w ten sposób etykietkę dla pierwszej i drugiej wiewiórki), pod tym zapisał 11, 10 (Zdjęcie 2). Postępując tak, tworzył zarówno własną symbolikę, jak i wykorzystywał tradycyjne matematyczne symbole. W ten sposób zagospodarował 21 orzeszków. Potem pojawił się zapis 21 – 9 = 12, który można zinterpretować, że chłopiec chciał przydzielić kolejnej wiewiórce 9 orzeszków i równocześnie ocenić, ile mu jeszcze zostanie orzeszków do rozdziału. Taki zapis jednak wykorzystuje związki między liczbami w niewłaściwy sposób. Ten etap pracy pokazuje, że uczeń nie bardzo wiedział, jak w sposób formalny zapisać wszystkie zależności, które dostrzegł w zadaniu.

Widocznie ten wynik go nie satysfakcjonował, bo zmazał wszystko i zaczął próby z innymi liczbami. Kolejne zapisy były cząstkowe, np.: 5, = 20 (podpisane z góry do dołu) i na tym etapie były tylko „podpórką" dla procesów myślowych, chyba jednak chaotycznych. Ponieważ zauważył, że inne dzieci posługują się fasolkami, również po nie sięgnął. Podczas manipulacji pracował razem z kolegą. Liczba fasolek, na których pracowali, nie zgadzała się jednak z wielkością wymienioną w zadaniu. Poprzez manipulacje udało im się rozdzielić je na siedem grup o wzrastającej liczebności. Na prośbę prowadzącej, by zapisał swoje rozwiązanie, zaczął kontynuować zapis istniejący już na kartce: do istniejących etykiet „1ve, 2ve" dopisał: „3ve, 4ve, 5ve, 6ve, 7ve" a pod nimi liczby 13, 7, 6, 5, 3, 2, 1. Te liczby wpisywał, przeliczając fasolki, które miał przed sobą (Zdjęcia 3 i 4).

Komentarz. Chłopiec doświadczył niepowodzeń podczas rozwiązywania zadania tradycyjnym sposobem, przy stosowaniu typowej matematycznej symboliki, chociaż jego początkowe poczynania były trafne.



Zdjęcie 3. Rozkład fasolek na siedem nierównolicznych zbiorów.



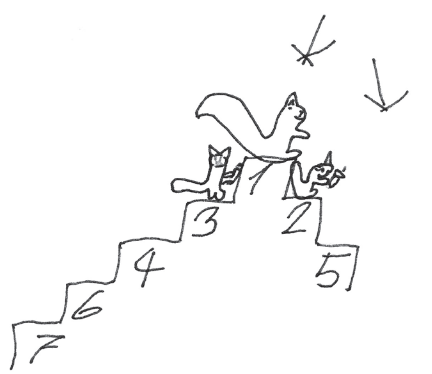
Zdjęcie 4. Zapis rozwiązania stworzony przez pierwszego chłopca.

Poszukiwał rozwiązań, sensownie prowadząc szacowania „w głowie", wykorzystywał oszacowane wyniki do tworzenia zapisów, dokonywał cząstkowych działań. Swojemu zapisowi starał się nadać matematyczną formę, korzystając zarówno z pewnej formy tabelki (wprowadzając oznaczenia dla poszczególnych wiewiórek i przyporządkowując im oszacowane wartości), jak i z zapisu matematycznego działania. Późniejsze zapisy rozwiązania były cząstkowe i spełniały różną funkcję. Przejście na manipulacje spowodowało, że chłopiec przekonał się, że znalezienie rozwiązania może być łatwe. Po rozdzieleniu liczmanów na siedem zbiorów nie próbował już tworzyć żadnych zapisów. Nie odczuwał potrzeby, by otrzymany wynik zapisywać. Można zaryzykować stwierdzenie, że nie chciał wracać do tej formy, która w jego odczuciu nie pomogła w znalezieniu rozwiązania. Sprowokowany do zapisu, zrobił to szybko, nie weryfikując zapisanego wyniku z danymi początkowymi zadania.

Obraz

Dziewczynki pracujące w trójkę nie zainteresowały się w ogóle liczmanami. Kiedy dostały papier, na którym treść zadania zajmowała jedynie mały fragment, zdecydowały, że tę treść zilustrują obrazkiem. Rozpoczęły pracę od narysowania podium dla zwycięzców. Sam proces rysowania sprawił, że oderwały się od matematycznego aspektu zadania, a skupiły na realistycznym problemie nagradzania uczestników biegu. Można stwierdzić, że ten fragment informacji słownej był dla nich najważniejszy i usunął w cień wszystkie inne. Prawdopodobnie dziewczynki posłużyły się modelem znanym z obserwacji, bo narysowane podium składało się z trzech ponumerowanych stopni (Zdjęcie 5). Na kolejnych stopniach zostały narysowane wiewiórki. Nad podium zapisały „31 orzeszków". Wielkość 31 została rozłożona na trzy składniki: 10, 15, 6 (tylu zwycięzców sugeruje

Zdjęcie 5. Pierwsza próba rozwiązania zadania przez dziewczynki.



Zdjęcie 6. Druga próba rozwiązania zadania.

rysunek), a liczby zostały napisane nad oznaczonymi miejscami dla kolejnych zwycięzców. Aby nie było wątpliwości, kto ile orzeszków dostanie, liczby zostały opatrzone strzałkami wskazującymi miejąca na podium – największą z tych liczb został oznaczony zwycięzca. W ten sposób rysunek stał się graficzną reprezentacją procedury nagradzania.

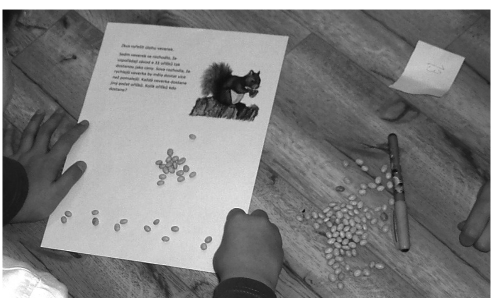
Kolejne zdjęcie (6) powstało już po dyskusji organizowanej w międzyczasie ze wszystkimi uczestnikami zajęć. Wówczas dziewczynki same doszły do wniosku, że źle zinterpretowały zadanie. Niezależnie od tego, postanowiły w dalszym ciągu posługiwać się jedynie graficzną reprezentacją. Rysunek jest niedokończony, co świetnie dokumentuje stadia jego powstawania. Narysowane jest podium siedmiostopniowe z ponumerowanymi miejscami, na trzech pierwszych stoją wiewiórki. Jest to więc poszerzona wersja pierwszego obrazka. Są też dwie strzałki wskazujące pierwsze i drugie miejsce na podium. Wydaje się, że jest to przygotowanie do dalszej pracy, która już nie nastąpiła. Przede wszystkim brak jakiegokolwiek odniesienia do wielkości liczbowych, do prób rozdziału puli nagród.

Komentarz. Dziewczynki użyły czystej kartki papieru nie tyle do rozwiązania problemu, ile raczej do zilustrowania wyników konkursu. Pracowały jako zespół, rysunek również powstawał wspólnie. Beletrystyczna treść zadania (biegi, konkurs, nagradzanie zawodników) stanowiła warstwę, która zdominowała warstwę matematyczną. Ich realistyczna ilustracja, odwołująca się do doświadczeń życiowych, zaciążyła na dalszym przebiegu pracy. Zmieniając warunki poprzez ograniczenie wygrywających do trzech graczy, doprowadziły do sytuacji, w której matematyczny problem stał się łatwy. Dziewczynki nie czuły potrzeby kodowania sposobu otrzymania jego rozwiązania, zapisały jedynie sam wynik. Kolejny etap, związany z poprawą sposobu reprezentowania zadania, odbył się jedynie na płaszczyźnie graficznej. Nie wpłynął jednak na strategię jego rozwiązywania. Być może dziewczynki w dalszym ciągu zamierzały przyporządkować nagrody kolejnym graczom (strzałki!), ale teraz zadanie nie było już łatwe.

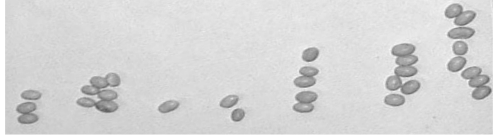
Ta grupa nie dokończyła swojej pracy, prawdopodobnie zabrakło im czasu – dalsza część zajęć została zdominowana przez wspólną dyskusję i próby znalezienia rozwiązania za pomocą „dramy".

Gesty (manipulowanie)

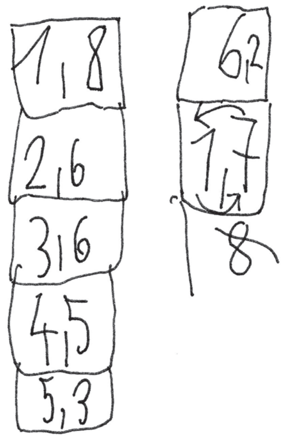
Inny chłopiec zaczął od wybrania 31 fasolek i przesunięcia ich na kartkę – w ten sposób zaznaczył obszar swojej pracy. Zaczął je najpierw rozdzielać po dwie na siedem zbiorów, widocznie szacując, że posiada dużo elementów, potem do każdego zbioru dodawał po kilka. Poprzez manipulacje udało mu się rozdzielić fasolki na nierównoliczne zbiory, chociaż bez zachowania porządku pomiędzy kolejnymi ilościami. Jedyne, nad czym potem popracował, to ułożenie fasolek w „kominy" (Zdjęcia 7 i 8).



Zdjęcie 7. Wybór 31 liczmanów i rozdzielanie ich na siedem zbiorów.



Zdjęcie 8. Próba różnicowania liczności zbiorów.



Zdjęcie 9. Raport z rozwiązania zadania stworzony przez drugiego chłopca.

Być może taki układ miał mu pomóc w ocenie (szeregowaniu według ilości) tego podziału. Nie zdecydował się jednak na inne uporządkowanie, więc nie wszystkie kominy są podłużne. Widocznie uznał, że taki układ daje mu wystarczające pensum informacji, by móc określić rozwiązanie. Etap manipulacji był dla niego pierwotnym, najważniejszym krokiem w rozwiązywaniu problemu.

Teraz nastąpił kolejny, myślowy – kodowanie otrzymanego rozwiązania przy równoczesnym porządkowaniu wyników zgodnie z warunkiem zadaniowym (Zdjęcie 9). Jest to sam „raport", bo na kartce nie ma śladów skreśleń, a suma cyfr wskazujących na wysokość nagrody zbiega się do 31, czyli jest zgodna z warunkami zadania. Jego rozwiązanie przedstawia ciąg kwadratów z doczepianymi kolejno okienkami. Ciąg przebiega od góry kartki do dołu, a gdy zabrakło miejsca – po prawej stronie. Widać, że przepisanie rozwiązania na kartkę wiąże się z kolejną pracą intelektualną, bo jest uporządkowane inaczej niż układ fasolek. W każdym okienku chłopiec zapisał dwie cyfry oddzielone przecinkiem: miejsce zawodnika i wysokość wygranej. Zrealizował więc dwa porządki – jeden wstępujący (kolejne miejsca zawodników), a drugi zstępujący (wartość nagrody). W takim zapisie znaki z pierwszego okienka (1, 8) należy zinterpretować: zdobywca pierwszego miejsca otrzyma w nagrodę 8 orzeszków. Zastanawiające jest przy tym, że nie zwrócił uwagi na to, że wiewiórkom z drugiego i trzeciego miejsca przydzielił tę samą liczbę orzeszków, co można wytłumaczyć skupieniem uwagi na odpowiednim zakodowaniu otrzymanego rozwiązania. Z powodu braku miejsca na kartce chłopiec musiał stworzyć kolejne okienka – to wybiło go z rytmu. Można przypuszczać, że najpierw tworzył ciąg cyfr: 6, 7, 8 (ostatnia skreślona), a dopiero potem przyporządkował wysokość nagrody. W ostatnim okienku pomylił kolejność symboli miejsca zawodnika i wysokości nagrody, ale skontrolował całość zapisu i skorygował go, zaznaczając strzałkami, w jakiej kolejności należy odczytywać cyfry.

Komentarz. Uczeń zdecydował się na rozwiązywanie zadania poprzez manipulację. W świadomy sposób podporządkował się warunkom zadania: wybrał 31 obiektów do manipulowania, wyznaczył siedem pozycji zawodników, starał się różnicować wysokość nagród. Ten sposób pracy doprowadził go do niemal pełnego, poprawnego rozwiązania. Zapis na kartce był dla chłopca formą sprawozdania z tego, co zrobił wcześniej. Wyraźnie widać jednak, że praca w drugim etapie wymagała zupełnie innego podejścia. Zmuszony do zapisania rozwiązania, zaczął zupełnie inny proces myślowy. Niezależnie od tego, początkowa, manipulacyjna faza pracy dała mu możliwość myślowego kontynuowania rozwiązania. Teraz widać, że chłopiec rozumiał sens notacji cyfrowej, potrafił zastosować odpowiednie symbole, zakodować cyfrę zarówno w aspekcie kardynalnym (liczba orzeszków na nagrodę), jak i porządkowym (kolejne miejsce zawodnika). Dodatkowo starał się zachować uporządkowanie (rosnące i malejące) pomiędzy poszczególnymi elementami.

Wnioski

Wszelkie reprezentacje powinny być odbiciem procesów myślowych, a te – w obrębie matematyki – powinny dotyczyć funkcjonowania w matematycznych modelach. Pokazane przykłady dochodzenia do rozwiązania zadania dowodzą, że uczeń, który nie musi podporządkować się narzuconym formom redagowania wyniku, często stosuje własne formy reprezentowania matematycznych treści. Te z kolei w różnym stopniu mogą pomagać w osiągnięciu sukcesu.

Działanie, odpowiednie gesty, czynności są najłatwiejszą formą wyrażenia treści, a przy tym wydają się najbliższe spontanicznym zachowaniom ucznia. Warto pamiętać, że stosowanie manipulacji nie powinno być traktowane jako „przejście na niższy poziom", co przez uczniów zdolnych może być odbierane jako swoista degradacja, niedocenianie ich intelektualnych możliwości. Odpowiednie zbudowanie fizycznego modelu, i przekształcanie go pozwala wprowadzić do rozumowania dynamiki, akcji – często niedostrzeganych w zapisie symbolicznym. Przejście do kodowania symbolicznego może okazać się dużo łatwiejsze, a same symbole mogą odwoływać się jedynie do matematycznych aspektów kodowanego zjawiska.

Bardzo specyficzne miejsce w reprezentowaniu pojęć matematycznych zajmuje rysunek. Pokazany przykład poświadcza, że nie może on być byle jaki, luźno związany z poruszaną tematyką. Skupienie się na szczegółach może odciągać od istoty problemu. Również zbyt bliskie powiązanie z własnymi doświadczeniami może utrudniać dostrzeganie nowych danych, specyficznych dla sytuacji określonej w zadaniu. Umiejętne wydobycie matematycznych związków poprzez samodzielne stworzenie rysunku może bardzo pomóc w zrozumieniu problemu (Nowakowska, Orzechowska, Sosulska i Zambrowska, 2014; Dąbrowski, 2006). Taka umiejętność jednak nie jest automatyczna, co potwierdzają wyniki badań dydaktycznych (Reclik, 2012; 2015; Stankiewicz, 2016). Reprezentacja ikoniczna matematycznych problemów wcale nie jest łatwa. Jest związana z aktami abstrahowania – należy zrezygnować z wielu szczegółów nieistotnych dla zagadnienia i dodatkowo umieć tak wyeksponować ważne matematyczne związki, by określone relacje były oczywiste. Warto na te fakty zwracać uwagę, analizując podręczniki szkolne przygotowane dla wczesnych etapów edukacyjnych, często przeładowane rysunkami o nie zawsze jasnym matematycznym przesłaniu. Z drugiej strony – warto wspierać uczniów w samodzielnym tworzeniu „matematycznego" rysunku.

Omówione rozwiązania zostały stworzone przez uczniów pracujących w jednej grupie. Mieli oni dowolność w wyborze interpretacji, w posługiwaniu się liczmanami, w sposobie zapełniania kartki. Ponieważ uczniowie nie byli wybierani w jakiś specjalny sposób, można przypuszczać, że podobne zachowania mogą mieć miejsce w każdej typowej klasie szkolnej.

Przedstawione rozwiązania nie wyczerpują wszystkich, które zostały stworzone. Taka różnorodność daje olbrzymią możliwość prowadzenia dalszej dyskusji w klasie. Na etapie dyskusji samo zadanie może być jedynie pretekstem do budowania wiedzy metamatematycznej. Wielu uczniów działało, manipulując fasolkami – w trakcie dyskusji mogli o tym opowiedzieć, słownie opisać swoje działania, wyjaśnić ich cel. Inni kodowali wyniki symbolicznie. Sprawozdanie z takiego kodowania może być pretekstem do nowego spojrzenia na wcześniejsze działania. Warto też wprowadzać zapisy wykorzystujące symbolikę matematyczną, wprowadzać arytmetyczny zapis działań, czyli przechodzić na etap formalizowania zauważonych związków. Takie zapisy są inną formą zarówno wcześniejszych manipulacji, jak i zakodowanych rozwiązań.

Zakończenie

Prowadząc rozumowanie matematyczne, dziecko odnosi się do osobistego doświadczenia. Subiektywna interpretacja podanej informacji (problemu) pozwala mu zrobić pierwszy krok w kierunku znalezienia rozwiązania. Podczas pracy nad zadaniem uczniowie mogą wspierać swoje rozumowanie poprzez różnego rodzaju reprezentacje, stosowanie własnego sposobu kodowania, używanie nieformalnego języka, gestów. Forma reprezentacji, która wspiera proces znalezienia rozwiązania, dla każdego dziecka może być inna. Dzieci powinny mieć możliwość wyboru sposobu reprezentowania zarówno problemu, jak i sposobu jego rozwiązywania.

Stosowanie symboliki matematycznej nie jest proste. Tak jak każdy znak, symbol matematyczny jest nośnikiem określonego znaczenia. Powinien być on skojarzony z różnymi procedurami, z typowymi sposobami zastosowania. Jednak takie skojarzenia budowane są długo, poprzez gromadzenie doświadczeń. Te fakty są wielokroć podkreślane przez dydaktyków matematyki:

> Matematyka jako taka zajmuje się znakami, symbolami, symbolicznymi związkami, abstrakcyjnymi schematami i relacjami. W nauczaniu matematyki, umiejętność stosowania symboli budowana jest w określony sposób, poprzez nadawanie społecznego i komunikacyjnego znaczenia literom, znakom i schematom, w trakcie procedur negocjacji (Steinbring 1997, s. 50).

Mimo że matematyka ma swoją symbolikę, to prowadzenie matematycznych zapisów jedynie za pomocą symboli matematycznych, i to od najniższych etapów edukacji, może być dla dzieci dużą barierą (Rożek, 2016).

Różnorodność reprezentacji bardzo wzbogaca możliwość posługiwania się matematyką. Stosowanie różnych zapisów i posługiwanie się różnymi formami matematycznych wypowiedzi daje szansę na takie reprezentowanie matematycznej myśli, które w danej sytuacji może kazać się najbardziej adekwatne. Jednak każda reprezentacja – z dydaktycznego punktu widzenia – niesie ze sobą inne problemy, na które nauczyciel powinien być wyczulony.

Literatura

Baggett, P. i Ehrenfeucht, A. (1998). *Breaking away from the math book ii: more creative projects for grades K-8*. Lancaster: Technomic Publishing Company.

Brożek, B. i Hohol, M. (2017). *Umysł matematyczny.* Kraków: Copernicus Center Press.

Cipora, K., Szczygieł, M. i Hohol, M. (2014). Palce, które liczą: znaczenie liczenia na palcach dla poznania matematycznego u człowieka dorosłego. *Psychologia–Etologia–Genetyka*, 30, 59–73.

Dąbrowski, M. (2006). *Pozwólmy dzieciom myśleć! O umiejętnościach matematycznych polskich* trzecioklasistów. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Filipiak, E. (red.). (2008). *Rozwijanie zdolności uczenia się. Wybrane konteksty i problemy.* Bydgoszcz: Wydawnictwo Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego.

Guidoni, P., Iannece, D. i Tortora, R. (2005). Multimodal language strategies activated by students in understanding and communicating mathematics. W: M. Bosch (red.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Sant Feliu de Guíxols* (s. 841–851). Pobrano z http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME4/CERME4_WG8.pdf

Ifrah, G. (1990). *Dzieje liczby, czyli historia wielkiego wynalazku*. Wrocław: Zakład Narodowy im. Ossolińskich.

Krygowska, Z. (1977). *Zarys dydaktyki matematyki*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Kvasz, L. (2014). Language in change: how we changed the language of mathematics and how the language of mathematics changed us. W: M. Pytlak (red.), *Communication in the mathematics classroom* (s. 207–228). Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Morgan, C. (1998). *Writing mathematically, the discourse of investigation* (t. 9: Studies in mathematics education series). London: Falmer Press.

Nowakowska, A., Orzechowska, M., Sosulska, D. i Zambrowska, M. (red.). (2014). B*ydgoski bąbel matematyczny O wprowadzaniu zmian w nauczaniu matematyki w klasach I–III*. Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych.

Piaget, J. (1992). *Mowa i myślenie dziecka*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Pirie, S. (1998). Crossing the gulf between thought and symbol: language as (slippery) stepping-stones. W: H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi i A. Sierpińska (red.), *Language and communication in the mathematics classroom* (s. 7–29). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Pirie, S. i Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics*, *9*(3), 7–11.

Radford, L. (2003). On culture and mind: a post-vygotskian semiotic perspective. With an example from Greek mathmeatical thought. W: M. Anderson, A. Saenz-Ludow, S. Zellweger i V. Cifarelli (red.), *Perspective mathematics as semiotic: from thinking to interpreting to knowing* (s. 49–79). Ottawa: Legas Publishing.

Reclik, R. (2012). Schematy graficzne w nauczaniu początkowym matematyki. *Auxilium Sociale Novum*, 3–4, 75–85.

Reclik, R. (2015). Tworzenie reprezentacji graficznych jako wstęp do formalnej matematyzacji. W: H. Kąkol (red.), *Współczesne problemy nauczania matematyki* (t. 6: Prace monograficzne z dydaktyki matematyki, s. 163–184). Bielsko-Biała: Forum Dydaktyków Matematyki.

Rożek, B. (2016). On formal and informal notation of calculation during the early learning of arithmetic by young students. *Annals of The Polish Mathematical Society, 5th Series: Didactica Mathematicae*, 38, 149–174.

Siwek, H. (1988). *Czynnościowe nauczanie matematyki*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Slezáková-Kratochvílová, J. i Swoboda, E. (2006). Kognitywne przeszkody w komunikowaniu się nauczyciel – uczeń. *Annals of The Polish Mathematical Society, 5th Series: Didactica Mathematicae*, 29, 185–207.

Stankiewicz, A. (2016). *Kompetencje studentów nauczania wczesnoszkolnego dotyczące umiejętności wizualizacji matematycznych problemów*. [Niepublikowana praca magisterska.] Jarosław: Państwowa Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(1), 49–92.

Steinbring, H. (2005). The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction. An epistemological perspective (seria: Mathematics education library, t. 38). Berlin–New York: Springer.

Struik, D. (1963). *Krótki zarys historii matematyki do końca XIX w.* Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Wygotski, L. S. (1989). *Myślenie i mowa* (seria: Biblioteka klasyków psychologii). Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Podziękowanie

Serdecznie dziękuję Pani dr Janie Slezákovej z Katedry Matematyki i Dydaktyki Matematyki Uniwersytetu Karola w Pradze (Czechy) za pomoc w przeprowadzeniu obserwacji. Zadanie opisywane w tym artykule było rozwiązywane przez uczniów jednej z praskich szkół podczas zajęć prowadzonych przez studentki Wydziału Pedagogicznego UK, będących formą zajęć fakultatywnych realizowanych pod opieką dr Slezákovej.

Tekst złożony 9 listopada 2016 r., zrecenzowany 11 stycznia 2017 r., przyjęty do druku 10 lutego 2017 r.

Using various representations in the process of solving mathematical problems

Mathematics uses a wide range of representations, but the mathematical symbol is not the only way to code information. Different ways of representing mathematical concepts and relationships are used, especially in the early stages of learning. Generally, the teacher decides on the choice of representational forms to use. But in the process of solving mathematical problems, it is the pupils – not the teacher – who are engaged in the problem-solving, and the coding used should support their cognitive work. This paper analyses how different representations can influence the results of work on an untypical mathematical problem. The task was solved by a group of 7–8 year old pupils participating in a mathematics club. The examples selected for analysis indicate a strong relationship between the choice of representations and the final result of the pupils' work.

KEYWORDS: mathematics, problem solving, mathematical symbols, enactive representation, iconic representation.