ВѢСТНИКЪ МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

№ 5 и 6.

I.

Ueber das neue Repsold'sche Aequatoreal der Sternwarte zu Gotha.

von Herrn Geheimen Regierungsrath *P. A. Hansen*.

(*Schluss*.—S. №. 3.)

Ich werde jetzt die Beobachtungen, deren ich oben erwähnt habe, hersetzen.

1860 Dec. 5.

	Uhrzeit	*Ang. d. Stund Kr.*	*Ang. d. Decl. Kr.*
α Ursae min	$14^h\,47^m\,27^s,81$	$1^h\,10^\circ\,39'\,35'',7$	$91^\circ\,24'\,36'',89$
	15 36 27, 96	14 8 5 37, 9	88 35 13, 84

Bar. $727,^{mm}2$; inn. Th. $+4^\circ,5$ *C*; äüss. Th. $44^\circ,2$ *F*

Dec. 6.

β Aquarii	$21^h\,35^m\,45^s,13$	$0^h\,3^\circ\,17'\,44'',8$	$-6^\circ\,9'\,43'',2$
	21 58 19, 47	12 8 56 7, 2	186 9 46, 7

Bar. $726,^{mm}87$; inn. Th. $+5^\circ,1$; äüss. Th. $38^\circ,7$

α Ophiuchi	$22^h\,20^m\,10^s,40$	$16^h\,13^\circ\,18'\,43'',5$	$167^\circ\,18'\,4'',5$
	22 33 23, 40	5 1 37 2, 3	12 42 22, 5

Bar. $726,^{mm}77$; inn. Th. $+4^\circ,9$; äüss. Th. $39^\circ,3$

Zustand der Atmosphäre: ziemlich unruhig.
Beob. Hr. *H. Repsold*.

Nimmt man zuerst hieraus nach Vorschrift meiner mehrmals angeführten Abhandlung die Mittel, so bekommt man

	Uhrzeit.	*Stund. Kr.*	*Decl. Kr.*
α Ursae min.	$15^h\,11^m\,57^s,89$	$14^h\,1^\circ\,52'\,36'',8$	$88^\circ\,35'\,18'',48$
β Aquarii	21 47 2,30	0 6 6 56,0	— 6 9 45,0
α Ophiuchi	22 26 46,90	4 14 57 52,9	12 42 9,0

Der Nautical Almanac (den ich seit vielen Jahren ausschliesslich als Ephemeride benutze) giebt die folgenden Oerter dieser Sterne,

	α	δ
α Ursae min.	$1^h\,8^m\,45^s,0$	$88^\circ\,34'\,29'',3$
β Aquarii	21 24 14, 44	— 6 10 48, 9
α Ophiuchi	17 28 28, 17	12 39 49, 4

Die erste Arbeit besteht in der Berechnung der Strahlenbrechungen, und diese ergeben sich durch die obigen Ausdrücke wie folgt:

	in τ	in δ
α Ursae min	$-16'\,19'',5$	$-41'',14$
β Aquarii	$+\;7,2$	$-1'\,28,3$
α Ophiuchi	$+\;1\;46,7$	$-2\;\;3,5$

Hierauf wurde μ und m, nach den obigen Ausdrücken aus α Ursae min. und β Aquarii berechnet. Man muss hiefür, den Gang der Uhr anwenden, wenn er nicht ganz klein ist, und die Beobachtungen etwas auseinander liegen, der Gang der angewandten Uhr war nahe$=+2',2$, Hiemit fand sich

$$\mu = 35'',2, \qquad m = 45^\circ\,3'.$$

Um auch η berechnen zu können, war die Declinationsachse in beiden Lagen nivellirt, und hiedurch

$$q = +5'\,28'',2$$

gefunden worden. Da nun

$$\eta = q - \mu \sin(m - q) \operatorname{tg} \varphi$$

ist, so fand sich

$$\eta = +4'\,57'',5.$$

Es fand sich ferner aus diesen Datis die

	Corr. von τ	*Corr* von δ
für β Aquarii	$+\;4'\,54'',5$	$+\;22'',1$
— α Ophiuchi	$+\;5\;\;4,4$	$-\;17,6$

Hieraus ergiebt sich erstlich der vermittelst des obenangeführten Ganges der Uhr auf die Beobachtungszeit von β Aquarii reducirte

Uhrstand.

aus β Aquarii $+ 2^m 0^s, 00$
— α Ophiuchi $+ 2 \; 0, 14$

und ferner die

Declination

von β Aquarii — $6^0 \; 10' 51'',2$ Diff. mit dem Naut. Alm. $= -2'',3$
— α Ophiuchi $12 \; 39 \; 47, 9$ — — — — — $-1, 5$

Ich halte diese Resulsate für gut. Zu erwägen ist dass eine etwaige Wirkung der Biegung des Fernrohrs noch unbekannt und der Zustand der Atmosphäre ungünstig zu nennen ist, so wie das während des Zeitraums von nahe 8^h, den diese Beobachtungen einschliessen, die Reductionselemente des Instruments sich möglicher Weise ein wenig geändert haben können. Besonders ist aber hier in Betracht zu ziehen, dass die beiden Sterne unter Stundenwinkeln beobachtet sind, die einen Unterschied von fast 5^h haben, der eine Stern ist in der Nähe des Meridians, und der andere in der Nähe des ersten Verticals beobachtet worden. Wenn in den Achsen des Instruments, der Stunden- oder der Declinationsachse, merkliche Biegungen noch übrig geblieben wären, so hätten diese sich in den obigen Beobachtungen zeigen müssen, welches aber nicht der Fall ist. Dieselben Beobachtungen geben noch zu weiteren Discussionen Anlass. Man kann erstlich aus jedem der drei Sterne die Collimation des Declinationskreises ableiten. Das in meiner Abhandlung dafür gegebene Ausdruck ist

$$c = 90^0 - \frac{1}{2} (\delta''' + \delta'')$$

wo c diese Collimation bedeutet. Um diesen Ausdruck, welcher in dieser Form für einen festen Punct gilt, auf einen Stern anwenden zu können, muss der Unterschied der Strahlenbrechung, so wie der der Correction des Instruments berücksichtigt werden. Man findet durch eine Ableitung, die so leicht ist, dass ich sie wohl hier nicht anzuführen brauche, dass

$$c = 90^0 - \frac{1}{2} (\delta''' + \delta'' + S)$$

wird, wo

$$S = \left\{ \varrho \frac{\operatorname{tg} \eta \cos \zeta}{\sin^2 (\delta' + \zeta)} + \mu \sin (\tau' + m) \right\} \lambda (T''' - T'')$$

ist, und T'' die Uhrzeit bedeutet, während welcher die Einstellung gemacht ist, bei welcher der Declinationskreis zwischen -90^0 und $+90^0$ zeigt, so wie T''' die Uhrzeit der Einstellung, bei welcher die Angabe des Declinationskreises $> 90^0$ ist. Der Factor λ ist von der in T''' und T'' gewählten Einheit abhängig, und wenn man für diese die Zeitminute wählt, welches mir am Bequemsten zu sein scheint, so ist

$$\log \lambda = 7, 6398 - 10 \quad .$$

Der Stundenwinkel τ', dem auch die Bögen ζ und η entsprechen müssen, ist derselbe, welcher bei den vorhergehenden Reductionen angewandt wurde, nemlich das Mittel aus den Ablesungen am Stundenkreise in beiden Lagen, mit Weglassung der 12^h welche der Stundenkreis in der einen Lage zu viel zeigen muss. Die Bögen ζ und η sind folglich auch dieselben, die in den vorhergehenden Reductionen angewandt wurden. Wenden wir die obigen Ausdrücke auf unsere drei Sterne an, so ergiebt sich

für α Ursae min. $S = +12'', 6$
— β Aquarii $= + \; 3, 7$
— α Ophiuchi $= -16, 0$

und hiemit

$$\left.\begin{aligned} c &= -1'', 7 \\ &= -3, 6 \\ &= -5, 5 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \text{Unterschiede} \\ \text{vom} \\ \text{Mittel} \end{matrix} \left\{\begin{aligned} &+1'', 9 \\ &\;\;0, 0 \\ &-1, 9 \end{aligned}\right.$$

auch ein Resultat, in welchem eine Wirkung von schädlichen Biegungen nicht, oder wenigstens nicht mit Bestimmtheit hervortritt.

Man kann endlich noch aus den obigen Beobachtungen den Winkel $90^0 - k$ zwischen der optischen Achse und der Declinationsachse, so wie den Winkel $90^0 + i$ zwischen der Stunden- und der Declinationsachse bestimmen. Diese Bestimmung verlangt die Einstellung von zwei Sternen oder Gegenständen, und für den einen dieser wendet man am zweckmässigsten α Ursae min. in einem beliebigen Puncte seiner täglichen Bahn an. Für den zweiten ist es am zweckmässigsten entweder einen im Süden in der Nähe des Meridians liegenden terrestrischen Gegenstand, oder einen tief südlich culminirenden Stern anzuwenden, dessen Ort man nicht näher zu kennen braucht, wie eben diese Einstellung ihn zu geben vermag. Der oben erwähnte terrestrische Gegenstand, welcher in einem Azimuth von $3^0 \; 14'$ liegt, ist dazu sehr passend, allein wegen der ungünstigen Witterung haben wir ihn seit der Aufstellung des Aequatoreals bis jetzt nur selten und undeutlich sehen können. Wir haben ihn eben nur dazu anwenden können um die Reductionselemente des Aequatoreals durch die an demselben befindlichen Correctionsschrauben einiger Massen klein zu machen. Weder β Aquarii noch α Ophiuchi sind tief südlich culminirende Sterne, und daher zur sicheren Bestimmung von i und k wenig geeignet, allein man kann doch, wenn man sie beide mit α Ursae min. verbindet, und die Methode der kleinsten Quadrate dabei anwendet, untersuchen mit welcher Genauigkeit sich die obigen Beobachtungen durch dieselben Werthe von i und k darstellen lassen, und daraus wieder einen Schluss auf etwa übrig gebliebene schädliche Biegungen ziehen.

Wen wir zuerst einen unbeweglichen Gegenstand betrachten, so ist zufolge meiner mehrmals erwähnten Abhandlung für die Einstellung in der einen Lage.

$$\tau' = \tau'' + i \operatorname{tg} \delta' + k \sec \delta'$$

und für die Einstellung in der anderen Lage

$$12^h + \tau' = \tau''' - i \operatorname{tg} \delta' - k \operatorname{Sec} \delta'$$

wo nöthigen Falls 24^h zu der für τ''' erhaltenen Ablesung addirt werden muss. Hieraus folgt

$$i \operatorname{tg} \delta' + k \sec \delta' = \frac{1}{2} (\tau''' - \tau'' - 12^h).$$

Wenn man statt des unbeweglichen Gegenstandes einen Stern substituirt, so muss man wie oben den Unterschied der Wirkung der Strahlenbrechung und der Correction des Instruments, und überdiess noch das Zeitintervall zwischen beiden Einstellungen berücksichtigen. Man findet leicht

$$i \operatorname{tg} \delta' + k \sec \delta' = \tfrac{1}{2} \{\tau''' - \tau'' - 12^h - (T''' - T'') + R\}$$

wo

$$R = \left\{ \varrho \frac{\sin \zeta}{\sin(\delta+\zeta)\cos \delta} + \varrho \frac{\operatorname{tg} \eta}{\sin(\delta+\zeta)} + \right.$$
$$\left. + \mu \operatorname{tg} \delta' \cos(\tau' + m) \right\} \lambda \, (T''' - T')$$

und die Buchstaben dieselbe Bedeutung haben, wie oben bei der Bestimmung der Collimation des Declinationskreises. Für die obigen Beobachtungen fand sich

für α Ursae min. $R = + 6' \, 52'', 5$
— β Aquarii $= + \quad 6, 3$
— α Ophiuchi $= - \quad 12, 5$

und hiemit erhalten wir für diese drei Sterne die folgenden Gleichungen

$$(1.6078)\, i + (1.6078)\, k = -123'',8$$
$$(9.0336)\, i + (0.0025)\, k = - \quad 3,2$$
$$(9.3529)\, i + (0.0108)\, k = - \quad 8,2$$

in welchen für die Coefficienten von i und k die Logarithmen derselben angesetzt sind. Löst man diese Gleichungen durch die Methode der kleinsten Quadrate auf, indem man der für α Ursae min. das Gewicht $= \frac{1}{100}$ beilegt, so kommt man auf die folgenden Endgleichungen,

$$16,49246\; i + 16,5524\; k = - \; 51'',682$$
$$16,5524\; i + 18,493\; k = - \; 61,804$$

bei deren Auflösung man am Zweckmässigsten statt der einen den Unterschied von beiden, nemlich

$$0,05994\, i + 1,9406\, k = -10'',122$$

anwendet. Die Auflösung giebt

$$i = +2'',160, \qquad k = -5'',282$$

und substituirt man diese Werthe der Unbekannten in die obigen drei Gleichungen, so ergeben sich

die übrig bleibenden Fehler $= +2,''6$
$+2,3$
$-3,3$

in welchen auch keine schädlichen Biegungen zu erkennen sind. Ueberhaupt hat also die Untersuchung der obigen Beobachtungen das Vorhandensein von schädlichen Biegungen nicht heraus gestellt, da die erhaltenen kleinen Unterschiede sehr wohl aus anderen Ursachen herrühren können. Sollte jedoch die Folge zeigen, dass dennoch an den hier erhaltenen kleinen Unterschieden kleine übrig gebliebenen Biegungen einen Antheil haben, so bietet die Einrichtung dieses Aequatoreals, dadurch dass man die Längen der betreffenden Hebelarme und die Gegengewichte um ein Weniges verändern kann, die Hülfsmittel dar, um diese Biegungen gänzlich zu beseitigen. Ich werde diese und andere Prüfungsbeobachtungen fortsetzen, sobald der Himmel es erlaubt.

Zum Schlusse dieses Aufsatzes will ich ein neues Verfahren zur Bestimmung der Biegung des Fernrohrs angeben, auf welches ich vor einiger Zeit unabhängig gekommen bin.

Man hat schon seit einer geraumen Anzahl von Jahren Untersuchungen über die Biegung der Fernröhre angestellt, ist aber immer dabei in so weit indireckt zu Werke gegangen, dass man unter der Annahme eines Biegungsgesetzes den oder die Biegungscoefficienten a posteriori aus den Beobachtungen zu bestimmen suchte. Ich habe im Gegentheil gesucht, die Biegung ohne die Annahme irgend eines Gesetzes derselben direct zu bestimmen, und sie dem Beobachter unmittelbar vor das Auge zu führen. Ich denke mir das Fernrohr von der gewöhnlichen Einrichtung, so dass es aus zwei mit ihrem einen Ende an einen Würfel angeschraubten, gleich langen, Röhren besteht, und dass dieser Würfel entweder einen Theil der Achse bildet, um welche sich das Fernrohr bewegt, oder an dieser Achse hinreichend fest angeschraubt ist. Sei unter dieser Voraussetzung a der am Mittelpunkt des Würfels gemessene Winkel, um welchen sich das Objectivende, und b der analoge Winkel, um welche sich das Ocularende durch die Einwirkung der Schwere auf seine Masse gebogen hat, dann ist die

$$\text{Correction der Zenitdistanz} = \frac{a-b}{2}$$

oder die Wirkung der Biegung ist dem halben Unterschiede der Biegung der beiden Rohrenden gleich. Befestigt man nun in der Mitte des Würfels auf eine so solide Art, dass daran keine Biegung zu befürchten ist, welches immer bewerkstelligt werden kann, ein convexes Glas, dessen Brennweite dem vierten Theil der Brennweite des Objectivs des Fernrohrs gleich ist, so wird das Bild eines an die Stelle des Objectivs gestellten Gegenstandes in die Ebene des Fadennetzes fallen. Man verschaft sich einen solchen Gegenstand dadurch, dass man das Objektiv heraus nimmt, und an dessen Stelle einen Metalkörper von gleichem Gewicht und möglichst gleicher Form befestigt, in dessen Mittelpunkt sich eine kleine kreisförmige Oeffnung befindet. Stellt man nun in irgend einer beliebigen Lage des Fernrohrs die beweglichen Fäden des Fadennetzes auf das Bild dieser Oeffnung ein und verändert darauf die Zenitdistanz, auf welche das Fernrohr zeigt, so wird vermöge der veränderten Biegung die Lage des Bildes gegen die Fäden eine andere sein, und indem man es wieder einstellt, und wieder abliest, bekommt man den Unterschied der Biegung des Rohrs für diese beiden Zenithdistanzen. Dadurch dass man nach und nach das Fernrohr auf eine Anzahl im ganzen Umkreise vertheilten Zenithdistanzen bringt, jedes Mal das Bild der beschriebenen Oeffnung einstellt, und die Mikrometerscalen abliest, bekommt man die allen diesen Zenithdistanzen entsprechenden Biegungen, da man selbstverständlich für irgend eine beliebige derselben die Biegung für Null ansehen darf. Sind die Zenithdistanzen in hinreichend grosser Anzahl ausgewählt worden, so kann man für die nicht eingestellten die Interpolation anwenden; und man findet auf diese Art nicht nur die Biegung in vertikaler Richtung, sondern auch etwa vorhandene laterale Biegungen.

Aber man wird leicht einsehen, dass sich durch dieses Verfahren die Werthe der Summe $a+b$ für jede Zenithdistanz ergeben, während man, wie oben gezeigt wurde, die Werthe des Unterschiedes $a-b$ haben muss. Um dahin zu gelangen, nehme man das Convexglas heraus, und befestige an dessen Stelle einen Hohlspiegel, dessen

Radius seiner Entfernung vom Fadennetze gleich kommt, und durch welchen man also, wenn man die Beleuchtung der Fäden anwendet, oder sich einer Beleuchtungsart bedient, die der bei der Anwendung des Bohnenberger'schen Horizonts üblichen ähnlich sein kann, die von demselben verursachten Bilder der Fäden mit den Fäden zugleich deutlich sehen wird. Wiederholt man hiemit die Einstellungen und Ablesungen in denselben Zenithdistanzen wie vorher, so bekommt man die entsprechenden Werthe von b, und aus b und $a+b$ kann man $\frac{1}{2}(a-b)$ berechnen.

Dieses Verfahren ist einer Controlle fähig. Wendet man die spiegelnde Oberfläche des Hohlspiegels dem Objectivende des Fernrohrs zu, und bringt in dem oben erwähnten Metalkörper statt der kleinen kreisförmigen Oeffnung ein Ocular mit beweglichen Fäden an, wozu man allenfalls ein mikrometrisches Mikroscop nehmen kann, nachdem man dessen Objectivglas heraus genommen hat, und wiederholt damit wieder die vorbeschriebenen Messungen, so bekommt man die correspondirenden Werthe von a, durch welche man, entweder in Verbindung mit denen von b, oder mit denen von $a+b$, auch die Werthe von $\frac{1}{2}(a-b)$ berechnen kann, die wenn alles richtig ausgeführt worden ist, mit den oben gefundenen, wenigstens innerhalb annehmbarer Grenzen, übereinstimmen müssen. Dasselbe Verfahren kann auch in anderen Fällen zur Bestimmung von Biegungen angewandt werden, von welchen ich aber, um diesen Aufsatz nicht zu weit auszudehnen, hier nicht reden kann. Die Herrn *Repsold* werden für das hier besprochene Aequatoreal einen solchen Apparat anfertigen.

P. A. Hansen.

Gotha 1860 Dec. 17.

Anmerkung der Redact.—In dem ersten Abschnitt dieses Aufsatzes (№ 3) sind leider, der Krankheit des Herausgebers wegen, sehr viele Druckfehler stehen geblieben von denen die wesentlichsten hier zur Berichtigung in entsprechenden Columnen angegeben sind.

Seite.	*Zeile.*	*gedruckt.*	*verbessert.*
20	16 u 17	statiche	statische
—	18	bezeiebnet	bezeichnet
21	18 *unt.*	da durch	dadurch
23	22	Nenn	Nennt
24	1	$J = 40\ 0\ 16'$	$J = 40^0\ 16'$
—	3	$-P=$	$P=$
—	4	$-P=$	$-P'=$
—	17	minuten	Minuten
25	3	$\sin(t+m)$	$\sin(t'+m)$
—	5	$\mathrm{tg}\,\delta''$	$\mathrm{tg}\,\delta'$
21	—	Zahlen $=\begin{cases}252,0\\116,1\end{cases}$ $=\overline{368,1}$	Zahlen $=\begin{cases}252,0\\116,1\end{cases}$ $Q=\overline{368,1}$
—	5 *unt.*	$=4,368$ Zoll	$c=4,368$ Zoll
23	in der Tabelle	*P und P'* Diff. 0′ 6″,7 30 ,0 1 58 ,1 } 4″,1 59 ,2 }	*P und P'* Diff. 1′ 6″,7 1 30 ,0 1 58 ,1 } 1″,1 50 ,2 }
24	1	$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')$	$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)$

Доказательство основной теоремы вычисленія варіяцій опредѣленныхъ интеграловъ.

Извѣстно, что варіяція опредѣленнаго интеграла можетъ быть получена двумя различными способами, смотря потому будемъ ли, или нѣтъ измѣнять перемѣнныя независимыя, относительно которыхъ интегралъ берется. Пуассонъ въ своемъ мемуарѣ о варіяціонномъ исчисленіи (*) выводитъ варіяціи интеграла, измѣняя перемѣнныя независимыя, относительно которыхъ интегралъ берется; но, отдавая всю справедливость выводу этого знаменитаго геометра, нельзя не замѣтить, что Пуассонъ вводитъ въ отъискиваніе варіяціи интеграла родъ новаго начала, которое состоитъ въ разсматриваніи перемѣнныхъ независимыхъ, какъ функцій другихъ вспомогательныхъ перемѣнныхъ. Нашъ Академикъ Остроградскій въ своемъ мемуарѣ о варіяціи многократныхъ интеграловъ (**) доказываетъ, что разсмотрѣніе перемѣнныхъ вспомогательныхъ совершенно излишне и что безъ него со всею простотою и ясностью получается варіяція многократнаго интеграла, на основаніи однихъ только началъ вычисленія варіяцій, положенныхъ Лагранжемъ. Въ § IV своего мемуара. г. Остроградскій выводитъ формулу, составляющую основную теорему вычисленія варіяцій опредѣленныхъ интеграловъ; мы предлагаемъ доказательство той-же формулы, основанное на однихъ только началахъ вычисленія варіяціи, положенныхъ Эйлеромъ (***), не прибавляя къ нимъ никакого посторонняго начала. Такъ какъ изъ самаго понятія о способѣ Эйлера—находить варіяціи функцій слѣдуетъ, что для отъисканія варіяціи опредѣленнаго интеграла по этому способу необходимо сдѣлать переходъ отъ одного къ другому изъ интеграловъ, имѣющихъ различные предѣлы, то мнѣ кажется что преобразованіе перемѣнныхъ будетъ весьма при-

(*) Mémoire sur le calcul des variations. Mémoires de l' Académie des sciences de Paris. 1833. p. 223.

(**) Mémoire sur le calcul des variations des intégrales multiples. 134. Mémoires de l' Académie des sciences de St. Pétersbourg. 1835. p. 35. série VI, tome 1.

(***). Methodus nova calculum variationum traetandi. Novi commentarii Académiae Petropolitanae. T. XVI. pag. 35. 1771.

личнымъ средствомъ для этаго перехода, если сдѣлать его, измѣняя перемѣнныя независимыя.

Пусть будетъ опредѣленный многократный интегралъ $V = \int \ldots W\, dx\, dy\, dz \ldots$ взятъ между всѣми значеніями перемѣнныхъ $x, y, z \ldots$ которыя удовлетворяютъ неравенству $L < 0$, гдѣ L есть такая функція отъ $x, y, z \ldots$ что при предѣлахъ этаго интеграла будемъ имѣть $L = 0$. По способу Эйлера мы найдемъ варіяцію интеграла V слѣдующимъ образомъ.

Возмемъ другой опредѣленный многократный интегралъ $V_i = \int \ldots W_i\, dX_i, dY_i\, dZ_i \ldots$ для всѣхъ значеній $X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ которыя удовлетворяютъ неравенству $L_i < 0$, гдѣ L_i есть такая функція отъ $X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ что при предѣлахъ интеграла V_i будемъ имѣть $L_i = 0$. Функція W_i отъ $U_i, X_i, Y, Z_i \ldots$ и частныхъ производныхъ зависимой перемѣнной U_i относительно $X_i, Y_i, Z_i \ldots$ есть точно такая же функція, какъ W отъ $u, x, y, z \ldots$ и отъ частныхъ производныхъ зависимой перемѣнной u относительно $x, y, z \ldots$ Кромѣ того перемѣнныя независимыя $X_i\, Y_i, Z_i \ldots$ суть совершенно произвольныя функціи отъ произвольной постоянной i и отъ $x, y, z \ldots$ такого свойства, что онѣ при $i = 0$ непрерывны и дѣлаются соотвѣтственно равными $x, y, z \ldots$; означимъ эти функціи чрезъ $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \ldots$ т. е. $X_i = \psi_1(i, x, y, z \ldots), Y_i = \psi_2(i, x, y, z \ldots), Z_i = \psi_3(i, x, y, z \ldots)$; производныя $X_i, Y_i, Z_i \ldots$ по i при $i = 0$ считаются равными соотвѣтственно варіяціямъ $\delta x, \delta y, \delta z \ldots$ перемѣнныхъ $x, y, z \ldots$; равнымъ образомъ зависимая перемѣнная U_i есть совершенно произвольная функція отъ i и $X_i, Y_i, Z_i \ldots$ такая, что она при $i = 0$ непрерывна и дѣлается равною u; производная U_i по i при $i = 0$ считается равною δu варіяціи u. Варіяція u, какъ извѣстно, состоитъ изъ двухъ частей: первая часть δu есть ничто иное, какъ обыкновенный дифференціалъ u, взятый по $x, y, z \ldots$ въ томъ предположеніи, что дифференціалы $x, y, z \ldots$ равны $\delta x, \delta y, \delta z \ldots$; вторая часть δu есть то, что называется *усѣченною варіяціею*; она получится, если возмемъ частную производную U_i по i, независимо отъ $X_i\, Y_i\, Z_i \ldots$ и положимъ въ этой производной $i = 0$. Если означимъ первую часть δu характеристикою D и вторую часть характеристикою Δ, то можемъ писать $\delta u = Du + \Delta u$. Такъ какъ $X_i\, Y_i\, Z_i \ldots$ суть функціи отъ i и отъ $x, y, z \ldots$ то каждому изъ значеній $x, y, z \ldots$ будетъ отвѣчать соотвѣтствующее ему значеніе $X_i, Y_i, Z_i \ldots$ при всякомъ i; и обратно для каждаго изъ значеній $X_i, Y_i, Z_i \ldots$ будемъ имѣть соотвѣтствующее ему значеніе $x, y, z \ldots$, при всякомъ i; такъ что уравненіе $L = 0$ произойдетъ чрезъ выключеніе $x, y, z \ldots$ изъ равенствъ $L = 0$ и $X_i = \psi_1(i, x, y, z \ldots)$, $Y_i = \psi_2(i, x, y, z \ldots)$, $Z_i = \psi_3(i, x, y, z \ldots)$; ... и всѣ значенія $x, y, z \ldots$ удовлетворяющія неравенству $L < 0$ исчерпываютъ всѣ значенія $X_i, X_i, Z_i \ldots$ удовлетворяющія неравенству $L_i < 0$ при всякомъ i. Такимъ образомъ замѣняя $X_i\, Y_i\, Z_i \ldots$ ихъ функціями отъ $x, y, z \ldots$, мы можемъ всегда ввести въ интегралъ U_i прежнія перемѣнныя $x, y, z \ldots$ Дѣлая это чрезъ преобразованіе перемѣнныхъ, обыкновенно употребляемое въ кратныхъ интегралахъ, мы получимъ интегралъ $V_i = \int \ldots W_i\, T\, dx\, dy\, dz \ldots$ который долженъ быть взятъ уже относительно прежнихъ перемѣнныхъ $x, y, z \ldots$ удовлетворяющихъ неравенству $L < 0$ и слѣдовательно предѣлы интеграла U_i такимъ образомъ преобразованнаго получатся изъ уравненія $L = 0$; подъ T разумѣется опредѣлитель

$$\Sigma\left(\frac{dX_i}{dx}, \frac{dY_i}{dy}, \frac{dZ_i}{dz} \ldots\right).$$

Принявъ это во вниманіе и замѣчая, что предѣлы преобразованнаго интеграла U_i не зависятъ отъ произвольнаго постояннаго i, мы, чрезъ дифференцированіе подъ знакомъ $\int$, получимъ равенство:

$$\frac{dV_i}{di} = \int \ldots \frac{dW_i}{di}\, T\, dx\, dy\, dz \ldots + \int \ldots W_i \frac{dT}{di}\, dx\, dy\, dz \ldots$$

гдѣ мы должны положить $i = 0$, чтобы имѣть варіяцію интеграла V. Тогда

$$\frac{dV_i}{di} = \delta V, \quad W_i = W, \quad \frac{dW_i}{di} \quad \delta W$$

при $i = 0$. Варіяція W, какъ извѣстно, состоитъ изъ двухъ частей: первая часть δW есть

$$\frac{dW}{dx}\delta x + \frac{dW}{dy}\delta y + \frac{dW}{dz}\delta z + \ldots$$

гдѣ нужно измѣнить въ частныхъ производныхъ $\frac{dW}{dx}, \frac{dW}{dy}, \frac{dW}{dz}$, въ первой все то, что измѣняется вмѣстѣ съ x, во второй все то, что измѣняется вмѣстѣ съ y, въ третьей все то что измѣняется вмѣстѣ съ z и т. д.; вторая часть δW происходитъ отъ приращенія Δu. Если означимъ первую часть δW чрезъ D и вторую часть δW чрезъ Δ, мы можемъ написать, что $\delta W = DW + \Delta W$. Всѣ члены суммы $\Sigma\left(\frac{dX_i}{dx}, \frac{dY_i}{dy}, \frac{dZ_i}{dz} \ldots\right)$ кромѣ члена $\frac{dX_i}{dx} \cdot \frac{dY_i}{dy} \cdot \frac{dZ_i}{dz} \ldots$ равны нулю при $i = 0$, потому что производныя X_i относительно $y, z, \ldots$, производныя Y_i относительно $x, z, \ldots$ производныя Z_i относительно $x, y \ldots$ равны нулю при $i = 0$. Это свойство производныхъ $\frac{dX_i}{dy}, \frac{dY_i}{dx}, \frac{dZ_i}{dx} \ldots$, равно какъ и то, что производныя $\frac{dX_i}{dx}, \frac{dY_i}{dy}, \frac{dZ_i}{dz} \ldots$ равны 1 при $i = 0$, мы легко увидимъ, если развернемъ функціи $X_i, Y_i, Z_i \ldots$ по степенямъ i, посредствомъ теоремы Маклорена, если потомъ возмемъ производныя $X_i, Y_i, Z_i \ldots$ относительно $x, y, z \ldots$ и если наконецъ положимъ въ этихъ производныхъ $i = 0$. Такимъ образомъ $T = 1$ при $i = 0$. Если примемъ во вниманіе только что сказанное о суммѣ

$$\Sigma\left(\frac{dX_i}{dx}, \frac{dY_i}{dy}, \frac{dZ_i}{dz}\right)$$

или объ опредѣлителѣ T, если замѣтимъ при этомъ, что перемѣнныя $x, y, z \ldots$ не зависятъ отъ произвольнаго постояннаго i, и если вспомнимъ наконецъ, что $\frac{dX_i}{di} = \delta x$, $\frac{dY_i}{di} = \delta y$, $\frac{dZ_i}{di} = \delta z, \ldots$ при $i = 0$, мы увидимъ, что $\frac{dT}{di} = \frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} + \ldots$ при $i = 0$.

И такъ мы будемъ имѣть равенство:

$$\delta u = \int \ldots\ldots (DW + \Delta W)\, dx\, dy\, dz \ldots + \int \ldots W\left(\frac{d\delta u}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} + \ldots\right) dx\, dy\, dz \qquad \text{или}$$

$$\delta u = \int \ldots \left[\frac{d\,(W\delta x)}{dx} + \frac{d\,(W\delta y)}{dy} + \frac{d\,(W\delta z)}{dz} + \ldots\right] dx\, dy\, dz \ldots + \int \ldots \Delta W\, dx\, dy\, dz \ldots$$

Эта формула и есть та самая, которая дана въ первый разъ нашимъ Академикомъ Остроградскимъ въ упомянутомъ мемуарѣ и выведена имъ, какъ сказано, на основаніи началъ Лагранжа.

Москва.

29-го Генваря 1861 года.

Е. Сабининъ.

Выводъ формулы Бине: $B(p\,,\,p)\, B(p+\frac{1}{2}\,,\,p+\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{p\, 2^{4p-1}}$

Разсматривая кратный интегралъ:

$$\int\!\!\int\!\!\int_0^\infty \ldots \frac{dz_1\, dz_2\, dz_3 \;\ldots\ldots\; dz_{n-1}}{\left(1+\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}+\frac{1}{z_3^2}+\ldots+\frac{1}{z_{n-1}^2}\right)^p \left(a_1^2 + a_2^2 z_1^2 + a_3^2 z_2^2 + \ldots a_n^2 z_{n-1}^2\right)^{p+\frac{n}{2}}} =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}\, \Gamma(2p)}{2^{2p}\, \Gamma(p)\, \Gamma(p+\frac{n}{2})} \cdot \frac{1}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n\, (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{2p}}$$

и полагая въ немъ:

$$a_1 = a_2 = a_3 \ldots = a_n = 1 \quad \text{и} \quad n = 2$$

получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{z^{2p}\, dz}{(1+z^2)^{2p+1}} = \frac{\pi\, \Gamma(2p)}{2^{4p}\, \Gamma(p)\, \Gamma(p+1)} .$$

Но опредѣляя значеніе этаго интеграла обыкновеннымъ способомъ, получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{z^{2p}\, dz}{(1+z^2)^{2p+1}} = \frac{\Gamma^2(p+\frac{1}{2})}{2\, \Gamma(2p+1)} ;$$

а сравнивая эти два значенія и замѣчая что:

$$\Gamma(p+1) = p\, \Gamma(p)$$

и

$$\frac{\Gamma(p)\, \Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = B(p\,,p) ; \quad \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\, \Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(2p+1)} = B(p+\tfrac{1}{2}\,,\, p+\tfrac{1}{2})$$

получимъ формулу, которою находитъ Бине, (пользуясь формулой Гауса):

$$B(p\;,\;p)\; B(p+\tfrac{1}{2}\;,\;p+\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{p\, 2^{4p-1}} \qquad (*)$$

(*) Journal de l'École Royale Polytechnique, Cahier 27. „Mémoire sur les intégrales définies eulériennes" par M. S. Binet, page 219.

Приведеніе нѣкоторыхъ кратныхъ интеграловъ съ помощію формулы Фурье.

Въ журналѣ Ліувиля за 1843 годъ, Каталанъ указалъ на способъ приведенія нѣкоторыхъ кратныхъ интеграловъ съ помощію формулы Фурье: (*)

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, du \int_0^\infty e^{(vu-vx)\sqrt{-1}}\, f(u)\, du \,.$$

Мы займемся здѣсь примѣненіемъ этаго способа къ тѣмъ кратнымъ интеграламъ, которыхъ приведеніе уже было разсматриваемо по другимъ способамъ Шлёмильхомъ и Ліувилемъ.

1. Такъ если возмемъ кратный интегралъ:

$$S = \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots\; f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\; \phi(\alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots)\; dx\, dy\, dz \ldots$$

(*) Journal de Mathématiques par Liouville T. VIII, 1843. „Note sur une formule relative aux intégrales multiples" par Catalan.

то по формулѣ Фурье будемъ имѣть:

$$f(x^2+y^2+z^2+\ldots)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v_1)\,dv_1\int_0^{\infty}e^{[u_1v_1-u_1(x^2+y^2+z^2+\ldots)]\sqrt{-1}}\,.\,du_1$$

$$\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(v_2)\,dv_2\int_0^{\infty}e^{[u_2v_2-u_2(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)]\sqrt{-1}}\,.\,du_2$$

А слѣдовательно:

$$S=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(v_1)\,dv_1\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(v_2)\,dv_2\int_0^{\infty}e^{u_1v_1\sqrt{-1}}\,du_1\int_0^{\infty}e^{u_2v_2\sqrt{-1}}\,du_2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(u_1x^2+u_2\alpha x)\sqrt{-1}}\,.\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(u_1y^2+u_2\beta y)\sqrt{-1}}\,.\,dy\ldots$$

Но припоминая значеніе опредѣленнаго интеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(m^2x^2+2mnx)\sqrt{-1}}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}.\ e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\,e^{n^2\sqrt{-1}}}{(-1)^{\frac{1}{2}}\ m}$$

и полагая въ немъ:

$$m^2=u_1\ ,\quad 2mn=u_2\alpha\ ,\quad =u_2\beta,\ \ldots$$

получимъ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(u_1x^2+u_2\alpha x)\sqrt{-1}}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\ e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\,e^{\frac{u_2^2\alpha^2}{4u_1}\sqrt{-1}}}{(-1)^{\frac{1}{2}}\ \sqrt{u_1}}$$

Слѣдовательно:

$$S=\frac{\pi^{\frac{n-4}{2}}\,e^{\frac{n\pi}{4}\sqrt{-1}}}{(-1)^{\frac{n}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(v_1)\,dv_1\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(v_2)\,dv_2\int_0^{\infty}\!\!\int e^{+\left[u_1v_1+u_2v_2+\frac{u_2^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)}{4u_1}\right]\sqrt{-1}}\,.\,\frac{du_1\,du_2}{u_1^{\frac{n}{2}}},$$

или интегрируя въ отношеніи u_2, получимъ:

$$S=\frac{\pi^{\frac{n-3}{2}}\,e^{\frac{n-1}{4}\pi\sqrt{-1}}}{\varrho\,(-1)^{\frac{n-1}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(v_1)\,dv_1\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(v_2)\,dv_2\int_0^{\infty}e^{\left(u_1v_1-\frac{v_2^2u_1}{\varrho^2}\right)\sqrt{-1}}\,.\,\frac{du_1}{u_1^{\frac{n-1}{2}}}$$

гдѣ: $\varrho^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots$

Но съ другой стороны по формулѣ Фурье имѣемъ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(v_1)\,dv_1\int_0^{\infty}e^{\left(u_1v_1-\frac{v_2^2u_1}{\varrho^2}-u_1y_1\right)\sqrt{-1}}\,du_1=\pi f\!\left(\frac{v^2}{\varrho^2}+y_1\right)$$

А умножая это выраженіе на $y_1^{\frac{n-1}{2}-1}.\,dy_1$, и интегрируя въ границахъ o и ∞, получимъ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(v_1)\,dv_1\int_0^{\infty}e^{+u_1\left(v_1-\frac{v_2^2}{\varrho^2}\right)\sqrt{-1}}\,.\,\frac{du_1}{u_1^{\frac{n-1}{2}}}=\frac{\pi\,(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{e^{\frac{n-1}{4}\pi\sqrt{-1}}\,\Gamma\!\left(\frac{n-1}{n}\right)}\int_0^{\infty}f\!\left(\frac{v^2}{\varrho^2}+y_1\right)y_1^{\frac{n-3}{2}}\,dy_1$$

и слѣдовательно:

$$S=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\varrho\,\Gamma\!\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(v_2)\,dv_2\int_0^{\infty}f\!\left(\frac{v^2}{\varrho^2}+y_1\right)y_1^{\frac{n-3}{2}}\,dy_1$$

Или полагая $v_2=\varrho\,x$, $y_1=y^2$, получимъ формулу которую находитъ и Шлёмильхъ: (*)

(*) Journal de Mathématiques, par Liouville, 1857 „Réduction d'nne intégrale multiple par M. O. Schlomilch“

$$S=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\,f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\varrho x)\,dx\int\limits_0^{\infty}f(x^2+y^2)\,y^{n-2}dy$$

Пользуясь этой формулой можно достигнуть приведенія другихъ кратныхъ интеграловъ.

Въ самомъ дѣлѣ, замѣняя въ кратномъ интегралѣ:

$$U=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots}{x\,.\,y\,.\,z\ldots\ldots}$$

дѣлители x, y, $z\ldots$, произведеніемъ опредѣленныхъ интеграловъ:

$$\iiint\limits_0^{\infty}\ldots e^{-(xu_1+yu_2+zu_3+\ldots)}\,du_1\,du_2\,du_3\ldots=\frac{1}{x\,.\,y\,.\,z\ldots}$$

получимъ:

$$U=\iiint\limits_0^{\infty}\ldots\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\, e^{-(xu_1+yu_2+zu_3+\ldots)}\,f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,du_1\,du_2\,du_3\ldots dx\,dy\,dz\ldots,$$

а пользуясь формулой Шлёмильха, будемъ имѣть:

$$U=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\iiint\limits_0^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{\infty}e^{-x\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2+\ldots}}\,f(x_1^2+y_2^2)\,y_2^{n-2}\ldots du_1\,du_2\ldots dx\,dy$$

Но:

$$\iiint\limits_0^{\infty}\ldots e^{-x\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2+\ldots}}\,du_1\,du_2\,du_3\ldots=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{x^n}$$

слѣдовательно:

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\frac{f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots}{x\,y\,z\ldots}=\frac{2\pi^{n-1}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{\infty}f(x^2+y^2)\,y^{n-2}\,\frac{dx\,dy}{x^n}.$$

Возмем еще примѣръ:

$$U=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{u_1u_2u_3\ldots f(u_1^2+u_2^2+u_3^2+\ldots)\,du_1\,du_2\,du_3\ldots}{(1+u_1^2)\,(1+u_2^2)\,(1+u_3^2)\ldots\ldots}$$

въ которомъ замѣняя:

$$\frac{u_1\,u_2\,u_3\ldots\ldots}{(1+u_1^2)\,(1+u_2^2)\,(1+u_3^2)\ldots\ldots}$$

произведеніемъ интеграловъ:

$$\iiint\limits_0^{\infty}\ldots e^{-(u_1\theta_1+u_2\theta_2+u_3\theta_3+\ldots)}\,\mathrm{Cos}\,\theta_1\,\mathrm{Cos}\,\theta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_3\ldots d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3\ldots=$$

получимъ:

$$U=\iiint\limits_0^{\infty}\ldots\mathrm{Cos}\,\theta_1\,\mathrm{Cos}\,\theta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_3\ldots d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3\ldots\iiint\limits_0^{\infty}\ldots e^{-(u_1\theta_1+u_2\theta_2+u_3\theta_3+\ldots)}\,f(u_1^2+u_2^2+u_3^2+\ldots)\,du_1\,du_2\ldots$$

Или, интегрируя въ отношеніи $u_1\,u_2\,u_3\ldots$ получимъ:

$$S=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{\infty}f(u_1^2+u_2^2)\,u_2^{n-2}\,du_1\,du_2\iiint\limits_0^{\infty}\ldots e^{-u_1\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2+\ldots}}\,\mathrm{Cos}\,\theta_1\,\mathrm{Cos}\,\theta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_3\ldots d\theta_1\,d\theta_2\ldots$$

но:

$$\iiint\limits_0^{\infty}\ldots e^{-u_1\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2+\ldots}}\,\mathrm{Cos}\,\theta_1\,\mathrm{Cos}\,\theta_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_3\ldots d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3\ldots=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{u_1^n\left(1+\frac{n}{u_1^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}},$$

(*) Journal de Mathématiques, par Liouville, 1857 „Réduction d'une intégrale multiple par M. O. Schlömilch".

слѣд.

$$U=\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\frac{u_1\,u_2\,u_3\ldots f(u_1^2+u_2^2+u_3^2+\ldots)\,du_1\,du_2\,du_3\ldots}{(1+u_1^2)\,(1+u_2^2)\,(1+u_3^2)\ldots\ldots}=\frac{2^{n+1}\,\pi^{n-1}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}f(u_1^2+u_2^2)\frac{u_2^{\,n-1}u_1\,du_2\,du}{(n+u_1^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

§ 2. Пользуясь формулой Фурье въ приведеніи кратнаго интеграла:

$$U=\int\!\!\int\!\!\int_0^{\infty}\ldots f\left(x+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\frac{k^n}{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots}\right)\alpha_1^{\frac{1}{n}-1}\;\alpha_2^{\frac{2}{n}-1}\;\alpha_3^{\frac{3}{n}-1}\ldots\alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\;d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3\ldots\quad(*)$$

получимъ:

$$U=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\,du\int_0^{\infty}e^{-v\,(x-u)\sqrt{-1}}\,dv\int\!\!\int\!\!\int_0^{\infty}\ldots e^{-v\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\frac{k^n}{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots}\right)\sqrt{-1}}\;.\;\alpha_1^{\frac{1}{n}-1}\,\alpha_2^{\frac{2}{n}-1}\,\alpha_3^{\frac{3}{n}-1}\ldots\alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots d\alpha_{n-1}$$

Но пользуясь формулой, которою находитъ г. Янишевскій (**); а именно:

$$\int\!\!\int\!\!\int_0^{\infty}\ldots e^{-\left(a_1+a_2+a_3+\ldots+\frac{b}{a_1\,a_2\,a_3\ldots}\right)\sqrt{-1}}\;.\;a_1^{\frac{1}{n}-1}\,a_2^{\frac{2}{n}-1}\,a_3^{\frac{3}{n}-1}\ldots a_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\,da_1\,da_2\ldots da_{n-1}=\frac{1}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}\,\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}\,e^{(n-1)\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\;.\;e^{-n\sqrt[n]{b}\sqrt{-1}}$$

и полагая въ этой формулѣ:

$$a_1=v\alpha_1\;,\quad a_2=v\alpha_2\;,\;\ldots\;a_{n-1}=v\alpha_{n-1}\;,\quad\frac{b}{v^{n-1}}=k^n$$

получимъ:

$$\int\!\!\int\!\!\int_0^{\infty}\ldots e^{-v\left[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\frac{k^n}{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots}\right]\sqrt{-1}}\;.\;\alpha_1^{\frac{1}{n}-1}\,\alpha_2^{\frac{2}{n}-1}\,\alpha_3^{\frac{3}{n}-1}\ldots\alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3\ldots d\alpha_{n-1}=$$

$$=\frac{1}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}\,\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{v^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}}\;.\;e^{(n-1)\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\;.\;e^{-nk\sqrt[n]{v^{n-1}}\sqrt{-1}}$$

а слѣдовательно:

$$\int\!\!\int\!\!\int_0^{\infty}\ldots f\left(a+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\frac{k^n}{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots}\right)\alpha_1^{\frac{1}{n}-1}\,\alpha_2^{\frac{2}{n}-1}\,\alpha_3^{\frac{3}{n}-1}\ldots\alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots=$$

$$=\frac{(2)^{\frac{n-1}{2}}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}\,\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{n}}\;e^{-(n-1)\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\,du\int_0^{\infty}e^{-\left(nk\,v^{\frac{n-1}{n}}+(k-u)\,v\right)\sqrt{-1}}\;.\;\frac{dv}{v^{\frac{n-1}{2}}}$$

Эта послѣдняя формула можетъ служить для приведенія болѣе общей формулы а именно:

$$v=\int\!\!\int\!\!\int_0^{\infty}\ldots f(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\ldots)\,\varphi(\alpha\,\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{n-1})\,\alpha_1^{\frac{1}{n}-1}\,\alpha_2^{\frac{2}{n}-1}\ldots\alpha^{\frac{n-1}{n}-1}\,d\alpha\,d\alpha_1\ldots d\alpha_{n-1}$$

Для этаго полагаемъ:

$$\alpha=\frac{k^n}{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}$$

тогда:

(*) Приведеніемъ этаго и слѣдующаго за нимъ интеграла занимался Ліувиль. Journal de Math. par Liouville, 1856 année p. 289

(**) „Ученыя записки издаваемыя Императорскимъ Казанскимъ Университетомъ“ за 1855 годъ, книжка IV-ая.

$$\int\int\limits_0^\infty\int \ldots f(a+a_1+a_2+\ldots)\,\varphi(a\,a_1\,a_2\ldots a_{n-1})\,a_1^{\frac{1}{n}-1}\,a_2^{\frac{2}{n}-1}\ldots a^{\frac{n-1}{n}-1}\,da\,da_1\,da_2\ldots da_{n-1}=n\int_0^\infty u\,\varphi(k^n)\,k^{n-1}\,dk$$

§ 3. Способъ Каталана я употреблялъ также, разсматривая кратный интегралъ найденный Томсономъ:

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\frac{d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3\,\ldots\,d\xi_n}{[(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+\ldots]^{\frac{n+1}{2}}\,[(\xi_1-x'_1)^2+(\xi_2-x'_2)^2+\ldots]^{\frac{n-1}{2}}}, \quad (*)$$

но я не могъ достичь удобнаго приведенія, затрудняясь въ значеніи одного опредѣленнаго интеграла. Я предложилъ себѣ задачу общѣе; а именно приведеніе кратнаго интеграла:

$$S=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots f[(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+\ldots]\,\varphi[(\xi_1-x'_1)^2+(\xi_2-x'_2)^2+\ldots]\,d\xi_1\,d\xi_2\ldots$$

въ которомъ, полагая:

$$\xi_1-x_1=u_1\ ,\quad \xi_2-x_2=u_2\ ,\quad \xi_3-x_3=u_3\ \ldots\ldots$$

получимъ:

$$\xi_1-x'_1=u_1+x_1-x'_1\ ,\quad \xi_2-x'_2=u_2+x_2-x'_2\ \ldots$$

и:

$$S=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots f(u_1^2+u_2^2+u_3^2+\ldots)\,\varphi(u_1^2+u_2^2+\ldots+2\,(x_1-x'_1)\,u_1+2\,(x_2-x'_2)+\ldots+c^2)\,du_1\,du_2\ldots$$

А пользуясь формулой Фурье находимъ:

$$S=\frac{\pi^{\frac{n-4}{2}}\,e^{\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}}}{(-1)^{\frac{n}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\theta_1)\,d\theta_1\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\theta_2)\,d\theta_2\int\int_0^\infty e^{\left[t_1\theta_1+t_2(\theta_2-c^2)+\frac{t_2^2\,c^2}{4(t_1+t_2)}\right]\sqrt{-1}}\,\frac{dt_1\,dt_2}{(t_1+t_2)^{\frac{n}{2}}}$$

гдѣ:

$$c^2=(x_1-x'_1)^2+(x_2-x'_2)^2+(x_3-x'_3)^2+\ldots$$

§ 4. Пользуясь формулой Фурье въ приведеніи кратнаго интеграла:

$$U=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\frac{f(a_1\,x_1+a_2\,x_2+a_3\,x_3+\ldots)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\ldots}{(1+x_1^2)\,(1+x_2^2)\,(1+x_3^2)\ldots}$$

получимъ:

$$U=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\,du\int_0^\infty e^{uv\sqrt{-1}}\,dv\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-v\alpha_1x_1\sqrt{-1}}\,dx_1}{1+x_1^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-v\alpha_2x_2\sqrt{-1}}\,dx_2}{x+x_2^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-v\alpha_3x_3\sqrt{-1}}\,dx_3}{1+x_3^2}\ldots$$

но:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-v\alpha_1x_1\sqrt{-1}}\,dx}{1+x^2}=\pi\,e^{v\alpha_1}$$

слѣдовательно

$$U=\pi^{n-1}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\,du\int_0^\infty e^{v(A+u\sqrt{-1})}\,dv$$

гдѣ:

$$A=a_1+a_2+a_3+\ldots$$

Л. Износковъ.

(*) Journal de Math. par Liouville 1845 et 1856. „Démonstration d'une théorème d'Analyse" par William Thomson.

Объ употребленіи таблицъ съ двумя входами, принимая во вниманіе вторыя разности.

Хотя таблицы съ двумя входами вообще не удобны, особенно когда промежутки между аргументами не очень малы, однакожъ случается иногда употреблять таблицы такого рода. Ни въ одной изъ прочитанныхъ нами статей объ интерполированіи, мы не нашли правилъ принимать во вниманіе при этихъ таблицахъ покрайней мѣрѣ вторыя разности. Поэтому мы неизлишнимъ сочли, по цѣли журнала, предложить здѣсь эти правила, которыя прямо выводятся изъ извѣстной теоремы Тейлора для разложенія сложныхъ функцій.

Означимъ черезъ p и q двѣ перемѣнныя, независимыя между собою величины, и пусть будетъ z функція отъ p и q, которая остается непрерывною для разныхъ значеній перемѣнныхъ величинъ, сосѣднихъ съ p и q. Если p и q получатъ небольшія приращенія t и y, то z также измѣнится и пріиметъ величину, которую мы изобразимъ черезъ Z. Тогда по Тейлоровой теоремѣ мы получимъ для опредѣленія Z уравненіе такого вида:

$$Z = z + Pt + Qy + P't^2 + Q'y^2 + Rty + \ldots\ldots \quad (1)$$

Мы ограничимся этими членами. Чтобъ вычислить численныя величины коеффиціентовъ, мы замѣтимъ, что мы можемъ для этаго воспользоваться разными величинами Z, которыя предлагаются въ таблицахъ при $t=-1$, $t=0$, $t=+1$, $y=-1$, $y=0$ и $y=+1$, гдѣ подъ единицею разумѣемъ промежутокъ, черезъ который предложены величины Z и который можетъ быть различенъ для p и для q. Мы предполагаемъ что t и y выражены въ доляхъ соотвѣтствующихъ имъ промежутковъ.

Величины p и q, вообще называются аргументами, а z соотвѣтствующею имъ функціею. Положимъ, что таблицы даютъ

аргументы		аргументы q:		
p	. . . . . .	$q-1$	q	$q+1$
		Функціи z		
⋮		⋮	⋮	⋮
$p-1$		A_1	B_1	C_1
p		A_0	B_0	C_0
$p+1$		A'	B'	C'
⋮		⋮	⋮	⋮

Здѣсь выражаютъ A_1, A_0, A', величины Z при аргументахъ $p-1$ и $q-1$, p и $q-1$, $p+1$ и $q-1$; или при $t=-1$ и $y=-1$, $t=0$ и $y=-1$, $t=+1$ и $y=-1$; подобнымъ же образомъ означаютъ B_1, B_0 и B' величины Z при $t=-1$ и $y=0$, $t=0$ и $y=0$, $t=+1$ и $y=0$; наконецъ C_1, C_0 и C' суть величины Z при $t=-1$ и $y=+1$, $t=0$ и $y=+1$, $t=+1$ и $y=+1$.

Посему изъ общаго уравненія (1) выходятъ при упомянутыхъ частныхъ значеніяхъ количествъ t и y, слѣдующія выраженія:

$$B_1 = B_0 - P + P'$$
$$B_0 = B_0$$
$$B' = B_0 + P + P'$$

$$A_0 = B_0 - Q + Q'$$
$$B_0 = B_0$$
$$C_0 = B_0 + Q + Q'$$

$$A_1 = B_0 - P + P' - Q + Q' + R$$
$$C' = B_0 + P + P' + Q + Q' + R$$
$$C_1 = B_0 - P + P' + Q + Q' - R$$
$$A' = B_0 + P + P' - Q + Q' - R.$$

Отсюда получаемъ

$$P = \tfrac{1}{2}\left\{(B_0 - B_1) + (B' - B_0)\right\};\quad Q = \tfrac{1}{2}\left\{(B_0 - A_0) + (C_0 - B_0)\right\}$$

$$P' = \tfrac{1}{2}\left\{(B' - B_0) - (B_0 - B_1)\right\};\quad Q' = \tfrac{1}{2}\left\{(C_0 - B_0) - (B_0 - A_0)\right\}$$

$$R = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{(C' - C_0) + (C_0 - C_1)}{2} - \frac{(A' - A_0) + (A_0 - A_1)}{2}\right\};$$

т. е. если означимъ черезъ b_0, b' первыя разности въ ряду B_1, B_0, B'; черезъ $b^{(2)}$ вторую разность въ томъ же ряду; черезъ a_0, a' первыя разности и черезъ $a^{(2)}$ вторую разность въ ряду: A_1, A_0, A'; черезъ c_0, c' первыя разности, черезъ $c^{(2)}$ вторую разность въ ряду C_1, C_0, C'; черезъ γ и a первыя разности въ ряду A_0, B_0, C_0, то выходитъ

$$Z = z + \tfrac{1}{2}(b + b')t + \tfrac{1}{2}b^{(2)}t^2 + \tfrac{1}{2}(a + \gamma)y + \tfrac{1}{2}a^{(2)}y^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}(c_0 + c') - \tfrac{1}{2}(a_0 + a')\right)ty.$$

А. Савичъ.

II. (*)

Библіографическій указатель.

1. Les trois livres de Porismes d'Euclide retablis pour la première fois d'après la notice et les lemmes de Pappus et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions, par M. *Chasles*. (Paris).

Трудъ, которому посвящали свою дѣятельность

(*) Надлежащему развитію Отдѣла II препятствуетъ до сихъ поръ главнѣйшимъ образомъ значительное накопленіе оригинальныхъ статей по Отд. I, коимъ всегда будетъ отдаваемо предпочтеніе. Эта причина, вѣроятно достаточно извиняющая редакцію въ глазахъ подписчиковъ, весьма утѣшительна для самой редакціи, которая позволяетъ себѣ заявить здѣсь кстати, что съ слѣдующаго N. начнется печатаніе обширнаго и важнаго мемоара Проф. *Рахманинова*, Объ относительномъ движеніи. *Ред.*

Альбертъ Жирардъ, *Ферманъ Буильо*, и въ особенности *Робертъ Симсонъ*, хотя еще съ весьма небольшимъ успѣхомъ, оконченъ нынѣ въ полной мѣрѣ знаменитымъ французскимъ геометромъ, авторомъ *Géométrie supérieure*. Возстановленіе поризмовъ Эвклида, составлявшихъ какъ бы экстрактъ древней высшей геометріи, важно нетолько для исторіи науки; но по богатству содержанія и достоинству обработки, приданной онымъ Г-мъ *Шалемъ*, представляетъ весьма существенное пріобрѣтеніе современной науки. Что касается самаго значенія названія *Поризма*, которое оставалось до селѣ или неточно опредѣленнымъ или ограниченнымъ;—то по объясненію *Шаля*, подъ словомъ *Поризма* надобно понимать каждое неполное предложеніе, въ которомъ выражается зависимость между величинами, измѣняющимися по опредѣленнымъ законамъ, но притомъ такимъ образомъ, что въ самомъ выраженіи предложенія уже заключается новая задача, которую еще предстоитъ разрѣшить.

2. *Roche*, *E*. Réflexions sur la théorie des phénomènes cométaires à propos de la Comète de *Donati* (Paris, 1860).

Въ первомъ отдѣлѣ этаго важнаго сочиненія изслѣдуется форма, какую должна принимать кометная атмосфера въ слѣдствіе притяженія солнца и самой кометы, въ двухъ предположеніяхъ а именно, что все тѣло кометы образуетъ только парообразная матерія, или, что послѣдняя окружаетъ въ видѣ атмосферы болѣе плотное ядро. Авторъ находитъ, что съ приближеніемъ къ солнцу первоначально шарообраная форма оболочки переходитъ въ эллипсоидальную, растянутую по направленію къ солнцу; но въ тоже время происходитъ сжатіе матеріи, т. е. уменьшеніе объема. При болѣе значительномъ приближеніи къ солнцу, приливъ атмосферы, или лучше сказать улетучиваніе по направленію къ солнцу, а равно и въ противоположномъ направленіи разпространяется до безпредѣльности. Такъ какъ наблюдаемыя явленія не согласуются съ этою теоріею, поэтому во 2-мъ отдѣлѣ своего труда авторъ вводитъ отталкивательную силу солнца, которая и позволяетъ объяснить, хотя только въ общихъ чертахъ, образованіе нѣсколькихъ слоевъ оболочки, покрывающихъ голову кометы со стороны солнца, а равно и развитіе изъ оныхъ кометнаго хвоста въ сторону противуположную отъ солнца.

3. *Newcomb*, *S*. On the Secular Variations and mutual relations of the orbits of the asteroids. Cambridge 1860.

При настоящемъ обиліи малыхъ планетъ между Марсомъ и Юпитеромъ болѣе строгое изслѣдованіе вѣроятности извѣстной гипотезы *Ольберса* объ общемъ происхожденіи оныхъ представлялось какъ нельзя болѣе желательнымъ. Авторъ изслѣдовалъ вѣковыя возмущенія для 25 астероидовъ, для коихъ наклоненіе къ эклиптикѣ и эксцентрическій уголъ не превышаютъ 11^{0}, и пришелъ къ заключенію, что для всѣхъ этихъ путей *нѣтъ* общей изходной точки, даже и въ томъ случаѣ, если принимать въ расчетъ вліяніе сопротивленія эфира и взаимное дѣйствіе малыхъ планетъ другъ на друга. Такимъ образомъ наука не можетъ представить до сихъ поръ ни одного сколько нибудь вѣроятнаго предположенія объ образованіи планетнаго міра.

4 *Secchi A*. Catalogo di 1321 Stelle doppie, misurate col grande equatoriale di Merz all osservatorio del Collegio Romano. *Roma*, 1860.

Пятилѣтній трудъ дѣятельнаго астронома Римской коллегіи, содержащій измѣренія для 1321 двойной звѣзды, начиная отъ наименьшаго разстоянія до 8" включительно, приводитъ къ весьма интереснымъ результатамъ относительно познанія обилія физическихъ системъ въ звѣздномъ мірѣ. Посредствомъ сравненія съ старыми наблюденіями авторъ доказалъ несомнѣнно движенія въ орбитахъ для слѣдующаго числа звѣздныхъ паръ, по отношенію къ цѣлому числу наблюдавшихся предметовъ и раздѣляя оные на классы по разстояніямъ, введенные *Вильгельмомъ Струве*.

Классы	1-й	Отношеніе числа зв.	1: 2
	2-й	паръ съ доказаннымъ	1: 3
	3-й	движеніемъ къ цѣл.	1: 6
	4-й	числу.	1: 12

5. Theorie et Tables du mouvement de Vénus, par *Le Verrier*.

Объ этомъ новомъ трудѣ знаменитаго астронома мы имѣемъ до сихъ поръ только его же собственное указаніе, помѣщенное въ Comptes rendus за Ноябрь прошедшаго года. Нѣкоторыя заключенія, къ коимъ приходитъ авторъ столь интересны, что мы считаемъ не безполезнымъ повторить оныя здѣсь.

Формулы представляющія вѣковыя неравенства въ движеніи Венеры открываютъ, что дѣйствіе Меркурія здѣсь вдвое болѣе нежели Земли, и вообще весьма значительно. Такимъ образомъ продолжительныя наблюденія Венеры должны привести насъ къ болѣе точному познанію массы Меркурія, которая еще столь худо опредѣлена. Въ настоящее время уже можно съ большою вѣроятностію заключить, что масса Меркурія съ $\frac{1}{3000000}$ должна быть уменьшена на $\frac{1}{5000000}$ и это заключеніе согласуется съ результатомъ выведеннымъ Энке изъ вычисленій возмущеній, претерпѣваемыхъ его періодическою кометою.

Другое еще болѣе важное заключеніе, выводимое изъ теоріи движенія Венеры, состоитъ въ необходимости увеличить массу самой Земли, выведенную физическимъ путемъ, почти на $1/_{10}$ долю ея настоящей величины. Заключеніе которое находитъ уже подтвержденіе въ величинѣ луннаго ур — ія въ движеніи самой Земли. Это увеличеніе потребовало бы въ свою очередь увеличенія солнечнаго параллакса, а потому представляется тѣмъ болѣе отважнымъ и требующимъ новаго подтвержденія. Г. Леверьѣ надѣется, что теорія движенія Марса доставитъ ему новое опредѣленіе земной массы.

6. Leçons sur la theorie analytique de la chaleur par *Lamé*. Это сочиненіе, которое авторъ представилъ Парижской Академіи въ засѣданіи 31 Дек. очевидно представляетъ огромный научный интересъ, какъ въ теоретическомъ, такъ и практическомъ отношеніяхъ. Охлажденіе всѣхъ кристаллическихъ формъ, которыя сводятся на параллелепипеды,

ромбоедры, треугольныя и шестиугольныя призмы, тетраэдры, октаэдры, ромбоидальные додекаэдры, выражается посредствомъ тригонометрическихъ періодическихъ рядовъ; и это обобщеніе распространяется непосредственно на математическую теорію упругости; такъ что отсюда слѣдовало бы заключить, что многогранная форма кристалловъ прямо обнаруживаетъ существованіе и распредѣленіе сотрясеній — имѣвшихъ мѣсто при ихъ образованіи—съ такою же очевидностію, какъ это представляетъ песокъ собирающійся въ узловыхъ линіяхъ на звучащихъ пластинкахъ. Однако подтвержденіе послѣдняго заключенія авторъ съ большою осторожностію предоставляетъ опытной физикѣ. Мы надѣемся дать въ послѣдствіи болѣе подробное обозрѣніе этого труда.

7. Theorie du Mouvement de la Lune, par *Delaunay* Vol. I. Цѣль этого труда заключалась въ новомъ аналитическомъ опредѣленіи лунныхъ неравенствъ съ болѣе значительнымъ приближеніемъ, чѣмъ то, до котораго довелъ оныя *Плана*. Это сочиненіе будетъ имѣть впрочемъ для астрономовъ другой важный интересъ, ибо оно дастъ возможность окончательно разрѣшить споръ поднятый Г-мъ Делоне относительно 2-хъ неравенствъ, открытыхъ Г-мъ *Ганзеномъ*. Мы надѣемся также имѣть со временемъ возможность дать общій обзоръ дѣйствительныхъ успѣховъ, сдѣланныхъ вообще Лунною теоріею въ послѣднее время.

8. Traité de Balistique par *Didion* 2 edit. (Paris).

9. Lehrbuch der algebraischen Analysis v. *Stern* (Leipzig).

10. Ueber unendliche Reihen und deren Convergenz v. *Scheibner* (Leipzig).

11. Sur la théorie des fonctions elliptiques et son application à la théorie des nombres p *Joubert* (Paris).

12. Etudes sur la trajectoire que décrivent les projectiles oblongs p. *De Saint-Robert* (Paris)

13. Etudes des lois des courants électriques au point de vue des applications électriques p. *Du Moncel.* (Paris).

III.

Извлеченія изъ періодическихъ изданій.

1. Новое рѣшеніе уравненій 4-й степени *Шлёмильхъ'а* Zeitschrift für Mathematik und Physik. VI. Heft. I).

Полное биквадратное уравненіе

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

посредствомъ подстановки $x = q\,\xi + r$, гдѣ ξ есть новое неизвѣстное, преобразуется въ слѣдующее:

$$\xi^4 + \alpha\xi^3 + \beta\xi^2 + \gamma\xi + \delta = 0, \ldots\ldots (1),$$

а это приводится къ формѣ:

$$\xi^4 + \alpha\xi^3 + \beta\xi^2 + \alpha\xi + 1 = 0, \ldots\ldots (2),$$

полагая $\gamma = \alpha$ и $\delta = 1$, т. е.

$$q^4 = r^4 + ar^3 + br^2 + cr + d, \ldots\ldots (3),$$

и

$$(4r + a)\,q^2 = 4r^3 + 3\,ar^2 + 2\,br + c \ldots\ldots\ldots (4),$$

Исключая отсюда q, опредѣляется r посредствомъ кубическаго уравненія

$$(a^3 - 4ab + 8c)\,r^3 + (a^2b + 2\,ac - 4b^2 + 16d)\,r^2 + $$
$$+ (a^2c + 8ad - 4\,bc)\,r + a^2d - c^2 = 0,$$

а съ найденнымъ *дѣйствительнымъ* значеніемъ r, опредѣлится q изъ (3). Затѣмъ вычислятся

$$\alpha = \frac{4\,r + a}{q} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{6r^2 + 3\,ar + b}{q^2}$$

и наконецъ разрѣшается ур—іе (2) обыкновеннымъ способомъ, т. е. разлагая оное на 2 квадратныя ур—ія.

Авторъ справедливо замѣчаетъ при этомъ, что представленное имъ рѣшеніе требуетъ еще дополненія, а именно прямого доказательства, что 3 корня r даютъ только 4 *различныя* значенія для x, и сверхъ того при этомъ сама собою представляется задача: въ какомъ отношеніи находится это рѣшеніе, при положеніи $a = 0$, съ Эйлеровымъ рѣшеніемъ и нельзя-ли вывесть одного изъ другого? — *Г.*

2. *О причинахъ неодинаковаго нагрѣванія полюсовъ электрической свѣтовой дуги.*

Если нагрѣвать спай двухъ разнородныхъ металловъ, то получается термо-электрическій токъ, котораго сила тѣмъ болѣе, чѣмъ большая разница между электрическими проводимостями спаенныхъ металловъ. Напр. термо-электрическая сила между мѣдью и селеномъ, когда разница между температурами 100^0, достигаетъ почти $^1/_{10}$ электро-возбудительной силы элемента Даніеля; поэтому можно предположить, что термо-электрическая сила между проводниками и дурно проводящими газами должна быть еще болѣе. Извѣстно тоже, что гальваническій токъ, проходя чрезъ пару спаянныхъ металловъ, производитъ въ спаѣ охлажденіе или нагрѣваніе, смотря по направленію тока. Сравнительныя наблюденія Пельтье показали, что тѣ спаи которые, будучи нагрѣты, даютъ термо-электрическій токъ одинаковаго направленія съ гидро-электрическимъ токомъ, охлаждаются при прохожденіи чрезъ нихъ гальваническаго тока, напротивъ происходитъ согрѣваніе, если они, будучи охлаждены, даютъ токъ одинаковаго направленія съ гидро-электрическимъ. Это явленіе примѣняетъ г. Вильдъ (Pogg. ann d. Phys. B CXI) къ объясненію неодинакого нагрѣванія полюсовъ въ электрической свѣтовой дугѣ, предполагая, что между углями и воздухомъ, находящимся между ними, происходитъ сильный термо-электрическій токъ. Поэтому, пропуская гальваническій токъ чрезъ угли и промежутокъ воздуха, должно произойти нагрѣваніе одного изъ нихъ и охлажденіе другаго: въ гальванической свѣтовой дугѣ положительный полюсъ накаливается.—Чтобъ удостовѣриться въ существованіи термо-электрическаго тока, г. Вильдъ устроилъ опытъ такъ, что, посредствомъ качалки, могъ прерывать главный токъ и вводить въ цѣпь гальванометръ. Оказалось, что между углями происходитъ сильный термо-электрическій токъ, имѣющій направленіе отъ холоднаго полюса къ нагрѣтому.

Очень вѣроятно, что подобное явленіе имѣетъ мѣсто и въ Гейслеровыхъ трубкахъ, гдѣ каждый изъ полюсовъ имѣетъ свою свѣтовую особенность.

3. *О поляризаціи разсѣяннаго свѣта.* Свѣтъ, проходя черезъ газовую средину, поляризуется—что уже давно извѣстно; *Гови* (Comptes rendus 1860. 3. Septembre) показалъ, что поляризація эта имѣетъ свою особенность. Онъ пропустилъ очень тонкій пучекъ солнечнаго свѣта (а впослѣдствіи былъ употребленъ и электрическій свѣтъ) въ темную комнату, въ которой было произведено нарочно много ладаннаго дыму—пучекъ свѣта увеличился въ объемѣ и оказался сильно поляризованнымъ. Однако самая сильная степень поляризаціи оказывалась тогда, когда пучекъ свѣта разсматривался не по направленію оси, а немного съ боку, т. е. когда направленія луча зрѣнія и оси составляли небольшой уголъ; начиная отсюда поляризація ослабѣвала и въ положеніи перпендикулярномъ къ оси вовсе исчезала; отсюда, идя далѣе, опять поляризація проявлялась, хотя слабо, и потомъ дальше опять исчезала. Когда пучекъ разсматривался по оси, или въ томъ случаѣ когда получается самая сильная степень поляризаціи—и вообще во всемъ углѣ до перпендикулярнаго направленія, плоскость поляризаціи была перпендикулярна къ плоскости, проходящей чрезъ источникъ свѣта, наблюдаемое мѣсто и чрезъ глазъ или полярископъ; но дальше, перейдя направленіе перпендикулярное къ оси пучка, когда поляризація опять появляется, хотя слабая, плоскость поляризаціи оказывается перпендикулярною къ первой. *Гови* продолжаетъ изслѣдованія свои надъ этимъ явленіемъ и предполагаетъ, что частицы различныхъ газовъ могутъ имѣть въ этомъ отношеніи свои особенныя свойства, что поэтому различные газы, пыль, пары могутъ быть отличены посредствомъ полярископа.

4. *О поглощеніи лучистой теплоты въ срединахъ глаза.*

Глазъ есть дурной проводникъ теплоты, въ чемъ легко удостовѣриться, приблизившись къ довольно сильному источнику теплоты, напримѣръ къ топящейся печкѣ, такъ, чтобы лице ощущало сильный жаръ и потомъ закрыть лице непроводникомъ, оставляя для глаза одно небольшое отверстіе. Глазъ можетъ свободно смотрѣть на источникъ теплоты, не ощущая при этомъ особенной боли. *Янсенъ* (Annales d. Ch. et Ph. 3-me série p. 71. 1860.) подвергъ точному изслѣдованію поглощеніе лучистой теплоты различными срединами глаза, причемъ оказалось, что изъ числа падающихъ въ глазъ лучей только небольшая часть ихъ доходитъ до нервной оболочки. Прежде всего *Янсенъ* поставилъ между источникомъ свѣта (лампою) и термоэлектрическимъ снарядомъ воловій цѣлый глазъ; и нашелъ, что изъ 100 падающихъ лучей только 7, 7 достигаетъ нервной оболочки. Изслѣдованіе каждой средины отдѣльно показало, что самое большое поглощеніе происходитъ въ роговой оболочкѣ и въ водянистой влагѣ, какъ это можно видѣть изъ слѣдующей таблицы.

На 100 падающихъ лучей,	
отраженыхъ отъ передней поверхности роговой оболочки	4, 0
поглощенныхъ роговою оболочкою	59, 8
— — — водянистою влагой	19, 2
— — — чечевицею	6, 8
— — — стекляннистою влагой	2, 5
слѣд. до сѣтчатой оболочки достигаетъ	7, 7

К. Ч.

5. *Краткія извѣстія.*

— Насъ извѣщаютъ, что Императорское русское географическое Общество предполагаетъ снарядить экспедицію для производства наблюденій надъ качаніями маятника въ разныхъ мѣстахъ, составляющихъ сѣть треугольниковъ скандинавско-русскаго градуснаго измѣренія. Можно пожелать, чтобы этотъ проэктъ осуществился какъ можно скорѣе и въ самыхъ обширныхъ размѣрахъ.

— Лондонское географическое Общество снаряжаетъ, на сумму собираемую по подпискѣ, экспедицію къ *источникамъ Нила*, которая будетъ поставлена подъ начальство англійскаго консула въ Хартумѣ Г-на *Петерикъ* и отправится въ будущемъ Ноябрѣ.

— Г-нъ *Тестеленъ* въ Парижѣ издалъ брошюру подъ заглавіемъ: Теорія образованія фотографическихъ изображеній, въ которой старается доказать исключительное участіе въ этомъ явленіи *физическихъ* силъ, а именно электрической полярности и совершенное отсутствіе силъ химическихъ, какъ было принимаемо доселѣ.

— Г-нъ *Бернардъ де Ліонъ* представилъ Парижской Академіи приборъ своего изобрѣтенія, служащій къ раціональному и полному употребленію силы вѣтра, а при посредствѣ оной и силы воды. Г. *Муаньо*, объяснивши въ своемъ „*Космосѣ*" идею механизма, предсказываетъ въ примѣненіи онаго большіе техническіе выгоды, замѣчая, что съ этого времени вѣтряныя мельницы перестанутъ быть механизмомъ варварскимъ, какъ это было до селѣ, и сдѣлаются разумными машинами.

— Новая машина, приводимая въ дѣйствіе нагрѣтымъ воздухомъ, основанная на принципѣ отмѣнномъ отъ примѣненнаго Эриксономъ, устроена въ Парижѣ Г-мъ *Белу*. Предварительные опыты подтверждаютъ экономическое преимущество этого движителя передъ паровыми машинами. Въ скоромъ времени будутъ произведены опыты съ такою воздушною машиною въ 100 лошадиныхъ силъ, установленною на большомъ кораблѣ.

— Въ Неаполѣ, 10-го Февраля, открыта Г-мъ *Де Гаспарисъ* новая планета, а именно 63-я въ группѣ астероидовъ.

— Изслѣдованія Др. *Мёллера* надъ движеніемъ кометы краткаго періода *Фэ* приводятъ снова и весьма очевиднымъ образомъ къ принятію гипотезы сопротивляющейся средины, которая необходима для объясненія ускоренія въ обращеніи кометы *Энке*.

IV.

О причинахъ, производящихъ пониженіе температуры на значительныхъ высотахъ надъ уровнемъ моря.

Различныя части земной поверхности неодинаково нагрѣваются отъ дѣйствія теплотворныхъ лучей солнца; неодинаковость эта зависитъ отъ направленія лучей и отъ мѣстныхъ условій: отъ вида и состава земной поверхности. Разсматривая явленіе въ общемъ видѣ легко видѣть, что чѣмъ косвеннѣе солнечные лучи падаютъ на данное мѣсто земной поверхности, тѣмъ оно меньше согрѣвается, значитъ нагрѣваніе зависитъ отъ географической широты мѣста; однако это правило чрезвычайно разнообразится мѣстными условіями. Въ настоящей статьѣ мы разсмотримъ вкратцѣ только степень уменьшенія теплоты, съ удаленіемъ отъ земной поверхности и причины производящія это измѣненіе.

Издавна уже извѣстно, что на высокихъ горахъ существуетъ значительный холодъ, что съ поднятіемъ на гору приходится проходить различные климаты, что наконецъ, на нѣкоторыхъ вершинахъ горъ лежатъ вѣчные, никогда нетающіе снѣга. Явленіе это кажется съ перваго взгляда парадоксальнымъ по той причинѣ, что чѣмъ ближе къ солнцу тѣмъ по видимому должно быть теплѣе.—Но нетолько на горахъ, а и вообще на значителной высотѣ надъ уровнемъ моря существуетъ очень низкая температура, въ этомъ убѣждаютъ насъ показанія воздухоплаватей. Гейлюсакъ, поднявшись на большомъ аэростатѣ на высоту 7000 метровъ (21000 фут.) наблюдалъ температуру — 10°, тогда какъ въ это время на поверхности земли, въ Парижѣ, было около + 30° (*). Самое любопытное воздушное путешествіе, предпринятое единственно съ ученою цѣлію, было совершено въ 1850 году *Барралемъ* и *Биксіо;* они нашли почти на тойже самой высотѣ, на которой Гейлюсакъ наблюдалъ — 10°, температуру — 39°,7. Еслибы показанія не были строго повѣрены, то такая низкая температура могла бы возбудить недовѣріе, тѣмъ болѣе, что Гумбольдъ и Бонпланъ на Чимборазо получили результаты согласные съ показаніемъ Гейлюсака. Барраль и Биксіо были снабжены точными приборами; но, не предполагая столь сильнаго холода, не употребили соотвѣтственнаго термометра, и не приняли должныхъ мѣръ предосторожности. Термометръ, находящійся при барометрѣ, могъ показать только — 37°; но въ этомъ случаѣ съ большою пользою послужилъ къ опредѣленію наибольшаго холода термометръ minimum Вальфердина, который, по желанію Барраля, былъ уложенъ въ ящикъ и запечатанъ, а потомъ, послѣ совершеннаго уже путешествія вскрытъ въ присутствіи Гг. Реньо и Вальфердина, и показалъ наименьшую температуру — 39°,7. Вотъ рядъ наблюденій, произведенныхъ на различныхъ высотахъ: (*)

766 метровъ	+ 16°, 0 *C.*	6330 метровъ	— 10°, 0 *C.*
2000	+ 9, 0	6510	— 35, 0
3750	— 0, 5	7016	— 39, 7.
5120	— 7, 0		

Гейлюсакъ нашелъ, что пониженіе температуры на 1° соотвѣтствуетъ поднятію на высоту 175 метровъ. Гумбольдтъ нашелъ почти тоже самое. 192 м., Буссенго, спустя тридцать лѣтъ послѣ Гумбольдта, нашелъ 180 м., Соссюръ и Рамонъ на Альпахъ нашли 190 м. (*) но числа полученныя изъ наблюденій Барраля и Биксіо не имѣютъ ничего общаго съ упомянутыми; изъ нихъ слѣдуетъ, что между 766 и 2000 метровъ высоты, уже на 143 метра приходится цѣлый градусъ уменьшенія температуры (о болѣе значительныхъ высотахъ нечего и говорить, ибо тамъ нельзя отыскать закона.) Барраль и Биксіо поднялись на аэростатѣ вскорѣ послѣ сильнаго дождя и потому, почти сей часъ вошли въ облако, которое, по вычисленію, оказалось толщиною въ 5000 метровъ. Въ облакѣ уменьшеніе температуры шло не такъ быстро, какъ это видно изъ вышеприведенныхъ результатовъ наблюденій; но когда аэростатъ вышелъ изъ облака и наблюдатели увидѣли ясное солнце – температура вдругъ понизилась почти на 25° (**). Отсюда можно заключить, что верхніе слои атмосферы въ особенности охлаждаются тогда, когда между ними и поверхностію земли находится густой слой облаковъ, преграждающій путь лучистой теплотѣ земли. Поэтому облака, или вообще болѣе или менѣе влажный воздухъ, имѣютъ вліяніе не только на измѣненія температуры земной поверхности, но также и высшихъ слоевъ атмосферы. Вообще температура послѣднихъ должна тѣмъ ближе подходить къ температурѣ небеснаго пространства, (по Пулье — 100°) чѣмъ менѣе нагрѣваются они отъ земли. Такимъ образомъ очевидна невозможность обнаруженія общаго закона въ этомъ явленіи.

Солнечные лучи, какъ свѣтовые, такъ и теплотворные, достигая земной атмосферы, претерпѣваютъ измѣненіе: одна часть ихъ отражается отъ внѣшней поверхности атмосферы, другая часть поглощается, а третья наконецъ доходитъ до поверхности земли; поэтому чѣмъ большій слой воздуха лежитъ на пути лучей, тѣмъ большее количество оныхъ поглощается. Изъ этого слѣдуетъ, что нагрѣвательная способность лучей на высотахъ должна быть болѣе, нежели въ низкихъ мѣстахъ. Въ самомъ дѣлѣ Соссюръ, на горѣ Крамонъ, нашелъ, что на высотѣ 2375 метровъ надъ уровнемъ моря, термометръ, находящійся въ ящикѣ, выложенномъ внутри закопченными пробковыми пластинками, показывалъ + 70° *R*, между тѣмъ какъ другой термометръ, въ то же время, показывалъ температуру свободнаго воздуха + 5°. На другой день, при тѣхъ же самыхъ обстоятельствахъ, на 1495 метровъ ниже, термометръ въ ящикѣ показывалъ + 69° *R*, а на свободномъ воздухѣ + 19° *R*. Отсюда видно, что нагрѣвательная способность солнечныхъ лучей на горѣ 1° болѣе нежели ближе къ поверхности земли. Несмотря на несовершенство наблюденій въ тогдашнее время, результаты полученные и въ новѣйшее время изъ

(*) Высоты были вычислены Матьё изъ барометрическихъ наблюденій; изъ нихъ самая большая оказалась = 7046 метровъ.

(*) Парри въ полярныхъ странахъ, подъ 69°, 6 широты, посредствомъ термометра minimum, привязаннаго къ бумажному змѣю, нашелъ на высотѣ 133 метровъ туже самую температуру, какая была въ то время на поверхности земли, — 31°

(**) Comptes rendus. 1850, Juillet 29.

опытовъ А. Браве́, К. Браве́ и Мартена сходны съ предъидущими, А. Браве́ и Мартенъ (*) производили наблюденія на Монбланѣ, а въ тоже время К. Браве́ въ Шамуни; разница между станціями 2890 метровъ. Теплота солнечныхъ лучей, опредѣленная помощію пиргеліометра Пулье, на горѣ была $1^0,22$, а въ Шамуни $1^0,09$; другіе опыты дали на горѣ $1^0,18$ а въ Шамуни $0^0,87$. Отсюда видно, что теплота солнечныхъ лучей на высотѣ больше нежели въ долинѣ, однакожъ разница не очень значительна.

Въ слѣдствіе этого обстоятельства почва на горахъ нагрѣвается сильнѣе воздуха, въ долинахъ же наоборотъ; впрочемъ въ послѣднемъ случаѣ помогаютъ еще и другія причины, о которыхъ упомянемъ ниже. Наблюденія Пелтье и А. Браве́ на Фаульгорнѣ и Кетле́ въ Брюсселѣ доказываютъ это замѣчательное явленіе наилучшимъ образомъ; вотъ результаты:

Среднія температуры

Названіе мѣстъ	воздуха въ тѣни.	на поверхн. почвы	на глубинѣ дециметра	
Фаульгорнъ (2680) м	6°, 67	9°, 51	10°, 22	среднія для 9 дней
Брюссель (50 м.)	21, 63	20, 22	20, 13	
Фаульгорнъ	7, 18	16, 25	9, 18	среднія изъ 9^h утра въ продолженіи 9 дней.
Брюссель	21, 37	20, 17	20, 01	
Фаульгорнъ	3, 15	5, 89	5, 48	среднія температуры осени.
Брюссель	11, 56	11, 27	12, 53	

Вышеприведенные результаты говорятъ въ пользу того, что на высотахъ должно бы быть теплѣе, такъ какъ почва нагрѣвается тамъ сильнѣе воздуха, между тѣмъ какъ въ долинахъ наоборотъ. Но именно воздухъ есть самая важная причина, производящая холодъ: онъ нагрѣвается нестолько отъ прохожденія чрезъ него лучей солнца, сколько отъ прикосновенія съ почвою. Во время дня почва нагрѣвается и, въ свою очередь, издаетъ теплоту, согрѣвая прилежащій къ ней слой воздуха; вышіе слои воздуха тоже нагрѣваются, хотя слабѣе перваго, потому что теплота распространяется лучами. Опытами же доказано, что болѣе нагрѣтое тѣло издаетъ и болѣе теплоты въ окружающую средину, или, какъ говорятъ, оно теряетъ болѣе теплоты чрезъ лучеиспусканіе. Провотей и Дезенъ доказали, для очень многихъ случаевъ, что отношеніе между *поглощательною* и *лучеиспускательною* способностями даннаго тѣла при всѣхъ температурахъ одинаково. Кирхгофъ (*) математически доказалъ справедливость такого положенія. При этомъ надобно замѣтить, что онъ разсматривалъ лучи свѣтовые и теплотворные вмѣстѣ и нашелъ въ этомъ случаѣ между ними совершенную аналогію. Различныя тѣла имѣютъ различную способность поглощенія теплотворныхъ лучей, поэтому и лучеиспускательная способность ихъ различна; слѣдовательно различные роды почвы неодинаково нагрѣваютъ воздухъ. Между тѣмъ въ столь разнообразномъ явленіи есть одна общая черта, а именно: днемъ, подъ вліяніемъ солнечныхъ лучей нагрѣваются и почва и воздухъ вмѣстѣ, ночью же, когда лучи солнца уже не дѣйствуютъ непосредственно, земля согрѣваетъ воздухъ лучеиспусканіемъ. Нагрѣтый воздухъ, по причинѣ своей легкости, уступаетъ мѣсто болѣе тяжелому, холодному, а самъ поднимается въ верхніе предѣлы атмосферы, имѣя способность нагрѣвать тѣла, приходящія съ нимъ въ соприкосновеніе; на самомъ же дѣлѣ его вліяніе оказывается только въ сравнительно низкихъ предѣлахъ, потому что на большихъ высотахъ онъ дѣлается очень рѣдкимъ, и, разширяясь, самъ поглащаетъ теплоту, или, какъ говорятъ, часть его теплоты дѣлается скрытой. Такое свойство разщиряющагося воздуха было изслѣдовано многими физиками, между которыми кажется первые были Фавръ и Зильберманнъ; они помѣстили термометръ Брегета въ сосудъ, въ которомъ можно было по произволу сгустить и разрѣдить воздухъ. Оказалось, что при сгущеніи воздуха температура его увеличивалась, а при разрѣженіи уменьшалась. Джуль занимался тоже этимъ явленіемъ, и наконецъ въ послѣднее время Мартенъ (**) произвелъ рядъ опытовъ съ большимъ количествомъ воздуха. Послѣдній физикъ употребилъ для своихъ опытовъ большой сгустительный снарядъ, принадлежащій одному заводу; въ резервуарѣ находились термометръ и манометръ, а воздухъ накачивался посредствомъ паровой машины. Вотъ средніе результаты, полученные изъ многихъ наблюденій.

Увеличеніе давленія въ милиметрахъ, и температуры

759^{mm}	809	859	909	959	1009	1059
20,05	21,18	22,38	23,09	23,36	23,50	23,42

Уменьшеніе давленія и температуры

1009	959	909	859	809	759
20,03	18,89	17,93	17,59	17,18	17,11

температура окружающаго воздуха = 20,76.

Изъ приведенной таблицы видно, что температура увеличивается и уменьшается непропорціонально давленію, и что когда давленіе доходитъ до первоначальной величины, температура получается ниже первоначальной. Опыты показали Г-ну Мартену, что разница между температурами, соотвѣтствующая разницѣ между давленіями $1059^{mm}-759^{mm}=300,^{mm}$ получалась всегда одинаковая, происходило ли разрѣженіе медленно или быстро. Поэтому Мартенъ вывелъ заключеніе, что разницѣ въ давленіи, равняющейся 300^{mm} соотвѣтствуетъ разница между температурами $6^0, 3$ и что, слѣдовательно на каждые 100^{mm} приходится $2^0, 1$. Принимая это за правило, получаемъ вычисленную температуру на высотѣ, до которой поднялся Гейлюсакъ, на 8^0 ниже температуры при поверхности земли, — что очень далеко отъ истины. Хотя Мартенъ употребилъ нарочно большой резервуаръ съ воздухомъ, для того, чтобы имѣть по возможности явленіе

(*) Annales de Chimie et d. Physique. T. LVIII p. 209.

(*) Annalen der Physik und d. Chemie-Poggendorff. B. CIX p. 275.
(**) Annales de Chimie et d. Physique T. LVIII. (1860 a.)

ближе къ явленію въ природѣ; однакожъ самые опыты не соотвѣтствуютъ вполнѣ цѣли, ибо воздухъ сначала сгущался, а потомъ уже подвергался разрѣженію. Если производить опыты безъ предварительнаго сгущенія, съ помощію воздушнаго насоса, то оказывается что уменьшеніе температуры, идетъ еще гораздо медленнѣе, нежели какъ это было въ опытахъ Мартена; въ этомъ случаѣ болѣе значительное вліяніе имѣетъ температура окружающаго пространства. (*) Впрочемъ, намъ кажется, что опыты подобнаго рода не могутъ обнаружить общаго закона явленія; ибо вполнѣ надежные результаты наблюденій Барраля и Биксіо, совершенно выходящіе изъ ряда показаній прочихъ наблюдателей, доказываютъ, что высшіе слои атмосферы подвержены измѣненіямъ температуры зависящимъ отъ весьма различныхъ причинъ.—Наконецъ удѣльная теплота, или число единицъ теплоты, необходимое для повышенія температуры опредѣленнаго количества воздуха на 1^0, увеличивается съ уменьшеніемъ давленія, какъ это показываютъ точные опыты. И такъ нагрѣтый воздухъ, подымающійся изъ низшихъ слоевъ атмосферы въ верхніе, охлаждается отъ собственнаго разширенія и отъ прикосновенія съ холоднымъ воздухомъ. Существованіе восходящихъ потоковъ воздуха несомнѣнно; ихъ можно видѣть иногда и на равнинахъ: но путешественники на горахъ въ особенности часто видятъ подымающіеся съ долинъ туманы, которые иногда останавливаются на нѣкоторомъ разстояніи отъ вершины горы, а чаще всего передвигаются по горизонтальному направленію; иногда путешественникъ видитъ ихъ подъ собою, иногда онъ окруженъ ими. Эти потоки уносятъ съ собою теплоту и преимущественно производятъ охлажденіе земной поверхности. Водяные пары, достигая высокихъ предѣловъ атмосферы, отъ сильнаго охлажденія нетолько превращаются въ водяныя частицы, но еще замерзаютъ и наполняютъ пространство очень мелкими снѣжинками, которыя составляютъ, такъ называемыя, перистыя облака, и которыя обильно покрыли платье и приборы Барраля и Биксіо во время ихъ аэростатическаго путешествія.

Если обратимъ вниманіе на вершины горъ, то охлажденіе ихъ поверхности зависитъ еще отъ нѣсколькихъ важныхъ причинъ. Выше было замѣчено, что воздухъ нагрѣвается болѣе отъ прикосновенія съ почвою, нежели отъ дѣйствія солнечныхъ лучей непосредственно; поэтому чѣмъ больше поверхность прикосновенія воздуха съ почвою, тѣмъ и нагрѣваніе должно быть сильнѣе. Остроконечныя горы, представляющія незначительную поверхность прикосновенія, менѣе согрѣваютъ воздухъ, нежели обширныя равнины. Вышеприведенныя наблюденія А. Браве и Мартена показываютъ, что почва на горахъ теплѣе воздуха. Но около остроконечной горы воздухъ безпрестанно обновляется; здѣсь почти никогда не бываетъ совершенной тишины и движеніе воздуха на горахъ замѣтно даже и тогда когда въ долинахъ господствуетъ полное безвѣтріе; а слѣдовательно движущійся воздухъ безпрестанно уноситъ съ собою теплоту. На равнинахъ нагрѣтый слой воздуха держится у самой поверхности почвы до тѣхъ поръ, пока не образуется восходящій потокъ, и это состояніе продолжается иногда значительное время, доказательствомъ чего служатъ миражи; на вершинахъ же горъ, по причинѣ большой рѣдкости воздуха, такого спокойствія никогда не можетъ быть. Путешественники, восходящія на горы въ самое хорошее время, достигнувъ вершины почти всегда подвергаются дѣйствію сильныхъ, порывистыхъ вѣтровъ, сопровождаемыхъ нерѣдко бурями и сильными грозами. Это неблагопріятное обстоятельство испытали Браве и Мартенъ, а также и русская экспедиція 1850 г. на Араратъ, подъ начальствомъ Г.г. Ходзько и Ханыкова, которую сильная буря, сопровождаемая снѣгомъ и градомъ, заставила пробыть у вершины горы 3 ночи и 2 дня.

Если охлажденіе остроконечныхъ горъ зависитъ отъ ихъ вида, способствующаго частому перемѣщенію воздуха; то плоскія возвышенности, сравнительно, должны быть менѣе охлаждены: ибо онѣ представляютъ воздуху большую поверхность прикосновенія. Въ самомъ дѣлѣ, въ Мексиканскихъ горахъ на высотѣ 13600 футовъ пропадаетъ уже растительность; между тѣмъ какъ на той же высотѣ и подъ тою же самою широтою, только южною, въ Перу существуетъ обильное хлѣбопашество. Граница вѣчныхъ снѣговъ въ мексиканскихъ хребтахъ находится на 14500 футовъ надъ уровнемъ моря; между тѣмъ какъ въ Перу она находится на 18350 ф.—Городъ Потози лежитъ на высотѣ 13540 ф. надъ ур. моря. Можно привести еще другой примѣръ гораздо разительнѣе. На Тибетской плоской возвышенности, подъ 32^0 с. ш., на высотѣ 11,700 ф. ростетъ пшеница, а ячмень и еще выше; тогда какъ на южномъ склонѣ Гималая, подъ меньшею широтою, хлѣбопашество перестаетъ существовать уже на высотѣ 9500 ф. Даже подъ экваторомъ, въ области Квито и Катамаркѣ граница обработки пшеницы находится ниже Тибетской на 2300 ф.

Мартенъ и А. Браве произвели рядъ наблюденій на Фаульгорнѣ и Монбланѣ надъ лучеиспускательною способностью горъ; приборъ, употребленный ими для сей цѣли былъ *актинометръ* Пулье, состоящій изъ жестяного ящика выложеннаго внутри лебяжьимъ пухомъ и заключающаго въ себѣ термометръ. Такъ какъ лебяжій пухъ имѣетъ большую поглощательную способность, то онъ имѣетъ и большую лучеиспускательную способность, значитъ во время ночи охлаждается, и это охлажденіе можетъ быть измѣрено помощію термометра.

К. Браве производилъ въ тоже время соотвѣтственныя наблюденія въ Бріанце и въ Шамуни. Термометръ актинометра показывалъ всегда меньшую температуру противъ температуры воздуха; на Фаульгорнѣ разница между температурами воздуха и лебяжьяго пуху была 6^0, 27, а въ Бріенцѣ 4^0, 62. Поэтому лучеиспусканіе лебяжьяго пуху на Фаульгорнѣ отно-

(*) Произведенные мною опыты съ небольшимъ резервуаромъ, въ которомъ помѣщался ртутный термометръ и сифонный барометръ, показали очень слабое пониженіе температуры, несмотря на то что резервуаръ былъ окруженъ непроводникомъ; пониженіе температуры на 1^0 R всякій разъ соотвѣтствовало пониженію барометра слишкомъ на 300^{mm}.

сится къ лучеиспусканію его въ Бріенцѣ какъ 1, 36: 1. Разница между высотами мѣстъ наблюденія 2110 метровъ. Подобныя же наблюденія на Монбланѣ и въ Шамуни дали отношеніе 1, 98: 1—почти вдвое больше; разность между высотою станцій 2800 метровъ. Изъ этихъ опытовъ видно, 1) что лучеиспусканіе на горахъ болѣе нежели на равнинахъ, 2) что оно возрастаетъ въ высотою.

Посмотримъ какова лучеиспускательная способность самой почвы на горахъ и на равнинахъ. Пельтье и Браве на Фаульгорнѣ, во время тихихъ и ясныхъ ночей съ 12—18 Августа 1842 г. произвели рядъ наблюденій надъ температурою воздуха, актинометра и поверхности почвы. Среднія изъ этихъ наблюденій даютъ слѣдующіе результаты:

температура воздуха $+ 5^0, 04$
— лебяжьяго пуху $- 3^0, 09$
— поверхности почвы $+ 2^0, 63$.

Отсюда видно, что температура почвы ниже температуры воздуха, но выше актинометра. На Монбланѣ оказалось тоже. Надобно замѣтить, что такъ какъ поверхность Монблана покрыта снѣгомъ, то наблюдатели привезли съ собою песокъ изъ Фонтенебло и онъ служилъ тогда поверхностью почвы. Наблюденія въ Сентябрѣ дали такіе же результаты. Вообще охлажденіе почвы во время ночи всегда почти вдвое больше воздуха,—что доказываетъ сильное нагрѣваніе оной днемъ при дѣйствіи солнечныхъ лучей. Охлажденіе почвы, причиняемое лучеиспусканіемъ, на горахъ должно быть тѣмъ болѣе, если онѣ остроконечны: тогда какъ на равнинахъ лучеиспусканіе происходитъ только по направленію къ зениту; на остроконечной горѣ, погружающейся совершенно въ воздушное море, оно происходитъ во всѣ стороны, а рѣдкій воздухъ еще болѣе способствуетъ этому явленію.

Къ очень важнымъ причинамъ, понижающимъ температуру вершинъ горъ, должно отнести еще лучеиспусканіе покрывающихъ ихъ снѣговъ. Снѣга эти бываютъ двухъ родовъ: 1) *ледянистые*, которые во время дня таютъ, а ночью замерзаютъ такая поверхность представляется ледянистой, блестящей, сильно отражающей свѣтъ; 2) *порошкообразные*, то есть такіе, которые послѣ паденія сейчасъ скрѣпляются отъ холода и никогда не таютъ; по такому песку, какъ говоритъ Мартенъ, очень трудно подыматься на гору—бредешь какъ въ мукѣ. Наблюденія А. Браве и Мартена показали, что лучеиспускательная способность порошкообразнаго снѣга гораздо болѣе актинометра; въ то время когда температура актинометра была ниже температуры окружающаго воздуха на $10^0, 82$, поверхность снѣга была холоднѣе воздуха на $12^0, 30$. Въ продолженіе 4-хъ дней температура воздуха была $-6^0, 45$, а термометръ въ снѣгу показывалъ $-19^0, 20$; на глубинѣ 2-хъ дециметровъ температура снѣга никогда не подымалась выше $-8^0, 2$. Такая лучеиспускательная способность составляетъ могущественную причину, производящую большой холодъ. Этотъ порошкообразный снѣгъ сильно охлаждаетъ нетолько воздухъ, но и въ особенности твердыя тѣла, съ которыми онъ приходитъ въ соприкосновеніе. Такой снѣгъ падаетъ иногда и въ низменныхъ мѣстахъ, только очень рѣдко. Кристаллическій снѣгъ, а равно какъ и ледянистый не имѣютъ такой сильной лучеиспускательной способности. Наблюденія въ Боссекопѣ, въ Лапландіи, показали, что температура кристаллическаго снѣга была на $1^0, 5$ ниже температуры окружающаго воздуха.

Наконецъ еще одна причина охлажденія вершинъ горъ—испареніе. По причинѣ рѣдкости воздуха испареніе на горахъ происходитъ гораздо легче и чаще нежели въ долинахъ: всякое же испареніе производитъ охлажденіе, ибо при этомъ значительная часть теплоты дѣлается скрытой. Когда почва влажна, то можно видѣть какъ на горахъ поднимаются туманы съ разныхъ мѣстъ на ихъ поверхности, какъ будь-то (по выраженію Мартена) зажгли огни въ разныхъ мѣстахъ. Иногда этотъ туманъ разсѣевается, а иногда онъ составляетъ цѣлыя облака. Мартенъ наблюдалъ ихъ степень насыщенія влажностью помощію психрометра и нашелъ, что она измѣняется отъ 47%—92%. Пельтье показалъ, что происхожденіе ихъ сопровождается сильнымъ напряженіемъ электричества. Это испареніе бываетъ и тогда, когда воздухъ влаженъ; но оно гораздо сильнѣе когда воздухъ сухъ. Надобно замѣтить, что сухость на высотахъ бываетъ обыкновенно такая, какой въ долинахъ никогда неприводится наблюдать. Гейлюсакъ, Барраль и Биксіо и многіе другіе наблюдали замѣчательное движеніе всѣхъ гигроскопическихъ тѣлъ: Мартенъ въ Бріенцѣ наблюдалъ 44%, тогда какъ А. Браве на Фаульгорнѣ нашелъ 28%. На Монбланѣ еще бо́льшая разница; однажды привелось упомянутымъ физикамъ наблюдать 13%, тогда какъ въ Шамуни было 50%.

Въ заключеніе скажемъ, что несмотря на столько различныхъ, исчисленныхъ нами причинъ, значительнаго холода на горахъ, мы не находимъ здѣсь наблюденій такой низкой температуры, какую открыли Барраль и Биксіо въ верхнихъ слояхъ атмосферы: вопервыхъ потому, что никто еще не достигалъ въ горахъ до такой высоты, 7000 метровъ,—Гумбольдтъ достигъ 6100 м.; а во вторыхъ вѣроятно и потому, что почва нагрѣтая днемъ согрѣваетъ воздухъ ночью. Безъ сомнѣнія и на одинаковой высотѣ на горахъ и въ открытомъ пространствѣ температура неодинакова; но въ этомъ отношеніи еще не достаетъ сравнительныхъ наблюденій.

К. Чеховичъ.

Замѣченная опечатка, въ № 4 на стр. 29 въ правомъ столбцѣ: вмѣсто $ty\,\theta = \frac{h}{l}$ должно быть $tg\,\theta = \frac{l}{h}$.

Печатать позволяется Вильно 3 Марта 1861 года. *Ценсоръ Статскій Совѣтникъ и Кавалеръ А. Мухинъ.*

ВИЛЬНО Типографія А. Марциновскаго. Редакторъ-Издатель *М. Гусевъ.*