L'huilier 2e

2503

GEOMETRYA
DLA
SZKÓŁ NARODOWYCH

CZĘŚĆ I.

Drugi ráz wydaná.

[illegible] oprawy [illegible] 6.

T. L.

W KRAKOWIE 1785. ROKU

w Drukarni Szkoły Główney Koronnéy.

Dziéło: *Geometryá*, ułożoné przez J. P. Lhuilier Obywatela Genewéńskiégo, w Towarzystwo Nauk w témże Mieście ustanowioné policzonégo, które za ogłoszoném w Polsce, i obcych kraiach Uczonych do pisaniá wezwaniém, z pomiędzy innych, potwiérdzénié i nagrodę odebrało, od Towarzystwa do Xiąg Eleméntarnych roztrząśnioné, a przez J. X. Gawrońskiégo Kanonika Koadjutora Krakowskiégo, Lektora J. K. Mci i w témże Towarzystwie zasiadaiącégo, na Polski ięzyk z Francuzkiégo przełożoné, Szkołóm Narodowym do użyciá, podług przepisów naszych, podaiémy. W Warszawie dnia 30. Października Roku 1780.

IGNACY Xżę MASSALSKI Biskup Wiléński, Prezyduiący.
MICHÁŁ Xżę PONIATOWSKI Biskup Płocki.
AUGUST Xżę SUŁKOWSKI Wda Kaliski.
JOACHIM CHREPTOWICZ Podkan. W. X. Lit.
MICHÁŁ MNISZECH Sekrétárz W. L.
HIACYNT MAŁACHOWSKI Referénd. Kor.
IGNACY POTOCKI Pisárz W. W. X. Lit.
ADÁM Xżę CZARTORYSKI Gen. Ziém Pod.
JĘDRZÉY MOKRONOSKI Gen. Inspek. Woysk Kor.
STANISŁÁW Xżę PONIATOWSKI Gen. Lieut. W. K.
FRANCISZEK BIELIŃSKI Star. Czérski.
ANDRZÉY ZAMOYSKI Kawal. Ord. Orła Białé:

ZBIÓR RZECZY ZAWARTYCH W ROZDZIAŁACH TEY XIĘGI.

RO-

SŁO-

SŁOWNICZEK GEOMETRYCZNY,

Zamykaiący w sobie słowa nowé, albo mniéy znané, użyté w téy Xiędze, z przydanémi obok słowami Łacińskiémi tož samo w używaniu Matematyków znaczącémi. *

Bezśrzednie	*Immediate.*
Bok	*Latus.* Сторона.
Cécha	*Characteristica,* Характеристика или показатель.
Celowniki	*Dioptrae,* Прицѣльникъ.
Cienciwa	*Chorda,* Хорда,
Czworokąt	*Quadrilaterum.* Четыреугольникъ.
Dopełnienié	*Complementum.* Прибавка. –
Dostawa	*Cosinus,* Косинусъ,
Dosieczná	*Cosecans.* Косекансъ, дополн...
Dostyczná	*Cotangens.* Котангенсъ.
Dowodzénié	*Demonstratio.* Доказательство.
Forémny	*Regularis.* Правильный.
Jlość	*Quantitas.* Количество.
Kąt	*Angulus.* Уголъ.
Kąt ostry	*Angulus acutus.* Уголъ острый.
Kąt prosty	*Angulus rectus.* Уг. прямой.

Kąt

* W niektórych mieyscach, w wykładzie słów łacińskich na swoyskié nie trzymaliśmy się słownégo tłumaczénia, ale mieliśmy wzgląd na wyráz i bliższy do dokładnégo rzęczy wystawiénia, i stósownieyszy do mowy Oyczystéy.

Kąt roſtwarty	*Angulus obtusus* Уг. тупой
Kąt wewnętrzny	*Angulus internus* Уг. внутренні
Kąt zewnętrzny	*Angulus externus* Уг. внѣшній
Kąt wyskakuiący	*Angulus ſaliens* Уг. исходящій
Kątomierz	*Graphometrum* Гониометръ
Kąty na przemián	*Anguli alterni* Уг. на крестъ
Kąty przyległé	*Anguli adjacentes* Уг. прилежащ.
Kąty przeciwné w wierzchołku	*Anguli ad verticem oppositi.* Уг. въ вершинѣ противопол.
Koło	*Circulus* Кругъ.
Kołowy	*Circularis* Круговой.
Kwadrat	*Quadratum* Квадратъ.
Kwadrat ukośny	*Rhombus* Ромбъ.
Kwadrowanié	*Quadratura* Квадратура.
Łuk	*Arcus*. Дуга.
Naſtępnik	*Consequens* Членъ.
Na odwrot, *albo* odwrotnie	*Inverse* albo *in ratione inversa* На оборотъ.
Niespółmierny	*Incommensurabilis* Несоизмеримый
Obwód	*Perimeter*. Периметръ
Odcinek	*Segmentum*. Сегментъ.
Odwrotny	*Inverſus*. Оборотный
Okrąg	*Circumferentia*. Шаръ.
Opisać	*Inscribere*. Описать.
Oś	*Axis*. Ось.
Oſtrokątny	*Acutangulum* Остроугольный.
Pamiętnik	*Memoriale* Памятникъ.
Pierwiáſtek	*Radix* Корень.
Piąciokąt	*Pentagonum* Пятиугольникъ
Pión	*Perpendiculum* Перпендикуляръ
Pionowy	*Verticalis.* Перпендикулярный
Podanié	*Propositio*, Подание. —
Podſtawa	*Basis* Основание.
Podziáłka	*Scala* Масштабъ.

Po-

Poprzednik	*Antecedens* предыдущий.
Pośrzednie	*Mediate* Центр.
Powierzchniá	*Superficies* Поверхность.
Powietrzniá	*Atmosphera* Атмосфера.
Poziémnie	*Horizontaliter* Горизонт.
Poziomy	*Horizontalis* Горизонтальный.
Prawidło	*Alidada*, albo *Regula*. Правило.
Promień	*Radius* Радиус.
Proſtokąt	*Rectangulum* Прямоугольник
Proſtokątny	*Rectangulum* n p. *Tri-angulum* прямоугольный
Proſtokréślny	*Rectilineus*
Prostopadle	*Perpendiculariter*
Proſtopadły	*Perpendicularis*
Przeciwproſtkątná	*Hypothenusa*
Przedmiot	*Obiectum*
Przekątná	*Diagonalis*
Przenośnik	*Transportator*
Przypuszczénié	*Suppositio*
Przystáwanié	*Convenientia*
Ramié kąta	*Crus Anguli*
Rozprawa	*Diſsertatio*
Roztwartokątny	*Obtusangulum*
Równoboczny	*Æquilaterum*
Równoległobok	*Parallelogrammum*
Równoodległá	*Parallela*
Równoodległé	*Parallelae*
Równowága	*Libella*
Równowážénié	*Libellatio*
Różnoboczny	*Scalenum*
Rozwiązanié	*Solutio*
Sieczná	*Secans*
Skrayny	*Extremus*
Spełnienié	*Supplementum*

Spół-

Spółmierny	*Commensurabilis*
Spółśrzodkowy	*Concentricus*
Srzednica	*Diameter*
Srzodek	*Centrum*
Stanowisko	*Statio*
Stolik Geometryczny	*Tabula Praetoriana*
Stopień	*Gradus*
Stósunek	*Ratio*
Stósunek dwudzielny	*Ratio ſubduplicata*
Stósunek dwumnożny	*Ratio duplicata*
Stósunek ſkładany	*Ratio Composita*
Styczná	*Tangens*
Sześciokąt	*Hexagonum*
Tosamość	*Jdentitas*
Tróykąt	*Triangulum*
Twiérdzénié	*Theorema*
Twiérdzénié przybrané	*Lemma*
Ukośny	*Obliquus*
Warunek	*Conditio*
Wiérzchołek	*Vertex*
Wieszadło	*Pendulum*
Wniosek	*Corollarium*
Wpisać	*Jnscribere*
Wſtawa	*Sinus*
Wykładnik	*Exponens*
Wyproſtowanié	*Rectificatio*
Zasada	*Principium*
Zagádniénié	*Problema.*

GEOMETRYI
CZĘŚĆ PIÉRWSZA
O Liniiach i powiérzchowniach.

ROZDZIÁŁ I.

Wiadomości początkowé o Liniiach prostych, o Obwodzie Koła, i o Kątach.

1. PODRÓŻNY umieiący rachować kroki swoié, potrafi dochodzić iak długá była droga ta, którą odprawił. Strzelec doświádczeniém i wprawą częstą nauczony, osądzi łatwo, ieżeli strzelba iego do zamiérzonégo doniesie célu. Obadwa tak sposobią się do pewnieyszego wyobrażéniá sobie długości i odległości, to iest: do porównaniá ich z témi, które iuż dobrze poznali i wyzna-

czyli. Krok iest taką dlá podróżnégo długością, a śrzedniá ſtrzelby donośność, służy myśliwému do wymiaru innéy odległości.

Té proſté, i inné, im podobné ſposoby wyobrażéniá ſobie długości niewiadomych, użyteczné są w wielu bardzo okolicznościach życiá; gdzie potrzeba osądzéniá prętkiégo, innych dokładnieyszych użyć nie pozwálá. A ponieważ przez częsté sposobów takich używanié, uczymy się chronić tych omyłek, w któréśmy w szczególnych razach wpádać zwykli byli; nie od rzeczy więc będzie wprawiać i tak oko uczących się, tylé iednak, ilé to zgodzić się może z publiczną edukacyą.

Ale iakiéyżekolwiek w téy mierze łatwości nabiorą uczniowie przez częsté wprawianiá się; chybiać wszelako będą w porównywaniu długości bardzo wielkich, lub bardzo małych. Oprócz tego, każdy w szczególności człowiek, używając sposobu wyżéy wspomnionégo, różnéby ieden od drugiégo czynił wyznaczéniá iednéyże nawet długości; a zatém trudnoby ludzie iedni z drugimi zrozumieć się w téy mierze mogli, gdyby się piérwszégo tego w wyznaczaniu długości sposobu trzymali.

2. Z téy pobudki udano się do ustanowiéniá umówionéy pewnéy długości, któ-

rą-

rą na samo weyźrzénié, dokładnie sobie wyobrazić możná było. Do téy stósowano wszystkié inné długości niewiadomé, któré poznać chciano, i dochodzono ich, przykładaiąc wiadomą długość do niewiadomych; długość takowá nazwaná iest *Miarą*.

3. W jednymże kraiu, nie iedna Miara zwykła bydź używaná, według różnych okoliczności, któré się do iéy użyciá zdarzaia. W Polsce na przykład kupieckié niektóré towary, i pomnieyszé na ziémi długości łokciém podzielonym na cále i liniie mierzyć się zwykły. Gdy zaś znacznieyszą iaką długość wymiérzać na ziémi trzeba; używámy do tego sążnia z trzech łokci złożonégo, albo prętu zawiéraiącégo 7.$\frac{1}{2}$ łokci, a ieszcze lepiéy sznura, który 10. prętów zamyká.

Ponieważ té ostatnié miary nic nie są innégo, tylko łokieć kilka razy przydany; dosyć więc będzie wielkości łokcia dokładné sobie wyobrażénié uczynić, aby dokładnie poznać i wielkość miár większych od łokcia. Wszystkié té słowa: *Sznur*, *Pręt*, *Sążéń*, *Łokieć* i t. d. byłyby tylko słowami próżnémi i bez zrozumiéniá, gdybyśmy dokładnégo nié mieli wyobrażéniá, iednéy z tych miary, na przykład łokcia; bo wszystkié naszé wyobrażéniá, któré o wielkościach mámy, są tylko *względnémi* (relativae) iedné do drugich.

4. Kraie różne odmiennych też miár zażywaią: a co ieszcze w opaczne rozumienie wprowadzić może, miary te lubo odmienne, iednemże słowem często się wyrążaią. (a) I tak łokieć Litewski iest $\frac{1}{10}$ większy od łokcia Koronnego; a zatem i inne Litewskie miary, w które łokieć wchodzi, większe będą od miár Koronnych. Łokieć Francuzki, dwa razy prawie iest od Polskiego większy. Mila Niemiecká, zawierá prawie $1.\frac{2}{3}$ mili Francuzkiey, a mila Angielská trzecią tylko iest Francuzkiey mili częścią. (Obacz w 3. Części Arytmetyki, na karcie. 276.

5. W przypádkach, o których mówiliśmy, na samę tylko wzgląd miało się *długość*, wielkości tych, któreśmy uwáżali. W takowym razie mówić się zwykło, że się samemi liniiami zaprzątámy, a w szczególności liniiami *prostémi*, gdy te wyznáczaią odległość, albo náykrótſzą drogę od iednego ich końca do drugiego. Gdyby zaś w tychże sa-

mych

(a) Matematycy z wielką usilnością szukali miary iednostayney, do którey możnáby było stósować wszystkie inne. Rozumieli oni, iż ią znaleźli w długości *Wieszadła prostego* (Pendulum simplex) ustawionego w mieyscu wolnem od zawad, i na powietrzu pomiarkowaném; ale ta materyá należy do Fizyki.

mych liniiach báczył kto szczególniey to mieysce, gdzie się liniiá zaczyná, albo gdzie się kończy, lub gdzie iedna drugą przeciná; wtedy mówiłoby się, że się zaprzątá około *Punktu*. (b)

6. Przez ieden punkt możná tyle liniy rzeczą samą, albo przynáymniey myślą poprowadzić, ile kto zechce. Ale gdy i drugi Punkt ieszcze, w jakieykolwiek od pierwszego odległości, będzie wyznaczony, przez który liniiá prostá má przechodzić; w tym razie położenie téyże linii, iuż się wyznáczá; albo, co na iedno wychodzi, wszystkie Liniie proste, któreby kto przez dwa Punkta dane poprowadził, nie będą tylko iedną i tą samą Liniią. A zatem, gdy dwie Liniie proste schodzą się, lub przecinaią, nie mogą tylko Punkt ieden mieć spólny. Gdy się mówić będzie w szczególności o wymierzaniu na ziemi, powiemy tam, iaką ostrożność mieć potrzeba, gdy wyznaczyć i wymierzyć przychodzi Liniią łączącą dwa Punkta, których odległość iest wielká.

7.

(b) Nie trzeba tych wyrazów mieć za Definicye, ale tylko za szczéré obiaśnienia i wyłuszczénia wyobrażeń, które do tych słów zwykliśmy przywięzywać. Im więcéy kto zastánawiá się nad początkami, na których zasádzaią się naszé wiadomości; tym większą postrzégá trudność w jch wyłożeniu.

7. Na papiérze, aby złączyć dwa Punkta przez Liniią prostą, używamy narzędziá, któré się nazywá *Liniiałém* (Regula) nie spuszczaiąc się na samą rękę i oko; i przystawiwszy tén Liniiáł do dwóch wyznaczonych Punktów, kreślimy pióréin, lub ołówkiém Liniią podaną.

Oprócz wymiaru Liniy prostych, przypádá często zatrudniać się położéniém ich, iednych względém drugich.

8. Gdy dwie Liniie, maią Punkt spólny, mogą bydź do siebie nachylone rozmaitémi sposobami. Abyśmy tę wielość położéń ich, iednych względém drugich dobrze poięli; wystáwmy sobie Liniią iednę prostą na stole na przykład wyrytą, i drugą na niéy naprzód położoną, i zupełnie do niéy przystaiącą, a potém obrácaiącą się około Punktu wyznaczonégo, któryby tym obudwóm Liniióm był spólny. W takowém obrácaniu się, drugá Liniiá odmiénné coráz położéniá i nachyléniá mieć będzie względém piérwszéy. Té rozmaité nachyléniá nazywaią się *Kątami* (Anguli) Punktu, około którégo tá drugá Liniiá obrácała się, nazywá się *Wiérzchołkiém kąta*, (Vertex Anguli.) Liniie, któré nachyléniém swoiém tén kąt czynią, nazwać możná *Ramionami* (po Łacinie zowią takowé Liniie *Crura.*) Pod czas obrácaniá się tey Linii, Punkt którykolwiek

wiek w niéy naznaczony, w iednakiéy zawsze odległości będzie od tego Punktu, około którégo statecznie się Liniiá obrácá: a zatém i wszystkié Punkta śladu od niéy zostawionégo, iednakowo będą odległé od tego Punktu nie wzruszonégo. Jeżeli obrácaiącá się Liniiá zupełny obrot uczyni, że znowu do piérwszégo położéniá, skąd się obrácać zaczęła, powróci; ślad taki od tegoż samégo Punktu zostawiony, nazywá się *Okręgiém koła*, (Circumferentia Circuli) Własność Okręgu stąd wypływaiącá, iest ta: że każdy w nim znáyduiący się Punkt, w równéy od iednégo Punktu zostaie odległości; a tén Punkt nazywá się *Srzodkiem*. (Centrum.) Odległość środka od którégokolwiek Punktu Okręgu, nazywá się *Promiéniém*. (Radius) Część Okręgu, nazywá się *Łukiém* (Arcus), a Liniiá prostá łączącá końce dwa Łuku, nazwać się może *Ciéńciwą*. (Chorda.) Gdy Ciéńciwa ta przechodzi przez śrzodek Okręgu: a zatém dwa razy większá iest od promiéniá, zwać ią będziémy *Śrzednicą* (Diameter.) Dzieli ona okrąg koła, na dwie równé części, które tém tylko różnią się, że iedna z jednéy, a druga z drugiey strony Śrzednicy iest położoná. (c)

9.

(c) Chcąc na papiérze nakréślić Okrąg koła, którégo śrzodek i promiéń mámy wyznaczony; używámy do tego narzędziá nazwanégo pospolicie *Cyrklém* (Circinus.)

9. Po tych Definicyach, (które obiaśnić należy ręczném działaniém tego, co wyrażaią) poydźmy do wyłożeniá początku kątów, z którégo pochodzą.

Jeżeliby Liniiá ruchomá, odprawiła obrotém swoim, połowę, trzecią część, czwártą, piątą i t. d. téy całéy drogi, którą iéy obeyśdź trzeba było, aby do piérwszégo swégo położéniá powróciła; Punkt też którykolwiek téy Linii, odprawił tém samém połowę, trzecią część, czwártą, piątą okręgu zupełnégo, któryby ta Liniiá zrobiła w koło się obróciwszy. Skąd wyniká, że wiérzchołek kąta obráwszy za śrzodek, i od niego iakimkolwiek promiéniém łuk nakréśliwszy; któryby między ramionami kąta zamykáł się; wielkość tego łuku koła względém całégo okręgu, do którégo należy, dá nám poznać wielkość kąta, względém całégo tego mieysca kątowégo (Angularis) któreby iedna z tych dwóch Liniy przeszła, zaczynaiąc się obrácać wtedy, gdy na drugiéy leżała, a nie kończąc się obrácać, aż znowu do niéy przystanie. I przeto łuk tén nazwany iest Miarą (d) kąta między dwóma

---

(d) Tén wyráz *Miara* nie kładzie się tu w ścisłém rozumiéniu; miara albowiém iakiéy ilości właściwie wziętá, powinna bydź tego gatunku, którégo iest ta ilośc, która się mierzy: na przykłád długość iedna mie-

Jan Xankiewicz

ma ramionami zamkniętégo, a zatém tak łuk tén, iako i kąt, iednakowo się powiększaią, albo zmnieyszaią, toiest: staią się razém podwóynémi, potróynémi i t. d.

10. Stąd się okazuie, że wielkość kąta od długości ramion iego nie zawisła: (uwága to iest, nad którą dobrze zastánowić się potrzeba.)

11. Aby sposobém wygodnym wielkość każdégo kąta wyznaczyć przez wielkość łuku między iego ramionami zamkniętégo, którégo promień iest dany; zgodzono się na podzielénié okręgu iakiégożkolwiek na 360. części równych, z których każdá nazywá się *Stopniém* (Gradus.) Przeto ieżeli łuk zamknięty między ramionami kąta, má w sobie 20, 30, 40, i t. d. części takich, iakich okrąg cały má 360; o tym także kącie mówią, że má 20, 30, 40. i t. d. stopniów. (e)

Na

---

rzy się przez długość inną. Łuk zaś koła i kąt, są gatunku różnégo, a zatém łuk koła miarą kąta właściwie wziętą bydź nié może.

(e) W działaniach większéy dokładności wyciągaiących, dzielą ieszcze każdy stopień na 60. części nazwanych *Minutami*, a każdą minutę na 60. *minut drugich* (Minuta secunda, *albo iednêm słowêm*, secunda.)

Znak stopniów, iest: o nad liczbą stopniów napisané. o o o o

Tak n. p. 20^{o}, 21^{o}, 30^{o}, 31^{o}, i t. d. wymáwiá się: dwadzieścia, dwadzieścia iedén i t. d. stopniów.

Na tym gruncie zasadzá się cała robota i używanié narzędziów zdatnych do mierzénia kątów na ziémi, i sposób robiénia tychże kątów na papiérze, któreby iakążkolwiek stopniów podaną liczbę zawiérały. O *narzędziach tych mówić potém będziémy.*

Dlá uniknieniá długości, którąby obszérné każdégo działaniá wykładanié za sobą pociągało, i aby natężéniu myśli pofolgować, zgodzili się Matematycy na pewné nazwiska Punktów, Liniiów, Kątów i t. d. około których maią do czynieniá.

12. Punkt oznáczaią przez iednę tylko literę, n.p. A.B.C.D. i t. d. gdy położénié tego punktu iest wiadomé: a n.p. przez x, y, z, gdy nie wiedzą, ale dopiéro szukaią iego położéniá.

Do oznaczéniá Linii używáią liter, któré na dwóch iéy końcach kładą, ieżeli iest wielkości ograniczonéy: ieżeli zaś w wielkości swoiéy nie iest ograniczoná; tedy na niéy dwa punkta stanowią, i przy nich piszą dwie litery, którémi ią mianuią. Tak n.p. Liniiá łącząca dwa punkta A i B oznaczoná byłaby
Táb. I. *Fig.* 1. témi dwiéma złączonémi literami AB.

Dlá oznáczéniá kąta (ponieważ tén czynią dwie Liniie do siebie się nachylaiące)

iące) kładą trzy litery iednę przy wiérzchołku kąta, drugą i trzecią przy końcu ramion tego kąta: a złączywszy ié razém, i w śrzodku ich położywszy literę nad wiérzchołkiém kąta napisaną, trzéma témi literami kąt wyrażaią. Tak n.p. kąt zrobiony przez dwie Liniie CA. CB. oznaczyliby iednym z tych dwóch wyrazém: ACB. albo BCA. Gdy wiérzchołek nie należy do więcéy iak do iednégo kąta, dosyć będzie oznaczyć kąt tą iedną literą, która iest nad wiérzchołkiém iego. Táb. I. *Fig.* 2.

13. Kiedy ramié ruchomé przez obrot swóy, którymeśmy początek kątów obiaśnili, uchodzi tylko czwártą część całégo okręgu: zrobi takim obrotém swoim dwa kąty równé z tą Liniią, około któréy się obrácá, gdy tę drugą daléy pociągniémy. Té kąty nazywaią się *Prostémi* (Anguli recti), łuk koła, który im za miarę służy, będzie miał w sobie 90. stopni, sama zaś Liniiá ruchomá, będzie w tén czas *Prostopadłą* (perpendicularis) względém drugiéy. (Obácz w piérwszéy części Arytmetyki na karcie 87.) Táb. I. *Fig.* 3.

Gdy to ſamo ramié ruchomé obrotém swoim nie dochodzi czwártéy części okręgu; wtedy kąty między nim i drugiém ramiéniém przedłużoném uczynioné, będą nie równé. Jedén mnieyszy będzie od pro-

prostégo, a drugi większy. Té dwa kąty nazwané są *Przyległémi* (Adjacentes), albo (deinceps positi.) Mnieyszy od prostégo zowié się *Ostrym* (acutus) większy zaś od prostégo, *Roztwartym* (obtusus) a iedna z tych Liniiá nazywá się *Pochyłą* (obliqva) do drugiéy. Kąty DCA. DCB.
Táb. I. *Fig. 4.* są nie równé kąt DCB. iest ostry, a kąt DCA. roztwarty, Liniiá DC. pochyłá do Linii AB.

14. *Summa dwóch kątów przyległych, równá się dwóm kątóm prostym.*

Niech będzie DC. pochyłá do AB. summa kątów: DCB. DCA. równá iest dwóm kątóm prostym.

Jakoż, gdyby Liniiá DC. zrobiwszy obrotém swoim około Punktu C. kąt BCD, daléy się ieszcze obrácała, ażby naostatek przystała do linii CA; byłaby obrotém; takim przeszła dwa katy prosté, ale téż razém byłaby przeszła i kąty BCD, i DCA; więc té dwa kąty są dwiéma częściami summy z dwóch kątów prostych złożonéy, a zatém równaią się dwóm kątóm prostym.

15. Gdyby Liniiá CD, była pociągnioná na drugą stronę linii AB, naprzykłád aż do E; kąty BCD, ACE, nazywałyby się, iedén względém drugiego *Przeciwległémi w wiérzchołku* (ad Verticem oppositi)

siti) : maią oné wiérzchołek C. spólny, a ramiona CA, CE, iednégo z tych kątów, są przedłużeniém ramión CB, DC, drugiégo.

16. *Kąty w wiérzchołku przeciwległé są równé.*

Jakoż w saméy rzeczy kąty: BCD, ACE, mogą bydź uważané, iak gdyby się zrobiły z obrácaniá się Linii ED, około Punktu niewzruszonégo C, zaczynaiąc tén obrot, gdy Liniiá ED, na Linii AB, leżała, aż do położéniá iéy na CE. Tym sposobém Liniiá ED, przez taki swóy obrot nachyli się do Linii AB, równie z jednéy iak i z drugiey strony, a zatém czyni równé kąty DCB, ECA.

Wszystkié té *Podaniá* (Propositiones) któréśmy dotąd przytoczyli, powinny bydź obiaśnioné, wykonywaiąc ié, przez działaniá ręczné, na których się zasádzaią. (f) RO-

(f) Niech się nie obáwiaią Nauczyciele żádnych zarzutów, gdy przez ruch linii tłumaczyć i obiaśniać będą wielé práwd Geometrycznych Ucznióm swoim dopiéro poczynaiącym. Dalecy oni są ieszcze, aby w téy materyi domyślać się mieli subtelności Metafizycznych. Czynić pod ich oczami działaniá około tych rzeczy, którémi się zatrudniać maią, i zmysły ich na nie obrácać, iest to iedén z náyskutecznieyszych sposobów, bácznosć w nich, i uwágę do rzeczy przywiązać, a razém i natężéniu myśli pofolgować.

ROZDZIÁŁ II.

O przystáwaniu Tróykątów, z przystósowaniem do rozwiązaniá wielu Zagádnień.

17. *Definicye:* Mieysce zakończone trzéma Liniiami prostémi, zowie się *Tróykątem prostokréślnym* (Triangulum rectilineum.) My samégo przez się słowa *Tróykąt* używać będziémy. Liniie trzy, w których się *Tróykąt* zamyká, zowiémy *Bokami* Tróykąta (Latera Trianguli.) Takié Liniie zowią także *ścianami*. Tego nazwiska do innégo potém znaczéniá użyiémy. *Przystáwanié*, (Convenientia) i przypádanié Figur iednych do drugich, na którém równość dwŏch iakich Powiérzchni zakłádámy, używané iest często w pospolitych życiá ludzkiégo potrzebach i wygodach. Na obicié na przykłád pokoiów, bierzémy tylé płótna, lub innéy iakiéy materyi, ilé wystárczá na przykrycié ścián iego: i wielkość powiérzchni tego obiciá, nie różni się od ścián powiérzchni, któré pokrywá tylko tém, że ściany są pod obiciem, a obicié na ścianach. Toż mówić o deskach wystárczaiących na podłogę, albo o szybach do okién i t. d. Krawcy o to się stáraią, aby tak suknie lub inné odziéniá wymiérzali, żeby té przystáwały iak náylepiéy do tych ciała części, któré pokrywać maią. Dwie

Xięgi

Xięgi iednakowégo dzieła, dwa obrazy pod iednakowémi wymiarami odmalowané, nie różnią się co do powiérzchni, tylko tém, że nie są iedną rzeczą, ale dwiéma. Miary na zboże, napoie, i t. d. tak się zgádzaią z sobą, że iedna prawie wielość ziarna pewnégo, napełniá korzec iedén, iako i drugi; tylé w jedén garniec, co i w drugi mieści się napoiu i t. d. gdy té miary stósuią się do iednéy ustanowionéy od Zwiérzchności.

18. *Twiérdzénié* (Theorema). Jeżeli w dwóch Tróykątach, dwa boki w jednym, równé są dwóm bokóm drugim, i kąty między témi bokami zawarté równé, trzeci téż bok iednégo, równy będzie trzeciému bokowi drugiégo, i katy przy tych bokach równych będącé, w jédnym i w drugim Tróykącie będą równé.

Niech będą dwa Tróykąty: ABC, abc, których boki: AC, ac, są równé, boki téż BC, bc, równé i kąty: C, i c, równé. Dowiéśdź trzeba, że i boki: AB, ab, i kąty A, i a, iako téż B, i b, będą równé. Táb. I. *Fig.* 5.

Dowodzénié (Demonstratio.) Wystáwmy sobie Tróykąt: abc, iakoby oderwany (co téż odstrzygszy go, i w rzeczy saméy wykonać możná) i przeniesiony na Tróykąt: ABC, w tén sposób, aby położywszy liniią ca, na linii CA, liniiá téż cb, przystała do linii CB, (co dlá ró-

wno-

wności kątów C, i c, nastapić powinno.) Ponieważ liniia ca, równa iest linii CA; a liniia cb, linii CB, Punkta a, i b, przypadną na punkta A i B; a zatém i liniie ab, i AB, będą przez té samé punkta zakończoné. Więc té dwie ostatnié liniie przykryią się zupełnie iedna drugą; a zatém będą równé, i zrobią z liniiami ca, CA, cb, CB, kąty równé a, i A, iako téż b, i B.

19. *Uwága.* Dwa Tróykąty cab, CAB, nie różnią się od siebie, tylko przez to, że odmiénné mieyscé zastępuią. O takich więc dwóch Tróykątach, a w powszechności i o każdych dwóch figurach, samém tylko położéniém mieysca różniących się mówimy, że do siebie *przystawać mogą.*

20. *Przystósowanié: Jeżeli w jednym Tróykącie, dwa boki są równé, będą téż równé i dwa kąty przy nich leżącé.*

Táb. I. Fig. 6. Niech będzie Tróykąt ABC, którégo boki AC, BC, są równé; kąty też A i B, będą równé.

Wystáwmy sobie, że tén Tróykąt ABC, wybity iest na drugiém mieyscu tak, żeby bok CA, w wybitym Tróykącie, to miáł położénié, co bok CB, w Tróykącie piérwszym, a znowu bok CB, aby w drugim, na téy stronie leżáł na któréy bok CA, w piérwszym: ponieważ kąt C, iest iednakowy w obudwóch tych Tróykątach

kątach, położywszy tedy drugi Tróykąt na pierwszym; bok CB, i CA, Tróykąta wybitego przystanie zupełnie pierwszy CB, do boku CA, drugi CA, do boku CB, Tróykąta pierwszego, a zatém i Punkta B, i A, należące do Tróykąta wybitego, leżeć będą na punktach A, i B, należących do pierwszego Tróykąta. Więc drugi Tróykąt przeniesiony na pierwszy, będzie mógł przystać do niego: a przeto kąty B i A, tego Tróykąta równe będą, pierwszy kątowi A, drugi kątowi B, Tróykąta podłożonego. Aże kąt A, w tym podłożonym Tróykącie, iest równy także kątowi A drugiego Tróykąta; więc kąty A i B, Tróykąta podłożonego są równé kątowi A, w Tróykącie na nim położonym; a zatém kąty A i B, są sobie równé.

Następuiące tegóż twiérdzéniá dowodzénié, zastanáwiá prawie wszystkich poczynaiących, i wielu iest zdaniá, lubo często zawodnégo, że w zrozumiéniu tego dowodzéniá, daie się poznáwać poiętność Ucznia i sposobność do Geometryi.

Niech będzie Tróykąt CAB, którégo boki AC. CB, są równe; kąty CAB, CBA, będą też równé. Táb. I. Fig. 7.

Przygotowanié. Na liniiach CA, CB, przédłużonych, weźmy iakiekolwiek linie równé, naprzykłád: AD, BE, i poprowádźmy BD, AE.

Dowodzénié. Ponieważ liniie CA, CB, są równé, a liniie téż AD, BE, wzięté są równé; więc w Tróykątach: DCB, ECA, gdzie kąt C iest spólny, ramiona CB, i CA, CD, i CE, tego kąta równé będą; a zatém te dwa Tróykąty przystać do siebie mogą; (18) a w szczególności liniie AE, BD, i kąty przy D i E, rowné będą.

W Tróykątach: ADB, BEA, boki AD, BE, są równé, dowiodło się téż, że liniie BD, AE, są także równé, i że równé są kąty w tych ramionach zawarté przy D, i E; więc té Tróykąty mogą do siebie przystać: a w szczególności kąty: DAB, EBA, są równé, a zatém i im przyległé: CAB, CBA, będą równé.

21. Gdyby wszystkié trzy boki w Tróykącie były równé; trzy także kąty w nim równéby były.

22. *Definicye.* Gdy w Tróykącie dwa boki są równé: taki Tróykąt zowiémy *Równoramiénnym* (Jsosceles albo Aequicrurum.) Gdy w Tróykącie boki trzy będą równé; nazwiémy go *Równobocznym* (aequilaterum.)

Gdy w Tróykącie wszystkié trzy boki nierówné będą, zwać go będziémy *Różnobocznym* (Scalenum.)

23.

23. *Twierdzénie* 2. Gdy dwa Tróykąty, maią bok iedén równy, i gdy dwa kąty przy tym bóku iednégo troykąta, równé są względém dwóch kątów przy boku równym drugiégo Tróykąta; trzeci téż kąt w jednym Tróykącie, równy będzie trzeciému kątowi w drugim; i dwa inné boki, równé względém siebie będą w obudwóch tych Tróykątach.

Niecháy naprzykład w dwóch Tróykątach: ABC, abc, boki AB, ab, i kąty A i a, B i b, będą równé; będzie i kąt C, równy kątowi c; boki AC, ac, i boki także BC, bc, będą równé. Táb. I. Fig. 5.

Dowodzénie. Wystáwmy sobie Tróykąt abc, przeniesiony na Tróykąt ABC, i na nim położony, tak, aby Punkt *a*, postawiwszy na Punkcie A, liniiá ab, równá linii AB, na niey leżała. Ponieważ kąt *a*, równá się kątowi A, i kąt *b*, kątowi B; liniiá téż *ac*, przystanie do linii AC: a liniiá bc, do BC; Punkt tedy *c*, musi się znáydować razém i na linii AC, i na linii BC; a zatém znáydować się będzie na ich spólném przecięciu C. Więc Tróykąt abc, zupełnie przystanie do Tróykąta ABC, a przeto liniie ac i bc, równé będą liniióm AC, BC, tak, iako i kąt c, równy kątowi C.

24. *Przystósowanié.* Jeżeli w Tróykącie, kąty przy *Podstawie* (ad basim) są równé; taki Tróykąt będzie *Równo-*

ramiénnym. Dowodzénié tego podobné iest wcale dowodzéniu położonému w przystósowaniu piérwszégo Twiérdzéniá (20.) Jeżeli Tróykąt má wszystkié trzy kąty równé, będzie Równobocznym.

25. *Twiérdzénié* 3. Gdy w dwóch Tróykątach, boki trzy iednégo, równé są trzém bokóm drugiégo; i kąty też trzy w jednym, będą równé trzém kątóm w drugim, a té dwa Tróykąty mogą przystać do siebie.

Tab. II. *Fig.* 1. *i* 2. Niech będą dwa Tróykąty ABC, abc, takié, aby bok AB, w piérwszym równy był bokowi ab, w drugim, podobnie iak i boki AC, BC, równé bokóm ac, bc, té dwa Tróykąty mogą przystać do siebie.

Dowodzénié. Wystáwmy sobie Tróykąt abc, przeniesiony i położony pod Tróykątém ABC, tak, iak go wyrážá na figurze Tróykąt ABD. Poprowádźmy liniią CD. Ponieważ liniie CB, BD, są obiedwie równé linii cb, są też i sobie równé; więc i kąty: BCD, BDC, są równé (23.) Podobnie kąty ACD, ADC, są także równé: a zatém i kąty: ACB, ADB, równé będą.

Więc dwa Tróykąty: ACB, ADB, mogą przystać do siebie. Ale że też Tróykąty: ABD, i abc, przystać do siebie

bie

bie mogą; więc przystaną także i Tróykąty: ABC, abc.

26. *Uwága.* Położénié linii CD, może bydź troiakié, bo może albo przecinać liniią AB, między punktami A i B, albo może przez który z tych dwóch punktów przechodzić, albo nawet i przez przedłużénié téyże linii AB. Dowodzénié toż samo iest we wszystkich trzech razach.

27. *Zagádniénié.* (Problema.) Maiąc dané dwa Punkta, znaleźć trzeci, któryby od każdégo z tamtych, w jednakowéy był odległości.

Rozwiązanié (Solutio.) Od iednégo i od drugiégo z punktów danych, poprowadziwszy łuk koła promiéniém większym od odległości tych dwóch Punktów; tam gdzie się té dwa łuki przecinać będą, będzie punkt, którégo szukámy.

28. *Uwága.* Na rozwiązaniu tego, lubo tak łatwégo zagádniéniá, zasádzá się *Wykréślénié* Geometryczné wielu innych Zagádnień. Wykréślénié to zowią po Łacinie *Constructio*, lubo tego samégo słowa zażywaią także *Matematycy* na oznaczénié przygotowaniá poprzedzaiącégo dowodzénié, przez kréślénie pewnych liniy potrzebnych do tegoż dowodzéniá. My przykładém ich, w obudwóch także razach, używać będziémy tego słowa *Wykréślénié.*

29.

29. *Zagádnienié* 2. Daną liniią prostą, podzielić na dwie części równé.

Rozwiązanié. Sposobém w poprzedzaiącém Zagádnieniu wyrażonym, znáydźmy po obudwóch linii téy stronach dwa punkta, któréby od końców iéy iednakowo były odległé; złączmy té dwa punkta liniią prostą, ta przetnie w jednym punkcie liniią daną, i w tém przecięciu będzie punkt podziáłu żądanégo.

Táb. II. *Fig. 3.* Niech będzie liniiá daná AB, C Punkt równo-odległy od A i B, końców linii danéy, D, drugi punkt, podobnie także odległy. Punkt X, gdzie liniiá CD, przecina liniią AB, dzielić będzie na dwie rowné części liniią daną.

Wykréślénié, (Constructio.) Pociągniymy liniie AC, BC, AD, BD.

Dowodzénié. Tróykąty: CDA, CDB, maią trzy boki równé iedné drugim; a zatém (25.) mogą przystać do siebie, a w szczególności, kąt ACD, równy iest kątowi BCD. Więc Tróykąty ACX, BCX, mieć będą boki AC, i BC, równé, bok CX, spólny, i kąt także w tych ramionach zamknięty równy; więc (24.) té dwa Tróykąty mogą do siebie przystać, i liniie AX. i BX. są równé.

30. *Defin:* Gdy w Tróykącie, albo w jakiéykolwiek innéy figurze, bok ieden.

dén będzie przedłużony; kąt, który się między tém przedłużéniém i bokiém przyległym zrobi; nazywá się *Zewnętrznym* (externus) tego Tróykąta, lub innéy figury.

31. *Twiérdzénié* 4. W Tróykącie, zewnętrzny kąt większy iest od iednégo z wewnętrznych na przeciwko niego położonych.

Niech będzie Tróykąt ABC, którégo bok AB. przedłużony iest według upodobaniá ku D; kąt zewnętrzny CBD, większy iest niżeli iedén ze dwóch wewnętrznych, naprzykład C. Táb. II. *Fig.* 4.

Przygotowanié. Przetniymy na połowę w punkcie E, bok BC, i poprowádźmy liniią AE, aż do F, aby FE, równała się AE; pociągniymy ieszcze i liniią BF.

Dowodzénié. Tróykątów: AEC, FEB, kąty przeciwné w wiérzchołku E, są równé, i ramiona tychże kątów równé, z wykréśléniá. Więc dwa té Tróykąty, mogą do siebie przystać (18.) a w szczególności kąt C, równy iest kątowi EBF, który kat EBF, iest tylko częścią kąta CBD. Przeto kąt cały CBD, większy iest od kąta C, równégo kątowi EBF.

32. *Wniosek*. (Corollarium.) Summa dwóch iakichkolwiek kątów w Tróyką-

cie,

cie, mnieyszá iest od dwóch kątów prostych. Ponieważ albowiém kąt CBD, większy iest od kąta C, Summa kątów CBD, ABC, większá będzie od Summy kątów C, i ABC; a że summa dwóch kątów piérwszych, wáży tylé cò dwa kąty prosté, bo iest summą dwóch kątów przyległych (14) więc ta drugá summa mnieyszá iest od piérwszéy.

Idzie zatém, że ieżeli w Tróykącie, będzie kąt iedén prosty, albo téż roztwarty, dwa inné, nié mogą bydź tylko każdy z nich ostry.

33. *Definicye.* Jeżeli Tróykąt zawiérá w sobie kąt prosty, zowié się *Prostokątnym* (Triangulum Rectangulum.) Jeżeli má kąt roztwarty, nazwać go możná *Roztwartokątnym* (Obtusangulum.) Jeżeli wszystkié trzy kąty má ostré, zwać się będzie *Ostrokątnym* (Acutangulum.)

34. *Twiérdzénié 5.* Gdy w dwóch Tróykątach, bok iednégo będzie równy bokowi drugiégo, i kąt tym bokóm przyległy równy iedén drugiému, a kąt nieprzyległy tym bokóm, także równy w obudwóch Tróykątach; dwa té Tróykąty mogą przystać do siebie.

Tàb. II. Fig. 6. Niech będą dwa Tróykąty ABC, abc, maiącé dwa boki AB, ab, równé, kąty A, i a, przy tych bokach równé, i kąty

C,

C, i c, równé. Té dwa Tróykąty mogą do siebie przystać.

Dowodzénié. Przenieśmy Tróykąt abc, na Tróykąt ABC, tak, aby bok ab, przystáwszy do boku AB, bok téż ac przystáwáł do boku AC; (co dlá równości kątów a, i A, nastąpić powinno.) Gdyby Punkt c, nie przypádł na punkt C, toby przypádł albo między punktami A i C, naprzykłád na d, albo daléy za punktém C, na linii AC, przedłużonéy, naprzykłád na D; w piérwszym razie, kąt AdB, albo C, byłby zewnętrzny Tróykąta CBd, a zatém większy od kąta C. W drugim razie kąt C, byłby zewnętrzny Tróykąta CBD, a zatém większy od kąta D, albo c; co w obudwóch razach, iest przeciwko podaniu, bo kąty C, i c, dané, są równé. Więc liniiá ac, przeniesioná na AC, nie gdzie indziéy kończyć się będzie, iak na punkcie C, a zatém Tróykąty BAC, bac, mogą przystać do siebie. (18.)

35. *Twiérdzénié 6.* W każdym Tróykącie, ieżeli bok iedén większy iest od drugiégo; i kąt téż na przeciwko boku piérwszégo, większy będzie od kąta drugiému bokowi przeciwnégo.

Niech będzie Tróykąt ABC, któré go bok AC, większy od boku BC; będzie téż i kąt ABC, większy od kąta A. Táb. II. *Fig.* 5.

Przygotowanié. Na boku AC, większym, weźmy CD równą CB, i od D poprowádźmy DB. *Dowo-*

Dowodzénié. Tróykąt równoramiénny BCD, má kąty CBD, CDB, równé: kąt CDB iest zewnętrzny Tróykąta BAD; więc iest większy niżeli kąt A; a zatém i kąt CBD większy będzie od kąta A; dopiéroż kąt CBA większy iest od tegoż kąta A.

36. *Twiérdzénié* 7. Gdy w Tróykącie, większy iest kąt iedén od drugiégo; bok na przeciwko piérwszégo kąta, większy téż będzie od boku przeciwnégo drugiému kątowi.

Dowodzénié. Gdyby bok przeciwny piérwszému kątowi, był równy albo mnieyszy od boku drugiému kątowi przeciwnégo, piérwszy téż kąt byłby równy drugiému, albo od niego mnieyszy. (35.) Ale przez podanié, tén piérwszy kąt nie iest ani równy, ani mnieyszy od drugiégo; więc téż i bok tému piérwszému kątowi przeciwny, nie będzie ani równy, ani mnieyszy od drugiégo boku; a przeto będzie większy od niego.

37. *Uwága.* W tém twiérdzéniu użyliśmy piérwszy ráz dowodzéniá *zbocznégo*, albo *przez niepodobność*. Po Łacinié piszący, nazywaią takié dowodzénie: *Demonstratio indirecta*, albo *per absurdum*. Okazuie się tym sposobém, że wszelkié inné odmiénné w téy mierze utwiérdzénié, byłoby fałszywém: a zatém to tylko iest práwdziwé, którégo dowodzimy.

38.

38. *Wnioski.* Ponieważ w Tróykącie prostokątnym i w Troykącie roztwartokątnym, kąt prosty, i kąt roztwarty, są z trzech kątów náywiększémi; przeto téż boki naprzeciwko takich kątów leżącé, będą náywiększé.

A stąd między wszystkiémi liniiami poprowadzonémi od tegoż samégo punktu, od iednéy linii, náymnieyszá iest liniiá prostopadłá. Innė liniie pochyłé, tym większé będą, im dalszé od prostopadłéy. Dwie także liniie pochyłé, równéy wielkości, od Punktu tegoż samégo poprowadzić można; a nie więcéy, i té od prostopadłéy równie będą odległé.

Stąd téż wypływá, że liniiá prostá, nié może przecinać okręgu koła w więcéy, iak we dwóch punktach, a to w tych, których odległość od śrzodka koła, równá się promiéniowi tegoż koła: bo ínaczéy więcéy niż dwie liniie równé, możnáby poprowadzić od iakiégo punktu do trzeciéy linii.

39. *Defin:* Liniiá prostopadłá, spuszczoná od iakiégo punktu na inną liniią, nazywá się *odległością* tego punktu od linii, na którą spádá: a to dlá tego, że ta liniiá iest náykrótszą między wszystkiémi innémi, któréby od tegoż punktu możná poprowadzić do téy sáméy linii.

40. *Twiérdzénié*. 8. W Tróykącie summa dwóch boków, większá iest od boku trzeciégo.

Táb. II. *Fig.* 7. Niech będzie Tróykąt ABC, Summa dwóch boków AB, BC, większá iest od boku AC.

Wykréślénié. Pociągnąwszy daléy bok AB, weźmy BD, równą BC, i złączmy ich końce liniią CD.

Dowodzénié. W Tróykącie równoramiénnym BCD, kąty C i D, są równé; więc w Tróykącie ACD, kąt ACD, większy iest od kąta D; a zatém i bok AD, większy będzie od boku AC: a że AD równá się summie boków AB, BC, więc i ta summa boków iest większá od boku AC.

41. *Uwága*. To twiérdzénié służyć nám może po części za obiaśniénié w tém, które iuż mámy, naturalnym linii prostéy wyobrażéniu. Widzimy tu oczywiście, że liniiá prostá, którá łączy dwa Punkta, mnieyszá iest, niżeli summa dwóch innych liniy do tychże Punktów poprowadzonych od punktu takiégo, który się nie znáyduie na linii łączącéy té dwa punkta.

42. *Twiérdz*: 9. Jeżeli od śrzodka Linii prostéy wyprowadzimy prostopadłą; każdy Punkt w téy prostopadłéy,

będzie

będzie równo odległy od obudwóch końców linii pierwszey; każdy zaś inny Punkt za tą prostopadłą wzięty, nie iednakową od tychże końców odległość mieć będzie.

Niech będzie prostopadłá CD, do śrzodka C, linii AB. Táb. II. *Fig.* 8.

Naprzód: Odległości DA, DB, Punktu któregokolwiek D, wziętego na linii CD, od Punktów A i B. są równe.

Dowodzenie. W Tróykątach ACD, BCD, kąty proste przy C, są równe, i ramiona przy tych kątach równe; więc dwa te Tróykąty mogą przystać do siebie; a zatem liniie AD, i BD są równe.

Powtóre: Niech będzie Punkt E, za prostopadłą DC, liniie EA, EB, nierówne będą.

Niech liniiá AE, przechodzi przez Punkt D, należący do prostopadłey CD; od Punktu tego poprowádźmy liniią DB.

Dowodzenie. Liniie AD, BD, są równe, iako się iuż dowiodło: więc liniiá AE, równá się summie Liniy BD, DE. A że w Tróykącie BDE, summa boków BD, DE, większá iest od bóku BE; więc też liniiá AE, większá iest od linii BE.

Zwy-

Zwykło się krócéy ieszcze to twiérdzénié tak wyrażać: *Liniiá prostopadłá, z pośrzodka innéy linii wyprowadzoná, iest mieyscém* (Locus) *wszystkich punktów oddalonych iednakowo od obudwóch końców téyże linii.* (g)

43. *Zagádniénié* 3. Od punktu danégo na linii prostéy wyprowadzić liniią prostopadłą.

Rozwiązanié. Weźmy na danéy linii dwa inné Punkta, iednakowo od punktu danégo odległé; od każdégo z tych dwóch punktów, iako od śrzodka (a centro) iednakowym promiéniém, większym iednak, niż iest odległość tych dwóch punktów od punktu danégo, nakreślmy dwa łuki przecinaiącé się. Punkt dany, i drugi w przecięciu znaleziony złączmy z sobą liniią prostą, ta będzie prostopadłą, któréyśmy szukali.

44. *Zagádniénié* 4. Od punktu danégo za liniią prostą, spuścić na nię liniią prostopadłą.

Ro-

(g) Ponieważ liniiá prostá, przez dané położénié dwóch Punktów, iest iuż tém samém wyznaczoná; ieżeli tedy przez dwa inszé Punkta, z których każdy iednakową má od obudwóch punktów danych odległość, poprowadzimy liniią, ta, w śrzodku linii łączącéy dwa punkta dané, będzie prostopadłą.

Rozwiązanié. Znáydźmy dwa punkta na linii danéy, iednakowo odległé od punktu danego; kreśląc od niego iako od śrzodka, iednakowym promiéniém, dwa łuki przecinaiącé we dwóch punktach liniią daną; szukáymy inszégo ieszcze punktu równie od dwóch przecięciá punktów odległégo. Liniiá łącząca tén punkt znaleziony, i drugi dany, iest tá sama prostopadła, któréyśmy szukali.

45. *Zagádniénié* 5. 1. Na danéy linii wystawić Tróykąt równoboczny.

2. Na danéy linii wystawić Tróykąt równoramiénny, którégo iedén bok iest wiadomy.

3. Na danéy linii wystawić Tróykąt, którégo dwa inné nierówné boki są wiadomé.

Rozwiązanié: 1. Z dwóch końców linii danéy, promiéniém równym téyże linii, pociągnąć trzeba po iednéy stronie dwa łuki, i punkt ich przecięciá złączyć z końcami linii danéy.

2. Z dwóch końców linii danéy, promiéniém równym linii, która ma służyć za ramié Tróykąta równoramiénnégo, pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięciá poprowadzić dwie liniié do końców linii danéy.

3.

3. Z dwóch końców linii daney, promieniami odmiennemi, równemi w długości liniiom maiącym służyć za boki do Tróykąta, pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięcia, poprowadzić dwie liniie do końców linii daney.

Przestroga. Summa dwóch liniy danych, powinna bydź większa od trzeciey linii także daney. (40.)

46. *Definicya.* Gdy uważamy Tróykąt, ile wystawiony iest na iakiey prostey linii; taka linia nazywa się *Podstawą* (Basis) Tróykąta, a kąt naprzeciwko iey stoiący nazywamy *Wierzchołkiem Tróykąta* (Vertex Trianguli.)

47. *Przystosowanie.* Przerysować Tróykąt dany.

Rozwiązanie: Weźmy ieden z boków Tróykąta za Podstawę onego. Podstawę tę przenieśmy na insze mieysce, i od końców iey promieniami, dwóm innym bokóm równemi, nakreślmy dwa łuki, a od punktu ich przecięcia, poprowadźmy dwie liniie do końców podstawy; iuż tem samem przerysowany będzie Tróykąt dany, na inny iemu we wszystkiem równy.

48. *Zagadnienie 6.* Maiąc dany kąt iaki, zrobić mu drugi równy, któryby

miał

miáł za iedno ramię liniią daną, a za wierzchołek punkt na tey linii także dany.

Rozwiązanie. Zaczynaiąc od wierzchołka kąta danego, wziąźć trzeba na iego ramionach dwie iakiekolwiek liniie równe i końce ich złączyć trzecią liniią; zrobi się tym sposobem Tróykąt. Od punktu danego na linii także daney, przenosi się długość, wzięta na iedném ramieniu kąta danego, i na niey iak na podstawie, przerysuie się Tróykąt, pierwszému ze wszystkiém równy (47.)

49. *Przystósowanie.* 1. Zrobić Tróykąt, którego wiadome są dwa ramiona, i kąt między niemi.

2. Zrobić Tróykąt, którego wiadomá podstawa, i dwa przy niey kąty.

50. *Zagádnienie* 7. Zrobić Tróykąt, którego dany iest kąt iedén, i dwa boki, iedén przyległy kątowi danému, drugi naprzeciwko niego leżący.

Uwága. Kąt dany może bydź *prosty*, *rozłwarty*, albo *ostry*. W pierwszych dwóch razach, bok przeciwny kątowi danému, powinién bydź większy od boku przy kącie będącego. (38) W trzecim razie, bok przeciwny kątowi, może bydź większy lub mnieyszy od drugiego. We wszystkich tych razach, zróbmy kąt równy danému, i dáymy mu za ramię, liniią równą daney, a maiącey mu służyć za toż ramię.

Z końca tey Linii promieniem równym bokowi danemu, który má leżeć na przeciwko kąta danego, pociągniymy łuk, któryby przecinał drugie tegoż kąta ramię. Punkt przecięciá oznaczy koniec drugiego ramienia kąta.

Táb. II. Fig. 9. i Táb. III, Fig. 1, 2, 3.

Niech będzie C wierzchołek kąta danego, liniiá CA równá linii daney za ramię tego kąta, i niech łuk kreślony od punktu A, iako od śrzodka, promieniem równym linii drugiey daney (która ma służyć za bok przeciwny kątowi C;) przeciná drugie ramię w punktach B, i b.

1. Gdy kąt C iest *Prosty*; dwa Tróykąty: ACB, ACb, mogą przystać do siebie; bo liniie pochyłe rowne AB, Ab, iednakowo są od prostopadłey AC odległe, a zatem CB i Cb są równe.

W innych razach spuśćmy liniią prostopadłą AD.

2. Gdy kąt C iest *Roztwarty*, albo *ostry*, ale liniiá AB, większá od AC; w tym razie liniie pochyłe i równe AB, Ab, dalsze są od prostopadłey AD, niżeli liniiá pochyłá AC; a zatem z dwóch Tróykątów ACB, ACb, ieden tylko Tróykąt ACB wypełniá trzy założone *Warunki* (Conditiones.)

3. Gdy kąt C iest *ostry*, ale liniia AB mnieysza od AC; dwie liniie pochyłe i równe: AB, Ab, będą bliższe prostopadłey AD, niżeli liniia AC; a zatém Tróykąty ACB, ACb, lubo sobie nierówne, obadwa iednak wypełnią trzy założone warunki.

Powtorzénié przypadków, w których dwa Tróykąty mogą przystać do siebie, albo w których Tróykąt wyznaczony iest przez wiadomość dostateczną boków i kątów iego.

1. Dwa boki i kąt między niémi.

2. Bok iedén i dwa przy nim kąty.

3. Trzy boki.

4. Dwa boki i kąt prosty nie między niémi zawarty.

5. Dwa boki i kąt roztwarty nie między niémi zawarty.

6. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niémi, i gdy bok przeciwny danému kątowi iest náywiększy.

7. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niémi, i gdy bok przeciwny kątowi danému iest náymnieyszy. (Tén przypádek iest wątpliwy) bo dwoiakim sposobém Tróykąt czyni zadosyć trzém warunkóm.

51. *Uwága* 1. Nietylko z tych, któręśmy tu wymienili wiadomości, ale i z jnnych ieszcze wyznaczyć można Tróykąt. Té iednak, któré się tu wspomniały przypádki, náyczęściéy zdárzać się zwykły, i wszystkié inné mogą się pod nié podciągnąć.

Cztéry ostatnié przypádki mogą bydź ściągnioné do iednégo. (Obácz w Rozd: 10. Twiérdz: 5.) Ale przy początkach lepiéy ié osobno podáwać.

52. *Uwága* 2. Samé tylko Tróykąty są takiémi figurami, gdzié wiadomość trzech boków iuż iest dostateczná do wyznaczénia Tróykąta. Okázać to w prostym przykładzié można na *Czworoboku*, albo *Czworokącie* (Quadrilaterum,) którégo wszystkié boki są równé. Chociáż albowiém wiedzieć będziémy boki wszystkié tego Czworoboka; nie potrafimy iednak oznáczyć iaki Czworokąt stąd wyniknie, bo tym bokóm różné dadź możémy nachylénié; a zatém i Czworokątowi odmienną dadź możémy figurę. Tak n.p. ieżeli dámy mu kąty wszystkié prosté, zrobi się *Kwadrat*: ieżeli dámy dwa kąty ostré, a dwá roztwarté, zrobi się Czworokąt pochyły tym bardziéy, im ostrzszé iedné kąty, a drugié roztwartszé mieć będzie.

53. *Twiérdz:* 11. Liniiá prostá przecinaiącá kąt na dwie części równé, każdy

żdy w sobie punkt mieć będzie iednakowo odległy od obudwóch ramión tegoż kąta: a wszelki inszy nie na tey linii Punkt, nie tak odległy będzie od iednégo ramieniá tego kąta, iak od drugiégo.

Niech będzie kąt: ACB, który na dwie części przeciná liniiá CD; ieżeli Punkt iaki na niey, naprzykład D, weźmiémy, liniie prostopadłé DE, DF, do ramión tego kąta spuszczoné, będą równé. Táb. III. *Fig.* 4.

Dowodz: Dwa Tróykąty prostokątné CDE, CDF, które bok CD spólny maią, i kąty przy C równé, mogą przystać do siebie (18.) więc liniie DE, DF, są równé.

Niech znowu będzie Punkt G, nie w linii CD; prostopadłé GE, GH, będą nierówné.

Niech albowiém prostopadłá GE, spotyká w punkcie D, liniią CD, która na dwie części dzieli kąt ACB. Od Punktu D, spuśćmy prostopadłą DF, i poprowádźmy GF.

W Tróykącie DFG, summa linii FD, DG, większá iest od boku FG; ale ta summa linii FD, i DG, równá się linii EG; więc liniiá EG, większá iest od linii FG. A że znowu liniiá GF, większá iest od linii GH, (38.) więc tym bardziey liniiá EG, większá będzie od linii GH.

54. *Uwága.* Liniiá prostá, którá przedziéla kąt na dwie równé części, nazywá się *Mieyscém* wszystkich Punktów, których odległość iednakowá iest od dwóch liniy danych.

55. *Zagádn:* 8. Dány maiąc kąt, na dwie części go podzielić.

Rozwiązanié. Od wiérzchołka tego kąta, wziąwszy na ramionach iego dwie liniie równé, z końców ich kréślę dwa łuki iednakowym promiéniém. Przez ich przecięcié, i przez wiérzchołek kąta, prowadzę liniią, ta dzielić będzie kąt na dwie równé części.

56. *Wniosek.* Będzie téż możná każdą z tych połowę podzielić daléy na dwie równé części, te znowu na dwie i t. d. Przeto każdy kąt może bydź (przynáymniéy myślą) podzielony, na 2, 4, 8, 16, i t. d. części równych.

ROZDZIÁŁ III.

O Liniiach równo-odległych i o równo legło-bokach.

57. *Twiérdzénié* 1. Niech będzie liniiá prostá, od któréy dwóch punktów wychodzą dwie liniie prostopadłé. Té prostopadłé nigdzie się nie zniydą, choć-

choćbyśmy ié náybardziéy przedłużali.

Dowodz: Gdyby té prostopadłé, gdzie się zeszły, zrobiłyby z trzecią liniią, od któréy są wyprowadzoné, Tróykąt maiący dwa kąty prosté; a to iest niepodobná.

58. *Defin:* Dwie liniie na *Płaszczyznie* (Planum) poprowadzoné, gdy się zeyśdź z sobą nié mogą, nazwané są *Rowno-odległé* (Parallelae.)

W ogólności zaś mówiąc: iakiékolwiek liniie dwie prosté od trzeciéy przecięté iednakowo z jednéy strony nachylaiącé się do téy trzeciéy linii, są równoodległé.

59. Niechby naprzykład liniie CF, DG, przecięté w punktach A, i B, od linii HE, miały kąty, CAE, DBE, równé; te dwie liniie nié mogą się nigdzie zeyśdź z sobą. Gdyby albowiém gdzie się zeszły, w Tróykącie z nich i z trzeciéy linii AB złożonym, byłby kąt zewnętrzny DBE, równy iednému z wewnętrznych CAE; co bydź nié może. (31.) Táb. III. Fig. 5.

60. *Wniosek:* Ponieważ kąt HBG, równá się kątowi DBE, (16.) a kąt HAF kątowi CAE, możná podobnie dowiéśdź że liniie CF, DG, nie zeydą się ani z drugiéy ſtrony linii HE.

61. *Defin:* Kąty DBE, CAE, nazwać można *Iednostronne*, podobnie, iako i kąty: DBH, CAH; EBG, EAF; GBH, FAH, kąty: DBH, CAE, nazywaią się *Wewnętrzné* (Interni) takié też są i kąty: FAE, GBH. Kąty: FAE, DBH, nazwać można kątami na przemián, toiest na przemián ległémi (po Łacinie zowią się *Alterni*) toż nazwisko daie się i kątóm CAE, GBH.

Té Definicye znać dobrze Uczniowie powinni.

62. Kąty przyległé: DBE, DBH, czynią razém dwa kąty prosté: (14.) ale że kąt DBE równá się kątowi CAE, dlá równéy pochyłości obudwóch liniy DB, i CA, do linii HE; więc i kąty wewnętrzné: DBH, CAE, razém wzięté równé będą dwóm kątóm prostym.

63. Kąty w wiérzchołku przeciwné DBE, HBG, są równé (16.) więc i kąty na przemián CAE, HBG równé będą.

64. Piérwszé Twiérdzénié można i tak wyrazić: że ieżeli dwie liniie prosté przecięté przez liniią trzecią, czynić będą z nią kąty iednostronné równé, albo kąty na przemián równé, albo że dwa kąty wewnętrzné równać się będą summie dwóch kątów prostych; takié liniie będą równo odległé.

65. *Zagádn:* 1. Daną maiąc iednę liniią, poprowadzić drugą równo odległą, przez punkt dany.

Niech będzie liniiá daná BC, i punkt A także dany: przez tén Punkt poprowadzić liniią równoodlégłą od linii danéy BC. Táb. III. *Fig.* 6.

Rozwiązanié. Przez Punkt A ciągniymy iakażkolwiek liniią, naprzykład AD, do BC. Przy Punkcie A, zróbmy kąt DAE, równy kątowi ADC. Liniiá AE, będzie tą równoodległą, którégysmy szukali.

Dowodz: Kąty na przemián DAE, ADC, są równé; więc linie BC, AE, są równoodległé.

66. *Twiérdz:* 2. Jeżeli kąty iednostronné CAE, IBE, nie są równé, choćby też i bardzo nieznaczná była ich różnica; wszelako iednak liniie AC, BI, zniydą się gdziekolwiek z sobą; albo (co na iedno wychodzi) ieżeli summa kątów wewnętrznych IBH, CAE, mnieyszá, albo większá iest od dwóch kątów prostych; tedy dwie liniie CF, IL, zniydą się z téy strony linii HE, gdzie ta summa iest mnieyszá od dwóch kątów prostych. Táb. IV. *Fig.* 1.

Na dowodzéniu tego Twiérdzéniá wysilali od dáwnych czasów dowcipy swoié Geometrowie, i pospolicie fałszywie ié dowodzili; bo będąc to Twiérdzénié

w sow sobie tak iasné, można było i bez dowodzéniá na nié przystać: Możná iednak dowiéśdź, ié bez popadnieniá omyłce: ale dowody té tak długié, że ciąg i związek ich, wielkiégo natężéniá, uwági, i rozumu wyciągaiący, znudziłby uczniów tym bardziéy, imby mniéy przeświádczéni byli o pożytku i potrzebie tego dowodzéniá. Rozumiém, idąc w tém za przykładém Euklidesa, że lepiéy iest miéć to Twiérdzénié za oczywisté, zwłászcza dowiódłszy iuż dwóch innych Podáń *odwrótnych*, (Propositio inversa:) piérwszégo, że, gdy liniie schodzą się z sobą, kąty iednostronné są nie równé: drugiégo, że, gdy kąty iednostronné równé są, liniie z sobą się zeyśdź nigdzie nié mogą.

67. *Wniosek*. Jeżeli dwie liniie są równoodległé, a trzeciá ié przeciná; kąty iednostronné będą równé, kąty na przemián także równé, i kątów dwóch wewnętrznych summa równać się będzie summié dwóch kątów prostych. Jedén z tych trzech wniosków przypuściwszy, przypuścić trzeba i dwa drugié, tak, iak w piérwszém Twiérdzéniu. Jakoż, gdyby którákolwiek z tych trzech równości kątów, nie była prawdziwá, iużby tém samém liniie zeyśdź się gdzie z sobą mogły, toiest nie byłyby równoodległé.

Defin: Czworokąt, którégo boki naprzeciwko siebie leżącé są równoodległé,

na-

nazywać będziemy *Równoległobokiem.* (Parallelogrammum.) Liniią, która łączy wierzchołki dwóch kątów przeciwnych, nazwiemy *Przekątną* (Diagonalis.)

68. *Twierdz:* 3. W każdym Równoległoboku, boki przeciwne i kąty przeciwne są równe.

Niech będzie Równoległobok ABCD, mieć on będzie boki AB, i DC równe; boki AD, i BC także równe, i kąty przeciwne A i C, iako też B i D, równe. Táb. IV. *Fig.* 2.

Przygotowanie. Poprowádźmy przekątną AC.

Dowodz: Dwa Tróykąty: ACB, CAD, mogą przystać do siebie: maią albowiem bok AC spólny, kąty na przemián ACD CAB, równe, i kąty na przemián CAD, ACB także równe; a zatem (23.) i liniie AB, DC są równe, iako też i liniie AD, BC; kąty także B i D równe, i kąty A i C iako składaiące summę kątów względem siebie równych w obudwóch Tróykątach, także równe.

69. *Wniosek* 1. Przekątná dzieli Równoległobok na dwa Tróykąty, które przystać do siebie mogą.

70. *Wniosek* 2. Jeżeli dwie liniie są równoodległe, spuściwszy od dwóch punktów

któw iedney, dwie prostopadłé do drugiéy, té prostopadłé równé będą.

71. *Wniosek* 3. Jeżeli Równoległobok má iedén kąt prosty, wszystkié téż inné kąty iego prosté będą; a ieżeli dwa iego boki przyległé, są równé, wszystkié także boki równé będą.

72. *Defin:* Równoległobok, którégo kąty są prosté, nazywá się *Prostokątém* (Rectangulum.)

Prostokąt, którégo wszystkié boki są równé, zowié się *Kwadratém*. Równoległobok, który má kąty nierównié, zachowuie nazwisko Równoległoboku; lubo czaséın z przydatkiém się wyrążá, że iest Równoległobokiém *Ukośnym* (Obliquangulum.) Równoległobok ukośny, którégo boki wszystkié są równé, nazwany bydź może *Kwadratém ukośnym* (Rhombus.)

73. *Twiérdz:* 4. Jeżeli w Czworokącie boki przeciwné są równé, taki Czworokąt będzie Równoległobokiém.

Fig. taż co wyżéy

Niech będzie Czworokąt: ABCD, którégo boki przeciwné AB, CD, są równé, i boki przeciwné AD i BC także równé, tén Czworokąt będzie Równoległobokiém.

Przygotowanié. Poprowádźmy Przekątną AC. *Do-*

Dowodz: W Tróykątach: ACD, CAB, boki trzy w jednym równé są trzém bokóm w drugim; (68.) więc przystać do siebie mogą (25:) w szczególności zaś kąty na przemián CAB, ACD są równé, więc liniie AB, CD są równoodległé: podobnie i liniie BC, AD są także Równoodległé.

74. *Twiérdz:* 5. Jeżeli w Czworokącie dwa boki przeciwné są równé, i równoodległé; taki Czworokąt iést równoległobokiém.

Niech będzie Czworokąt ABCD, którégo boki przeciwné AB, CD są równé, i równoodległé, tén Czworokąt iest Równoległobokiém. *Fig. taż co wyżéy*

Przygotowanié. Poprowádźmy Przekątną AC.

Dowodz:: Dwa Tróykąty: ACD, CAB, maią bok AC spólny, boki AB i CD równé i kąty na przemián: ACD, CAB, zawarté między témi bokami, równé; więc przystać do siebie mogą; (18-) a w szczególności, kąty: CAD, ACB będą równé, że zaś są na przemián: więc liniie AD i CB są równoodległé.

75. *Uwága.* Czworokąt może mieć dwa boki równoodległé, a dwa inné równé, a nie bydź przeto Równoległobokiém, chyba w tén czas, gdy boki przy-

ległé

ległe bokóm równoodległym, są prostopadłe. Widzieć to można na Figurze 3. gdzie lubo Czworokąt ABCD, ma boki dwa przeciwne: AB i CD równoodległe, boki AD i BC równe, nie iest iednak Równoległobokiem.

76. *Zagádn:* 2. Maiąc daną liniią prostą, postawić na niey Kwadrat.

Rozwiązanie. Z końca iednego linii daney, wyprowádźmy prostopadłą iey równą. Z drugiego końca tey daney linii i prostopadłey, iako do śrzodka prómieniem równym daney linii, nakreślmy dwa łuki okręgu, i Punkt ich przecięciá złączmy z końcem linii daney i prostopadłey.

Dowodz: Czworokąt tak zrobiony, będzie miáł wszystkie boki równe, i kąt ieden prosty; więc będzie Kwadratem.

77. *Zagádn:* 3. Wykreślić prostokąt, którego boki są dane.

Sposób wykreśleniá iest ten sám, co wyżey, (76.) z tą różnicą, że prostopadłá powinná mieć długość daną, a nie bydź równą podstawie; promienie także łuków kreślić się maiących, ieden powinien bydź równy podstawie, a drugi prostopadłey.

78. *Zagádn:* 4. Wykreślić Równoległo-

głobok, którégo kąt iest wiadomy, i boki.

Sposób wykréśléniá tym tylko różni się od poprzédzaiącego, że zamiást prostopadłey poprowadzić potrzeba liniią z tém nachyléniém, któréby czyniło kąt dany.

ROZDZIÁŁ IV.

O kątach w Figurach Prostokréślnych, a w szczególności w Tróykątach.

Widzieliśmy, (31.) że kąt zewnętrzny Tróykąta, większy iest od iednégo z dwóch kątów wewnętrznych iému przeciwnych; dowiedziémy teráz, że tén kąt zewnętrzny równá się obudwóm kątóm wewnętrznym naprzeciw siebie leżącym.

79. *Twiérdz:* 1. Niech będzie Tróykąt: ABC, a kąt iego zewnętrzny: CBD; tén kąt równy iest summie dwóch kątów wewnętrznych: A i C. Táb. IV. *Fig.* 4.

Przygotowanié. Poprowádźmy BE, równoodległą od AC.

Dowodz: Kąty na przemián C i CBE są równé; równé także i kąty iednostronné: A, i EBD; więc summa kątów: C i A, równá iest summie kątów: CBE i EBD, toiest kątowi zewnętrznému CBD.

80. *Twierdz:* 2. W każdym Tróykącie, summa trzech kątów równa iest dwóm kątóm prostym.

Niech będzie Tróykąt: ACB; summa trzech iego kątów, równa się summie dwóch kątów prostych.

Przygotowanie. Pociągniymy daléy AB, naprzykład aż do D.

Dowodz: Już się dowiodło, że kąt zewnętrzny CBD, równá się dwóm kątóm wewnętrznym A i C; więc summa kątów CBD, i CBA, równać się będzie summie kątów: A, C, i CBA; ale summa dwóch piérwszych kątów, iako przyległych, wyrównywá dwóm kątóm prostym; więc i drugá trzech kątów summa, tymże dwóm kątóm prostym iest równá. (h)

18.

(h) To Twiérdzénié iest bardzo wielkiéy wági; przeto trzeba, aby iak náydokładniéy zrozumieli ié Uczniowie, iako inszé Twiérdzéniá, od których dowiedzienié tego zawisło. Tu podobno mieyscé byłoby pokázaniá związku Twiérdzéń dotąd podanych iednych z drugiémi, który to związek istotny iest postępowaniu Geometrycznému. Ćwiczéniá, które poprzedziły, już powinny były dadź poznać Ucznióm tén sposób postępowaniá. Trzeba iédnak często im związek takowy okazywać, i iak się iedna práwdá z drugiéy odkrywá. Stąd náywiększy pożytek z Matematyki odnieść mogą, i nabiorą práwdziwe.

81. *Wniosek* 1. W Tróykącie równobocznym, każdy w szczególności kąt, iest trzecią częścią dwóch kątów prostych, albo $\frac{2}{3}$. kąta iednégo prostégo, toiest, każdy waży 60. stopni.

82. *Wniosek* 2. W Tróykącie, znaiąc dwa kąty, iuż tém samém znany i kąt trzeci.

Przykład. Niech będzie Tróykąt, którégo kąt iedén má stopni 50°, a drugi 72°, summa tych dwóch kątów będzie 122°. Różnica zaś 122° od dwóch kątów prostych, albo od 180°, iest 58°, i ta iest ważnośc trzeciégo kąta.

83. *Wniosek.* 3. W Tróykącie równoramiénnym, znaiąc kąt iedén, poznámy zarász i dwa drugié.

Przykład. Niechby kąt iedén przy wiérzchołku wáżył 40°; w Tróykącie równoramiénnym. Już tém samém dwa inszé wáżą 140°; aże są równé, każdy z nich wáżyć będzie połowę, toiest 70°.

---

go ducha Matematycznégo: co nierównie pożyteczniéy im będzie, iak mieć nawet wiadomość saméy Matematyki.

Niechby znowu kąt iedén przy Podstawie wáżył 64°, i drugi przy Podstawie wáżyłby 64°. Summa tych dwóch kątów byłaby 128°, a różnica między 180°, i 128°. toiest 52°, pokázałyby wáżność kąta trzeciégo.

84. *Defin*: Figura maiącá więcéy niż cztéry boki, albo kąty, nazywá się *Wielokątém* (Polygonum.)

85. *Twiérdz*: 3. Wáżność summy kątów wszystkich w Figurze *Prostokréślnéy* (Figura Rectilinea,) zawisła od liczby boków téyże Figury. Liczbę tę boków podwoiwszy, i odciąwszy od podwoionéy liczbę: 4; reszta okáże w kątach prostych wáżność kątów wszystkich Figury prostokréślnéy. Nim się przystąpi do ogólnégo dowodzéniá, trzeba zacząć od przypadków szczególnych w sposób podobny następuiącému.

Niechby naprzykłád Figura Prostokréślná miała tylko cztéry boki, toiest niechby tylko była Czworokątém. Poprowadziwszy w niéy Przekątną, ta podzieli Czworokąt na dwa Tróykąty, w których summa kątów razém wziętá, będzie równá summie kątów w Czworokącie. Aże ta summa kątów w dwóch Tróykątach, wáży cztéry kąty prosté; więc

więc i summa kątów w Czworokącie ważyć także będzie czte'ry kąty proste'.

Niechby Figura miała pięć boków, toiest była *Pięciokątém* (Pentagonum.) Poprowadźmy od iedne'go wie'rzchołku, do dwóch drugich przeciwnych dwie Przekątne'; podzielą one' Pieciokąt na trzy Tróykąty, których summa ważności kątów, toiest 6. kątów prostych, będzie te'ż summą ważności kątów Pięciókąta.

Dowodze'nie' ogólne'. Od wie'rzchołku kąta które'gokolwiek w Wielokącie, poprowadźmy tyle' przekątnych, ile' można. Postrzeże'my łatwo, że Tróykątów liczba z tego podziału wynikaiącá, mnieyszá będzie dwoma, od liczby boków Wielokątá: albowie'm od kąta tego, od które'go się prowadziły Przekątne', nie można ich było prowadzić do dwóch innych kątów náybliższych, boby tylko przykryły sobą dwa náybliższe' boki, albo ramiona tego kąta, i nie zrobiły Tróykątów. Ponieważ zaś w każdym Tróykącie ważność trzech kątów, równá się ważności dwóch kątów prostych, będzie więc dwa razy tyle' zawie'rało się (co do ważności) kątów prostych w Wielokącie; ile' się zawie'rá w nim Tróykątów. A że liczba Tróykątów, mnieyszá iest dwóma, od liczby boków Wielokąta; więc liczba kątów prostych, w tymże Wielokącie, będzie dwa razy tak wielká, toiest będzie się równać liczbie boków podwoionych, odtrąciwszy od niéy dwa razy 2. toiest 4; a zatém wáżność kątów wszystkich wielokąta w kątach prostych znáydziémy odeymuiąc liczbę 4. od liczby podwoionéy boków tegoż Wielokąta. (i)

86.

(i) Dowodzénié to mogłoby się wydáwać trudném, gdyby go wielé przykładów na Wielokątach szczególnych nie poprzedziło, i Figury na każdy szczególny przykład kréślone nie obiaśniły. Wielé iednak na tém zawisło, aby i bez Figury przyuczali się Uczniowie dáwać sprawę z tego, czego się nauczyli: a tym sposobém aby wprawiali się w zachowanié dobrégo porządku, tak w wyobrażéniach, które sobie czynić będą, iako téż i w samych wyrazach. Szczególnieyszégo zaś staraniá przykładać trzeba, aby bardziéy rozumém, niż pamięcią wszystko to, czego się uczyć będą, ogarnywali. Z téy przyczyny przy rozwiązaniu niektórych zagádnién, opuszczało się umyślnie Figury. Niech iednak stąd nie wnoszą Nauczyciele, aby wcale bez Figur obeyśdź się mogło: i owszém niech przyuczaią Uczniów, aby ié sami sobie kréślić umieli z pamięci, zrozumiáwszy piérwéy Twiérdzéniá, do których dowodzéniá stósować się maią té Figury. Przykłady dotąd przytoczoné, tym sposobém się podáwały, którym potrzeba, aby i Uczniowie dáwali sprawę z działáń iuż dobrze od siebie poiętych. Odpowiédź náypospolitszá młodych iest, tych nawet, którzy lepiéy rzecz przenikaią: *Umiém ia to, ale się wytłumaczyć nié mogę.*

86. *Twiérdz:* 4. Pociągnąwszy daléy w jednę stronę boki wszystkié Wielokąta, iakążkolwiek będzie liczba boków iego, zawsze iednak summa kątów zewnętrznych, zamkniętych między bokiem iednym i przedłużéniém drugiégo przyległégo, ważyć będzie cztéry kąty prosté. (k)

Nim się przystąpi do ogólnégo Dowodzéniá, trzeba piérwéy na szczególnych przykładach tego Twiérdzéniá dowiéśdź, zacząwszy od Tróykąta, w którym każdy kąt z swoim zewnętrznym przyległym waży dwa kąty prosté: a że kątów iest w Tróykącie trzy; więc z przyległémi ważyć będą sześć kątów prostych: trzy zaś kąty, które się w Tróykącie znáyduią, ważą dwa kąty prosté: więc té, które są za Tróykątém, toiest zewnętrzné, ważyć będą cztéry kąty prosté.

Dowodzénié ogólné. Każdy kąt wewnętrzny w Wielokącie, z swoim zewnętrznym przyległym, waży dwa kąty prosté: więc summa wszystkich kątów tak wewnętrznych, iako i zewnętrznych, waży dwa kąty prosté wzięté tylé razy,

zy,

(k) Mówię tu tylko o wielokątach, w których kąt każdy mnieyszy iest od dwóch kątów prostych, toiest o takich, w których kąty są wyskakuiącé (*Salientes.*)

zy, ilé iest boków w Wielokącie; a zatém summa samych kątów zewnętrznych, wázyć będzie tylé, ilé brakuie summie kątów wewnętrznych, aby ważyła dwa kąty prosté wzięté tylé razy, ilé má boków Wielokąt. Ale że, (iakośmy w poprzedzaiącém Twierdzéniu dowiedli,) brakuie do tego téy summie kątów czteéry; więc summa kątów zewnętrznych Wielokąta ważyć będzie cztéry kąty prosté.

87. *Uwága.* 1. Náywiększéy wági są té przypádki, w których kąty wszystkié Wielokąta są równé. Każdy w tym razie kąt zewnętrzny, waży 4. kąty prosté, podzieloné przez liczbę boków Wielokąta. Ważność zaś każdégo kąta wewnętrznégo znáydziémy, odtrąciwszy tén Wieloráz, toiest: ważność iednégo kąta zewnętrznégo od dwóch kątów prostych.

Jeżeli wszystkié kąty wielokąta są równé; tedy im większy będzie każdy kąt iego zewnętrzny, tym mnieyszy będzie wewnętrzny: a im mnieyszy tamtén, tym tén większy.

Po dowiedzionych tych Twiérdzéniach, łatwo będzie Ucznióm ułożyć sobie Táblicę ważności kątów tak wewnętrznych, iako i zewnętrznych w tych wielokątach, w których kąty wszystkié są równé, i mogą tę ważność wyrazić, czyli to przez kąty prosté, czyli przez stopnie.

88. *Uwaga* 2. Umieiąc dowieśdź dwóch Twierdzeń poprzedzaiących, można rozwiązać i to, co następuie zadanie:

Jak wielorakim sposobem około Punktu danego napełnić można mieysce (to iest cztery kąty próste) przez kąty Figury Prostokreślney iednego gatunku, (1) i którey wszystkie kąty są równe?

1. Gdy Tróykąt ma wszystkie boki równe, czyli iest Równobocznym; każdy z kątów iego waży trzecią część dwóch kątów prostych, albo $\frac{2}{3}$ iednego kąta prostego; a zatem sześć takich kątów, uczyni 4. kąty proste, i napełni mieysce około Punktu iednego.

2. Gdy Czworokąt ma wszystkie kąty równe czyli iest Prostokątem; każdy z kątów iego iest kątem prostym, a zatem 4. takie kąty ważyć będą 4. kąty proste.

3. Kąt zewnętrzny Pięciokąta, którego kąty wszystkie są równe, waży $\frac{1}{5}$ część

(1) Mówię, *iednego gatunku*, ponieważ gdyby wolno było mieszać kąty różnych Wielokątów; możnaby 14. sposobami napełnić mieysce około iednego Punktu, używaiąc tych tylko Wielokątów, które kąty wszystkie równe maią.

część czterech kątów prostych, albo $\frac{4.}{5.}$ iednego kąta prostego; a zatem każdy kąt wewnętrzny, ważyć będzie: $\frac{1.}{5.}$ kąta prostego. Trzy takowe kąty, czynią tylko 3. kąty proste i $\frac{3.}{5.}$ co iest mniey iak 4, a cztery takie kąty, czynią 4. kąty proste i $\frac{4.}{5.}$ co iest więcey iak 4. Przeto kątami Pięciokąta, maiącego wszystkie kąty równe nie można napełnić mieysca około Punktu iednego.

4. Kąt zewnętrzny Sześciokąta, którego kąty wszystkie są równe, waży $\frac{1.}{6.}$ część czterech kątów prostych, albo $\frac{2.}{3.}$ iednego kąta prostego: a zatem każdy kąt wewnętrzny ważyć będzie, 1. $\frac{1.}{3.}$ kąta prostego. Trzy zaś takowe kąty, czynią zupełnie cztery kąty proste.

Jeżeli Wielokąt ma więcey niż 6. boków, każdy z kątów iego wewnętrznych, będzie większy od kąta w sześciokącie; trzy więc takowe kąty uczynią więcey niż 4. kąty proste; a że kąt Wielokąta maiącego boki wszystkie równe, iest zawsze mnieyszy od 2. kątów prostych; więc dwa takie kąty nie wystarczą na napełnienie mieysca około Punktu iednego.

Táb. IV. *Fig.* 5. 6. *i* Táb. V. *Fig.* 1. Przeto trzema tylko sposobami rozwiązać można wzwyż wyrażone Zadanie, nié, toiest przez 6. kątów Tróykąta, przez cztéry kąty Czworokąta, i przez trzy kąty Sześciokąta.

Natura sama nauczyła Pszczoły układać w ulu komórki w sześciokąty.

ROZDZIÁŁ V.

O Równoległobokach i Tróykątach równych co do Powiérzchni, i o zamiénieniu iakiéykolwiek Figury Prostokréślnéy na Tróykąt i na Równoległobok.

Widzieliśmy w Rozdziele drugim przypádki w których dwa Tróykąty mogą przystać do siebie, i bydź zatém co do Powiérzchni, równé. W Rozdziele trzecim widzieliśmy także, iako dwa Równoległoboki, któré miały i boki i kąty równé mogły przystać do siebie, i że zatém powiérzchnie ich równé były. Té przypádki przystáwaniá iednych Figur do drugich były tylko, co do równości Powiérzchni, przypádkami szczególnémi; ogólnieysze zaś w téy mierze Twiérdzénia będą rzeczą tego Rozdziału.

89. *Twiérdzénié* 1. Dwa Równoległoboki zrobioné na iednéyże Podstawie, a z przeciwnéy strony zakończoné przez Liniią rownoodległą od postawy, maią Powiérzchnie równé. Niech

Táb. V. *Fig.*2.3.4. Niech będą dwa Równoległoboki: ABCD, ABEF, których taż sama iest Podstawa AB, a kończy ié z drugiéy strony, równoodległá od Podstawy Liniiá: DE. té dwa Równoległoboki, maią równé Powiérzchnie, iakáżkolwiek boków ich długość będzie.

Dowodz: Tróykąty: DAF, CBE. mogą przystać do siebie; boki albowiém AD, BC są równé, bo naprzeciwko leżącé w Równoległoboku ABCD; boki też AF, BE, równé, bo naprzeciwko leżącé Równoległoboku ABEF. Kąty oprócz tego iednostronné: ADF, BCE, i AFD, BEC, równé. Odiąwszy tedy osobno Tróykąt DAF, i Tróykąt iému równy CBE, od całéy Figury ABED; reszty będą równé, toiest Równoległobok AFEB, równy będzie Równoległobokowi ABCD.

To Twiérdzénié możnáby obiaśnić Figurą z papiéru grubégo wyrobioną, i zacząć od przypádku, który wyráżá Figura 2. gdzie punkta C i F razém przypádaią. W takim razie Tróykąty: ACD, BEC równé są piérwszy i drugi Tróykątowi: ABC; a zatém i sobie są równe; więc tak równoległobok ABCD, iáko i ABEF złożony iest z dwóch Tróykątów równych.

90. *Defin:* Ponieważ liniie prostopadłé spuszczoné od którégokolwiek Punktu linii, na drugą liniią równoodległą, są ró-

równé; ieżeli więc od punktu któregokolwiek w boku Równoległoboku spuscimy do boku przeciwnego liniią prostopadłą; ta prostopadła iednakowey zawsze będzie wielkości, i nazywá się *Wysokością* tego Równoległoboku, względem drugiego boku, do którego iest spuszczona, i który wzięty iest za Podstawę tegoż Równoległoboku. Twierdzénie poprzedzaiące możnáby téż i tak wyrazić: *Dwa Równoległoboki maiące spólną Podstawę, i wysokość iednakową, są rowné.*

91. *Twierdzénie* 2. Dwa Równoległoboki są równé, których Podstawy i wysokości równé.

92. *Dowodz:* Do Podstawy iednégo z tych Równoległoboku, przyłóżmy Podstawę drugiego; przystaną zupełnie do siebie té Podstawy, bo są równé; będą więc té postawioné na sobie Równoległoboki miały spólną Podstawę, i równą wysokość; a zatém według pierwszégo Twierdzéniá będą równé.

93. *Twierdz:* 3. Jeżeli dwa Równoległoboki zrobioné na iedney Podstawie, równé maią Powierzchnie, równé téż i wysokości mieć będą.

Niech będą dwa Równoległoboki ABCD, ABEF, których obudwóch Podstawa iest AB, i równá Powierzchniá; maią oné i wysokość iednakową, to iest Táb. V. *Fig.* 5.

za-

zakończoné są przez tę samę liniią rownoodległą od Podstawy.

Dowodz: Gdyby Punkta F i E, nie były na linii DC, albo na iéy przedłużéniu; toby inné iakié Punkta naprzykład H, i G. linii AF, BE, były na téyże linii DC, a zatém Równoległoboki ABCD, ABGH, byłyby równé. Aleśmy wzięli za równé Równoległoboki ABCD, i ABEF; więc i Równoległoboki ABEF, i ABGH byłyby równé, co iest niepodobna, chyba że Punkta H i G będą té samé, co i Punkta F i E.

W ogólności mówiąc: Dwa Równoległoboki, maiącé równé Podstawy i Powiérzchnie, maią też i równé wysokości; a gdy znowu Równoległoboki mieć będą wysokości i Powiérzchnie równé, i Podstawy ich równé będą.

94. *Twiérdz:* 4. Gdy Tróykąt i Równoległobok, stoi na téyże saméy Podstawie, a wiérzchołek Tróykąta przypádá na boku równoodległym od Podstawy i należącym do Równoległoboku, albo na przedłużéniu tegoż boku; taki Tróykąt iest połową Równoległoboku.

Táb. VI. *Fig.* 1. Niech będzie Równoległobok ABCD, a Tróykąt ABE, maiący z nim spólną podstawę AB, i niech wiérzchołek E,

Tróy-

Tróykąta przypádá na boku DC należącym do Równoległoboku; Tróykąt ten ABE, będzie połową Równoległoboku ABCD.

Przygotowanie. Przez B poprowádźmy BF, równoodległą od AE, którąby spotkała DC, w F.

Dowodzenie. Tróykąt ABE, iest połową Rownoległoboku ABFE, ponieważ bok BE Tróykąta iest Przekątną Równoległoboku: ABFE. A że Równoległoboki ABFE, ABCD, są równe; więc Tróykąt ABE, iest także połową Równoległoboku ABCD.

95. *Defin:* Prostopadła spuszczoná od wierzchołku Tróykąta do Podstawy, nazywá się *wysokością* tego Tróykąta. Twierdzenie tedy powyższe takby mogło bydź inaczéy wyrażone: *Jeżeli Równoległobok i Tróykąt maią spólną Podstawę, i wysokość równą, Tróykąt ten będzie połową Równoległoboku.*

96. *Wniosek*. Możná więc przystósować wszystko do Tróykątów, cokolwiek się o Równoległobokach powiedziało. I tak:

1. Dwa Tróykąty maiące równe Podstawy i wysokości, równe mieć będą i Powierzchnie.

2. Dwa Tróykąty równé w Powiérzchniach, i w wysokościach albo w Podstawach; będą też miały równé Podstawy lub wysokości.

W ogólności zaś mówiąc: z tych trzech ilości; z Podstawy, wysokości, powiérzchni Równoległoboku lub Tróykąta, dwie któré kolwiek wiadomé, trzecią poznać daią; iedna zaś nie iest dostateczná, aby z niéy dwie drugié wyznaczyć możná. Obáczymy daléy w tym Rozdziele, iako można zrobić tylé Równoległoboków równych i równokątnych, ilé zechcémy, chociaż boki nierówné mieć będą. (m)

97. *Zagádn:* I. Maiąc dany Równoległobok, zamiénić go na Prostokąt, któryby tę samę miał Pódstawę i Powiérzchnią.

Rozwiązanié. Od obudwóch końców Podstawy, wynieśmy liniie prostopadłé, aż do boku Podstawie przeciwnégo; zrobi się Prostokąt równy Równoległobokowi, co do Podstawy i Powiérzchni.

Podobnym sposobém postąpić sobie po-

(m) Trzeba to dobrze dadź poznać Ucznióm, że wielkość Równoboków i Tróykątów nie zawisła od ich obwodu (Perimeter) omyłki w téy mierze częsté zwykły bywać.

potrzeba, chcąc zamiénić Równoległobok dany na drugi równy piérwszému w Podstawie i w Powiérzchni, gdy inny iakikolwiek kąt przy Podstawie, a nie prosty dany będzie.

98. *Zagádn:* 2. Tróykąt dany zamiénić na inny Prostokątny, któryby miáł tę samę Podstawę i Powiérzchnią.

Rozwiązanié. Przez wiérzchołek Tróykąta danégo, poprowádzmy równoległą od Podstawy, a od końca którégokolwiek téyże podstawy, wynieśmy prostopadłą aż do równoległéy; Punkt przecięciá tych dwóch liniy będzie wiérzchołkiém Tróykąta szukanégo.

Podobnym sposobém postąpimy sobie chcąc zamiénić Tróykąt dany na drugi równy mu w Podstawie i w Powiérzchni: gdy inny a nie prosty kąt przy Podstawie dadź będzie potrzeba tému drugiému Tróykątowi.

99. *Zagádn:* 3. Zamiénić Tróykąt dany, na Rownoległobok prostokątny, któryby miáł álbo tę samę co Tróykąt podstawę, albo tę samę wysokość.

Rozwiążanié. Równoległobok prostokątny, któryby miáł tę samę podstawę, i wysokość, co Tróykąt; byłby dwa razy tak wielki; a zatém Równoległobok tén, którégo szukámy, powinién mieć tę

samę

samę podstawę, co Tróykąt, a połowę iego wysokości; albo też tę samę wysokość, a połowę tylko Podstawy.

100. *Zagádn:* 4. Czworokąt dany zamiénić na Tróykąt téyże saméy powiérzchni.

Rozwiąz: Poprowádźmy w Czworokącie danym przekątną, a przez wiérzchołek iednégo z kątów iéy przeciwnych, pociągniymy równoległą od téyże przekątnéy. Wszystkié Tróykąty maiące za podstawę tę przekątną Czworokąta, a wiérzchołek na równoodległéy od téy przekątnéy będą równé w Powiérzchni Tróykątowi, który czyni ta przekątná z dwoma bokami Czworokata schodzącémi się na równoodległey (96.) a zatém będzie téż równy w powiérzchni tému Tróykątowi, i Ttóykąt maiący za Podstawę tę samę co i tamtén przekątną, a za bok iedén maiący przedłużénié aż do równoległéy, boku Czworokąta leżącégo z drugiéy strony przekątnéy; tén Tróykąt ostatni dodáwszy do Tróykąta z drugiéy strony przekątnéy leżącégo, zrobi się Tròykąt równy co do powiérzchni Czworokątowi danému: bo ponieważ Tróykąty dwa, na które iest Czworokąt przez przekątną podzielony, równaią się co do powiérzchni całému Czworokątowi; więc témuż Czworokątowi równy także będzie co do powiérzchni i Tróykąt przez przekątną w Czworokąrokącie uczyniony: a drugi równy w powiérzchni Tróykątowi drugiému wchodzącému także w Czworokąt i onégo dopełniaiącému.

Niech będzie naprzykład ABCD Czworokąt dany; poprowadziwszy przekątną BD, i od niéy równoległą CE, przez wiérzchołek C, kąta DCB; gdy bok AB Tróykąta drugiégo w Czworokącie pociągniémy aż do zeyściá się z równoodległą CE w punkcie E; zrobi si Tróykąt ADE równy co do powiérzchni Czworokątowi ABCD. Táb. VI, *Fig.* 2.

101. *Uwágá.* Tym sposobém postąpimy sobie, chcąc zmnieyszyć iednym bokiém Figurę iaką prostokréślną, bez odmiéniéniá iéy powiérzchni. Poprowadzimy naprzód przekątną, któraby odcięła Tróykąt iedén w Figurze podanéy; potém przez wiérzchołek tego Tróykąta pociągniémy równoodległą od téy przekątnéy, aż do zeyściá się téyże równoodległéy z bokiém drugim przyległym do przekątnéy; naostatek złączymy punkt przecięciá z drugim końcém téyże przekątnéy.

Możná nawet użyć sposobu tego do zamiéniéniá iakiéykolwiek Figury prostokréślnéy, na Tróykąt téyże saméy, co i podaná Figura powiérzchni; a to zmnieyszaiąc naprzód iednym bokiém Figurę podaną: potém odeymuiąc znowu bok iedén, zmnieyszonéy iuż iednym bokiém Figurze i t. d. póty, poki do trzech tylko boków, toiest do Tróykąta nie przyydziémy.

Táb. VI. Fig. 3. *Przykład.* Niechby trzeba zamiénić Pięciokąt ABCDE na Tróykąt téyże saméy powiérzchni.

Poprowádźmy przekątné: DB, DA, przez C i E pociągniymy równoodległé CG, EF, aż do ich zeyściá się z liniią AB przedłużoną w Punktach G i F: złączmy té punkta z końcami przekątnych, przez DG i DF. Tróykąt DFG będzie równy w powiérzchni Piąciokątowi danému.

102. *Wniosek.* Widzieliśmy, (99.) że Tróykąt może bydź zamiéniony na Równoległobok prostokątny, maiący tę samę co i Tróykąt powiérzchnią; a zatém można każdą Figurę prostokréślną zamiénić zawsze na prostokąt nie różniący się od niéy w powiérzchni, mogąc ią piérwéy zamiénić na Tróykąt.

103. *Uwága.* Niechby nám podano dwie iakié Figury prostokréslné, któré byśmy iuż zamiénili obiedwie na Prostokąty; i niechby té dwa prostokąty miały albo podstawy, albo wysokości równé. Łatwo nám będzie zrobić taki znowu prostokąt, któryby równy był

w po-w powiérzchni, summie albo różnicy tych dwóch Figur podanych. Prostokąt albowiém, któryby miał podstawę równą summie albo różnicy Podstáw w obudwóch mnieyszych Prostokątach (gdyby ich wysokości były równe), i tę samę co oné wysokość, byłby równy w powiérzchni summie tych Figur, lub ich różnicy. Wkrótce się także pokáże, iż możná zamiénić Prostokąt iedén na drugi, któryby był piérwszému równy w Powiérzchni, a miáł w sobie bok iedén dany: a zatém możná zawsze dwa Prostokąty do tego przyprowadzić, aby miały iedén bok równy w obudwóch; przeto możná zawsze i Prostokąt taki zrobić, któryby równy był w powiérzchni dwóm albo więcéy Figuróm prostokréślnym podanym.

104. *Twiérdz: 5.* W jakimkolwiek Prostokącie, poprowadziwszy przekątną, przez iéy punkt którykolwiek pociągnąwszy dwie równoodległé od boków prostokąta, będą równé w powiérzchniach dwa prostokąty, przez té równoodległé zrobioné, a stykaiącé się w wiérzchołku dwóch kątów przeciwnych.

Niech będzie Prostokąt ABCD, przez punkt E, przekątnéy poprowadziwszy równoodległe: HF, GI; Prostokąty HEGD, FEIB będą równé w powiérzchniach. Táb. VI. *Fig. 4.*

Dowodz: Tróykąty ACD, CAB, są równé. Piérwszy skłádá się z Tróykątów CEG, EAH, i z Prostokąta HEGD. Drugi skłádá się z Tróykątów ECF, AEI, i z Prostokąta FEIB. Aże Tróykąt CEG, równy iest Tróykątowi ECF, a Tróykąt EAH, równy Tróykątowi AEI; więc i Prostokąt HEGD, równy będzie Prostokątowi EFIB.

Twiérdzéniá podobnégo poprzedzaiącému, gdy równoległobok nie będzie prostokątny, tymże samym sposobém dowiéśdź można.

105. *Zagádn:* 5. Dany Prostokąt zamiénić na inny téyże saméy powiérzchni, któryby miáł za bok, liniią daną.

Táb. VI. *Fig.* 5. Niech będzie Prostokąt ABCD; tén zamiénić trzeba na inny, w którymby liniiá daná za bok służyła.

Rozwiąz: Pociągniymy daléy bok AB, aż do E, tak, aby liniiá BE. równá była linii danéy. Dopełniymy Prostokąta BEFC, i poprowádźmy przekątną FB, któráby spotkała w punkcie G, bok przedłużony AD; weźmy potém FI, równą DG, i złączmy punkta G, i I, liniią GI. To uczyniwszy, Prostokąt EBHI, równy będzie co do powiérzchni Prostokątowi ABCD, i za bok ma liniią daną BE. Że równé są té dwa Prostokąty, można okázaó zać podobnym iak w ostátnim twierdzéniu sposobém.

106. *Uwága* 1. Aby dodadź dwa Prostokąty maiącé boki odmiénné; trzeba naprzód ieden z tych prostokątów zamiénić na inny równéy z nim powiérzchni, i któryby miał bok iedén równy bokowi prostokątá drugiégo nie zamiénianégo. Wziąwszy potém za wysokość, tén bok równy w dwóch Prostokątach, a za Podstawę, summę dwóch innych boków odmiénnych; zrobi się Prostokąt równy co do powiérzchni summie dwóch Prostokątów danych. Podobnie się postępuie, chcąc mieć ich różnicę.

107. *Uwága* 2. Gdyby Prostokąty dané były Kwadratami, a Prostokąt równy ich summie miał też bydź Kwadratém; poprzedzaiącé wiadomości nie dosyć byłyby na rozwiązanié tego zagádniéniá. Niżéy obaczymy, iak sobie w takim razie postąpić trzeba. (Obácz w Rozdz: VIII.)

108. *Przystósowanié*. Nie powtárzá się tu, co się iuż powiedziało w Arytmetyce o mierzéniu Prostokątów, których boki są w liczbach, wyrażoné. Przystósowanié teraźnieyszé sciągać się będzie do Równoległoboków iakichkolwiek, i do Tróykątów, wyrážaiąc podstawy ich i wysokości w liczbach.

Aby

Aby doyśdź powiérzchni Czworokąta, którégo przekątná i prostopadłá od wiérzchołku kąta iéy przeciwnégo spuszczoná, w liczbach iest daná; trzeba rozmnożyć tę przekątną przez połowę summy obudwóch prostopadłych; albo połowę przekątnéy, przez summę tychże prostopadłych; albo nakoniec całą przekątną przez całą summę prostopadłych rozmnożyć, i rozmnożonéy liczby wziąść połowę. Gdyby Czworokąt miał dwa boki równoodległé; powiérzchniá iego byłaby równá Prostokątowi maiącému za wysokość odległość tych dwóch Równoległych, a za Podstawę połowę summy dwóch boków przeciwnych Czworokąta, których wiémy odległość.

Táb. VI. Fig. 6. *Przykłady*. 1. Niech będzie ABCD, Równoległobok *Pochyłokątny* (obliquangulum) którégo Podstawa AB, má długosci łokci 37. a wysokość DE łokci 20; powiérzchniá iego będzie $20 \times 37. = 740.$ łokci kwadratowych.

2. Niech powiérzchniá Równoległoboku ABCD zawiérá łokci kwadratowych 378. Podstawa AB, niech má długości łokci 27. wysokość DE, będzie $\frac{378.}{27.} = 14.$ łokci.

3. Niech będzie powiérzchniá Równoległoboku ABCD$=544.$ łokci kwadratowych; wysokość DE$=17.$ łokci. Podstawa AB, będzie$=\frac{544}{17}=32.$ łokci.

4.

4. Niech znowu Równoległoboku ABCD podstawa będzie łokci 23. stóp 1. cal. 10. toiest $23.\frac{11}{12}$ łokci, wysokość DE łokci 14. stóp. 1. cál: 8. toiest $14.\frac{5}{6}$. łokci; powierzchniá będzie $14.\frac{5}{6}$. razy $23.\frac{11}{12} = 354.\frac{55}{72}$ łokci kwadr: = 354. łok: kw: 3. stóp. 8. cál:

5. Niech powierzchniá Równoległoboku ABCD będzie = 8433. sznur: Kwad: 72. pręt: kw: = 8433. 72. sznur: kwad: podstawa AB = 153. sznur: 9. pręt: = 153. 9. sznur: wysokość DE, będzie $= \frac{8433,\ 72.}{153,\ 9.}$ = 54, 8. sznur = 54 sznur: 8. pręt:

6. Niech powierzchniá Równoległoboku ABCD, będzie = 315, 3, 58. (Ł. K. St: Kw. Cal: Kw:) $= 315.\frac{245}{288}$. Ł. K. wysokość DE = 15. Łok. 1. St: 10. Cál: $= 15.\frac{11}{12}$ Łok: podstawa będzie $= \frac{90965.}{4584.}$ Łok: = 19. Łok. Stóp: 1. $8.\frac{49}{191}$. Cál:

7. Niech będzie ABC Tróykąt, którego podstawa AB, = 28 łokci, a wysokość CD = 16. łokci. Powierzchniá iego będzie połową 28. przez 16. rozmnożonych czyli $= \frac{28 \times 16.}{2} = 28 \times 8. = 224.$ Łok: kw: Táb. VII, *Fig.* 1.

8.

8. Niech będzie powiérzchniá Tróykąta ABC=156. stóp. kw: a podstawa AB=24. stóp. wysokość CD, będzie=$\frac{156}{\frac{1}{2}\times 24.}$=$\frac{312}{24.}$ albo $\frac{156}{12.}$=13. stóp.

9. Niech będzie powiérzchniá Tróykąta ABC=195. Ł. kw: a wysokość CD=15. łokci. Podstawa AB będzie=$\frac{195}{\frac{1}{2}\times 15}$=$\frac{390}{15.}$= 26. Ł. kw:

10. Niech będzie ABC Tróykąt, którégo podstawa AB= 12, 2, 4. (pręt: łok: cal.) =12. $\frac{5}{18.}$ pręt: Wysokość=7.$\frac{5}{6}$ pręt: powiérzchniá będzie =7.$\frac{5}{6.}$ × 6. $\frac{5}{36.}$= 48.$\frac{12}{216.}$ pręt: kw: =48. pręt: kw: 4. łok: kw: 3. stóp. 114. cál: kw:

11. Niech będzie powiérzchnia Tróykąta ABC = 25. 32. = 25$\frac{1}{8}$ (ł. kw: cal: kw: ło: kw:) podstawa AB = 9. 2. 8. =9.$\frac{1}{9}$ (Ł. cal: linii Łokci.) wysokość CD będzie =$\frac{451}{82.}$=5. ł. 1. sto:

12. Niech będzie powiérzchniá Tróykąta=21. szn: kw: 17. pręt: kw: Wysokość

kość CD=5. szn: 8. pręt: podstawa AB. będzie=$\frac{21,\ 17.}{2,\ 9.}$ albo $\frac{42,\ 34.}{5,\ 8.}$=7, 3. szn: 7. szn: 3. pręt:

13. Niech będzie *Różnobok* (Trapezium) ABCD maiący tylko równoodległé boki AB, CD; - bok AB=35. łok. Táb. VII. *Fig.* 2.

bok CD=17. łok.

A zatém summa ich=52.

Wysokość DE = 14.

Powiérzchniá tego Czworokąta będzie =$\frac{14 \times 52.}{2.}$=7×52, albo 14.×26.=364. ł.kw:

14. Aby powiérzchniá takiégo Czworokąta zawiérała 255. cal: kw: którégo boki dwa równoległé są:

iedén AB=23. cál:

drugi CD=11.

A zatém summa=34.

trzeba mu dadź wysokość=$\frac{255}{17.}$=$\frac{510}{34.}$= 15. cal.

15. Aby zaś powiérzchniá takiégo Czworokąta zawiérała 325 Stóp: kw: gdy podstawa AB=31. stóp, a wysokość ED=13. trzeba, aby summa boków równoodległych była=$\frac{325}{\frac{1}{2} \times 13.}$=$\frac{650}{13.}$=50. stóp. A że bok AB=31. stóp. więc CD będzie=19. stóp.

16.

16. Niech w takowym Czworokącie ABCD boki równoodległe będą;

AB =	20.pr:	4. ło.	1. st.	6. cal.
CD =	13.	5.	1.	4.
A zatém summa =	34.	2.	1.	10. =

34.$\frac{7}{18}$.pręt:

Wysokość DE = 9. 5. 1. 8. = 9.$\frac{7}{19}$.

Powiérzchniá będzie = 9.$\frac{7}{9}$.×17.$\frac{7}{36}$. = 168.$\frac{10}{81}$.pręt: kw: 168. prę: kw: 6. łok: kw: st: kw: 112. cal: kw:

Táb. VII. *Fig.* 3. 17. Niech będzie Czworokąt iakikolwiek ABCD, którégo przekątná DB=86. łokci; prostopadłé zaś do niéy spuszczoné, - - AE=39.

- - - CF=25.

A zatém ich summa AE+CF=64. łok: Powiérzchnia tego Czworokąta będzie = $\frac{64\times86.}{2}$ = 32.×86. albo 64.×43. = 2752. łokci kw:

18. Niech znowu będzie przekątná AB = 26. szn: 8. pręt: 6. łok: = 26.$\frac{22}{25}$. szn: Prostopadłé: AE=13. szn: 7. pręt: 5. łok:

	CF=11.	9.	6.$\frac{1}{2}$.
A zatém AF+CF=	25.	7.	4.

= 25.$\frac{113}{150}$. sznur:

Powiérzchniá Czworokąta ABCD będzie = 25.$\frac{113}{150}$.×13.$\frac{11}{25}$. = 346.$\frac{78}{628}$. szn: kw:

19.

19. Niech w Pięciokącie ABCDE będzie bok - AE = 128. łok: Táb. VII. *Fig.* 4.

Przekątné: $\begin{cases} AC = 79. \\ CE = 81. \end{cases}$

Prostopadłé: $\begin{cases} CH = 49. \\ BF = 42. \\ DG = 39. \end{cases}$

Znáydziémy Powiérzchnie Tróykątów:

$\begin{cases} AEC = 49 \times 64. = 3136. \text{ łok: kw:} \\ ABC = 21 \times 79. = 1659. \\ EDC = \frac{39 \times 81.}{2} = 1579.\frac{1}{2}. \end{cases}$

A zatém Powiérzchniá Pięciokąta ABCDE będzie = 6374.$\frac{1}{2}$. ło: kw:

20. Niech w Sześciokącie ABCDEF będą Táb. VII. *Fig.* 5.

Przekątné. $\begin{cases} AC = 200. \text{ łok:} \\ AE = 125. \end{cases}$

Prostopadłé $\begin{cases} BG = 23. \\ DH = 80.\frac{1}{2}. \end{cases}$

$\begin{cases} DI = 64.\frac{3}{4}. \\ FK = 42. \end{cases}$

A zatém BG+DH = 103.$\frac{1}{2}$. łok:

DI+FK = 106.$\frac{3}{4}$.

Znáydziémy Powiérzchnie Czworokątów:

$\begin{cases} ABCD = 103.\frac{1}{2}. \times 100. = 10350.\text{ł.kw:} \\ ADEF = 53.\frac{3}{8}. \times 125. = 6671.\frac{7}{8}. \end{cases}$

Po-

Powiérzchniá tedy całégo
Sześciokąta będzie = $17021.\frac{7}{8}$. łok: kw:
Inaczéy następuiącym sposobém znaléźć można Powiérzchnią Sześciokąta: ABCDEF.

Táb. VII. *Fig. 6.* Niech będzie

		szn:	pręt;	łok:	
	bok AB =	20.	0.	0.	
Równoodległe:	FG =	23.	7.	$3.\frac{1}{8}$.	
	CH =	23.	2.	$2.\frac{13}{16}$.	
	EI =	12.	2.	$2.\frac{3}{16}$.	$= 12.\frac{11}{48}$. Sz:kw.
Części prostopadłéy DN.	DK =	2.	4.	$7.\frac{7}{24}$.	$= 2.\frac{179}{360}$.
	KL =	4.	6.	$6.\frac{1}{4}$.	$= 4.\frac{41}{60}$.
	LM =	1.	0.	$3.\frac{8}{4}$.	$= 1.\frac{1}{20}$.
	MN =	7.	8.	$5.\frac{5}{6}$.	$= 7.\frac{79}{90}$.

A zatém AB+FG = 43. 7. $3.\frac{1}{8}$. $= 43.\frac{83}{20}$.

FG+CH = 46. 9. $5.\frac{15}{16}$. $= 46.\frac{47}{48}$.

CH+EI = 35. 4. 5. $= 35.\frac{5}{17}$.

Więc Tróykąt DEI $= 1\frac{179}{720} \times 12\frac{11}{48} =$
$15.\frac{9313}{34560}$. szn: kw:

Czwo-

Czworokąty. $\begin{cases} EICH = 2.\frac{41}{120} \times 35.\frac{7}{15} = 83.\frac{23}{450}. \\ CHFG = 1.\frac{1}{20} \times 23.\frac{47}{96} = 24.\frac{85}{128}. \\ ABGF = 3.\frac{169}{180} \times 43.\frac{89}{120} = 172.\frac{6341}{21600} \end{cases}$

Sz: kw:

Cały więc Sześciokąt ABCDEF $= 295\frac{641}{2304}$.

21. Niech będzie Siedmiokąt ABCDEFG, w którym następuiące wymiary znaleźliśmy toiest: Tab. VIII. *Fig.* 1.

Części przekątney AD: $\begin{cases} AH = 52\frac{2}{3}. \text{ stopy} \\ HI = 35. \\ IK = 15.\frac{1}{3}. \\ KL = 81.\frac{5}{6}. \\ LM = 11.\frac{5}{6}. \\ MD = 13.\frac{1}{3}. \end{cases}$

Prostopadłe: $\begin{cases} GH = 78.\frac{1}{2}. \\ BI = 56.\frac{1}{3}. \\ FK = 64. \\ EL = 86.\frac{1}{3}. \\ CM = 45.\frac{1}{6}. \end{cases}$

stóp: kw:

Będą

Będą tedy Tróy-kąty:

$AHG = 16.\frac{1}{3}. \times 78.\frac{1}{2}. = 1282.\frac{1}{6}.$

$ABI = 28.\frac{1}{6}. \times 67.\frac{1}{3}. = 1905.\frac{17}{18}$

czworokąty:

$DLE = 43.\frac{1}{6}. \times 25.\frac{1}{6}. = 1086.\frac{13}{36}.$

$CMD = 6.\frac{2}{3}. \times 45.\frac{5}{6}. = 305.\frac{5}{9}.$

$HKFG = 25.\frac{1}{6}. \times 142.\frac{1}{2}. = 3588.\frac{1}{4}.$

$KLEF = 81.\frac{5}{6}. \times 75.\frac{1}{6}. = 6151.\frac{5}{36}.$

$BCMI = 109. \times 51.\frac{1}{12}. = 5568.\frac{1}{12}.$

A zatém cały Siedmiokąt ABCDEFG = $19885.\frac{1}{2}.$ stóp: kw:

PRZYGOTOWANIÉ DO ROZDZIÁŁÓW NASTĘPUIĄCYCH

O podniesiéniu liczby do Kwadratu i wyciągniéniu z niéy piérwiástku kwadratowégo.

Lubo nauka, którá się tu wykładać będzie, má częsté używanié w wyższych rachunkach; bardziéy iednak iest potrzebná w Geometryi. W następuiących Rozdziáłach, różné zdarzą się użyciá iéy okoliczności. Tam fundaménta, na których się zasádzá, iaśniéy zrozumiané będą, niż gdyby na zawilszych działaniach rachunkowych były okázané zwłázwłaszcza, gdy ieszcze algiebra uczniom iest nieznaioma.

109. *Defin:* Kwadrat liczby; iestto ta sama liczba przez siebie rozmnożona. Okázać to można z Geometryi, w któréy aby znaléźć pole Kwadratu; trzeba rozmnożyć przez siebie liczbę znaczącą wielkość boku tegoż Kwadratu. I ták dziewięciu liczb piérwszych:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	Kwadraty są:
1.	4	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	
10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90.	Liczb: Kwadraty są:
100.	400.	900.	1 600.	2 500	3 600.	4 900.	6 400.	8 100	
1 000.		2 000.		3 000			9 000.		Tych téż kwadraty będą.
1 000 000.		4 000 000.		9 000 000.			81 000 000.		

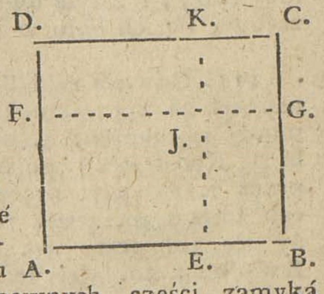
110. Stąd się wnosi, że kwadraty liczb, które iednę cyfrę maią, a resztę zerów, składaią się z kwadratu téyże saméy cyfry, i z tyle dwoie następuiących zerów, ile ich było w téy liczbie.

111. Gdy się robi Kwadrat z liczby, naprzykład z 37, mnożąc 37. przez 37; mnoży się naprzód 7. przez 7. toiest robi się Kwadrat z 7. potém mnoży się 30. przez 7. daléy 7. przez 30. albo drugi ráz znowu 30. przez 7. naostatek mnoży się 30. przez 30. toiest bierze się Kwadrat z 30. Jest tedy liczba rozmnożona 1369. kwadratém trzydziestu siedmiu, złożonym z kwadratu trzydzie-

stu,

stu, z liczby 30. rozmnożoney dwa razy przez 7. i z kwadratu 7. Ta reguła iest ogólna ściągaiąca się do kwadratów liczb wszystkich, które na dwie części podzielić można.

Niech będzie naprzykład liczba 5. którą uważam iak złożona z 1. i z 4. kwadrat iey może bydź uważany, iakby się składał z tych trzech liczb: 1. 8. 16. Pierwsza 1. iest kwadratem z 1. druga 8. iest liczbą rozmnożoną dwa razy z 1. przez 4. trzecia 16. iest kwadratem z 4. Jakoż summa tych trzech liczb 1. 8. 16. iest: 25. a 25. iest kwadratem z 5. Gdybyśmy uważali 5. iako zbiór z tych dwóch liczb 2. i 3; kwadrat z 5. brałby się tem samem za summę z tych trzech liczb: 4. 12. 9. która summa iest także 25. Liczba 4. byłaby kwadratem z 2. liczba 12. byłaby z rozmnożenia dwa razy 2. przez 3, a liczba 9. byłaby kwadratem z 3.



Toż samo widocznie pokazać się może sposobem Geometrycznym.

Niech liniia AB będzie na mieyscé liczby iakiey składaiącey się z tylu iedności, ile pewnych części zamyka w sobie taż liniia AB. Linii tey części: AE, AE, EB, niech zastępuią części dwie, które tę liczbę składaią: zróbmy kwadrat ABCD z linii AB, a wziąwszy liniią AF równą AE, pociągniymy przez F i E dwie liniie FG, i EK, równoodległé od boków kwadratu, i przecinaiącé się w punkcie J. Kwadrat AEJF. będzie z części AE, linii AB. Kwadrat IGCK, będzie z części EB, linii téyże AB. Prostokąty: FIKD, EBGI, będą obadwa z linii: AE i EB, toiest z części iednéy, linii AB i z części drugiéy.

112. Wygodná rzecz iest, liczbę, któréy kwadratu szukámy, rozłożyć na iedności, dziesiątki, sta, i t. d.

Przykład 1. Chcę mieć kwadrat z 24.

Rozkłádám tę liczbę na dziesiątki, i na iedności, toiest na 20. i na 4.

Będzie	1. 400.	kwadrat z dziesiątków.
	2. 160.	liczba dwa razy rozmnożoná z dziesiątków przez iedności.
	3. 16.	Kwadrat z iedności.
Summa - -	576.	Kwadrat z 24.

Przykład 2, Chcę mieć kwadrat z 36.

	1. 900.	Kwadrat z 30.
	2. 360.	dwa razy 30. przez 6. rozmnożoné.
	3. 36.	Kwadrat z 6.
Summa - -	1296.	Kwadrat 36.

Przykład 3. Chcę mieć Kwadrat z 324.

1.	90000.	Kwadrat z 300.
2.	12000.	Dwa razy 300. przez 20.
3.	400.	Kwadrat z 20.
4.	2560.	Dwa razy 320. przez 4.
5.	16.	Kwadrat z 4.
Summa - - -	104976.	Kwadrat z 324.

Przykład. 4. Chcę mieć Kwadrat z 4687.

1.	16000000.	Kwadrat z 4000.
2.	4800000.	Dwa razy 4000. przez 600.
3.	360000.	Kwadrat z 600.
4.	736000.	Dwa razy 4600. przez 80.
5.	6400.	Kwadrat z 80.
6.	65520.	Dwa razy 4680. przez 7.
7.	- - 49.	Kwadraty z 7.
Summa - - -	21967969.	Kwadrat z 4687.

113. *Uwága* 1. Postrzédz łatwo możémy w tych przykładach, że każda liczba składaiącá po częśći kwadrat cały, má iednem zero mniéy, niżeli ta, którá ią poprzedziła; a zatém cyfra iedna w każdéy liczbie niższéy występuie bardziéy ku prawéy ręce, niż w téy, którá iest nad nią.

Wi-

Widzimy zatém, że możnaby opuścić zera, pisząc cyfry samé tym sposobém iedné pod drugiémi, aby w każdym rzędzie niższym, cyfra iedna w prawą coraz bardziéy wychodziła. I tak opuściwszy zera w przykładzie ostatnim tym porządkiém szłyby samé cyfry.

16.
 48.
  36.
  736.
   64.
   6552.
    49.

Summa 21 967 969.

2. W piérwszym rzędzie, gdzie iest 16. opuszcza się zerów sześć, a zatém 16. znaczy 16. milliionów, toiest Kwadrat z 4000. czyli z piérwszégo po lewéy ręce znaku liczby 4687. W drugim rzędzie gdzie iest 48. opuszczá się zerów pięć, a zatém 48. znaczy 4. milliiony 8. kroć stotysięcy, i dlá tego 4. piszą się pod iednościami milliionów, a 8. występuie. Ta zaś liczba 48. pochodzi z rozmnożéniá piérwszégo po lewéy ręcę znaku 4, liczby 4687. przez drugi znak 6, téyże liczby dwa razy wzięty. W trzecim rzędzie opuszczá się zerów cztéry, a zatém 36. znaczy trzykroć sto tysięcy, i 6. dziesiątków tysięcy, i dlá tego 3. piszą się pod stuma tysiąców, a 6. wy-

stępuie. Ta zaś liczba 36. znaczy kwadrat drugiégo po lewéy ręce znaku 6. liczby 4687. W czwártym rzędzie opuszczá się zerów trzy, a zatém 736. znaczy siedmkroć trzydzieści sześć tysięcy: i dlá tego 3. piszą się pod dziesiątkami tysiąców, a 6. występuie. Ta zaś liczba 736. pochodzi z rozmnożéniá dwóch piérwszych po lewéy ręce znaków 46. liczby 4687, przez 8, trzeci znak téyże liczby dwa razy wzięty i t. d.

3. W takowém liczb ułożéniu, idąc od dołu do góry, toiest zaczynaiąc od 49; w piérwszym rzędzie, piérwszá po prawéy ręce cyfra 9. znaczy iedności; w drugim rzędzie 2. znaczy dziesiątki: w trzecim rzędzie 4. znaczy sta: a w czwártym rzędzie 6. znaczy tysiące, i t. d.

4. Ta sama liczba 49. w piérwszym od dołu rzędzie znaczy kwadrat z jedności 7; i prawá iéy cyfra 9. náybardziéy występuie. Trzeciá w tym porządku liczba 64. iest kwadratém z dziesiątków 8, i przeto prawá iéy cyfra 4. iako znacząca sta, mniéy występuie, niżeli obiedwie cyfry 49. kwadratu z samych iedności. Piąta w porządku liczba 36. iest kwadratém ze stów 6: i przeto prawá iéy cyfra 6. iako znaczącá dziesiątki tysiąców, má przed sobą kwadraty z dziesiątków i z jedności. Na koniec siódmá i náywyższá

liczba

liczba 16. iest kwadratém z tysiąców 4. i przeto prawá iéy cyfra 6. má przed sobą kwadraty ze stów, dziesiątków i iedności. W summie więc 21,967,969. na mieyscach nie párzystych, od prawéy ręki rachuiąc kończyć się będą kwadraty z liczb poiedyńczych, z których się składá cały kwadrat: to iest kwadrat z jedności kończyć się będzie tam, gdzie ostatnié po prawéy ręce 9. napisané: kwadrat z dziesiątków tam, gdzie iest drugié 9; kwadrat ze stów tam, gdzie iest 6; kwadrat z tysiąców, gdzie 1.

5. Dlá podobnéy przyczyny w summie téyże 21 967 969. kwadrat wyrážaiącéy (rachuiąc zawsze od prawéy ręki) na mieyscach párzystych, drugiém, czwártém, szóstém i t. d. kończyć się będą liczby pochodzącé z rozmnożéniá poiedyńczych znaków, z których kwadrat urósł, przez té wszystkié, któré ié poprzedzały.

Trzeba to ieszcze bardziéy obiaśnić na wielu innych przykładach kwadratów, tymże samym, co wyżey, porządkiém części ich układaiąc.

114. *Wniosek* 1. Gdy tedy mámy liczbę iaką kwadratową, możémy doyśdź z jak wielu znaków liczebnych przez siebie rozmnożonych urósł tén kwadrat: toiest, możémy doyśdź wielości znaków pier-

piérwiástku kwadratowégo. Po Łacinie taki piérwiástek zowié się (*Radix quadrata.*) Doydziémy zaś tego, oddzielaiąc kréskami albo kropkami od prawéy ręki zacząwszy po dwa znaki liczebné. Liczba takich oddziałów pokáże wielość znaków liczebnych piérwiástku. Naprzykład liczba 576, będzie miała dwa oddziáły, które tak oznáczám 5,76. a zatém piérwiástek iéy z dwóch się skłádá znaków. Piérwiástek téy liczby: 10,49,76. będzie miał trzy znaki liczebné, bo w niéy trzy oddziáły zrobić można. Piérwiástek liczby 21 967 969. mieć będzie cztéry znaki; bo cztéry także w nim oddziáły uczynić można, i t. d.

115. *Wniosek* 2. Ponieważ w mieyscach nie párzystych liczby kwadratowéy, kończą się kwadraty znaków poiedynczych tę liczbę składaiących, mogą zaś znaki liczebné w kwadracie bydź nie párzysté; więc w takim razie, w piérwszym zaráz od lewéy ręki znaku kwadratu, znaleźć można znak piérwszy piérwiástku tegoż kwadratu: a zatém oddzielaiąc kréskami co dwie liczby, od prawéy ręki do lewéy, na ostatni oddział, może tylko przypaśdź znak iedén liczebny. Tak, iakeśmy wyżéy widzieli w tym kwadracie 5,76.

PRZY-

PRZYKŁADY.

116. Niechby z téy saméy liczby: 576. wyciągnąć trzeba było piérwiástek kwadratowy. Ta liczba mogąc mieć dwa oddziały, będzie téż miała dwa znaki w piérwiástku, toiest znak dziesiątków, i znak iedności. Piérwszy znak piérwiástku taki bydz powinién, aby kwadrat iego nie przechodził 5. stów: taki kwadrat iest 4. sta, albo 400, którégo piérwiástek 2. dziesiątki, albo 20. Kwadrat 400. piérwszégo tego znaku piérwiástkowégo 20, odiąwszy od 576. zostanie 176. Ta reszta pozostała powinná ieszcze zamykać w sobie drugi znak piérwiástku rozmnożony przez piérwszy 20, dwa razy wzięty, i nad to kwadrat tegoż drugiégo znaku: więc ieżeli przez tenże znak 20, dwa razy wzięty, toiest przez 40. podzielimy resztę 176; wieloráz pokáże drugi znak piérwiástku złożony z iedności. Podzieliwszy 176, przez 40. wieloráz będzie 4. iedności. Te 4. iedności rozmnożywszy przez 40, wypadnie 160, które 160, odiąwszy od 176. zostanie 16. W téy reszcie 16. znáydować się ieszcze powinién kwadrat znaku piérwiástkowégo iedności 4. toiest 16. a że się znáyduie zupełnie; więc cały piérwiástek kwadratu 576. będzie 24.

Wzór

Wzór działania.

5,76|20.
4 00 kwadrat z 20.

40| 176|4.
| 160 z rozmnożénia 40 przez 4.

16. Reszta.
16. Kwadrat z 4.

0.

Tymże sposobém wyciągnąć można piérwiástek kwadratowy z téy liczby 144.

Wzór działania.

1,44|10.
1 00 kwadrat z 10.

20| 44 |2
| 40 z rozmnożénia 20. przez 2.

4. Reszta
4. Kwadrat z 2.

0.

Niechby potrzeba wyciągnąć piérwiástek, z kwadratu : 692224.

Oddzieliwszy, iak wyżéy, kréskami co dwie liczby od prawéy ręki, będzie trzy oddziáłów, a zatém i trzy znaki w piérwiáſtku. Kwadrat náybliżéy przystępuiący do 69. iest 64, ktorégo piérwiástek iest 8; więc 8 stów, będzie znakiém piérwszym piérwiáſtku. Odiąwszy kwadrat 8. ſtów, toiest 640 000. od 692 224.zostanie 52 224.

Ta

Ta reszta powinná zamykać piérwszy znak 800 piérwiástku dwa razy wzięty, przez drugi znak dziesiątków rozmnożony, i kwadrat drugiégo znaku piérwiástku: powinná ieszcze zamykać dwa té piérwszé znaki stów i dziesiątków rozmnożonych przez trzeci znak iedności dwa razy wzięty, i nakoniec kwadrat znaku tegoż iedności. W szczególności zaś mówiąc, powinná zamykać 800. dwa razy wzięté, toiest 1600. rozmnożoné przez znak dziesiątków którégo szukámy. Podzieliwszy tedy 52 224, przez 1 600. znáydziémy na wieloráz 30, albo 3. dziesiątki: a zatém 3 dziesiątki będą znakiém drugim Piérwiástku. 1 600. rozmnożoné przez 30. czynią 48 000, któré od 52 224 odiąwszy, zostanie 4 224. Ta reszta má ieszcze zamykać kwadrat z 30, toiest 900, któré 900. od 4 224. odiąwszy, zostanie 3 324.

Ta reszta powinná zamykać część piérwiástku znalezioną 830, dwa razy wziętą, i rozmnożoną przez znak iedności piérwiástku, i ieszcze zamykać powinná kwadrat tychże iedności. Podzielmy więc 3 324. przez 1 660. toiest przez 830. dwa razy wzięté, a wieloráz 2. będzie znakiém iedności piérwiástku. Przez té 2. rozmnożywszy 1 660, i liczbę rozmnożoną: 3 320. odiąwszy od 3324. zostanie 4, która to reszta iest kwadratém z 2. iedności. Cały więc piérwiástek kwadratu: 692 224. będzie 832.

Wzór

Wzór działaniá.

```
        692 224.|800.
        640 000
1 600.| 52 224|  30
        48 000
         4 224
           900
1 600|  3 324|2
        3 320
            4
            4
            0
```

Trzeba iako náywięcey takich przykładów Uczniom podáwać, nieużywaiąc żádnego ieszcze skróceniá. Na wzór dwa się następuiące przykłady podaią.

Przykłád I.

```
        46,02,26,56|6000.
        36 00 00 00|
12000 |10 02 26 56|700.
        8 40 00 00
        1 62 26 56
          49 00 00
13400 |1 13 26 56| 80
       1 07 20 00
          6 06 56
            64 00
13560 | 5 42 56|4
        5 42 40
             16
             16
              0.
```

Przykłád II.

```
       13,59,39,69|3000
        9 00 00 00
6000 | 4 59 39 69|600.
       3 60 00 00
          99 39 69
          36 00 00
7200 |63 39 69|80
      57 60 00|
       5 79 69
         64 00
7360 |5 15 69|7.
      5 15 20
           49
           49
            0
```

117. *Uwága.* Jako w dzieléniu zwyczayném, tak i w wyciąganiu Piérwiástku kwadratowégo, można się (kto ieszcze nie iest wprawnym) łatwo pomylić w znakach wie orazu. Omyłka w dzieléniu łatwá iest do poprawiéniá, gdy uważać będziémy, ieżeli liczba dzieląca rozmnożoná przez wieloráz odiąć się może od części liczby podzielnéy, którą dzielić przypádá, albo ieżeli reszta nié iest większá od liczby dzielącéy. W wyciąganiu Piérwiáſtku kwadratowégo, (które wychodzi na iedno prawie co i dzieléníé w którémby liczba dzieląca co ráz się odmiéniała) możná także omyłkę iakąkolwiek postrzédz podobną, iak przy zwyczáyném dzieléniu; czyniąc uwágę, wzgląd ieszcze i na to miéć należy, że wyciągaiąc piérwiáſtek sposobém wyżéy podanym, dwa się czynią odeymowaniá, toieſt: odeymuie się naprzód liczba dzieląca przez część przypadaiącą Piérwiáſtku rozmnożoná, i powtóré odeymuie się kwadrat téyże części Piérwiáſtku: więc, gdyby zdarzyło się, że piérwszé tylko odięcié uczynić możná, a drugiégo iuż nié możná; oſtrzeżéni tém bylibyśmy, żeśmy wzięli wieloráz bardzo wielki, á zatém zmnieyszyć go potrzeba. W ostatnich dwóch przykładach, w piérwszym, 12000, zmieścić się mogło razy 800 w 10022656; a w drugim 6000. mogło się znáydować 700 razy w 4593969: ale nié możnáby było od reszty odiąć kwadraty tychże wielorazów, i przetośmy

w obuw obudwóch tych przykładach iednością wieloráz zmnieyszyli.

118. *Piérwszé*. Skrócénié, którégo przy wyciąganiu Piérwiáftku kwadratowégo użyć możná, ieft w opuszczéniu zerów w liczbie dzielącéy, podzielnéy, i w wielorazie, zachowuiąc iednak cyfróm pozoftałym té mieysca, któréby zastępować powinny, gdyby zera odcięté nie były.

119. *Powtóré*: Ponieważ ostatnié po prawéy ręce znaki kwadratu podanégo dó wyciągania Piérwiáftku, wcale się nieodmiéniaią, po piérwszych odeymowaniach; nie są więc do nich potrzebné; zatém do każdégo w szczególności odeymowaniá, możná té tylko cyfry spuszczać z kwadratu, od których odeymować przypádá liczbę dzielącą przez wieloráz rozmnożoną; zachowuiąc im mieyscé i znaczénié to samo, któré miały w całym kwadracie.

120. *Potrzecié*. Zamiáft dwóch odeymowáń, naprzód liczby dzielącéy przez wieloráz rozmnożonéy, potém kwadratu tegoż wielorazu, możná obadwa ſrazém czynić odeymowaniá: kładąc znak znaleziony na wieloráz', nie tylko na zwyczayném swoiém mieyscu; ale téż przy końcu liczby dzielącéy, i dopiéro tak powiększoną liczbę dzielącą mnożyć przez tén znak wielorazu, a rozmnożoną od liczb przypádaiących z kwadratu odeymować. Tu

Tu na tych samych liczbach kwadratowych, z których, iuż uczniowie wyciągali piérwiaſtek, niecháy użyią tych trzech sposobów ſkróceniá: bo im iuż i działanié będzie łatwieyszé, i lepiéy dokładność tego sposobu ſkróconégo obáczą, porównywaiąc działanié piérwszé z drugiém.

121. Wyciągniymy tym skróconym sposobém piérwiástek kwadratowy z liczby 13593969.

Naprzód oddzielić trzeba kréskami co dwie liczby: iak wyżéy: oddzieliwszy tak liczby kwadratu podanégo 13,59,39,69. widzimy, że tén kwadrat cztéry znaki liczebné mieć będzie w swoim Piérwiástku. Kwadrat náybliższy w piérwszym po prawéy ręce oddziele zawarty, będzie 9, którégo Piérwiástek, 3. znaczący tysiące. Odiąwszy tén kwadrat 9. od 13. zostanie 4. do których przypisáwszy oddział następuiący 59, będzie 459. Podwóymy piérwszy znak Piérwiástku 3. i będzie 6. Té 6, w piérwszych dwóch znakach 45, liczby 459, znalazłoby się razy 7: ale maiąc wzgląd, że kwadrat tego wielorazu nié mógłby się potém odiąć, położmy tylko 6, na mieyscu wielorazu, i przypiszmy ié także do 6. liczby dzielącéy. Rozmnożywszy 66. przez 6. i liczbę rozmnożoną 396, odiąwszy od 459, zostanie 63, do któréy reszty przypiszmy oddział kwadratu ná-

stępu-

stępuiący 39; i dzielmy daléy 6339, przez dwa znaki Piérwiástku znalezioné, 36, podwoiwszy ié, toiest, przez 72. 72 w 633 znáyduie się razy 8. Napiszmy 8. na wieloráz, i przypiszmy ié do liczby dzielącéy 72. Rozmnożywszy 728, przez 8, będzie 5824, któré odiąwszy od 6339. zostanie 515. Dopiszmy do téy reszty, ostatni kwadratu oddział 69, i 51569. dzielmy przez podwóyną liczbę znaków Piérwiástku iuż znalezionych 368: toiest, przez 736. 786 w 5156, znáydziémy razy 7. Przypiszmy té 7. do 368, i do 736. Rozmnożywszy 7367. przez 7. i liczbę rozmnożoną 51569 odiąwszy od 51569 nic nie zostanie: a zatém kwadratu podanégo piérwiástek będzie: 3687.

Wzór działania.

```
     13,59,39,69 | 3687.
      9
    ----------
    66|45,9
       396
      ----------
   728|633,9
       5824
      ----------
  7367.|5156,9
        51569
       ----------
          0.
```

122. *Wniosek.* Ponieważ wyniesiénié jakiéy liczby do kwadratu iest to iedno, co rozmnożénié téy liczby przez siebie

samę,

samę, czyli rozmnożénié dwóch liczb równych iednéy przez drugą kwadrat; więc ułomku iakiégo, będzie ułomek, którego licznik, iest kwadratém licznika tamtego, a mianownik kwadratém mianownika iego. I tak kwadrat z $\frac{1}{2}$, iest $\frac{1}{4}$ kwadrat z $\frac{1}{3}$. iest $\frac{1}{9}$. kwadrat z $\frac{2}{3}$, iest $\frac{4}{9}$; kwadraty ułomków $\frac{1}{4}$. $\frac{3}{4}$ są $\frac{1}{16}$, $\frac{9}{16}$ i t.d.

Chcąc tedy wyciągnąć piérwiástek kwadratowy z ułomka podanégo, trzeba osobno wyciągnąć go z licznika i z mianownika. I tak Piérwiástki kwadratowé tych ułomków; $\frac{9}{16}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{25}{36}$ i t. d. są $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{5}{6}$. i t. d.

123. *Uwága*. Gdy się trafi wyciągać Piérwiástek kwadratowy z liczby mieszanéy, toiest, złożoney z liczby cáłkowitéy, i z ułomka; trzeba ią piérwéy obrócić na sám ułomek. Tak naprzykłád chcąc wyciągnąć piérwiástek z 2. $\frac{1}{4}$. liczba ta będzie iedno co ułomek $\frac{9}{4}$. którégo piérwiástek $\frac{3}{2}$. czyli 1 $\frac{1}{2}$. Liczba téż: 2 $\frac{7}{9}$. iest iedno co $\frac{25}{9}$. a zatém piérwiástek iéy $\frac{5}{3}$. czyli: 1 $\frac{2}{3}$. Liczba 10 $\frac{6}{25}$. tylé znaczy co $\frac{256}{25}$. więc piérwiástek iéy: $\frac{16}{5}$. czyli 3 $\frac{1}{5}$.

O Jlościach niespółmiernych, i przybliżéniu Piérwiástków tych liczb, któré nie są kwadratami.

124. *Uwági.* 1. Niech będzie liczba 2. z którey przypádá wyciągać Piérwiástek kwadratowy. Piérwiástkiém tey liczby nie będzie ani 1, ani 2; bo kwadrat z 1. iest 1, mniéy od 2. a kwadrat z 2, iest 4. więcéy od 2. Więc Piérwiástek z 2, będzie między 1. i 2, a zatém będzie złożonym z jedności, i z ułomka, toiest: będzie liczbą mieszaną, którą na sám ułomek obrócić możná.

125. Aby ułomek tén był práwdziwym Piérwiástkiém z 2, trzebaby, aby kwadrat iego równáł się 2; a zatém aby kwadrat licznika iego był dwa razy większy od kwadratu mianownika. Znaléźćby tedy potrzeba taki kwadrat, któryby dwa razy w sobie zamykáł inny kwadrat: aże to iest nie podobná, zaráz się pokáże.

Każdá liczba kończyć się musi na iedén z tych dziesięciu znaków: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Każdy zaś kwadrat inaczéy kończyć się nié może, tylko na té znaki, na które kończą się kwadraty dziesięciu znaków dopiéro wyrażonych, toiest na:

1,

1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0.
czyli krócéy, na 1, 4, 9, 6, 5, 0.

Kwadraty podwoioné nié mogą się inaczéy kończyć, tylko tak, iak się kończą liczby kwadratów ostatnié, podwoioné, toiest, na: 2,8,8,2,0,0, czyli krócéy na: 2,8,0. A że piérwszé zakończéniá na, 2,8, nie są zakończéniami kwadratów; więc kwadraty podwoioné, liczb zakończonych na: 1,2,3,4,5,6,7,8,9, nié mogą bydź kwadratami. Jeżeli liczba zakończoná iest na iedno zero, toiest ieżeli iedén lub więcéy dziesiątków w sobie zupełnie zamyká: kwadrat iéy zamykać będzie takąż liczbę stów, a zatém kończyć się będzie na dwa zera. Kwadrat zaś liczby kończącéy się na 5, kończy się na 25. a podwoiony, kończyć się będzie na iedno tylko zero, bo będzie kończył się na 50: więc tak podwoiony nie będzie kwadratém.

Nakoniec ieżeli liczba kończy się na iedno zero, 10 razy zamykać w sobie będzie liczbę zakończoną na iedén z dziewięciu piérwszych znaków: 1,2,3,4,5,6, 7,8,9: a kwadrat iéy 100 razy zamykać będzie liczbę zakończoną na: 1,4,5,6,9, kwadrat zaś tén dwa razy wzięty, zamykać będzie 100. razy liczbę zakończoną na: 2, 8,0, a piérwiástek kwadratu tego dwa razy wziętégo, zamykać będzie 10. razy piérwiástek liczby zakończonéy na iedén z tych trzech znaków: 2,8,0;

który to oftatni piérwiáftek wyciągniony bydź nié może, iakośmy iuż okázáli. Tego samégo rozumowániá użyć można gdy liczba kończyć się będzie na dwa, trzy, cztéry i t. d. zera.

Więc w szczególności mówiąc, Piérwiástek kwadratowy z liczby 2, wyciągniony bydź nié może.

126. To Dowodzénié ftósowané bydź może do wszystkich liczb na 2. zakończonych. I tak nié możná wyciągnąć Piérwiáftku kwadratowégo z liczb: 12, 22, 32. 42, 52, 62. i t. d. czyli to w liczbach całkowitych, czyli w ułomkach, czyli w liczbach, miészanych.

127. Podobnie dowiéśdź możná, że niepodobná znaleźć piérwiástek kwadratowy liczby 3. ani żádnéy innéy na 3. kończącéy się. Tym, co wyżéy sposobém dowodzi się niepodobność wyciągniéniá Piérwiáftku kwadratowégo z liczb kończących się na 5, 7, i t. d: a ftąd możnáby ułożyć Táblicę bardzo obszérną liczb takich, których Piérwiáftki kwadratowé w liczbach ani cáłkowitych, ani łámanych, zupełnie wyciągnioné bydź nié mogą.

128. Moznáby iednak i ogólnie dowiéśdź, że wszystkié liczby cáłkowité, które nié maią Piérwiáftku kwadratowé-

go

go w liczbach całkowitych; mieć go też nie będą i w liczbach łamanych. Kładzie się tu treść tylko tego dowodu:

Jeżeli dwie liczby są *piérwszémi* iedna względém drugiéy, (obacz w Arytmetyce na karcie 192.) ich kwadraty piérwszémi też będą iedén względém drugiégo; ponieważ dzielniki kwadratów pochodzą z dzielników ich Piérwiástków.

I tak, że liczby 2, i 3, są między sobą *piérwszémi*; piérwszémi są także między sobą i ich kwadraty: 4, i 9; że liczby 3. i 5. są między sobą piérwszémi: podobnież pierwszémi bądą i ich kwadraty 9. 25, Więc ieżeli dwie iakiékolwiek liczby są piérwszémi między sobą, ich kwadraty nie będą wielokrotné iedén drugiégo, toiest: iedén kwadrat nie będzie zupełnie w sobie zamykáł drugiégo.

Niech będzie liczba iaká cáłkowitá, któréy nié można mieć Piérwiástku kwadratowégo w liczbach cáłkowitych. Gdyby tén Piérwiastek można zupełnie okázać w liczbie miészanéy; ta liczba miészaná, dałaby się obrócić na sám ułomek, a ułomek tén możnáby przywieśdź do náyprościeyszych wyrazów. Ale, aby ténże ułomek wyráżáł zupełny Piérwiastek; trzebaby, aby iego kwadrat był liczbą całkowitą, a zatém aby licznik tego ułomka kilka razy zupełnie większy był od dzielnika iego, co ieſt nie podobná: więc, gdy liczbie iakiéy cáłkowitéy, nié można zupełnie znaléźć piérwiáſtku kwadratowégo w liczbie cáłkowitéy: nié można go téż znaléźć ani w ułomku.

129. Są więc takié niektóré Ilości (*Quantitates*) któré w liczbach dokładnie bydź wyrażoné nié mogą, ani nawet wyrazić można, iak się maią do iedności. Takié są té Ilości, któré przez siebie samé rozmnożoné, czyniłyby: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, i t. d. Te ilości nazywaią się *niespółmiernémi* (Jncommensurabiles, *albo* Jrrationales) piszą się naſtępuiącym sposobém. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$. i t. d. Znak ten $\sqrt{\ }$, czytá się *Piérwiáſtek* (Radix) naprzykład: $\sqrt{2}$, Piérwiáſtek dwóch, $\sqrt{3}$, Piérwiástek trzech, i t. d.

130. Gdy mówię, że tych Ilości wyrazić dokładnie nié można; przydaię zaráz, że ich dokładnie wyrazić nié można w liczbach; bo w jnny sposób można ie dokładnie wyrazić. Naprzykład: można zawsze naznaczyć dwie liniie, któréby się miały między sobą, iak 1, do Piérwiástku kwadratowégo liczby podanéy. I tak Przekątna kwadratu, má się do boku iednégo, iak się má Piérwiáſtek kwadratowy z 2, do 1. albo iak $\sqrt{2}$: 1. Wysokość także Tróykąta równobocznégo, tak się má do połowy Podstawy, iak $\sqrt{3}$: 1. i t. d.

131.

131. Lubo w liczbach nié można dokładnie wyrazić Ilości niespołmiernych; można iednak ich wártość przybliżyć do práwdziwéy, i uchybiénié zmniéyszyć tylé, ilé zechcémy. Sposób do tego náysnadnieyszy iest przez użycié znaków *Dziesiątnych* do wyrażéniá takich Ilości.

Niech będzie podáná liczba 2, aby wyciągnąć z niéy Piérwiáſtek kwadratowy przez *przybliżénié* (per approximationem.)

Gdyby liczba podaná była rázy 100, 10000. 1000000, i t. d. większá, iéy piérwiáſtek byłby téż większy razy 10, 100, 1000 i t.d. takdalece, że wyciągnąwszy piérwiáſtek z liczb 200, 20000, 2000000. i t. d. trzebaby piérwiáſtek tén dzielić przez 10, 100, 1000, i t. d. aby w nim uniknąć omyłki w częściach dziesiątych, setnych, tysiącznych i t. d. Przeto Piérwiáſtek kwadratowy, wyciągniony z 2, aż do cząſtek tysiącznych, znáydzie się wyciągaiąc go z liczby: 2000000.

Piérwiáſtek náybliższy z liczby 2000000 wyciągniąny ieſt: 1414. a piérwiáſtek z liczby 2, przybliżony aż do $\frac{1}{1000}$. ieſt, 1, 414. Ponieważ kwadrat z 1, 414. ieſt 1,999396, i różni się od 2, tylko 0,000604.

Wzór

Wzór działaniá.

```
        2,00,00,00|1,414
        1
       ------
   24|10,0
      9 6
      ----
  281.| 40,0
        28 1
       ------
  2824|11 90,0
       11 29,6.
       ---------
          60 4.
```

Gdybyśmy chcieli ieszcze bardziéy przybliżyć do práwdziwego, tén Piérwiástek, naprzykład żeby ani w cząstce $\frac{1}{10000}$. nie było uchybiéniá; trzebaby ieszcze dwa zera przydadź, aby mieć iednym znakiém więcéy w piérwiástku.

132. Dlá spráwdzéniá, czyliśmy w cząstce $\frac{1}{1000}$. nie uchybili, możná położyć zamiást piérwiástku znalezionégo 1,414; liczbę: 1,415, a ta przez siebie rozmnożona uczyni kwadrat: 2,002225, większy od 2.

133. Częstokroć bardzo wygodnie i prętko wyciągnąć możná z liczby piérwiástek przybliżony, w ułomkach zwyczaynych. Sposób tén zasádzá się na tém, że ieżeli liczba iest złożona z dwóch części, z których iedna iest bardzo wielká względém drugiéy; kwadrat téy licz-

by

by będzie prawie złożony z kwadratu części większéy, i z podwoionégo rozmnożénia części piérwszéy przez drugą; ponieważ kwadrat części mnieyszéy, iako bardzo mały, może bydź zaniedbany. I tak kwadrat liczby naprzykład 11, podzielonéy na dwie części: 10, i 1. będzie równy 100, toiest kwadratowi z 10, przydáwszy 10. przez 2 rozmnożoné, toiest, 20, i kwadrat części mnieyszéy: 1; a choćby tén ostatni kwadrat i opuścić; tedy iednak summa 120, małoby się różniła od kwadratu práwdziwégo 121.

134. Idzie stąd, że maiąc liczbę, z któréy przypádá wyciągać Piérwiástek złożony z dwóch części, z których iedna byłaby wielká, a drugá małá, ieżeli wiémy iuż tę część wielką, znáydziémy z niewielkiém uchybieniém i część małą, podzieliwszy różnicę między liczbą podaną, i kwadratém części wielkiéy, przez tę samę część wielką dwa razy wziętą. To, co na wieloráz wypadnie, trzeba przydadź do wielkiéy części, gdy liczba podaná będzie większá od kwadratu części wielkiéy; albo odiąć od części wielkiéy, gdy kwadrat iéy większy będzie od liczby podanéy.

Niech będzie podaná do wyciągniéniá Piérwiástku, liczba 5. Piérwiástek iéy náybliższy w liczbie cáłkowitéy, iest 2.
któ-

którégo kwadrat 4. Różnica między tym kwadratém i ſ, iest: 1. Podzielmy tę różnicę 1. przez 2, dwa razy wzięté, toiest przez 4, i będzie $\frac{1}{4}$. A zatém Piérwiástek liczby ſ. nie wiele uchybiony, będzie 2, $\frac{1}{4}$. albo $\frac{9}{4}$. Kwadrat z $\frac{9}{4}$. iest $\frac{81}{16}$. czyli ſ. $\frac{1}{16}$. Podzielmy $\frac{1}{16}$. przez $\frac{9}{4}$. dwa razy wzięté, toiest przez $\frac{9}{2}$. wypadnie na wieloráz $\frac{1}{72}$. który odiąwszy od $\frac{9}{4}$. czyli od 2, $\frac{1}{4}$. zostanie 2 $\frac{17}{72}$. albo $\frac{161}{72}$. i tén będzie ieszcze bardziéy przybliżaiący się do prawdziwégo piérwiástek kwadratowy liczby ſ. Jakoż kwadrat z $\frac{161}{72}$ iest: $\frac{25921}{5184}$. czyli ſ $\frac{1}{5184}$.

135. Chcąc porównać to przybliżénié z tém, któréśmy mieli w ułomkach dziesiątnych; obróćmy ułomek zwyczayny $\frac{161}{72}$. na ułomek dziesiątny, a znáydziémy: 2,2361. i t. d. Piérwiástek zaś liczby ſ, w ułomku dziesiątnym byłby 2,2360. i t. d. A zatém różnica liczb w tém dwoiakiém postępowaniu, wydałaby się dopiéro w częściach dziesięć tysiącznych.

136. W piérwszém postępowaniu, kładzie się zamiást liczby podanéy, ułomek ze wszystkiém iéy równy, któré-go dzielnik iest kwadratém z 10, z 100,

z 1000.

z 1000. i t. d. Naprzykłád zamiást 2, pisze się $\frac{200}{100}$. $\frac{20000}{10000}$. $\frac{2000000}{1000000}$. W drugiém postępowaniu, szukámy ułomka bardzo blizko równégo liczbie podanéy. Którégo tak licznik, iako i mianownik, byłby zupełnym kwadratém. I tak liczba 2, iest prawie równá ułomkóm: $\frac{9}{4}$. $\frac{49}{25}$. $\frac{100}{49}$. $\frac{280}{144}$. i t. d. Liczba 3, iest prawie równá ułomkóm: $\frac{49}{16}$. $\frac{361}{121}$. i t.d. Znáyduiémy zaś té ułómki, dwoiąc, troiąc i t.d. kwadraty liczb naturalnych: 2, 3, 4, 5, i t.d. i uwáżaiąc, ieżeli między liczbami kwadratowémi nie będzie która tuż zbliżaiącá się do liczby podwoionéy, potroionéy, i t.d. którąśmy iuż znaleźli. Naprzykłád: 2 razy 4, czyni 8, a blizko czyni kwadrat 9, więc 2, zupełnie rowná się $\frac{8}{4}$. a nie daleko iest od $\frac{9}{4}$. a zatém Piérwiásték z 2, będzie blizko $\frac{3}{2}$. Podobnie 2 razy 25, czyni 50, więc 2, rowná się $\frac{50}{25}$. a nie daleko iest od $\frac{49}{25}$; a zatém Piérwiástek z 2, będzie blizko: $\frac{7}{5}$. Możná potém poprawić, gdy zechcémy piérwsze té przybliżénia, postępuiąc sobie tak, iak się wyżéy powiedziało.

Dosyć będzie tém czasém na téy początkowéy wiadomości względém przybliżania Piérwiáſtków nie spółmiernych. Rzecz ta ſtała się materyą wielkiéy wági, gdy sławni Matematycy *Euler* i de la *Grange*, głę-

głębiéy ią brać poczęli, i rozmaite, iéy przystósowania czynić. (m)

137. Niech będzie ułomek $\frac{1}{3}$, z którégo trzeba wyciągać Piérwiástek kwadratowy. Zamiást cobyśmy mieli osobno tén Piérwiástek wyciągać z 2, i z 3, i dzielić potém Piérwiástek Licznika przez piérwiástek mianownika, wygodniéy będzie ułomek tén $\frac{2}{3}$, odmiénić na inny, gdzieby mianownik, był zupełnym kwadratém. Ułomek tedy tak odmiéniony będzie $\frac{6}{9}$. Wyciągniymy piérwiástek z licznika 6, a trzeciá część tego Piérwiástku, będzie piérwiástkiém ułomka $\frac{2}{3}$. $\sqrt{6} = 2, 4494$; trzeciá tego piérwiástku część ieſt prawie 0, 8165. Jakoż kwadrat z 0, 8165, będzie: 0, 66667225; i nie wiele różni się od $\frac{2}{3} =$ 0, 6666666. i t. d.

138. Możnáby téż wyciągnąć piérwiástek z $\frac{2}{3}$, przez ułomki zwyczayne. Kwadrat náybliższy ułomka $\frac{2}{3}$, ieſt 1. który różni się od $\frac{2}{3}$ przez $\frac{1}{3}$. Dzielmy, przez kwadrat 1. podwoiony toieſt przez 2, tę różni-

---

(m) Obácz między innémi Dziéło pod Tytułém: *Introductio ad analysim Infinitorum* przez Eulera; i przydatki, de la Grange do Algebry po Francuzku wydané.

różnicę $\frac{1}{3}$, i będzie $\frac{1}{6}$. a odiąwszy $\frac{1}{6}$, od 1. albo od $\frac{6}{6}$, zostanie $\frac{5}{6}$. kwadrat z $\frac{5}{6}$, iest $\frac{25}{36}$ który od $\frac{2}{3}$. różni się przez $\frac{1}{36}$. Tę różnicę $\frac{1}{36}$. podzieloną przez dwa razy $\frac{5}{6}$. czyli przez $\frac{5}{3}$. toiest $\frac{1}{60}$, odeymuię od $\frac{5}{6}$, zostanie $\frac{49}{60}$. J ten ułomek $\frac{49}{60}$, będzie pierwiastkiem bardzo blizkim z $\frac{2}{3}$, ponieważ kwadrat z $\frac{49}{60}$ iest. $\frac{2401}{3600}$, a ułomek: $\frac{2}{3}$ znaczy tyle co $\frac{2400}{3600}$, różnica więc będzie tylko w $\frac{1}{3600}$.

139. W ogólności mówiąc, aby Pierwiastek kwadratowy wyciągnąć z ułomka iakiego; trzeba pierwey tak zrobić, aby mianownik iego był kwadratem, mnożąc, gdy inaczey bydź nie może, licznika i mianownika przez mianownika, i wyciągać potem pierwiastek z licznika tak rozmnożonego, a przez mianownika nie rozmnożonego podzielić ten pierwiastek.

140 Może się iednak obeyśdź czasem bez mnożenia tak licznika, iako i mianownika, przez tegoż samego mianownika; gdy mianownik iuż iest kwadratem, albo gdy takim można go uczynić, mnożąc przez mnieyszą iaką od mianownika liczbę, tak licznika, iako i mianownika. Naprzykład chcąc wyciągnąć pierwiastek z $\frac{3}{4}$; wyciągniemy go z 3. i podzielimy przez 2; chcąc mieć pierwiastek z $\frac{5}{12}$, rozmnożymy 5. i 12. przez 3. a maiąc ztąd $\frac{15}{36}$,

$\frac{15}{30}$, wyciągniemy pierwiastek z 15, i podzielimy przez 6. pierwiastek z 15, będzie prawie 4, odtrąciwszy $\frac{1}{8}$, toiest będzie $3\frac{1}{8}$ więc pierwiastek z $\frac{5}{12}$ będzie $\frac{31}{48}$; kwadrat albowiem z $\frac{31}{48}$. iest $\frac{961}{2304}$ a $\frac{5}{12}$. tyle znaczy, co $\frac{960}{2304}$: a zatem uchybienie iest tylko w $\frac{1}{2304}$:

ROZDZIAŁ VI.

O dodawaniu i odeymowaniu Kwadratów, i zamienianiu ich na iakiekolwiek Figury prostokreślne.

141. DEfin: W tróykącie prostokątnym, bok przeciwny prostemu kątowi nazywać będziemy, Liniią *Przeciwprostokątną*, albo iednem słowem, Przeciwprostokątną (Hypothenusa.)

142. *Twierdz:* 1. Kwadrat zrobiony na przeciwprostokątney Tróykąta prostokątnego, równa się summie kwadratów z dwóch innych boków tegoż tróykąta.

Prawdę Twierdzenia tego okazać naprzód potrzeba na Tróykącie Prostokątnym, równo ramiennym, toiest maiącym dwa boki rowne dowodząc: że kwadrat zrobiony na Przekątney kwadratu dwa razy iest od tegoż kwadratu większy.

Niech

Niech będzie ABCD, kwadrat; którégo Przekątna AC. Przeciągniymy AB, do E, a CB, do F, tak, aby BE, i BF, równé były AB. Poprowadźmy Liniie: AF, CE, EF, Czworokąt ACEF, będzie kwadratém przekątnéy AC, i będzie dwa razy większy od kwadratu ABCD. Táb.VIII. *Fig.* 2.

Jakoż cztéry Tróykąty: ABC, ABF, EBC, EBF, mogą przystać do siebie: bo maią wszystkié kąty przy B. prosté, i boki przy nich równé: a zatém liniie AC, CE, EF, AF, będą wszystkié równé. Każdy oprócz tego kąt w czworokącie ACEF, iest prosty bo złożony z dwoch kątów pół prostych: iak naprzykład kąt ACE, złożony iest z kątów półprostych BCA, BCE; więc Czworokąt ACEF iest prostokatém maiącym boki wszystkié równé a przeto iest kwadratém. Tén kwadrat ACEF, składá się z czterech Tróykątów, z których każdy przystać może do iednégo z dwóch Tróykątów kwadratu ABCD. Że tedy takich Tróykątów iest cztéry w kwadracie ACEF, iakich iest dwa w kwadracie ABCD, kwadrat więc Przykątnéy AC, iest dwa razy większy od kwadratu tego, którégo bokiém iest ta Przekątná.

143. *Wniosek*: Aby dodadź dwa kwadraty równé, trzeba zrobić Tróykąt prostokatny równoramiénny, którégo boki przy kącie prostym byłyby równé, bokowi iednégo z dwóch kwadratów,

tów, a Przeciwproftokątná tego Tróyką-ta, będzie bokiem kwadratu równego summie dwóch tamtych kwadratów.

Tab. VIII. Fig. 3.

Możná ieszcze nim się do ogólnégo dowodzéniá przyftąpi, przytoczyć niektóré przypádki szczególné, gdzie trzy boki Tróykąta proftokątnego będą w liczbach wyrażoné. Obácz na Figurze 3. gdzie trzy boki Tróykąta proftokątnego, wyrażoné przez liczby: 5, 4, 3. w częściach równych, naprzykład w calach, kwadraty tych liczb są, 25. 16, 9. calów kwadratowych; i piérwszy kwadrat równá się summie dwóch oftatnich.

INNÉ PRZYKŁADY.

Przeciwproftokątné	Boki.
13, - - -	12 - 5
17, - - -	15 - 8
25, - - -	24 - 7.

Dowodzénié ogólné, które terázdámy, możná obiaśnić na kwadratach z karty grubéy wyrzniętych.

Tab. VIII. Fig. 4.

Niech będą dwa iakiékolwiek kwadraty: ABCD, i AEFG znaydziémy kwadrat równy ich summie w ten sposób. Poftáwmy naprzód té kwadraty, ieden przy drugim tak, aby dwa ich boki AD, i AG, ftykały się, i iednę liniią czyniły DG, Bok

AG

AG mnieyszégo kwadratu, przenieśmy potém na bok AD. większégo kwadratu od D do J. Poprowádźmy liniié IF, IC. Tróykąty proſtokątné IGF, CID. maią boki przyległé kątowi proſtému równé bokóm kwadratów obudwóch. Trzeba więc dowieśdź że kwadrat przeciw proſtokątnéy IF, albo IC, równy ieſt summie kwadratów z GI, GF, albo z DC, i DI. Wyrznąwszy kartę wzdłuż Linii IF, i IC, przyłóżmy, Tróykąta IDC, Bok DC, na iego równym boku BC, bok DI, przypadnie na BH, przedłużéniu boku AB, a to z téy przyczyny, że obadwa są kąty proſté D, i B; bok zatém trzeci IC, weźmie położénié HC: będzie więc Tróykąt CBH, równy Tróykątowi GDI. Podobnie i drugiégo Tróykąta IGF, bok IG, przyſtanie zupełnie do boku HE, sobié równégo, poniewáż IG, rowná się AD, AD, równá się AB: a AB. równá się HE: bok GF, przypadnie na równy sobie bok EF: a IF, weźmie położénié HF: będzie więc Tróykąt FEH, równy Tróykątowi FGI. Czworokąt, który się zrobi z cztérech przeciwproſtokątnych: CI, IF, FH. HC, będzie miáł wszystkié kąty proſté, bo kąt na przykłád IFH, równá się summie kątów IFE, i EFH, któré równie czynią kąt proſty, iak czyniły kąty IFE i IFG. Tén więc czworokąt ieſt razém i proſtokatém maiącym wszyſtkié boki równé, a zatém ieſt kwádratém: który to kwadrat rowná się summie dwóch kwadratów podanych, a

zro-

zrobiony ieſt na Przekątnéy Tróykąta proſtokątnégo, maiącégo za boki przyległé kątowi proſtému té samé, któré były bokami tychże kwadratów.

Dowodzénié naſtępuiącé powinno tym iaśniéy bydź wyłożoné; im prościéy iescze od piérwszégo tę prawdę okazuie, i więcéy daie do czynienia dowcipowi. Wielé także użytecznych wnioſków z niego wypływá.

Tab. IX. Fig. 1. Niech będzie Tróykąt ABC. proſtokątny przy C. Na trzech bokach iego: AB, AC, BC, wyſtáwmy trzy kwadraty: ABDE, ACFG, BCHI. Kwadrat ABDE, równy będzie summie dwóch innych: ACGF. i BCHI.

Z wiérzchołku kąta proſtégo spuśćmy na przeciwproſtokątną AB, proſtopadłą CL, i przeciągniymy ią aż do boku ED, do M.

Pokázać teráz trzeba, że kwadrat BCHI równy ieſt proſtokątowi BDML, a kwadrat ACFG, Proſtokątowi AEML, a zatém obadwá razém kwadraty równé kwadratowi ABDE.

Pociągniymy liniią CD, Tróykąt BDC, będzie połową Równoległoboku proſtokątnégo BDML; bo obadwa maią spólną podſtawę BD, i na téyże saméy równo odległéy MC, są zakończoné. (94.)

Po-

Pociągniymy liniią AI, Tróykąt BIA, będzie połową kwadratu BCHI, dlá téyże, co wyżéy, przyczyny: bo obadwa także maią podstawę spólną BI, i obadwa na iednéy równoodległéy AH, są zakończoné.

Jeżeli tedy dowiedziémy, że Tróykąty: ABI, CBD, są równé; iuż tém samém Prostokąt BDML: równy będzie kwadratowi BCHI; bo kiedy połowy dwóch rzeczy są równé; to i dwie té rzeczy będą równé.

Té dwa Tróykąty mogą przystać do siebie: ponieważ bok AB, w jednym, równy iest bokowi BD, w drugim, bo obadwa té boki do iednégo kwadratu należą: bok BI, w jednym, równy także iest bokowi BC w drugim: kąty między témi bokami zawarté: ABI, CBD, składaią się obadwa z kąta prostégo i z kąta ABC; więc té dwa Tróykąty są równé w powiérzchniach; a zatém i kwadrat BCHI, równy będzie Prostokątowi BDML. Tymże samym sposobém dowodzi się, że kwadrat ACFG, równy iest Prostokątowi AEML, toiest, pociągnąwszy liniie CE, BG, Tróykąty BAG, EAC, mogą przystać do siebie, a zatém będą równé: kwadrat więc ACFG, że iest dwa razy większy od Tróykąta BAG, będzie równy Prostokątowi AEML, dwa razy także większému od Tróykąta EAC. (n)

144. *Wniosek*. Gdy od wiérzchołka kąta prostégo, w Tróykącie prostokątnym spuszczoná będzie Prostopadłá na przeciw prostokątną; kwadrat z boku iednégo tego Tróykąta równy będzie Prostokątowi zrobionému z przeciwprostokątnéy, i z odcinka uczynionégo przez Prostopadłą, a przyległégo témuż Tróykąta bokowi, którégo kwadrat bierze się. Tak naprzykład kwadrat boku AC, toiest ACFG, równy iest Prostokątowi z Przeciwprostkątnéy AB, albo AE. i z odcinkn AL, toiest, Prostokątowi AEML; iako się wyżéy pokazało. Podobnie i kwadrat drugiégo boku BC, toiest BCHI, równy

---

(n) Sposób postępowaniá w tém dowodzéniu, może służyć za wzór do innych dowodzéń przydłuższych i z wielu złożonych. Podzieliliśmy go na części, z każdą osobnośmy się obeszli. W tych samych częściach były znowu uczynioné, nowé podziáły, nie zawisłé iedné od drugich, i każdy podziáł w szczególności dowodzony. Liniie nie były razém prowadzoné ale wtedy dopiéro, gdy były potrzebné. Ta ostatniá uwága powinná bydź między innémi na pamięci w dowodzéniu Twiérdzéń złożonych, gdzie gdyby wielé razém liniy prowadziło się na Figurze, nie małą trudność zadałoby to Uczniom, nie dobrze ieszcze w takowé działaniá wprawionym.

równy iest Prostokątowi z Przeciwprostkątney AB, albo BD, i z odcinka BL, toiest, Prostokątowi BDML.

145. *Zagádn:* 1. Maiąc dané dwa kwadraty, zrobić kwadrat równy ich summie, albo ich różnicy.

1. Zróbmy kąt prosty, któré go ramionami byłyby boki dwóch kwadratów danych. Pociągnąwszy przeciwprostkątną, ta będzie bokiém kwadratu równégo summie tamtych dwóch kwadratów.

2. Zróbmy kąt prosty, dáwszy mu za iedno ramię bok mnieyszégo kwadratu. Od końca tego ramiénia, promiéniém równym bokowi większégo kwadratu, nakréślmy łuk koła, któryby przecinał ramié drugié kąta prostégo: to przecięcié naznaczy długość tego drugiégo ramiéniá, z któré go wyprowadziwszy kwadrat; ten będzie równy różnicy dwóch kwadratów danych.

Gdyby kwadraty dané były równé; rozwiązanié byłoby ieszcze łatwieyszé.

Przystósowanié zagádniéniá, poprzedzaiącégo, do wynaleziéniá innych Kwádratów.

146. Jużeśmy pokázali, że kwadrat Przekątnéy iest dwa razy większy od

kwadratu, którégo iest ta Przekątná. Aby zrobić kwadrat równy summie trzech kwadratów równych, czyli aby potroić iaki kwadrat, znalázłszy naprzód kwadrat podwóyny, możnáby mu przydadź znowu kwadrat poiedynczy, ale téż można i ieszcze lepiéy tak sobie postąpić: Kwadrat potróyny iest różnicą kwadratu poczwornégo, od kwadratu poiedynczégo. Zróbmyż więc Tróykąt prostokątny, którégo bokiém iednym byłby bok kwadratu danégo, a Przeciwprostkątną dáymy mu dwa razy większą od tego boku; bok drugi, który przypadnie w tymżé Tróykącie będzie taki, iakiégo nám potrzeba, abyśmy mieli kwadrat potróyny.

147. *Uwága.* Tróykąt Prostokątny, którégo Przeciwprostkątná iest dwa razy tak wielká, iak iest wielkié ramić iedno kąta prostégo, tén mówię, Tróykąt dwa razy iest mniéyszy od Tróykąta równobocznégo, ktorégo połową podstawy byłoby ramić iedno kąta prostégo, a drugié byłoby wysokością iego: a zatém, aby potroić iaki kwadrat, dosyć iest na podstawie dwa razy większéy od boku tego kwadratu zrobić Tróykąt Równoboczny, a wysokość tego Tróykąta okáże wielkość boku, na którym wystawić mámy kwadrat potróyny.

148. Aby zrobić cztéry razy większy kwadrat-

kwadrat od tego, który ieſt dany; trzeba tylko kwadratu danégo bok podwoić.

149. Aby zrobić kwadrat pięć razy większy od podanégo; trzeba przy kącie proſtym poſtawić dwa ramiona: iedno równé bokowi kwadratu danégo, drugié dwa razy tak wielkié, a przeciwproſtkątná będzie bokiém kwadratu pięć razy większégo.

150. Aby zrobić kwadrat sześć razy większy od podanégo; trzeba albo dodadź do siebie kwadrat poczworny i podwóyny: albo téż kwadrat podwóyny potroić poprowadziwszy w danym kwadracie Przekątną, i tę podwoioną, wziąwszy za bok Tróykąta równobocznégo, którégo wysokość oznaczy bok kwadratu szesć razy większégo.

151. Aby zrobić kwadrat siédm razy większy od danégo: trzeba dodadź kwadrat poczwórny i potróyny, dáwszy kąt proſty między bokami tych dwóch kwadratów a na przeciwproſtkątnéy kwadrat poſtawiwszy; tén będzie siédm razy większy od danégo.

152. Aby zrobić kwadrat ośm razy większy od podanégo; trzeba go albo podwoić, i podwoiony cztéry razy pomnożyć, dáwszy mu bok dwa razy większy od boku kwadratu podwoionégo;

al-

albo też zrobić kwadrat równy Różnicy między kwadratem danym, i kwadratem dziewięć razy większym od niego; postawiwszy na ten koniec Tróykąt prostokątny któremu za ramie iedno przy kącie prostym damy bok kwadratu podanego, a za przeciwprostkątną, liniią trzy razy od tego boku większą. Ramie drugie, które przypadnie w tym Tróykącie, oznaczy bok kwadratu ośm razy większego od danego.

153. Aby zrobić kwadrat dziewięć razy większy od podanego; trzeba mu dadź bok, trzy razy od podanego większy.

154. Aby zrobić kwadrat dziesięć razy większy od podanego; trzeba wziąźć summę kwadratów, podanego, i dziewięć razy większego.

155. Aby zrobić kwadrat iedenaście razy większy od podanego; trzeba wziąźć, summę kwadratów, dwa razy, i dziewięć razy tak wielkiego, iak iest podany.

156. Aby zrobić kwadrat dwanaście razy większy od podanego: trzeba podwoić bok kwadratu potróynego, i na tym boku potróynym kwadrat postawić.

157. Aby zrobić kwadrat trzynaście

razy

razy większy od podanego; trzeba wziąść summę kwadratu poczwornego, i dziewięć razy większego, niż iest kwadrat podany: albo też postawić Tróykąt prostokątny i dadź dwa ramiona: iedno trzy razy, a drugie dwa razy większe od boku kwadratu podanego; przeciwprostkątná oznaczy bok kwadratu trzynaście razy większego i t. d.

158. Wniosek z zagádnieniá poprzedzaiącego, ze kwadrat ramieniá iednego przy kącie prostym, równy iest Prostokątowi i z odcinka iey przyległego temuż ramionowi, przez prostopadłą zrobionego, ten mówię wniosek daie sposób ogólnieyszy, a czasem i prostszy rozwiązaniá zagádnień w przystósowaniu położonych.

Jakoż ieżeli przeciw prostkątná iest dwa, trzy, cztery i t. d. razy tak wielká, iak odcinek przyległy iednemu bokowi; prostokąt z tey przeciw prostkątney i z tego odcinka, będzie też dwa, trzy, cztery i t. d. razy tak wielki, iak kwadrat tego samego odcinka: a zatem i kwadrat boku przyległego temu odcinkowi będzie też dwa, trzy, cztery i t. d. razy, tak wielki, iak kwadrat tego odcinka: co iasno bydź powinno, maiąc w pamięci to, co się powiedziało w Arytmetyce na karcie 88, i następuiących o mierzeniu Prostokątów; a co tu nie zawadzi powtórzyć.

159.

159. *Podanie przybrane* (Lemma). (o) Gdy od punktu którégokolwiek na okręgu koła, poprowadzoné będą dwie liniie do dwóch końców średnicy; kąt przy tym punkcie zrobiony, i zawarty między dwiéma témi liniiami będzie prosty.

Táb. IX. *Fig.* 2. Niech będzie AKB, półkole, którégo AB, iest średniá. Weźmy iakikolwiek punkt, na przykłád K, na okręgu tego półkoła, i poprowádźmy od tego punktu liniie AK, BK, do końców średnicy. Kąt zrobiony przez té dwie liniie iest prosty.

Przygotowanié. Pociągniymy promień CK.

Dowodz. Tróykąt AKC. iest równoramiénny, bo AC; równá się CK; więc i kąty A, i CKA, na przeciw tym bokóm stoiącé będą równé; toż mówić, i o Tróykącie CKB; a zatém w Tróykącie AKB, kąt przy K, będzie równy summie kątów A i B; a ponieważ razém z témi dwoma kątami, czyni dwa kąty prosté; więc sám przez się będzie czynił kąt iedén prosty.

160.

(o) Lemma nazywámy podániém przybraném; że nie należy właściwie do téy rzeczy, o któréy mowa, i że się przybiérá czasém z jnnéy części Matematyki dlá przysposobiéniá nas do łatwieyszégo zrozumiéniá tego, co następuie.

160. *Zagádn*: 2. Znaléźć kwadrat, któryby kilka całe razy, lub więcéy zamykáł w sobie kwadrat dany.

Niech AC, zamyká tylé razy w sobie AB, ilé razy kwadrat, którégo szukámy, má w sobie zamykać tén który ieſt dany. Na AC, iako na śrzednicy nakréślmy półkole. Od punktu B. wyprowádźmy proſtopadłą BD, przecinaiącą półkole w Punkcie K. Liniia AK, będzie służyła za bok kwadratowi żądanému. Táb. IX. *Fig*. 3.

161. *Uwága*. Trzeba tu pokázać widocznie Ucznióm pożyteczność większą i ogólnieyszą Geometryi, niżeli Arytmetyki ponieważ w Arytmetyce nié można zupełnie wyciągnąć Piérwiáſtku kwadratowégo z liczb całych które są podwóyné, potróyné, poszoſtné i t. d. innych liczb kwadratowych. J tak nié można, nawet w ułomkach, znaléźć Piérwiáſtku kwadratowégo liczb 2,3,5,6, i t. d; a w Geometryi, iako się pokázało, znáyduiémy i wyznáczámy boki kwadratów podwóynych, potróynych, poszóſtnych i t. d.

Możná więc powiedzieć, że niepodobność w wyznaczéniu piérwszych ilości, których kwadraty byłyby podwóyné, potróyné, i t. d. innych kwadratów, nie ieſt w sobie, ale pochodzi tylko od sposobu, którégo używámy.

162.

162. *Zagádn*: 3. Maiąc dany Prostokąt, zamienić go na kwadrat iému rówńy.

Rozwiąz: Na większy bok prostokąta, przenieśmy długość boku iego mnieyszégó, tak, aby koniec iedén tego boku mnieyszégo schodził się z końcém iednym boku większégo. Na tymże boku większym, iako na śrzednicy nakréślmy półkole a do kónca drugiégo boku mnieyszęgo nie schodzącégo się z końcém drugim boku większégo wyprowádźmy Prostopadłą, i od punktu przecięciá téyże Prostopadłéy z półkołém, poprowádźmy liniią do tego końca śrzednicy, ktory schodzi się z bokiém mnieyszym Prostokąta. Ta ostatniá liniiá będzie bokiém kwadratu równégo Prostokątowi.

164. *Wniosek*. Widzieliśmy w Rozdziále V. iáko Figurę każdą prostokréślną można zamiénić na Prostokąt. Teráz się pokázało, iak można Prostokąt każdy zamiénić na kwadrat: więc każda Figura Prostokréślná, może bydź i na kwadrat zamiéniona.

W Tróykącie maiącym kąt iedén roztwarty, kwadrat boku przeciwnégo tému kątowi, większy iest od summy kwadratów dwóch innych boków: mnieyszy zaś byłby kwadrat boku przeciwnégo kątowi ostrému od summy kwadratów dwóch innych boków w jednymże Tróykącie.

Dwa

Dwa następuiące Twierdzeniá, pokážą różnicę w Tróykącie między kwadratem boku tak przeciwnego kątowi roztwartemu, iako i przeciwnego kątowi ostremu, i kwadratowi dwóch innych boków.

165. *Twierdz:* 2. W Tróykącie maiącym kąt roztwarty, spuściwszy prostopadłą od iednego końca boku przeciwnego kątowi roztwartemu, na inny bok którykolwiek; kwadrat tamtego boku, będzie równy summie kwadratów dwóch innych boków, i dwa razy wziętemu Prostokątowi z boku, na który prostopadłá spuszczoná, rozmnożonego przez odległość od teyże Prostopadłey, wierzchołka kąta roztwartego.

Niech będzie Tróykąt: ABC, który má kąt roztwarty przy C, od końca A, boku AB, przeciwnego temu kątowi: spuśćmy na BC, prostopadłą AD. Kwadrat z AB, równy będzie summie kwadratów z AC, i z BC, i dwa razy wziętemu Prostokątowi z BC, przez CD. Táb. IX, *Fig.* 4.

Przygotowanie. Na linii BD, zróbmy kwadrat BDEF, i na dwóch bokach iego weźmy FG, i FL, równe BC; poprowádźmy przez G, i L, liniie GI, i LC.

Dowodz: Prostokąt FGKL, iest kwadratem z BC: Prostokąt CDIK, iest kwadradratém z CD: a Prostokąty obadwa BCKG, i EIKL, są z BC, przez CD.

Kwadrat z AB, równá się summie kwadratów z AD, i z BD, toiest summie kwadratów z AD, z DC, i z BC, i dwa razy wziętému Prostokątowi z BC, przez CD. A że summa kwadratów z AD, i DC, równá iest kwadratowi z AC; więc kwadrat z AB, równy iest summie kwadratów z AC, i z BC, i dwa razy wziętému Prostokątowi z BC, przez CD.

166. *Przykład.* Niechby Tróykąt ACD był połowa, Tróykąta równobocznégo; toiest, niechby liniiá AC była połową linii CD. Prostokąt z BC, przez CD, dwa razy wzięty, byłby równy Prostokątowi BC, przez CA; a sam przez się byłby tylko iego połową. Tén przypádek szczególny možná wyrazić w słowach następuiących: *W Tróykącie, któ régo kąt roztwarty równá się summie kąta prostégo i trzeciéy części iego; kwadrat boku przeciwnégo kątowi roztwartému, równy iest summie kwadratów innych dwóch boków, i Prostokątowi z tychże boków.*

167. *Twierdz:* 3. W Tróykącie iakimkolwiek uwáżaiąc iedén kąt ostry, a od końca boku przeciwnégo tému kątowi spuściwszy prostopadłą na iedno ramié

iego

iego; kwadrat tego boku równać się będzie różnicy między summą kwadratów ramión obudwóch kąta tego ostrégo, i dwa razy wziętym Prostokątém z ramiéniá, na które prostopadłá iest spuszczoná, i z odległości wiérzchółka kąta ostrégo od prostopadłéy.

Niech będzie Tróykąt ABC, w którym kąt C iest ostry. Od końca A, boku przeciwnego AB, spuśćmy Prostopadłą AD, na ramié BC, kąta ostrégo. Kwadrat z AB, równy będzie różnicy między summą kwadratów z AC, i z CB, i dwa razy wziętym Prostokątém, którégo bokami będą BC, i CD. Táb. IX. *Fig.* 5.

Przygotowanié. Zróbmy kwadrat z CB, BCEF. Naznáczmy liniie FG, FL, równé DB, i CI równą CD. Poprowádźmy ieszcze liniie: DL, IG. Przeciągniymy DL, i CE do M i N, tak, aby LM, EN równé były CD. Złączmy ich końce liniią MN. Prostokąt ELMN, równy będzie kwadratowi z CD.

Dowodz: Kwadrat z AB równy iest summie kwadratów z AD, i z BD. Kwadrat z BD, toiest FGKL, równy iest kwadratowi BCEF, z BC, mniéy summą dwóch prostokątów: BGIC, i EIKL: albo dodáwszy, i odiąwszy kwadrat ELMN, z CD; kwadrat z BD będzie równy summie kwadratów: BCEF, i ELMN, mniéy

sum-

summą Prostokątów BGIC, EIKL, i kwadratu ELMN, czyli mniey summa Prostokątów BGIC, i IKMN; które obadwa są Prostokątami z boków BC, i CD; a zatém kwadrat z AB, iest równy summie kwadratów z AD, z CD, i z BC, mniéy dwa razy wziętym Prostokątém z BC, przez CD. A że summa kwadratów z AD, i z CD, równá się kwadratowi z AC; więc kwadrat z AB, równy iest summie kwadratów z AC, i z BC, mniéy dwa razy wziętym Prostokątém z BC, przez CD.

168. *Przykład.* Niechby Tróykąt ACD, był połową Tróykąta równobocznégo, a zatém AC, dwa razy większá od CD; w takim razie kwadrat z AB, będzie równy summie kwadratów z AC, i z BC, mniéy Prostokątém z tychże boków AC, i BC. Co tak można wyrazić: *W Tróykącie, którégo kąt ieden równá się kątowi prostému, mniéy trzecią iego częścią, kwadrat boku przeciwnégo tému kątowi równać się będzie różnicy między summą kwadratów z ramión tegoż kąta, i Prostokątém z tychże ramión.*

169. *Wnioski i Przystósowanià dwóch Twierdzeń ostatnich.*

1. Jeżeli w Tróykącie kwadrat iednégo boku równy iest summie kwadratów z ramión kąta przeciwnégo, albo większy

szy lub mnieyszy od téy summy; kąt też przeciwny będzie prosty, albo roztwarty, lub ostry.

2. W każdym Tróykącie, Prostokąt dwa razy wzięty, z boku któregokolwiek i z odległości wierzchołka kąta iednégo przy tym boku, od prostopadłéy spuszczonéy na ténże bok, z wierzchołka kąta iému przeciwnégo, tén, mówię, dwa razy wzięty Prostokąt, równy iest różnicy między summą kwadratów z dwóch ramión, i kwadratém boku przeciwnégo tému kątowi, toiest, równy będzie summie tych dwóch kwadratów, mniéy kwadratém boku przeciwnégo, gdy kąt iest ostry; a gdy roztwarty, to tén Prostokąt dwa razy wzięty, równy będzie kwadratowi boku przeciwnégo, mniéy summą kwadratów z ramión: a zatém ieżeli wiadome nám są w liczbach boki Tróykątu; doydziémy stąd w liczbach i prostokąta tego podwóynégo: doydziémy i odcinka (*Segmentum*) podstawy, zawartégo między wierzchołkiém kąta, o którym iest rzecz, i prostopadłą. A że kwadrat wysokości Tróykąta, równá się rożnicy między kwadratém boku przyległégo odcinkowi, i kwadratém tegoż odcinka; więc doydziémy i wysokości Tróykąta, a zatém i powierzchni iego.

170. *Przykład.* 1. Niech będą trzy boki: BC, AB, AC, w liczbach oznaczoné:

ne: pierwszy 21, drugi 20, trzeci 13.

Kwadrat z AB, ieſt 400.

Summa Kwadratów z BC, i AC, ieſt summa z 441. i z 169. toieſt 610.

Ta summa ponieważ ieſt większa, niż kwadrat z AB, przeto kąt przy C. ieſt oſtry.

Różnica między tą summą i kwadratém z AB, ieſt: 210, która to różnica równa się podwóynému Proſtokątowi z BC, przez CD, czyli liczbie znaczącéy długość boku BC, rozmnożonéy przez liczbę oznaczaiącą długość odcinka CD, dwa razy wziętą. Tén Proſtokąt poiedynczy wyrazi się więc przez 105. A że BC oznaczoné ieſt przez 21, więc długość CD, będzie 5. Kwadrat z AD równa się różnicy między kwadratém z AC, i kwadratém z CD, toieſt, różnicy między 169. i 251. Ta różnica ieſt: 144, więc AD, będzie oznaczoné przez 12, Powierzchnia Tróykąta CAB, ieſt połową Proſtokątu z BC, przez AD, toieſt, 126.

171. *Przykład 2.* Niech będzie BC 11, AB 20, AC, 13. Kwadrat z AB, będzie 400.

Summa kwadratów z BC, i z AC, będzie summa z 121. i 169. toieſt: 290.

Ta summa ponieważ ieſt mnieyszá od kwadratu z AB; przeto kąt przy C, będzie roztwarty.

Różnica między tym kwadratém, i tą summą ieſt, 110: którá to różnica równá się podwóynému Proſtokątowi z BC, przez CD, a zatém Poiedynczy Proſtokąt będzie=55. A że BC, równá się 11; więc CD, będzie się równać: 5.

Kwadrat z AD, równá się różnicy między kwadratém z AC, i kwadratém z CD; toieſt różnicy między 169 i 25. Ta różnica ieſt: 144. więc AD będzie=12; a powiérzchniá Tróykąta będzie 6. razy 11. toieſt 66. Trzeba na więcéy ieszcze przykładach wprawiać uczniów, dobieraiąc po większéy części liczb takich, aby Piérwiáſtki kwadratowé zupełnie w liczbach cáłkowitych wychodziły.

Przykłady:	*Boki*		*Podſtawa*
	51 i 25	-	52, albo 28
	52 i 29	-	69 albo 27
	17 i 39	-	44 albo 38
	68 i 87	-	95 albo 31.

172. *Przestroga 1.* Dlá większéy wygody używać na potém będziémy skróconych wyrażéń, których tu znaczénié wykládámy.

Znak tén: = wyrážać będzie równość między dwóma ilościami.

Znak: + gdzie iedna liniiá prosto drugą przeciná, wyrážać będzie dodanié iedné ilości do drugiéy; i wymáwiá się tém słowém: *więcéy* (plus) Naprzykład, $4.+5=9$, wymáwia się, cztéry więcéy piącią, równá się dziewięciom.

Znak: — wyrážać będzie odeymowanié iednéy ilości od drugiéy: i wymáwiá się tém słowém: *mniéy*, (minus). Naprzykład: $7-4=3$: wymáwiá się, siédm mniéy cztéréma, równá się trzém.

Dlá oznáczéniá rozmnożéniá liczb, w Arytmetyce, albo Prostokąta z dwóch liniy w Geometryi, używać będziémy znaku: × toiest krzyża ukośnégo. Naprzykład 4×3. znaczy cztéry przez trzy rozmnożoné, AB×CD, znaczy Prostokąt z linii AB i CD: albo Prostokąt z AB, przez CD. Dzielénié oznáczá się tym znakiém, toiest, dwiéma kropkami, iedną pod drugą, które kładą się po ilości podzielnéy, a przed ilością dzielącą. Naprzykład 6: 2, znaczy 6, przez 2. podzieloné. Možná także dzielénié i sposobém ułomków wyrážać, kładąc za licznika ilość podzielną, a za mianownika, ilość dzielącą kwadrat iakiéy ilości, naprzykład linii AB, iednym z tych dwóch sposobém zwykł się wyrážać AB^2, albo ABq, częściéy iednak pierwszym. I

I tak pierwszé Twierdzénié možná było w tén sposób wyrazić: Táb. IX. *Fig: 1.*

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Szósté $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \times CD$ *Fig. 4.*

Siódmé $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \times CD$ *Fig. 5.*

Wszystkié trzy tych Twierdzéń przypádki, takby razém mogły bydź wyrażoné: $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \times CD$. W tym razie, gdzie kąt iest prosty, liniiá CD, a zatém i prostokąt $BC \times CD$. niknie.

173. *Przestroga* 2. Trzeba ostrzédz Uczniów, aby užywaiąc tych skróconych wyrazów, mieli zawsze przed oczyma Figury stósuiącé się do tychže wyrazów, i dobrze ié rózwážali. Należy także ustnie pierwéy wyrazić każdé Twierdzénié lub Zagádniénié, nim się przystąpi do pisaniá ich znakami wyráz skrácaiącémi. I owszém lepiéyby było, aby póty tych znaków nie używać, póki zupełnéy wprawy nie nabiorą Uczniowie w wyłożéniu ustném a iasném Twierdzéń i Zagádnieñ im podanych.

ROZDZIÁŁ VII.

O Liniiach stycznych z kołem; o kątach przy okręgu koła; i o kątach, których wierzchołki są między okręgiem, albo za okręgiem.

174. *DEfinicye.* Koła równe są te, których promienie są równe i takie koła przystać mogą do siebie.

Gdyby to podanie nie zdáwało się bydź tak oczywistém, aby go przypuścić można, za Definicyą; tedy możnaby dowieśdź ie tymże samym sposobem, którym wyłożyliśmy w Rozdziele I. tworzenie się koła; (8) pokazuiąc, iż dwie linie równe, obrotem swoim około iednego i nie poruszonego końca, nie mogą zrobić, tylko równe dwa koła: albo też uważaiąc te dwie linie, iak gdyby iedna leżała na drugiey, i iak gdyby obiedwie razem czyniły ten obrot; w takim razie, iakiekolwiek będzie położenie spólne tych dwóch liniy, ponieważ zawsze iedna do drugiey przystaie, więc i te mieysca, które przeyśdź maią w tymże samym czasie, i te, które iuż przeszły w czasach równych, rachuiąc od początku ich obrotu, przystałyby do siebie: a zatem i

całe

całe te mieysca, czyli koła, któreby zrobiły, mogłyby też do siebie przyſtać.

Końce tych dwóch liniy tak się obrácaiących, w czasach równych, zrobiłyby łuki równe, a zatem w kołach równych, kąty przy ich srzodkach równe, zamykaią swémi ramionami łuki równe.

Wzaiémnie, gdy w równych kołach, równe łuki weźmiémy, kąty w śrzodkach tych kół, które między ramionami swémi zamykaią te łuki, będą równe.

Niech będą dwa łuki równe: BA, ba, w dwóch równych kołach. Kąty: ACB, acb, które wiérzchołki swoie maią w śrzodkach tych kół, i które zamykaią swémi ramionami te łuki, są też równe. Bo gdyby kąty ACB, acb, nie były równe, kąt naprzykład ACB, gdyby był mnieyszy od kąta acb; to kąt inny, naprzykład DCB, byłby równy kątowi acb: a zatem i łuki DB ab, byłyby równe; ale, że wzięliśmy za równe łuki AB i ab; więc łuki także AB i DB, byłyby równe, co ieſt nie podobná, chyba żeby liniie CD, i CA iednę tylko liniią czyniły, zupełnie do siebie przyſtaiąc. Tab. X. *Fig.* 1.

Część koła zawartą między dwóma promieniami i łukiem, zwać będziémy wycinkiém koła, (*Sector Circuli.*)

Z tego,

Z tego co się wyżéy powiedziało, wnieść można, że w równych kołach i wycinki té przystać mogą do siebie, których kąty albo łuki są równé; a wzaiémnie, że kąty i łuki są równé w tych wycinkach, które przystać do siebie mogą.

W kołach równych, łuki równé maią téż i ciénciwy równé. Jakoż w takich dwóch kołach tróykąty równoramiénné, złożoné z ciénciwy i z dwóch promiéni, mogą przystać do siebie, dla równości promiéni, i kątów w śrzodku, które na równych łukach wspiéraią się.

Wzaiémnie, ieżeli w kołach równych ciénciwy są równé; łuki téż równé będą: bo Tróykąty złożoné z tych ciénciw, i z promiéni równych, maiąc trzy boki równé, mogą przystać do siebie, i kąty w śrzodku, zrobioné przez dwa promiénie będą równé, a zatém i łuki im przeciwné, równé będą.

Przez *odcinek koła* (segmentum Circuli) rozumieć będziémy mieyscé zawarté między łukiém i ciénciwą.

Gdy ciénciwa nie iest razém śrzednicą, dzieli koło na dwa odcinki: ieden większy, a drugi mnieyszy od półkoła. Takié dwa odcinki nazywaią się odcinkami *na przemián* (Alterna.)

W dwóch

W dwóch równych kołach, ieżeli dwa odcinki maią równé łuki, przyftać do siebie mogą. Jakoż té odcinki są różnicami dwóch wycinków maiących równé łuki, od dwóch Tróykątów, które za podftawy maią ciénciwy tychże łuków równych.

A że té wycinki mogą przyftać do siebie, bo maią łuki równé; Tróykąty mogą też do siebie przyftać, bo maią wszyftkie trzy boki równé.

Więc i dwa odcinki, przyftać mogą do siebie będąc różnicą dwóch Tróykątów równych, od dwóch wycinków równych.

Wszyftko to, co się teráz powiedziało, trzeba przyftósować do łuków, ciénciw, wycinków, odcinków iednégo koła.

Té podaniá powinnyby się wydáwać oczywiftémi, i nie potrzebować wcale żádnégo dowodzénia, i z téy przyczyny są bardzo zdatné, aby się na nich wprawiali Uczniowie w tłumaczénié się iak náydokładnieyszé z tych nawet wyobrażéń, któré im iuż wyftawuią rzecz iaką dosyć iaśnie; i aby tym sposobém wyobrażéniá w sobie prosté, prościeyszémi ieszcze czynić uczyli się.

175.

175. *Twiérdz:* 1. Prostopadłá ciągnioná od śrzodka ciénciwy, przechodzi przez śrzodek koła.

2. Liniiá prostá prowadzoná od śrzodka koła do śrzodka ciénciwy, iest do niéy prostopadłą.

3. Prostopadłá od śrzodka koła spuszczoná na ciénciwę, przypádá na iéy śrzodek.

Táb. X. *Fig.* 2. Niech będzie AB, ciénciwa w kole, którégo śrzodek C, a promień CA.

1. Prostopadłá od śrzodka D, ciénciwy wystawioná, przechodzi przez śrzodek koła.

Dowodz: W téy prostopadłéy wszystkié punkta iednakowo są odległé od dwóch końców ciénciwy: a że i śrzodek koła iednakowo iest odległy od dwóch końców téyże ciénciwy: więc będzie też znáydowáł się na téy prostopadłéy.

2. Liniiá CD, od śrzodka koła poprowadzoná do śrzodka ciénciwy, iest do niéy prostopadłą.

Dowodz: Tróykąty: DCA, DCB, mają wszystkié boki równé; więc mogą przystać do siebie, a w szczególności kąty przy D, są równé, a będąc kątami przyległémi, obadwa prosté bydź muszą, a zatem liniiá CD, iest prostopadłá do AB.

3.

3. Prostopadłá CD, spuszczoná od śrzodka koła na cienciwę AB, przypádá na iéy śrzodek.

Dowodz: W Tróykącie Równoramiénnym ACB, kąty A i B są równé; więc w Tróykątach prostokątnych: ACD, BCD, wszystkié kąty równé będą iedné względém drugich: a że i boki AC, CB, są równé; więc té dwa Tróykąty przystać do siebie mogą, a w szczególności liniie AD, i BD, są równé.

176. *Wniosek.* Koło nié może mieć więcéy, iak dwa punkta spólné z liniią prostą; bo gdyby mogło mieć więcéy takich spólnych punktów, naprzykłád trzy; złączywszy iedną liniią punkt piérwszy z drugim, a drugą punkt drugi z trzecim, i od śrzodka koła poprowadziwszy do tych dwóch liniy dwie prostopadłé, té uczyniłyby Tróykąt maiący dwa kąty prosté, co iest nie podobna.

177. *Zagád:* 1. Maiąc dané trzy punkta, których położénié nie iest w linii prostéy, nakréślić koło, któréby przez té trzy punkta przechodziło.

Rozwiąz: Ponieważ śrzodek koła powinién się znáydować na każdéy proſtopadłéy poprowadzoney od śrzodka linii łączącéy dwa punkta, znáyduiącé się

w kow kole, ieżeli tedy pierwszy z punktów danych złączymy liniią z drugim, a drugi z trzecim, i od śrzodka tych dwóch liniy poprowadzimy Prostopadłe; té przetną się w punkcie, który będzie śrzodkiém koła maiącégo przechodzić przez trzy punkta dané.

178. *Przystósowanié*. Znaléźć śrzodek koła danégo.

Rozwią: Na okręgu koła, weźmy trzy iakiekolwiek Punkta, a przez poprzedzaiącé zagádniénié szukáymy śrzodka koła przez té trzy punkta przechodzącégo.

179. *Wniosek*. Ponieważ prostopadłé wystawioné na śrzodku dwóch liniy łączących punkt iedén dany z dwoma innémi, nié mogą się przecinać tylko w jednym punkcie; więc nié może bydź więcéy iak iedno koło przechodzącé przez té trzy punkta: albo ieżeli dwa koła przechodziłyby przez té trzy punkta, toby nie były tylko iedném w rzeczy saméy kołém: a zatém gdy dwa koła się przecinaią, nie więcéy mogą mieć iak dwa punkta spólné w przecięciach. Ta własność koła, że ié z trzéch punktów danych wyznaczyć možná, iako i ta druga, że wszystkié iego promiénié są równé, różni koło od wszystkich krzywých liniy, podobnie iako liniiá prostá różni się przeto od krzywych liniy, że dosyć

ieſt

iest mieć dwa punkta dané, aby ią wyznaczyć.

180. *Twiérdz:* 2. Od końca promiénia koła wyprowadziwszy Prostopadłą do tegoż promieniá; wszystkié inné punkta téy prostopadłéy będą za kołém.

Dowodz: Odległością którégokolwiek z tych inszych punktów, od śrzodku koła, iest przeciwprostokątna Tróykąta, którégo bokiém iednym iest promień koła: a że przeciwprostokątna większá iest od iednégo z boków Tróykąta; więc i odległość od śrzodka koła, punktu którégokolwiek na prostopadłéy, oprócz tego, który iest końcém promieniá, większá iest od tegoż promiénia: a zatém każdy z tych punktów będzie za kołém.

181. *Defin:* Gdy prostá liniiá iedén tylko má punkt spólny z okręgiém koła; taká liniiá nazywá się styczną z kołém (*Tangens Circuli.*)

182. *Zagádn:* 2. Maiąc dany punkt na okręgu koła, poprowadzić przez niego styczną.

Rozwiąz: Punkt dany ze śrzodkiém koła złączmy promiéniém: i od tegoż punktu wyprowádźmy prostopadłą do promiéniá: a ta sama będzie i styczną z kołem w punkcie danym.

183.

183. *Zagádn:* 3. Od punktu danégo za kołém, poprowadzić do tegoż koła, styczną.

Rozwiąz: Złączmy liniią, punkt dany ze śrzodkiém koła. Na téyże linii, iako na śrzednicy, nakréślmy półkole; punktém, gdzie okrąg półkoła przecinać będzie koło dané, będzie tym samym punkt tén, do którégo poprowadzoná liniiá od punktu danégo, będzie styczná z kołém (159.)

To zagádniénié dwoiako może bydź rozwiązané: gdyż półkole z jednéy lub z drugiéy strony śrzednicy nakréślić możná.

184. *Twiérdz:* 3. Od końca promiéniá poprowadziwszy styczną z kołém, ieżeli przez punkt, w którym się ta styczná koła dotyká, przeciągniémy inszą iaką liniią prostą, ta przecinać będzie okrąg koła.

Dowodz: Promiéń koła iest prostopadły do stycznéy w końcu tegoż promiéniá, a zatém pochyły będzie do każdéy inszéy linii, przez tén koniec promiéniá, toiest punkt koła przychodzącéy. Poprowadziwszy więc prostopadłą od śrzodka koła do téy linii, ta prostopadłá krótszá będzie od promieniá: bo promiéń będzie przeciwprostokątną tego Tróykąta, któ-

rego

rego ta prostopadłá będzie tylko bokiem: a że koniec promieniá iest na okręgu koła; więc koniec tey prostopadłey nie doydzie do okręgu koła. Już tedy ieden punkt tey linii będzie w kole, a drugi w samym okręgu koła, na końcu promieniá: a zatem liniiá ta przechodząca przez koniec promieniá, ponieważ drugi swóy punkt má w kole, przecinać go musi.

185. *Twierdz:* 4. Jeżeli liniiá prostá iest styczną z kołem, będzie:

1. Promień poprowadzony od punktu tego, gdzie się liniiá styká z kołem będzie do tey styczney prostopadłym.

Jakoż, gdyby promień do punktu tego poprowadzony, nie był do styczney prostopadłym, tedy liniiá inszá prostopadłá do tego promieniá, i przechodzącá przez iego koniec, byłaby styczną z kołem, a ta pierwszá zamiást stykaniá się z kołem, przecinałaby go: iako się w poprzedzaiącem twierdzeniu okázało.

2. Prostopadłá do styczney, od punktu dotknieciá ciągnioná, przechodzi przez śrzodek koła.

Gdyby ta prostopadłá nie przechodziła przez śrzodek koła; tedyby iednak promień do tegoż punktu dotknięciá ciągniogniony był prostopadłym do styczney, a zatém od iednégo punktu, toiest od punktu dotknięcia, możnáby dwie prostopadłe prowadzić, co iest niepodobna.

186. *Uwága.* Pokázaliśmy (59) własność kąta, którégo wiérzchołek iest na okręgu koła, a którégo dwa ramiona wspiéraią się na końcach śrzednicy tegoż koła: to podanie było tylko przypadkiém szczególnym podania daleko ogólnieyszégo, w którém się dowodzi, że wszystkie té kąty są równé, które wiérzchołek maią na okręgu koła, a ramionami wspiéraią się na końcach równych łuków tegoż koła.

187. *Twiérdz:* 5. Kąt maiący swóy wiérzchołek na okręgu koła; a którégo ramiona są ciénciwami tegoż koła, iest połową innégo kąta, który má wiérzchołék w samym koła śrzodku, a ramionami swémi obeymuie ténże sám łuk, co i kąt piérwszy.

Táb. X. *Fig.* 3. Niech będą kąty ACB, ADB, z których piérwszy má wiérzchołek w śrzodku C koła, a drugi na okręgu tegoż koła w punkcie D: i niech obadwa té kąty obeymuią ramionami swémi ténże sám łuk AB. W takim razie kąt ACB dwa razy iest większy od kąta ADB.

Przypádek 1. Gdy iedno ramié AD

kąta

kąta ADB, iest razém i śrzednicą koła.

Dowodz: Tróykąt BCD, iest równoramiénnym, więc kąty B i D będą ró- wné, a summa ich, dwa razy większá od iednégo z nich: ale że kąt ACB, iako zewnętrzny, równá się téy summie kątów B i D: więc dwa razy iest większy od iednégo z nich, naprzykład od kąta D. Táb. X. *Fig. 4. i 5.*

Przypádki té, w których żádné ramié kąta ADB nie byłoby razém śrzednicą koła, możná łatwo przywieśdź do przypádku piérwszégo, poprowadziwszy śrzednicę DE.

Przypádek 2. Gdy śrzodek C, ieſt między ramionami kąta ADB.

Dowód. Kąt ADB, ſkłádá się z dwóch kątów: ADE, i BDE, a kąt ACB ſkłádá się także z dwòch kątów: ACE i BCE: a że podług dowiédziéniá w piérwszym przypádku każdy z tych dwóch oſtatnich kątów, ieſt dwa razy większy od iednégo z piérwszych, którégo ramiona obeymują ténże sám łuk; więc obadwa razém piérwszé kąty są téż dwa razy większé od obudwóch razém kątów drugich: a zatém kąt ACB, dwa razy ieſt większy od kąta ADB. Táb. X. *Fig. 4.*

Przypádek 3. Gdy śrzodek C, nie ieſt między ramionami kąta ADB. *Do-*

Táb. X. Fig. 5. *Dowodz*: Kąt ECB, dwa razy ieſt większy od kąta EDB, (1. Przypádek), téńże kąt ECB, ſkłádá się z dwóch kątów: ECA, ACB, kąt także EDB, ſkłádá się z dwóch kątów: EDA, ADB; a że kąt ECA dwa razy ieſt większy od kąta EDA (1. Przyp:) więc i kąt ACB, większy dwa razy będzie od kąta ADB.

788. *Uwága*. Uczniowie poczynaiący, więcéy doznáwać zwykli trudności, w poięciu tego trzeciégo przypádku, niż drugiégo, w którym przez dodáwanié to samo się dowodzi, co w trzecim przez odeymowanié. Możná im to w téń sposób obiaśnic, że dwie naprzykłád liczby 12. i 8. z których piérwszá dwa razy ieſt większá od 6, a drugá od 4. té, mówię, dwie piérwszé liczby, gdy dodané będą, summa ich 20, będzie téż większá dwa razy od summy dwóch drugich liczb 6, i 4. toieſt od 10. A przeciwnie gdy naprzykłád 12, i 8. piérwszé większé ieſt dwa razy od 6. a drugie od 4, różnica między 12, i 8, toieſt 4, dwa razy też większá będzie od różnicy między 6, i 4. toieſt od 2.

Gdyby tego była potrzeba, możnáby na liniiach to samo okázać.

Táb. X. Fig. 6. Niech będzie Liniiá AB, większá dwa razy od CD, i AE większá także dwa razy od CF. Od punktu E, naznaczywszy

wszy na linii AB, Liniie EG, EH, równé liniióm FC, FD; Liniie: AG, i BH, będą tak iedna, iako i drugá oznáczać różnicę Linii AE, od CF, summa zaś tych dwóch liniy AG, i BH, oznaczy różnicę całéy linii AB, od całéy linii CD.

189. *Wniosek.* Kąty przy okręgu koła, które ramionami swémi iednakowé łuki obeymuią, są równé: albo, co na iedno wychodzi, kąty w tymże samym odcinku koła są równé. Że tak w saméy rzeczy ieſt, co do kątów przynáymniéy oſtrych, toieſt: których ramiona obeymuią łuk mnieyszy od pół okręgu, wynika to z Twiérdzénia poprzedzaiącégo. Z naſtępuiącégo zaś wnieść będzie łatwo można, że to samo má mieysce i w kątach przy okręgu koła, których ramiona obeymuią okrąg większy od pół okręgu.

190. *Twiérdz. 6.* Summa kątów w odcinkach na przemián, (174.) równá się dwóm kątóm proſtym: albo co iedno znaczy ieżeli czworokąt ieſt kołém obwiedziony, summa kątów przeciwnych tego czworokąta, równá się dwóm kątóm proſtym.

Niech ciénciwa AB, dzieli koło na dwa odcinki: ADB, ACB; kąt ADB, w iednym odcinku, wráz z kątém ACB w drugim odcinku, wyrownywá dwóm kątóm proſtym; albo, summa kątów D, i C, czworoką- Táb. XI. *Fig. 2.*

K roką-

rokąta kołém obwiedzionégo, równá się dwóm kątóm prôftym.

Przygotowanié. Poprowádźmy Przekątną DC.

Dowodz: Kąty ADC, ABC, obeymuią obadwa rámionami swémi łuk iedén AC, mnieyszy od pół okręgu; więc są równé. Dlá téyże przyczyny i kąty BDC, BAC, są równé. Summa tedy kątów ADC, BDC, toieft kąt ADB, równá się summie kątów: ABC, BAC: a zatém summa kątów ADB, ACB, równá ieft summie trzech kątów Tróykąta ABC; a ponieważ ta oftatniá summa wyrównywá dwóm kątóm proftym; więc i tamta.

Powtórzénié. Jeżeli ciénciwa ieft razém i śrzednicą, dzieli koło na dwa półkoła, a w każdém tém półkole, kąty są prosté.

Jeżeli ciénciwa nie ieft śrzednicą; dzieli koło na dwa odcinki, iedén większy a drugi mnieyszy od pół okręgu: kąt w większym odcinku wspiérá się na łuku mnieyszym od pół okręgu, i ieft oftry; iednakowéy zawsze wielkości. Kąt zaś w mnieyszym odcinku wspiérá się na łuku większym od pół okręgu. i ieft roztwarty, dopełniaiący zawsze dwóch kątów proftych, z kątém oftrym w drugim odcinku.

191. *Twiérdz*: 7. Jeżeli od punktu w od-

w odcinku koła, lub za odcinkiém będącégo, do końców podſtawy tego odcinka poprowadzimy dwie linie; kąt między témi dwiéma liniiami zawarty będzie w piérwszym razie większy, a w drugim mnieyszy od kąta w samym odcinku.

Niech będzie punkt D, w odcinku albo za odcinkiém CAB; prowádźmy od punktu tego, do końców Podſtawy AB, tegóż odcinka Linie DA, DB, kąt ADB, będzie większy w piérwszym razie, a mnieyszy w drugim, od kąta ACB. Táb. XI. *Fig.* 2.

Dowodz: W piérwszym razie, kąt ADB, ieſt zewnętrzny Tróykąta DBC, więc ieſt większy od iednégo z wewnętrznych kątów tegoż Tróykąta, toieſt, od kąta ACB, w samym odcinku.

W drugim razie, kąt ACB, ieſt zewnętrzny Tróykąta CDB, a zatém większy od kąta D, albo co na iedno wychodzi, kąt D, ieſt mnieyszy od kąta C, w odcinku.

192. *Uwága* 1. W piérwszym razie, gdzie ramié BD przedłużoné spotyká okrąg w punkcie E, kąt ADB, równá się summie kątów: BCD, CBD, a kąt CBD obeymuie swémi ramionami łuk EC, który téż łuk zawarty ieſt między przedłużéniami ramión AD, BD, kąta ADB.

W drugim razie, gdzie ramié BD przeciná okrąg w punkcie E: kąt ADB mnieyszy ieſt od kąta ACB, w odcinku, kątém CBD; który to kąt CBD obeymuie swémi ramionami łuk CE, a tén łuk CE, mnieyszy ieſt od łuku AB, obiętégo od tychże ramión AD, BD kąta ADB.

193. *Uwága* 2. Na okręgu koła znáyduią się te wszyſtkié punkta, od których poprowadziwszy dwie liniie do dwóch punktów danych, kąt między dwiéma témi liniiami zawarty, iednakowy zawsze będzie, toieſt, okrąg koła ieſt *mieyscém* (Locus) tych wszyſtkich punktów.

194. *Defin.* Kąt zawarty między ſtyczną z kołém i między ciénciwą przez punkt dotknięciá prowadzoną, nazywá się *kątém odcinka.*

195. *Twiérdz.* 8. *Kąt odcinka*, równá się kątowi *w odcinku na przemián.*

Niech będzie ABD kąt odcinka, mię-
Táb. XI. dzy BD, ſtyczną z kołem, i BA, ciénci-
Fig. 3. wą przechodzącą przez B, punkt dotknięciá. Tén kąt równy ieſt kątowi którémukolwiek w odcinku na przemián, naprzykłád kątowi BEA, którégo iedno ramié BE ieſt śrzednicą do punktu dotknięciá B, poprowadzoną.

Dowod. Kąt EBD, między śrzednicą EB, i ſtyczną BD, zawarty, ieſt proſty (185) toieſt summa kątów: ABE, i ABD, czyni kąt proſty. Kąt

Kąt A w półkole ieſt téż proſty (159) więc summa kątów ABE, AEB, w tymże samym Tróykącie równá także będzie kątowi proſtému. A zatém kąt ABE tak z kątém AEB, iak i z kątém ABD, czyni kąt proſty. Muszą tedy równé bydź kąty AEB, i ABD, kiedy przydany każdy z osobna do kąta ABE, czyni równą summę.

196. *Zagádn:* 4. Na linii danéy zrobić odcinek koła, w którym odcinku zmieściłby się kąt dany.

Niech będzie liniiá AB, na któréy zrobićby trzeba tén odcinek. Táb. XI. *Fig.* 3.

Rozwiązanié. Od punktu B. prowadzę liniią BD, czyniącą kąt dany z liniią daną BA. Od tegoż punktu B, wyprowádzám proſtopadłą do BD, a od punktu A, drugą proſtopadłą do AB. Punkt E, przecięciá tych dwóch proſtopadłych, wyznaczy mi wielkość śrzednicy BE, należącéy do tego koła, w którégo odcinku má się mieścić kąt dany.

Albo téż: Od śrzodka linii danéy AB, prowadzę Proſtopadłą która przetnie liniią BE, w punkcie maiącym ſłużyć za śrzodek koła, w ktorém będzie odcinek żądany.

Zamiáſt robiéniá kąta ABD, równégo danému, możnáby zrobić kąt ABE, dopełpełniaiący kąt dany do 90. stopniów, toiest, czyniący z nim razém kąt prosty.

197. *Zagádn*: 5. Maiąc dané koło, oddzielić od niego odcinek, w którymby się zmieścił kąt dany.

Rozwiąz: Od punktu którégokolwiek na okręgu koła danégo, ciągnę styczną, a przez punkt dotknięciá prowadzę ciénciwę czyniącą kąt dany z styczną. Ta ciénciwa oddzieli w kole odcinek żądany.

198. *Zagádn*: 6. W koło dané wpisać (*inscribere*) Tróykąt, któryby miał kąty wszystkié równé kątóm Tróykąta danégo.

Rozwiąz: 1. Pociągnąwszy styczną przez którykolwiek punkt okręgu koła, przez ténże punkt prowadzę dwie ciénciwy po prawéy i po lewéy ręce, czyniącé dwa kąty równé kątóm Tróykąta danégo. Liniiá trzeciá łączącá końce tych dwóch ciénciw, będzie trzecim bokiém Tróykąta, którégo kąty wszystkié równé będą kątóm Tróykąta danégo.

Rozwiąz: 2. Tróykąt dany opisuię (*circumscribo*) kołém, i do trzech wiérzchołków kątów, prowadzę od śrzodka trzy promiénie Od tegoż samégo śrzodka, kréślę koło, promiéniém koła danégo. Punkta, w których okrąg tego drugiégo koła, przecinać będzie promiénie trzy piér-

piérwszégo, będą wiérzchołkami kątów Tróykąta, którégo szukám.

199. *Zagádn:* 7. Maiąc dany Tróykąt, wpisać weń koło, to iest nakréślić takié koło, któréby się dotykało trzech boków tego Tróykąta.

Rozwiąz: Śrzodek tego koła, ponieważ iednakowo má bydź odległy, od wszystkich trzech boków Tróykąta danégo, musi się gdzieś znáydować na linii dzielącéy kąt którykolwiek Tróykąta na dwie równé części: gdyż téy linii odległość punktów wszędzie będzie równá od dwóch boków Tróykąta iéy przyległych: podzieliwszy na dwie równé części, i drugi kąt Tróykąta drugą liniią; tam gdzie ta drugá liniiá przétnie piérwszą, będzie śrzodek koła, którégo szukámy: bo tén punkt przecięciá będzie iednakowo odległy od wszystkich trzech boków Tróykąta danégo.

200. *Zagádn.* 8. Maiąc dané koło, opisać na nim *(circumscribere)* Tróykąt, któryby miáł kąty wszystkié równé kątóm Tróykąta danégo.

Rozwiąz. 1. W Tróykąt dany wpisuię koło; i do Punktów trzech dotknięciá, prowadzę trzy promiénie. Od tegoż samégo śrzodka kréślę drugié koło, promiéniém koła danégo. Punkta, w których

okrąg

okrąg tego drugiégo koła przecinać będzie promiénie trzy piérwszego, albo ich przedłużénia oznaczą trzy punkta dotknięciá trzech boków Tróykąta, którégo szukám.

Rozwiąz: 2. W czworokącie, który się zrobi z dwóch promiéni koła danégo, i ze dwóch ſtycznych z kołém w końcach tychże promiéni, kąty dwa między témi promiéniami i stycznémi będą prosté, a zatém kąt iedén między dwiéma stycznémi, i drugi kąt między dwóma promiéniami, będą razém wzięté, rowné dwóm kątóm prostym. (85) Stąd wypádá wykréślénié naſtępuiącé.

Prowadzę promién iedén w kole daném: po obudwóch ſtronach tego promiénia, prowadzę dwa inszé czyniącé z piérwszym dwa kąty, równé kotóm dwóm dopełniaiącym dwa którékolwiek kąty Tróykąta, do 180. ſtopniów, toiest, równé dwóm katóm przyległym (14) do dwóch którychkolwiek kątów tegoż Troykąta. Przez końce tych trzech promiéni przeciągám trzy styczné, té zrobią Tróykąt żądany.

RO-

ROZDZIÁŁ VIII.

Wstęp do Proporcyi przez przykłady Geometryczne, z przystósowaniem w szczególności do Tróykątów podobnych, a w ogólności do inszych Figur prostokréślnych także podobnych.

DOtąd uważáliśmy tylko wielkość różnych Ilości i Figur, co do przyſtáwaniá iednych do drugich, czyli do ich równości. Teráz też samé ilości porównywać z sobą będziemy w sposób ogólnieyszy.

201. *Uwági.* Widzieliśmy, że dwa równolegloboki, które miały iednakową podſtawę i wysokość były równé. Weźmy teráz dwa równolegloboki z równą wysokością, ale z nie iednakową podstawą, i obáczmy co za różnica wypadnie między témi dwóma równoległobokami, z przyczyny nie równości ich Podstáw.

Jeżeli Podstawa iednégo z tych równoległoboków, dwa, trzy, cztéry, i t. d. razy, większá będzie od podstawy drugiégo; dá się podzielić tén piérwszy równoległobok, na dwa, trzy, cztéry, i t. d. równoległoboki równé między sobą, i z drugim równoległobokiém: ponieważ

wszy-

wszystkie iednakowe mieć będą wysokości, i podſtawy; a zatem ten pierwszy równoległobok będzie dwa, trzy, cztery, i t. d. razy większy od drugiego.

Gdyby podstawa pierwszego równoległoboku nie zamykała w sobie kilka zupełnie razy podſtawy drugiego równoległoboku; naprzykład, gdyby ta pierwsza podſtawa, miała w sobie 4, 5, 7, i t. d. takich części, iakich podstawa druga ma 3; możnaby tę pierwszą podstawę podzielić na 4, 5, 7. i t. d. części równych między sobą, i równych także każdey z 3. części drugiey podstawy; a zatem, iako liczby ukazuiące wielkość podstawy pierwszego równoległoboku względem podſtawy drugiego, są 4, 5, 7, i t. d. i 3; tak też liczby ukazuiące wielkość pierwszego równoległoboku względem drugiego, są: 4, 5, 7, i t. d. i 3. Albo; iako podſtawa pierwszego równoległoboku, zamyka w sobie podſtawę drugiego tyle razy, ile oznaczaią liczby ułomkowe $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, i t. d; tak też pierwszy równoległobok zamyka w sobie drugi, tyle razy, ile oznaczaią te same liczby ułomkowe $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$, i t. d.

Podobnie gdy dwa Tróykąty maią równe wysokości, a nie równe podstawy, ieżeli podſtawa pierwszego Tróykąta zawierać w sobie będzie podſtawę drugiego, dwa, trzy, cztery i t. d. razy; to też po-

wierzwiérzchniá tego piérwszégo Tróykąta, będzie dwa, trzy, cztéry i t. d. razy większá od powiérzchni drugiégo. Toż mówić, gdy podstawa iednégo Tróykąta, zamiáſt zawiérać w sobie kilka zupełnie razy podſtawę drugiégo, będzie się tylko ſkłádała z kilku takich części równych, z jakich się ſkłádá i podſtawa Tróykąta drugiégo. J tak ieżeli podſtawy obudwóch Tróykątów zamykaią w sobie, iedna 4, a drugá 5, takichże równych części; té téż dwa Tróykąty zamykać będą iedén 4, a drugi 5, równych między sobą Tróykątów maiących wysokość iednakową z wysokością niepodzielonych Tróykątów, a za podſtawę, część iednę tylko podstawy tamtych Tróykątów. A zatém, iako podſtawa piérwszégo Tróykąta ieſt $\frac{4}{5}$ podſtawy drugiégo, tak téż i powiérzchniá piérwszégo Tróykąta będzie $\frac{4}{5}$ powiérzchni drugiégo.

Dwa kąty maiącé swoié wiérzchołki weśrzodku tego samégo koła, albo kół równych, i obeymuiącé ramionami swémi łuki równé, są równé (174).

Jeżeli tedy z dwóch kątów we śrzodku kół równych, iedén wspiérá się na łuku, dwa, trzy, cztéry i t. d. większym, niżeli iest tén na którym wspiérá się kąt drugi; można tamtén kąt większy podzielić na dwa, trzy, cztery i t. d. kątów równych

sobie

sobie i kątowi drugiému. Toż samo mówić możná gdy dwa łuki nie zupełnie się zamykaią ieden w drugim. I tak ieżeli ieden z tych łuków może bydź podzielony na 4. równé części, a drugi na 3. takież części; dwa kąty, które się wspiéraią na tych łukach, mogą się podzielić, ieden na 4, á drugi na 3. kąty równé między sobą.

Toż samo przystósować możná i wycinkóm w kołach równych, względém łuków, które ramionami swémi też wycinki obeymuią.

W takich szczególnych razach, szukano, ilékroć dwie iakié ilości iednakowégo gatunku, naprzykład dwie liniie, dwa łuki, koła, zamykały się iedna w drugiéy, i znáydowano, że tylékroć i inszé dwie ilości iednakowégo także gatunku zamykały się iedna w drugiéy, naprzykład: dwa Równoległoboki, dwa Tróykąty, dwa wycinki i t. d.

202. *Definicye.* Gdy dwie iakié ilości do siebie przyrównywámy, abyśmy wiedzieli, ilé razy iedna zamyká w sobie drugą; takié przyrównywanié nazwać możná stósunkiém Geometrycznym (*Ratio Geometrica*) albo bez przydatku stósunkiém tych dwóch ilości. Piérwszy wyráz ilości, którą do drugiéy stósuiémy, zwać będziémy *Poprzednikiém* stósunku (*antecedens rationis* :) Drugi zaś wyráz ilości

téy

téy, do któréy przyrównywámy ilość piérwszą, nazwiémy *Następnikiém (consequens)* stósunku. To co z tego przyrównaniá wyniká, nazwać można *Wykładnikiém* stósunku (*exponens rationis.*) Dwa stósunki nazywaią się równémi, gdy równémi są ich wykładniki.

203. *Uwága.* Z tych samych Definicyy widzimy, że wyrazy stósunku Geometrycznégo, nié mogą bydź tylko iednakowégo gatunku, gdyż nié można do siebie przyrównywać, tylko ilości iednakowégo gatunku: a stąd dwa wyrazy stósunku tego, zawsze w liczbach mieć możémy, z których iedna tylé razy zamykać w sobie drugą będzie; ilé razy ilość przyrównywać się maiącá, zamyká w sobie drugą ilość tegoż gatunku, do któréy ią przyrównywámy. Przeto stósowanié takié uważać można iak dzielénié liczebné biorąc za liczbę podzielną poprzednika stósunku, za liczbę dzielącą następnika stósunku, a za wieloráz wykładnika tegoż stósunku. Wykładnik tedy iedno będzie, co ułomek, którégo Licznikiém Poprzednik, a mianownikiém następnik stósunku.

204. Gdy się cztéry ilości takié znáyduią, że stósunek dwóch piérwszych, równy iest stósunkowi dwóch drugich; takié cztéry ilości czynią *Proporcyą Geometryczną*, albo bez przydatku, *Proporcyą*; i mó-

i mówimy, że tak się má Poprzednik piérwszégo ſtósunku, do swégo naſtępnika, iak się má Poprzednik drugiégo ſtósunku do swégo także Naſtępnika. I tak, przypádki szczególné, któréśmy za przykład wyżéy przytoczyli, takby mogły bydź wyrażoné.

Jeżeli dwa Równoległoboki iednakową maią wysokość, powiérzchniá iednégo z nich, tak się będzie miała do powiérzchni drugiégo; iak się má podſtawa piérwszégo, do podſtawy drugiégo. Jeżeli dwa Tróykąty iednakową maią wysokość, powiérzchniá iednégo Tróykąta, tak się má do powiérzchni drugiégo Tróykąta, iak się má podſtawa piérwszégo do podſtawy drugiégo.

Jeżeli dwa kąty we śrzodku dwóch równych kół znáyduią się; iedén z tych kątów, tak się mieć bedzie do kąta drugiégo, iak się má łuk obięty od ramión piérwszégo kąta, do łuku obiętégo od ramión drugiégo kąta.

Jeszcze i tak możnáby té samé podaniá wyrazić: Dwa równoległoboki iednakowéy wysokości tak się maią do siebie, iak ich podstawy.

Dwa Tróykąty iednakowéy wysokości, tak się maią do siebie, iak ich podstawy.

Dwa

Dwa kąty we śrzodku kół równych tak się maią do siebie, iak dwa łuki, na których się wspieraią. Toż mówić i o wycinkach kół równych.

Na koniec ieszcze krócéy zwykły się czasém wyrážać podobné podaniá, zamykaiąc całą proporcyą w dwóch tylko na oko wyrazach, i to ieszcze znaczących ilości odmiénnégo gatunku. *Wielé na tém zawisło, aby Uczniowie znali się dobrze na takowych wyrazach często używanych.*

Mówi się naprzykład, że powiérzchniá równoległoboku, którégo wysokość iest *iednostayná* (constans) proporcyonalną iest do swoiéy podstawy.

Tu się opuszczá wyráz drugiégo; równoległoboku, który także wchodzi w porównanié, i iego podstawy; ale się wyrazów tych domyślać trzeba. Dlá tego się zaś opuszczaią, że tén drugi równoległobok równéy z piérwszym wysokości bydź mniemámy, i iednostaynéy, toiest nieodmiénnéy podstawy, a zatém i powiérzchni. Będzie tedy piérwszy równoległobok tym większy albo mnieyszy względém drugiégo równoległoboku opuszczonégo; im podstawa piérwszégo większá lub mnieyszá iest od podstawy drugiégo. Tak, niech piérwszy równoległobok má wysokości 3. łokcie, ró-

wnie

wnie iak i drugi; ieżeli tén drugi równoległobok mieć będzie podstawę łokci 4, zawsze iednostayną i nie odmiénną, a zatém i iednostayną powiérzchnią 12, łokci kwadratowych; piérwszy równoległobok tym większy lub mnieyszy będzie od drugiégo, toiest, tym większą lub mnieyszą mieć będzie powiérzchnią od drugiégo, im większą lub mnieyszą dámy mu podstawę od drugiégo. Dáwszy mu naprzykłád podstawy 8. łokci, będzie powiérzchniá iego 24. łokci kwadratowych, dwa razy wiekszá od powiérzchni drugiégo równoległoboku: dáwszy mu podstawy 2. łokci, będzie powiérzchniá iego 6. łokci kwadratowych, dwa razy mnieyszá od powiérzchni tegoż równoległoboku, i t. d. Gdy tedy tén piérwszy równoległobok, albo powiérzchniá iego, tylé się tylko powiększá lub pomnieyszá względém powiérzchni drugiégo równoległoboku, ilé się powiększy lub pomnieyszy podstawá iego względém podstawy drugiéy iednostaynéy; dosyć iest więc powiedzieć w takim razie, że powiérzchniá tego równoległoboku, któregó wysokość iednostayná, proporcyonalną iest do swoiéy podstawy, toiest, gdy podstawa dwa razy naprzykład większá będzie, powiérzchniá téż większá będzie dwa razy: gdy tamta dwa razy mnieyszá, to i ta, i t. d.

205. Niech będą cztéry ilości oznaczo-

czoné przez ABCD, któré do siebie stósować możná; zgodzono się; aby stósunek tén wyrazić kształtém następuiącym A:B=C:D: co się tak wymáwiá; A, tak się má do B, iak się má C, do D. Dwa punkta umieszczoné między dwóma wyrazami każdégo w szczególności stósunku znakiém są dzieléniá iednégo wyrazu przez drugi: dwie zaś linii w pośrzodku znaczą równości dwóch stósunków.

206. *Wnioski*. Z tych *zasád* (principium) któréśmy o proporcyach założyli, wynikaią następuiące podaniá.

1. Jeżeli dwa stósunki są równé trzeciému; równé téż i sobie będą.

2. Jeżeli w dwóch Proporcyach trzy piérwszé wyrazy w jednéy, równé są trzém piérwszym wyrazóm w drugiéy; to i czwárté wyrazy równé téż będą.

3. Stósunek między dwiéma ilościami ténże sám iest, co i między témiż ilościami podwoionémi, potroionémi i t.d. Tak naprzykład 4. má się do 2, iak 8 do 4, albo iak 12 do 6. i t.d. Stąd wyniká, że możná podzielić, albo rozmnożyć przez iednakową liczbę dwa piérwszé lub dwa ostatnié wyrazy Proporcyi, nie naruszaiąc przeto proporcyi między témiż cztéréma wyrazami.

4. Można także podwoić, potroić, i t. d. obadwa Poprzedniki, albo obadwa Następniki, a proporcyá wszelako będzie zachowaná. W pierwszym razie wykładnik stósunków, stanie się dwa, trzy, i t.d. razy większym, niż był z początku: w drugim zaś razie będzie tylko połową, trzecią częścią, i t.d. Wykładnika pierwszego.

5. W téyże samey proporcyi, można odmienić mieysce obudwóm Poprzednikóm, to iest, położyć tam Poprzedniki, gdzie były Następniki, a Następniki tam, gdzie były Poprzedniki; równość iednak i po téy odmianie zachowaná będzie między dwoma stósunkami téyże proporcyi. I tak naprzykład w téy Proporcyi: $4:2=12:6$, można odmienić położénié Poprzedników: 4 i 12. i napisać: $2:4=6:12$, wszelako iednak zachowá się Proporcyá: bo iako w pierwszéy proporcyi wykładniki stósunkow obudwóch: $4:2$, i $12:6$, były równé, toiest tak, 4 przez 2, iak 12 przez 6, podzielone dáwały na wykładnika, albo na wielorác, 2; tak i w drugiéy proporcyi, wykładniki stósunków $2:4$ i $6:12$ są równé; toiest, tak 2, przez 4 iak i 6. przez 12 podzielone, daią na Wykładnika, albo na wieloráz iednakowy ułomek: $\frac{1}{2}$. Toż mówić i o podobnéy odmianie w jakiéykolwiek inszéy Proporcyi:

cyi: co tak można ogólnie przez litery wyrazić:

Jeżeli A: B=C: D.
to też i B: A=D: C.

6. W proporcyi każdey można powiedzieć, że summa, albo różnica dwóch pierwszych wyrazów, tak się ma do iednego z tych dwóch wyrazów, iak się ma summa albo różnica dwóch drugich wyrazów, do iednego z tychże wyrazów. Naprzykład ieżeli 4:2=12:6, to też będzie 6:2=18:6, albo 6:4=18:12, albo 2:4=6:12.

Jakoż ieżeli każdą Poprzednika i Następnika summę lub różnicę stósuiemy do następnika iey własnego; Wykładnik każdego w szczególności stósowania powiększy się lub pomnieyszy iednością, a zatém równy będzie w obudwóch stósunkach i po takiey odmianie.

Jeżeli zaś każdą Poprzednika i Następnika summę lub różnicę stósuiemy do Poprzednika iey własnego, iedno czynimy, iak gdybyśmy pierwey poprzednika każdego za Następnika położyli; a potém dopiero, summę lub różnicę ich stósowali do następników, tak iak wyżey; a zatém tąż częścią pomnoży się lub zmnieyszy wykładnik pierwszego stosunku, iak i drugiego.

Wyrażénia literalné tegoż samégo.

Jeżeli A: B = C: D.

to téż A + B:B = C + D:D

A — B:B = C — D:D

A +: B:A = C + D:C

A — B:A = C — D:C.

Gdyby Następniki większé były od swoich Poprzedników, naprzykład B od A, i D od C; tę proporcyą A:B=C: D możnáby w tę zamiénić B:A=D:C. a zatém.

B—A: A=D—C: C

B—A: B=D—C: D.

7. Gdy w Proporcyi, cztéry wyrazy iednégo są gatunku, toiest, gdy wszystkié znaczą n.p. liniie, lub powiérzchnie i t.d. można powiedzieć, że summa dwóch Poprzedników, tak się má do summy dwóch Następników; iak się má którykolwiek poprzednik do swégo następnika.

Jakoż, ieżeli iedén Poprzednik zamyká naprzykład dwa, trzy i t. d. razy swégo Następnika, i drugi téż Poprzednik, tylé razy następnika swégo zamykać w sobie będzie; a zatém i summa Poprzedników, tylé téż razy zamykać będzie summę następników. Przeto summa Poprzedników tak się mieć będzie do sum-

my

my następników, iak każdy w szczególności Poprzednik do swégo Następnika. To, samo rozumowanié przystósować można do różnicy dwóch Poprzedników i do różnicy, dwóch następników, i do więcéy iak dwóch równych stosunków.

Wszystkié té odmiany na wielu przykładach liczebnych obiaśnic należy.

207. *Uwága.* Dadzą poznać Nauczyciele Uczniom swoim, że *Reguła trzech*, iest pewnym gatunkiém proporcyi, w któréy z trzech wyrazów znaiomych, szukámy czwártego nieznaiomégo: co samo na przykładach iakich rachunkowych pokazać trzeba. Mnożénié nawet i dzielénié, do proporcyi przyrównać można: bo w mnożeniu liczby, mnożná i mnożącá, są śrzedniémi wyrazami proporcyi, iedność iest piérwszym wyrazém proporcyi, a liczba rozmnożoná iest ostatnim wyrazém. I tak naprzykład: $4 \times 3 = 12$. rozłożyć możná na proporcyą następuiącą $1 : 4 = 3 : 12$. W dzieléniu zaś, liczba dzielącá i wieloráz są śrzedniémi wyrazami proporcyi; iedność iest wyrazém piérwszym: a liczba podzielná iest ostatnim wyrazém. I tak, naprzykład, $\frac{8}{4} = 2$, albo $8 : 4 = 2$, rozłożyć możná na proporcyą następuiącą $1 : 4 = 2 : 8$. Więcéy ieszcze takowych przykładów podadź nie zawadzi.

208. *Twierdzénié 1. fundaméntalné.* Gdy w Tróykącie iakimkolwiek bok iedén przedłużaiąc go powiększymy dwa, trzy, cztéry pięć i t. d. razy, i przez końce takiégo przedłużénia poprowadzimy równoległé od boku drugiégo aż do boku trzeciégo także przedłużonégo; zrobią się tym sposobém Tróykąty których i inné dwa boki większé téż będą od boków piérwszégo Tróykąta, dwa, trzy: cztéry, pięć i t. d. razy.

Táb. XI. *Fig. 4.* Niech na przykłád będzie troykąt ABC, któregośmy bok AB, tak przedłużyli, aby liniiá AD, dwa razy była większá od AB. Przez D. poprowadziwszy DH równoległą od BC; Liniiá DH. dwa razy téż większá będzie od linii BC, a liniiá AH dwa razy większá od linii AC.

Wykréślénié. Przez punkt C. poprowádźmy CN równoległą od AB, któráby spótkała w punkcie N, liniią DH.

Dowodz: Czworokąt BDNC, iest równoległobokiém; więc boki w nim przeciwné są równé toieſt, BC = DN, a BD = CN: a że BD = AB; więc i CN = AB. Kąty iednoſtronné A, i NCH są równé, iako też i kąty iednoſtronné ACB, AHD: a zatém Tróykąty ACB, CHN dlá równości kątów wszyſtkich i boków AB, CN równych, mogą przystać do siebie, i będzie AC = CH, a tém samém AH = 2 AC, to-

iest,

iest, liniiá AH dwa razy większá od AC. Jest też i BC = NH, a tém samém DH = 2 BC, toiest, liniiá DH dwa razy większá od BC. Weźmy znowu Liniią AE trzy razy większą od AB, i poprowádźmy EI równoległą od BC. Podobnie, iak wyżéy, dowiéśdź będzie możná, że téż liniiá EI trzy razy ieſt większá od BC, a AI trzy razy większá od AC: co się tatwo okáże pociągnąwszy liniią HO równoległą od AE: bo dlá równości kątów wszyſtkich, i boków AB, HO, Tróykąty ABC, HOI przystaną do siebie, a zatém AC = HI, i BC = OI. A że EO = DH, a DH = 2 BC = 2 OI, więc EO = 2 BC, a zatém EI = 3 BC. Tak téż i AI = AH + HI = 2 AC + HI = 3 HI.

Tymże sposobém dowodzi się, że ieżeli linii AF, cztéry razy będzie większá od liniii AB; Liniiá téż FL równoodległá od BC, cztéry razy od niéy większá będzie, i liniiá AL, cztéry także razy większá od AC, i t. d.

209. *Zagádn.* 1. Podzielić daną liniią na ilékolwiek części równych.

Niech naprzykłád będzie liniiá daná AG, którą podzielić mámy na 5. części równych.

Rozwiązanié. Od końca iednégo, naprzykłád A, linii danéy AG, prowadzę

dru-

drugą liniią AM, iakieykolwiek długości, czyniącą z liniią daną, kąt iaki mi się podobá. Od A ku M, biorę tylé części równych na linii AM, na ilé ich má bydź podzieloná liniiá AG; tu naprzykłád biorę 5. części równych. Punkt M. Linii AM, gdzie się ostatniá część podziáłu kończy, łączę liniią MG z punktém G, Linii daney AG. Przez inszé podziáłu punkta: L, I, H, C, prowadzę równoodległé od linii M G, do linii AG. Té równoodległé: LF, IE, HD, CB, wráz z liniią MG przecinać będą liniią daną AG w punktach podziáłu żądanégo.

Podobnym sposobém poſtąpić sobie trzeba, gdy na więcéy lub mniéy części podzielić przypadnie liniią daną.

Dlá większéy łatwości, w prowadzéniu równoodległych, możná użyć następuiącégo sposobu, zwłászcza gdy na wielé równych części przypádá dzielić liniią daną.

Táb. XI. *Fig.* 5. Chcąc naprzykłád podzielić liniią AB na 5. równych części, prowadzę od końca iéy iednégo A liniią AC pod iakimkolwiek kątém, i od drugiégo końca B, prowadzę liniią BD, od piérwszéy równoodległą. Dzielę od punktu A liniią AC, na pięć iakichkolwiek równych części i na takież pięć równych części od punktu B, dzielę liniią BD. Punkta podziáłów

równych

równych w obudwóch liniiach, łączę tylaż równoodległémi; té przetną liniią daną AB w punktach podziału żądanégo.

Dowodzénié tego nie różni się od poprzedzaiącégo, gdyż w równoległoboku ACBD, uważać można iedén tylko Tróykąt, BAC, lub ABD; a zatém równość części, Linii AB, podobnie się, iak w piérwszym Twiérdzéniu dowiedzie. (p)

210. *Twiérdz*: 2. Dwa Tróykąty równokątné, maią proporcyonalné boki przeciwné kątóm równym.

Niech będą dwa Tróykąty AGM, i abc, w których kąty A i a, G i b, M i c są równé. Niech naprzykład bok AG, będzie pięć razy większy od boku ab; będzie téż i bok AM, pięć razy większy od boku ac, i bok GM, pięć razy także większy od boku bc. Táb. XI. *Fig*.4. *i* 6.

Jakoż odciąwszy Liniią AB, równą linii ab, i AC, równą ac, i pociągnąwszy liniią BC, Tróykąty ABC, abc, będą mogły przystać do siebie, a w szczególności kąty

---

(p) Rozwięzuiąc tymże podobné Zagádnieniá, niecháy nie przestaią Uczniowie na Figurze podanéy, ale niech sami kréślą sobie podobną Figurę, i na niéy rozwięzuią Zagádnienié. Figura podaná niech im tylko służy do łatwieyszégo w czytaniu zrozumiéniá Propozycyi, którą gdy iuż dobrze zrozumieią; niecháy, zamknąwszy nawet Xiążkę, na Figurze osobnéy od nich nakréślonéy pokażą Nauczycielóm, że to, co czytali, dokładnie zrozumieli, i umieią się dobrze wytłumaczyć.

B i b, C i c będą równe. A że też kąty G i b, M i c są równe; więc równe także są i kąty G i B, M i C; a zatém liniie BC, GM będą równoodległe. Przeto według piérwszégo Twiérdzéniá, ieżeli AG iest pięć razy większá od AB, czyli od ab; będzie też i AM pięć razy większá od AC, czyli od ac, i GM pięć razy większá od BC czyli od bc. Toż samo mówićby się mogło, gdyby dwa boki Tróykątów, przeciwné równym kątóm nie pięć, ale mniey lub więcey zupełnych razy w sobie się zamykały.

Gdyby zaś dwa boki w dwóch Tróykątach, przeciwné kątóm równym, nie zamykały się zupełnie ieden w drugim, ale ieden naprzykłád z tych boków miáł w sobie 7. takich równych części, iakich drugi má tylko 3; w takim razie insze téż boki równym kątóm przeciwné, w tychże Tróykątach nie zamykałyby się zupełnie ieden w drugim, ale ieden fkłádałby się z 7, takich części, z jakich 3. fkłádá się drugi. Tak na *Figurze* 7, gdzie Tróykąty ABC, abc, są równokątné i bokóm AB, ab, taká długość daná, żeby bok AB, zamykáł w sobie 7, części równych linii AD, a bok ab, takież miał 3. tylko części równé linii AD, albo ad; w tych Tróykątach poprowadziwszy liniie DE, de, równoodległé od BC, bc; boki AC i ac, mieć też będą piérwszy 7. drugi 3, części równé linii AE, albo ae, a boki BC i bc, zamykać

takze

takze będą piérwszy 7, a drugi 3, części równé linii DE, albo de. Toż mówić, gdyby boki dwóch Tróykątów, przeciwné kątóm równym, więcéy lub mniéy części równych w sobie zamykały.

211. *Przestroga.* W dwóch Tróykątach równokątnych, których boki porównywać z sobą mámy dobrze iest wiérzchołki kątów równych naznáczać podobnémi literami: naprzykład, gdy nad wiérzchółkiém kąta w jednym Tróykącie napiszémy literę A, napiszmy i nad wiérzchołkiém kąta równégo piérwszému w drugim Tróykącie literę a: gdy nad drugim kątém, w piérwszym Tróykącie będzie B, niech i nad drugim kątém równym tamtému w drugim Tróykącie będzie b, i t.d. Tym sposobém i boki przeciwné równym kątóm w obudwóch Tróykątach, będą podobnémi téż literami naznaczoné: a zatém, gdy w Proporcyi weźmiémy naprzykład boki AB, ab, za Poprzedniki stósunku, za Następniki wziąść będzie potrzeba boki AC, ac, albo BC, bc, i dlá tego wszystkié té proporcye będą dobré; AB: ab = AC: ac. AB: ab = BC: bc, albo AC: ac = AB: ab. BC: bc = AB: ab; albo, AC: ac = BC: bc, albo BC: bc = AC: ac.

212. *Twiérdz:* 3. Jeżeli we dwóch Tróykątach, kąty dwa którékolwiek są równé i boki dwa około każdégo z tych

kątów

kątów proporcyalné; takié Tróykąty będą równokątné.

Niech będą dwa Tróykąty ABC, abc, i w tych kąty A i a równé boki zaś AB, ab, i AC, ac, około tych kątów proporcyonalné, toiest, niech się má tak AB do ab, iak AC do ac, czyli AB: ab = AC: ac. W takim razie będą też równé kąty B, b, i kąty C, c, a zatém i stósunek boków BC, bc, będzie teñ sám, co i boków AB, ab, albo AC, ac.

Tab. XII. Fig. 1. *Wykréślénié*. Na boku AB, weźmy linią AD, rowną ab, i poprowádźmy DE rownoodległą od BC, i spotykaiącą AC w Punkcie E.

Dowodz: Tróykąty ABC, ADE, są rownokątné: więc (iako się w drugim Twiérdzéniu dowiodło) AB: AD. (albo ab) = AC: AE. A że AB: ab = AC: ac, więc AE = ac: a zatém Tróykąty ADE, abc mogą przystać do siebie: że zaś Tróykąty ABC, ADE, są równokątné; więc równokątné także będą i Tróykąty ABC, abc, a zatém, AB: ab = BC: bc.

213. *Twiérdz*: 4. Jeżeli w dwóch Tróykątach, trzy boki w jednym są proporcyonalné względém trzech boków w drugim, takié Tróykąty będą rownokątné.

Niech będą dwa Tróykąty, ABC, abc, i bo-i boki w nich proporcyalné, tak, że AB: ab = AC: ac, i AB: ab = BC: bc, té dwa Tróykąty są równokątné.

Wykréśléniè. Weźmy liniią AD równą linii ab, i poprowadźmy DE równoodległą od BC.

Dowodz: Tróykąty ABC, ADE są równokątné, więc AB: AD (albo ab) = AC: AE.

A że	téż iest AB:	ab.	=	AC:	ac
więc	- - -	AE	=		ac
Podobnie	AB:AD	(albo ab)	=	BC:	DE
A że téż iest, AB:	- -	ab	=	BC:	bc
Więc	- - -	DE	=		bc

A zatém dwa Tróykąty ADE, abc, wszystkié trzy boki maią sobie równé, i dlá tego, mogą przystać do siebie, i są równokątné. A że téż są równokątné i Tróykąty ABC, ADE, więc równokątné także będą Tróykąty ABC, abc.

214. *Twiérdz:* 5. Niech będą dwa Tróykąty maiącé kąt iedén prosty, roztwarty, lub ostry równy w obudwóch Tróykątach, i niech stósunek ramión przy tych kątach będzie równy stósunkowi boków przeciwnych tymże kątóm. Té dwa Tróykąty będą równokątné, byleby w trzecim przypádku, boki przeci-

wné

wné kątowi ostrému większé były w obudwóch Tróykątach, niżeli ramiona po iednéy lub po drugiéy stronie przyległé témuż kątowi: albo, chociaż té boki przeciwné mnieyszé będą od ramión, byleby inszy kąt w obudwóch Tróykątach był roztwarty, lub ostry, który iedno ramié, má spólné z katém piérwszym, równym w obudwóch Tróykątach. Niechby naprzykład były dwa Tróykąty ABC, abc, w których kąty A i a, równé, i stósunek ramieniá AC do ac, taki, iaki boku BC, do bc. Té dwa Tróykąty będą równokątné.

Tábl. XII. *Fig.* 2. 1. Gdy kąty A i a, obadwa są prosté.

Fig. 3. 2. Gdy kąty A i a, obadwa są roztwarté.

Fig. 4. 3. Gdy kąty A i a obadwa są ostré, ale boki BC, bc, większé od ramión AC ac.

Gdy kąty A i a, obadwa są ostré, ale boki BC, bc, mnieyszé od ramion AC, ac: i kąty B i b, obadwa ostré, *Fig.* 5. albo obadwa roztwarté *Fig.* 6.

Wykréślénié powszechné. Weźmy liniią AD, równą ac, i poprowádźmy DE równoodległą od BC.

Dowodz: Tróykąty ACB, ADE są równokątné.

Więc

Więc AC:AD (albo ac) =BC:DE
Ale też iest AC: ac =BC: bc
więc DE= bc

A zatém dwa Tróykąty ADE, acb, mogą przystać do siebie, i są równokątné: a że też i Tróykąty ACB, ADE są równokątné; więc równokątné także będą i Tróykąty ACB, acb. (q)

215. *Def.* Gdy w dwóch Figurach prostokréślnych równé się kąty wszystkié znayduią iedné względém drugich, i boki około tych kątów proporcyonalné; takié Figury nazywaią się *podobnémi* (Figurae similes.)

216. *Uwága.* Po przytoczonych dowodzéniach Twierdzéń poprzedzaiących iaśnie się pokazuie, że równość kątów w dwóch Tróykątach, pociąga za sobą proporcyonalność ich boków, i wzaiémnie proporcyonalność boków w dwóch Tróykątach wywodzi równość kątów w tychże Tróykątach. W jnszych zaś Figurach prostokréślnych, które z więcéy niż

(q) Dlá skrócéniá, różné té przypádki w jednéim powszechném zamknęło się dowodzéniu; lepiéy iednak będzie każdégo z osobna przypádku osobno Uczniom dowodzić, aby wielu razém okoliczności wystawiéniém, báczność ich nie była roztargnioná.

niż trzech boków są złożoné, nié można z równości kątów we dwóch takich wielokątach, wnosić proporcyonalność ich boków, ani wzaiémnie z proporcyonalności boków, wnosić równość kątów. I tak kwadrat prostokątny, z kwadratém ukośnym, lubo maią boki proporcyonalné, nié maią iednak kątów równych. Dwa znowu prostokąty, nie różnią się między sobą, co do kątów, a iednak boki ich mogą bydź nierówné i wcale nieproporcyonalné.

Trzeba iak náyiaśniéy i náydokładniéy wyłożyć Ucznióm té trzy rzeczy, toiest: *Przystawanié*, *Równość* i *Podobiéństwo* Figur.

Równość dwòch naprzykłád Figur, ściągá się tylko do ich wielkości, nic zaś do ułożéniá boków, albo granic w których się zamykaią. I tak dwa Tróykąty, które równé podstawy maią, i wysokości są sobie równé, lubo ich boki, nie iednakowo mogą bydź ułożoné, i większé iedné lub mnieyszé od drugich. Dlá tego téż można znaléźć Tróykąt, lub kwadrat, równy Figurze prostokréślnéy danéy, iakáżkolwiek liczba iey boków będzie, i tychże boków ułożénié.

Podobiéństwo ściągá się tylko do saméy Figury czyli ułożéniá boków, nie zaś do wiel-

wielkości. Dwie Figury, naprzykład dwa Tróykąty mogą bydź do siebie podobné, lubo iedén będzie nader wielki, a drugi nader mały. Lecz aby Figury były podobné, trzeba 1*mo*. Aby miały iednakową liczbę boków. 2*do*. Aby kąty w iedney Figurze były równé kątóm w drugiéy. 3*tio*. Aby *boki odpowiadaiącé* (latera correspondentia) toiest, té, któré zamykaią w sobie kąty równé, były proporcyalné. I tak dwa kwadraty zawsze są podobné iedén do drugiégo, chociażby naprzykład bok iednégo był na milę długi, a drugiégo tylko na łokieć, lub na cal.

Przystawanié zamyká w sobie razém równość i podobiéństwo. Dwie Figury aby przystać do siebie mogły; trzeba aby się w niczém nie różniły, tylko w tém, że na odmiennych miéyscach są nakréśloné. (r)

217. *Twiérdz.* 6. Jeżeli dwie iakiékólwiek Figury prostokréślné są podobné, i w każdéy Táb. XIII. *Fig.* 1.

M

(r) Przetrząsnąwszy Twiérdzéniá ściągaiacé się do równości, i do podobiéństwa Tróykątów, łatwo postrzeżémy, że dowodzéniá tam przytoczoné zupełnie się zasádzaią na tych, któréśmy dáwali mówiąc o przystáwaniu Tróykątów. Wielé na tém zawisło, aby często przypominać Uczniom sposob postępowaniá, który prowadzi od wyobrażéń prościeyszych, do tych, któré bardziéy są zawikłané.

w każdéy z nich przez wiérzchołki kątów równych, poprowadzimy do drugich kątów, tylé przekątnych, ilé ich poprowadzić można; wszystkié té Tróykąty, na któré iednę Figurę podzielimy, będą podobné Tróykątóm w drugiéy Figurze.

Przykład: Niech będą dwa Pięciokąty ABCDE, abcde, podobné do siebie; od wiérzchołków A, i a, dwóch kątów równych, poprowadziwszy przekątné, AC, AD, ac, ad; Tróykąty, ABC, ACD, ADE, będą podobné Tróykątóm, abc, acd, ade.

Dowodz: Ponieważ té Pięciokąty są do siebie podobné, kąty w nich B i b, będą równé, i boki około tych kątów proporcyonalné; dwa więc Tróykąty ABC, abc, są do siebie podobné, iako maiącé kąty B i b, równé, i boki, około nich proporcyonalné, a w szczególności kąt ACB, równy iest kątowi acb: a że też równé są dané kąty BCD, bcd; więc i kąty ACD, acd, równé będą. Boki także AC, ac, są między sobą iak boki AB, ab, albo BC, bc. Aże tak boki AB, ab, iak i boki, BC, bc, są w proporcyi z bokami DC, dc; więc i boki AC, ac, są proporcyonalné bokóm DC, dc; a zatém i Tróykąty ACD, acd, będą podobné, maiąc kąty C i c równé, i boki około nich AC, DC, ac, dc, proporcyonalné, a w szczególności kąty, ADC, adc, będą równé. A że znowu i kąty E, e, są równé; więc i Tróykąty ADE,

ADE, ade, będą względém siebie równokątné; a zatém podobne.

218. *Uwága* 1. Dlá dowiedzieniá, że Tróykąty ADE, ade, są podobné, nie trzeba było używać koniecznie proporcyonalności boków AE, ae, DE, de; možná nawet było i nie pokazywać wyraźnie równości kątów E, e, z samégo wykréśléniá; ponieważ kątów EDA, eda, EAD, ead, mogła bydź równość okázaná, z równości iuž dowiedzionéy kątów ADC, adc, DAC, dac, CAB, cab, w jnnych Tróykątach: a tém samém równość kątów E, e, wydałaby się, a zatém i podobieństwo Tróykątów ADE, ade, byłoby dowiedzioné.

219. *Uwága*. 2. Wielé na tém zawisło, áby to dadź postrzédz Ucznióm, że gdy we dwóch Figurach podobnych złączoné będą przekątnémi wiérzchołki dwóch kątów odpowiadaiących sobie; té przekątné mieć będą iednostayné stosunki, z bokami tych dwóch Figur; a za tęm gdy w podobnych Figurach końce dwóch boków odpowiadaiących sobie złączymy przez przekątné; Tróykąty złożoné z tych przekątnych i z dwóch boków należących do tych Figur, będą do siebie podobné.

220. *Zagádn:* 1. Maiąc dané trzy liniie prosté, na trzy piérwszé wyrazy proporcyi, znaléźć liniią czwártą proporcyonalną.

Wykréślénié. Zróbmy kąt iakikolwiek. Na dwa ramiona tego kąta, przenieśmy od wiérzchołka iego dwie dané liniie, maiącé służyć za dwa piérwszé wyrazy proporcyi. Końce tych dwóch liniy złączmy trzecią liniią. Przenieśmy ieszcze podobnym ſposobém i trzecią daną liniią na to ramié, na któré iuż iest przeniesioná piérwszá liniiá proporcyi. Od końca téy trzeciéy linii poprowádźmy aż do drugiégo ramiéniá liniią równoodległą od téy, która złączyła końce dwóch piérwszych liniy. Liniiá zawartá między wiérzchołkiém kąta i punktém, w którym oſtatniá równoodległá przeciná ramié drugié, będzie, czwártą liniią proporcyonalną, któréyśmy ſzukali. (s)

121. *Zagádn.* 2. Maiąc daną liniią prostą, tak ią przeciąć, aby dwa iéy odcinki tak się do ſiebie ſtóſowały, iak ſię ſtóſuią dwie inſzé dané liniie

Wykréślénié. Od końca iednégo linii danéy do przecięciá, poprowádźmy pod iakimkolwiek kątém liniią równą iednéy z tych dwóch, których dany iest ſtóſunek, a

(s) Co w Arytmetyce znaczy *Reguła trzech*, to znaczy w Geometryi Zagádniénié, aby trzy maiąc dané Liniie prosté, znaléźć czwártą proporcyonalną. Jest to w saméy rzeczy Reguła trzech wykonaná na liniiach.

a od drugiégo końca, w ſtronę przeciwną, poprowadźmy równoodległą od piérwſzéy, równą drugiéy linii, któréy także dany ieſt ſtóſunek.

Złączmy końce tych dwóch liniy w przeciwné ſtrony poprowadzonych, liniią trzecią, ta przetnie liniią daną w punkcie, którégośmy ſzukali.

Albo tak. Od końca linii danéy do przecięciá, poprowádźmy liniią, któráby z nią czyniła kąt iakikolwiek. Na tę drugą liniią, od wiérzchołka kąta, przenieśmy iednę z tych liniy, których dany ieſt ſtóſunek, i od końca znowu téy oſtatniéy linii pociągniymy drugą liniią, równą drugiéy, któréy także dany ieſt ſtóſunek: koniec téy złączmy z końcém linii danéy do przecięciá: a od tego punktu, gdzie ſię piérwſzá kończyła, a ta drugá zaczynała, poprowádźmy równoodległą, którá przetnie liniią daną do przecięciá w punkcie żądanym.

Tén oſtatni ſpoſób poſtępowaniá, może bydź przyſtóſowanym i w jnnych razach, gdzieby liniią daną na więcéy części przeciąć potrzeba, naprzykład na 3. 4. 5. i t.d. które takby się miały do ſiebie, iak ſię maią 3. 4. 5. i t. d. liniy danych. (t) 222.

(t) Takié zagádnićnié iest têm samém w Geometryi, czem iest w Arytmetyce *Regula spółki.*

222. *Zagádn.* 3. Przedłużyć liniią daną, tak, aby summa z téy linii i z jéy przedłużéniá tak się miała do samégo przedłużéniá, iak się maią do siebie dwie inszé liniie dané: czyli, znaléźć dwie liniie, których daná ieſt różnica i ſtósunek.

Wykréślénié. Od obudwóch końców linii danéy, poprowádźmy w jednę ſtronę dwie liniie równoodległé, i równé dwóm liniióm, których dany ieſt ſtósunek. Przez końce tych równoodległych, przeciągniymy liniią tak daleko, aż się ſpotká z przedłużéniém linii danéy. Punkt tén ſpotkaniá, wyznaczy długość przedłużéniá linii danéy; i odległość iego od dwóch końców tėyże linii, będzie wymiarém długości dwóch liniy, któryche-śmy ſzukali.

223. *Zagádn:* 4. Maiąc dany Tróykąt, i liniią osobną, wyſtawić na téy linii Tróykąt podobny danému.

Sposób 1. Dwóm bokóm Tróykąta danégo, i trzeciéy linii danéy, ſzukám czwártéy proporcyonalnéy, i mieć będę dwa boki Tróykąta, którégo ſzukám, w proporcyi z dwoma bokami Tróykąta danégo. Tymże ſposobém znáydę i trzeci bok Tróykąta, który má bydź podobny Tróykątowi danému.

Sposób 2. Od dwóch końców linii danéy

néy prowadzę po iednéy ftronie dwie linie czyniące z nią dwa kąty równé dwóm kątóm Tróykąta danégo; té dwie linie zeyściém fię z fobą, zrobią z daną linią Tróykąt podobny danému.

Sposób 3. Linią daną przenofzę na bok którykolwiek Tróykąta danégo, tak, aby koniec ieden téy linii był na wiérzchołku kąta, a drugi tam, gdzie przypadnie, lub na famym boku Tróykąta, lub za nim, gdy linia dana dłuższa będzie od boku Tróykąta. Z końca tego drugiégo, linii danéy prowadzę równoodległą od boku Tróykąta przeciwnégo kątowi, od którégo piérwfzą linią ciągnąłém, i tak daleko ią prowadzę, aż fię zniydzie z trzecim bokiém Tróykąta danégo, przedłużonym, gdy tego będzie potrzeba. Zrobi fię tym fpofobém Tróykąt podobny danému, i maiący za podftawę linią równą danéy, który to Tróykąt przeryfować potém mogę na faméy linii danéy. (u)

224. *Zagádn:* 5. Na danéy linii wykréślić iakąkolwiek Figurę prostokréślną podobną Figurze danéy.

Rozwiąz: Na danéy Figurze od końca boku którégokolwiek, prowadzę tyle

(u) Częsté tego zagádniéniá używanié, było pobudką do podaniá kilku sposobów, którémi bydź może rozwiązané.

lé przekątnych do innych kątów, ilé można, i dzielę tak Figurę daną na Tróykąty. Potém na linii danéy wykreślam po iednéy ſtronie ſpoſobem wyżéy opiſanym, tylé Tróykątów podobnych, ilé ich ieſt w Figurze danéy. Wierzchołki tych Tróykątów, będą wierzchołkami kątów Figury, któréy ſzukałém.

225. *Uwága.* Między innémi ſpoſobami rozwiązaniá tego Zagádnieniá, ſpoſób podany zdaie ſię náylepſzym: a to dlá tego, że używaiąc go, uchybiéniá, które popełnić można w położéniu linii, czyli boków Figury, nie zawisły iedné od drugich: i można uchybić w położéniu iednéy linii, a nie uchybić tém ſamém, w położéniu drugiéy: na co oſobliwſzą baczność koniecznie mieć potrzeba.

226. *Podanié przybrané.* (Lemma). W Tróykącie proſtokątnym, gdy ſpuścimy prostopadłą, od wiérzchołka kąta proſtégo; ta proſtopadłá podzieli Tróykąt na dwa inſzé z piérwſzym rownokątné, a zatém i równokątné między ſobą.

Táb. XIII. *Fig.* 2. Niech będzie Tróykąt ABC proſtokątny w C, skąd ſpuſzczoná ieſt proſtopadłá CD, na przeciw proſtkątną AB; Tróykąty trzy: ABC, ACD, CBD są względém ſiebie równokątné.

Do-

Dowodz: Tróykąty ABC, ACD, maią kąt ſpólny A, i kąty ACB, ADC proſté, a zatém równé; trzeci przeto kąt w jednym, będzie téż równy trzeciému kątowi w drugim. Są więc obadwa té Tróykąty, równokątné. Podobnie i Tróykąty proſtokątné ABC, CBD, maią kąt spólny B, i ſą także równokątné.

W Tróykątach równokątnych ABC, ACD, mámy proporcyą: AB: AC=AC: AD. w Tróykątach: ABC, CBD będzie, AB: BC=BC:BD; a w Tróykątach ADC, CDB; AD: DC=DC: BD. w Tróykątach, ABC, ACD, iest téż i ta proporcyá: AB:BC=AC:CD.

To ieſt 1. W Tróykącie proſtokątnym, bok ieden ieſt śrzednim Geometrycznie proporcyonalnym, między przeciw proſtokątną i odcinkiém mu przyległym, który czyni proſtopadłá.

2. Wyſokość Tróykąta proſtokątnégo, iest śrzednią Geometrycznie proporcyonalną, między dwóma odcinkami przeciwproſtokątnéy.

3. Przeciwproſtokątná, dwa boki, i wysokość Tróykąta proſtokątnégo, ſą w proporcyi.

227. *Zagádn:* 6. Między dwiéma danémi liniiami, znaléźć śrzednią Geometryczną. *Spo-*

Sposob. 1. Złączywſzy z sobą dwie dane liniie, w jednę liniią proſtą; na niéy iako na śrzednicy nakréślmy półkole, i od punktu złączénia tych dwóch liniy, wynieśmy proſtopadłą aż do okręgu półkoła. Ta proſtopadła będzie śrzednią proporcyonalną, któréy ſzukámy.

Sposób 2. Na większéy z dwóch danych liniy, iako na śrzednicy nakréślmy półkole. Na tę ſamę śrzednicę, od końca iéy iednégo, przenieśmy drugą mnieyſzą liniią daną, a od tego punktu, gdzie ſię na śrzednicy kończyć będzie, wynieśmy proſtopadłą, aż do okręgu połkoła, i punkt zeyściá ſię z półkołem złączmy liniią z punktém tym śrzednicy, od którégo przenieſioná była liniiá mnieyſzá daná. Ta liniiá łącząca té dwa punkta, będzie śrzednią proporcyonalną, któréy ſzukámy.

ROZDZIÂŁ IX.

O stósunkach powiérzchni Figur prostokréślnych w ogólności, a w szczególności o stósunkach Figur podobnych.

228. *Twiérdz:* 1. Gdy cztéry liniie ſą w proporcyi Geometrycznéy; proſtokąt z dwóch ſkraynych, równy ieſt proſtokątowi z dwóch śrzednich.

To

To Twierdzenie trzeba naprzód obiaśnić na liczbach: ieżeli cztery liczby są Geometrycznie proporcyonalne, dwie skrayne rozmnożone iedna przez drugą, równe będą dwóm śrzednim podobnie rozmnożonym. W każdey albowiem proporcyi Geometryczney równość zachodzi między dwoma stósunkami Geometrycznemi, toiest: tyle razy pierwszy poprzednik zamykać w sobie powinien swego następnika, ile razy i drugi poprzednik zamyka także następnika swego. I tak naprzykład w tey proporcyi $6:3=8:4$, iak 6, zamyka w sobie 3, razy 2, tak i 8 zamyka 4, razy 2. Stąd wynika, że rozmnożenie skraynych i śrzednich wyrazów proporcyi, można oznaczyć, przez trzy iednakowe liczby, a tem samem okázać równość wyrazów rozmnożonych, tak skraynych iako i śrzednich. Naprzykład, ponieważ $21:3=28:4$, i równie 21. zamyka w sobie 3, iak i 28, zamyka 4, razy 7. a zatem tak $21=7$, razy 3, iak $28=7$. razy 4; więc 4 razy $21=4\times7\times3$; 3 razy $28=3\times7\times4$. A że $4\times7\times3=3\times7\times4$, więc i $4\times21=3\times28$.

Podobnie, ponieważ $16:12=20:15$ i tak 16 zamyka w sobie 12, iak 20. zamyka 15, razy $1\frac{1}{3}$ albo $\frac{4}{3}$; a przeto tak $16=\frac{4}{3}\times12$, iak i $20=\frac{4}{3}\times15$; idzie zatem, że tak $15\times16=15\times\frac{4}{3}\times12$; iako i $12\times20=12\times\frac{4}{3}\times15$. Tak

Tak też ponieważ $8:28=10:35$, i $8 =\frac{2}{7}\times 28$, a $10=\frac{2}{7}\times 35$; idzie zatém, że tak iest $35\times 8=35\times\frac{2}{7}\times 28$; iako też $28\times 10= 28\times\frac{2}{7}\times 35$.

W ogólności zaś mówiąc, ieżeli iest $a:b=c:d$; i tak a, zamyka w sobie b, iak, i c, zamyka d razy n; będzie $a=n\times b$, i $c=n\times d$, a zatém tak $d\times a=d\times n\times b$. iako - - - - $b\times c=b\times n\times d$.

Obiaśniwszy to twierdzenie na wielu przykładach, przystąpi Nauczyciel do następuiącego dowodzenia.

Táb. XIII. *Fig. 3.* Niech będą dwa prostokąty: ABCD, BDEF, i boki iednego, AB, BC niech będą fkraynémi tey proporcyi, którey boki BD, BF drugiego prostokąta są śrzedniemi, toiest niech się má AB: BF=BD: BC, w takim razie te dwa proftokąty są równe.

Wykreślenie. Ustáwmy tak te dwa proftokąty, aby w kątach dwóch przeciwnych przy B fchodziły się, i przedłużmy boki ich DC, EF, aż do zeyścia się w punkcie G.

Dowodz. Proftokąty: AC, BG (w) których iednakowá ieft wysokość, maią się do

(w) Prostokąty zwykły się wyrázać przez dwie litery, na końcach przeciwnych dwóch kątów napisané.

do siebie, iak ich Podſtawy AB, BF. Prostokąty także BE BG, iednakowéy wysokości, maią się do siebie, iak ich Podſtawy BD, BC. Aże z podaniá ieſt liniiá AB, do BF, iak liniiá BD : BC; więc téż i prostokąt AC tak się má do proſtokątu BG, iak proſtokąt BE, do proſtokątu BG; czyli Proſt : AC: Proſt. BG=Proſt. BE: Proſt. BG, a zatém Proſt. AC=Prost. BE, co ſamo krócéy tak się wyráżá.

	AC: BG=AB: BF
	BE: BG=BD: BC
Aże	AB: BF=BD: BC
więc	AC: BG=BE: BG.
A zatém	AC=BE.

229. *Wzaiémnie téż* (Reciproce *albo e* converso) dowiéśdź można, że ieżeli dwa Proſtokąty są równé; wziąwszy dwa boki iednégo za ſkrayné, a dwa boki drugiégo za śrzednié wyrazy proporcyi, znáydziémy między témi bokami proporcyą.

W liczbah oczywiście się to pokazuie; bo gdyby boki dwa iednégo Proſtokąta wyrażoné były przez liczby: 10. i 42. a boki drugiégo przez 15, i 28, obadwa té proſtokąty zawiérałyby w ſobie 420, naprzykład ſtóp kwadratowych, toieſt, byłoby, 10×42=15×28, ſkądby wypadła ta proporcyá: 10:15=28:42.

Wy-

Wykréślénié Geometryczné do tego Twiérdzéniá służącé, nie odmiénné byłoby od poprzedzaiącégo. Dowodzénié także we śrzodku dopiéro działaniá różniłoby się, toieft ponieważ.

AC: BG=AB: BF
i BE: BG=BD: BC
A przez podanié AC = BE.
więc AC: BG=BE:BG
A zatém AB: BF=BD:BC

230. *Wniofki* 1. Ponieważ w proporcyi, ténże sám bydź może naftępnik piérwszégo ftósunku, co i poprzednik drugiégo; naprzykłád: 8: 4=4: 2. albo, 8: 4: 2, przeto kwadrat ze śrzedniéy linii Geometrycznie proporcyalnéy, równá się téż Proftokątowi z dwóch liniy fkraynych: i znowu, ieżeli kwadrat równy iest proftokątowi, bok kwadratu będzie liniią śrzednią proporcyonalną między bokami Proftokąta.

Té podaniá były wyłożoné, w Rozdziáłach fzóftym, i ósmym, lubo fposobém odmiénnym.

2. Możná to samo przyftósować i do równoległoboków, chociáż nie prostokątnych, byleby kąty iednégo, równé były kątóm drugiégo: także i do Tróykątów

które

które kąt ieden spólny maią: bo ieżeli ramiona ich około tego kąta są proporcyonalne, tak, żeby można wziąść dwa ramiona iednego Tróykąta za skrayne, a dwa drugiego za śrzednie; te dwa Tróykąty będą sobie równe: i wzaiemnie, a to stąd wynika, że takie Tróykąty, są połowami dwóch równoległoboków równokątnych, maiących za boki ramiona tego kąta spólnego.

3. Przystósowanie to uczynić można, i do równoległoboków różnokątnych, biorąc zamiast boku iednego, w obudwóch, wysokość oznaczaną przez prostopadłą, spuszczoną od końca boku iednego na bok drugi, tak dalece, że te dwa równoległoboki będą równe, gdy Podstawa i wysokość iednego będą mogły bydź wzięte za dwie linie skrayne, a podstawa i wysokość drugiego za dwie linie śrzednie proporcyonalne: i wzaiemnie, ieżeli te cztery linie będą proporcyonalne, równoległoboki będą też równe.

4. Jeżeli cztery linie są w proporcyi, można zawsze odmienić mieysce dwóm śrzednim, lub dwóm skraynym, a nawet i dwie śrzednie położyć na mieyscu dwóch skraynych, lub skrayne na mieyscu śrzednich, nie psuiąc proporcyi: ponieważ przy takich odmianach, prostokąt z śrzednich równy iednakowo będzie prostokątowi z skraynych.

231. *Twiérdz:* 2. Gdy przez punkt iaki w kole, lub za kołém poprowadzimy dwie liniie, któréby okrąg koła przecinały po obudwóch ſtronach; proſtokąt ze dwóch części iednéy z tych liniy zawartych między tym punktém i okręgiém koła, będzie równy Proſtokątowi z dwóch części drugiéy liniy zamkniętych także między tym punktém, i koła okręgiém.

Táb. XIII. *Fig.* 4. 1. Niech będzie w kole punkt A, przez który przeciągnioné są cięciwy BC, ED; Proſtokąt, EA×AD równy ieſt Proſtokątowi, BA×AC.

Wykréśl: Poprowádźmy liniie, BD, EC.

Dowodz: Tróykąty BAD, EAC, są do siebie podobné, kąty ich albowiém w wiérzchołku A przeciwné, są równé, i kąty B, E, (189) równé, iako obeymuiącé ramionami ſwémi ténże sám łuk CD. Będą więc boki tych Tróykątów proporcyonalné; i AB: AE=AD: AC. a zatém AB×AC=AE×AD.

Táb. XIII. *Fig.* 5. 2. Niech będzie punkt A, za kołém, od tego pnnktu ciągniymy dwie Liniie AB, AE, przecinaiącé okrąg koła, iedna w B, i C, a drugá w E i D. Proſtokąty AB×AC, i AE×AD, będą równé.

Wykréśl: Poprowádźmy liniie BD, EC.

Dowodz.

Dowodz: Tróykąty, BAD, EAC, maią kąt A, ſpólny i kąty B, i E równé, bo wſparté ramionami na tym samym łuku CD; więc té Tróykąty maią boki proporcyonalné; i AB:AE=AD: AC, a zatém, AB×AC=AE×AD.

To Twiérdzénié zwykło się ieſzcze i tak wyrážać.

1. Jeżeli dwie ciénciwy przecinaią się w kole, częśći ich będą *odwrotnie* (inverse, *albo*, in ratione inversa) proporcyonalné, toiest, tak się będzie miała część iednéy ciénciwy, do części ciénciwy drugiéy; iak się má drugá część ciénciwy drugiéy, do drugiéy części ciénciwy piérwſzéy.

Dwie tedy części ciénciwy iednéy, będą śrzedniémi proporcyi, a dwie części ciénciwy drugiéy będą ſkraynémi téyże proporcyi.

2. Gdy dwie liniie przecinaiącé koło, wychodzą od iednégo punktu za kołém; są odwrotnie proporcyonalné z częściami témi, któré za koło wychodzą, toiest, tak się má iedna przecinaiącá do drugiéy, iak się má część drugiéy za kołém, do części piérwſzéy także za kołém: iedna tedy przecinaiącá, i część iéy za kołém są śrzedniémi w proporcyi, a druga przecinaiącá, i część iey także za kołém, są ſkraynémi téy saméy proporcyi.

232. *Uwága. W piérwszym razie.* Gdy iedna z ciénciw iest śrzednicą koła, a drugá do niéy prostopadłą; ta prostopadłá na dwie równé części będzie od śrzednicy podzieloná, i Prostokąt z dwóch części śrzednicy, będzie równy kwadratowi z połowy drugiéy ciénciwy. Prostopadłá tedy spuszczoná od któregokolwiek punktu koła, na śrzednicę, iest śrzednią Geometrycznie proporcyonalną między dwiéma częściami śrzednicy: który to przypádek szczególny, i wyżéy iuż iest dowiedziony.

W drugim razie. Gdy iedna z liniy zamiást coby miała przecinać koło, iest *styczną* (tangens) iego, możná ią uwáżać iak przecinaiącą koło, ale tak, że część iéy w kole niknie dlá małości, i dwa iéy punkta przecięciá schodzą się w punkt iedén.

W tym razie Prostokąt iedén, odmiéniá się na kwadrat z stycznéy. I stąd wyniká to wielkiéy wági podanié: że ieżeli od iednégo punktu, wychodzą dwie liniie, iedna przecinaiącá koło, a drugá styczná z kołém, kwadrat z stycznéy równać się będzie Prostokątowi z całéy linii przecinaiącéy, i z części iéy za kołém: toiest, że styczná iest śrzednią Geometryczną między całą przecinaiącą, i częścią iéy za kołém. Następuiącé, dowodzénié iest ieszcze iaśnieyszé, i bardziéy pod oczy podpádaiącé. Niech

Niech będzie AD, styczná, AB zaś przecinaiącá koło, i od tegoż samégo punktu A poprowadzoná. Ta styczná AD iest śrzednią Geometryczną między przecinaiącą AB, i iéy częścią, AC, za kołém. Táb. XIII. *Fig.* 6.

Wykréśl: Od punktu dotknięciá D, poprowádźmy dwie liniie: DB, DC.

Dowodz: Tróykąty: ABD, ADC, są do siebie podobné: maią albowiém spólny kąt A, i kąt odcinka, ADC, równy kątowi w odcinku na przemian ABD (195) a zatém i trzeci kąt w jednym Tróykącie równy iest kątowi trzeciému w drugim: będą więc tych Tróykątów boki proporcyonalné, i AB:AD=AD:AC, toiest, kwadrat z stycznéy AD, równy będzie Prostokątowi z AB przez AC.

233. W szczególności zaś niech będzie styczná AT, i przecinaiącá AD, od tegoż samégo punktu A poprowadzoná, przez śrzodek C, koła. Táb. XIII. *Fig.* 7.

Pociągniymy promień CT do punktu dotknięciá T: kwadrat z linii AC, równy będzie summie kwadratów z AT, i CT, toiest, równy będzie summie z Prostokąta AD przez AB, i z kwadratu BC. Skąd wyniká tén wniosek, że ieżeli śrzednicę BD, podzielimy na dwie równé części w punkcie C, i potém na iéy przedłużéniu, weźmiémy iakikolwiek punkt na przykłád A; Prostokąt z całéy téy linii i z iéy przedłużéniá (AD×AB) z przydanym kwadratém, z połowy śrżednicy (BC^2) równać się będzie kwadratowi i linii złożonéy z połowy śrzednicy, i z iéy przedłużéniá (AC^2) toiest będzie $AD \times AB + BC^2 = AC^2$.

234. *Zagád:* 1. Maiąc dany Prostokąt, i kwadrat, znaléźć dwie liniie, któréby tak się miały do siebie, iak się maią, tén Prostokąt i kwadrat.

Rozwiąz: Zamiéńmy Prostokąt dany na inszy iému równy, któryby za bok iedén, miáł bok kwadratu: czyli (co na iedno wychodzi) szukáymy czwártéy linii proporcyonalnéy do boku kwadratu, i do dwóch boków Prostokąta. Bok kwadratu, tak się mieć będzie do téy czwártéy proporcyonalnéy, iak się má kwadrat do Prostokąta.

To postępowanié zgádzá się zupełnie z tém, co się iuż powiedziało w Arytmetyce (*na karcie* 89. i 90.) a co tu przez różné przykłady, podobné następuiącému obiaśnić ieszcze należy.

Wziąwszy bok kwadratu za spólną miarę, albo za iednośc, niechby bok iedén Prostokąta, zawiérał w sobie 5. razy bok kwadratu, a drugi 7. razy. Czwártá liniiá proporcyonalná do boku

tego

tego kwadratu, i do dwóch boków Prostokąta, zawiérałaby w sobie 35. razy bok kwadratu, tak, iako i cały Prostokąt, zawiérałby w sobie 35. razy cały kwadrat.

235. Przystósowanié. Podobnym sposobém postąpimy sobie chcąc znaléźć dwie liniie, któréby tak się miały do siebie, iak się maią dwa Prostokąty, toiest, szukać będziémy czwártéy proporcyonalnéy do boku iednégo Prostokąta, i dwóch boków drugiégo: do téy albowiém czwártéy proporcyonalnéy tak się mieć będzie drugi bok piérwszégo Prostokąta, iak się maią powiérzchnie tychże Prostokątów.

Możnáby to samo wykonać, szukaiąc sposobém wyżéy wyrażonym (234) stósunku każdégo z dwóch Prostokąta, do tegoż samégo kwadratu, znaleźlibyśmy albowiém, że powiérzchnie tych dwóch Prostokątów tak się maią do siebie, iak się maią dwie czwárté proporcyonalné do boku kwadratu, i dwóch boków każdégo z osobna Prostokąta.

Niechbyśmy naprzykład znaleźli, że Prostokąt iedén, który nazywám P. zawiérá w sobie kwadrat K, tylé razy, ilé razy liniiá L, zawiérá w sobie bok B, kwadratu, toiest, że $P:K=L:B$.

Niech-

Niechbyśmy znowu znaleźli, że drugi Prostokąt Q, zawiérá w sobie tén sám kwadrat K, tylé razy, ilé razy liniiá M, zawiérá w sobie bok B tegoż kwadratu, toiest, że Q:K=M:B. Wnoszę stąd, że Prostokąty P, Q, tylé razy zawiérać będą ieden drugi, ilé razy się zawiéraią linie L. M. iedna w drugiéy, toiest, że będzie, P:Q=L:M.

Jakoż ieżeli proſtokąt P. zawiérá w sobie kwadrat K, dwa, trzy, cztéry, i t. d. razy, a prostokąt Q, zawiérá naprzykład 6. razy kwadrat K: Prostokąt Piérwszy, będzie do Proſtokąta drugiégo, iak są liczby; 2, 3, 4, i t. d. do liczby 6. A że téż i liniiá L. zawiérá w sobie bok, B. 2. 3, 4, i t. d. razy; więc téż i liniiá M zawiérać będzie bok B, razy 6. a zatém tak się ma Proſtokąt P, do Prostokąta Q, iak liniiá L, do linii M.

Jeżeli tedy mámy dwie proporcye n p.
P: K=L: B.
i Q: K=M: B.

W których iednakowé są następniki; poprzedniki piérwszé obudwóch proporcyy tak się do siebie będą miały, iak poprzedniki drugié tychże proporcyy, toiest,
P:Q=L:M.

236. *Uwága.* W jednéy z dwóch dopiéro wyrażonych proporcyy, na przykład w dru-

w drugiéy, można było odmienić mieyscé poprzednikóm, i następnikóm, i té samé proporcye tak wyrazić?

P: K=L:B.

K: Q=B:M.

Skąd wyniká P: Q=L:M.

237. *Defin.* Gdy będą trzy iakiékolwiek ilości iednakowégo gatunku stósunek piérwszéy z nich, do trzeciéy nazywá się *stósunkiem składanym*(ratio composita) z stósunku piérwszéy ilości, do drugiéy, i drugiéy do trzeciéy. J tak stósunek P. do Q, nazywá się składanym z stósunku P do K, i K do Q; Tak téż stósunek L do M będzie składanym z stósunku L do B, i B do M. Takié stósunki złożoné z stósunków równych są równé. I tak ponieważ stósunek P do K, i K do Q równy iest piérwszy stòsunkowi L do B, drugi stósunkowi B do M; będzie téż i stósunek skłádany P do Q równy stósunkowi skłádanému L do M.

238. *Przyst:* 1. To, co się tu powiedziało o stósunku skłádanym, dobrze będzie przystósować do reguły trzech skłádanéy, o któréy mówiło się w Arytmetyce.

Przykłád: Rzémieślnicy z jednakową pilnością prácuiący około iakiéy roboty, tym więcéy iéy zrobią, im większá będzie ich liczba, i czas dłuższy strawiony

na

na téyże robocie. Przeto gdy porównać chcémy dwie iednakowégo gatunku roboty, którémi się dwie kupy Rzémieślników zatrudniaią, trzeba rozmnożyć (iako się to iuż w Arytmetyce wyłożyło) liczby Rzémieślników przez liczby dni, przez które prácowali; a roboty przez tych Rzémieślników wygotowané, tak się będą do siebie miały, iak się maią tamté dwie liczby rozmnożoné.

Niechby naprzykłád liczby Rzémieślników były do siebie, iak 2. do 3; a czasy przez któré robili iak 5. do 7. Piérwszy stósunek 2. do 3. równá się stósunkowi tychże liczb przez tę samę liczbę 5. rozmnożonych, i będzie, iak 10. do 15. Drugi stósunek 5. do 7, równá się stósunkowi tychże liczb przez tę samę liczbę 3. rozmnożonych, i będzie iák 15: do 21. A zatém stósunek robót, który się równá stósunkowi 10. do 21, równy będzie stósunkowi składnému z stósunku 10. do 15, i 15, do 21; z których piérwszy równy iest stósunkowi 2. do 3, a drugi równy stósunkowi 5. do 7.

Podobnie rozumować można, gdy więcéy niż dwa będzie stósunków.

239. *Przystó:* 2. Wszystkié także działaniá o zamianach, i inné podobné, którémi zatrudnialiśmy się w Arytmetyce, zasádzały się na stósunkach złożonych

z dwóch

z dwóch lub więcéy stósunków równych: iako to bardzo łatwo w przykładach okázać można.

240. *Przystó*: 3. Samé nawet niektóré działaniá, któré zdą się bydź tylko zwyczayném mnożéniém, można podciągnąć pod stósunek składany.

Przykład 1. 15. Czerwonych złotych iléż czyni groszy Polskich?

Aby znaléźć wartość 15. czerwonych złotych w groszach, zwyczaynie obrácaią się czerwoné złote na złote, a té potém na grosze. Rozwiążémy teráz to zadanié, rozkłádaiąc ié na stósunki poiedyncze, i szukaiąc stósunku z nich złożonégo, a to dlá pokázaniá, że czasém i nie myśląc o tém, używámy w saméy rzeczy stósunku składanégo.

Stósunek wartości 15. czerw: do wartości w groszach, składá się z stósunków następuiących:

1. Wartość 15. czer: zł: do wartości 1. czer: zł: iest, iak - - 15. do 1.

2. Wartość 1. czer: zł: do wartości 1. złotégo iak - - - 18. do 1.

3. Wartość 1. złotégo do wartości 1. grosza iak - - - 30. do 1.

4. Stósunek z tych trzech złożony iest iak - - - - 8 100 do 1.

Więc

Więc 15. czerwonych złotych czyni groszy - - 8 100.

Przykłád 2. Osoba 30. lát maiącá, iléż minut żyła, rachuiąc w Roku dni 365?

Stósunek 30. lát do iednéy minuty składá się z stósunków następuiących:

Z Stósunku 30 lát do 1. roku, toiest, - - - - - 30 do 1

Z Stósunku 1. roku do 1. dnia, toiest; - - - - - 365 do 1,

Z Stósunku 1. dnia do 1. godziny, toiest, - - 24 do 1,

Z Stósunku 1. godziny do 1. minuty, toiest, - - 60 do 1,

Stósunek z tych wszystkich złożony iest - 15768000. do 1.

A zatém w 30 latach iest minut - - - 15768000.

241. *Przyſtós.* 4. Widzieliśmy wyżéy że dlá znalezieniá ſtósunku dwóch Proſtokątów, trzeba było iedén z nich zamiénić na inszy, któryby miáł bok równy bokowi w drugim Proſtokącie, albo (co na iedno wychodzi) trzeba było znaléźć czwártą liniią proporcyonalną do iednégo boku iednégo Proſtokąta, i dwóch boków drugiégo: i że tak się má piérwszy Proſtokąt do drugiégo, iak się má drugi bok piérwszégo

wſzégo prostokąta, do téy czwártéy linii proporcyonalnéy. Zwyczaynie to podanié tak się wyráżá: *że ſtósunek dwóch Proſtokątów ſkładá się z stósunków ich boków.* Co tak okázać możná.

Niech będą dwa boki iednégo Proſtokąta nazwané, A i B, a dwa boki drugiégo proſtokąta, C i D. Szukáymy czwártéy linii proporcyonalnéy trzém bokóm B, C, D, i ta niech będzie L, toiest niech będzie, B:C=D:L, ſtósunek linii A, toiest, drugiégo boku piérwszégo proſtokąta, do L, równy będzie ſtósunkowi piérwszégo proſtokąta, do drugiégo (235.) A że ſtósunek A do L ſkłádá się z stósunków, A do D, i D do L; ſtósunek zaś A do D, iest ſtósunkiém boku iednégo, iednégo Proſtokąta do boku drugiégo, drugiégo Proſtokąta, a ſtósunek D do L, równá się ſtósunkowi drugich dwóch boków B i C (bo było, B:C=D:L:) *więc ſtósunek dwóch Proſtokątów, ſkłádá się z ſtósunków ich boków.*

242. *Przyſt.* 5. Gdy dwa Proſtokąty, któré z sobą porównywać mámy, są kwadratami; ponieważ boki kwadratu są wszyſtkié równé; kwadrat iedén tak się mieć będzie do kwadratu drugiégo, iak się má bok iedén piérwszégo kwadratu do trzeciéy linii proporcyonalnéy z tym bokiém, i z bokiém drugiégo kwadratu. Niech na przykład A i B, będą boki tych dwóch kwa-

kwadratów, a C, niech będzie liniiá trzeciá proporcyonalná do tych boków, kwadrat pierwszy tak się mieć będzie do kwadratu drugiégo, iak się má A do C.

243. *Defin.* Tén stósunek A do C, skłádá się z stósunku A do B, i B do C. Jako zaś té dwa ostatnié stósunki są równé: bo kładliśmy A do B, iak B do C, albo A: B: C, tak stósunek z nich złożony, nazywá się *dwumnożnym*, (Ratio duplicata), że wykładnik iego, iest kwadratém iednégo z wykładników, dwóch piérwszych stósunków.

Niechby boki dwóch kwadratów miały się do siebie, iak 1 do 2; Powiérzchnie tych kwadratów będą do siebie w tym samym stósunku, w którym iest 1. do 4; trzeciá téż liniiá proporcyonalná do 1. i 2, iest 4: a zatém té dwa kwadraty tak się do siebie mieć będą, iak się má bok iednégo z nich do trzeciéy linii proporcyonalnéy.

Jeżeli boki dwóch kwadratów będą do siebie, iak 2, do 3, powiérzchnie ich będą, iak 4, do 9; trzeciá téż liniiá proporcyonalná do 2 i 3, iest: $\frac{9}{2}$ a stósunek 2 do $\frac{9}{2}$ iest tén sám, co i stósunek 4 do 9.

Jako stósunek piérwszéy naprzykład linii do trzeciéy *ciągło* (continue) proporcyonalnalnéy, nazywá się ftósunkiém dwumnożnym ftósunku piérwszéy linii do drugiéy; tak znowu ftósunek piérwszéy téy linii do drugiéy, nazwać można ftósunkiém *dwudzielnym* (ratio subduplicata) ftósunku linii piérwszéy do trzeciéy. J tak gdy trzy liniie przez liczby oznaczoné: 1, 2, 4, są ciągło proporcyonalné, toieft, 1 do 2, iak 2 do 4: albo 1: 2; 4. Ponieważ piérwszá do trzeciéy, toieft, 1 do 4 ieft w ftósunku dwumnożnym piérwszéy do drugiéy, toieft iak 1^2 do 2^2; będzie znowu 1. do 2. w ftósunku dwudzielnym 1, do 4, toieft, iak $\sqrt{1}$. do $\sqrt{4}$.

244. *Zagádn*: 2. Maiąc dany kwadrat iedén, znaléźć drugi, któryby do piérwszégo był w danym ftósunku.

Rozwiąz: Danému ftósunkowi znáydźmy inszy równy, maiący za poprzednika bok kwadrata danégo. Między tym poprzednikiém, i naftępnikiém iego, szukáymy śrzedniéy proporcyonalnéy, ta będzie bokiém kwadratu żądanégo.

Albo tak: Złączmy wprôft z sobą dwie liniie, maiącé do siebie tén sám stósunek, który maią dwa wyrazy, naprzykład dwie liczby dané. Na téy linii ze dwóch złożonéy, iako na śrzednicy, nakréślmy półkole, i od punktu ich łączěniá się wynieśmy proftopadłą, aż do okręgu. Od punktu zeyściá się proftopadłéy z okręgiém poprowádźwádźmy dwie liniie do dwóch końców śrzednicy; kwadraty tych dwóch liniy mieć będą do siebie stósunek; a zatém ieżeli iedna z nich równá ieſt bokowi kwadratu danégo; rowná będzie bokowi kwadratu, którégo ſzukámy. Jeżeli zaś piérwszá nie równá ieſt bokowi kwadratu danégo; to trzeba na niéy, zacząwſzy od punktu iéy przecięciá z okręgiém, wyznaczyć liniią równą bokowi kwadratu danégo i od punktu naznaczonégo prowadzić równoodległą od śrzednicy, a ta równoodległá przetnie drugą liniią w tym punkcie, który wyznaczy długość linii kwadratu szukanégo.

To Zagádniénié przyſtósować należy do przykładów Arytmetycznych.

Przykłád: 1. Znaléźć kwadrat, któryby był $\frac{3}{5}$, kwadratu danégo, toieſt, któryby tak sie miáł do niego, iak 3, do 5.

Bok kwadratu danégo dzielę na dwie części, któreby tak się miały do siebie iak 2 do 3. Na tymże boku, iak na śrzednicy kréślę półkole, a od punktu podziáłu wynoſzę proſtopadłą aż do iéy spotkaniá się z okręgiém. Od tego punktu ſpotkaniá prowadzę liniią do końca śrzednicy, w tę ſtronę, gdzie część iéy większá znáyduie się. Ta liniiá będzie bokiém kwadratu szukanégo.

Przy-

Przykłád: 2. Maiąc dany kwadrat dobrać mu drugi, któryby tak się miáł do niego, iak 5, do 3.

Liniią równą bokowi danégo kwadratu przeciągniymy daléy, aż takich 5. części zamykać w sobie będzie, iakich 3 nie przeciągnioná zamykała.

Na téyże linii tak przeciągnionéy, iak na śrzednicy nakréślmy półkole, i od punktu, od którégo ieſt przedłużoná, wyniesmy proſtopadłą aż do okręgu, i od tego punktu, gdzie go ſpotyká, poprowádźmy liniią do końca tego śrzednicy, gdzie część iéy równá się bokowi danégo kwadratu. Ta oſtatniá liniiá będzie wymiarém boku kwadratu, którégo szukámy.

245. *Uwága.* Rozwiązanié Arytmetyczné takowych zagádnień zasádzá się na wyciągniéniu piérwiáſtku kwadratowégo.

Gdy na przykłád znaléźć potrzeba kwadrat, któryby był $\frac{3}{5}$ kwadratu danégo, toieſt, któryby tak się miáł do niego iak 3 do 5; rozmnożywszy obiedwie té liczby przez 5, będzie 3 do 5, iak 15 do 25; więc kwadrat, którégo ſzukámy tak się mieć będzie do kwadratu danégo, iak 15. do 25: a zatém bok kwadratu, którégo ſzukámy, będzie do boku kwadratu danégo, iak ieſt liczba, która przez siebie rozmnożoná czyni 15, do liczby, która

przez

przez siebie rozmnożona czyni 25: toiest, iak pierwiastek kwadratowy z 15. do 5. Trzeba tedy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z 15, i ten pokaże wielkość boku kwadratu szukanego, toiest trzeba znaleźć śrzednią liczbę proporcyonalną między dwiema danemi, 3 i 5: rozmnożywszy iedne przez drugą, i z rozmnożoney liczby 15, pierwiastek kwadratowy wyciągnąwszy.

Działanie więc Geometryczne zmierzaiące do znalezienia śrzedniey linii proporcyonalney między dwiema danemi, iest to samo, co w Arytmetyce wyciąganie pierwiastku kwadratowego z liczby daney: co można i tem potwierdzić, że kwadrat liczby śrzedniey Geometrycznie proporcyonalney między dwiema inszemi, równa się tymże dwóm liczbom przez siebie rozmnożonym: a zatem ta śrzednia liczba znaydzie się, wyciągaiąc pierwiastek kwadratowy z tych dwóch liczb, iedney przez drugą rozmnożonych.

Gdyśmy wyżey Geometrycznie szukali kwadratu, któryby miał się do kwadratu danego w danym stósunku; szukaliśmy przez wykreślenie, śrzedniey linii Geometrycznie proporcyonalney między dwiema w danym stósunku będącemi, i ta śrzednia linia była bokiem kwadratu szukanego.

246. Przyftósować z łatwością można Podaniá dopiéro wyłożoné do inszych iakichkolwiek figur proftokréślnych, i do siebie podobnych. Pokáże się to naprzód na Proftokątach podobnych, potém na Tróykątach, naoftatek w ogólności na iakichkolwiek figurach proftokréślnych.

Gdy będą dwa Proftokąty podobné, i na ich dwóch bokach odpowiadaiących sobie zrobimy dwa kwadraty; té dwa Proftokąty, tak siebie mieć będą, iak té dwa kwadraty.

Niech będą dwa proftokąty podobné, ABCD, abcd; ich powiérzchnie, tak się do siebie mieć będą, iak się maią powiérzchnie kwadratów ABEF, abef, zrobioné na bokach odpowiadaiących sobie; AB, ab. Jakoż Proftokąt ABCD, tak się má do kwadratu ABEF, iak wysokość AD do wysokości AF=AB, toieft. Táb. XIV. *Fig.* 1.

$$ABCD : ABEF = AD : AB.$$

Podobnie $$abcd : abef. = ad : ab.$$

Aże dlá podobiénftwa proftokątów, iest też $AD : AB = ad : ab$, więc

$$ABCD : ABEF = abcd : abef.$$

albo $$ABCD : abcd = ABEF : abef.$$

To samo ieszcze wyłożyć można sposobém naftępuiącym:

Tab. XIV. Fig. 2. Niech dwie podſtawy dwóch Proſtoką- tów podobnych będą do siebie iak 5 do 3; wysokości ich będą też w takowym ſtósunku 5 do 3: a zatém ieżeli podzielimy iednę podstawę na 5, a drugą na 3, równé części, wysokość także, iednę na 5 części równych, a drugą na 3 równé piérwszym; powiérzchnie tych dwóch Proſtokątów będą mogły bydź podzielone, piérwszá na 25, a drugá na 9 części równych w obudwóch Proſtokątach, tak iak téż i kwadraty na tych samych podſtawach zrobioné mogłyby bydź podzielone, iedén na 25, a drugi na 9. równych kwadracików: Stąd wypływá, że i Tróykąty proſtokątné podobné, tak się maią do siebie, iak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie: bo takie Tróykąty są w saméy rzeczy połowami proſtokątów podobnych, i maiących też ſamę, co oné, podſtawę i wysokość.

247. Możná ieszcze przyſtósować to samo i do iakichkolwiek Tróykątów podobnych: ponieważ albowiém w podobnych Tróykątach, wysokości są między sobą, iak Podſtawy; zatém proſtokąty, któreby miały téy wielkości podſtawy i wysokości, co i Tróykąty, byłyby podobné i miałyby się do siebie w ſtósunku dwumnożnym ich boków, albo iak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie (246); więc i Tróykąty, iako połowy tychże proſtokątów, będą do siebie w ſtó-

w ſtósunku także dwumnożnym ich boków.

Jaśniéy to wyłożyć możná, gdy ſtósunki boków wyrażoné będą przez liczby.

Niech będzie Tróykąt iakikolwiek, którégo podwoiliśmy wſzyſtkié trzy boki. Tén drugi Tróykąt zmieści w sobie 4 Tróykąty, z których każdy przyſtanie do piérwszégo. Táb. XIV. *Fig. 3.*

Jeżeli w tymże piérwszym Tróykącie bok każdy potroimy; tén drugi Tróykąt zamknie w sobie 9. Tróykątów, z których każdy przyſtanie do piérwszégo.

Jeżeli znowu każdy bok w piérwszym Tróykącie tak przedłużymy, żeby dłuższy był 4, 5, 6, i t. d. razy; tén drugi Tróykąt pomieści w sobie, 16, 25, 36, i t. d. Tróykątów, mogących przyſtać do piérwszégo.

Przeto, ieżeli boki Tróykąta iednégo zawiéraią w sobie 1,2,3,4,5,6,7,8,9 .. razy boki innégo Tróykąta; powiérzchniá piérwszégo Tróykąta zawiérać będzie powiérzchnią drugiégo, 1,4,9, 25, 36, 49, 64, 72, 81.-- razy.

Podobnie, powiérzchnie kwadratów, których boki zawiéraią 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.-- razy bok innégo kwadratu, będą zawiérać powiérzchnią tego drugiégo kwadratu, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 72, 81. -- razy.

Gdyby boki dwóch Tróykątów podobnych miały się na przykład do siebie, iak 5, do 7; możnáby w piérwszym Tróykącie umieścić 25, a w drugim, 49 równych Tróykątów, których wszystkich boki przystaćby mogły do siebie; a zatém powiérzchnie tych dwóch Tróykątów miałyby się do siebie, iak 25, do 49, toiest, iak powiérzchnie dwóch kwadratów, których boki byłyby do siebie iak 5, do 7.

Nakoniec, można tego samégo dowieśdź sposobém podobnym, iakośmy dowodzili, że kwadraty maią się do siebie w stósunku dwumnożnym ich boków, (242)

I tak, gdy będą dwa iakiékolwiek Tróykąty podobné, do których dwóch boków odpowiadaiących sobie, znáyduiémy trzecią liniią, ciągło proporcyonalną; powiérzchniá iednégo Tróykąta, tak się mieć będzie do powiérzchni drugiégo, iak bok piérwszégo Tróykąta, który wzięty iest za piérwszy wyráz proporcyi, do téy trzeciéy linii proporcyonalnéy.

Táb. XIV. Fig. 4. Niech będą dwa Tróykąty podobné, ABC, abc, znáydźmy AD trzecią ciągło proporcyonalną do boków AB, ab, i tę

samę

samę AD przenieśmy na liniią AB od A do D. Powierzchniá Tróykąta ABC, będzie do powierzchni Tróykąta abc, iak AB do AD.

Wykréślénié. Poprowádźmy liniią CD. Ponieważ dlá popobieńſtwa Tróykątów ieſt AB: ab=AC: ac, a przez wykréślénie AB: ab=ab: AD, będzie więc, AC: ac=ab: AD: a zatém Tróykąty cab, CAD, maią kąty A i a równé, i ramiona około tych kątów *na odwrót* proporcyonalné: będą tedy té dwa Tróykąty równé co do powierzchni, a przeto ſtósunek Tróykąta ABC, do każdégo z nich będzie iednakowy. A że ſtósunek tegóż Tróykąta ABC, do Tróykąta ADC, równy ieſt ſtósunkowi linii AB, do linii AD; więc téż i Tróykąt ABC tak się mieć będzie do Tróykąta abc, iak liniiá AB do linii AD, toieſt, w ſtósunku dwumnożnym boków AB, ab.

Idzie, ſtąd, że i równoległoboki podobné są także między sobą w ſtósunku dwumnożnym ich boków: ponieważ takié równoległoboki dwa razy w sobie zamykaią Tróykąty podobné.

248. Możná także było równie dokładnie dowieśdź, że Tróykąty podobné ABC, abc, są między sobą w ſtósunku dwumnożnym ich boków AC, ac: a zatém, że ſtósunek dwumnożny AB do ab, równy ieſt

ſtó-

ſtósunkowi dwumnożnému AC, do ac, toiest, że ſtósunki dwumnożné z równych ſtósunków, są równé: co téż iuż się ogólnie pokázało, mówiąc wyżéy o ſtósunkach ſkłádanych z jnszych ſtósunków.

Jakoż niech będą trzy iakiékólwiek ilości ciągło proporcyonalné, A, B, C, i drugié trzy ciągło także proporcyonalné, a, b, c, i w równym z piérwszémi stósunku. Stósunek ſkłádany A do C, równy będzie ſtósunkowi, ſkłádanému *a* do *c*, toieſt, A; C=a: c.

Bo ponieważ ſtósunek A do B równy wzięliśmy ſtósunkowi a do b, będzie.

$$A:B = a:b; \text{ A że } A:B = B:C$$
$$\text{i } a:b = b:c$$

Więc $B:C = b:c$

a zatém $A:C = a:c$

W liczbach to samo iaśniéy się okazuie.

Niech będą trzy liczby ciągło proporcyonalné 8, 4, 2, i drugié trzy ciągło także i równie proporcyonalné, 12, 6, 3, będzie, 8: 2=12: 3.

Ponie-

Ponieważ albowiém równé są stósunki 8 do 4, i 12. do 6, będzie.

8: 4 = 12: 6; A że, 8: 4 = 4: 2
i 12: 6 = 6: 3.

Więc 4: 2 = 6: 3

A zatém 8: 2 = 12: 3.

249 *Podanié przybrané:* Gdy mámy iakiżkolwiek zbiór stósunków równych, których wyrazy wszystkié iednakowégo są gatunku; summa wszystkich poprzedników, tak się mieć będzie do summy wszystkich następników, iak każdy w szczególności poprzednik, do swégo następnika.

Bo ieżeli każdy z osobna poprzednik dwa, trzy, cztery i t. d. razy, zamyká w sobie swoiégo następnika; wszystkié też razém poprzedniki zamykać będą wszystkié razém następniki dwa, trzy, cztéry i t. d. razy: a zatém summa wszystkich poprzedników, tylé razy zamykać będzie summę następników, ilé każdy z osobna poprzednik, swégo następnika.

I tak niech będą równé stósunki, 64 do 32. 50 do 25. 42 do 21. 30 do 15. 24. do 12. 18 do 9. 10 do 5. 8. do 4. 6 do 3. 4 do 2. 2 do 1. Summa wszystkich

kich poprzedników =258, a summa wszystkich następników =129; będzie tedy, 258:129 =64:32: albo =50:25; albo =42:21 i t. d.

250. *Twiérdzénié* 3. Jakiéżkolwiek są Figury prostokréślné podobné, zawsze té do siebie będą w stósunku dwumnożnym boków odpowiadaiących sobie.

Tab. XIV. Fig. 5. *Wykréśl*: Od wiérzchołków dwóch kątów odpowiadaiących w obydwóch figurach, poprowádźmy przekątné do inszych kątów, do których mogą bydź poprowadzoné.

Dowodzénié. Dwie té figury będą podzielone na Tróykąty, któré z osobna brané w jednéy figurze, będą podobné Tróykątóm odpowiadaiącym w drugiéy figurze. Każdy zaś w szczególności Tróykąt w jednéy figurze, będzie do Tróykąta odpowiadaiącégo sobie w drugiéy figurze w stósunku dwumnożnym boków odpowiadaiących; wszystkié tedy Tróykąty, z których się składá iedna figura, będą poprzednikami, a wszystkié tróykąty piérwszym odpowiadaiącé, z których się składá drugá figura, będą następnikami tamtych; a zatém summa wszystkich Tróykątów, któré składaią iednę figurę, toiest (ta cała figura) tak się mieć będą do summy wszystkich Tróykątów, z których się składá drugá figura

(toiest

(toiest do téy drugiéy całéy figury), iak się má każdy w szczególności Tróykąt w jednéy figurze, do Tróykąta odpowiadaiącégo w drugiéy figurze, toiest, w stósunku dwumnożnym boków odpowiadaiących w tych dwóch figurach.

Wszystko zatém, cokolwiek się powiedziało o stósunku dwóch kwadratów i o sposobie znalezienia kwadratów, któréby się miały do siebie w danym stósunku, może bydź przystósowane do iakichkolwiek figur prostokréślnych podobnych.

251. Aby Figurę iaką prostokréślną zrobić podobną i równą danym dwóm inszym podobnym figuróm prostokréślnym; trzeba tym końcém postawić Tróykąt prostokątny, dáwszy mu za ramiona dwa boki odpowiadaiące sobie w dwóch figurach danych podobnych, a przeciwprostkątná tego Tróykąta, będzie bokiém odpowiadaiącym w figurze, któréy szukámy.

252. Gdy cztéry liniie skłádaią proporcyą, i na dwóch piérwszych, wyrażaiących ieden stósunek, zrobimy dwie iakiekolwiek figury podobné, a na dwóch drugich, wyrażaiących drugi stósunek, zrobimy insze dwie iakiekolwiek figury podobné; w takim razie stósunek dwóch piérwszych figur, równy będzie stósunkowi

kowi dwóch drugich, bo tak stósunek dwóch piérwszych figur, iako i stósunek dwóch drugich, iest stósunkiém dwumnożnym ze dwóch równych stósunków.

Práwdzi się to w szczególności, gdy wszystkié cztéry figury są sobie podobné; a tém widoczniéy ieszcze się okázuie, gdy té cztéry figury są kwadratami.

253. Maiąc dwie proporcye, których wyrazy wszystkié są liniiami, Prostokąt z poprzedników dwóch piérwszych stósunków, w każdéy proporcyi tak się mieć będzie do Prostokąta z dwóch ich następników, iak Prostokąt z poprzedników, drugich dwóch stósunków do Prostokąta z jchże następników.

Należy to obiaśnić naprzód na przykładach liczebnych, pokazuiąc, że gdy będą dwie proporcye w liczbach wyrażoné, poprzedniki dwóch piérwszych stósunków, w obudwóch proporcyach, iedén przez drugi rozmnożoné, tak się mieć będą do swoich następników przez siébie także rozmnożonych; iak i inszé dwa poprzedniki, iedén przez drugi rozmnożoné, do swoich następników podobnie rozmnożonych.

Przykłád. Niech będzie: $14 : 7 = 6 : 3$.
i znowu $15 : 5 = 12 : 4$.
będzie téż $14 \times 15 : 7 \times 5 = 6 \times 12 : 3 \times 4$.
toiest. $210 : 35 = 72 : 12$.

To

To co na liczebnych przykładach widocznie się pokáże, trzeba ieszcze stwiérdzić rozumowaniém podobném następuiącému. Jeżeli poprzednik w piérwszéy proporcyi iest dwa razy na przykład większy od swégo następnika, a poprzednik w drugiéy proporcyi, trzy razy na przykład iest większy od swégo także następnika; tedy rozmnożywszy piérwszégo poprzednika, piérwszéy proporcyi, przez piérwszégo poprzednika drugiéy proporcyi, poprzednik z tych dwóch rozmnożony, będzie dwa razy trzy, toiest sześć razy większy, od następnika podobnie z dwóch następników piérwszych, w obudwóch proporcyach rozmnożonégo; a że i drugié dwa poprzedniki, są, iedén dwa razy, á drugi trzy razy, większé od swoich następników; więc tak piérwszy poprzednik ze dwóch piérwszych poprzedników rozmnożony, iak i drugi poprzednik ze dwóch drugich rozmnożony, będzie sześć razy większy od swoiégo następnika podobnie rozmnożonégo; któré to rozumowanié przystósować możná i do każdégo inszégo wykładnika.

Niech litery A, B, C, D, wyrážaią cztéry linie składaiącé piérwszą proporcyą, i niech litery a, b, c, d, wyrážaią drugié cztéry linie składaiącé drugą proporcyą, toiest: niech będzie, $A:B=C:D$. i $a:b=c:d$; będzie téż $A\times a:B\times b=C\times c:D\times d$.

Bo

Bo náprzód A : B = Aa : Ba.
i podobnie C : D = Cc : Dc.
A że - A : B = C : D.
Więc - - - Aa : Ba = Cc : Dc.
Tak też znowu; a : b = Ba : Bb.
c : d = Dc : Dd.
A że - a : b = c : d
Więc - - - Ba : Bb = Dc : Dd.
Stósunek tedy złożony z stósunków:
Aa : Ba.
i Ba : Bb.
Toiest stósunek Aa : Bb, równá się stósunkowi złożonému z stósunków
Cc : Dc.
i Dc : Dd.
Toiest stósunkowi, Cc : Dd.
albo co na iedno wychodzi, Aa:Bb=Cc:Dd.

ROZDZIÁŁ X.
O wielokątach forémnych.

254. *Defin:* Gdy wielokąt má wszystkie boki i kąty równe; nazywá się *Wielokątem forémnym* (Polygonum regulare.)

255. *Wniosek.* Ponieważ ważność wszystkich razém kątów wielokąta, zawisła tylko od liczby boków iego (85) gdy tedy wszystkié kąty wielokąta są rówué, ważność iednégo z tych kąta, zawisła tylko od liczby boków tegoż wielokąta. Stąd idzie, że wielokąty forémné, iednakową maiącé liczbę boków, kąty téż wszystkié maią równé, i boki proporcyonalné; są więc do siebie podobné. Można tedy przystósować im to wszystko, co się w ogólności o figurach podobnych powiedziało.

Wiémy iuż sposób wykréślénia Tróykatą równobocznégo i kwadratu na linii danéy; wiémy téż iak wpisać w Tróykąt równoboczny, lub na nim opisać koło.

Wpisanié w koło dané, Tróykąta równobocznégo, i opisanié tegoż koła Tróykątém, łatwiéy się wykonywa przez wykréślénié *Sześciokąta* forémnégo (Hexagonum.)

256. *Twiérdz:* 1. Bok sześciokąta w koło wpisanégo, równy iest promiéniowi tegoż koła.

Niech będzie ABCDEF sześciokąt forémny, w koło wpisany; bok którykolwiek tego sześciokąta n.p: AB, równy iest promiéniowi SB tegoż koła. Táb. XV. *Fig. 2.*

Wy-

Wykreślenie. Poprowádźmy promień SA.

Dowodz: Kąt ASB, zamyká szóstą część, cztérech kątów prostych, toiest $\frac{2}{3}$ iednégo kąta prostégo: a że trzy kąty Tróykąta ASB, składaią dwa kąty prosté; więc dwa kąty A i B tegoż Tróykąta, razém wzięté są różnicą między dwóma kątami prostémi i $\frac{2}{3}$ iednégo kąta prostégo, toiest, czynią $\frac{4}{3}$ kąta prostégo. Ponieważ zaś té dwa kąty są sobie równé; więc każdy z nich będzie $\frac{2}{3}$ kąta prostégo: a zatém wszystkié trzy kąty Tróykąta ASB są równé, i dlá tego téż i boki wszystkié trzy równé będ. Będzie tedy bok AB, sześciokąta forémnégo (czyli ciénciwa 60. stopniów) równy promiéniowi koła opisanégo.

257. *Wniosek* 1. Aby więc wpisać sześciokąt forémny w koło dané, dosyć iest prznieść 6. razy, iako ciénciwę, promień tego koła, na okrąg iego.

258. *Wniosek* 2. Poprowadziwszy liniią AC, będzie ona ciénciwą trzeciéy części okręgu koła, a zatém będzie bokiém Tróykąta równobocznégo wpisanégo w dané koło. Pociągnąwszy tedy linie AE, CE, Tróykąt ACE, będzie Tróykątém równobocznym w koło wpisanym.

259.

259. *Twiérdzéń*: 2. Gdy w koło wpisany będzie Tróykąt równoboczny, a przez wiérzchołki kątów iego, pociągniémy styczné z kołém tak daleko, aż się z sobą źniydą; té styczné zrobią Tróykąt równoboczny na kole opisany.

Niech będzie ABC Tróykąt równoboczny wpisany w koło SABC; przez wiérzchołki A, B, C, tego Tróykąta prowadzoné styczné koła, aż do spotkaniá się ich z sobą w punktach D, E, F, zrobią Tróykąt równoboczny na kole opisany. Táb. XV. *Fig.* 2.

Wykréślénié. Pociągniymy promiénie SA, SB, SC.

Dowodz: Którykolwiek z kątów w śrzodku koła, naprzykłád kąt ASB, i iému przeciwny kąt E, między dwiéma stycznémi zawarty, czynią razém dwa kąty prosté. A że kąty wszystkié trzy we śrzodku koła są równé; więc równé będą i kąty trzy od stycznych zrobioné; a zatém i Tróykąt DEF będzie równoboczny.

Łatwo więc opisać możná dané koło Tróykątém równobocznym, wpisáwszy piérwéy w toż koło Tróykąt także równoboczny.

260. W ogólności zaś mówiąc: niech-

by

by był iakikolwiek wielokąt forémny w koło wpisany; ieżeli przez wszystkié wiérzchołki kątów tego wielokąta poprowadzimy styczné koła, tak, aby każdé dwie blizkié z sobą się spotykały; Wielokąt, który z tych stycznych zrobi się, będzie także forémnym.

Dowodz: We wszystkich czworokątach takich, iak na przykład ASBE, kąty między dwiéma stycznémi zawarté, iak na przykład kąt E, będą równé, a zatém wszystkié kąty tego Wielokąta będą równé.

Wszystkié także Tróykąty, iak na przykład ABE będą równoramiénné, i kąty w jednym Tróykącie, równé będą kątom w drugim, i podstawy w nich, iak na przykład iest podstawa AB, będą równé: a zatém wszystkié té Tróykąty mogą przystać do siebie, i stąd boki iednégo Tróykąta równé będą bokóm drugiégo. Więc summa dwóch takich równych boków iednakowá zawsze będzie. A że na przykład EF iest summą dwóch takich równych boków Wielokąta opisanégo; więc wszystkié boki tego Wielokąta równé będą.

261. *Twiérdz:* 3. W każdy Wielokąt forémny, możná wpisać iedno koło, i drugié koło na nim opisać, a obadwa té koła, spólny mieć będą śrzodek.

Niech

Niech będzie iakikolwiek ſześciokąt forémny, ABCDEF, można zawsze wpisać weń koło, i drugié na nim opisać, a té dwa *koła* będą *ſpolśrzodkowé*. (circuli concentrici.)

Dowodz: Od śrzódka dwóch boków blizkich, na przykład od G, i H, wyprowadziwszy dwie proſtopadłé: GS, HS; punkt S przecięciá ich, iednakowo będzie odległy od trzech wiérzchołków blizkich A, B, C (według tego co się iuż powiedziało o opisaniu kołem Tróykąta) będą tedy równé liniie AS, BS, CS; a zatém Tróykąty SBC, SBA równé względém siebie boki mieć będą, i iedén Tróykąt przyſtać może do drugiégo: a w szczególności kąt SBC, równy iest kątowi SBA, i każdy z nich czyni połowę kąta w wielokącie, toiest kąta ABC. A że też równé są i kąty SCB, SBC; więc i kąt SCB, będzie połową kąta w Wielokącie, a zatém kąt SCD, będzie drugą iego połową. Maią więc Tróykąty: SCD, SCB ſpólny bok: SC, równé boki: CD, CB, i kąty w C między niémi zawarte, równé. Mogą tedy i té dwa Tróykąty przystać do siebie, a w szczególności liniie SB, SD równé będą. Więc to koło, którégo śrzodkiém iest S. i któré przechodzi przez punkta blizkié: A, B, C, przechodzić także będzie i przez punkt następuiący: D. Podobnym ſposobem pokazać można, że toż koło przechodząc przez punkta: B, C, D, prze- Tab. XV. *Fig.* 3.

chodzić będzie i przez punkt E, i t. d.

Wszyſtkie promienie: SA, SB, SC, SD, i t. d. dzielą w wierzchołkach na dwie równe części, kąty Wielokąta, iako się pokazało: a zatém dwa Tróykąty na przykład SBH, SBG, mogą przyſtać do siebie, bo maią kąty proste przy H i G, bok spólny: SB, i kąty przy B równe; a w szczególności liniie SH, SG są równe; toż samo możnaby dowiéśdź i względém inszych prostopadłych spuszczonych od śrzodka S, na boki wielokąta. Punkt tedy S, iest iednakowo odległy od wszystkich boków Wielokąta, a zatém iest śrzodkiém koła, któréby wpisać można w Wielokąt.

262. *Twierdz:* 4. Maiąc Wielokąt foremny w koło wpisany, a przeciąwszy na dwie równe części łuk, którégo cięńciwą, iest bok tego Wielokąta, i od punktu każdégo takiégo przecięciá poprowadziwszy linie do dwóch końców łuku, zrobi się z tych liniy inszy wielokąt foremny, tylé dwoie co pierwszy boków maiący.

1. Wszystkie boki tego nowégo wielokąta będą równé, bo będą cięńciwami połowy łuków równych.

2. Wszystkie także kąty tego Wielokąta, będą równé, bo każdy z nich będzie dwa razy większy od kąta przy podſtawie Tróykątów równoramiennych, i przystać do siebie

siebie mogących, któré za boki, maią promiénie koła.

Tén tedy Wielokąt, bedzie miáł wszystkié boki i kąty równé, a zatém będzie forémnym.

Podobnym sposobém dowiéśdź możnáby, że ieżeli boki Wielokąta, są ciénciwami tyluż części równych koła, ilé Wielokąt má boków; tén Wielokąt będzie forémnym: a zatém wykréślénié Wielokąta forémnégo, któryby zamykáł w sobie pewną liczbę boków danych, zależy od tęgo, aby podzielić okrąg koła na daną liczbę części równych.

263. *Zagádn:* Na danym kwadracie opisać, i wpisać weń koło; i znowu w dané koło wpisać, i opisać na nim kwadrat.

Rozwiąz: 1. Prowadzę dwie przekątné w kwadracie: punkt przecięciá ich, będzie śrzodkiém koła, któré wpisać w kwadrat, i opisać na nim mámy.

2. Prowadzę dwie śrzednice w kole, iednę do drugiéy prostopadłą. Końce ich będą wierzchołkami kwadratu wpisać się w koło mogącégo: przez té wierzchołki pociągnąwszy styczné koła, té zrobią kwadrat na kole opisany.

264. *Wniosek* 1. Kwadrat opisany na

 kole,

kole, równá się kwadratowi śrzednicy iego, i dwa razy ieſt więkſzy od kwadratu wpisanégo.

265. *Wniosek* 2. Z tego co się wyżéy powiedziało, wyniká, że przez *poddziały*, (subdivisiones) ciągłé łuków na dwie części równé, można wpisać w koło Wielokąty, których liczba boków byłaby naſtępuiącá.

3, 6, 12, 24, 48, 96, albo w ogólności. - - - - - 3×2^n. (x)

4, 8, 16, 32, 64, 128, albo w ogólności. - - - - - 4×2^n.

Przeſtr. Za pomocą samégo liniiału i Cyrkla nié możná z zupełną dokładnością i pewnością. (to iest bez szukania takowégo podziału cyrklém) podzielić łuk każdy na 3, 5, 7, i t. d. części równych: a zatém z takową samą pomocą, nié można zawsze wykreślić takié Wielokąty, których liczba boków wyrażałaby się przez liczby rozmnożné, z 3. lub 4, i t. d. przez 3, raz lub więcéy razy wzięté.

266. *Twiérdz*: 5. Powiérzchniá Wielokąta opisanégo na kole, a w szczególności

---

(x) Co znaczą té wyrazy: 3×2^n, 4×2^n. dá się poznać w Algiebrze.

ści Wielokąta forémnégo równá się Tróykątowi maiącému za wysokóść promień tego koła, a za podstawę *obwód* (Perimeter) tego Wielokąta

Wykréśl. Od śrzodka koła poprowádźmy liniie do wszystkich wiérzchołków Wielokąta.

Dowodz. Wielokąt podzielony będzie przez té liniie, na tylé Tróykątów, ilé má boków; Tróykąty zaś té maią za wysokość promień koła, a za podstawę boki Wielokąta; więc powiérzchniá tych wszystkich Tróykątów, czyli powiérzchnia Wielokąta równá iest iednému Tróykątowi, któryby miał za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Wielokąta.

267. *Wniosek.* Gdy rozmaité Wielokąty opisané są na iednem kole; ich powiérzchnie mieć się do siebie będą, iak obwody.

268. *Twiérdzénié 6.* Powiérzchniá Wielokąta forémnégo, w koło wpisanégo, równá się Tróykątowi maiącému za wysokość promień tego koła, a za podstawę, obwód wielokąta inszégo forémnégo w tož koło wpisanégo, a tylko połowę tylé boków maiącégo.

Nie-

Táb. XV. Fig. 1. Niecháy na przykłád sześciokąt ABCD EF, wystawiá nám iakikolwiek Wielokąt forémny, w koło wpisany, powiérzchniá tego sześciokąta równá iest Tróykątowi maiącému za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Tróykąta równobocznégo, w toż samo koło wpisanégo.

Dowodz: Poprowádźmy promień SB przecinaiący w punkcie G, bok Tróykąta równobocznégo. Tróykąt ASB, uwáżać można, iak gdyby miáł podstawę SB, a wysokość AG, Tróykąt także CSB uważać można, iak gdyby miáł podstawę SB, a wysokość CG: a zatém czworokąt AS CB równa się Tróykątowi, któryby miáł albo wysokość AC, a podstawę SB. Toż mówić i o inszych Czworokątach, zawartych między dwóma Wielokąta bokami przyległémi, i dwoma promieniami; summa więc powiérzchni, wszystkich tych czworokątów, toiest powiérzchniá Wielokąta foremnégo w koło wpisanégo, równá się takiému Tróykątowi, któryby miáł za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Wielokąta inszégo forémnégo, w toż koło wpisanégo, a połowę tylé boków maiącego.

Przykłád. Powiérzchniá Dwunastokąta forémnégo w koło wpisanégo, równá się Tróykątowi, maiącému za wysokość, pro-

promién tego koła, a za podstawę obwód sześciokąta, w toż koło wpisanégo, albo, (co na iedno wychodzi) równá się Prostokątowi, któryby miáł za wysokość, promién tego koła, a za podstawę, ténże promién trzy razy wzięty.

Ta więc powiérzchniá iest trzy razy większá od kwadratu promiénia, i iest równá $\frac{3}{4}$ kwadratu śrzednicy.

Twiérdzénié to stósuie się tylko do Wielokątów, których boki są párzysté; następuiącé Twiérdzénié przystósować możná do wszystkich ogólnie Wielokątów forémnych.

269. *Twiérdz*: 7. Powiérzchniá Wielokąta forémnégo w koło wpisanégo, równá się Tróykątowi, maiącému za wysokość prostopadłą spuszczoną od śrzodka koła do boku wielokąta, a za podstawę obwód iego. (y)

Dowodz: Prostopadłą tę uwáżać możná, iák promién koła wpisanégo, lub wpisać się mogącégo w Wielokąt: a zatém twiérdzénié to iest tylko przystósowaniém wyższégo (266.)

270.

(y) Taká w szczególności prostopadła nazywá się z Greckiégo apothema.

270. *Wniosek*. Jeżeli od punktu iakiégokolwiek w Wielokącie forémnym, nawet i w tym, którégo boki tylko wszystkié są równé, spuścimy prostopadłe do wszystkich iego boków; té prostopadłé dodané do siebie, iednakową zawsze długość uczynią.

Jakoż poprowadziwszy od tego samégo punktu dwie liniie do dwóch końców iednégo z boków, powiérzchniá Tróykąta, témi liniiami zakończoná, rówwná będzie Tróykątowi maiącému za podstawę bok wielokąta, a za wysokość prostopadłą nań spuszczoną: albo, co na iedno wychodzi, powiérzchniá ta równá będzie Tróykątowi maiącému za wysokość bok Wielokąta, a za podstawę, prostopadłą nań spuszczoną: a zatém powiérzchniá całégo Wielokąta równać się będzie Tróykątowi, któryby miáł za wysokość bok tego Wielokąta, a za podstawę summę wszystkich prostopadłych na boki iego spuszczonych. A że powiérzchniá takowégo Tróykąta iest zawsze iednakowá, i wysokość także iednakowá; więc i podstawa, czyli summa wszystkich prostopadłych iednakowá zawsze będzie, z któregokolwiek punktu Wielokąta, oné spuścimy.

WSTĘP

WSTĘP DO ROZDZIÁŁÓW XI. i XII.

O używaniu Przenośnika, Cyrkla proporcyonalnégo, i o Podziele nazwanym Nonniuszém.

271. *Defin. Przenośnik* (Transportator) iest to półkolé, którégo okrąg podzielony iest na stopnie, albo, gdy większy będzie, na półstopnie, i ćwierci stopniów. Táb. XVI.

272. *Zagádn.* 1. Maiąc dany kąt na papiérze, znaléźć liczbę stopniów, którą w sobie zamyká.

Sposób. 1. Przykładám śrzodek przenośnika do wiérzchołka kąta danégo, a podstawę tegoż przenośnika do iednégo z ramión kąta; łuk przenośnika zawarty między ramionami kąta, pokáże w stopniach ważność iego.

Sposób 2. Od wiérzchołka kąta danégo, iak od śrzodka, promieniém równym promieniowi przenośnika, kréślę łuk zawarty między ramionami kąta, odległość dwóch końców tego łuku przenoszę cyrklém na okrąg przenośnika, od końca śrzednicy, która mu służy za podstawę; łuk przenośnika między końcém śrzednicy i drugim punktém,

ktém, gdzie drugie ramié Cyrkla przypadnie, zawarty, pokaže w stopniach ważność kąta danégo.

273. *Zagádn.* 2. Na linii danéy, i przy punkcie na niéy danym, zrobić kąt zawiéraiący w sobie daną liczbę ſtopniów.

Sposób 1. Położywſzy na linii danéy przenośnik, tak, aby śrzednica iego, do téy linii przystawała, a śrzodek do punktu danégo, naznáczám na papiérze punkt, którému odpowiádá punkt przenośnika ukazuiący liczbę daną ſtopniów, tén punkt łączę liniią z punktém danym, a ta liniiá uczyni z daną kąt, którégo szukáłém.

To działanié będzie dokładnieyszé, gdy przenośnik má sobie przydany promień ruchomy około śrzodka iego.

Sposób 2. Od punktu danégo, iak od śrzódka, promiéniém równym promiéniowi przenośnika; kréślę łuk, i na tén, wziętą na przynośniku liczbę stopniów danych przenoszę, od punktu przecięciá linii z tym łukiém, aż do drugiégo punktu na tymże łuku. Punkt tén ostatni złączywszy liniią z punktém danym na drugiéy linii, té obiedwie liniie zamykać będą kąt którégo szukáłém.

274. *Zagádn*: 3. W dané koło, wpisać

Wielo-

Wielokąt forémny o pewnéy liczbie boków.

Rozwiąz. Szukám kąta w śrzodku tego Wielokąta; ciągnę promién iakikolwiek, i robię na nim kąt równy kątowi w śrzodku Wielokąta, maiący śrzodek koła danégo za wierzchołek; łuk tego koła zawarty między ramionami kąta, będzie miáł za ciénciwę bok Wielokąta danégo.

275. *Zagád.* 4. Na danéy linii wykréślić Wielokąt forémny o pewnéy liczbie boków.

Rozwiąz. Przy dwóch końcach danéy linii robię dwa kąty równé połowie kąta, przy obwodzie Wielokąta, którego szukám. Punkt przecięciá ramión tych dwóch kątów będzie śrzodkiém koła, w które wpisać się dá Wielokąt, o tylu bokach, ilé ich dano, i téy wielkości, iakiéy iest liniiá daná.

276. *Uwága.* Używanié przenośnika, wyciągá wielkiéy bácznośći. Jm większy promién mieć będzie, tym mniéy obáwiać się trzeba znaczniéyszégo iakiégo uchybiéniá.

Między inszémi narzędziá tego niedoſtatkami, iest tén mianowicie, że promiéniá w nim odmiénić nié możná według okoliczności; ale tén niedostatek zaſtąpić

ſtąpić może w potrzebie insze narzędzie nazwane *liniią cięńciw* (liniiá chordarum) w cyrklu proporcyonalnym.

Táb.XVII. 277. Na obudwóch ramionach cyrkla proporcyonalnego, znáyduie się *liniiá cięńciw*, któréy podziáły zaczynaią się we śrzodku (*in centro*) tego narzędziá: a kończą tam, gdzie iest liczba 180, albo w mnieyszych narzędziach tam, gdzie ieſt liczba 60. Odległości śrzodka od inszych punktów podziáłu, pokazuią wielkość cięńciw wyznaczoną przez *rachunek* (per calculum) albo przez figurę dokładną. Ta wielkość cięnciw wyznaczoná iest w półkole, którego promięń równá się odległości śrzodka cyrkla proporcyonalnego od punktu podziáłu naznaczonego liczbą 60. a to z przyczyny równości cięńciwy 60, ſtopniów z promięńiem.

Ponieważ rozwiązanie cztérech poprzedzaiących zagádnień iedynie zawisło od wyznaczeniá cięńciwy łuku, to iest od wielkości iéy względem promięnia; możná więc cztéry té Zagádnięniá rozwiązać, używaiąc, iednego tylko ramięnia w cyrklu proporcyonalnym, biorąc za promięń koła odległość punktów: 0, i 60.

Dwa razém ramiona tego cyrkla ſłużą do odmięnięniá; promięnia; náymnieyszym będzie, odległość dwóch punktów 60, i 60. gdy cyrkiel proporcyonalny zupełnie

ieſt

ieſt zamknięty; powiększonym zaś będzie przez odległość większą tychże punktów, gdy cyrkiel coraz więcéy otworzymy: a náywiększym będzie, gdy cyrkiel weale tak otworzymy, że ramiona iego w prostéy będą linii.

Niechby na przykłád tak był otworzony cyrkiel proporcyonalny, aby odległość dwóch punktów 60. i 60, czyniła połowę odległości iednégo z tych punktów, od śrzodka; będzie téż i odległość drugich punktów odpowiadaiących sobie na przykłád 40 i 40, połową odległości iednégo z nich od śrzodka; a zatém odległość ta punktów: 40, i 40, oznaczyłaby ciénciwę ſtopniów 40, albo 40°, w kole, któré go promień równałby się odległości punktów 60 i 60; bo ciénciwy łuków podobnych, w kołach różnych tak się maią do siebie, iak tychże kół promiénie. W ogólności więc mówiąc: gdy za promień weźmiémy odległość punktów 60. i 60, na linii ciénciw, iakážkolwiek inszá odległość dwóch punktów na téyże linii, naznaczonych iednakową liczbą, będzie ciénciwą łuku, o tylu ſtopniach, ilé wyráżá ta liczba.

Stąd wyniká ſposób, którégo użyć wygodnie można, chcąc rozwiązać cztéry poprzedzaiące zagádniéniá, przez liniią ciénciw, i odmiéniaiąc iak się podobá promień.

278. *Przykład* 1. Na daney linii i przy punkcie na niey także danym, zrobić kąt o pewney liczbie ſtopniów.

Rozwiąz: Weźmy iakikolwiek promień; otwórżmy cyrkiel proporcyonalny tak, aby odległość punktów naznaczonych liczbą 60, była równá tému promieniowi. Od punktu danégo, iak od śrzodka, promieniém tymże nakréślmy łuk koła, i dáymy mu cieńciwę równą odległości dwóch punktów naznaczonych liczbą daną ſtopniów.

279. *Przykł:* 2. Na daney linii wykréślić Wielokąt forémny iakikolwiek.

Rozwiąz. Szukáymy kąta, iaki bydź powinien we śrzodku Wielokąta żądanégo, otwórżmy cyrkiel proporcyonalny tak, aby odległość punktów naznaczonych na linii ciénciw tą liczbą, iaká iest liczba ſtopniów kąta, we śrzodku Wielokąta, równała się linii daney; na téyże linii wyſtáwmy Tróykąt równoramiénny, dáwszy mu za ramiona, liniie równé odległości punktów naznaczonych liczbą 60; wiérzchołek tego Tróykąta, będzie śrzodkiém koła, w któré wpisać można Wielokąt żądany.

280. *Uwága.* Co do wykréśléniá Wielokątów forémnych w szczególności: aby się obeyśdź można bez szukaniá kątów we

śrzod-

śrzodku, znáyduie się na cyrklu proporcyonalnym osobná liniiá Wielokątów, za któréy pomocą, zacząwszy od Tróykąta, lub czworokąta, aż do dwunastokąta wykréślić można. Odległość śrzodka, tego narzędziá, od punktu 6, téy linii Wielokątów, wziąwszy za promień, albo za bok Sześciokąta forémnego w koło wpisanégo, odległości tegoż śrzodka od punktów: 3, 4, 5, i t. d. pokażą wielkość boku Wielokąta forémnégo, który wpisać można w to samo koło, o tylu bokach, ilé znaczą liczby: 3, 4, 5, i t. d. *Albo téż*: otworzywszy do woli cyrkiel proporcyonalny, i wziąwszy na linii Wielokątów za promień odległość punktów 6, i 6; odległości inszych dwóch punktów: 3 i 3, 4 i 4, 5 i 5, i t.d. pokażą bok Wielokąta forémnégo o téyże saméy liczbie boków wpisanégo w to koło, do którégo za promień wzięliśmy odległość punktów 6 i 6.

281. Trzeciá liniiá, którą na cyrklu proporcyonalnym znáyduiémy, a wielkiégo iest użytku, nazywá się *liniią części równych*. Na obudwóch cyrkla proporcyonalnégo ramionach, mámy liniią podzieloną na 200. części równych, a czasém, gdy cyrkiel mnieyszy, na 120, mniéy lub więcéy. Jakożkolwiek tén cyrkiel otworzymy, odległość dwóch Punktów naznaczonych tą samą liczbą na przykład 200, będzie dwa razy

wię-

większá od odległości punktów naznaczonych liczbą 100, cztéry razy większá od odległości dwóch punktów, 50, i t. d. a mówiąc ogólnie, odległość dwóch iakichkolwiek punktów tą samą liczbą naznaczonych, będzie się tak miała do odległości dwóch inszych punktów przez iednakową także liczbę naznaczonych; iak się maią do siebie też liczby.

282. *Używanie* 1. Maiąc daną liniią, podzielić ią na pewną liczbę części równych.

Niechby na przykład podzielić trzeba liniią daną na 5 części rownych.

Otwórzmy tak cyrkiel proporcyonalny, aby odległość punktów naznaczonych liczbą podzielną przez 5, równá była linii danéy: niech na przykład odległość ta będzie punktów naznaczonych liczba 200; weźmy piątą część téy liczby, toiest 40; a odległość tych dwóch punktów naznaczonych liczbą 40; będzie częścią piątą linii danéy.

283. *Uwaga*. Ostatnią tę odległość znalezioną przenosząc 5 razy na liniią daną, uchybienié któreby zayśdź mogło w jéy wielkości, byłoby 5 razy powtorzoné, a zatém tak powtorzoné, mogłoby się stać znacznym, chociaż każdé z osobna było nieznaczné. Przytrafić się to może, osobliwie w ten czas, gdy na

wielé

wielé części dzielić przychodzi liniią. Aby więc tego powtárzaniá uniknąć, lepiéy będzie wziąźć osobno $\frac{4}{5}$ linii, toiest odległość dwóch punktów: 160, i przenieść ią, od obudwóch końców na liniią daną: toż uczynić, wziąwszy potém $\frac{3}{5}$ linii i t. d.

284. *Używanié.* 2. Maiąc daną liniią znaléźć inną, któráby do niéy była w pewnym ſtósunku, w liczbach wyrażonym, na przykłád iak 4. do 7.

Przenieśmy liniią daną na dwa punkta naznaczoné liczbą podzielną przez 7, na przykłád na dwa punkta: 140; $\frac{4}{7}$ téy liczby 140, są 80; odległość tych dwóch punktów: 80, będzie liniią, któréy szukaliśmy.

285. *Uwázanié* 3. Maiąc dané w liczbach trzy boki Tróykąta, wykréślić go.

Przykłád: Niechby trzy boki Tróykąta miały bydź iak trzy liczby: 150, 147, 128.

Otwórżmy iakokolwiek cyrkiel proporcyonalny: odległości dwóch Punktów: 150, dwóch punktów: 147, i dwóch punktów 128, będą do siebie, iak boki dané; a zatém mogą bydź wzięté za té boki.

286. *Używanié* 4. Maiąc dany Tróykąt iuż wykréślony, którego podstawa zamyká na przykład 100, sznurów, znaleźć wielkość inszych dwóch boków.

Przenieśmy podstawę daną na dwa punkta: 200; zmiérzmy cyrklém długość dwóch innych boków, i przenieśmy ią znowu na punkta dwa iednakową liczbą naznaczoné, tam gdzie przypadnie; liczby dwie, na któré długość tych dwóch boków przypadnie, wyrážać będą długość tychże boków w sznurach.

Opuszczám inszé używaniá, gdzie wykréślénié Geometryczné, krótszé iest często i pewnieyszé; iak na prz. w znalezieniu kwadratu równégo summie dwóch inszych danych, albo więcéy.

287. *Uwága* 1. Gdy kto nié má cyrkla proporcyonalnégo, może na mieyscé iego, a czasém i lepiey użyć linii podzielonéy na wielé częśći równych.

288. *Uwága* 2. Gdy część náymnieyszá, któréy nám do podziału potrzeba, iest bardzo małá, a liczba częśći których szukámy znacznie wielká; w takim razie trudno iest mieć wszystkié, na téyże saméy linii, podziáły, tak aby ié dobrze rozeznać možná. Udámy się więc w podobnym razie do sposobu następuiącégo:

Niech

Niechby podana była liniia, która zbyt iest mała, aby ią widocznie na 10, części podzielić można; trzeba osobno te części wynaleźć od 1, aż do 10. Tab. XV. *Fig.* 4.

Rozwiąz. Przez dwa końce tey linii prowadzę, po iedney stronie dwie równoodległe. Na te równoodległe przenoszę od końców linii daney dziesięć równych części; każdy Punkt podziału w jedney równoodległey, łączę liniią z punktem odpowiadaiącym mu na drugiey równoodległey. (Te liniie łączące będą równoodległe od linii daney) Od końca iednego linii daney, ciągnę liniią poprzeczną do końca drugiego linii ostatniey równoodległey; od daney ta poprzeczna liniia wyznaczy na równoodległych od linii daney, części których szukałem.

Maiąc daną liniią bardzo małą, do podzielenia na 100. równych części, ale iednak tak wielką, aby mogła bydź widocznie podzieloną na 10, równych części; podzielić ią tak, aby tyle zaraz części równych wyznaczyć na niey można, ile zechcemy, zacząwszy od 1, aż do 100. Tab. XV. *Fig.* 5.

Rozwiąz. Podzielmy tę liniią na 10. równych części; przez pierwszy punkt podziału, i przez drugi koniec tey linii, wyciągniymy dwie równoodległe iakiekolwiek, (zręczniey iednak, i wygodniey iest, aby mało co od prostopadłych uchybiały:) Przenieśmy znowu na té dwie równoodległé 10, części równych, albo mało różniących się od części linii danéy.

Złączmy drugi koniec linii danéy, od którégo nie była prowadzoná równoodległá, z ostatnim punktém podziáłu, równoodległéy bliższéy; złączmy także i punkta iednéy równoodległéy z punktami odpowiadaiącémi na drugiéy, i przeciągniymy ié aż do linii ostatniéy nie równoodległéy. Nakoniec przez wszystkié punkta podziáłu linii danéy prowádzmy równoodległé od dwóch piérwszych równoodległych, co z łatwością przyidzie, przeniózłszy podziáły linii danéy, na liniią iéy przeciwną i łączącą końce dwóch piérwszych równoodległych, i złączywszy liniiami punkta podziáłu odpowiadaiącé. Po takiém wykréśléniu mieć zaráz możná tylé co chcémy, części równych na linii danéy, zacząwszy od 1. aż do 100.

Trzeba na przykłád znaléźć nám części 64, takich, iakich linii daná má 100.

Stáwmy ramié iedné cyrkla zwyczaynégo na punkcie śrzednim, 4, i otwórżmy cyrkiel széroko, aż drugié ramié iego przypadnie na przecięcié dwóch liniy których końce naznaczoné są liczbami: 4 i 60. Ta otwartość cyrkla, dá nám liczbę części, których szukaliśmy, i t. d.

Prze-

Przedłużaiąc liniią daną i wſzyſtkié od niéy równoodległé, aż póki té przedłużéniá nie będą równé linii danéy wziętéy ráz, dwa razy, trzy razy - - dziesięć razy, otrzymámy taką liczbę części, iaką zechcémy, zacząwszy od 1, aż do 200, 300, 400. - - 1000.

Taká *podziálka* (scala) iest do używaniá náywygodnieyszá, gdy kto nié má cyrkla proporcyonalnégo, dlá tego téż i náywięcéy iéy używaią.

289. Jnny sposób do wynaleziéniá części równych linii danéy, tak małéy, że iéy podzielić widocznie nié możná na części żądané, iest tén, który się nazywá *podziáłém Nonniusza*, a który raczéy nazywaćby się powinién podziáłém *Verniera*, z przyczyny, że tak zwáł się prawdziwy podziáłu tego wynalázca.

Niechby na przykłád przyszło podzielić na 30. równych części liniią tak małą, że widocznie na niéy części tych wyznaczyć nié możná, niechby iednak była téy wielkości, że możná ią wyraznie podzielić na 5, albo 6, części równych.

Podzielmy tę liniią na przykłád na 6. części równych, i drugą iéy równą na 5. równych także części. Różnica ſzóſtęy części piérwszégo podziáłu, od piątéy części drugiégo podziáłu, będzie równą różni- Táb. XV. *Fig.* 6.

cy

cy między $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{6}$ częścią całéy téy linii danéy, toiest, będzie $\frac{1}{30}$ téy linii. Gdy tedy té dwie liniie tak ułożymy, że iedna będzie przy drugiéy, i końce iednéy wpróst będą na przeciwko końców drugiéy; odległość dwóch punktów piérwszégo podziału w obudwóch liniiach, będzie 30stą częścią danéy linii; podobnie odległość dwóch punktów drugiégo podziału (rachuiąc od tychże samych, co wyżey końców) będzie: $\frac{2}{30}$, odległość dwóch punktów trzeciégo podziału: $\frac{3}{30}$ czwártégo $\frac{4}{30}$, piątégo: $\frac{5}{30}$, albo $\frac{1}{6}$. częścią całéy linii danéy: toiest, iedną z tych części, na któré ta liniiá iest podzieloná.

Táb. XVII. 290. Czwártá liniiá, która ieszcze zwykła się znaydowáć na cyrklach proporcyonalnych, i któréy wykréślenie zasádzá się na tém; co się wyżéy iuż wyłożyło, nazwaná iest *liniią Płaszczyzn* (linea Planorum)

Odległości śrzodka w cyrklu proporcyonalnym od punktów podziáłu téy linii, tak się maią do siebie, iak boki kwadratów, które w tym samym stósunku byłyby do siebie, w którym są liczby przy tychże punktach wyrażoné. J tak gdyby kwadrat ieden był: 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, razy większy od drugiégo; bok tego drugiégo kwadratu większy byłby:

2,

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, razy od piérwszégo; dla tego téż odległości od śrzodka, punktów naznaczonych liczbami: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, tak się maią do siebie, iak liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Szczupłość narzędzia nie pozwoliła daléy tych podziałów rozciągnąć. Co się zaś tycze boków w kwadratach śrzednich między témi, które się dopiéro wyraziły, można ié wyznaczyć przez figurę dokładną lub przez rachunek przyblizaiąc ich ważność do prawdziwéy. J tak ieżeli odległość śrzodka od punktu: 1, będzie wyrażać bok kwadratu równy na prz: 12 iakim częściom; odległość tegoż śrzodka od punktu: 2; wyrazi bok innégo kwadratu równy blizko 17. takimże częściom; albo gdy piérwsza odległość znaczy nap: 100, druga znaczyć będzie trochę więcéy iak 141, i t. d.

Używanié w tém, dwóch ramion cyrkla proporcyonalnégo, iest to samo, któré było i do inszych liniy.

Ponieważ na przykład odległości śrzodka od punktów:

	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	62, maią się
Do siebie,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8;

iak liczby: - - - więc téż i odległości dwóch punktów iednakową liczbą naznaczonych: 1.

	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,
Przy iakimkolwiek o-	-		-		-		-	
twiéraniu	-		-		-		-	
cyrkla, mieć	-		-		-		-	
się będą iak	-		-		-		-	
liczby	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,

Toż mówić i o innych liczbach pośrzednich.

Przystósowanié Niech będzie dany bok kwadratu iednégo; trzeba znaléźć bok innégo kwadratu, któryby był $\frac{5}{6}$, piérwszégó.

Otwiérám tak cyrkiel proporcyonalny, aby dwa ramiona cyrkla zwyczaynégo, z otwartością równą bokowi danému, przypadły na dwa punkta linii płaszczyzn iednakową liczbą naznaczoné, któráby podzieloná bydź mogła przez 6. na przykład na dwa punkta: 60. Biorę $\frac{5}{6}$ téy liczby 60, toiest: 50, i nie odmiéniaiąc otwarciá cyrkla proporcyonalnégo, mierzę odległość dwóch punktów, 50: a ta będzie liniią którey szukám za bok kwadratowi, maiącému bydź $\frac{5}{6}$, kwadratu danégo; a że figury podobné maią się do siebie, iak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie, przeto działanié to przystósować równie możná do wszystkich figur podobnych.

RO-

ROZDZIÁŁ XI.

Piérwszé początki Miernictwa.

JEżeli gdzie nauka o figurach podobnych używaná bywá w praktyce, to szczególniéy gdy się wykréslaią na papiérze figury, choć w małości swoiéy, podobné tym, których są wyobrazéniém; i gdy wyznáczámy na karcie położénié punktów na polu na przykłád znáyduiących się, których tam dlá różnych zawád wyznaczyć częstokroć nié możná.

291. *Przykłád* 1. Niech będzie izba kwadratowá, któréy bok zmierzony, má łokci 10.

Jakiéykolwiek, wielkości kwadrat odrysuiémy na papiérze, zawsze iego figura, podobną będzie do figury izby.

Żeby iednak patrząc na kwadrat na papiérze odrysowany, możná sobie wystawić wielkość téy izby trzeba położyć i oznaczyć *Podziálkę*, według któréy bok izby przenieśliśmy na papiér: bo inaczéy zapatruiąc się na tén ostatni kwadrat, poznalibyśmy, tylko iaká iest figura izby, a nie wiedzieli ieszcze, iaká iéy wielkość.

Gdyby ta izba była próstokątém, maiącym długość łokci na przykłád 12, a szérokości łokci 8; odrysowáwszy na papiérze

rze

rze iakikolwiek prostokąt, którégo dwa boki miałyby się do siebie, iak 12, do 8; tén prostokąt podobny do izby, wystawiłby nám iéy figurę, ale nie wielkość: którá dopiéro w tén czas byłaby poznaná; gdyby się wyraziło, w iakiéy mierze to przeniesiénie boków izby na papiérze stało się, czyli to przypisuiąc do boku odrysówanégo że łokci 12, ukazuie, czyli oznaczaiąc iaká iest długość na papiérze wyrážaiącá łokci 10. i t. d.

Mierząc podobnie długość i szérókość domów, dziedzińców, ulic, grubość murów i t. d. możná wyrazić na papiérze wszystkié té, iedné względém drugich położéniá i wielkość każdéy z osobna części np. budynku i t. d.

Możná potém i drobnieyszé części wyrazić, kładąc położéniá drzwi, okién, i t. d. aby pod iedén razém widok poddadź budynek cały z jego częściami.

Kilkakrotnie takowé roboty czyniąc, nabędą w nich Uczniowie coráz większéy łatwości.

292. *Przykład* 2. Niech będzie na polu Tróykąt, którégo boki wszystkié zmiérzyć możná; iedén z tych boków zawiérá łokci: 180, drugi: 164, trzeci 148.

Zróbmy iakąkolwiek podziáłkę, i według

dług niey zróbmy Tróykąt, którego trzy boki zawierałyby liczbę części równych z tey podziałki ieden: 180, drugi: 164. trzeci 148. Ponieważ ten mały Tróykąt ma boki w tym samym stósunku, w którym są boki Tróykąta wielkiego, na polu na przykład wymierzone; niczym więc od wielkiego Tróykąta różnić się nie będzie, tylko samą wielkością: a zatem będzie nam go mógł wyobrazić, i da nawet poznać samę wielkość iego, gdy na papierze wyrazimy podziałkę, którey do tego użyliśmy.

293. *Uwagi.* W ostatnim przykładzie długości do mierzenia, były przywiększe, a przeto gdybyśmy używali w takim razie krótkiey iakiey miary, na przykład łokcia, robota byłaby długa, i bardzo pracowita; nadewszystko uchybienia małe, których się ciężko uchronić, w przykładaniach następnych, miary, zebrane razem, uczyniłyby omyłkę tym znacznieyszą, im częściey byłyby powtórzone. Z tego powodu, wniosło się używanie sążni, prętów, a nawet i sznurów, na mieysce łokci.

Do wymiarów tedy długości znaczznieyszey, należy mieć sznur, a ieszcze lepiey łańcuch, który pewną liczbę łokci albo sążni w sobie zamyka. Daymy na przykład, że łańcuch którego używamy, ma w sobie 10. sążni. Takowy łańcuch

cuch, do długości 180 łokci, przyłożyć trzeba następnie sześć tylko razy, a iuż cała ta długość będzie wymierzoná; będzie zatém wymiár i prędszy i pewnieyszy. W takowych wymiarach wielkiéy báczności potrzeba.

1. Należy bydź zapewnionym, że miary brané są w linii prostéy.

Tym końcém zostawuią się żérdzie, w pewnéy od siebie odległości, i w téy linii, którą mierzyć przypádá, tak, aby piérwszá żérdź zasłániała następuiącé, a osobliwie drugi koniec linii do mierzéniá: trzeba także té żérdzie ustawić prostopadle (z) używaiąc do tego *Pionu* (Perpendiculum.)

2. Jeżeli na końcu linii do mierzéniá nie znáyduie się iaki cél znaczny, na przykłád drzewo, rog domu, i t.d. trzeba tam osobliwie, gdy długość iest bardzo wielka, wystawić znak iaki, na przykłád żérdź wysoką z chorągiewką, z táblicą białą na wiérzchu, lub z jnnym podobnym znakiém.

Trzeba ieszcze uwážać, aby przykłada-

(z) Liniią prostopadłą do iakiéy płaszczyzny, *poziomey* (horizontalis) nazywać będziémy *Pionową* (verticalis.)

dania następne miary, były w linii prostey; według drogi od żerdziów wyznaczoney. Przeto ten, co trzyma pierwszy koniec łańcucha lub sznura, powinien się postawić wprost żerdziów, i dadź znak drugiemu trzymaiącemu drugi koniec, aby i ten wprost niego stanął w teyże samey linii; albo znowu trzecia osoba, stoiąc przy końcu iednym linii do mierzenia, przestrzegać będzie, i uważać przykładaiących miarę, aby z linii prostey nie zchodzili.

Trzeba się starać, aby przy każdem przykładaniu miary, łańcuch lub sznur, iak naybardziey był wyciągniony: dla tego należy go do samey ziemi przystawiać, ieżeli ta równa iest wszędzie: albo też wspierać go na podporach w pewney odległości zostawionych; a tym sposobem nachylenie, które ciężar łańcucha, lub sznura sprawuie, będzie mniey znaczne.

J dla tegoć to, w robotach wielkiey wagi, i osobliwey dokładności wyciągaiących, łańcucha, ani sznura używać nie można.

5. Trzeba ieszcze mieć baczność, aby do tego samego mieysca, gdzie się miara iedna skończyła, przykładać znowu koniec sznura, lub łańcucha. Dla tego należy dla znaku wbić zaraz żerdkę lub

kół

kół w to mieyscé, w którém się miara przeszła zakończyła, a następuiącá má się zaczynać.

6. Trzeba dobrze pamiętać, ilé razy się łańcuch, lub sznur w całym wymiarzé przykładał, i aby o tém dlá iákiégo roztargniéniá nie zapomnieć; lepiéy iest za każdym razém naznaczyć sobie to przykładanié, albo na karcie, albo wtykaiąc na końcu każdégo w szczególności wymiaru, znak iaki.

7. Bezpieczniéy także iest, powtórzyć zawsze wymiár całéy długości.

8. Jeżeli polé do wymiérzéniá wcale iest otwarté, i wolné; możná ié podzielić na Tróykąty; czyli to prowadząc wszystkié przekątné od iednégo rogu, czyli biorąc bok iedén, za spólną podstawę tylu Tróykątów, ilé będzie pozostałych rogów; czyli ieszcze wyznáczaiąc punkt w samém polu, i uważaiąc go iak wiérzchołek, albo raczéy zbiég tylu Tróykątów, ilé figura, którą odrysować chcémy, má boków. Zmiérzywszy potém wszystkié boki wszystkich tych Tróykątów, można będzie odrysować na papiérze figurę podobną.

294. *Przestroga.* Tén sposób postępowaniá, w odrysowaniu pola, mierząc w istocie wszystkié liniie do tego potrze-

trzebné, i czasu wielé zabiérá, i rzádko nawet tráfiá się, aby polé tak było wolné, żeby na niém sposobu tego użyć można.

Jnszych zatém użyć trzeba w tym razie sposobów, któré się tu przytoczą, zaczynaiąc od łatwieyszych i prostszych. Postrzédz tu łatwo będzie można, iż używanié sposobów trudnieyszych i bardziéy zawikłanych, nie zawisło od prawideł Geometrycznych, których grunt ténże sám iest zawsze i iednakowá dokładność, ale z przyczyny niedoskonałości zmysłów naszych, i ręcznych działáń.

295. *Zagádn:* Znaléźć iakiégo célu odlégłość nie mierząc iéy *bezśrzednie* (immediate,) czyli nie udaiąc się wprost, aż do samégo célu.

Sposób. 1. W którym samych się tylko żérdzi lub kołów używá.

1. Wymiérzmy podstawę iaką, któráby się z jednéy strony kończyła na punkcie, od którégo odlegołość célu chcémy wiedzieć. Ta podstawa (dlá większéy w praktyce dokładności) powinná bydź tym dłuższá, im odległość célu, okiém miarkowaná, zdaie się bydź znacznieyszá. Dlá téyże w praktyce dokładności, trzeba ieszcze takié położénié

wy-

wybrać téy podstawie, aby prostopadłá, którąby do niéy od célu spuścić można, iak náybliżéy iéy śrzodka przypadła; ponieważ ze wszystkich inszych téyże długości podstáw, podstawa z takiém położéniém iest náywygodnieyszá.

2. Wytkniymy kołami ustawionémi od obudwóch podstawy końców, dwie liniie, ku célowi, którégo szukámy, prowadzącé.

3. Zmiérzmy od iednégo końca podstawy, dwie iakiékolwiek długości, iednę na podstawie, a drugą na linii kołami, wyznaczonéy; zmierzmy nad to, i odległość końców, tych dwóch długości iuż wymierzonych. Zróbmy to samo i z drugiégo końca podstawy.

Maiąc té na ziémi wymiary, możémy na papiérze odrysować Tróykąt podobny tému, który má za podstawę liniią na ziémi wymierzoną, a za wiérzchołek, punkt tén, którégo odległości szukámy.

Jakoż wyraziwszy na papiérze podstawę przez liniią iakąkolwiek, możná będzie przy obudwóch końcach téy linii odrysować dwa Tróykąty, których boki takby się miały do siebie, iak się maią długości na ziémi wymierzoné (pod liczbą 3:) a zatém i liniie które się ciągnęły od końców podstawy na ziémi,

do

do punktu, którégo odległości szukámy, będą tak do téy podstawy nachylone, iak i liniie dwie na papierze, od końców linii wyrażaiącéy podstawę prowadzone, nachylaią się do téyże podstawy.

296. *Przestroga.* Tén sposób wielkiéy bardzo wyciąga baczności, tak w działaniach na ziemi, iako i w przenoszéniu ich na papiér. W tym razie tylko można go użyć, gdy i odległości nie są znaczne, i wielka dokładność nie potrzebna: gdy na przykład wyobrażénie tylko chcémy sobie uczynić nie znaioméy odległości iakiégo célu; wyznaczénie według tego sposobu położénia punktu iakiégo nie dostępnégo, od tego zawisło, aby doyśdź nachylénia iednéy linii wiadoméy, toiest podstawy, do dwóch inszych prowadzonych od obudwóch końców téyże podstawy, ku punktowi, którégo położénia szukamy: ponieważ gatunek Tróykąta, témi trzéma liniiami zawartégo, a zatém i stósunek iego boków iuż wyznaczony będzie przez té nachylénia, *Stolik Geometryczny* (Tabula Pretoriana) i *Kątomiérz* (Graphometrum, albo Instrumentum Goniometricum) są to dwa narzędzia szczególniéy używane do wyznaczénia bezśrzednie takowych nachyléń.

Sposób 2. Przez stolik Geometryczny.

297. Nie bawiąc się nad opisaniém tego narzędziá, i sztuk do niego należących (bo samo rzucenié oka, dopiéroż używanié, więcéy w téy mierze nauczy, niż opis choćby też náyobszérnieyszy), przestrzédz tylko należy, że lepiéy iest mieć przy stoliku, gdy kogo stać na to, perspektywy opatrzoné nitkami, w kąt prosty przecinaiącémi się, niżeli proste *Célowniki* (dioptrae) i że ténże stolik ustawić należy *poziémnie* (horisontaliter) iak będzie można náyrówniéy: do czego *prawidła* (Alidae) *albo* Regulae (a) z ruchomémi perspektywami, daleko są lepszé, niżeli té, przy których perspektywy lub Célowniki są nie ruchomé. (b)

Aby wyznaczyć przez stolik odległość tę, w któréy od iakiégo punktu nie dostępnégo zostaiémy; powinná do tego wymierzoná bydź podstawa na ziémi; z ostrożnościami wyżéy wzmiankowanémi, co do iéy położéniá i wielkości: trzeba

(a) Prawidło, iedno iest to, co i liniiál; że zaś przy stolikach Geometrycznych, łączy się razém i spáiá z célownikami lub perspektywami, dlá tego się odmiénnégo nazwiska użyło.

(b) Célowniki im są wyższé, tym lepszé, bo bez nachyleniá, lub podniesiéniá stolika, można przez nie widzieć cél iaki na dole, lub w górze wystawiony.

trzeba potém postawić stolik na końcu iednym téy podstawy, i wyrazić tam iéy długość, i położénié, a to przez liniią kierowaną, przez prawidło wzdłuż téyże podstawy ustawioné. Nachylénié podstawy do linii poprowadzonéy od iéy końca ku punktowi niedostępnému, wyrazimy na stoliku, przez liniią od końca podstawy wiedzioną przy prawidle, ku témuż punktowi zkierowanym. To zrobiwszy, przeniesiémy stolik na drugi koniec podstawy, na ziémi wymierzonéy, i podobnie sobie, iak przy piérwszym końcu podstawy postąpimy, ciągnąc znowu przy prawidle liniią od końca drugiégo podstawy na stoliku wyrażonéy ku punktowi, którégo odległości szukámy. Tróykąt wykréślony tym sposobém na stoliku, podobny będzie Tróykątowi na ziémi zamkniętému między podstawą wymierzoną, i dwóma bokami, któréby od iéy końców prowadzoné schodziły się w punkcie zostaiącym w odległości niedostępnéy; a zatém wielkości liniy na stoliku wykréślonych, i podług podziáłki wymierzonych, dadzą nám poznać i wielkości liniy odpowiadaiących na ziémi. I tak niechby na przykłád długość podstawy na ziémi, była: 200 sążni, którą wyrážá na stoliku liniiá zamykaiącá w sobie 200 równych części wziętych z jakiéykolwiek podziáłki. Jeżeli drugá liniiá na tymże stoliku poprowadzoná od końca piérwszéy wyrážaiącéy podstawę, má w sobie podług téy saméy podziáłki, na przykład, 180 części: to będzie dowodém, że i liniiá odpowiadaiącá iéy na ziémi, zawiérá 180 sążni.

298. Używanié stolika nie rozciągá się, tylko do długości pomiernych. Náywiększá taká długość, do któréy ieszcze stolika użyćby možná, nie powinná przechodzić 300, a náywięcéy 400, sążni. Szczupłość narzędziá tego, a zatém i linii przez które musimy na niém wyrážać liniie uwážané na ziémi, czyni uchybiéniá tym znacznieysze, im większé są té ostatnié długości. Možémy iednak używać stolika, gdy idzie tylko o wyrażénié, na papiérze gruntu iakiégo nie bardzo rozległégo i prawie forémnégo: albo gdy tylko wewnętrzné mieysca gruntu, chociáż obszérnégo wyznaczyć potrzeba, którégo położénié punktów znamienitszych, iuž wyznaczoné iest sposobém dokładnieyszym; który zaráz wyłożę.

299. *Sposób 3. przez Kątomiérz* (c).

Wy-

(c) Nauczyciele nié maiąc Kątomiérza, ukážą Uczniom przenośnik który małością tylko różni się od Kątomiérza, i tém, że nié má przydanych sobie prawideł z Célownikami.

Wystawiénié przed oczy tego narzędziá, a potym używanie, dá go náylepiéy poznać. Tę tylko, co i względém stolika uwágę przydadź należy, że kątomiérze z ruchoméml prawidłami, na płaszczyznie pionowéy ustawioné, i perspektywami opatrzoné, lepszé są od tych, któré maią prawidła nie ruchomé, zwłászcza że wielé na tém zawisło, aby kątomiérz był zawsze po ziémnie ustawiony: a długié i trudné iest działanié, chciec przywiéśdź do iednéy płaszczyzny kąty na różnych płaszczyznach uważané.

Kątomiérz na to służy, aby przezeń stopniami wyznaczyć kąty, któré tylko liniiami na stoliku oznaczoné były. Ponieważ zaś narzędzié to bywá małé, tak dlá większéy wygody, iak i tanności; przeto nié można oznaczyć na iego brzegu podziáłów mnieyszych od stopnia: przydaią mu zwyczaynie na to mieyscé podział inszy, któryśmy wyżéy nazwali *podziáłém Nonniiusza*, aby tym sposobém i minut dochodzić można, przynáymniéy do 3, 4, lub 5, według wielkości narzędziá: co dosyć iest w zwyczaynych na ziémi działaniach.

Niechby łuk koła, wzięty na brzegu prawidła ruchomégo (który łuk powinien iak náybardziéy przyſtáwać do brzegu Kątomiérza) i zawiéraiący w sobie na przy-

przykład 11. ſtopniów, podzielony był na 12 części równych; każdy takowy podział tego łuku zawierać będzie ſtopień 1, mniey $\frac{1}{12}$, stopnia, toiest mniey 5, minutami; a zatém, gdy dwa podziały, ieden prawidła, a drugi ſtopnia zeydą się z sąbą; odległości pierwszych, drugich, trzecich i t. d. podziałów, wyrażać będą: 5, 10, 15, i t. d. minut. Gdy punkt naznaczony $\underline{o}$, w podziele prawidłą, toiest, punkt odpowiadaiący *Osi* (Axis) prawidła, albo perspektywy, schodzi się z podziałém brzegu Kątomierza; liczba ſtopniów na tym brzegu wyrażoná, zupełnie oznáczá w ſtopniach wielkość kąta, który czynią dwa prawidła. Ale gdy tén punkt nie ſchodzi się z podziałém brzegu, kąt którégo szukámy, różnić się będzie 5. 10, 15, i t. d. minutami co do wielkości swoiey, od liczby ſtopniów wyrażoney przy podziele náybliższym, podług tego, iaki będzie podział prawidła czy piérwszy, czy drugi, czy trzeci i t. d. który się zeydzie z podziałém brzegu.

Aby przez Kątomiérz wyznaczyć odległość punktu niedoſtępnégo.

Trzeba naprzód, aby była wymierzoná podſtawa, położywszy potém Kątomiérz, na końcu iednym podſtawy, tak aby prawidło nieruchomé przypadło na też podſtawę, céluię drugiém prawidłém

ru-

ruchomym, do punktu, którégo położénié chcę wiedzieć. Toż czynię, i na drugim końcu podstawy; a tym sposobém będę miał dwa kąty wiadomé przy podstawie.

Pociągnę daléy na papiérze, iakąkolwiek liniią, któraby podstawę wyrażała, i zrobię przy niéy dwa kąty z obustron równé kątóm uważanym na ziémi. Punkt tén w którym dwa tych kątów ramiona przecinać się będą, pokaże na papiérze położénié punktu, którégo szukam, i iego odległość od iednégo z końców linii wyrażaiącéy podstawę tak się mieć będzie do téyże linii, iak się ma punktu niedostępnégo na ziémi odległość, od końca podstawy tamtému odpowiadaiącégo, do saméy podstawy. Piérwszy stósunek z podziałki wyznaczony będzie, a zatém wynaydzie się odległość żądana przez proporcyą: któréy trzy piérwszé wyrazy będą wiadomé, toiest, iak się ma liniiá wyrażaiąca podstawę na papierze, do podstawy na ziemi; tak się ma liniiá na papiérze odpowiadaiąca odległości, któréy szukamy, do téyże odległości.

Gdyby dwa takié punkta były niedostępné, których odległości nie wiémy; możnaby każdégo z nich w szczególności wyznaczyć położénié względém linii wymierzonéy, i wziętéy za podstawę: tak się albowiém mieć będzie liniiá na papie-

rze

rze wyrážaiącá podstawę do linii wyrážaiącéy także na papiérze położéniá punktów dwóch nie dostępnych, (który to stósunek wiadomy iest z podziałki); iak się má podstawa na ziémi wymierzoná, do odległości na ziémi dwóch punktów niedostępnych.

Jakážkolwiek zgoła byłaby liczba punktów na ziémi którychbyśmy położénié wyznaczyć chcieli, nie mierząc wszystkich tych odległości, którémi są té punkta oddzielone; możná podobnym iak wyżéy sposobém i odległość tę wyznaczyć, i położénié każdégo z osobna punktu względém podstawy, z któréy dwóch końców wszystkié té punkta widziané bydź mogą: i według tego wyznaczyć potém na papiérze tak położéniá, iako i odległości odpowiadaiącé tamtym punktóm.

Możná więc będzie tym sposobém odrysować mappę i obszérnieyszéy sztuki ziémi, któréy punkta do tego potrzebné widzialné są z dwóch iakich inszych punktów.

Gdyby zaś nie wszystkié té punkta, których położéniá wiedzieć chcémy, były nie dostępné, możná w tym razie przenieść się do dostępnych, i obrać iedén z nich, lub dwa za nowé *punkta stanowiska* (puncta stationis) toiest takié, z których położénié inszych punktów, mógłoby bydź

wy-

wyznaczoné; i znowu wyznáczać położéniá tych punktów, które albo z jednégo tylko z piérwszych punktów stanowiska, albo z żádnégo nie były widzialne; biorąc zawsze za podstawę odległość dwóch punktów, których położénie iuż wyznaczoné iest przez rysunek. Można podobnym sposobém działanié to rozciągnąć, i do odrysowaniá mieysc obszérnieyszych.

Lubo przepisy tu podané, są z siebie dokładné i iasné; atoli w wykonaniu ich, wielkiéy baczności przykładać należy: bo inaczéy, tym większé będą w rozmiarach błędy, i uchybiéniá, im odległości do mierzéniá podané, są znacznieyszé, i działania w nich bardziéy zawisłé iedne od drugich. Nie będziémy się tu bawić nad podáwaniem drobnieyszych w téy mierze uwág, i służących tym tylko uczniom szczególniéy, których powołanié wezwie w czasie, do pilnowaniá z Urzędu takowych działań, Znáydą ci bardzo dobré do tego się ściągaiącé nauki, w różnych Xiążkach, między inszémi w trzeciéy Xiędze pod tytułém *Institutiones Mathematicae* przez X. Metzburga. w Wiedniu 1777, wydanéy.

300. Tego się szczególniéy w podobnych rozmiarach strzédz potrzeba, aby, tak té kąty, które uwážámy przy punktach stanowiska nie były bardzo ostré, iako i té,

któ-

które sobie wystawić w myśli można przy punktach, których położeniá szukámy, i które zawarte byłyby między dwiema liniiami prowadzącemi od punktów dwóch ſtacyy do tamtych punktów. Dlátego podſtawa powinná bydź tym większá; im większa odległość, którey ſzukámy, i położénié punktów takié, aby prostopadłé od nich spuszczoné, ilé możności, przypádały na podſtawę nie przedłużoną, albo przynáymniey mało co przeciągnioną. Małé uchybiénié w kącie, przy podſtawie, pociągá za sobą tym większé uchybienié w bokach; im większé są nie tylko té samé boki, ale i ich kwadraty; a zatém, gdy kąty przy podſtawie są bardzo oſtré, albo też, gdy ich summa nie wielé się różni od ſummy dwóch kątów prostych, w takim razie trzeba odmiénić iedno, lub obadwa ſtanowiska. A ieżeliby między punktami, których położénié i odległóść iuż ieſt wyznaczoná, nie znáydowały się dwa inszé takié, aby liniia łącząca ié zdatná była do wyznaczéniá inszych punktów pozoſtałych, trzeba w takim razie brać punkt iakikolwiek mogący wygodnie ſłużyć za ſtanowiſko, z oſtróżnościami wyżéy spomnionémi; choćby nám z siebie nie był potrzebny do tego celu, któryśmy sobie szczególniéy założyli.

Gdy w działaniá wchodzić muszą takié wymiary, z których iedné zawiſły od drugich; należy przynáymniey bydź zapepewnionym, że w tén związek działáń nie wplątały się błędy, z których roz-mnożéniá urosłoby znacznieysze iakié u-chybiénié.

Przeto możná w rzeczy samé́y wymierzyć odległość iednę z tych, których doszliśmy z przeniesiéniá figury na papiér, i uważać, czyli się nie różni od téy, którá wyznaczoná była przez proporcyą któré́y dwoma wyrazami były dwa boki na papié-rze, trzecim podſtawa na ziémi, a czwártym odległość szukaná; albo też wynalezioną odległość dwóch punktów, wziąść za podſtawę i szukać z niéy położéniá końca iednégo z dwóch, piérwszey podſtawy, tak właśnie, iak gdyby ta była nám ieszcze niewiadomá; a gdy się pokáże, że z tego powtórnégo działaniá wypadnie to położénié punktu, co z piérwszégo, albo mało co różnić się będzie, możná to mieć za dowód dość pewny, że w ciągu działáń nie było uchybieniá, przynáymniéy znacznieyszégo: ponieważ z dwoiakiégo takiégo działaniá, iednakowé położénié wypaśdźby inaczéy nié mogło, chyba żeby ieden błąd poprawił, a bardziéy nagrodził drugi: co się rzádko tráfiá.

Jakáżkolwiek iednak ostrożność będzie i dokładność w działaniach na gruncie, czyli to w wymierzéniu podstawy, czyli w braniu kątów; przenoszénié atoli li na papiér tych działáń, będzie podlegać wielkim niepewnościóm.

Trudność ta ostatniá stąd szczególniéy wyniká; że pewną liczbę stopniów brać przychodzi na przenośniku, albo cyrklu proporcyonalnym. Na tych zaś dwóch narzędziach, cięžko iest wyznaczyć liczbę stopniów, a niepodobná wyznaczyć liczbę minut, które się pospolicie w kącie danym znáyduią. Nuž tedy uchybiénié będzie w połowie tylko stopnia, albo 30. minutach; tén nie wielki na oko błąd, pociągnie za sobą inszy większy w liniiach, których długość róžnić się stąd będzie od práwdziwéy, 3ostą, 2ostą, a czasém i 1otą częścią tychže samych liniy; a tén błąd tym większé uchybiénié w długościach, czyli wielkościach liniy sprawi; im mnieyszá względém nich była ta liniiá, którą wzięliśmy za promień. Źrzódło to omyłek mniéy wpływac będzie w takowé uchybiéniá, gdy iuž nám skądinąd wiadomé są długości boków należących do Figur, które rysować mámy: a té długości są pospolicie zamiarém szczególnieyszym działáń mierniczych. Gdyby na przykłád: trafiło się, žeśmy w pół linii lub w całéy linii uchybili, biorąc na podziáłce iakąkolwiek długość; omyłka ta, którá stąd wyniknie, względém położéniá na papiérze liniy, figurę iaką zamykaiących, będzie tym mnieyszá; im dłuższé były liniie; któréśmy przenosili. Szu-

Szukano więc sposobu, aby wszystkie działania na gruncie, tak można było przenieść na papier, żeby te wyrażały się w takich Tróykątach, których boki byłyby nam wiadome, toiest, żeby można odrysować na papierze z pomocą samey podziałki, figury podobne tym, któreśmy na gruncie uważali. Maiąc tedy daną liczbę ilości w liniiach lub w kątach, dostateczną do wyznaczenia całego Tróykąta, szukano sposobów, i znaleziono ie, iakby stąd doyśdź ilości pozostałych w liniiach i kątach ieszcze nie wyznaczonych.

Część Ziemiomierstwa, która na to przepisy daie, nazywa się *Trygonometryą*, albo *Tróykątmierstwem*: a to dla tego, że szczególniey rzecz tam iest o Tróykątach, iako tych, od których wyrachowania wszystkich inszych wielokątów wyrachowanie zawisło. Jest to część nayznakomitsza Matematyki, nazwaney (*Mathesis pura*): przystósować ią bardzo często można do Matematyki, którą nazywać można *Mieszaną*, idąc za łacińskiem nazwiskiem (*Mathesis mixta:*) iako to do Mechaniki, albo nauki o machinach, czyli silniach: do Optyki, albo nauki o widzeniu, a naywięcey do Astronomii, czyli nauki Gwiazdarskiey: i dla tego ta część szczególnieyszey uwagi i zastanowienia się Uczniów wyciąga.

Przy-

Przygotowanie do Rozdziáłu następuiącego o Logarytmach.

Ponieważ o Logarytmach dokładniéy mówić się potém będzie; tu tylé tylko o nich powiémy, ilé potrzeba umieć, aby ié przystósować można do rozwiązaniá reguły trzech, i wyciągniéniá piérwiástku kwadratowégo.

301. Logarytmy, są to liczby odpowiadaiącé liczbóm całkowitym, i następnym, 1, 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. w tén sposób, że té piérwszé liczby, czyli Logarytmy, iedné do drugich dodané, odpowiadaią tym ostatnim, gdy są iedné przez drugié rozmnożoné.

J tak znáyduiémy w táblicach logarytmowych przy liczbach - - - - 2, i 3.

Logarytmy:	0, 301 030 0.	
	0, 477 121 3.	

Jch summa 0, 778 151 3 iest logarytmém liczby 6, którą się robi z rozmnożéniá 2, przez 3.

W zwy-

W zwyczaynych táblicach logarytmowych, logarytmy liczb:

10,	- - 1		
	są		
100	- - 2		
1000	- - 3		
10000	- - 4.		
i t. d.	i t. d.		

Logarytmy liczb mnieyszych od 10, ale większych od 1, są ułomki dziesiątne nie maiące żádney liczby cáłkowitey.

J tak Logarytmy liczb:

2, -	0, 301 030 0.	
są		
3,	0, 477 121 3.	
4, -	0, 602 060 0.	
5, -	0, 698 970 0.	
i t. d:	i t. d.	

302. Ponieważ zaś rozmnożenie iakiey liczby przez 1, żádney odmiany w niey nie sprawia; przeto i dodanie logarytmu iedności, do logarytmu tey liczby, odmienić tego logarytmu nie powinno; Logarytm więc iedności iest zero albo 0.

Logarytmy liczb między 10, i 100, są iedności z przydanemi ułomkami dziesiątnemi.

Logarytmy liczb między 100, i 1000, między 1000, i 10000, i t. d. są liczby cál-

ko-

kowité piérwszych, 2, drugich, 3, i t. d. z przydanémi ułomkami dziesiątnémi

Znak piérwszy logarytmu liczby całkowitéy ieſt częścią nayznakomitszą tegoż logarytmu, ponieważ daie poznać z jak wielu znaków ſkłáda się liczba całkowitá, któréy ieſt logarytmém. Tak na przykład, znak logarytmu piérwszy: 0, 1, 2, 3, 4, i t. d. daie poznać, iż liczba, któréy odpowiádá, zawiérá się między 1, a 10, albo między 10, a 100, albo między 100, a 1000, albo między 1000, a 10000, albo między 10000, a 100000. i t. d. to iest má w sobie iedén, dwa, trzy, cztéry, pięć, i t. d. znaków liczb całkowitych. Dlá tego też piérwszy znak Logarytmu nazywá się iego *Céchą* (Characteristica.)

303. Gdy dwa logarytmy, maią iednakowé ułomki dziesiątné, (d) a cécha ich tylko ieſt odmiénná; w takim razie liczby im odpowiadaiącé, są 10, 100, 1000, i t. d. razy większé iedna od drugiéy, podług tego, iak cécha ich logarytmu większá będzie iedna od drugiéy, dwiéma, trzéma i t. d. iednościami, J tak logarytmi liczby 20, 200, 2000, i t. d. będzie, 1, 301 030 0. 2, 301 030 0. 3, 301 030 0. i t. d. toiest, będzie tén sám co i Logarytm liczby

(d) Té ułomki w Logarytmie, nazywaią Autorowie piszący po Łacinie: *Mantyſſa.*

liczby 2, przydawszy mu Log: liczb 10, 100, 1000 i t. d.

Trzeba przez kilka przykładów wprawić Ucznie w to pierwsze działanie; biorąc takie liczby, któreby nie większe były, od naywiększey liczby tablic logarytmowych.

304. *Przykład* 1. Rozmnożyć 28 przez 32.

Log: liczby	28	-	1, 447 158 0,
	iest		
Log:	32	-	1, 505 150 0,
Summa Log.	-	-	2, 952 308 0.

J ta Summa powinna bydź logarytmem liczby rozmnożoney z 28 przez 32. Jakoż w tablicach logarytmowych przy logarytmie, 295 230 80, znaydziemy liczbę 896; która to liczba wypada w samey rzeczy z rozmnożenia 28 przez 32.

Przykład 2. Rozmnożyć trzy liczby: 16, 24, 26,

Log:	16,	-	1, 204 120 0.
Log:	24,	-	1, 380 211 2.
Log:	26.	-	1, 414 973 3.
Summa Log:		-	3, 999 304 5.

J toiest logarytm liczby 998 4, którá wypádá z rozmożéniá trzech liczb: 16, 24, 26.

305. Ponieważ kwadrat iakiéy liczby, ieſt ta sama liczba przez siebie rozmnożoná; więc logarytm tego kwadratu, będzie równy logarytmowi liczby z któréy kwadrat powſtáł, dwa razy wziętému.

Przykłád 1. Log: 2, - 0. 301 030 0.

Ténże dwa razy wzięty 0, 602 060 0, będzie logarytmém kwadratu z 2, to ieſt 4.

Przykłád. 2, Log. 56	-	1. 748 188 0.
Dwa razy wzięty:	- -	3, 496 376 0.
będzie Logarytmém kwadratu z 56, toiest:	- -	3, 136.

306. W dzieléniu, liczba podzielná równá się liczbie dzielącéy, przez wieloráz rozmnożonéy; a zatém logarytm liczby podzielnéy, równá się logarytmowi liczby dzielącéy dodanému do logarytmu wielorazu; a stąd logarytm tego wielorazu, będzie różnicą między logarytmami liczby podzielonéy i dzielącéy.

Przykłád. 1. Podzielić 6, przez 2,

Log: 6.	-	0, 778 151 3.
Log: 2.	-	0, 301 030 0.
Różnica	-	0, 477 121 3. iest

logarytmém wielorazu, toieſt 3. *Przy-*

Przykład 2. Podzielić 1632 przez 34.

Log:	1632	- -	3,212 720 2
Log:	34	- -	1,531 478 9
Różnica		- -	1,681 241 3.

ieſt logarytmém wielorazu toiest. 48.

307. W proporcyi: śrzednie liczby, iedna przez drugą rozmnożoné, równé są skraynym podobnie rozmnożonym, iako się to w Arytmetyce i w Rozdziele o proporcyach wywiodło. Przeto iednę z skraynych liczbę znáyduiémy, dzieląc śrzednié liczby w tén, iak wyżéy, sposób rozmnożoné, przez drugą liczbę skrayną; a zatém i logarytm liczby iednéy skraynéy wynáydziémy, odiąwszy od summy logarytmów dwóch liczb śrzednich, logarytm drugiéy liczby skraynéy.

Przykład 1. 35 Robotników, zrobiło 45, sążni pewnéy roboty, ileż w tym samym czasie zrobi 42, robotników z równą usilnością prácuiących?

Log:	42	- -	1.623 249 3.
Log:	45	- -	1.653 212 5.
Summa		- -	3.276 461 8.
Log:	35	- -	1.544 068 0.

Różnica - 1.732 393 8. iest logarytmém żądanym, liczby 54.

308. Zamiást odeymowaniá, któréby należało czynić w logarytmach, używá się wygodnie dodáwaniá w tén sposób: Logarytm liczby dzielącey, a bardziéy iego cécha, odeymuie się od liczby cáłkowitéy 10, i reszta dodaie się do logarytmu liczby podzielnéy, a od summy, znowu się 10 odciná.

Defin: Różnica logarytmu liczby iakiéy od 10. nazywá się *dopełnieniém* (complementum) tego logarytmu.

Przykłád. Podzielić 6. przez 2.

Log: 6. - - 0.778 151 3.
Log: 2.030 103 00. Dopełnienié tego log: 9.698 970 0

Summa - 10,477 121 3
Log: wielorazu - 0. 477 121 3.
iest Log: 3.

Podzielić 1632 przez 34.
Log: 1632 3.212 720 2.

Log: 34, 1.531 478 9. Dopełn:
Log: 34, 8.468 521 1.

Summa - - 11.681 241 3.
Log: wielora: 1.681 241 3.
iest Log: 48.

Tén

Tén sposób postępowaniá osobliwiéy iest wygodny w Regule Trzech, gdzie odeymowanié następuiącé, po dodáwaniu, mogłoby w długich zwłászcza rachunkach, omyłki iakiéy dadź okazyą. Możná zaś i nie wielką nawet w rachowaniu maiąc wprawę, na pamięć czynić to odeymowanié, któré potrzebné iest do otrzymaniá dopełniéniá logarytmu, któré się potém dodaie na mieyscé logarytmu odeymować się maiącégo.

Przykłád 35 Robotników, zrobiło 45 sążni, iléż zrobi 42 rob:?

Log:	42	1.623 249 3.
Log:	45	1.653 212 5.
Dopełniénié Logar:	35	8.455 932 0.
Summa któréy cécha zmnieyszoná liczbą 10.		1.732 393 8.

Przykłád 2. Bok iedén prostokąta má 1344, a drugi 1445 łokci. Trzeba go zamiénić na inszy prostokąt iému równy, którego bok iedén má zawiérać 1440. łokci?

Log:	1344	-	3.128 399 3
Log:	1445	-	3.162 863 0
Summa		-	6.291 262 3.
Log:	1440	-	3.158 362 5.
Różnica		-	3.132 899 8. ieſt

Logary-

Logarytmém liczby, któréy szukaliśmy toiest 1358.

309. Ponieważ Logarytm Kwadratu, dwa razy iest większy, niż Logarytm piérwiastku; przeto Logarytm pierwiástku; iest połową logarytmu kwadratu. Aby tedy wyciągnąć z liczby piérwiástek kwadratowy; trzeba wziąść połowę logarytmu téy liczby.

Przykład 1. Wyciągnąć piérwiástek kwadratowy z 4.

Log: 4 - 0.602 060 0.

Połowa - 0.301 030 0. ieſt logarytmém piérwiáſtku, toieſt 2.

Przykład 2. Wyciągnąć piérwiáſtek kwadratowy z 7569.

Log: 7569. - 3.879 038 5.

Połowa - 1.939 519 2. ieſt logarytmém piérwiáſtku, toieſt 87.

Przykład. 3. Boki proſtokąta są: 378, i 672, iakiż będzie bok kwadratu iému równégo w powiérzchni?

Log:	378	-	2. 577 491 8.
Log:	672	-	2. 827 369 3.
Summa		-	5. 404 861 1.

Poło-

Połowa - 2. 702 4305. iest logarytmém liczby szukanéy toieſt 504.

310. *Co się tycze logarytmów ułomków dziesiętnich.*

Niech będzie liczba n p. 1764, któréy logarytm: 3. 246 498 6. Podzieliwszy tę liczbę przez 10, logarytm wielorazu powinién mieć iedną iednością mniéy w césze swoiéy (303.) Logarytm tedy liczby 176, 4, będzie - 2. 246 498 6.
Podobnie log: 17, 64, będzie 1. 246 498 6.
Log: 1, 764 - 0, 246 498 6.

Dzieląc 176 4, przez 1000, logarytm wielorazu, toieſt liczby 1, 764, má céchę mnieyszą 3 iednościami, niżeli miáł logarytm liczby 176 4, nie podzielonéy. Gdyby tedy przyszło, 176 4 dzielić przez 1 000 0, 1 000 00, 1 000 000, i t. d. Logarytmy wielorazów, toiest ułomków dziesiątnych: 0, 176 4. 0, 0 176 4, 0,001 764 i t. d. powinnyby mieć 4, 5, 6, i t. d. iednościami mnieyszą céchę, niżeli miáł logarytm liczby 176 4, nie podzielonéy. Że zaś cécha logarytmu liczby 176 4, ieſt: 3, a céchy logarytmów liczb: 1 000 0, 1 000 00, 1 000 000, i t. d. są: 4, 5, 6, i t. d. toiest liczby większé od 3, od których ié odeymować przypádá; więc dlá większéy w odeymowaniu wygody uwáżá się, iakoby cécha 3, powiększoná była 10 iednościami, i dopiéro od tak powiększonéy

odey-

odeymuią się cechy liczb dzielących: 1 000 0, 100 000, 1 000 000. i t. d. toieſt cechy: 4, 5, 6, i t. d. pamiętaiąc zawsze na to przydanie i zmnieyszaiąc znowu resztę, toi st, logarytm wielorazu tąż liczbą: 10; będzie więc log $\frac{1\ 764}{1\ 000}$, albo 0, 1 764 = 13, 246 498 6—4 (e) = 9, 246 498 6, toieſt dla dodanych 10, do cechy 3, będzie w samey rzeczy = 9, 256 498 6 — 10: Tak też Log: 0,017 64, będzie=8,246 498. 6 — 10. log. 0. 001. 764. będzie = 7, 246 498 6 — 10. i t. d.

Przykład 1. Rozmnożyć 24 przez 0, 5.

Log: 24 = 1,380 211 2.
Log: 0,5 = 9,698 970 0. — 10.

Summa = 1,079 181 2. = Log: 12, toiest liczby wypadaiącey z rozmnożenia 24 przez 0,5.

Przykład 2. Rozmnożyć 24 przez 0, 05.

Log: 24 = 1,380 211 2.
Log: 0,05 = 8,698 970 0. — 10.

Summa = 0,079 181 2. iest logarytmem liczby rozmnożoney.

Ten

(e) Znak — kładzie się przed tą ilością n p. przed tą liczbą, która ma bydź od drugiey odjętą.

Tén logarytm nie znáyduie się w táblicach logarytmowych z céchą, o, ale się znáyduie z céchą 1, i odpowiádá mu liczba: 12; a zatém liczba, któréy szukaliśmy, będzie 10 razy, mnieyszá toieſt: 1, 2.

Przykłád: 3. Podzielić 32 przez 0, 5.

Log: 32 = 1,505 150 0.

Log: 0,5 = 9,698 970 0. — 10.

Reszta. 1.806 180 0 ieſt logarytmém wielorazu, toieſt liczby 64.

Odeymuiąc 9.698 970 0, od 1,505 150 0, odéymowalibyśmy 10 razy więcéy, niż potrzeba; więcby to 10 do reszty przydadź należało. Na iedno zaś wyydzie, gdy té 10, któremi ieſt powiększoná liczba maiącá się odeymowáć, przydámy téż i do liczby, od któréy ią odeymowáć przypádá, toieſt, gdy odeymuiémy 9,698 970 0 od 11,505 150 0.

Przykłád 4. Podzielić 144, przez 0, 06.

Log: 144 = 2,158 362 5.

Log: 0,06, = 8,778 151 3. — 10.

Różnica - - 3,380 211 2. ieſt logarytmém wielorazu, toieſt liczby: 2400.

Co

Co do ułomków zwyczaynych.

311. Ponieważ ułomek uważać można, iako oznaczaiący dzielenie licznika iego przez mianownika; będzie zatém logarytm ułomka równy różnicy między logarytmém licznika iego i mianownika.

Niech będzie na przykład ułomek nie właściwy $\frac{7}{5}$.

Log: 7. - 0,845 098 0.

Log: 5 - 0,698 970 0.

Różnica - 0,146 128 0 = Log: $\frac{7}{5}$.

Można się o tém przekonać używszy ułomka dziesiątnego zamiast ułomka $\frac{7}{5}$, będzie albowiém $\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1,4$.

Log: 14 - 1.146 128 0.

A zatém Log: 1,4 - 0.146 128 0.

312. Gdyby ułomek był właściwy, to iest gdyby licznik iego był mnieyszy od mianownika; w takim razie logarytm licznika byłby też mnieyszy od logarytmu mianownika. Aby więc można odiąć logarytm mianownika od logarytmu licznika;

ka; pożyczámy 10. témù logarytmowi iak wyżéy (310) w podobnym przypádku.

Przykłád 1. Niech będzie ułomek: $\frac{2}{5}$.

Log: 2=0,301 030 0.

Log: 5=0,698 970 0.

Log: $\frac{2}{5}$=9,602 060 0. — 10.

Przykłád 2. Trzeba znaléźć Log: $\frac{7}{15}$

Log: 7 = 0,845 098 0.

Log: 15. = 1,176 091 3.

Log: $\frac{7}{15}$. = 9,669 006 7. — 10.

Przykłád: Trzeba znaléźć log: $\frac{1}{25}$

Log: 1. = 0,000 000 0.

Log: 25=1,397 940 0.

Log: $\frac{1}{25}$=8,602 060 0. — 10.

Zdaie się, iżby przystało używać odmiénnégo iakiégo znaku céchy, gdy ta należy do logarytmu odpowiadaiącégo ułomkowi, aby ią zaráz na weyzrzénié rozeznać možná od céchy logarytmu, który liczbie cáłkowitéy odpowiádá.

313.

313. Kiedy logarytm iaki, nie znáyduie się w Táblicach, można wtedy liczbę, którey odpowiáda, wyznaczyć; albo z zupełną dokładnością albo z małem uchybieniem.

Przykład: 1. Jakiż ieſt wieloráz 5, przez 4 podzielonych?

Log: 5	- -	0.698 970 0.
Log: 4	- -	0.602 060 0.
Różnica	- -	0.096 910 0.

Logarytm ostatni oznáczaiący różnicę dwóch pierwszych logarytmów, nie znáyduie się w Táblicach ani z céchą 0, ani z céchą 1; ale się znáyduie z céchą 2; liczba onému odpowiadaiąca iest: 125; ale że tén logarytm má cechę 2; więc nasz będzie odpowiadał liczbie 100 razy mnieyszéy, toiest: 1,25.

Przykład 2. Trzeba znaléźć kwadrat z 299, maiąc tylko Táblice Log: nie daléy rozciągaiące się, iak do 10000, toiest takié, których náywiększy Log: iest: 4 000 000 0.

Log: 299	- -	2.475 671 2.
Ténże podwoiony	-	4.951 342 4.

Drugiégo tego logarytmu w táblicach zwy-

zwyczaynych nie znáyduiémy. Zmnieyszmy więc iednością cechę iego: tén Logarytm zmnieyszony 3.951 342 4, lubo co do wszystkich liczb swoich, nie znáyduie się w táblicach; znáyduiémy go iednak co do piérwszych, i mało co większy iest od Log: 3.951 337 5. a mnieyszy od 3.951 386 1.

Piérwszy z tych logarytmów znáyduiących się zupełnie w Táblicach: iest Log: liczby 8940, a drugi Log: liczby - - - - 8941.

A zatém liczba, któréy szukámy, będzie między 8 940 0 - - - - - - 8 941 0.

Logarytm dany przewyższá logarytm piérwszy Táblicowy liczbą 49; mnieyszy zaś iest od drugiégo logarytmu Táblicowégo liczbą 437. Ta tedy któréy szukámy liczba, powinná daleko więcéy zbliżać się do 8 940 0, niż do 8 941 0.

Widzimy z Táblic, że kilka logarytmów, któré następuią po logarytmach liczb 8940, i 8941, maią tę samę, co i té logarytmy różnicę, toiest 486, tak, iak i różnica liczb im odpowiadaiących iest taż sama, toiest 1: a zatém ieżeli różnica między logarytmém danym i logarytmém Táblic iému náybliższym, iest na przykład połową, lub trzecią częścią, lub czwártą, i t. d. różnicy między tym-

że

że náybliższym logarytmém, i drugim, zaráz po nim nastęPuiącym, to też i różnica między liczbą odpowiadaiącą logarytmowi danému, a liczbą odpowiadaiącą logarytmowi náybliższému, będzie prawie połową trzecią częścią, czwártą i t. d. iedności, która iest różnicą między dwiéma liczbami naturalnémi, po sobie idącémi. Że tedy różnica 49, iest prawie $\frac{1}{10}$ częścią różnicy 486; więc i różnica liczby szukaney dlá dodatku liczbie 8940, będzie dziesiątą częścią iedności, toiest 0, 1; a zatém liczba odpowiadaiącá logarytmowi 3.951 342 4, będzie prawie 8940, 1, liczba zaś odpowiadaiąca Log: 4.951 342 4, będzie, 8 940 1, toiest kwadrat, którégo szukaliśmy.

Ponieważ w tym przykładzie szczególnym zakończénie liczby 299 pokazuie, iż kwadrat iéy má się kończyć na 1, można było bez tak długiégo rozumowania doyśdź téyże liczby kwadratowéy: 8 940 1.

314. Czému różnica dwóch logarytmów po sobie następuiących iest tym mnieyszá, im są większé liczby, którym oné odpowiadaią, możná to tak wyłożyć.

Różnica logarytmów dwóch liczb: 10, i 9. iest: 4 575 75.

Ró-

Różnica logarytmów dwóch liczb 100, i 90, iest ta sama; (ponieważ $\frac{100}{90} = \frac{10}{9}$;) ale ta rozkłádá się na dziesięć inszych mnieyszych różnic między logarytmami liczb 90, i 91, 91 i 92, 92 i 93 - - - - - 99 i 100.

Różnica między logarytmami liczb 900, i 1000, iest znowu ta sama co i między logarytmami liczb 10 i 9. (ponieważ $\frac{1000}{900} = \frac{10}{9}$) ale ta rozkłádá się na 100 mnieyszych daleko różnic między logarytmami liczb 900, i 901, 901, i 902, 902, i 903, 999 i 1000.

Podobnie i różnica logarytmów liczb 9000, i 10000, lubo ta sama iest, co między logarytmami liczb 9 i 10; ale się rozkłada na 1000. inszych różnic mnieyszych, i t. d.

315. Używanié logarytmów iest bardzo przydatné w wyciąganiu piérwiástków z Jlości nie spółmiernych.

Przykłád 1. Trzeba wyciągnąć przybliżony piérwiástek kwadratowy z 2.

Log: 2. - 0.301 030 0.
Połowa tego Log: - - 0.150 515 0.

Szukáymy téy połowy z céchą 3. Logarytm náybliższy w táblicach będzie:
3.150.

3.150 449 4, który odpowiáda liczbie: 1414. A że ten logarytm iest mnieyszy od 3,150 515 0; więc liczba odpowiadaiącá logarytmowi danému będzie między 1,414. i 1,415. Kwadraty zaś tych ostatnich liczb są: 1,994 476; i 2,002 305.

Aby pierwiástek bardziey ieszcze przybliżyć do prawdziwego, weźmy różnicę 656, między logarytmém danym, i náybliższym z táblic: i znowu weźmy drugą różnicę 3070 między dwoma táblic logarytmami, danemu náybliższémi. Ułomek $\frac{656}{3070}$ na dziesiątné części obrócony, będzie miał pierwszé dwa znaki liczebné: 21; a zatém pierwiástek bardziey przybliżony będzie: 1,414 21. Możnaby i więcey, gdyby kto chciał znaków liczebnych przydadź w tym pierwiástku; kończąc daley dzielenie, a tém więcey pierwiástek ten byłby do prawdziwego przybliżony.

Przykład 2. Trzeba znaleźć liczbę przybliżoną do następuiącégo wyrazu: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

Log: 5. - 0.698 970 0; $\frac{1}{2}$ Log: 5. - 0.349 485 0.

Log: 2. - 0.301 030 0; $\frac{1}{2}$ Log: 2 - 0.150 515 0.

Różnica - - - 0.198 970 0.

Osta-

Ostatni logarytm oznáczaiący różnicę, odpowiádá prawie w tablicach z cechą przydaną 3, liczbie 1,581, a zatém $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ równa się prawie 1,581.

ROZDZIÁŁ XII.

O Trygonometryi.

316. Wystáwmy sobie Tróykąt w koło wpisany. Boki tego Tróykąta byłyby cienciwami łuków przeciwnych iego kątóm. A że miarą tych kątów są połowy tychże łuków; więc boki tego Tróykąta będą cienciwami łuków dwa razy większych, niżeli są te, których ważność w stopniach ta sama iest, co i kątów im przeciwnych.

Jdzie zatém, że gdybyśmy mieli ułożoną z figury dokładnéy, lub z rachunku Tablicę cienciw do łuków wszystkich koła, zacząwszy na przykład od łuku iednéy minuty aż do 180 stopniów (którego to ostatniégo łuku cienciwa iest naywiększa) iuż tém samém i stósunek boków Tróykąta znaleźlibyśmy z danych kątów iego: i wzaiémnie (lubo nie tak prosto) doszlibyśmy ważności w stopniach kątów, z danych boków Tróykąta.

317. Aby uniknąć braniá połowy, lub wedwóynasób kątów Tróykąta, szukam

zamiast cienciw inszych liniy, do których boki Tróykąta byłyby proporcyonalne, i takich, któreby się właściwie ściągały do kątów tegoż Tróykąta. Kąt we środku koła opisanego na Tróykącie, zamykaiący ramionami swemi ten łuk, którego cienciwą ieſt bok ieden tegoż Tróykąta, kąt mówię taki, dwa razy iest większy od tego, który przy okręgu koła naprzeciw ſtoi tegoż boku Tróykąta; a zatem gdybyśmy ten kąt we środku przecięli liniią na dwie równe części iedna takowá część byłaby równá tamtemu kątowi Tróykąta. Bok tenże Tróykąta byłby proſtopadły do linii przecinaiącey kąt na dwie równe części; a ta liniiá przecięłaby go na dwie także równe części. Toż samo przyſtósować možná i do inszych dwóch boków tego Tróykąta. W ten sposób wyſtawiono sobie boki Tróykąta, względem kątów im przeciwnych.

318. *Defin.* Wziąwszy łuk koła iakikolwiek, ieżeli od iednego końca tego łuku, ſpuścimy proſtopadłą na promień przechodzący przez drugi koniec tegóż łuku; ta proſtopadłá má nazwisko *Sinus* (f) a po Polſku nazwać ią možná *Wſtawą* tego

(f) Wyráz tén *Sinus* stąd podobno má swóy początek: Połacinie *Ciénciwa* nazywá się *Jnscripta*; a połowa ciénciwy, *ſemiſsis Jnſcriptae*, dlá skrócéniá pisano može dá-tego łuku, że się wstáwiá między końcem iednym łuku, kąt mierzącego, i między promieniém przez drugi koniec tegoż łuku przechodzącym,

Niech będzie AB łuk koła; prostopadłą BD, spuszczoną od końca B tego łuku, na promień CA, przechodzący przez drugi iego koniec A, nazywać będziemy *wstawą* tego łuku. Tab. XVIII. Fig. 1.

319. *Wniosek* 1. Wstawa łuku równá się połowie cięciwy łuku inszego, dwa razy większego iak na przykład Wstawa BD, łuku BA, równá się połowie cięciwy BE, łuku dwa razy większego BAE.

320. *Wniosek* 2. Wstawy łuków rosną od 0, aż do 90°, a ponieważ wstawa stopniów 90, równá się promieniowi, i iest náywiększą, nazywa się dlá tego *Wstawą całą* (Sinus totus.)

321. *Wniosek* 3. Wstawy łuków większych od czwártey części okręgu koła, zmnieyszaią się coráz bardziey zacząwszy od 90° aż do 180°; tak dalece, że Wstawa

---

wniéy *S. Jns.* Przepisuiący iákié dzieło Matematyczné, nie wiedząc znaczéniá wyrazu tego skróconégo, opuścił punkt oddzielaiący té dwa wyrazy, i dáwszy słowy *Sins* zakończénié łacińskié, napisál *Sinus*, i stąd potém wzięté podobno było to nazwisko.

ſtopniów 180° równá się $\frac{0}{0}$. Wſtawa zaś każdego łuku większego od 90°, a mnieyszego od 180° ieſt ta sama, która i łuku mnieyszego od 90°, a spełniaiacego łuk piérwszy do 180°. J tak na przykład Wſtawa łuku 100°, taż sama iest co i łuku 80° wſtawa łuku 120° ta sama, co i łuku 60° i t. d. Takowé *spełniénié* łuku do 180° albo do pół okręgu koła, nazywá się po łacinie *Supplementum arcûs*

Co się tycze łuków większych od półokręgu koła, o tém nié ma potrzeby mówić w tych początkach.

322. *Wniosek* 4. Ponieważ promiéń na przykład CF, ieſt Wſtawą náywiększą ze wszyſtkich, czyli Wſtawą ſtopniów 90°, Wſtawa zaś od łuku AFb, większégo od czwartéy części tego okręgu, ieſt ta sama, co i łuku ab, mnieyszégo od czwártéy części tegoż okręgu; (który to łuk oſtatni spełniá piérwſzy do półokręga), idzie zatém, że do ułożéniá Táblicy na wstawy łuków dosyć wyznaczyć wſtawy tych łuków, które są mnieyszé od 90°.

323. *Wniosek* 5, Wſtawy łuków podobnych, w kołach odmiénnych, tak się maią do siebie, iak tychże kół promiénie. Jeżeli tedy mámy Táblicę wſtáw podług promiénia podzielonégo na pewną liczbę części równych; wynáydziémy przez

regułę

regułę trzech i wyſtawy podobnych łuków, podług innego promienia.

324. *Wniosek 6.* Ponieważ kąt we śrzodku, na przykład ACB, tyle ſtopniów w sobie zamyka, co i łuk AB, który go mierzy, i iest mu proporcyonalny; będzie więc wſtawa łuku AB, Wſtawą także i kąta ACB.

Wſtawa tedy kąta, iest proſtopadła, ſpuszczona od punktu iakiego w iednym z ramion iego, do drugiego ramienia, biorąc za promień odległość tego punktu od wierzchołka kąta; Cokolwiek zatem powiedziało się o wſtawach łuków, wszyſtko to przyſtósować można i do wſtaw kątów. J tak, Wſtawy kątów rosną od 0, aż do wſtawy 90°; która się równa promieniowi, zmnieyszaią się znowu zacząwszy od wſtawy 90°, aż do wſtawy 180. (która ieſt $= 0$;) i wſtawa kąta roztwartego, ta sama iest, co i kąta oſtrego, który tamtego spełnia, do 180°.

Wſtawy równych kątów, są do siebie, iak liniie wzięte za promienie.

A ieżeli dwie liniie są wſtawami dwóch kątów, względem tegoż samego promienia, czyli Wſtawy całey; te liniie tak się do siebie mieć będą, iak Wſtawy tychże dwóch kątów.

325.

§25. *Twiérdz.* 1. W każdym Tróykącie boki tak się maią do siebie, iak wſtawy kątów przeciwnych tymże bokóm.

Tab. XVIII. *Fig.* 2. Niech będzie Tróykąt ABC; bok iego na przykład AC, tak się má do boku BC =iak wſtawa kąta B, do wſtawy kąta A.

Dowodz: z wykréśléniém. Na danym Tróykącie opiszmy koło, i poprowádźmy śrzednicę CD, i ciénciwy DA, DB. kąty: BDC, BAC są równé, bo są w okręgu, i zamykaią ramionami swémi iednakowy łuk BC. Dlá téyże przyczyny równé są także i kąty: ADC, ABC. Oprócz tego, kąty: CBD, CAD są proſté, bo są w półkole; więc Liniie CB, CA, będą wſtawami kątów: CDB, CDA względém téyże saméy wſtawy całéy, czyli promiénia CD; a zatém tak się mieć będą do siebie té liniie, iak wſtawy kątów A i B.

Możná ieſzcze i naſtępuiącym ſposobém tego ſamégo dowiéśdź.

Opisáwszy koło na danym Tróykącie, połowy boków iego, będą wſtawami połowy kątów we śrzodku im przeciwnych; a zatém będą téż i wſtawami kątów Tróykąta przeciwnych tymże bokóm, (biorąc za Wſtawę całą, promiéń tego koła.) Są tedy do siebie połowy tych boków, iak wſtawy kątów im przeciwnych: a że połowy tak się maią do siebie, iak ich całości;

więc

więc też i całe boki Tróykąta, tak się do siebie mieć będą, iak wstawy kątów przeciwnych tymże bokóm.

326. *Wniosek.* Za pomocą Táblicy na Wstawy ułożoney podług promienia iakiegokolwiek, można doyśdź stósunku boków Tróykąta, którego kąty są nam iuż wiadome; a zatem, gdy ieszcze i bok ieden tegoż Tróykąta iest wiadomy: będzie można znaleźć i dwa insze iego boki.

327. Jakoż rachowano i ułożono Táblicę Wstáw podług promienia podzielonego n p. na 100 000 części równych. Ten a nie większy podźiáł, zwłászcza w táblicach do zwyczaynieyszego używania ułożonych, znáyduie się. Żeby zaś rachunek krótszym i łatwieyszym uczynić; przydano i táblicę logarytmów, Wstáw tychże. W takowych iednak táblicach, gdzie i logarytmy wstáw znáyduią się, uważano promień, albo wstawę całą, iak gdyby na 10 000 000 000 części równych była podzielona, a zatem, iak gdyby logarytm iey, miał za cechę czyli początkową liczbę: 10, która oznácza, iż wstawa zawiera w sobie liczbę części równych złożoną z znaków liczebnych iednym więcey; tak, iak cecha logarytmu wstawy całey, toiest, liczba: 10, oznácza, iż wstawa cała zamyka w sobie znaków liczebnych 11, zamykaiąc części równych: 10 000 000 000.

Nie

Nie wykłádá się teráz iak ułożoné są té táblice; podany tylko będzie sposób ich używaniá. W táblicach tych znáyduiémy na dwóch kartach iednéy obok drugiey, w dwóch różnych słupach czyli kolumnach, Wstawy dwóch kątów, których summa czyni kąt prosty, albo 90°. Táblica tych wstáw po lewéy ręce kart, rozciągá się od 0°, aż do 45,°. Táblica zaś po prawéy ręce idzie wspak od 90°, aż do 45. Té kąty których stopnie wyrażoné są po prawéy ręce, nazywaią się *dopełnieniém* tamtych (complementum) do 90°; a ich wstawy *wstawami dopełniéniá* (sinus complementi) czyli krócéy, *Dostawami* (Cosinus.)

328. Summa kwadratów, z Wstawy, i z dostawy łuku, albo kątá równá się kwadratowi promiénia, czyli wstawy całéy.

Táb. XVIII. *Fig.* 1. Bo ponieważ dwa łuki, n. p. AB, i FB, (albo dwa kąty: ACB, i FCB) są dopełniéniém iedén drugiégo; Wstawa BG, łuku FB, równá iest linii CD; kwadrat zaś linii CD z kwadratém wstawy BD równá się kwadratowi promiénia BC: więc i summa kwadratów z BG i BD, równá będzie kwadratowi promiénia BC.

329. *Przystósowanié*. Maiąc na polu wymierzoną podstawę, i kąty któré czyni podstawa z dwiéma liniiami wykie-

ro-

rowanémi ku iednému celowi, znaléźć tych ostatnich dwóch liniy długość?

Niechby Tróykąt ABC, wyrážáł Tróy- kąt na polu zawarty między podstawą wymiérzoną i dwiéma liniiami dążącémi ku iednému celowi. Táb. XVIII. Fig. 3.

Niech będzie AB = 1200
A = 50°
B = 72°
więc A+B = 122°
a zatém — 180° — (A+B) = 58° = C
Wstawa kąta C: Wstawy kąta A = AB: BC wsta: C: wsta: B = AB: AC

Log: AB = 3,079 181 2.
Log: wst: A = 9,884 254 0.

Summa = 12,963 435 2.
Log: wst: C = 9,928 420 5.
Różnica = Log:BC = 3,035 014 7.
A zatém bok BC = prawie 1084.

Z piérwszéy tedy proporcyi znáydziémy bok BC, dodaiąc do siebie logarytmy wstawy A, i boku AB, a odiąwszy od ich summy, logarytm wstawy C; rożnica albowiém dwóch logarytmów ostatnich, pokazuie logarytm boku BC, który bok w táblicy osobnéy logarytmów liczb, znáydziémy przy tymże logarytmie = 1083, 96. toiest prawie = 1084.

Po-

Podobnym sposobém znáydziémy z drugiéy proporcyi, i drugi bok AC = 1 345, 76.

Dlá skrócéniá rachunku, można z początku zaráz odiąć logarytm wstawy kąta C, od logarytmu liczby wyrážaiącéy bok AB, dodáwszy do céchy tego drugiégo logarytmu liczbę: 10 (co na pamięci mieć potrzeba:) Powszechnie zaś dodaiąc osobno logarytmy wstáw kątów A i B, do logarytmu liczby wyrážaiącéy bok AB, dochodziémy dwóch boków inszych.

Možná także wygodnie użyć w rachunkach Trygonometrycznych dodáwaniá, zamiást odeymowaniá, kładąc dopełniéniá logarytmów. (g) na mieyscé tych, które przez nich są dopełnioné.

J tak w piérwszym przykładzie, ponieważ wstawa kąta C, iest piérwszym wyrazém proporcyi, z któréy szukámy boków AC, albo BC; podstawa zaś AB iest iednym z wyrazów śrzednich, a drugim wstawa kąta A, lub B; ieżeli tedy do logarytmu podstawy AB, dodámy do-

---

(d) Dopełniéniém logarytmu nazywá się ta liczba, którá z nim razém czyni logarytm promiénia, iak na przykład, 0,071 579 5 z logarytmém wstawy C. 9,928 420 5 = 10,000 000 00.

dopełnienie logarytmu wstawy kąta C; ta summa dodana ieszcze do logarytmu wstawy kąta A, lub B, będzie logarytmem boku BC, albo AC, odiąwszy tylko logarytm promienia.

Przykład. Dopełnienie logarytmu wstawy - - C = 0,071 579 5.
Log: AB = 3,079 181 2.
Log: wst: A = 9,884 254 0.

Summa zmnieyszona liczbą 10. - = 3,035 014 7 = Log: BC.

Więcey ieszcze podobnych przykładów Ucznióm podadź należy.

330. *Przyst:* 2. Maiąc dane kąty, i bok ieden Tróykąta, znaleźć powierzchnią iego przez iednę proporcyą.

Niech będzie ten sam, co wyżey, Tróykąt, którego wiadome nam są kąty i podstawa AB: szukaymy powierzchni tego Tróykąta, spuściwszy prostopadłą CD.

Wst: C: Wst: A = AB: BC.
Promień: Wst: B = BC: CD.
Więc Pr: + Wst: C: wst: A + wst: B
- = AB: CD.
= AB^2: AB + CD
= AB^2:2. Powierzchni

A za-

A zatém, 2 Pr.+ wst. C: wst. A +
- - wst. B = AB²: Powierzchni.
Log. AB = 3. 079 181 2.

Logarytm tén dwa razy wzięty =
Log: - Ab² = 6, 158 362 4.
Log: Wst. A = 9, 884 254 0.
Log: Wst. B = 9, 978 206 3.
Summa = 26, 020 822 7.

Log: 2 = 0, 301 030 0.
Log. Wst. C = 9, 928 420 5.
Log. Pr. = 10, 000 000 0.
Summa 20, 229 450 5.

Różnica tych dwóch summ: 5, 791 372 2, iest logarytmém liczby, która oznaczy powiérzchnią, a ta będzie = 6 185 46. blizko.

Proporcyá tá, z któréy doszliśmy powiérzchni Tróykąta, tak się wyráźá: Prostokąt z Wstawy całéy, czyli z promiénia, i z wstawy kąta przeciwnégo iednému bokowi, tak się má do prostokąta wstáw dwóch kątów przy tym boku; iak się má ténże sám bok, do prostopadłéy nań spuszczonéy od wiérzchołka kąta przeciwnégo: albo téż, prostokąt z promiénia, i z wstawy kąta przy wiérzchołku, tak się má do prostokąta z wstáw dwóch kątów przy podstawie;
iak

iak się ma podstawa do wysokości Tróykąta.

331. *Przyſt.* 2. Maiąc dane w liczbach dwa boki Tróykąta, i kąt między niemi zawarty, znaleźć powierzchnią tego Tróykąta przez iednę proporcyą.

Niechby W Tróykącie ABC, znane były boki: AB, AC, i kąt A.

Spuśćmy na podſtawę AB, proſtopadłą CD; będzie

Pr. Wſt. A=AC: CD.
=AC×AB: CD×AB.
=AC×AB: 2 powierzchni
A zatem
Pr. Wſt. A=AC×AB: $\dfrac{\text{powierzchni.}}{2.}$

To ieſt: tak się ma promień do wſtawy iednego z kątów Tróykąta, iak połowa proſtokąta z dwóch ramion kąta danego, do powierzchni Tróykąta.

Niech będzie AB=384.
AC=405.
A=50°.

Log. $\frac{1}{2}$ AB = Log. 192=2,283 301 2.
Log: AC= - - 2,607 455 0.
Log. Wſt. 50° = - 9,884 254 0.

Summa

Summa zmnieyszoná liczbą 10. (toieſt logarytmém promiénia) =4,775 010 2. a zatém powiérzchniá któréy szukaliśmy =5 9767.

Tab.XVIII. Fig. 4. 332. *Przyſtóś*. 4. Maiąc dany Tróykąt proſtokątny, którégo wiadomá ieſt przeciwproſtkątná i iedno ramié kąta proſtégo, znaléźć inszé dwa kąty, i bok trzeci.

Wziąwszy w tym Tróykącie przeciwproſtokątną za promiéń, ramiona kąta proſtégo, będą oráz wſtawami kątów im przeciwnych; a zatém gdyby daná przeciwproſtokątná była wyrażoná przez 100 000, i znaczyła promiéń na tylé częśći równych podzielony; szukaiąc w táblicach między wſtawami, lub doſtawami, znaleźlibyśmy liczbę wyrážaiącą bok drugi dany, a liczba ſtopniów odpowiadaiącá téy wſtawie, pokázałaby wážność w ſtopniach, kąta przeciwnégo bokowi danému.

Gdyby zaś przeciwproſtkątná, przez inszą liczbę była wyrażoná, a nie przez tę, któráby się równała wſtawie całéy w táblicach znáyduiącéy się; w takim razie użyćby trzeba naſtępuiącéy proporcyi:

BC: AC = Pr. wſt. B.

Niech będzie BC = 1548.

AC

AC = 1248.

Log. AC = 3,096 214 6.

Przydáwszy log. Pr. = 13,096 214 6.

Log. BC = 3,189 771 0.

Różnica = 9,906 443 6. = Log. Wſt: B.

B = 53°, 44′ — toieſt, 53 ſtopniów, i coś mniéy niż 44 minut.

C = 36°, 16′, + toieſt 36 ſtopniów, i coś więcéy niż 16 minut.

Pr. wſt. C = BC: AB.

Log. BC: = 3,189 771 0.

Log. wſt. C = 9,771 987 2 +

Odiąwszy Log. promiénia będzie tych dwóch Logarytmów Summa = 2,961 758 2 + = Log. AB: a zatém AB = 915,7 +

Jeśli tylko samégo boku AB, znalezié-nié ieſt potrzebné, możná ſkrócić rachunek, biorąc summę logarytmów ſummy i różnicy przeciw proſtkątney, i boku danégo, i dzieląc tę ſummę przez 2: któré

to

to działanie na tém się zasádzá, że kwadrat boku AB, równá się różnicy kwadratów przeciw prostkątnéy BC, i boku drugiégo AC, albo (co na iedno wychodzi) prostokątowi z summy ich i z różnicy, toiest prostokątowi z summy BC + AC i z różnicy: BC — AC. Summa tedy logarytmów summy: BC + AC, i różnicy BC — AC będzie logarytmém kwadratu, AB^2, a zatém połowa téy summy logarytmów, będzie logarytmém Piérwiastku, toiest boku AB.

$$BC + AC = 2796.$$

$$BC - AC = 300.$$

$$\text{Log. } (BC + AC) = 3{,}446\,537\,2.$$

$$\text{Log. } (BC - AC) = 2{,}477\,121\,3.$$

$$\text{Summa} = 5{,}923\,658\,5.$$

$$\text{Połowa} = 2{,}961\,829\,2. = \text{Log. } AB.$$

A zatém bok AB = 915,8+.

Porównywaiąc z sobą tę ważność dwoiaką boku AB, która z dwóch odmiénnych rachunków wypádá, postrzegamy różnicę mnieyszą niż $\frac{1}{9000}$ całéy ważności; która to różnica, ztąd pochodzi, że w piérwszym rachunku braliśmy kąty

B i C

B i C w samych stopniach i minutach piérwszych nie szukaiąc minut drugich.

333. *Przystós: 5*. Maiąc dany w Tróykącie roztwartokątnym kąt roztwarty, bok iému przeciwny, i iedno z dwóch ramion iego, znaléźć drugié ramié i dwa inszé kąty?

Niech będzie Tróykąt ACB, którégo dany iest kąt roztwarty CAB, bok CB iému przeciwny, i ramié iedno AC; znaléźć inszé kąty: B i C, i bok AB. Tab. XVIII. *Fig.* 5.

Sposób 1. postępowania. Z téy proporcyi, BC: AC = Wst: A: wst: B; dóydziémy kąta B, a odiąwszy od 180°, summę kątów A i B, reszta pokáże kąt C.

Z drugiéy proporcyi, wst: A: wst: C = BC: AB, wiadomy będzie bok AB.

Sposób 2. Spuśćmy prostopadłą CD, na bok przedłużony BA.

W Tróykącie prostokątnym ACD, którégo bok AC i kąt A iest wiadomy, możná doyśdź dwóch boków CD i AD, ze dwóch następuiących proporcyy.

Pr. Wst: A = AC: CD.
Pr. Dostawy A = AC: AD.

Maiąc wiadomą w Tróykącie prostokątnym BCD, przeciwprostkątną BC, i iedno kąta prostégo ramié. CD, będzie można doyśdź (332.) boku BD, od którégo odciąwszy AD, znaydziémy bok AB.

Przykłady wyżéy podané iuż dosyć obiaśnić były powinny, iak daléy sobie w tém działaniu postąpić.

Táb. XVIII. Fig. 6. Podobnégo sposobu użyć należy gdy kąt ostry iest dany, i bok iému przeciwny większy od drugiégo boku danégo. Ta tylko iest różnica, że w drugim sposobie postępowaniá liniiá AB, będzie summą, a nie różnicą linii BD, AD.

Táb. XVIII. Fig. 7. Gdy zaś bok CB, przeciwny kątowi danému A, mnieyszy iest od boku danégo AC, który służy za ramié tému kątowi; w takim razie wstawa kąta B wynalezioná z proporcyi: CB : AC = wst. A wst. B może bydź równie wstawą dwóch kątów B, B, iednego ostrégo, a drugiégo roztwartégo, i tamtén spełniaiącégo do 180°. Podług drugiégo sposobu postępowaniá, liniiá AB, AB może bydź summą, albo różnicą linii AD, BD, albo BD: co daie dwa odmiénné Tróykąty: ACB, ACB: które lubo maią w sobie dwa boki dané i kąt ostry także dany; różnią się iednak trzecim bokiém, i dwoma inszémi kątami. Zgádzá się to zupełnie z tém, co się iuż w Geometryi okázało w Rozd. II.

334.

334. *Przystósowanie 6.* Maiąc daną liczbę boków w wielokątach foremnych, wyznaczyć ważność ich boków względem promienia koła, w które też wielokąty mogą bydź wpisane.

Rozwiązanie. Połowa boku każdego w foremnym wielokącie, w koło wpisanym, iest wstawą połowy kąta we śrzodku tegoż wielokąta, wziąwszy za promień, promień koła na tym wielokącie opisanego.

Liczba boków Wielokąta.		*Połowy kątów we śrzódku*		*Wst: Połowy kątów we śrzodku*
3	-	60°	-	86602.
4	-	45°	-	70711
5	-	36°	-	58779
6	-	30°	-	50000
7	-	$25^\circ \frac{5}{7}$	-	43388
8	-	$22^\circ\frac{1}{2}$	-	38671
9	-	20°	-	34202
10	-	18	-	30902
11	-	$16^\circ\frac{4}{11}$	-	28171
12	-	15°	-	25882
15	-	12°	-	20791
16	-	$11^\circ\frac{1}{4}$	-	19509
20	-	9°	-	15643
24	-	$7^\circ\frac{1}{2}$	-	13053
i t. d.		i t. d.		i t. d.

Te wstawy, dwa razy wzięte, są bokami wielokątów wpisanych w koło, którego promień=100 000.

Niechby był Tróykąt proſtokątny, którego wiadomé są dwa ramiona kąta proſtégo; trzeba znaléźć przeciw proſtkątną, i dwa inszé kąty.

Już się wyżéy pokázało, że maiąc danė dwa boki w Tróykącie proſtokątnym, znáyduie się przeciw proſtkątná, dodawszy do siebie dwa kwadraty tychże boków, i z summy wyciągnawszy piérwiaſtek kwadratowy. Ale gdy liczby oznaczaiące wielkości boków danych, są bardzo wielkié; nie mało czasu trzebaby na podniesiénié tych liczb do kwadratu; a że i summa tych kwadratów będzie bardzo wielká, iż z niéy piérwiáſtku kwadratowégo wyciągnąć przez logarytmy niémożná, a wyciągać go zwyczaynym sposobém długáby prácá była; przeto dlá większéy wygody, w téy i wielu inszych okolicznościach, wyrachowano w tablicach logarytmów, i inszé ieszcze, oprócz wſtáw, liniie.

335. *Defin.* Niech będzie łuk koła iakiégo, a od iednégo końca, tego łuku niech będzie prowadzoná ſtyczná, tak daleko, aż się spotká z promieniém przedłużonym, i przechodzącym przez drugi koniec tego łuku. Ta część ſtyczney zamkniętá między punktém dotknięciá koła, i promiéniém przedłużonym nazywá się *Styczną Tróykątmiérſką*) Tangens Trigonometrica) albo tylko *Styczną* tego

łuku.

łuku. Liniiá zaś zawartá między śrzodkiém koła, i między punktém, gdzie promień przedłużony przeciná ſtyczną, nazywá się *Sieczną Troykątmiérſką*. (Secans Trygonometrica) albo tylko *Sieczną* tego łuku.

Jtak liniie AT, CT są, piérwszá ſtyczną, a druga sieczną łuku AB. Jest także piérwszá liniiá ſtyczną, a druga sieczną kąta ACB, biorac za promień liniią CA. Ponieważ łuk FB, ieſt dopełniéniém do 90°, łuku AB: ieżeli tedy poprowadzimy ſtyczną FP, aż do iéy spotkaniá się z promieniém CA przedłużonym; liniiá FP, będzie ſtyczną, a CP sieczną dopełnieniá łuku AB, a inaczéy ieſzcze piérwszá nazywá się *Doſtyczną* (cotangens) drugá zaś *Dosieczną* (Consecans) łuku AB, Táb. XVIII. *Fig. 1.*

Jak względém wſtáw, tak względém ſtycznych i siecznych, uważano w táblicach, iedné łuki tylé przewyższaiącé 45°, ilé drugié, nie dochodzą 45°; uważano zatém i co do ſtycznych, i co do siecznych, dopełnieniá iednych łuków względém drugich.

336. *Na przykład*; Tróykąty DCB, ACT są podobné; więc.

1. DC: DB=AC: AT, toieſt doſtawá tak się má do wſtawy, iak promień do ſtycznéy.

2. DC: CB=AC: CT, czyli dostawa do promienia, iak promień do sieczney.

Tak też dla podobieństwa Tróyką-tów: BCG, PCF będzie.

1. Wstawa do dostawy iak promień do dostyczney.

2. Wstawa do promienia, iak promień do dosieczney.

Maiąc styczne, łatwo można wyrachować dostyczne. Bo, ponieważ podobne są Troykąty ACT, FPC, będzie, AT: AC= CF: FP, toiest, promień będzie śrzednim Geometrycznym między styczną i dostyczną; Logarytm tedy promienia dwa razy wzięty, równa się summie logarytmów styczney i dostyczney.

337. Styczne rosną, zacząwszy od o, aż do styczney 45°, która się równa promieniowi, (bo w tym razie Tróykąt ACT będzie równoramiennym) i daley ieszcze rosną aż do 90°, których styczna będąc od promienia CF równoodległą, nigdzie się z nim nie zeydzie: a zatem większą iest, od wszelkiey długości któraby wyznaczyć można.

Sieczne podobnym, także iak i styczne rosną sposobem.

338. Niechby był Tróykąt iakikolwiek prostokątny, na przykład CAB, którego wiemy w liczbach dwa ramiona kąta prostego CAB. Tab. XIX. Fig. 1.

Wziąwszy za promień, na przykład liniią CA, liniiá AB będzie styczną, a liniiá CB, sieczną kąta C.

Gdybyśmy tedy mieli liniią CA, toieſt, promień wyrażony w táblicach przez 100000; liczba stopniów, przy którey znaleźlibyśmy liczbę wyrážaiącą liniią AB, czyli styczną, pokázałaby wáżność kąta C: i znowu liczba między siecznémi odpowiedaiącá kątowi C, oznaczyłaby ważność linii CB.

Gdyby zaś liniiá AC, nie była w tych liczbach wyrażona, w których wyrażoná iest wstawa cała, czyli promień táblic, w takim razie trzeba zrobić dwie proporcye, piérwszą AC: AB = Pr. styczney C, z którey dóydziémy ważności kąta C, drugą Pr: Siecz: C = AC: CB.

Przykł: Niech będzie AC = 8464,
AB = 5678.

Logarytm AB z przydanym Log: promienia iest - 13, 754 195 4.
Log. AC - 3, 927 575 7.

Ró-

Różnica, czyli Log. styczné'y - - - - - - - - - C = 9, 826 619 7.
a zatém kąt C = 33°, 51.

Log. AC = 3, 927 575 7.
Log. siecz: C (odciąwszy Log. Pr.) = 0, 080 661 0.

Summa — 4, 008 236 7. =

Log: CB; więc CB = 10191. +

339. *Uwága.* Gdyby przyszło wyciągnąć piérwiástek kwadratowy z summy kwadratów $AC^2 + AB^2$, znaleźlibyśmy ważność przeciw prostkątnéy BC, większą niż 10192, a mnieyszą niż 10193; a zatém nie zgádzaiącą się z wáżnością wyżéy znalezioną, 10191 +; co stąd pochodzi, że wyznaczaiąc wáżność kąta C, opuściły się minuty drugié, i przestało się na samych stopniach i minutach piérwszych: i to opuszczénié sprawiło, że wáżność BC, mnieyszá iednością prawie wypadła; ale uchybiénié takowé ieft bardzo małé, gdyż od prawdziwéy wáżności różni się tylko mało co więcéy iak $\frac{1}{10000}$.

Poprawa téy omyłki taká bydź może.

Ponieważ różnica między logarytmém styczné'y C, znalezionym, i logarytmém táblic naybliższym, iest 874, a różnica dwóch

dwóch logarytmów táblic mnieyszégo i większégo od logarytmu znalezionégo, iest: 2730°, więc będzie, 2730: 874 = 60'': 19'', a zatém kąt C = 33° 51' 19''

Log. - AC = 3, 927 575 7.
Log: siecz: C
(odciąwszy Log.P.) = 0, 080 688 0.

Sum: czyli Log: BC = 4, 008 263 7.
więc BC = 10 192+ = 10 192,1

340. *Przystósowanié.* W Tróykącie, w którym wiadomé są dwa boki, i kąt zawarty między niémi, znaléźć bok trzeci, i dwa inszé kąty?

Niech będzie Tróykąt ACB, w którym dané sa dwa boki AC, BC, i kąt C, trzeba stąd doyśdź boku AB, i dwóch inszych kątów. Táb. XIX. *Fig. 2.*

Rozwiązanié. Spuściwszy prostopadłą BD, na bok AC, w Tróykącie prostokątnym BCD wiémy przeciwprostkątną BC, i kąt dany C, a zatém doydziémy dwóch boków BD, DC: a że wiadomá także iest podstawa AC; więc odiąwszy CD od AC znáydziémy AD; i znowu w Tróykącie prostokątnym ADB z wiadomych dwóch ramion kąta prostégo, doyśdź będzie można (338) inszych dwóch kątów, i przeciwprostkątnéy AB.

Tén

Tén sposób w tym iest nie wygodny, że trzeba cztéry uczynić proporcye, aby doyśdź boku AB. Jako zaś to, co z każdéy z piérwszych trzech proporcyy wypadá, wchodzi w czwártą proporcyą, tak i omyłki tam popełniané, tu wpływaią.

Ażeby więc w tym, co z ostatniéy proporcyi wypadnie, uniknąć uchybieniá, należy iak naydokładniéyszy rachunek czynić w trzech piérwszych. J to ieszcze przydadź potrzeba, że w tym sposobie działaniá szukać się musi dwóch odcinków AD i DC, iako téż i wysokości BD, lubo o nie nié masz zapytaniá.

§41. Gdyby przyszło dochodzić saméy tylko linii AB, w tym razie możnáby użyć następuiącégo sposobu.

$AB^2. = AC^2 + BC^2 - 2AC \times CD.$

A że iest BC: CD=Pr: Dostawy BCD

więc $2AC \times BC : 2AC \times CD = $ Pr. Dost:BCD.

a zatém $2AC \times CD = \frac{2AC \times BC \times \mathit{Dost.}\ BCD}{Pr.}$

A stąd $AC^2 = AC^2 \times BC^2 - \frac{2AC \times BC \times \mathit{Dost.}\ BCD.}{Pr.}$

Że

że zaś tey ostatniey ilości nie można zawsze rozłożyć na insze mnożące ią ilości; więc przez same logarytmy działania tego wykonać w tym razie nie możemy;

W takowym tedy przypadku, używa się pospolicie następuiącey proporcyi.

342. *Twierdz*: 2. Summa dwóch boków Tróykąta, tak się ma do różnicy tychże boków; iak styczna połowy summy dwóch kątów przeciwnych tym bokóm do styczney połowy różnicy tychże kątów.

Trzeba tu naprzód wyłożyć ucznióm, co się rozumie, przez wyrazy tey proporcyi; a w szczególności pokazać im, że stósunek między stycznemi połowy dwóch kątów, albo dwóch łuków nie iest ten sam, co między stycznemi całych tych kątów albo łuków. Widocznie się to okazuie w tablicach Trygonometrycznych.

Niech będzie Tróykąt ABC, w którym bok AB, mnieyszy iest od boku AC; w tym Tróykącie będzie. Tab. XIX. *Fig.* 3.

$$AC+AB:AC-AB=\text{stycz}n:\frac{B+C:}{2}\ \text{stycz}:\frac{B-C.}{2}$$

Dowodz: Wziąwszy AD=AB, i pociągnąwszy BD Tróykąt równóramienny ABD, i Tróykąt nie równoramienny ABC, maią kąt spólny A: Więc summa kątów ABD, ADB, równa się summie kątów

tów ABC, ACB; a zatém iedén z kątów Tróykąta równoramiénnégo, n p. kąt ABD, równá się połowie summy dwóch kątów ABC, ACB Tróykątą ABC. Kąt ABC, większy z dwóch kątów ABC, ACB, składá się z połowy summy, i z połowy różnicy tychże dwóch kątów: a że kąt ABD, ieſt połową ich summy; więc kąt CBD będzie połową ich różnicy.

Liniiá DC ieſt różnicą dwóch boków AC, AB; przeciąwszy ią na dwie równé części w punkcié E, liniiá CE będzie połową różnicy dwóch boków AC, AB. A że bok większy AC, równá się połowie summy wráz z połową różnicy tychże dwóch boków; więc AE będzie połową ich summy, gdy CE ieſt połową różnicy; a zatém linii AE, CE tak się maią do siebie, iak połowa summy boków AC, AB, do połowy ich różnicy. Na tém więc całé działanié rozchodzi się, aby pokázać, iż ſtyczné kątów ABD CBD, tak się maią do siebie, iak liniie. AE, CE.

Z Punktu A, ſpuśćmy na BD, proſtopadłą AF, przedłużywſzy ią aż do G. Poniewáż Tróykąt BAD ieſt równoramiénnym; liniie BF, FD będą równé; a że też są równé liniie DE, CE; więc pociągnąwszy linią FE, podobné będą Tróykąty: BDC, FDE, i liniie FE, BC równoodległé; a zatém i Tróykąty AFE, AGC są podobné, będzie więc AE: CE = AF:

AF: FG. że záś wziąwszy za promień liniią BF, liniie FA, FG. będą ſtycznémi kątów: FBA, FBG, albo ABD, CBD; więc AE:CE=ſtycz:ABD:ſtycz: CBD; albo

$$\frac{AC+AB}{2}:\frac{AC-AB}{2}=\text{ſtycz}:\frac{B+C}{2}:\text{ſtycz}.\frac{B-C}{2}$$

albo nakoniec,

$$AC+AB:AC-AB=\text{stycz}:\frac{B+C}{2}:\text{ſtycz}:\frac{B-C}{2}.$$

343. *Przyſtósowanié* 1. Gdy dwa boki AC, AB, są wiadomé, będzie wiadomá ich ſumma AC+AB, i ich różnica AC—AB; gdy także wiémy kąt A, wiedzieć tém samém będziémy summę i połowę summy dwóch inſzych kątów B i C, a zatém i ſtyczną połowy téy ſummy; więc i czwártégo wyrazu proporcyi poprzedzaiącéy, toieſt styczné́y połowy różnicy tych dwóch kątów doydziémy: a stąd wiadomá nám będzie i połowa różnicy tych dwóch kątów. Wiedząc zaś połowę ich ſummy, i połowę różnicy, gdy połowę ſummy do połowy różnicy dodámy, znáydziémy kąt większy B, á odiąwszy połowę różnicy od połowy ſummy, okáże się kąt mnieyszy C. Znáydziémy nakoniec i bok trzeci BC.

Przykł: Niech będzie - -

- AC=2452. AC+AB=4296.
AB=1844, AC—AB= 608.
A= 44° B + C= 136°.

$$\frac{B+C}{2}= 68°.$$

4296:

$$4296 : 608 = \text{stycz.}\, 68^{\circ} : \text{stycz:}\, \frac{B-C}{2}$$

Log. stycz: $68^{\circ} = 10{,}393\,590\,4$,

Log: $608 = 2{,}783\,903\,6$,

Summa - - $13{,}177\,494\,0$.

Log: $4296 = 3{,}633\,064\,3$.

Różnica $= 9{,}544\,429\,7. =$

- - Log: stycz: $19.\ 18' +$ toiest i coś więcéy

$$\frac{B-C}{2} = 19^{\circ}.\ 18'.\ +$$

A że $\frac{B+C}{2} = 68^{\circ}$ więc

- - $B = 87^{\circ}.\ 18',\ +$

$C = 48^{\circ}.\ 42'. -$

Wst: C: wst. A = AB: BC

Log: AB = $3{,}265\,760\,9$.

Log: wst: A = $9{,}841\,771\,3$.

Summa $= 13{,}107\,532\,2$.

Log.

Log. wst. C= 9,875 792 7. —

Reszta, toiest Log: BC=3,231 739 5 +
BC= 1705+

Aby się przeświádczyć o dokładności tego działania szukáymy BC, i przez drugą proporcyą; wst: B: wst: A=AC: BC.

Log. AC=3,389 520 5.
Log. wst: A=9,841 771 3.

Summa= 13,231 291 8.
Log. wst. B=9,999 517.6 +

Reszta =3,231 774 2—
więc BC= 1705, 2 —

344. *Przystósowanié* 2. Wyznaczyć przez rachunek odległość dwóch mieysc nie dostępnych.

Widzieliśmy (w Rozd: XI.) że do tego trzeba było wymierzyć podstawę i wyznaczyć kąty, któré przy końcach podstawy czynią dwie liniie wykierowané ku dwóm punktóm, których odległości szukámy. Možná doyśdź i przez rachunek żądaney odległości.

Niech będzie AB podstawa wymierzoná, i wyznaczoné kąty: XAB i AB, XBA, i BA. Tab. XIX. *Fig.* 4.

Po-

Ponieważ w Tróykącie XAB, wiémy dwa kąty przy podstawie; odiąwszy więc ich summę od dwóch kątów prostych, albo od 180°, reszta pokaże kąt trzeci AXB.

Podobnym sposobém doydziémy i kąta AYB.

W Tróykącie AXB, maiąc wiadomą podstawę AB, i wszystkié kąty, można doyśdź dwóch inszych boków, a w szczególności linii AX.

Podobnie i w Tróykącie AYB z wiadomégo boku AB, i wszystkich kątów, można wyznaczyć dwa inszé boki, a w szczególności liniią AY.

W Tróykącie na koniec XAY znaiąc dwa boki AX, AY, i kąt XAY między niémi zawarty, (który iest różnicą między katém wyznaczonym XAB, YAB;) można doyśdź linii XY, toiest, żądanéy odległości.

Uwaga. Ponieważ wyznaczénié linii XY, zawisło od linii AX, AY; dokładność téż w wyznaczéniu linii XY, zawisła od téy dokładności, z którą dwie tamté liniie były wyznaczoné.

Przy-

Przykład. Niech będzie

XAB = 77° więc AXB = 49°.

YAB = 42° AYB = 36°.

YBA = 102° XAY = 35°,

XBA = 54°.

AB = 1200.

Wsta: AXB: wst: XBA = AB: AX.

Log: AB = 3, 079 181 2.

Log: wst. XBA = 9, 907 957 6.

Summa = 12, 987 138 8.

Log. wst. AXB = 9, 877 779 9.

Reszta = 3,109 358 9,=Lo:AX

AX 1286, 35.

Wsta. AYB: Wst. ABY = AB: AY.

Log. AB = 3, 079 181 2.

Log. Wst. ABY = 9, 990 404 4.

Summa = 13, 069 585 6.

Log. Wst: AYB = 9, 769 218 7.

Reszta = 3,300 366 9. = Log: AY.

Więc AY = 1996, 95.

Znalaższy bok AX = 1286, 35.

AY = 1996, 95.

W Kąt

Kąt między témi bokami zawarty XAY $= 35$.

$$\text{Będzie} \; - \; - \; AX + AY = 3283{,}30.$$
$$AY - AX = 710{,}60$$
$$AXY + AYX = 145^\circ.$$
$$\frac{AXY + AYX}{2} = 72^\circ \tfrac{1}{2}.$$

Więc (podług Twiérdz: 2. §. 342)

$3283{,}3 : 710{,}6 =$ Stycz: $72 \tfrac{10}{2}$: Stycz: - - - - $\dfrac{AXY - AYX}{2}$

Log. Stycz: $72 \tfrac{10}{2} = 10{,}501\ 277\ 7.$

Log. $710{,}6$ - $= 2{,}851\ 625\ 2.$

Summa $= 13{,}352\ 902\ 9.$

Log. $3{,}2833 = 3{,}516\ 310\ 6.$

Różnica $= 9{,}836\ 592\ 3. =$ Log: Stycz: $34^\circ 28'$.

Więc $\dfrac{AXY - AYX}{2} = 34\ 28'$.

A że iest $\dfrac{AXY + AYX}{2} = 72\ 30.$

Więc $AXY = 106\ 58.$

$AYX = 38\ \ 2.$

Ma-

Maiąc wiadomé wszystkié Kąty w Tróykącie XAY, i procz tego dwa boki: AX, AY; znáydziémy bok trzeci XY, toiest odległość, któréy szukámy; a to przez iednę z tych dwóch proporcyy.

Wst. AYX ; Wst. XAY = AX: XY

Albo, Wst. AXY: Wst. XAY = AY: XY.

Szukáymy boku XY, przez piérwszą na przykłád proporcyą; będzie

Log. -	AX =	3, 109 358 9.
Log: Wst.	XAY =	9, 758 591 3.
Summa	=	12, 867 950 2.
Log. Wst:	AYX =	9, 789 665 2.
Różnica	=	3, 078 285 0 = Log. XY.
Więc XY	=	1197, 525.

Zostaie ieszcze, do rozwiązaniá tén przypádek, w którym z trzech boków danych w Tróykącie, szukámy kątów iego.

Sposób zwyczaynie używány, zawisł na tém, aby szukać dwóch odcinków podstawy oddzielonych przez prostopadłą, na tę podstawę spuszczoną, od wiérzchółku kąta iéy przeciwnégo.

345. *Twiérdz: przybrané.* Podstawa Tróykąta, tak się má do summy dwóch boków iego, iak różnica tychże boków, do różnicy odcinków podstawy.

Táb. XIX. *Fig.* 5. Niech będzie Tróykąt ABC, w którym z wiérzchołka C, spuszczoná iest prostopadłá CD, na podstawę AB; w tym Tróykącie, AB: BC + AC = BC — AC: BD — AD.

Od punktu C, iak od śrzodka, promiéniém CA nakréślmy koło, które przetnie podstawę AB w punkcie G, bok BC, w punkcie F, a ténże przedłużony, w punkcie E.

Będzie zatém

BE = BC + AC (bo AC = CE;)

BF = BC — AC (bo AC = CF:)

BG = BD — AD (bo AD = DG:)

A ponieważ sieczné BA, BE od iednégo punktu B wychodzą; więc (231) BA: BE = BF: BG, toiest, tak się má podstawa BA do summy dwóch boków = BE; iak się má różnica tychże boków = BF, do różnicy BG odcinków, które czyni prostopadłá CD spuszczoná z wiérzchołka kąta C na Podstawę.

346. *Przystósowanié.* Ponieważ odcinków BD, AD, wiémy summę i różnicę; wie-

wiedzieć będziémy i każdy z nich z osobna, iako to iuż się wyżéy pokázało: będzie albowiém większy odcinek $BD = \frac{AB+BG}{2}$, a mnieyszy $AD = \frac{AB-BG}{2}$.

A że, BC: BD = Pr. Dost: B.
A zaś AC: AD = Pr. Dost: A.

Więc doydziémy i kątów B, i A.

Przykłád. Niech będzie - -

AB = 1200.
BC = 935.
AC = 612.
BC + AC = 1547.
BC — AC = 323.

Log: BC + AC = 3, 189 490 3.
Log: BC — AC = 2, 509 202 5.

Summa = 5, 698 692 8.
Log: AB = 3, 079 181 2.

Reszta = 2, 619 511 6.

Więc BD — AD = 416, 4. bardzo blizko,

$\frac{AB}{2} = 600.$

$\frac{BD - AD}{2} = 208,2$

Summa = 808, 2. = BD.
Różnica = 391, 8. = AD.
BC: BD = Pr. Dost: B.

Log:

Log: BD z przydanym Log: Pr. = - - - - - - 12, 907 518 8.

Log: BC = 2, 970 811 6.

Reszta = 9, 936 707 2 = Log: Dost: B.

Więc Kąt B. = 30° 11′ 15″.

AC: AD = Pr. Dost. A.

Log. AD = 2, 593 064 4.

Log. Pr. = 10, 000 000.

Summa = 12, 593 064 4.

Log. AC = 2, 786 751 4.

Reszta = 9,806 313 0. = Lo:Doſt.A

więc Kąt A = 50° 11′ 37″.

C = 99 37 8.

Dlá zapewniéniá się o tém, możná szukać, ieżeli stósunek Wstáw Kątów: A, i B, równá się, iak powinién, stósunkowi boków im przeciwnych; będzie zaś w saméy rzeczy równał się, gdy w proporcyi, ktoréy trzéma piérwszémi wyrazami będą: BC. AC. Wst. A. za czwárty wyráz wypadnie Wstawa Kąta B, téyże saméy, co wyżéy ważności.

Log: Wst: A = 9, 885 481 1.

Log. AC = 2, 786 751 4.

Summa = 12, 672 232 5.

Log:

Log: BC = 2, 970 811 6.

Reszta = 9, 701 420 9. = Log: Wst: B.

Kąt B, odpowiadaiący tému Logarytmowi różni się mniéy niż $\frac{10}{2}$ od wyżéy znalezionégo.

347. *Uwága.* Nie trzeba opuszczać takowych doświádczéń, zwłászcza, gdy rachunki zawisły iedné od drugich.

W tym ostatnim razie, náylepiéy iest wziąźć za podstawę bok náywiększy Tróykąta: bo tak z zupełną pewnością wiedzieć będziémy, iż kąty przy téy podstawie są ostré.

PRZYDATEK I.

Przystósowaniá Trygonometryi do różnych działáń na gruncie.

348. *Przystósowanié* 1. Wyznaczywszy na gruncie, a potém wyrachowáwszy położéniá i odległości dwóch punktów, względém iedney podstawy, wziętá była za drugą pódstawę odległość tych dwóch punktów i użyto iéy do wyznaczéniá położéń innych Punktów, któré z piérwszych stanowisk, albo były nie widzialné, albo téż od nich bardzo odległé. Trzeba teráz wyrachować położéniá tych ostatnich punktów względém piérwszéy podstawy. Niech

Tab. XX. Fig. 1. Niech AB wyráżá pierwszą podstawę; XY, dwa punkta, których położéniá, i odległości wyznaczoné iuż są względém téy podstawy, przez wymierzénié kątów przy A i B. Weźmy potém XY za drugą podstawę dlá wyznaczéniá położéniá punktu Z, niewidzialnégo z pierwszych stanowisk: A i B, albo od nich bardzo odległégo. Jakże to położénié punktu Z, wyznaczymy, względém pierwszéy podstawy AB?

Sposób póstępowaniá przez rachunek:

1. W Tróykącie AXB wyznaczymy AX.

2. W Tróykącie AYB wyznáczmy AY.

3. W Tróykącie XAY wiadomé maiąc: AX, AY, i kąt XAY, wyznáczmy: XY, i kąt: AXY.

4. W Tróykącie XZY, wiadomą maiąc podstawę, i kąty wszystkié, wyznáczmy XZ.

W Tróykącie AZX wiadomé maiąc: AX, ZX, i kąt AXZ wyznáczmy AZ.

Podobnie możná wyznaczyć BZ.

349 *Uwága.* Tym sposobém postępuiąc, możná także sprawdzać działaniá iedné przez drugié czynioné z różnych punktów stanowisk.

350. *Przystósowanie* 2. Do iakieykolwiek linii czyniącey kąt wiadomy z podstawą stósować położenia punktów wyznaczonych iuż względem tey podstawy.

Niech będzie AC liniia czyniąca kąt wiadomy z podstawą AB, i niech X, będzie punktem, którego położenie iuż iest wyznaczone względem podstawy AB; trzeba stąd doysdź położenia tego punktu względem linii AC. Tab. XX. *Fig.* 2.

Doydziemy tego, spuściwszy prostopadłą XP na liniią AC, i wyznaczywszy wielkość tey prostopadłey, iako też iey odległość AP od punktu A.

Sposób postępowania przez rachunek.

W Tróykącie AXB można było wyznaczyć liniią AX, kąt XAB iest też wiadomy; więc znaydziemy kąt CAX, który iest różnicą kątów CAB, XAB. W Tróykącie tedy PAX, maiąc wiadome kąty, i przeciw prostkątną AX, można będzie wyznaczyć liniie: AP, i PX.

351. *Przyst:* 3. Wyznaczyć promień koła, maiąc daną cięciwę odcinka iego, i kąt tegoż odcinka.

Niech będzie AB liniia dana, na którey nakreślić trzeba odcinek koła mogący zawierać w sobie kąt dany; wyznaczmy promień tego koła. Tab. XX. *Fig.* 3.

Niech

Niech będzie C, śrzodek koła, szukanégo; poprowadźmy liniią CD do śrzodka linii AB, ta będzie prostopadłą do AB. w Tróykącie ACD, kąt ACD równa się kątowi odcinka danému, bo miarą iego, iest połowa łuku AB; kąt CAD, iest iego dopełniéniém. Wziąwszy AD za promiéń, będzie AC, sieczną kąta CAD, a zatém można wyznaczyć, promiéń koła szukanégo, z téy proporcyi; iak się má promiéń do dosieczney kąta danégo, tak się má połowa ciénciwy danéy do promiénia koła, którégo szukámy.

352. *Uwága.* Stósunek AD do CD, równy iest stósunkowi wstawy całéy, czyli promiénia, do styczney kąta CAD.

A że, ieżeli AB iest bokiém wielokąta forémnégo, będzie CD promiéniém koła wpisanégo w tén wielokąt; więc maiąc dany bok wielokąta forémnégo, i wiedząc liczbę boków iego, można wyznaczyć, promiéń koła wpisanégo i opisanégo, przez dwie następuiące proporcye.

1. Wstawa całá, tak się má do Dostyczney połowy kąta we śrzodku koła, iak połowa boku wielokąta do promiénia koła wpisanégo.

2. Wstawa całá tak má się do dosieczney połowy kąta we śrzodku, iak połowa boku wielokąta, do promiénia koła opisanégo.

353.

353. *Przyſtósowanié.* 4. Wyznaczywszy trzy boki Tróykąta na gruncie iakim uważanégo, i znaiąc kąty, pod którémi widzimy té trzy boki z jednégo punktu, trzeba wyznaczyć odległość tego punktu, od trzech wiérzchołków Tróykąta.

Niech ABC wyrážá Tróykąt, którégo wszyſtkich boków iuż doślismy, niech X, będzie punktém, z którégo uwážaliśmy kąty, pod którémi dały nám się widzieć liniie, AB, BC, AC; trzeba ieszcze wyrachowáć liniie: AX, BX, CX. Táb. XX. *Fig.* 4.

Niech będą D, i E, śrzodki kół, których odcinki nakréśloné na liniiach AB, i BC mogą zawiérać w sobie kąty równé tym, pod którémi widzieliśmy liniie AB i BC. Punkt X będzie w przecięciu tych dwóch kół.

Dwa promiénie BD, BE, mogą bydź wyrachowané tak, iak w przyſtósowaniu 3.

W Tróykącie ABC, w którym wszyſtkié boki są wiadomé, można wyrachować kąt ABC. Kąt ABD ieſt wiadomy, bo ieſt dopełniéniém kąta wiadomégo A X B; więc wiadomy ieſt także i kąt CBD. A że wiémy i kąt CBE, który ieſt dopełniéniém kąta C X B; więc wiedzieć będziémy i kąt DBE; a zatém w Tróykącie DBE, wiémy dwa boki: BD, BE, i kąt

BDF,

DBE, między niémi zawarty; a zatém można wyznaczyć wysokość BE, która ieſt połową linii szukaney BX; albo, (co króce'y ieszcze będzie) możná, w tym Tróykącie wyrachowac kąty D, i E. Że zaś kąt we śrzodku D, równá się kątowi X A B, wspiéraiącému się na łuku dwa razy większym: a kąt weśrzódku E, ieſt spełniéniém (w téy figurze) kąta X CB, więc kąty, BAX, BCX są wiadomé: a zatém w Tróykątach: BAX, BCX, wiémy kąty wszyſtkié, i boki: BA, BC; skąd będzie możná wyznaczyć liniie AX, BX, CX, których szukámy.

Jedén prawie ieſt sposób poſtępowaniá na iakiékolwiek położénié punktu X. W tém tylko bywá odmiénny, że czasém trzeba dodáwać, a czasém odeymować kąty znáyduiącé się przy B; i że czasém kąty D i E, równé są kątóm przy A i C, a czasém są ich spełniéniém.

354. Rachunek tén może bydź ieszcze ſkróconym w niektórych przypádkach szczególnych.

Táb. XXI. *Fig. 1.* *Przykłád* 1. Niech punkt X, znáyduie się na przedłużéniu iednégo z boków Tróykąta ABC, n p. na przedłużéniu boku AB.

W Tróykącie C A X, wiadomé są kąty A,

A, X, i bok C A; więc będzie można wyrachować boki: AX, CX.

Przykład 2. Niech trzy punkta: A,B,C, będą na iedney linii. Táb. XXI. *Fig.* 2.

Prostokąty AX × CX, i BX × CX są równe, pierwszy prostokątowi z prostopadłey spuszczoney od X, na AB, i ze śrzednicy koła opisanego na Tróykącie AXC; drugi, prostokątowi z teyże prostopadłey, i ze śrzednicy koła opisanego na Tróykącie CXB; więc pierwsze dwa prostokąty tak się maią do siebie, iak i dwa drugie. A że pierwsze tak się maią do siebie, iak liniie AX, BX, a drugie tak się maią do siebie, iak dwie śrzednice; więc stósunek AX do BX iest wiadomy, bo iest równy stósunkowi śrzednicy koła opisanego na Tróykącie ACX, do śrzednicy koła opisanego na Tróykącie BCX albo równy stósunkowi promieni tych dwóch kół. Szukaiąc tedy podstawy w Tróykącie, któryby miał kąt w wierzchołku równy kątowi AXB, a zatem wiadomy, i dwa ramiona równe dwóm wyżey spomnionym promieniom; gdybyśmy tę podstawę znaleźli równą linii AB; liniie też AX, BX, byłyby równe tym promieniom. Gdyby zaś ta znaleziona podstawa nie była równa linii AB; tedy z dwóch następuiących proporcyy doydziemy boków: AX, BX.

I.

1. Jak się má podstawa znalezioná, do podstawy AB, tak się má promień pierwszy do AX.

2. Jak się má podstawa znalezioná, do podſtawy AB; tak się má promień drugi do BX.

Tym sposobém możémy téż doświádczać, czyli działaniá naszé czynioné na ziémi, były dokładné.

355. *Przyſtós*. Niech będzie daná liniiá prostá na gruncie: wyznaczyć bez mierzéniá odległość i położéniá względém téy linii, dwóch punktów, z których widzimy obadwa iéy końce.

Táb. XXI. *Fig. 3*. Niechby wiadomá była n p. liniiá AB, niech będą dwa punkta: C, i D, z których każdégo widzieć możná końce A, i B, téy linii; wyznaczyć odległości, i położéniá tych dwóch punktów, C, i D, tak względém siebie, iak i względém linii A B, nie mierząc piérwéy żádnéy z tych odległości.

Z punktów C, i D, wyznáczmy kąty: ACB, DCB, ADB, ADC, a zatém i kąty: ACD, BDC.

Dáwszy iakąkolwiek wáżność linii CD, możnaby z niéy dochodzić wáżności linii: CA, CB, DA, DB, i AB.

Gdy

Gdybyśmy przypádkiém wážność téy ostatniéy linii AB, znaleźli równą prawdziwéy iéy wážności, którą wiémy; byłoby to dowodém, żeśmy natrafili na prawdziwą wážność linii DC, a zatém i inszych liniy.

Gdyby zaś znaleziona wážność linii AB nie była równá wážności iéy wiadoméy; tedy następuiącą trzeba uczynić proporcyą: iak się má wážność mniemaná linii AB, do wážności iéy práwdziwéy, tak się má wážność mniemaná linii CD, do wážności iéy práwdziwéy.

Przystósowaniá do miár wysokości.

Mogą Nauczyciele namiénić tylko o sposobach wyznaczéniá wysokości iakiéy, czyli to przystępnéy, czyli téż nie dostępnéy przez samé żérdzie, albo przez odbiianié promiénia świátła padaiącégo na powiérzchnią iaką płaską i sposobną odbiianiá, albo na koniec przez wielkość ciénia rzuconégo od tego przedmiotu (*obiectum*) którégo wysokość wyznaczyć mámy.

Piérwszy z tych sposobów, iako w przepisach swoich i z przyczyny łatwości, iest bardzo dobry, tak w używaniu bardzo nie doskonały. W ogólności nawet mówiąc, należy zawsze powątpiéwać o działaniach, choćby téż z náylepszémi mi narzędziami czynionych, gdy idzie o wyznaczénié iakiéy wysokości; iednostayná albowiém w sobie wysokość, n p. góry iakiéy, może się wydáwać czasém większą, a czasém mnieyszą, podług nie iednakowégo stanu, w którym się znáydować zwykła nasza *Powiétrzniá*; (atmosphera) iako o tém obszérniéy będzie w Fizyce.

356. *Przykład*. 1. Niech będzie iaká Wysokość nie wiadomá, do któréy iednak możná przystąpić; trzeba wyznaczyć iéy wielkość, z punktu iakiégo oddalonégo od téyże wysokości.

Wymierzmy podstawę od punktu na gruncie obranégo, aż do spodku téy wysokości: od tegoż punktu uwáżáymy iaki kąt czynią na płaszczyznie pionowéy dwie liniie, iedna ku wiérzchołkowi téy wysokości, a drugá poziémnie wykierowaná. Znáydziémy wielkość téy wysokości nad liniią poziémną (którą perspektywa poziémnie ustawioná pokazuie) przez następuiącą proporcyą: iak się má wstawa cała do styczné kąta uwáżonégo, tak się má podstawa wymierzoná do wysokości szukanéy. Dodáwszy do téy wysokości, wysokość narzędziá, znáydziémy całą wysokość, któréy szukaliśmy. (g) 357.

(g) W dalszych przykładach trzeba zawsze na to pamiętać, aby wysokość narzę-

357. *Uwága*. Rźádko się tráfiá, aby wcale przystąpić możná do spodku wysokości, którą wyznaczyć przypádá. Tak na przykłád, maiąc wyznaczyć wysokość wierzchołka wieży iakiéy, baszty i t.d. nie możná wymierzać podstawy, tylko aż do spodku iéy murów; możná iednak zmierzyć całą grubość wieży, baszty i t. d. a stąd wnieść położénie iéy, śrzodka, a zatém i długość, którą dodadź potrzeba do podstawy wymierzonéy.

358. *Przystós*: 2. Niech będzie wiadomá wysokość (i) z którey wierzchołka wyznaczyć przypádá odległość punktu położonégo na gruncie, a widzialnégo z mieysca stanowiska.

Ustawiwszy kątomiérz na płaszczyznie pionowéy, iak wyżéy, naznaczmy kąt, który czyni perspektywa iédna w po-

X zie-

dziá dodáwać do wyrachowanéy Trygonometrycznie wysokości: co lubo się wyraźnie kłaśdź nie będzie, samé iednak okoliczności dostatecznie potrzebę tego okáżą.

(i) Wysokości wieży, lub iakiégo podobnégo budynku łatwo doyśdź możná, spuściwszy z góry na dół sznur, który potém zmierzony, dá poznać tę wysokość. Trzeba iednak mieć báczność na to, aby sznur iednakowo wszędzie był wyciągniony. Obácz między innémi Dziéło iuż wyżéy zaléconé. *P. de Luc. Tom.* 2. §. 516.

ziémném położéniu, a drugá wykierowaná ku punktowi, którégo odległości szukámy. Zróbmy potém tę proporcyą: iak się má wstawa cała do dostyczné y kąta naznaczonégo, tak się má wysokość daná do odległości szukané y.

Uwága. Możná tym sposobém wyznaczyć odległość od spodku wysokości iakié y, tylu punktów, ilé zechcémy; máiąc iuż wiadomą wysokość, z któré y przypádá té od wiérzchołka wyznáczać przypádá té odległości. Uwáżaiąc zaś, i znacząc kąty, które zrobi perspektywa (k) kierowaná do tych różnych punktów, będzie możná wyznaczyć i położénie ich, iednych względém drugich.

359. *Przystós*: 3. Maiąc wiadomą odległość punktu iakiégo od spodku wysokości, na któré y się stoi, wyznaczyć tę wysokość.

Uwá-

(k) Té kąty ściśle mówiąc, nie tak czyni perspektywa coráz do innégo punktu na gruncie położonégo, kierowaná, iako bardzié y płaszczyzny pionowé przechodzącé przez perspektywę za każdém celowaniém. Náywygodnié y się to działánié wykoná: gdy kątomiérz będzie miáł półkole prostopadłé do reszty narzędziá i opatrzoné perspektywą ruchomą.

Uważywszy kąt tak iak wyżéy, zróbmy tę proporcyą: Jak się má wstawa cała do styczné y kąta uważonégo, tak się má odległość daná do wysokości szukanéy.

360. *Przystós*: 4. Niech będzie wysokość nie dostępná, trzeba ią wyznaczyć.

Sposób postępowaniá náypospoliciéy używany, zawisł na tém, aby wymierzyć podstawę iaką wprost téy wysokości, któréy szukámy, i naznaczyć kąty pod którémi z obudwóch końców téy podstawy, widzimy wysokość szukaną. Możná stąd doyśdź, tak wysokości, iako téż i odległości iéy spodka, od obudwóch końców podstawy.

Niech SP wyráżá wysokość, a AB podstawę wymierzoną wprost ku téy wysokości. Wyznáczmy kąty A i B przez perspektywy, iednę poziemnie ustawioną, drugą ku wiérzchołkowi S, wykierowaną. Táb. XXI. *Fig.* 4.

W Tróykącie ASB, zachodzi ta proporcyá.

Wst: ASB: wst: A = AB: BS.

W Tróykącie BSP, iest;

Wst. cała: wst: B = SB: SP.

Więc wst: calá × wst: ASB: wst: A × wst: B = AB: SP.

361. *Uwága* 1. Tego sposobu używaiąc, możná náprzód uchybić w braniu takiéy podstawy, któráby przedłużoná prosto prowadziła, do wysokości podanéy do wymierzéniá; ponieważ zaś w wielu przypádkach trudno iest utrafić na takié podstawy położénié; będzie więc i wysokość stąd wyrachowaná, nie pewná. Powtóré, gdy podstawa AB, iest bardzo nachyloná względém linii AS, BS, kąt ASB, pod którym pokazuie się ta podstawa AB, iest bardzo mały względém kąta ASP, a zatém i podstawa AB wymierzoná iest bardzo małá względém całéy podstawy AP: skąd także wyznaczénié wysokości PS będzie mniéy dokładné.

362. *Uwága* 2. Gdy narzędzié, którégo używámy, opatrzoné iest w półkole pionowé; to będzie służyć do dania tak dobrégo podstawie położéniá, iakiégo tylko grunt pozwoli.

Táb. XXI. *Fig.* 5. Niech liniiá AB wyráżá iakąkolwiek podstawę wymierzoną, a liniiá SP, niech wyráżá wysokość, któréy szukámy.

Ustáwiwszy półkolé pionowé tak, aby Prawidło ruchomé zmiérzało ku punktowi S, a zatém, aby liniiá SP, wpádała na płaszczyznę tego półkola; uważáymy kąt SAP na płaszczyznie pionowéy, i kąt PAB wyznaczony na płaszczyznie kąto-

kątomierza poziémnie ustawionégo. Zróbmy to samo i na drugim stanowisku, przy punkcie B.

W Tróykącie PAB, gdzie wiadomá iest podstawa, i wszystkié kąty, będzie:

Wst. APB: wst. ABP = AB: AP.

W Tróykącie prostokątnym SAP, iest:

Pr: stycznéy SAP = AP: SP.

Więc Pr. × wst. ABP: wst. APB × stycz. SAP = AB: SP.

Gdyby nawet dlá iakiéy zawady nié možná razém brać kątów pionowych, i kątów poziémnych; tedy iednak wyznaczaiąc ciąg linii AP, BP, možnáby osobno wymierzyć kąty poziémné: PAB, PBA. Z tém wszystkiém wyznaczénié tego ciągu z wielką częstokroć prácą przychodzi.

363. *Przystós:* 5. Niech będzie daná liniiá na iakim gruncie, i niech będzie wysokość niewiadomá, z któréy wierzchołka možná widzieć końce téy linii danéy. Trzeba wyznaczyć odległość tych dwóch końców, od spodka wysokości niewiadoméy, i tęž samę wysokość.

1. Uwáżáymy z wierzchołka wysokości, kąty na płaszczyznie pionowey, zawarte między liniią pionową, albo nitką z ciężárem zawieszoną, i między perspektywą wykierowaną następnie do dwóch końców linii daney. Odległości tych końców, od spodka wysokości, tak się do siebie mieć będą, iak styczne kątów uwáżanych: (będą zaś te odległości stycznemi kątów tych wyznaczonych, gdy wysokość za promień wzięta będzie,) a zatém stósunek tych odległości będzie wiadomy. Uwáżáymy i tén kąt, który się zrobi na płaszczyznie poziemney kątomierza, przez płaszczyzny pionowe, na których znáydować się będzie perspektywa następnie do tych dwóch punktów kierowana. Tén kąt równy kątowi zawartému między dwiema liniiami prowadzonemi od końców podstawy do spodka wysokości, będzie kątém w wierzchołku Tróykąta, maiącego wiadomą podstawę i wiadomy stósunek ramion, a zatém można tén Tróykąt zupełnie wyrachować.

Uwága. Gdy narzędzie tak iest zrobione, że go nie można użyć do mierzenia kąta zawartego między liniiami, któreby od spodka wysokości prowadzone były do dwóch końców Podstawy; w takim razie, trzeba mieć wiadomą wszystkich tych trzech punktów odległość: wyiąwszy, gdyby dwa końce ce podstawy, były w jedney linii z spodkiém wysokości. (1)

PRZYDATEK II.

Piérwszé początki równowáżéniá.

W piérwszych początkach, na których się równowáżénié (*libellatio*) zasádzá, możná uwáżać ziémię, iakoby ta zupełnie miała figurę kuli. Różnica zachodzącá między tą mniemaną, a prawdziwą iéy figurą (spłaszczoną w końcach osi) bardzo mało wpływá w dziáłaniá, o których tu mówić się będzie; wiadomości zaś potrzebné do czyniéniá w rachunkach, popráw: z przyczyny nie zupełnéy ziémi okrągłości, byłyby teráz niewczesné i nad poięcié Uczniów.

364. Uwáżaiąc Ziémię, iak gdyby zupełnie była okrągłą, i przeciąwszy ią płaszczyzną przez śrzodek iéy przechodzącą; przecięcié to byłoby kołém którégo promiéń byłby ténże sám, co i promiéń ziémi.

(1) Gdyby nie było sposobności czynić na gruncie działáń, wyrażonych w tych ostatnich przystósowaniach; tedy dlá łatwieyszégo Uczniów poięciá, możná dziáłaniá té na figurach wyrobionych z drewna wykonywać.

ziémi. Na okręgu tego koła podzielonym na 360 ſtopniów rachuiąc mil Niémieckich 15. (które się nie wielé różnią od Polskich) na ieden ſtopień ; cały tén okrąg zawiérać w sobie będzie mil Niémieckich 5400, a zatém śrzednica iego, to iest śrzednica ziémi mieć będzie długości mil prawie 1719. albo, rachuiąc okrągło: 1720.

Tę długość na mnieyszé miary Polſkié z Niémieckich zamiéniaiąc (sposobém w Arytmetyce podanym) będzie śrzednica ziémi, więcéy cokolwiek niż.

21 000 000, łokci Polſkich.

7 000 000, sążni

2 800 000, prętów

280 000, sznurów.

365. Mówi się, że dwa mieysca są do *równowági* (ad libellam,) gdy równą maią od śrzódka ziémi odległość. J tak powiérzchniá wody ſtoiącéy, wszyſtkié punkta má do równowági.

Gdy liniiá iaká proſtopadłą ieſt w punkcie powiérzchni ziémi do iéy promiénia, przez tén punkt przechodzącégo; ta liniiá prócz iednégo tego punktu spolnégo z promiéniém, którégo odległość od śrzodka, równá się promiéniowi ziémi, wszyſtkié inné swoié punkta, dalszé mieć będzie

dzie w rzeczy samey od śrzodka ziemi: ale że przy takiey wielkości promienia ziemi, różnica położenia tey linii, okazuiącey *rownowagę pozorną* (libella apparens) od położenia wody stoiącey, która okazuie *równowagę prawdziwą* (libella vera), ta, mówię różnica tak iest mała, że chyba w znaczney bardzo odległości da się postrzedz, przeto w zwyczaynieyszych działaniach, można na tę różnicę względu nie mieć, i równowagę pozorną za równowagę brać prawdziwą.

W odległości 900. łokci, albo 300 sążni, różnica ta nie dochodzi 1. cala.

Jakoż niech promień CA, wyraża promień ziemi, liniia AB. niech wyraża styczną do końca tego promienia prowadzoną, a bardzo małą względem niego. Niech BDCd wyraża liniią, ciągnioną przez punkt B, i przez śrzodek ziemi, spotykaiącą iey powierzchnią w punktach: D. i t.d. Będzie $AB^2 = DB \times Bd$: a że liniia BD iest bardzo mała względem linii Bd, będzie prawie $AB^2 = Dd \times BD$; a $BD = \frac{AB^2}{Dd}$. Táb. XXI. *Fig. 6.*

Niechby AB, zawierała w sobie łokci 900, znaydziemy BD mnieyszą od $\frac{1}{24}$ części łokcia, toiest mnieyszą od cala.

Liniia ta BD iest prawie proporcyonalną kwadratowi linii AB; a zatem w odległoległościach, 2,3,4,5, i t. d. razy mnieyszych od 900. łokci, będzie, 4,9,16,25, i t. d. razy mnieyszą od cała.

366. Lubo nierówności na powiérzchni ziémi, są bardzo małé względém wielkości całéy ziémi a zatém można na nié względu nię mieć w niektórych okolicznościach; té iednak nierówności wielé się przykładaią do odmián, które na ziémi postrzegámy. Gdyby n p. ziémia była Matematyczną kulą, toiest zupełnie okrągłą; wody wszystkié na iéy powiérzchni znáyduiącé się byłyby stoiącémi; nie byłoby ani rzék, ani strumyków, ani zrzódeł wytryskuiących i sztuką tylko możnaby wody z jednégo mieysca na inné sprowádzać.

367. Przez działaniá równowáżéniá, wyznáczaią się té nierówności, czyli różnica, którá zachodzi między odległością od śrzodka ziémi, dwóch albo więcéy punktów. Przeto dochodzénié iakiéykolwiek wysokości, możnáby sobie wystawić pod ogólnym tém wyobrażéniém działáń równowáżéniá; zwyczaynie iednak działaniá té daléy się nie rozciągaią, iak do wyznaczéniá pomnieyszych wysokości, a szczególniéy do sprowadzéniá wód z jednégo mieysca na drugié; co obszérniéy zwykło się wykładać w Fizyce.

W działaniach równowáżéniá, używané

są

są niektóre narzędziá, służące do wyznaczéniá linii prostéy ukázuiącéy równowágę pozorną. Tych wszystkich narzędziów opisanié, wieléby tu mieysca zabrało, (m) wyrażą się iednak potrzebnieysze.

368. Równowága wodná, iedna z náyprościéyszych, składá się z rurki mosiężnéy, albo blaszanéy, i z dwóch butelek szklanych iak náyprzezroczystszych, przy końcach téyże rurki przyprawionych: Woda w tych butelkach zawartá przechodzi przez rurkę, i w równéy w obudwóch butelkach utrzymuie się wysokości. Osadzoná bywá taká równowága na nodze drewnianéy, podobnie iak stolik mierniczy, albo kątomiérz.

369. Używanié iéy na tém się zasádzá, że woda przez otwarcié iakié łączącé dwa lub więcéy naczyniá, przechodzącá z iednégo do drugiégo, układá się do równowági. Z wielką iednak ostrożnością używać potrzeba, téy tu opisanéy równowági, gdy bez pomocy perspektyw, gołém

(m) Dokładné i obszérné opisanié tych narzędziów, znáyduie się w Xiążce P. Pikarda o równowáżéniu; którá z wielą przydatkami wyłożoná iest z Francuzkiégo na Niémiecki ięzyk przez P. Lamberta. Wielé także doczytać się możná w Xiążce napisanéy w téy materyi przez P. Le Febure.

łém okiém do powiérzchni wody przystawionem, céluiémy do iakiégo mieysca.

370. Układ równowági powietrznéy zasádzá się na własności powietrza, ilé lekszégo od wody. Przez tę własność, powietrzé w rurce wráz z wodą zamknięté wychodzić nad wodę musi.

Jest to iedén z náylepszych sposobów do ustawiéniá, podług równowági, prawidła, albo raczéy perspektywy do niego przyprawionéy.

Równowági powietrzné do wielkiéy doskonałości możná przyprowadzić, iako to, opisuiąc równowágę Brandera, obszérnie wywodzi' P. Lambert w przydatkach swoich do Xiążki Pikarda. Robią ieszcze i równowági próżné to iest takié, z których powietrzé iest wyciągnioné.

Te równowági, za świadectwém X. Fontany, náymnieyszą nawet nierówność poznać daią.

371. Do wykiérowaniá linii, prawidła, lub perspektywy, podług położéniá poziémnégo, służy téż i nić, która przez cięžár w końcu iéy zawieszony do pionu się układá.

Ta nić ponieważ iest prostopadłą do linii iakiéykolwiek poziémnéy, na téy więc za-

zasadzie robić zwykli, innégo ieszcze gatunku równowági, nazwané rownowágami *Pikarda*, *Huyghensa* i t. d.

372. Do działáń równowáżéniá, potrzebny także ieſt pręt podzielony na łokcie, cále i t. d. na który wkłádá się znak z papiéru grubégo, lub inny podobny, mogący się posuwać wzdłuż pręta; a na śrzodku tego znaku má bydź cél wyrażony, którýby i z daleka rozeznać można.

373. Niech będą dwa iakiékolwiek mieysca, których różność równowági trzeba znaléźć.

Poſtáwmy narzędzié, na iednem z tych mieysc, a na drugiém pręt na łokcie, cále i t. d. podzielony. Perspektywę poziémnie, czyli do równowági ustawioną kieruymy ku prętowi: do którégo znak przyprawiony, ma bydź przez inną osobę spuszczany, lub podnoszony póty, póki śrzodek tego znaku nie przypadnie w linii proſtéy, którą poziemné perspektywy położenié wyznaczá. Jeżeli wysokość tego śrzodka znaku, od spodka pręta rachowaná, będzie równá wysokości perspektywy rachowaney od spodka nogi, na którey całé narzędzié z perspektywą ieſt wsparté; tedy dwa té mieysca będą do równowági. Jeżeli zaś wysokość śrzodka znaku będzie większá, lub mnieyszá od wysokości

ści perspektywy; tedy spodek pręta będzie tyle niższy lub wyższy od spodku nogi narzędzia: ila iest różnica między temi dwiema wysokościami.

Tego sposobu równoważenia używać tylko można w odległościach na 100, a naywięcey na 200, sążni.

W większych odległościach, uchybienia byłyby znacznieysze, tak z przyczyny zboczenia światła łamiącego się w powietrzu, iako z niedokładności narzędzia, które w większych odległościach większe też sprawuie uchybienie, a nakoniec i z przyczyny różnicy, zachodzącey między prawdziwą i pozorną równowagą.

374. Po części można się ustrzedz tych uchybień, a raczey one zmnieyszyć, stawiaiąc narzędzie w równey, ile bydź może, odległości, między dwoma mieyscami, które równoważyć mamy. Obudwóch tych mieysc trzeba wyznaczyć równowagę względem tego śrzedniego stanowiska. Ponieważ zaś różnica wysokości śrzodka znaku na dwóch tych mieyscach postawionego, iest różnicą tychże mieysc wysokości, iedney względem drugiey; tą więc różnicą będzie wyższe od drugiego to mieysce, w którem znak niżey iest położony.

Przez

Przez to dwoiakié działanié można z jednégo ſtanowiska równoważyć dwa iakié mieysca, których odległość zawiérałaby n p. 300. sążni, a zatem iużby nadto wielka była, aby się w niéy piérwszégo do równoważénia sposobu użyć godziło.

375. Gdy mieysca do równoważénia wyznaczoné, są ieszcze odległeyszé, n p. na iednę, lub dwie mile dalekié, iedno od drugiégo, można tę przywiększą odległość podzielić na części, z których każda zawiérałaby około 300. sążni: a dopiéro z pośrzodka każdéy téy mnieyszey odległości, równoważyć iéy końce, czyli granice.

Przez piérwszé takowé działanié, znaydziémy różnicę piérwszégo punktu wysokości od drugiégo następuiącégo. Przez drugié działanié znaydziémy różnicę wysokości tego drugiégo punktu od trzeciégo, i tak daléy, aż na koniec znaydziémy różnicę wysokości przedostatniégo punktu od ostatniégo, który kończy całą odległość, a tém samém doydziémy też i różnicy wysokości piérwszégo punktu od ostatniégo, toiest, doydziémy różnicy wysokości między iednym i drugim końcém całéy odległości.

376. Gdyby się zdarzyło, że postępuiąc od każdégo punktu podziału, do innégo iému naybliższégo, każdy taki

ki punkt następny byłby wyższy lub niższy od poprzedzaiącego, z którym się w równoważéniu porównywá: tedy summa różnic wysokości między iednym i drugim punktém następnym pokázałaby całą różnicę między wysokością dwoch punktów kończących całą odległość. Ale ieżeli té punkta następné, są na przemiany iedné wyższé, a drugié niższé względém tych, z którémi się przy każdém działaniu porównywaią; tedy wziąść trzeba summę różnic wysokości punktów wszystkich, które przy każdém następném działaniu są wyższé od tych, z któremi ié porownywámy (postępuiąc zawsze od iednégo końca całéy odległości, do drugiégo.) Trzeba ieszcze wziąść i summę różnic wysokości punktów wszystkich, które przy każdém działaniu następném są niższé od tych, z którémi się porownywaią (w tę samę stronę co i piérwéy postępuiąc:)

Jeżeli té dwie summy będą równé; znakiém to będzie, że obadwa całéy odległości końce są do równowági. Jeżeli zaś té dwie summy będą nie równé; tedy ostatni koniec odległości, tylé wyższy, lub niższy będzie od piérwszégo, ilé piérwszá summa większá lub mnieyszá iest od drugiéy.

377. Aby nie bydź obowiązanym porównywać przy każdém stanowisku, wy-

so-

sokości dwóch punktów przypádaiących do równowáżeniá; lepiéy iest, że dway pomocnicy rachowáć będą wysokość znaku, i onę dlá pamięci zapisywać po każdém szczególném działániu. Jedna z tych wysokości naznaczonych, będzie służyć do porównaniá iéy z jnną następną, która ieszcze nie iest znalezioná. Ci dway pomocnicy postępowáć będą po każdém szczególném działaniu, ku drugiému końcowi całéy odległości; ten, który wprzody póydzie, stanie przy następuiącym punkcie podziału, á drugi ſtanie przy punkcie od piérwszégo opuszczonym.

Po skończonych tych wszystkich szczególnych działániach, zbierze się wráz summa wysokości od piérwszégo pomocnika naznaczonych, i podobnie w jednę summę zbiorą się wysokości naznaczoné od drugiégo pomocnika. Różnica tych dwóch summ, będzie różnicą wysokości dwóch punktów skraynych, którésmy równoważyć postanowili. Tén zaś punkt będzie wyższy od drugiégo, którému odpowiadaiącá summa będzie mnieyszá.

378. Co się tycze równowáżéniá mieysc położonych w Kraiach bardzo odległych; iak n. p. gdyby trzeba wyznaczyć różnicę wysokości mieysc położonych przy brzegach morza śrzódziémnégo, od wysokości mieysc innych w śrzód Polski po-

łożonych, albo przy brzegach morza Baltyckiégo; rozumiém że pewnie o tém mowa będzie w Fizyce. Możná w téy mierze czytać między innémi Dziéło wielkié P. De Luc. o różnych umiarkowaniach powietrzni otaczaiącéy ziémię (sur les modifications de l' Atmosphere.)

ROZDZIÁŁ XIII.

O kwadrowaniu koła, czyli o wynaleziéniu Powiérzchni Koła.

379. Obwody Wielokątów forémnych podobnych sobie, tak się do siebie maią, iak promiénie kół w nie wpisanych, lub na nich opisanych. Powiérzchnie tychże Wielokątów, równaią się Tróykątóm maiącym za wysokość promiénie kół wpisanych, a za podstawę obwód Wielokątów. Téż powiérzchnie Wielokątów forémnych podobnych do siebie, tak się maią do siebie, iak kwadraty promiéni kół wpisanych, i t. d. Wszystkié té Twiérdzénia nie zawisły od liczby boków w Wielokątach, i zawsze są práwdziwé, chociażby náywiększá była liczba boków.

380. Stąd zdaie się, że práwdziwé będą té wszystkié Twiérdzéniá, gdyby nawet liczba boków tak wielká była w wielokątach, żeby ich od kół rozeznać nie podobná, i gdyby promiénie

kół

kół wpisanych i opisanych różnicy między sobą nié miały, ale się iednym promiéniém wydáwały. (n)

381. *Twiérdzénié przybrané.* Można zawsze chociaż myślą podzielić ilość iaką na tylé części równych, aby każdá ta część w szczególności mnieyszá była, niżeli inná iakákolwiek ilość naznaczoná.

(n) Takowé rozumowanié, przywiodło Geometrów, że do koła uwáżanégo za granicę między wielokątém wpisanym i opisanym, przystósowali té Twiérdzéniá, które o wiélokątach stanowili. Dosyć podobno będzie przy piérwszém czytaniu téy Xiążki, wystawić Ucznióm koła, pod tą postacią. Jeżeli iednak przez ćwiczéniá poprzedzaiącé, ducha dokładności i smaku w niéy nabyli, przeciwną rzeczą zapewné zdáwać im się będzie, przechodzić od wielokąta, choćby z náywiększą liczbą boków, do koła uwáżanégo pod postacią wielokąta takiégo, którégo liczba boków większá byłaby od iakiéykolwiek liczby naznaczonéy. Postrzegą oni, i postrzédz powinni skok niezmierny w takowém przechodzéniu: gdyż ściśle mówiąc: liniiá krzywá nię może bydź uwáżaná, iako zbiór wielu liniy prostych bardzo małych, do siebie nachylonych. Należy przeto rzecz tę z większą dokładnością wyłuszczyć tak dlá zabieżéniá wielu trudnościóm, które w téy mierze zarzucać zwykli niektórzy o świetle rozumu swégo i przeniknieniu nadto uprzedzéni, a ledwie w rzeczy samey piérwszé Matematyki początki znaiący, iako-téż i dlá wprawiéniá młodzi zawczasu w dokładność Matematyczną.

Dowodz: Pomnóżmy tę drugą ilość naznaczoną, tylé razy, ilé potrzeba, aby się stała większą od pierwszéy ilości daney; na tyléż części równych podzielmy ilość pierwszą, ilé razy była pomnożoná ilość drugá: każdá takowá część ilości pierwszéy, mnieyszá będzie od ilości drugiéy naznaczonéy.

W szczególności mowiąc, gdy się weźmie połowa ilości iakiéy skończonéy, i téy połowy połowa, toiest czwártá część całéy ilości, i znowu téy ostatniéy połowy połowa, toiest osma część całéy ilości: daléy połowa téy osméy części, toiest, część szesnástá i t. d; doydzie się na ostatek do takiéy części, którá mnieyszą będzie od wszelkiéy ilości naznaczonéy. (o)

382. *Twiérdzénié* 1. Możná opisać na kole daném i wpisać weń forémné dwa takié wielokąty podobné, aby stósunek ich obwodów przybliżał się bardziéy do stósunku równości, niżeli iakikolwiek inny stósunek nierówności naznaczony.

Przy-

(o) Przestrzegać będą Nauczyciele Uczniów; aby zamiást słowa: *naznaczoná*, nie używali tego drugiégo słowa *naznaczyć się mogącá*, i dadzą im poznać różnicę tych dwóch wyrazów.

Przykłád. Możná wpisać w koło i na niém opisać dwa wielókąty forémné podobné, takié, którychby rożnica obwodów mnieyszá była od dziesiątéy na przykłád części obwodu, iednégo z nich.

Niech będzie CA promień koła, podzielony na dziesięć części równych, i niech AB iednę taką część wyráżá. Táb. XXII Fig. 1.

Przez B przeciągniymy DBd. prostopadłą do promieniá, i spotykaiącą okrąg koła w punktach D, i d. Podzielmy okrąg koła, na 2, 4, 8, 16. i t. d. części równych, póty, póki nie doydziémy do części koła mnieyszéy od łuku DAd. Niechby na przykłád łuk EAe był iedną z tych części mnieyszych od łuku DAd: i punkt A, niechby go dzielił na dwie części równé EA, Ae. Pociągniymy liniią Ee, (która będzie prostopadłą do AC). Przez punkt A niech przechodzi styczná FAf, i niecháy dwa promiénie CE, Ce, schodzą się z tą styczną w punktach F, f. Liniie Ee, Ff, są bokami dwóch wielokątów forémnych podobnych, iednégo w koło wpisanégo, a drugiégo na kole opisanégo; a zatém obwody tych dwóch wielokątów będą, iak boki Ee, Ff, albo iak liniie CG, CA. Więc różnica obwodów tych dwóch wielokątów, będzie do obwodu większégo wielokąta, iak liniiá AG, do linii CA. A żé liniiá AG mnieyszá iest od linii AB, to-

iest

iest od dziesiątéy części linii CA; więc i różnica dwóch obwodów mnieyszá będzie, niżeli dziesiątá część obwodu wielokąta na kole opisanégo.

Gdyby liniiá AB była $\frac{3}{11}$ linii BC, albo $\frac{3}{11}$ linii AC, możnáby podobnym sposobem dowieśdź, że różnica dwóch obwodów, tak się má do obwodu wielokąta w koło wpisanégo: iak liniiá AG do linii CG. A że AG mnieyszá iest od AB: więc tém samém mnieyszá iest od $\frac{1}{10}$ téy części linii BC, a tém bardziéy mnieyszá będzie od 10téy części linii CG. Różnica tedy między dwoma obwodami wielokątów mnieyszá byłaby od 10téy części obwodu wielokąta w koło wpisanégo. (p)

383. *Wniosek* 1. Możná w koło wpisać wielokąt iedén forémny, i drugi podobny na nim opisać, tak aby ſtósunek obwodu koła do obwodu iednégo z dwóch wielokątów bardziéy był przybliżony do ſtó-

---

(p) Daie się tu przykłád liczebny dlá łatwieyszégo poięciá. Że iednak té rozumowaniá uważané w sobie nie zawisły od tych liczb, i mogą bydź przystósowané do wszystkich innych; przeto dowodzénié naszé nie iest dlá tego szczególnégo przystósowaniá, ani mniéy dokładném, ani mniéy ogólném.

ſtósunku równości, niżeli iakikolwiek inny ſtósunek naznaczony.

Przykład. Niechby opisany na kole był ieden wielokąt, a drugi podobny w koło wpisany, i niechby różnica ich obwodów mnieyszá była od $\frac{1}{10}$ części obwodu wielokąta wpisanego.

Różnica obwodu wielokąta opisanego, od obwodu koła mnieyszá będzie niż różnica obwodu tegoż wielokąta od obwodu wielokąta wpisanego; toiest, mnieyszá niżeli $\frac{1}{10}$ część obudwu wielokąta wpisanego, a tém bardziey mnieyszá od $\frac{1}{10}$ części obwodu koła.

Różnica także obwodu koła od obwodu wielokąta wpisanego mnieyszá iest, niżeli różnica między obwodami dwóch wielokątów, a zatém mnieyszá od $\frac{1}{10}$ części obwodu wielokąta wpisanego, a dopiéróż mnieyszá od $\frac{1}{10}$ części obwodu koła.

384. *Wniosek* 2. Maiąc daną liniią proſtą, wziętą za równą okręgowi koła danego, wpisać w to koło, i opisać na nim wielokąty, których obwodów różnica od obwodu koła mnieyszá byłaby, niżeli liniiá daná iakiéykolwiek małości.

Po-

Pomnóżmy ostatnią tę liniią tyle'razy, aż większą będzie od linii wziętéy za równą okręgowi koła. Niechby naprzykład 10. razy powiększoná była ta liniiá. Wpiszmy w koło i opiszmy ná niém dwa wielokąty forémne podobne, którychby różnica obwodów mnieyszá była od $\frac{1}{10}$ części obwodu iednégo z nich. Będzie zatém różnica obwodu koła od obwodu którégokolwiek z tych dwóch wielokątów mnieyszá niżeli $\frac{1}{10}$ ta część obwodu, iednégo z tychże wielokątów, naprzykład obwodu wielokąta wpisanégo; a dopiéróż mnieyszá niżeli $\frac{1}{10}$. ta część okręgu koła, a ieszcze mnieyszá, niż liniiá daná wyznaczonéy małości.

385. *Twiérdz:* 2. Okręgi kół tak się maią do siebie, iak ich promiénie.

Niech będą dwa koła C i c, a tych okręgi O i o, promiénie zaś P i p; będzie zatém O: o = P: p.

Gdyby ta proporcyá w czém chybiała; tedy piérwszy stósunek byłby większy lub mnieyszy od drugiégo. W piérwszym razie trzebaby powiększyć okrąg o, a w drugim okrąg O, aby naprawić proporcyą; a zatém w obydwóch razach trzeba powiększyć ieden z okręgów dlá zrobiénia proporcyi.

Niech-

Niechby liniiá proſtá L większá była od okręgu O, i niechby było (ieżeli podobná) L: o = P: p.

Opiszmy na kole C wielokąt foremny, którégoby różnica obwodu, od obwodu koła, mnieyszá była, niżeli różnica L od O. Na drugiém także kole c, opiszmy wielokąt foremny podobny pierwszému. Obwody tych dwóch wielokątów tak się mieć będą do siebie, iak promienie P. i p, kół C i c; albo iak L do o, (ponieważ miało bydź L: o = P, p.) A że obwód pierwszego wielokąta, mnieyszy ieſt niżeli L; więc i obwód drugiego, mnieyſzyby bydź powinien niżeli o, toiest mnieyszy niżeli okrąg koła, na którym iest opisany: co bydź nie może.

Więc ſtósunek promieni dwóch kół, nie iest większy ani mnieyszy do stosunku ich okręgów: a zatém równy iest témuż stósunkowi.

386. *Wniosek* 1. Jdzie zatém, że stósunek okręgu koła iednégo, do swégo promiénia tenże sám iest, co i stósunek którégokolwiek innégo koła, do swégo także promiénia.

Przeto gdyby możná znaléźć stósunek iakiégokolwiek koła, do iego promiénia, iuż tem samém byłby znaleziony stósunek każdégo innégo koła do swégo promiénia.

387.

387. *Wniosek* 2. Dwa prostokątné Tróykąty są do siebie podobné, gdy maią za wysokości, promiénie dwóch kół, a za podstawy liniie wzięté za równé okręgóm tychże kół: a zatém takié dwa Tróykąty będą do siebie w stósunku dwumnożnym ich boków, naprzykład promiéni dwóch kół.

388. *Twiérdz.* 3. Powiérzchniá koła równá się powiérzchni Tróykąta, maiącégo za wysokość promiéń tego koła, a za podstawę, iego okrąg.

Dowodz. Gdyby tén Tróykąt nie był równy powiérzchni koła; byłby od niéy większy, albo mnieyszy: a zatém koło byłoby równé innému Tróykątowi téyże saméy wysokości, za podstawę zaś maiącému liniią większ ą, albo mnieyszą od okręgu koła.

Nazwiymy okrąg koła, O. a tę liniią, większą albo mnieyszą od okręgu nazwiymy L.

W piérwszym razie, w którym ta liniiá L, większá byłaby od okręgu koła, opiszmy na nim wielokąt forémny, którégo obwod mniéyby się różnił od okręgu koła, niżeli się różni od niego liniiá L: a zatém liniiá L, większáby była od obwodu wielokąta. Powiérzchniá tego wielokąta byłaby mnieyszá od powiérzchni Tróy-

kąta

kąta maiącego za wysokość promień koła, a za podstawę, liniią L, toiest byłaby taż powierzchniá wielokąta, mnieyszá od powierzchni koła, na którém wielokąt iest opisany; co bydź nie może.

W drugim razie, w którym liniiá L, mnieyszá byłaby; od okręgu koła, wpiszmy w koło wielokąt forémny, którégo obwód mniéyby się różnił od okręgu koła, niżeli liniiá L, a zatém obwód wielokąta byłby większy od linii L. Wpiszmy w to samo koło wielokąt inny forémny, tylé dwoie, co piérwszy boków zawiéraiący.

Powiérzchniá tego drugiégo wielokąta, równałaby się Tróykątowi, maiącému za wysokość promień koła, a za podstawę obwód piérwszégo wielokąta: (268) toiest liniią większą od L.

A zatém powiérzchniá tego wielokąta wpisanégo w koło, większá byłaby niżeli powiérzchniá koła: co bydź także nié może.

Więc powiérzchniá koła, ani iest większá, ani mnieyszá od powiérzchni Tróykąta maiącégo za wysokość promień tego koła, a za podstawę iego okrąg; a zatém równá iest powiérzchni tego Tróykąta.

389.

389. *Wniosek* 1. Powiérzchnie kół są do siebie w stósunku dwumnożnym ich promiéni, albo śrzednic: przeto, gdyby promiénie kół były iak liczby: 1, 2, 3, 4, 5, i t. d. powiérzchnie tychże kół były by iak kwadraty: 1, 4, 9, 16, 25 i t.d.

390. *Wniosek* 2. Powiérzchniá koła, tak się má do powiérzchni wielokąta na nim opisanégo; iak okrąg koła do obwodu wielokąta. A w szczególności powiérzchniá koła, tak się má do powiérzchni kwadratu na nim opisanégo, albo, co na iedno wychodzi, do kwadratu śrzednicy, iak się má okrąg koła do obwodu tego kwadratu: toiest, iak się má okrąg koła, do swoiéy śrzednicy cztéry razy wziętéy, czyli do linii tak długiéy, iak cztéry śrzednice.

Stąd porownanié dokładné powiérzchni koła, z powiérzchnią kwadratu, a zatém i porównanié koła z powiérzchnią iakiéykolwiek figury prostokréślnéy, zawisło od porównaniá okręgu koła z liniią iaką prostą: albo, (co na iedno wychodzi) *kwadrowanié* koła, zawisło od *wyprostowaniá* iego okręgu, czyli od wynaleziéniá linii prostéy równéy okręgowi koła.

391. *Wniosek* 3. Wszystkié sposoby postępowaniá, które się wyżéy podáwały, do zrobiéniá kwadratu równégo

sum-

summie, albo różnicy dwóch innych kwadratów danych, końcém powiększéniá lub zmnieyszéniá kwadratu w danym stósunku, mogą bydź równie i do kół przystósowané, czyniąc na ich promiéniach lub śrzednicach, té samé działaniá, któréby się na nich czyniły, gdyby były bokami kwadratów, na którychby podobné odmiany czynić przypadało.

A w szczególności, chcąc podzielić powiérzchnią koła danégo, na pewną liczbę części równych, przez *koła spółśrzodkowé* (circuli concentrici); trzeba podzielić promiéń iego na tyléż części równych, zacząwszy od śrzodka, tak, aby odległości punktów podziału coráz dalszych od tegoż śrzodka, były do siebie iak kwadraty liczb następnych 1, 2, 3, 4, 5, i t. d. Niechby n. p. przypádało podzielić koło na 7. części równych przez koła spółśrzodkowé. Podzielmy promiéń na 7. części równych: śrzednie Geometryczné między odległościami punktów podziału od śrzodkà, i całym promiéniem, będą promiéniami kół spółśrzodkowych, przez które podzieloná będzie powiérzchniá koła danégo, na 7. części równych.

392. Wyznaczénié powiérzchni wycinków, i odcinków kół, zawisło także od wyznaczéniá okręgu koła. Jakoż w saméy rzeczy.

1.

1. Powiérzchniá wycinka tak się má do powiérzchni koła, do którégo tén wycinek należy: iak się má łuk wycinka, do okręgu koła: toiest, iak się má Tróykąt, którégo wysokością iest promién a podstawą tén łuk, do Tróykąta maiącégo za wysokość ténże promién, a za podstawę okrąg koła. A że tén ostatni Tróykąt byłby równy powiérzchni koła; więc i piérwszy Tróykąt równy iest powiérzchni wycinka.

2. Odcinek mnieyszy od półkola, iest różnicą między wycinkiém maiącym ténże sám łuk, co i odcinek, i między Tróykątém równoramiénnym, maiącym spólną z wycinkiém podstawę, wiérzchołek zaś w śrzodku koła.

A że powiérzchniá wycinka, równá się Tróykątowi, maiącému za wysokość promién, a za podstawę łuk wycinka: a powiérzchniá Tróykąta, o którym mowa (wziąwszy w nim za podstawę ieden z promiéni, toiest z ramión iego, a za wysokość wstawę łuku, należącégo do wycinka), równá się Tróykątowi, maiącému za wysokość promién, a za podstawę wstawę łuku; więc powiérzchniá odcinka mnieyszégo od półkola równać się będzie Tróykątowi maiącému za wysokość promién, a za podstawę różnicę łuku wycinka od wstawy tegoż łuku. Arytmetycznie ta powiérzchniá

wy-

wyráżá się rozmnożéniém liczby oznáczaiącéy połowę promiénia, przez inną liczbę oznáczaiącą różnicą łuku wycinka od wstawy tegoż łuku.

Powiérzchniá odcinka większégo od półkola, iest summą z wycinka zawiéraiącégo między swémi ramionami tén sám łuk, większy od półkola, i Tróykąta, w którym, wziąwszy za podstawę promién, wysokością byłaby wstawa łuku czyniącégo z łukiém piérwszym okrąg cały: a zatém powiérzchniá tego odcinka, równá się Tróykątowi maiącému za wysokość promién, a za podstawę summę z łuku odcinka tego, i z wstawy łuku, który spełniéniem iest piérwszégo łuku do całégo okręgu, albo, (co na iedno wychodzi), z wstawy różnicy między łukiém odcinka, i półokręgiém.

393. *Defin*: W kołach nieiednakowégo promiénia, wycinki i odcinki podobné, té są, których łuki są do siebie podobné, toiest, równą stopniów liczbę w sobie zamykaią: a té łuki tak się maią do siebie, iak całé okręgi, a zatém iak promiénie tychże kół.

394. *Twiérdz*: 4. Wycinki i odcinki podobné w kołach nie iednakowégo promiénia, tak się maią do siebie; iak kóła, do których należą.

I.

Táb. XXII. Fig. 2. 1. Niech będą dwa wycinki podobné ABCDA, abcda, té dwa wycinki są do siebie iak koła, do których należą.

Dowodz: Wycinek ACBDA, tak się má do koła, do którégo należy; iak łuk ADB, do okręgu ADBEA, albo (393) iak łuk adb, do okręgu adbda, toiest, iak wycinek acbda, do koła, do którégo należy. Więc té dwa wycinki są do siebie iak koła, do których należą, toiest w stósunku dwumnożnym promiéni tychże kół.

Niech będą dwa odcinki: ABDA, abda, podobné, té dwa odcinki tak się maią do siebie, iak koła, do których należą.

Dowodz: Wycinki ACBDA, acbda, maią się do siebie w stósunku dwumnożnym promiéni CA, ca, toiest, iak CA^2, do ca^2. Tróykąty podobné: ACBA, acba, w tymże samym iedén do drugiégo są stósunku; więc té dwa wycinki ténże sám do siebie maią stósunek, co i té dwa Tróykąty. Więc różnica (albo summa) piérwszégo wycinka, i piérwszégo Tróykąta, toiest odcinek ABDA, tak się má do różnicy (albo do summy) drugiégo wycinka i drugiégo Tróykąta, toiest do odcinka abda, iak się má piérwszy wycinek do drugiégo: toiest, w stó-

sun-

sunku dwumnożnym promieni kół, do których te odcinki należą.

395. *Defin:* Niech będą dwa koła spółśrzodkowe, mieysce zawarte między ich okręgami, nazywa się *Koroną*.

396. *Twierdz:* 5. Powierzchnia iedney takiey korony równa iest prostokątowi maiącemu wysokość równą szérokości tey korony, a podstawę równą okręgowi koła, którego promień równałby się połowie summy promieni okręgów dwóch, koronę tę zawieraiących.

Niech będą CA, CB, promienie dwóch kół spółśrzodkowych; przedzielmy AB na dwie równe części w F: liniia CF, będzie połową summy dwóch promieni CA, CB należących do dwóch kół spółśrzodkowych: korona zawarta między temi kołami, równa iest prostokątowi maiącemu szérokość AB tey korony za wysokość, a za podstawę okrąg, którego liniia CF byłaby promieniem. Poprowadźmy AD prostopadłą do AC, i daymy, że AD równa się okręgowi którego promieniem iest CA. Złączmy punkta C, i D, linią CD, a przez punkta B i F, pociągniymy dwie linie równoodległe od AD, aż do ich spotkania się z linią CD, w punktach E, i G. Táb. XXII. *Fig.* 3.

Ponieważ CA: CB=AD: BE
i CA: CB=okrąg CA:okręgu CB.
więc - AD: BE=okrąg CA:okręgu CB.

A że AD wzięta iest za liniią równą

okręgowi, którégo CA iest promiéniém; więc i BE=okręgowi CB.

Podobnym sposobém dowiéść można, że liniiá FG, równá iest okręgowi, którégo promiéniém byłaby liniiá CF.

Powiérzchnie kół, których promiéniami są CA, i CB, równaią się Tróykątóm, CAD, i CBE; a zatém powiérzchniá korony równá będzie czworokątowi ABED. Przez G poprowádźmy równoodległą od AB, któráby spotkała AD w H, a BE w J; Tróykąty prostokątné GDH, GEJ, maią boki GH, GJ równé, i kąty równé, więc mogą przystać do siebie: a zatém summa z Pięciokąta BEGHA, i z Tróykąta GEI, toiest Prostokąt ABIH równá się summie z Pięciokąta BEGHA, i z Tróykąta GDH, toiest, równá się czworokątowi BEDA. A że tén czworokąt równy iest powiérzchni korony; więc taż korona równá będzie prostokątowi ABIH, toiest prostokątowi, który má szérokość korony za wysokość, a za podstawę okrąg, w którym, promiéniém iest śrzedniá arytmetycznie proporcyonalná, między dwoma promiéniami, czyli połowa summy tychże dwóch promiéni.

397. Podobnie i różnica w kołach spółśrzodkowych, wycinków dwóch, zawartych między témiż samémi promiéniami, równá się Prostokątowi maiącému za wysokość różnicę dwóch promiéni, a za podstawę łuk podobny łukóm wycinków dwóch

dwóch danych, i należący do okręgu, którégo promień, iest śrzednim arytmetycznym między promieniami tych dwóch wycinków.

1. Pokázáwszy, iż skwadrowanie koła, lub części iego, zawisło od wyprostowania iego okręgu; przystąpmy do szukania tego sprostowania.

Zadanie to, aż nazbyt wsławione, zatrudniło wielu przypisuiących sobie nazwisko Geometrów, którym ledwie początki Matematyki były znaiome, a i zadania nawet samégo nie rozumieli. W czém było omylné ich rozumienie; bawić się nad tém, nie sądzę bydź rzeczą potrzebną. Mogą Nauczyciele, chcący mieć obszérnieyszą w téy mierze wiadomość, czytać Montukli przemowę do *Historyi o dochodzeniu kwadrowania koła* (Histoire des recherches sur la quadrature du Cercle:) Dosyć będzie powiedzieć, że treść tego zadania na tém zawisła, aby wynaléźć liniią prostą równą okręgowi koła podanégo. Nie rozumie się tu zaś równość pozorna, i zmysłowá (iak ci mniemaią, którzy koło z drewna lub z kruszcu wyrobione tocząc po iakiéy płaszczyznie, mierzą długość linii, którą punkt iedén tego koła przebiegł; albo, którzy koło iakie nicią okręcaią, i biorą potém długość téy nici, albo na koniec, którzy ważą takowé koło, i oné porównywaią z kwadratém podobnéy materyi i iednakowéy z kołém grubości: ale się rozumie ró-

równość umysłowá, czyli taká, o którey możnáby się przeświádczyć przez rozumowániá podobne tym, iakich używaliśmy do dowiedzéniá práwd, w tym przeciągu dzieła, wyłuszczonych.

398. Archimedes trzysta lát blizko przed Narodzéniém Chrystusa, znalázł stósunek okręgu do śrzednicy, tak blizki práwdziwému, że we zwyczaynych zdarzéniach iest dostatecznym, a przytém, i w używaniu wygodnym. Doszedł on, że oznaczywszy śrzednicę kóła przez 1. Okrąg iego większy będzie niż $3\frac{10}{71}$. a mnieyszy niż $3\frac{10}{70}$ albo, że wyraziwszy długość śrzednicy przez 497. okrąg będzie większy niż 1561, a mnieyszy niż 1562; uchybiénie zatém byłoby náywięcey w części $\frac{1}{1561}$ całego okręgu; a którégokolwiek ze dwóch stósunków używszy, n. p. ostatniégo, tén wypádłby na stósunek 7 do 22.

Pożniey po Archimedesie, wynaleziono ſposoby krótsze, któremi dochodzi się stósunków bardziey ieszcze zbliżonych do práwdziwych. Do tey nawet dokładności iuż przyszło, że wyraziwszy śrzednice koła przez 1, z zerami 127 przydanémi, wynaydzie się okrąg w liczbie złożoney z tyluż znaków liczebnych, z uchybiéniém mnieyszém od iedności ostatniégo, a náymniey wyrážaiącégo znaku teyże liczby. Sposób iednak dochodzéniá z tą dokładnością ważności okręgu koła,

nié

nié może bydź w tych początkach Uczniom wykładany. Przytoczymy iednak stósunki niektóré wygodnieyszé śrzednicy koła do okręgu, wyięté z Xięgi sławnégo P. *Huyghens* o wynalazkach wielkości koła (*de circuli magnitudine inventa.*) Używaiąc Dwunastokąta wpisanégo w koło, i na kole opisanégo, można wynaléźć dokładnieyszé stósunki śrzednicy koła do okręgu, niżeli té których doszedł *Archimedes* przez wielokąty o 96 bokach, wpisané w koło, i na nim opisané; ale na to mieyscé rachunek *Archimedesa* mniéy wyciągá poprzedzaiących podań, niżeli rachunek na dwunastokącie czyniony.

399. Stósunki śrzednicy do okręgu koła przybliżoné do prawdziwych są następuiącé.

7	do	22.
100	do	314.
106	do	333.
113	do	355. (q)

Ponieważ stósunek powiérzchni koła, do kwadratu śrzednicy iego, tén sám iest, co stósunek okręgu koła do śrzednicy czté-ry razy wziętéy; więc stósunki powiérzchni koła do kwadratu śrzednicy będą następuiącé.

(q) Napisáwszy trzy piérwszé nieparzysté liczby 1. 3. 5. po dwa razy, iednę przy drugiéy, tak: 113355 liczba 113, zawiéraiącá trzy piérwszé znaki, wyrážać będzie śrzednicę; liczba zaś 355. zawiéraiącá trzy ostatnié znaki, wyrazi z małém uchybiéniém okrąg koła.

22 do 28, albo, 11, do 14.
314 do 400, albo, 157, do 200.
333 do 424.
355 do 452

Czyniąc przybliżéniá dokładnieyszé, lecz bardziéy zawiłé, i używaiąc sposobów krótszych, ale początkowé wiadomości przechodzących, znaleziono, iż okrąg koła záwiérá w sobie śrzednicę, razy 3,141 592 653 $\frac{5+}{6-}$

Skąd wyniká stósunek powiérzchni koła, do kwadratu śrzednicy, albo stósunek okręgu koła do śrzednicy iego, cztéry razy wziętéy, równy stósunkowi 3,145 926 53 $\frac{5+}{6-}$ do 4, albo 3 141 592 653 $\frac{5+}{6-}$ do 4 000 000 000 0.

Z cztérech po wyżéy wyrażonych stósunków śrzednicy do okręgu koła; piérwszy daie okrąg koła większy razy

	3,142 8 + od śrzednicy,
drugi	3,140 0.
trzeci	3,141 509, +
czwárty	3,141 529 92 +

Widzimy tu, iż stósunek piérwszy, daie okrąg koła nad to wielki, drugi i trzeci daie tén okrąg nadto mały, a czwárty, znowu nadto wielki; trzeci iednak i czwárty stósunek dokładnieyszy iest od dwóch piérwszych, a zwłászcza czwárty, który ieszcze w miliionowych cząstkach daie okrąg koła nie rożniący się od wá-

żności

żności iego wyżéy podanéy (r) a iak náyściśléy wyrachowanéy.

400. Z tego co poprzedzało, łatwo iest rozwiązać przez przybliżénié, następuiącé zagádniéniá.

1. Maiąc daną śrzednicę koła, znaléźć iego okrąg.
2. Maiąc dany okrąg koła, znaléźć iego śrzednicę.
3. Maiąc daną śrzednicę koła, znaléźć iego powiérzchnią.
4. Maiąc daną powiérzchnią koła, znaléźć iego śrzednicę.
5. Znaléźć bok kwadratu równégo kołu danému.

Znáyduiémy, iż stósunek śrzednicy koła do boku kwadratu równégo tému kołu, iest, 200000, do $17724\frac{5}{6}\pm$

Tén stósunek przybliżá się bardzo do stósunków następuiących - - - - - - - - - 35 do 31.

44 do 39.

123 do 109.

157 do 148.

6.

(r) W drugiéy Xiędze *Pamiętników* (Memoires) Matematycznych P. Lamberta, znáyduie się wyborná *Rozprawa* (*Dissertatio*) o kwadrowaniu koła. Dowodzi tam (§. 9.) Autor, że ieżeli możnáby wyznaczyć stósunek dokładny, okręgu koła do śrzednicy iego, tedy liczby, któréby go wyrážały, większéby bydź powinny od następuiących, które tén stósunek przybliżony wyrážaią, toiest: 101 951 448 609 9146. do 324 511 540 032 945.

6. Maiąc dany promień koła, i ważność kątową łuku, (toiest w stópniach) znaleźć długość tego łuku, i powierzchnią wycinka, proporcyonalną témú łukowi.

7. Maiąc dany promień koła, i ważność kątową łuku, znaleźć odcinek między tym łukiém i cięciwą iego.

Náyłatwiéy i náyprościéy rozwiążémy to ostatnié zagadnienié, gdy w Tróykącie, który iest różnicą między wycinkiém i odcinkiém wspieraiącym się na tymże samym łuku, weźmiémy za podstawę ieden z promiéni, a za wysokość wstawę łuku danégo: maiąc albowiém tę proporcyą, że powiérzchniá koła, tak się má do powiérzchni odcinka (mnieyszégo od półkola) iak się má okrąg cały do różnicy między łukiém odcinka, i wstawą tego koła; i ułożywszy sobie táblicę łuku, podług promiénia táblic Trygonometrycznych, łatwo przyydzie rozwiązać to zagádnienié. (s)

8. Znaléźć przez przybliżénié ważność kątową łuku równaiącégo się promiénio-wi koła.

Przystósowanié tego zagádniéniá często bywá używané w wyższych częściach Matematyki.

(s) Co się tycze sposobu ułożéniá takowych táblic, obácz przykłady dané w Arytmetyce.

Tab. I.

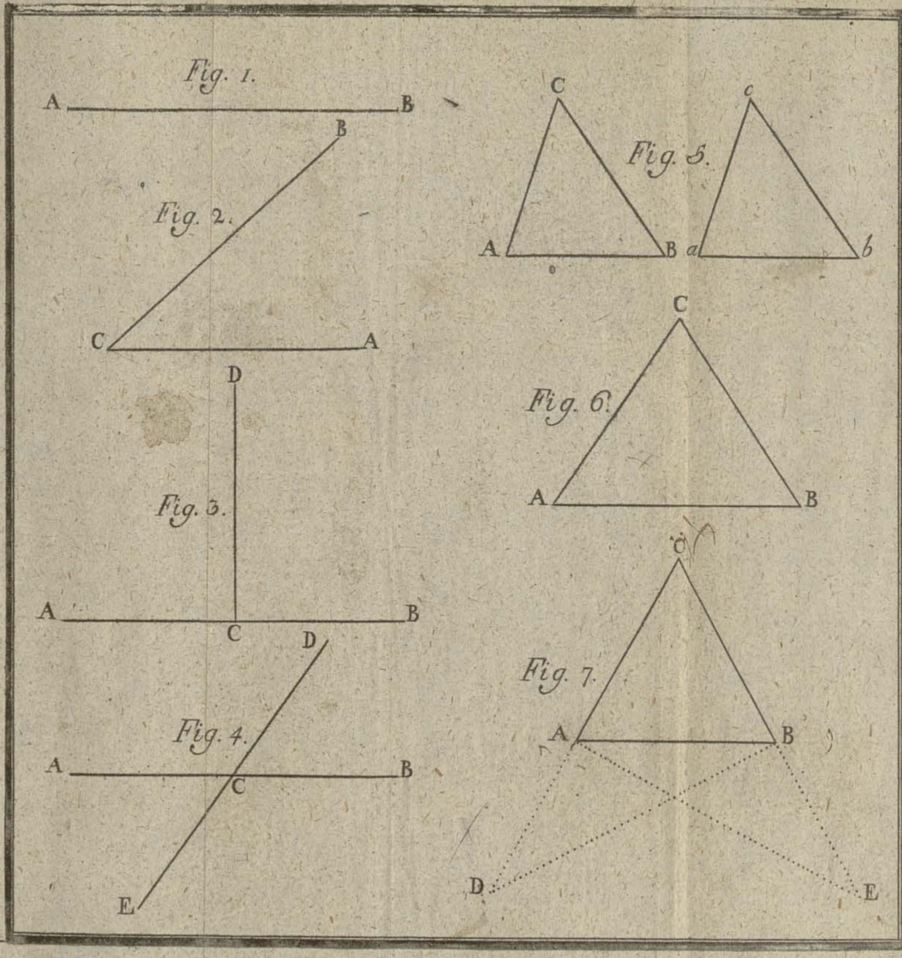


Fig. 1.
A
B
Fig. 2.
B
C
A
Fig. 3.
D
A
C
B
Fig. 4.
D
A
C
B
E
Fig. 5.
C
A
B
c
a
b
Fig. 6.
C
A
B
Fig. 7.
C
A
B
D
E

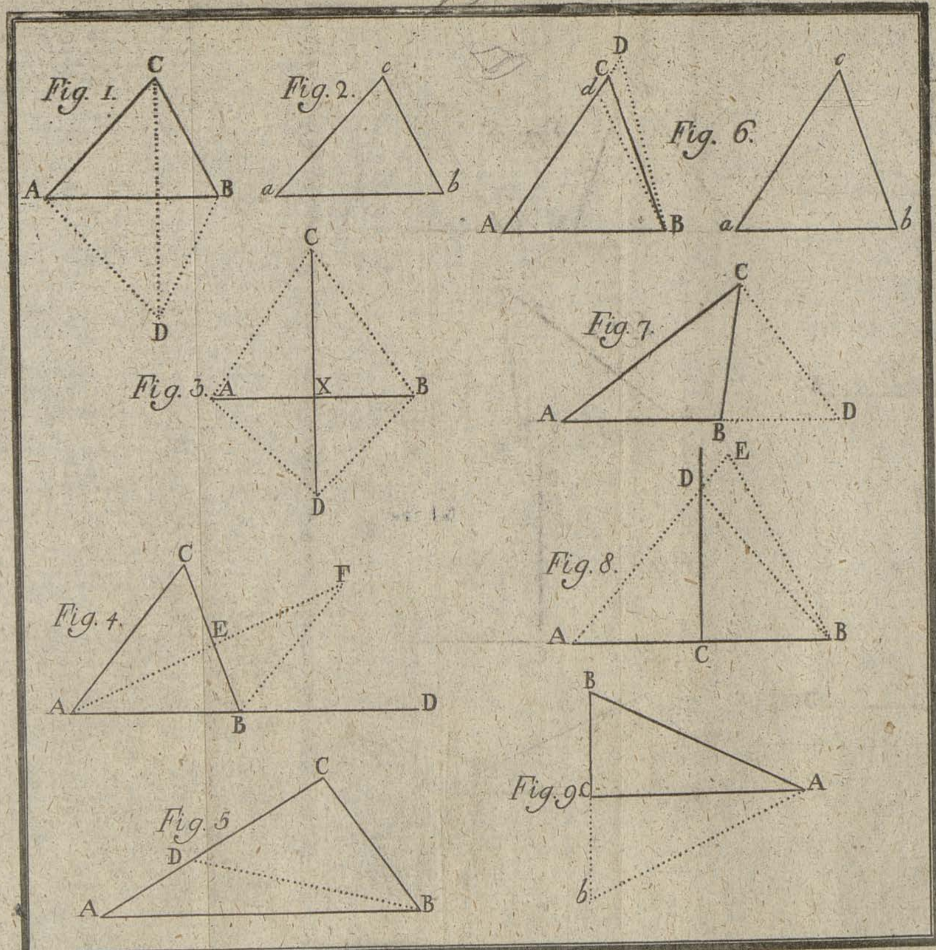


Fig. 1.
C
A
B
D
Fig. 2.
c
a
b
D
C
d
A
B
Fig. 6.
c
a
b
C
Fig. 7.
A
B
D
C
Fig. 3. A
X
B
D
E
D
Fig. 8.
A
C
B
C
F
Fig. 4.
E
A
B
D
B
Fig. 9. C
A
b
C
Fig. 5
D
A
B

Tab. III.

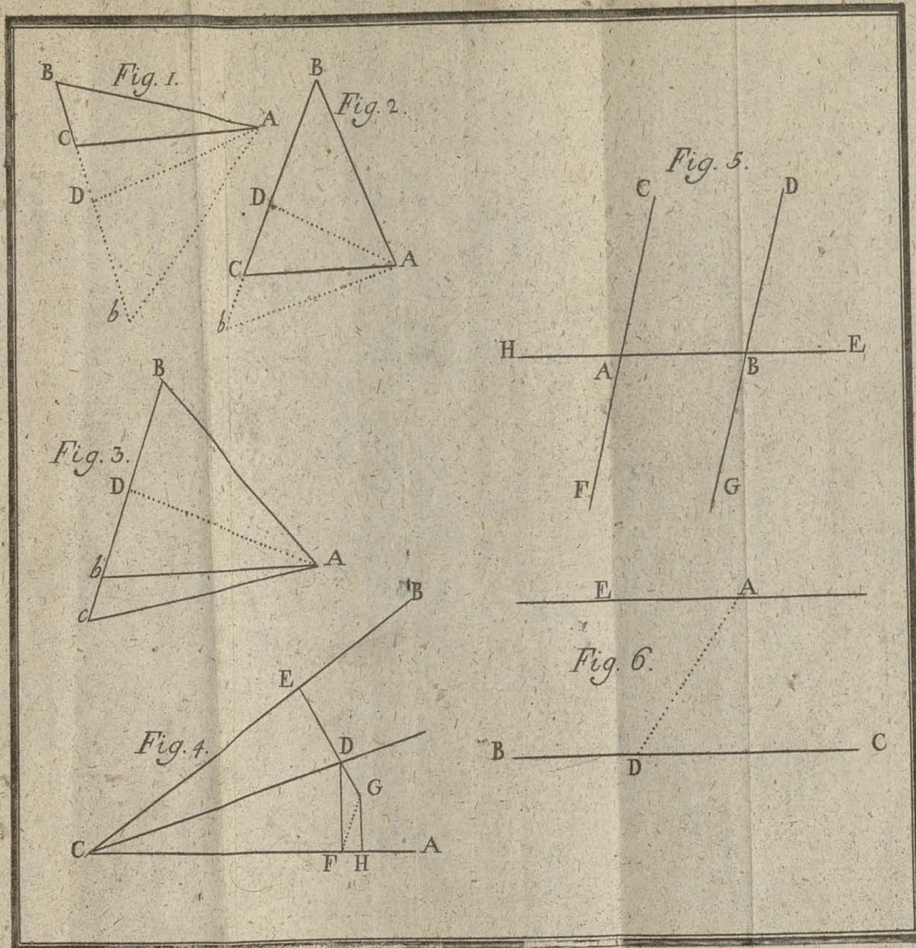


Fig. 1.
B
A
C
D
b
Fig. 2.
B
D
C
A
b
Fig. 3.
B
D
b
A
c
Fig. 4.
B
E
D
G
C
F
H
A
Fig. 5.
C
D
H
E
A
B
F
G
Fig. 6.
E
A
B
C
D

Tab. VI.

Fig. 1.

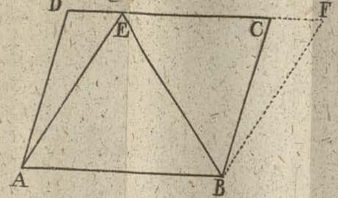


Fig. 2.

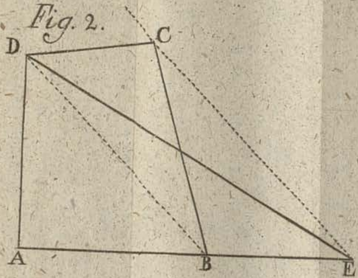


Fig. 3.

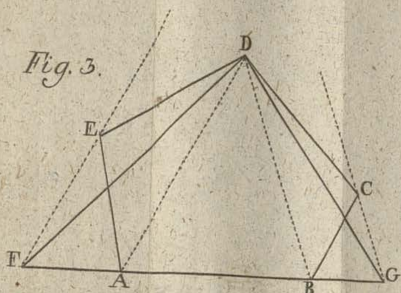


Fig. 4.

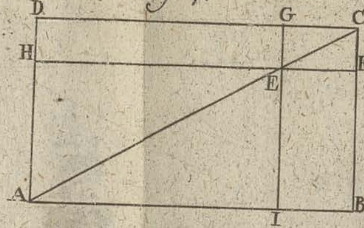


Fig. 5.

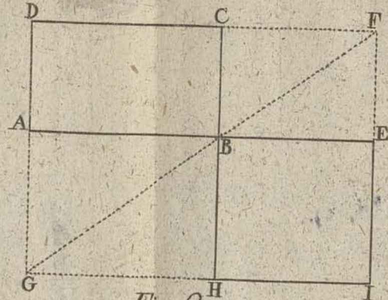
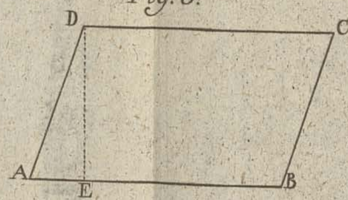


Fig. 6.



Tab. V.

Fig. 1.

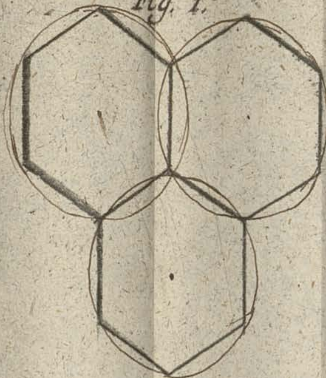


Fig. 2.

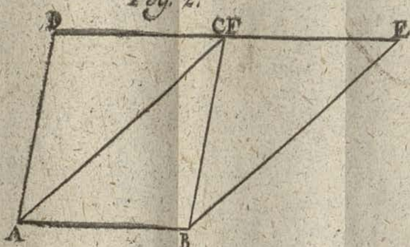


Fig. 3.

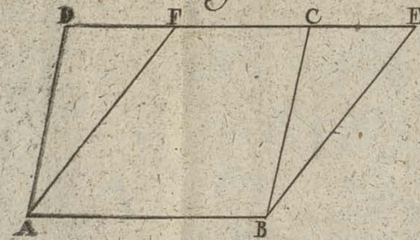


Fig. 4.

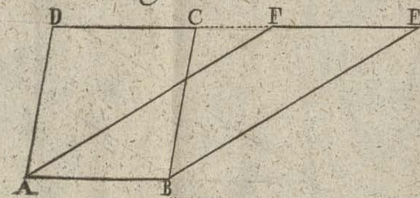
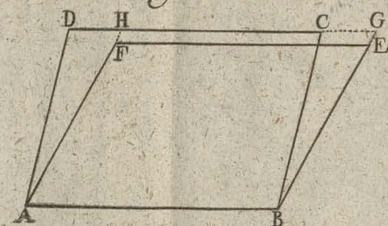


Fig. 5.



Tab. IV.

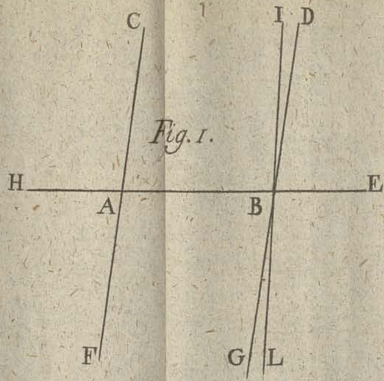


Fig. 1.

Fig. 2.

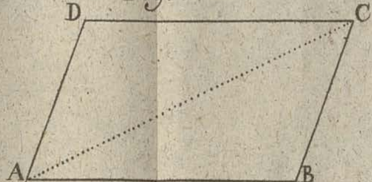
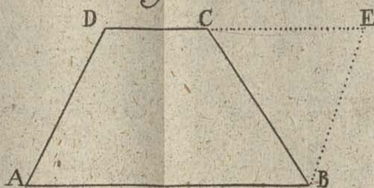


Fig. 3.



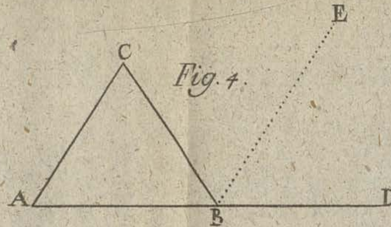


Fig. 4.

Fig. 5.

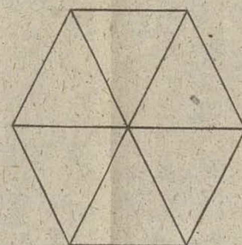


Fig. 6.

Tab. VIII.

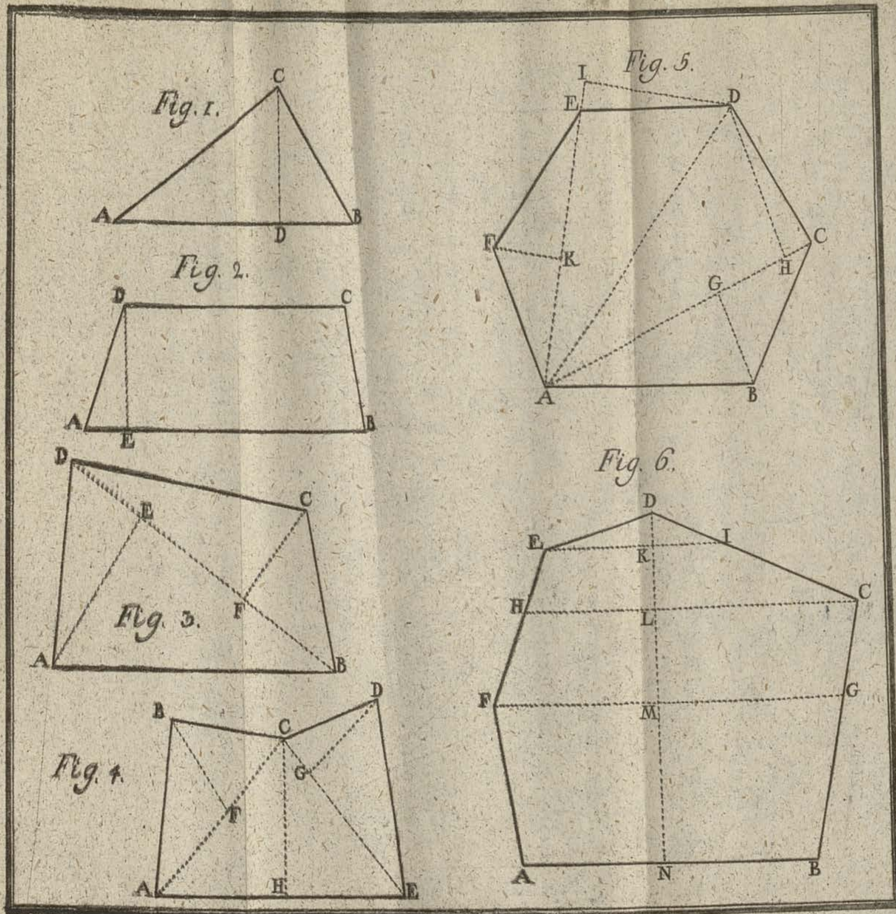


Fig. 1.
C
A
D
B
Fig. 2.
D
C
A
E
B
Fig. 3.
D
E
C
F
A
B
Fig. 4.
B
C
D
G
F
A
H
E
Fig. 5.
I
E
D
F
K
C
H
G
A
B
Fig. 6.
D
E
I
K
C
H
L
F
M
G
A
N
B

Tab. VIII.

Fig. 1.

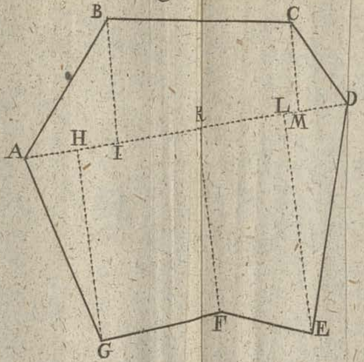


Fig. 3.

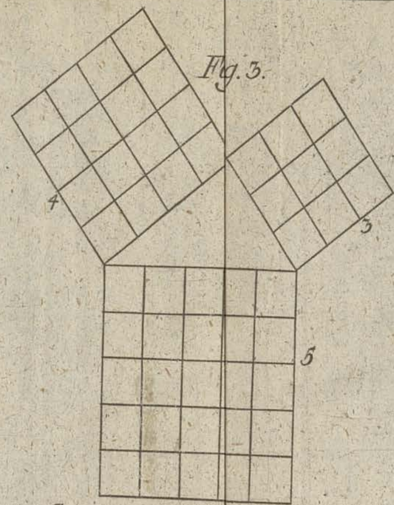


Fig. 2.

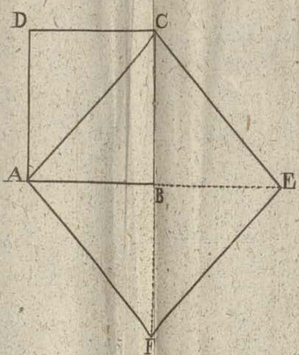
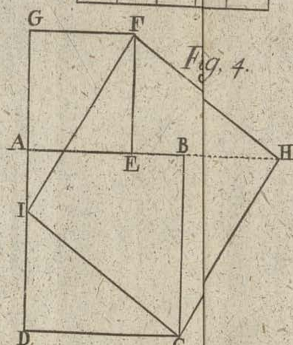


Fig. 4.



Tab. IX.

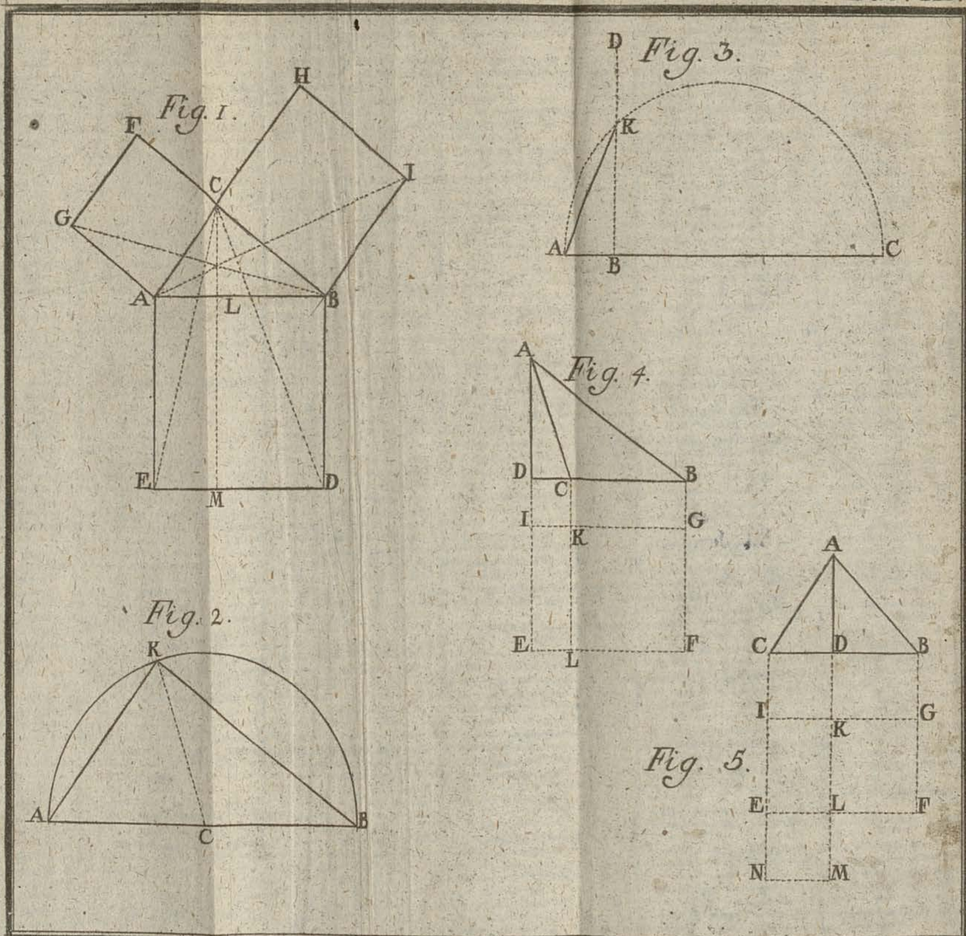


Fig. 1.

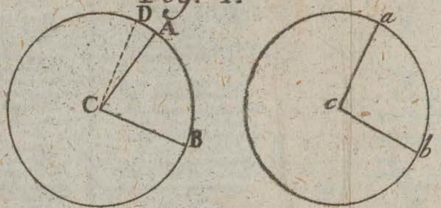


Fig. 2.

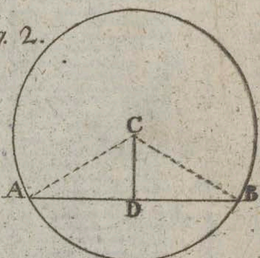


Fig. 3.

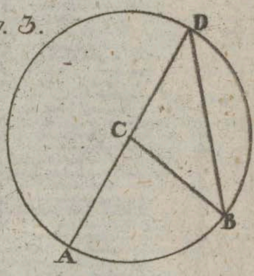


Fig 4.

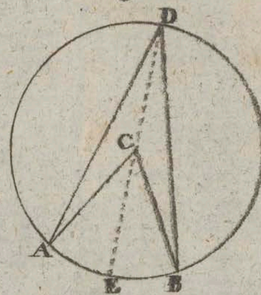


Fig. 5.

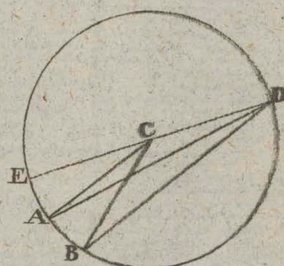
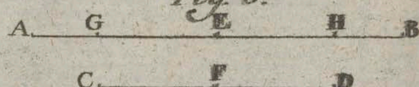


Fig 6.



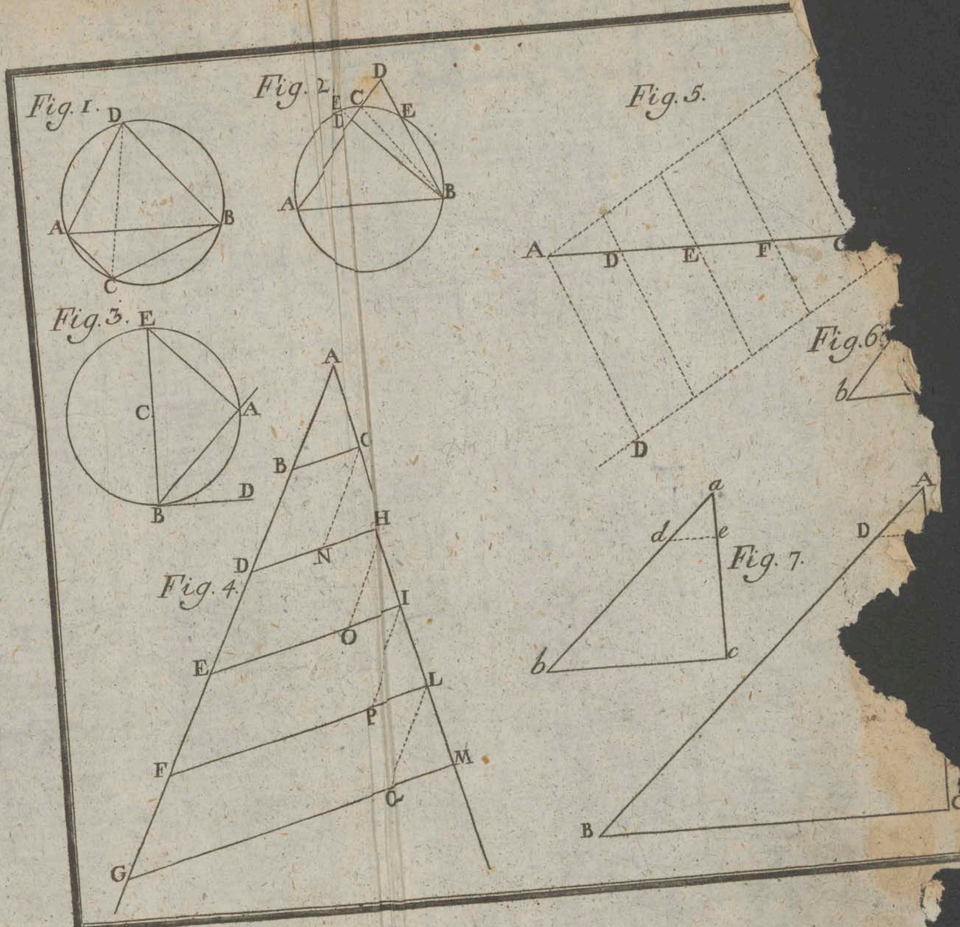
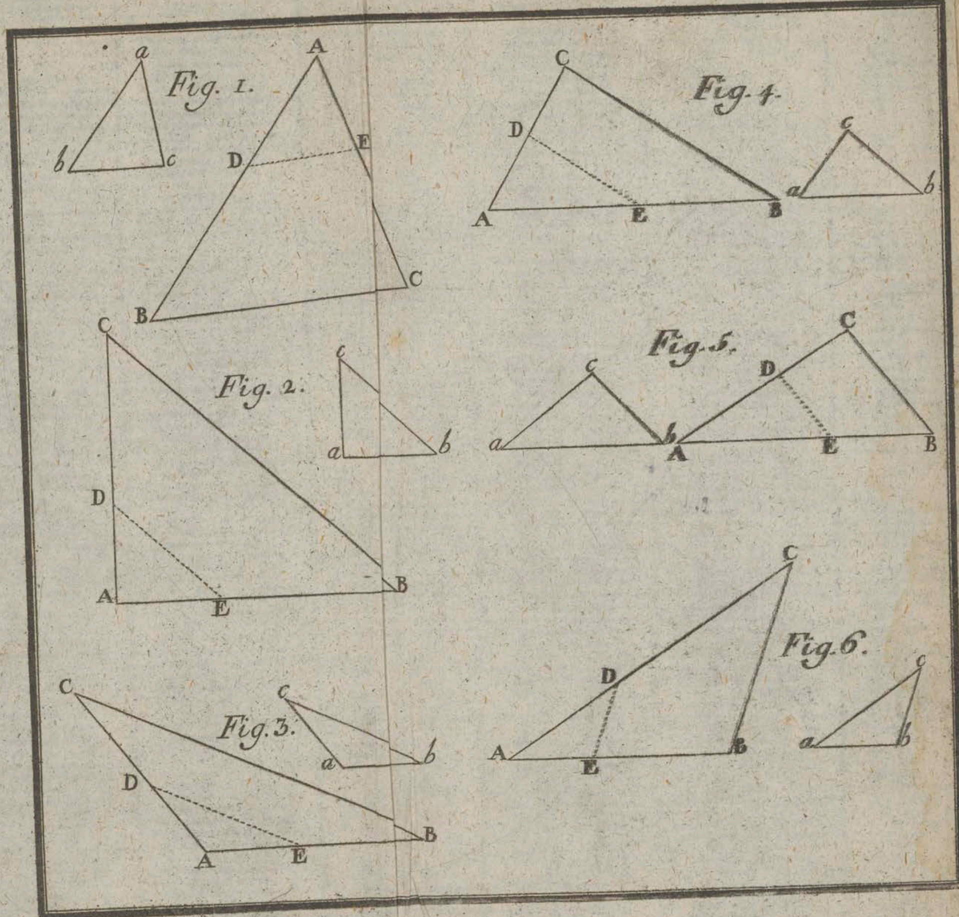


Fig. 1.
D
A
B
C
Fig. 2.
D
E
C
D
E
A
B
Fig. 3.
E
C
A
B
D
Fig. 4.
A
C
B
H
D
N
I
O
E
L
P
F
M
Q
G
Fig. 5.
A
D
E
F
C
D
Fig. 6.
b
Fig. 7.
a
d
e
b
c
A
D
B
C

Tab. XII.



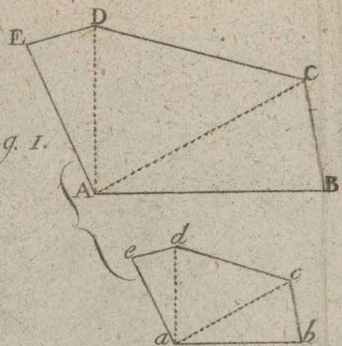


Fig. 1.

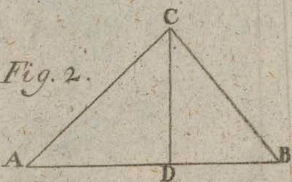


Fig. 2.

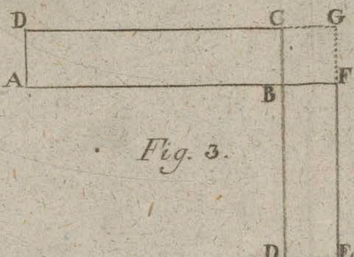
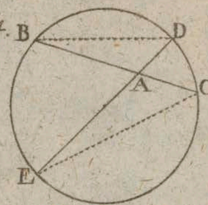


Fig. 3.

Fig. 4.



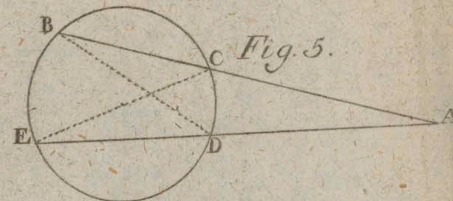


Fig. 5.

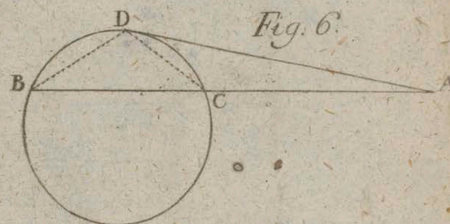


Fig. 6.

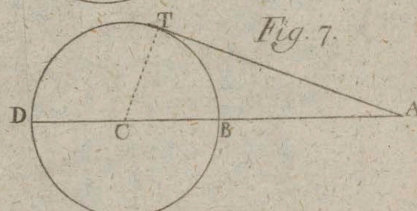


Fig. 7.

Tab. XIV

Fig. 1.

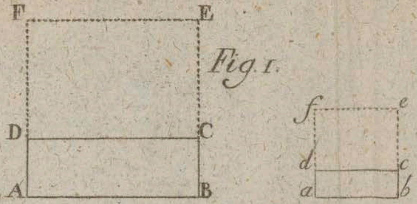


Fig. 2.

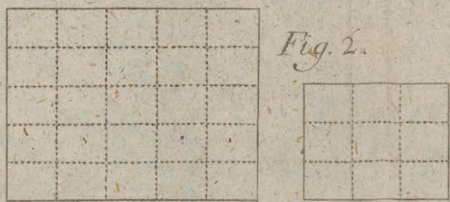


Fig. 4.

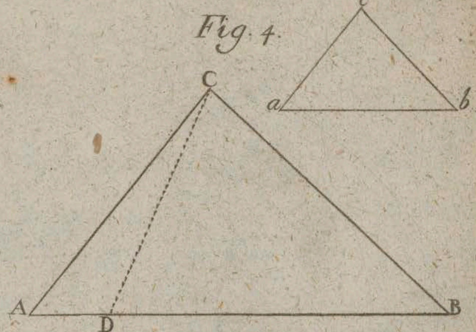


Fig. 3.

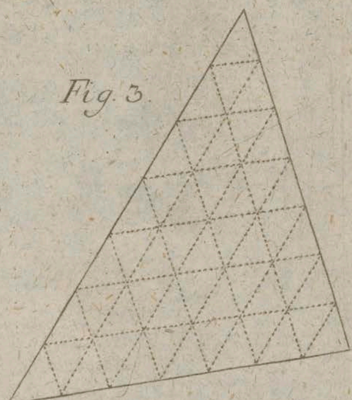
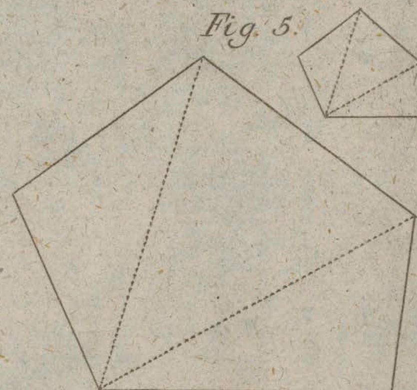
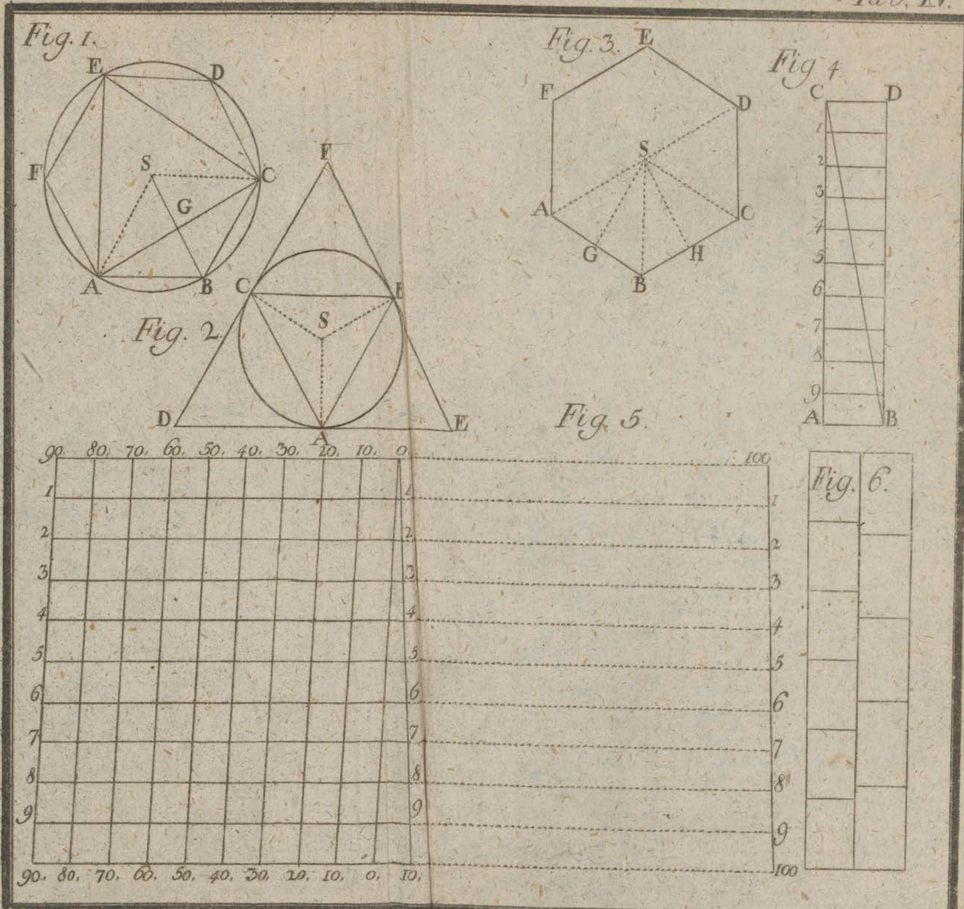


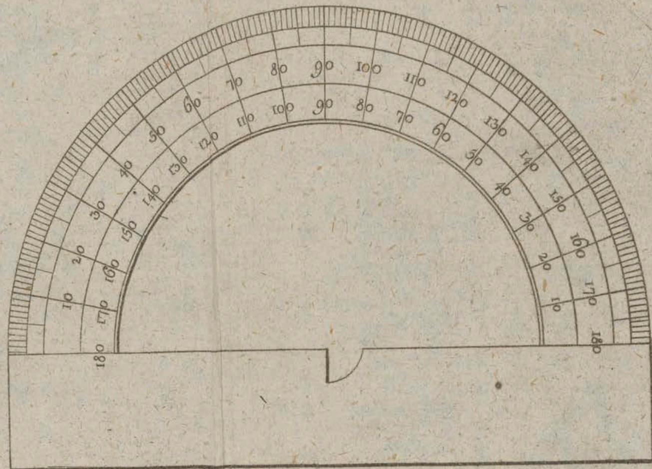
Fig. 5.



Tab. IV.



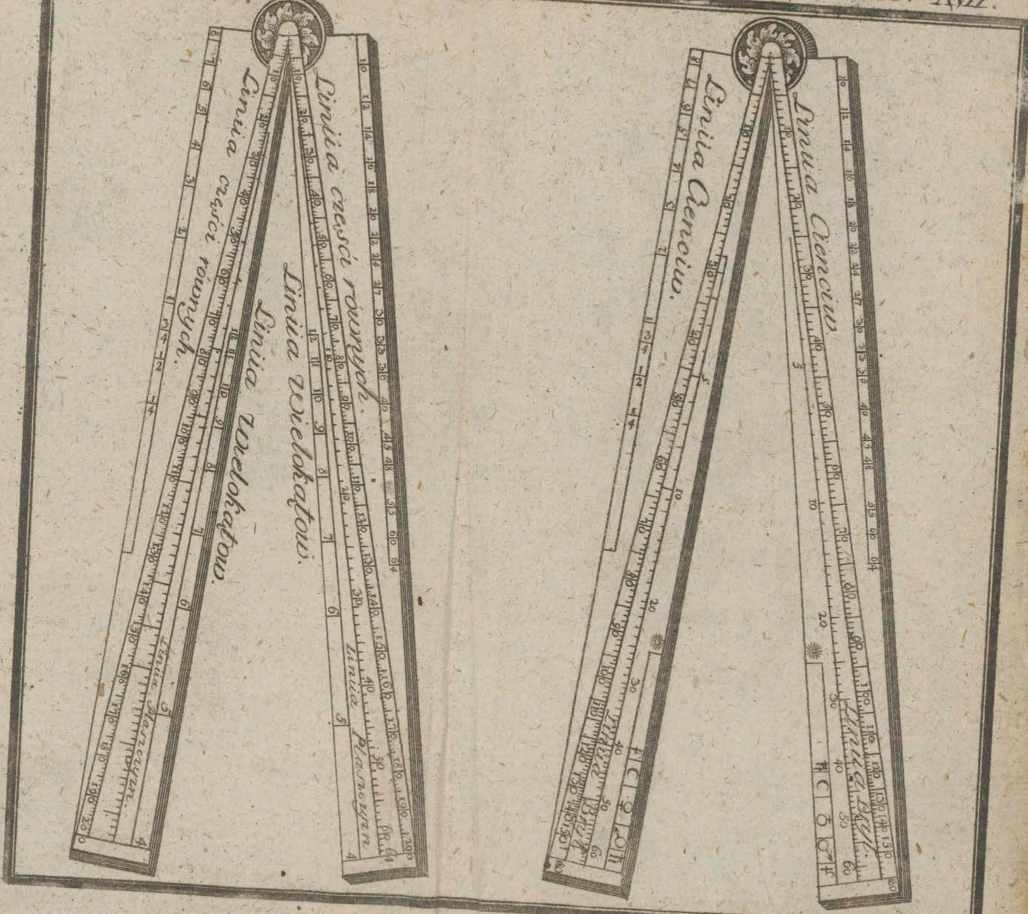
Tab. XVI.


10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
180
170
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
180

Jan Łunkiewicz

Uczeń Klassy 3ciey

Tab. XVIII.


Linia części równych.
Linia części równych.
Linia Wielokątow.
Linia Wielokątow.
Linia Płaszczyzn.
Linia Płaszczyzn
Linia Cięciw.
Linia Cięciw.
Linia Bryl.

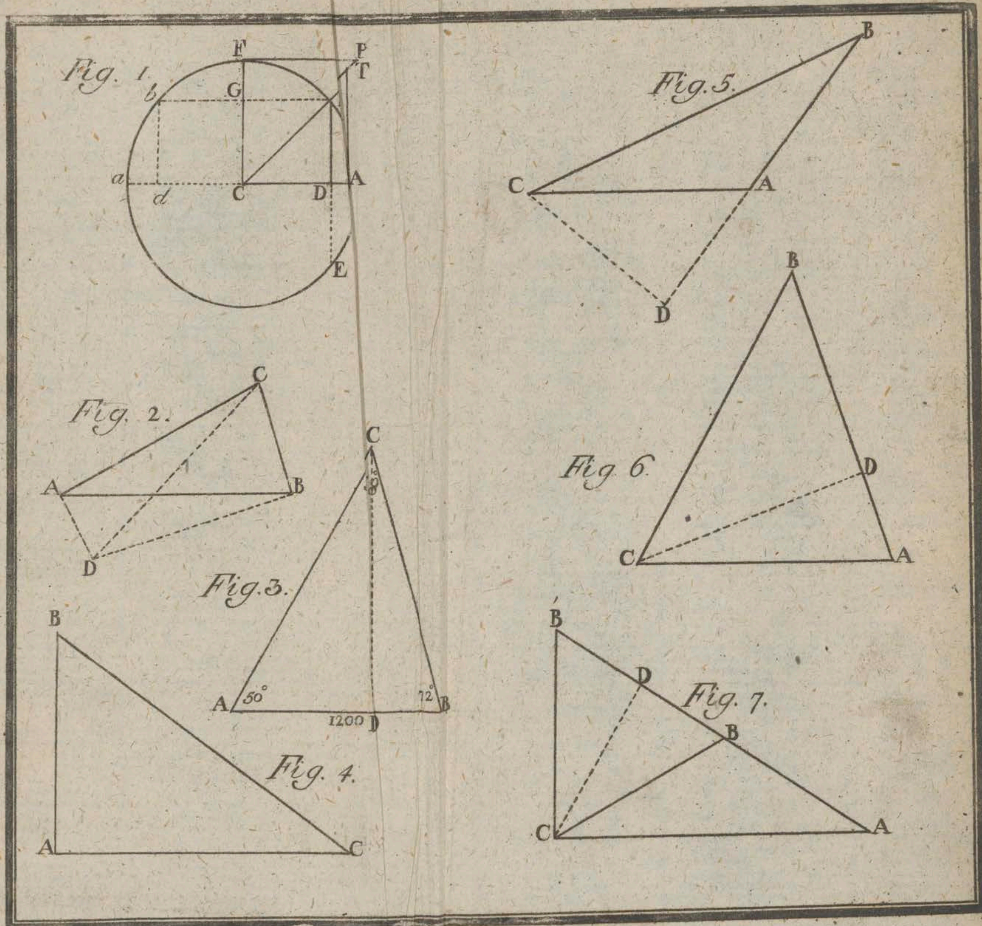
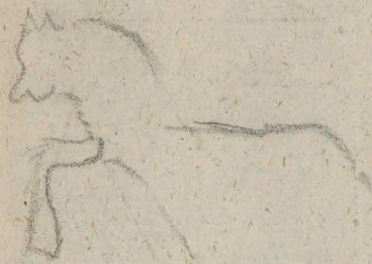
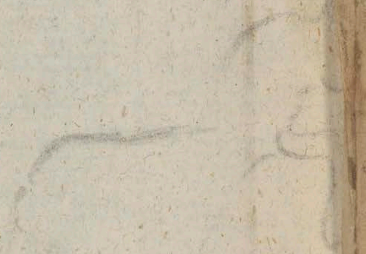


Fig. 1.
F
P
T
G
b
a
d
C
D
A
E
Fig. 2.
C
A
B
D
Fig. 3.
C
A
50°
72°
B
1200
D
Fig. 4.
B
A
C
Fig. 5.
B
C
A
D
Fig. 6.
B
D
C
A
Fig. 7.
B
D
B
C
A





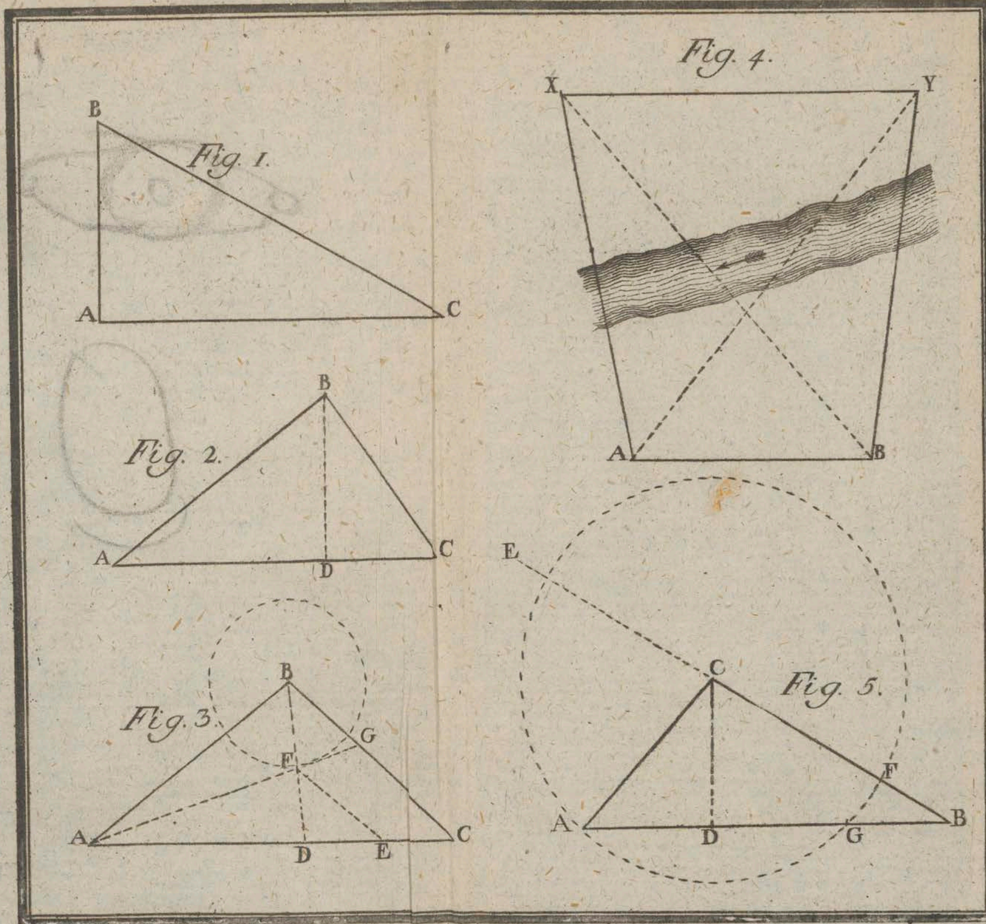
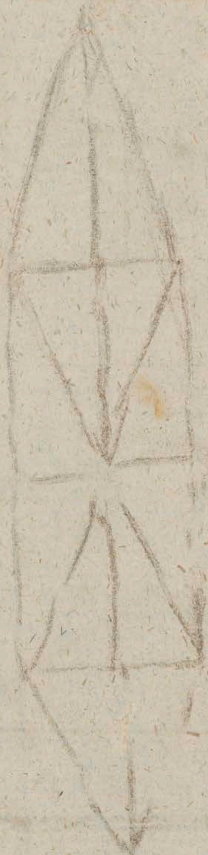
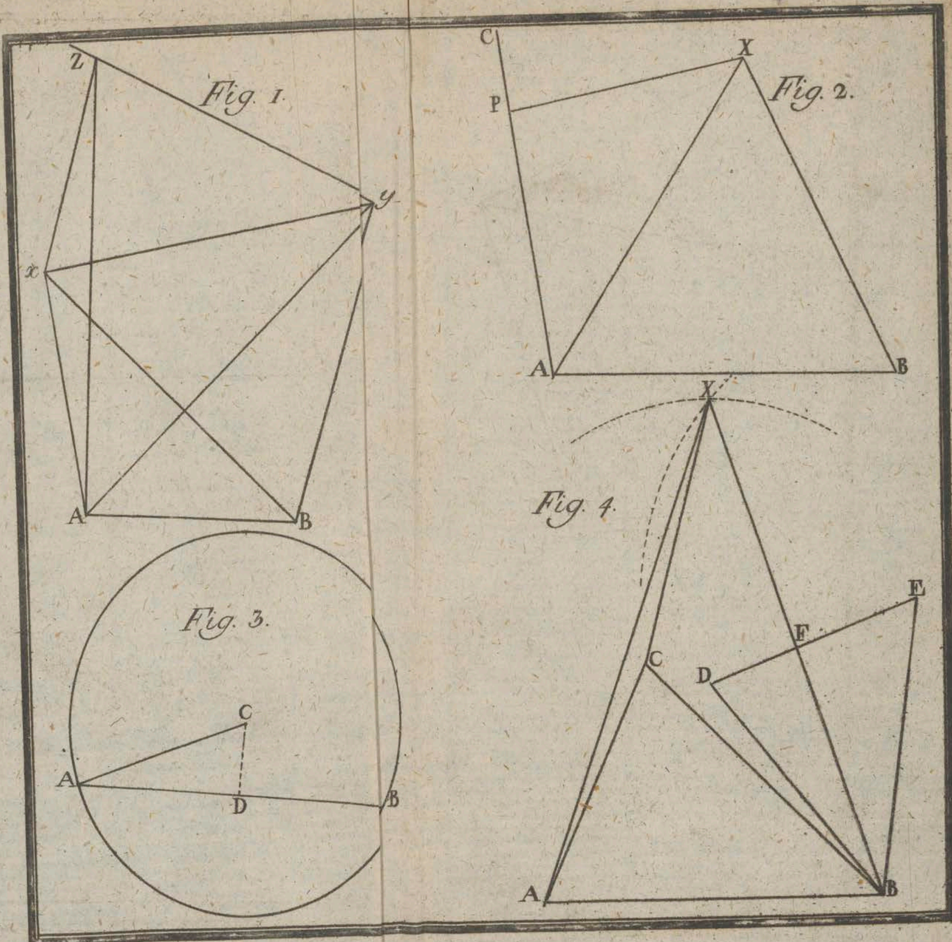


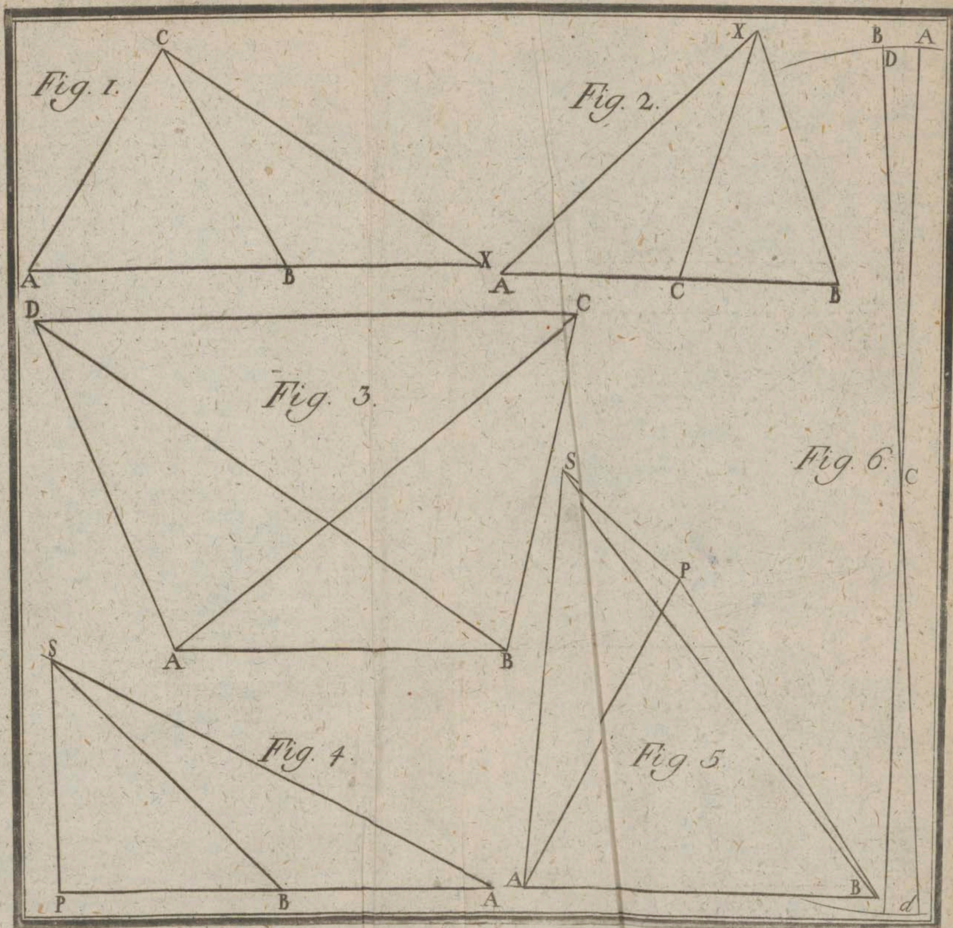
Fig. 1.
B
A
C
Fig. 2.
B
A
D
C
Fig. 3.
B
G
F
A
D
E
C
Fig. 4.
X
Y
A
B
Fig. 5.
E
C
F
A
D
G
B



Tab. XX.



Tab. XXI.



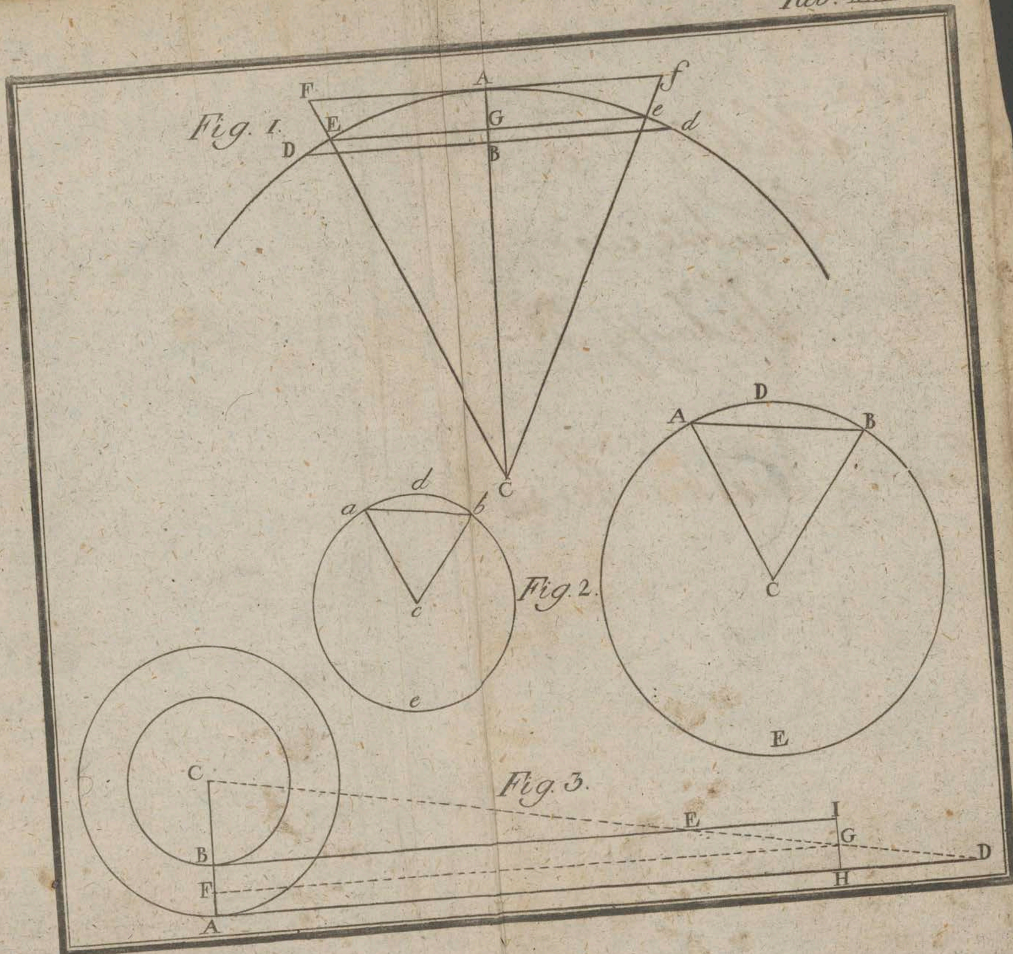


Fig. 1.
F
A
f
E
G
e
d
D
B
C
Fig. 2.
d
a
b
c
e
D
A
B
C
E
Fig. 3.
C
I
E
G
B
D
F
H
A

...zka Ta Należy Do
Jana Łunkiewicza
Ucznia Klassy 3ciey
Jan Łunkiewicz
Иван Лункевич
...ван Лункевич
...зен Класси Второй

$\cancel{(ax+bx)}(2bx-ca)\cancel{(3bx-da)2bx-2bx=c}$

$\cancel{(ax+ba)(3bx-da+ax(2bx+2bx-3abx+4ax)}$

$(ax+bx)(3bx-da+2ba$

$(-2bx+5bx-3abx+4ax)$