Томъ II. Листъ 2 и 3.

ВѢСТНИКЪ МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

№ 26 и 27.

I.

Непосредственное опредѣленіе полюсовъ магнитовъ.

(Окончаніе; см. N. 25).

§ 8.

Теперь мы разсмотримъ разные источники ошибокъ, общихъ обоимъ способамъ, начиная съ той, которая можетъ произойти отъ непараллельности магнитной оси съ направленіемъ движенія стрѣлокъ.

Положимъ что RR (*Фиг.* 5) представляетъ направленіе линейки, NO направленіе магнита въ тойже плоскости, составляющее съ RR уголъ β по правую сторону отъ точки O; A, A', A'', A'''—мѣста стрѣлки во время ея передвиженія, при чемъ точка A выбрана такъ, что линія NA перпендикулярна къ RR, а точка A''' такъ, что линія $A'''N$ перпендикулярна къ NO. Очевидно, что для всѣхъ возможныхъ положеній стрѣлки отъ точки A вправо и отъ точки A''' влѣво моменты $\frac{OM}{AN^2}$ и $\frac{ON}{A'''N^2}$ будутъ наибольшіе. Нельзя сказать того-же про точки A', A'', потому что хотя разстоянія ихъ отъ N увеличиваются, начиная отъ AN, но вмѣстѣ съ тѣмъ увеличивается и длина перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки на линіи $A'N$, $A''N$.

Для какой нибудь точки A'' моментъ будетъ $=\frac{OM''}{A''N^2}$, но $A''N=\frac{AN}{\cos\alpha}$, гдѣ α означаетъ уголъ между OM и OM'', или между AN и $A''N$; $OM''=ON\cos(\beta-\alpha)$, слѣдовательно

$$\frac{OM''}{A''N^2}=\frac{ON\cos(\beta-\alpha)\cos^2\alpha}{AN^2}=q\cos(\beta-\alpha)\cos^2\alpha\ .$$

Для отысканія наибольшаго момента, полагаемъ

$$\frac{\partial\ (q\cos(\beta-\alpha)\cos^2\alpha)}{d\alpha}=-2\cos(\beta-\alpha)\cos\alpha\sin\alpha-\cos^2\alpha\sin(\beta-\alpha)=0\quad,$$

откуда $$-\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=2\operatorname{tg}\alpha\ .$$

Для небольшихъ угловъ можно положить, независимо отъ знака, $\beta-\alpha=2\alpha$ и слѣдоват. $\alpha=\frac{\beta}{3}$.

И такъ наибольшій моментъ будетъ соотвѣтствовать положенію стрѣлки въ точкѣ A' и полюсъ будетъ *казаться* въ точкѣ N'; измѣренная величина $A''O'$ будетъ разниться отъ истинной NO, которая отъищется изъ равенства

$$NO = \frac{A''O' - AA''}{\cos\beta} = \frac{A''O' - AN\operatorname{tg}\frac{\beta}{3}}{\cos\beta}.$$

Еслибы опредѣленіе угла β могло быть сдѣлано съ точностью, то можно бы для всякаго частнаго случая вычислить NO. Еслибы производить два наблюденія, по одному съ каждой стороны магнита, то въ предположеніи, что стрѣлки движутся по направленіямъ строго параллельнымъ, изъ этихъ двухъ наблюденій мы получили бы

$$NO = \frac{A''O' - AN\operatorname{tg}\frac{\beta}{3}}{\cos\beta} \quad \text{и} \quad NO = \frac{A_{''}O' + AN\operatorname{tg}\frac{\beta}{3}}{\cos\beta},$$

гдѣ $A_{''}O'$ соотвѣтствуетъ $A'O'$; полусумма этихъ величинъ $\frac{A''O' + A_{''}O'}{2\cos\beta}$ все же зависѣла бы отъ угла β. Но положимъ, что направленіе линейки можетъ быть измѣняемо и при этомъ сохраняется возможность наблюденій съ двухъ сторонъ магнита. Уменьшая уголъ β и повторяя наблюденія, мы замѣтили бы, что опредѣленія мѣстъ полюса, получаемыя въ обоихъ случаяхъ приближались бы къ равенству. Эта метода можетъ служить для установки линейки параллельно магниту, одинъ разъ навсегда.

§ 9.

Для всякой внѣшней магнитной точки, дѣйствующей на магнитъ, или подверженной его дѣйствію, можно представить на поверхности магнита замкнутую линію, въ которой какъ бы сосредоточенъ магнитизмъ. Если разность разстояній магнитной точки отъ передней и задней поверхностей незначительна въ сравненіи съ среднимъ ея разстояніемъ, то эта линія будетъ поперечное сѣченіе магнита плоскостью перпендикулярною его оси. Для цилиндрическаго магнита въ этомъ случаѣ линія будетъ кругъ, содержащій въ себѣ полюсъ; если-же разность разстояній значительна, то видъ кривой линіи не можетъ быть опредѣленъ, потому что полюсы передней и задней поверхностей магнита (т. е. обращенныхъ ко внѣшней точкѣ и въ противуположную сторону) не одинаково отстоятъ отъ конца, а численный законъ измѣненія мѣста полюса въ зависимости отъ разстоянія не извѣстенъ.

Можно задать себѣ вопросъ: если цилиндрическій магнитъ подверженъ дѣйствію отдаленной точки, то совпадаетъ ли полюсъ его съ центромъ круговаго сѣченія? Вопросъ этотъ можетъ быть разрѣшенъ слѣдующимъ образомъ.

Пусть O' (*Фиг.* 6) будетъ мѣсто магнитной точки, или весьма малой стрѣлки; $PP'P''P'''$ поперечное вертикальное сѣченіе цилиндрическаго магнита, содержащее въ себѣ полюсъ. Проведемъ чрезъ центръ круга C и точку O' горизонтальную плоскость и въ ней линію CO, лежащую въ плоскости круга PP''' и другую линію OO', параллельную геометрической оси магнита.

Для всякой изъ точекъ P, P', находящихся на верхней полуокружности, найдутся точки P''', P'', симметрично расположенныя относительно горизонтальной плоскости и діаметра MH, слѣдовательно точка приложенія равнодѣйствующей всѣхъ силъ должна находиться на этомъ діаметрѣ въ какой нибудь точкѣ N.

Положимъ, что въ точкѣ P находится элементъ окружности ds, магнитное напряженіе котораго назову M; магнитное же напряженіе точки O' пусть будетъ m. Назовемъ разстояніе CO чрезъ D; линію OO' буквою D_1, радіусъ CP чрезъ R и уголъ $PCO = a$.

Элементъ ds можетъ быть выраженъ чрезъ $R\,da$, тогда взаимное дѣйствіе точки O' и элемента ds выразится посредствомъ

$$\frac{MmR\,da}{PO'^2}, \quad \text{но} \quad PO'^2 = PO^2 + OO'^2 = PO^2 + D_1^2, \quad \text{а} \quad PO^2 = R^2 + D^2 - 2DR\cos a;$$

слѣдовательно
$$\frac{MmR\,da}{PO'^2} = \frac{MmR\,da}{R^2 + D^2 + D_1^2 - 2DR\cos a}.$$

Полное взаимное дѣйствіе точки O' и окружности $PP'P''P'''$ выразится чрезъ

$$2\int_0^\pi \frac{MmR\,da}{R^2 + D^2 + D_1^2 - 2DR\cos a}.$$

Но это притягательное, или отталкивательное дѣйствіе можетъ быть замѣнено дѣйствіемъ точки O' на полюсъ N, имѣющій напряженіе $2\pi RM$; если разстояніе $NO' = x$, $NO = y$, то:

$$\frac{2\pi RMm}{x^2} = 2\int_0^\pi \frac{Mm\,R\,d\alpha}{R^2+D^2+D_1^2-2DR\cos\alpha},$$

или:

$$\frac{\pi}{x^2} = \int_0^\pi \frac{d\alpha}{R^2+D^2+D_1^2-2DR\cos\alpha}$$

откуда:

$$x^2 = \frac{\pi}{\int_0^\pi \frac{d\alpha}{R^2+D^2+D_1^2-2DR\cos\alpha}}.$$

$\int_0^\pi \frac{d\alpha}{R^2+D_1^2+D^2-2DR\cos\alpha}$ можетъ быть представленъ въ простѣйшемъ видѣ

$$\frac{1}{R^2+D^2+D_1^2}\int_0^\pi \frac{d\alpha}{1-p\cos\alpha}, \text{ гдѣ } p = \frac{2DR}{R^2+D^2+D_1^2};$$

но

$$\int_0^\pi \frac{d\alpha}{1-p\cos\alpha} = -\frac{2}{\sqrt{1-p^2}}\,\mathrm{arc}\left[\mathrm{tg} = \left(\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\frac{1+p}{1-p}}\right)\right] + C, \text{ гдѣ } 1 > p^2$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-p^2}}\,\mathrm{arc}\left[\mathrm{tg} = \sqrt{\frac{1+p}{1-p}} \times \mathrm{cotg}\;0\right] = \frac{2}{\sqrt{1-p^2}}\,\mathrm{arc}\,(\mathrm{tg}\,\infty) = \frac{\pi}{\sqrt{1-p^2}}.$$

Слѣдовательно:

$$x^2 \text{ или } D_1^2+y^2 = \frac{\pi}{\frac{\pi}{(R^2+D^2+D_1^2)\sqrt{1-p^2}}} = (R^2+D^2+D_1^2)\sqrt{1-p^2}.$$

Подставляя вмѣсто p его величину и произведя нѣкоторыя дѣйствія, получимъ

$$D_1^2+y^2 = \sqrt{(D^2+R^2)^2+2(R^2+D^2)D_1^2+D_1^4} \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Отсюда можно найти y для всякаго частнаго случая и по разности $D-y$ судить о мѣстѣ полюса.

Если стрѣлка O' перенесена будетъ въ O т. е. будетъ находиться въ плоскости круга $PP''P'''$, то въ предъидущей формулѣ надо положить $D_1=0$, и тогда она обратится въ

$$y^2 = \sqrt{(D^2-R^2)^2}, \quad y = D^2-R^2 \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

Слѣдующая таблица показываетъ мѣста полюсовъ, какъ ближайшаго, противъ котораго находится стрѣлка, такъ и болѣе удаленнаго; мѣсто 1-го вычислено по формулѣ (2) и мѣсто втораго по формулѣ (1). Разстояніе D стрѣлки отъ геометрической оси выражено въ радіусахъ поперечнаго сѣченія магнита; разстояніе между полюсами принято $50R$; слѣд. $D_1 = 50R$. Мѣсто полюса, или, другими словами, разстояніе полюса отъ геометрической оси выражено въ частяхъ радіуса.

D	Мѣсто ближайш. пол.	Мѣсто дальнѣйш. пол.	Уголъ о си геом. и маг.	Ошибка въ опред. пол.
20	0,025	— 0,018	2′ 58″	0,006
50	0,010	0,000	0′ 42″	0,003
100	0,005	+ 0,003	0′ 8″	0,001

Вслѣдствіе несовпаденія полюсовъ съ центрами круговыхъ сѣченій геометрическая ось не совпадаетъ съ магнитною; углы между этими осями показаны въ четвертомъ столбцѣ; числа пятаго столбца показываютъ ошибки въ опредѣленіи полюсовъ, выраженныя въ частяхъ радіуса, и вычисленныя на основаніи § 8.

Оказывается, что эти ошибки по незначительности могутъ быть не принимаемы во вниманіе, даже при очень толстыхъ магнитахъ (сравнив. методу наблюденія и степень точности наблюд. въ таблицахъ).

Число, означенное въ третьемъ столбцѣ знакомъ (—), показываетъ что полюсъ отстоитъ отъ оси въ сторону противуположную стрѣлкѣ, обозначенное (+) опредѣляетъ мѣсто полюса въ тойже сторонѣ, гдѣ находится стрѣлка; числа втораго столбца всѣ относятся къ этой категоріи.

При разстояніи $D = 50R$ полюсъ совпадаетъ съ осью (3-ій столбецъ); это можно было бы узнать, вставляя въ уравненіе (1) D вмѣсто y, и разрѣшая его относительно D; по возвышеніи во вторую степень обѣихъ частей уравненія и по сокращеніи получится: $2D^2 = R^2 + 2D_1^2$, изъ чего видно что D приблизительно равно D_1, если R мало въ сравненіи съ этими величинами; въ нашемъ случаѣ для $D_1 = 50$, $D = 50{,}00001$.

§ 10.

Теперь остается обратить вниманіе еще на два обстоятельства: 1) неперпендикулярность стрѣлки къ линейкѣ и 2) несовпаденіе осей магнита и стрѣлки съ одной горизонтальной плоскостью.

Второе обстоятельство кажется вовсе не имѣетъ вліянія на мѣсто полюса, а только во всѣхъ наблюденіяхъ степень отталкиванія слабѣе, чѣмъ въ случаѣ совпаденія. Несоблюденіе же перваго условія дѣлаетъ опредѣленіе полюса невѣрнымъ въ ту или другую сторону, смотря по направленію стрѣлки; не употребляя никакой особенной методы для исключенія ошибокъ этого рода, я довольствовался тѣмъ, что передъ всякимъ рядомъ наблюденій повѣрялъ положеніе стрѣлки, установивши ее предварительно по возможности перпендикулярно къ линейкѣ. Такимъ образомъ ошибка была уменьшена на сколько позволяло устройство прибора (см. § 12) и сдѣлана постоянною.

§ 11.

Во всѣхъ предъидущихъ разсужденіяхъ предполагалось, что стрѣлки, отклоняющія магнитъ, имѣли незначительную длину; однако есть случаи, когда необходимо употреблять очень длинныя стрѣлки, а именно, если магнитъ очень коротокъ и слѣдовательно полярное дѣйствіе его незначительно.

Повторяя вычисленія, произведенныя въ § 7, только для обоихъ полюсовъ стрѣлки, и называя l разстояніе между ея полюсами, получимъ слѣдующее неравенство:

$$\frac{\partial K}{\partial F} = \frac{2L + \Delta L}{\Delta L} \cdot \frac{z}{2L + z} \cdot \frac{\dfrac{D+l}{[z^2 + (D+l)^2]^{\frac{5}{2}}} - \dfrac{D}{(z^2 + D^2)^{\frac{5}{2}}}}{\dfrac{D+l}{[(2L+z)^2 + (D+l)^2]^{\frac{5}{2}}} - \dfrac{D}{[(2L+z)^2\, D^2]^{\frac{5}{2}}}} > 1,$$

которое, если не будетъ удовлетворено числами взятыми изъ опыта, то опредѣленіе полюсовъ короткихъ магнитовъ не будетъ возможно.

§ 12.

Метода наблюденія. Сначала нахожу въ испытуемомъ магнитѣ среднюю точку по способу Купфера и приближенное мѣсто полюса посредствомъ меридіональной стрѣлки; другой же полюсъ очевидно отстоитъ на столько-же отъ средней точки. Потомъ привѣшиваю магнитъ за одинъ изъ приближенныхъ полюсовъ и привожу его въ горизонтальное положеніе посредствомъ противовѣсовъ. *Фиг. 7-ая* изображаетъ приборъ, построенный для наблюденій по этой методѣ; для упрощенія чертежа, нѣкоторыя второстепенныя части прибора опущены.

NM изображаетъ магнитъ, вложенный въ стремена рычага BB, висящаго на двухъ концахъ очень тонкой стальной проволоки, перекинутой черезъ маленькій блокъ O, который держится на столбикѣ, прикрѣпленномъ къ верхней поворотной части F. Эта часть вложена въ оправу стеклянной трубки KK, въ 22 дюйма длины, которая внизу другою оправою скрѣплена съ мѣдною подставкою TT, привинченною къ деревянной доскѣ.

Рычагъ BB оканчивается съ одной стороны винтомъ съ подвижными на немъ противовѣсами P, P', а съ другой — проволокою BC, на концѣ которой приклеенъ очень тонкій стеклянный указатель (около 0,01 миллим. толщины). Проволоки, поддерживающія рычагъ могутъ быть сближаемы и раздвигаемы вверху и внизу посредствомъ винтика H и другаго ему соотвѣтствующаго, но не изображеннаго на чертежѣ.

Въ сторонѣ отъ магнита, между деревянными стойками R, R, установлена раздѣленная линейка DD, которая можетъ быть поднимаема и опускаема посредствомъ винтовъ V, V; на линейкѣ нарѣзаны зубцы, по которымъ можетъ двигаться ноніусъ E посредствомъ шестерни L.

Къ ноніусу прикрѣплена металлическая пластинка, перпендикулярно къ маштабу; часть ея, обращенная къ магниту, имѣетъ желобокъ, куда кладутся маленькія стрѣлки подобныя n; другая часть пластинки имѣетъ продольный прорѣзъ, въ который вставляется небольшой подкововидный магнитъ m.

Теперь слѣдуетъ описаніе частей, не изображенныхъ на чертежѣ. По другую сторону магнита находится горизонтальный кругъ, вращающійся на вертикальной оси; на немъ лежитъ вспомогательный магнитъ, служащій для приведенія всегда въ одну плоскость магнита NM, отклоняемаго стрѣлкою n, или подковкою m. Наконецъ передъ указателемъ C установленъ микроскопъ съ перекрестными нитями, на которыя приводится стеклянная стрѣлка указателя. Подъ магнитомъ NM и противовѣсами P, P' ставятся бруски, служащіе для поддержанія тѣснаго стекляннаго футляра, прикрывающаго рычагъ по всей его длинѣ. Часть футляра, находящаяся между микроскопомъ и указателемъ C, имѣетъ впереди тонкую стеклянную пластинку вертикальную, но не перпендикулярную къ общему направленію рычага; она, позволяя видѣть стеклянный указатель, служитъ въ то же время для освѣщенія нитей микроскопа.

Еще одна часть прибора не изображена на чертежѣ, а именно изогнутая проволока, оканчивающаяся пластинкой и прикрѣпленная къ стремени, ближайшему къ точкамъ привѣса; пластинка погружена въ стаканъ съ масломъ, установленный внутри подставки TT.

Въ этомъ приборѣ магнитъ повѣшенъ на двухъ проволокахъ для того, чтобы можно было производить опредѣленія его полюсовъ въ плоскости перпендикулярной магнитному меридіану, т. е. въ такомъ положеніи, что земной магнитизмъ не можетъ обнаруживать никакого вліянія на распредѣленіе магнитизма въ желѣзѣ. Опредѣляя *кажущееся* мѣсто полюса при различныхъ разстояніяхъ стрѣлки отъ магнита, я употреблялъ кусочки намагниченной стальной проволоки весьма незначительной длины (6—8 милл.) для малыхъ разстояній, и отклоненіе было достаточно сильно для того, чтобы можно было опредѣлять полюсъ съ удовлетворительною точностью. Для разстояній бо́льшихъ я бралъ кусочки болѣе толстой проволоки (2 милл. толщ.), длиннѣе предъидущихъ (11 — 16 милл.); и наконецъ для самыхъ большихъ разстояній были употребляемы маленькіе подковидные магниты, въ которыхъ разстояніе между полюсами имѣло 13 — 15 милл. а высота подковы 40 и 55 миллим. Такимъ образомъ для всякаго разстоянія стрѣлки я получалъ достаточно сильныя отклоненія магнита.

Когда стрѣлка находится въ наименьшемъ разстояніи отъ полюса, то передвиженіе ея производитъ незначительное измѣненіе въ положеніи магнита, и въ опредѣленіи полюса можетъ быть большая невѣрность; поэтому дѣлались всегда наблюденія при двухъ положеніяхъ стрѣлки на право и на лѣво отъ положенія упомянутаго выше. Эти два положенія таковы, что стрѣлка производитъ одинаковое дѣйствіе на магнитъ въ обоихъ случаяхъ. Раздѣляя по поламъ разстояніе между двумя крайними мѣстами стрѣлки, получимъ мѣсто стрѣлки *противъ полюса*. Это послѣднее заключеніе впрочемъ справедливо только въ такомъ случаѣ, если разность между двумя стояніями стрѣлки не превосходитъ извѣстной величины напр. 1 или 2 сантим., смотря по длинѣ испытуемаго магнита и по разстоянію стрѣлки отъ него.

Въ § 8 было упомянуто о возможности исключить ошибку, происходящую отъ непараллельности линейки и магнита, но я не имѣлъ возможности устроить приборъ такимъ образомъ и долженъ былъ довольствоваться возможно тщательнымъ приведеніемъ магнита въ положеніе параллельное линейкѣ, измѣряя непосредственно разстоянія между ними. Надо замѣтить, что магнитная ось составляла обыкновенно незначительный уголъ съ геометрическою. Если-бы линейка была помѣщена подъ магнитомъ и поперечная пластинка, выступая дюймовъ на 8 съ каждой стороны, имѣла бы загибы по краямъ вверхъ до плоскости, проходящей черезъ магнитъ, и если-бы линейка имѣла азимутальное движеніе, сохраняя возможность движенія вертикальнаго, тогда приборъ былъ бы гораздо совершеннѣе.

Кромѣ того опытъ мнѣ показалъ, что крайняя точность наблюденія по этому способу могла бы быть достигнута не иначе, какъ при установкѣ прибора на каменномъ столбѣ и при совершенной отдѣльности линейки отъ главнаго прибора; я же могъ производить свои наблюденія только на прочномъ столѣ. Наконецъ вмѣсто наблюденій посредствомъ микроскопа и выжиданія момента покоя магнита, лучше было бы наблюдать его качанія въ зрительную трубу по способу Гаусса, снабдивъ магнитъ зеркаломъ.

Въ ожиданіи болѣе благопріятныхъ обстоятельствъ, я производилъ наблюденія, какъ мнѣ позволяли качества прибора и его установка; опредѣленія мои еще не имѣютъ той степени точности, какая возможна при этой методѣ, но смѣю надѣяться, что онѣ точнѣе, чѣмъ можно достигнуть по способамъ до нынѣ извѣстнымъ.

§ 13.

Предъидущіе способы не приложимы къ опредѣленію полюсовъ электромагнитовъ, по значительной тяжести желѣза, и соленоидамъ; притомъ же трудно, висящіе электромагниты держать въ сообщеніи съ довольно сильною гальваническою батарею, не вредя чувствительности прибора. По всѣмъ этимъ причинамъ опредѣленіе полюсовъ электромагнитовъ затруднительно по предъидущимъ способамъ и не можетъ быть доведено до такой такой степени точности какъ для магнитовъ средней величины. Къ категоріи электромагнитовъ, относительно величины и тяжести, должно отнести и большіе стальные магниты.

Продолжая держаться начала исключенія дѣйствія отдаленнаго полюса, займемся изысканіемъ методъ отличныхъ отъ прежнихъ, или видоизмѣненіемъ ихъ. Для этаго представляется во первыхъ слѣдующее средство.

1. Магнитная стрѣлка прикрѣпляется къ легкому рычагу PK, (*Фиг.* 8) который можетъ качаться въ горизонтальной плоскости на нити, проходящей чрезъ полюсъ электромагнита NS. Стрѣлка m должна находиться въ одной горизонтальной плоскости съ полюсами N, S. Дѣйствіе спирали, обвивающей электромагнитъ NS, должно быть уничтожено другимъ соленоидомъ, приличнымъ образомъ расположеннымъ.

Чрезмѣрная длина рычага, которая сдѣлаетъ труднымъ наблюденіе, потому что стрѣлка никогда не будетъ въ покоѣ, не позволяетъ надѣяться съ пользою употребить этотъ способъ, и упомянувши объ немъ вскользь только для полноты, перехожу къ другому.

Третій способъ опредѣленія полюсовъ.

2. Другое устройство, которое могло бы служить для той же цѣли, состоитъ въ слѣдующемъ. Магнитная стрѣлка ns (фиг. 9) прикрѣплена къ легкому горизонтальному рычагу no, имѣющему точку привѣса въ O; стрѣлка очевидно будетъ останавливаться въ плоскости меридіана. Перпендикулярно меридіану, тоже въ горизонтальной плоскости передъ точкою O располагается электромагнитъ NS. Очевидно что дѣйствіе полюса S на стрѣлку ns будетъ равно нулю, если $oq : oq' = (nS)^2 : (sS)^2$, гдѣ oq перпендикулярна къ nS и oq' къ sS.

Рычагъ могъ бы имѣть и другія положенія кромѣ on, но я ограничиваюсь однимъ, какъ болѣе удобнымъ для употребленія.

Пусть $oq=h$, $oq'=h'$, $oN=p$, $on=z$, $ns=l$, $nS=d$, $sS=d'$ тогда $d^2 = x^2 + (p+z)^2$; $d'^2 = x^2 + (p+l+z)^2$

$$h' = z\,\frac{x}{d} \;;\quad h = (z+l)\,\frac{x}{d} \;;\quad \frac{xz}{(x^2+(p+z)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(z+l)\,x}{[x^2+(p+z+l)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$[x^2+(p+z+l)^2]^3\, z^2 = (z+l)^2\,[x^2(p+z)^2]^3 \;.$$

Называемъ для краткости $p+z+l=q$; $p+z=t$, тогда $z^2[x^2+y^2]^3 = (z+l)^2\,(x^2+t^2)^3$;

возвышая дѣйствительно, получимъ: $z^2\,(x^6+3x^4\,q^2+3x^2\,q^4+q^6) = (z+l)^2\,(x^6+3x^2\,t^2+3x^2\,t^4+t^6)$.

Введемъ еще условія $(p+z+l)=q=x$, т. е. что разстояніе дальняго конца стрѣлки отъ магнита равно разстоянію между полюсами магнита, и $t=mx$; тогда: $8z^2\,x^6 = (z+l)^2\,(1+3m^2+3m^4+m^6)\,x^6$; полагая $(p+z)=t=0{,}9x$, или, другими словами, принимая, что длина стрѣлки составляетъ $\frac{1}{10}$ разстоянія между полюсами, обратимъ предъидущее уравненіе въ слѣдующее:

$8z^2 = 5{,}929741\,(z+l)^2$; разрѣшая это уравненіе относительно $\frac{z}{l}$ получимъ $\frac{z}{l} = 6{,}48$, слѣдоват. $z+l = 7{,}48l$.

И такъ длина рычага со стрѣлкою должна составлять около 0,75 или $\frac{3}{4}$ разстоянія между полюсами магнита, длина стрѣлки 0,1 того же разстоянія; соблюдая эти условія, можно, при извѣстномъ положеніи рычага относительно магнита, исключить дѣйствіе одного полюса.

§ 14.

Метода наблюденія. Рычагъ со стрѣлкою, которую можно назвать меридіональной, самъ по себѣ принимаетъ меридіональное направленіе. Электромагнитъ располагается въ одной горизонтальной плоскости со стрѣлкою, перпендикулярно меридіану, и такъ чтобы продолженіе рычага встрѣчало бы *приблизительно* опредѣленный полюсъ. Магнитъ придвигается къ рычагу на столько, что дальній конецъ стрѣлки отстоитъ отъ магнита приблизительно на разстояніе равное промежутку между полюсами. Дѣйствіе спирали должно быть исключено извѣстнымъ образомъ.

Положимъ, что черезъ спирали пропущенъ гальваническій токъ и меридіональная стрѣлка отклоняется къ востоку; въ такомъ случаѣ электромагнитъ должно передвинуть нѣсколько къ западу и на $\frac{1}{4}$ этого передвиженія приблизить къ точкѣ привѣса меридіональной стрѣлки, для того чтобы разстояніе этой точки отъ оси магнита было всегда равно $\frac{1}{4}$ разстоянія между полюсами.

Но вмѣстѣ съ тѣмъ должны измѣняться длина рычага и стрѣлки; первая должна всегда составлять $\frac{3}{4}$ разстоянія между полюсами, вторая $\frac{1}{10}$.

Для этой цѣли рычагъ и стрѣлка должны имѣть слѣдующее устройство. На рычагѣ AB (*Фиг.* 10) при свободномъ концѣ его B сдѣланъ прорѣзъ, куда вставляется магнитная стрѣлка, изображенная въ планѣ (a) и въ профиль (b). Ось стрѣлки можетъ быть перекладываема ближе къ точкѣ O или отъ нея, а наклоненіемъ ея мы можемъ уменьшать или увеличивать ея горизонтальную проэкцію.

Такимъ образомъ длина какъ рычага такъ и стрѣлки можетъ быть измѣняема. Передвиженіе магнита перпендикулярно меридіану можно дѣлать по произвольному маштабу, но для передвиженія его по меридіану нуженъ маштабъ, котораго дѣленія въ 4 раза мельче; дѣленія же рычага должны составлять $\frac{3}{4}$ основнаго маштаба и наконецъ на дугѣ стрѣлки можетъ быть начерчена скала, дающая прямо длину проэкціи стрѣлки.

Эта метода можетъ быть усовершенствована, и потому я описываю ее здѣсь; въ настоящемъ же ея видѣ по сложности устройства прибора и наблюденій она кажется не обѣщаетъ большой точности.

Четвертый способъ опредѣленія полюсовъ.

§ 15.

Магнитная стрѣлка ns, (*Фиг.* 11) полюсы которой *извѣстны съ точностію*, повѣшена на шелковинкѣ за одинъ изъ полюсовъ s; параллельно ей кладется электромагнитъ NS въ положеніи противуположномъ стрѣлкѣ и передвигается до тѣхъ поръ по направленію NS, пока для приведенія стрѣлки sn не будетъ употреблено наибольшее отталкиваніе боковаго магнита M.

Для того чтобы во время передвиженія магнита всегда преобладало дѣйствіе полюса N на стрѣлку, нужно чтобы разстояніе ея отъ магнита составляло извѣстную часть длины NS.

Сравнивая это положеніе стрѣлки и магнита съ тѣмъ, которое описано во второй методѣ (§ 7), легко замѣтить между ними большое сходство въ томъ отношеніи, что здѣсь дѣйствіе электромагнита на полюсъ s стрѣлки равно нулю, а тамъ соотвѣтствующее дѣйствіе стрѣлки на полюсъ магнита, близкій къ привѣсу, очень мало, сравнительно съ дѣйствіемъ на другой полюсъ магнита. Поэтому нѣтъ надобности здѣсь снова производить особенныя вычисленія; результатъ ихъ будетъ тотъ-же самый, какой мы получимъ изъ формулы (A, § 7), отбрасывая тамъ отношеніе $\frac{2L + \Delta L}{\Delta L}$ т. е.

$$\frac{z}{2L+z}\cdot\left(\frac{D^2+(2L+z)^2}{D^2+z^2}\right)^{\frac{5}{2}} > 1 = a \quad .$$

При соблюденіи этого условія всегда будетъ преобладать измѣненіе дѣйствія полюса N надъ измѣненіемъ дѣйствія полюса S во время передвиженія электромагнита.

Въ этой формулѣ z означаетъ величину небольшую относительно $2L$, поэтому измѣненія D имѣютъ большее вліяніе на измѣненіе знаменателя чѣмъ числителя, и потому съ увеличеніемъ D уменьшается a и наоборотъ. Но чѣмъ a болѣе будетъ превосходить единицу, тѣмъ лучше будутъ наблюденія, поэтому D не должно переходить извѣстный предѣлъ. Опредѣляя полюсъ при различныхъ D, переходя отъ меньшаго къ большему, можно будетъ заключить (см. Табл. 1) какое разстояніе стрѣлки отъ магнита необходимо для опредѣленія абсолютнаго полюса и тогда, сообразуясь съ формулою этого параграфа, можно будетъ рѣшить, какая степень точности возможна при этомъ способѣ опредѣленія полюсовъ.

§ 16.

Метода наблюденія сходна съ методой втораго способа, но нѣсколько проще. Наблюденія можно начинать, устанавливая электромагнитъ такъ, чтобы конецъ его находился прямо противъ свободнаго полюса стрѣлки; подвигая его мало по малу въ сторону стрѣлки, должно приблизительно опредѣлить мѣсто полюса, судя объ этомъ по наибольшему стремленію стрѣлки отклониться, а потомъ поступать какъ и во второмъ способѣ, т. е. опредѣлять полюсъ точнѣе посредствомъ двухъ наблюденій.

Для уничтоженія дѣйствія намагничивающаго соленоида лучше всегда расположить другой, одинаковый съ первымъ, и, соединивъ его съ первымъ, двигать съ нимъ вмѣстѣ во время наблюденій.

Магнитная стрѣлка, служащая для опредѣленія полюса, можетъ быть надѣта на остріѣ однимъ изъ полюсовъ; конечно движенія ея сдѣлаются менѣе чувствительны, но наблюденія съ нею сдѣлаются легче и ее можно предпочесть первой во всѣхъ случаяхъ, гдѣ не требуется большой точности.

§ 17.

Меридіональная стрѣлка, описанная въ § 1., хотя не можетъ служить для опредѣленія мѣста полюса, но можетъ показывать *перемѣщеніе* полюса и слѣдовательно *измѣненіе* въ распредѣленіи магнитизма.

Такъ, устанавливая меридіональную стрѣлку извѣстнымъ образомъ передъ электромагнитомъ и передвигая спирали, тотчасъ можно замѣтить, что она не остается въ меридіанѣ и слѣдовательно расположеніе магнитизма въ желѣзѣ измѣняется съ положеніемъ намагничивающей спирали.

Установивъ меридіональную стрѣлку передъ электромагнитами различной длины и пропуская чрезъ намагничивающую спираль каждаго гальваническій токъ различной силы (1 : 2 : 3), я убѣдился, что стрѣлка остается неподвижной; слѣдовательно распредѣленіе магнитизма въ желѣзѣ не зависитъ отъ силы намагничивающаго тока, покрайней мѣрѣ для положенія спирали по срединѣ желѣза.

§ 18.

Въ заключеніе считаю необходимымъ помѣстить нѣсколько замѣчаній, относящихся ко всему предъидущему;

1. Въ большей части предъидущихъ способовъ предполагалось, что стрѣлка имѣетъ незначительную длину; это было допущено во первыхъ,— во избѣжаніе очень сложныхъ формулъ; во вторыхъ увеличеніе длины стрѣлки можетъ имѣть одну цѣль — усиленіе взаимнаго дѣйствія между магнитомъ и стрѣлкой, которое однако не должно превосходить извѣстные предѣлы, чтобы не имѣть вліянія на распредѣленіе магнитизма въ испытуемомъ магнитѣ; наконецъ въ третьихъ, короткія стрѣлки удобнѣе длинныхъ для употребленія.

2. Бóльшей части формулъ данъ характеръ практическій т. е. онѣ служатъ не для вывода общихъ результатовъ путемъ аналитическимъ, а для опредѣленія степени приложимости способовъ въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ.

3. Изложенные выше способы даютъ средство опредѣлять съ большею или меньшею точностью полюсы магнитовъ, изъ чего можно составить понятіе 1) о правильномъ, или неправильномъ распредѣленіи магнитизма; 2) о большей или меньшей степени напряженія магнитизма къ концамъ.

Поэтому опредѣленіе полюсовъ можетъ служить хорошимъ средствомъ къ сравненію достоинства различныхъ методъ намагничиванія, къ изслѣдованію вліянія на намагничиваніе степени и способа закала стали, формы магнита, качества стали и т. п. Кромѣ того эти средства позволятъ составить до нѣкоторой степени понятіе о расположеніи свободнаго магнитизма въ электромагнитахъ, въ зависимости отъ расположенія намагничивающихъ спиралей, силы тока, формы спиралей и желѣза и проч.

Эти экспериментальныя изслѣдованія не могли войти въ составъ настоящаго труда и здѣсь прилагаются таблицы, содержащія въ себѣ нѣсколько десятковъ опредѣленій, сдѣланныхъ по 2-ой методѣ, единственно для того, чтобы дать возможность судить о достоинствѣ методы. По незначительному числу наблюденій, удерживаюсь отъ всякихъ выводовъ.

Таблицы опредѣленій полюсовъ.

Опредѣленія полюсовъ, помѣщенныя въ этихъ таблицахъ сдѣланы по второму способу посредствомъ прибора, описаннаго въ § 12; разстоянія полюсовъ отъ концовъ магнитовъ выражены въ англійскихъ полулиніяхъ, потому что линейка прибора случайно была раздѣлена на полулиніи; эти величины переведены потомъ въ миллиметры.

Таблица 1-ая.

Цилиндрическій магнитъ изъ незакаленной стали 10 англ. дюйм. (254 мм.) длины, 3½ лин. (8,9 мм.) толщины, намагниченъ по способу простаго натиранія, такъ что полюсъ намагничивающей подковы былъ проводимъ отъ средины до конца до 20 разъ и потомъ другой полюсъ подковы опять отъ средины натираемаго магнита до конца, столько-же разъ. Цѣль наблюденій, помѣщенныхъ въ 1-ой таблицѣ — есть отъисканіе разстоянія, на которомъ должна быть помѣщена стрѣлка для опредѣленія абсолютнаго полюса.

Ном. набл.	1-ое положеніе стрѣлки.	2-ое положеніе стрѣлки.	Мѣсто полюса.	Мѣсто края магнита.	Разст. пол. отъ конца.	Тоже въ миллим.	Разст. стрѣл. отъ магнита.	Примѣчанія.
1	217,5	214,8	216,15	222,1	5,95	7,6	18	Магнитъ перпендикуляренъ меридіану; опредѣляется *сѣверный* полюсъ
2	205,7	210,0	207,85	222,1	14,25	18,1	49	
3	200,6	206,9	203,75	222,1	18,35	23,3	108	
4	197,5	209,5	203,5	222,1	18,6	23,6	171	
5	193,0	213,8	203,4	221,8	18,4	23,4	174	
6	186,8	198,5	192,65	211,55	18,9	24,0	174	
7	210,0	196,2	203,1	221,8	18,7	23,7	174	
Среднее изъ послѣдн. 4-хъ					18,65	23,6		

Переходъ отъ разстоянія въ 49 миллим. къ 108 производитъ въ положеніи полюса разность въ 5,2 мм., а отъ 108 къ 171 только на 0,3 мм., послѣдующія наблюденія при разстояніяхъ отъ 140—170 мм. не показали разности между результатами большей, нежели какая могла произойти отъ ошибокъ наблюденія. Поэтому во всѣхъ послѣдующихъ опредѣленіяхъ я ставилъ подковку (см. § 12) въ разстояніи отъ 140—170 миллим. отъ магнита и найденныя величины принималъ за мѣста абсолютныхъ полюсовъ. Дальнѣйшее увеличеніе разстоянія будетъ можетъ быть полезно при болѣе чувствительномъ приборѣ, который позволитъ довести точность наблюденія до 0,1 мм.

Таблица 2.

№	1-ое полож.	2-ое полож.	Мѣсто пол.	Край магн.	Разст. пол.	То-же въ мм.	Примѣчанія.
1	199,2	181,6	190,4	208,85	18,45	23,4	Тотъ-же магнитъ въ меридіанѣ сѣвернымъ концомъ къ сѣверу; опредѣл. *сѣверный* полюсъ.
2	199,4	181,6	190,5	208,85	18,35	23,3	
Среднее					18,4	23,4	

Таблица 3.

1	202	183,8	192,9	210,7	17,8	22,6	Тотъ-же магнитъ перпендикуляренъ къ меридіану, опредѣляется *южный* полюсъ.
2	202	183,8	192,9	210,7	17,8	22,6	
3	200,5	186	193,25	210,9	17,65	22,4	
Среднее					17,75	22,5	

Таблица 4.

Магнитъ въ 10 дм (254 мм.) длины, 2 лин. (5,1 мм.) толщины, незакаленной стали, намагниченъ двойнымъ натираніемъ, причемъ концы его лежали на деревѣ.

1	198	186,7	192,35	216, 6	24,25	30,8	Тотъ-же магнитъ перпендикул. къ мерид.; опредѣляется *сѣверный* полюсъ.
2	199,1	186,3	192,7	216, 6	23,9	30,4	
3	179,0	192,9	185,95	210, 0	24,05	30,5	
Среднее					24,06	30,6	

Таблица 5.

№	1-ое полож.	2-ое полож.	Мѣсто пол.	Край магн.	Разст. пол.	То-же въ мм	Примѣчанія.
1	192,0	179,3	185,6	209,15	23,55	29,9	Тотъ-же магнитъ въ меридіанѣ сѣверный конецъ къ сѣв. опредѣл. *сѣверный* полюсъ.
2	191,5	179,2	185,35	209,15	23,8	30,2	
3	195,9	175,0	185,45	209,3	23,85	30,3	
4	194,6	176,2	185,4	209,3	23,9	30,4	
			Среднее		23,8	30,2	

Таблица 6.

1	189,8	178,6	184,2	203,7	19,5	24,8	Тотъ-же магнитъ перпендикул. къ мередіану; опредѣл *южный* полюсъ.
2	193,3	174,9	184,1	203,9	19,8	25,0	
			Среднее		19,65	24,9	

Таблица 7.

1	194,0	178,0	186,0	205,5	19,5	24,8	Тотъ-же магнитъ въ меридіанѣ опредѣл. *южный* полюсъ.
2	192,9	178,7	185,8	205,5	19,7	25,0	
			Среднее		19,6	24,9	

Таблица 8.

Тотъ-же магнитъ перемагниченъ по способу двойнаго натиранія, но по ошибкѣ движеніе магнитовъ начиналось не отъ средины.

1	198,9	185,0	191,95	207,7	15,75	20,0	Магнитъ въ мерид.; опредѣляется *сѣверный* полюсъ.
2	200,1	183,8	191,95	207,7	15,75	20,0	
3	201,3	182,7	192,0	207,8	15,8	20,1	
			Среднее		15,77	20,0	

Таблица 9.

1	203,1	179,9	191,5	213,6	22,1	28,1	Магнитъ перпенд. мерид.; опредѣл. *южный* полюсъ.
2	201,9	181,6	191,75	213,6	21,85	27,8	
			Среднее		21,97	27,9	

Во всѣхъ этихъ таблицахъ 1-ый и 2-ой столбцы послѣ номера заключаютъ въ себѣ числа дѣленій маштаба, показанныя ноніусомъ при двухъ положеніяхъ стрѣлки, между которыми заключается положеніе соотвѣтствующее мѣсту полюса. Полусумма чиселъ 1-го и 2-го столбца помѣщена въ третьемъ столбцѣ и показываетъ дѣленіе маштаба, противъ котораго находится полюсъ. Четвертый столбецъ показываетъ противъ какого дѣленія линейки находится край магнита. Разность чиселъ 3-го и 4-го столбцовъ даетъ разстояніе полюса отъ конца магнита въ полулиніяхъ; эти числа помѣщены въ пятомъ столбцѣ. Наконецъ 6-ой столбецъ заключаетъ въ себѣ величины 5-го столбца, выраженныя въ миллиметрахъ.

Легко убѣдиться, что во всѣхъ предъидущихъ опытахъ измѣненія дѣйствія, производимаго стрѣлкою, или подковкою на ближайшій полюсъ магнита, всегда превосходили дѣйствіе на его отдаленный полюсъ; для этого нужно вставить во вторую часть неравенства A (§ 7) числа изъ предшествующихъ таблицъ вмѣсто D, z и L; изъ нихъ z равно полуразности чиселъ 1-го и 2-го столбцовъ.

Вычисляя значеніе неравенства, мы получимъ число, заключающееся между 5 и 6, т. е.

$$\frac{2L + \Delta L}{\Delta L} > 6, \text{ откуда } \Delta L < \frac{2L}{5} \text{ т. е. } < \frac{80}{5} \text{ или 16 англ. линій},$$

но ΔL есть ошибка въ привѣшиваніи относительно полюса, и такая грубая ошибка не возможна даже и тогда, еслибъ онъ былъ опредѣляемъ предварительно посредствомъ меридіональной стрѣлки, находящейся въ разстояніи 1 дюйма отъ магнита.

Таблица 10.

Испытуемый магнитъ — есть компасная ромбическая стрѣлка 3,9 дюйма (99 мм.) длины; вмѣсто отклоняющей подковки взята намагниченная стальная проволока, 1 лин. толщ., 10 дм. длины, полюсы которой отстояли отъ 11—12 линій отъ концовъ.

№	1-ое полож.	2-ое полож.	Мѣсто пол	Край магн.	Разст. пол.	То-же въ мм.	Примѣчанія.
1	166,0	148,5	157,25	171, 2	13,95	17,7	Опредѣляется *южный* полюсъ.

Разстояніе полюса подвижной стрѣлки отъ магнита = 4,5 дм.

2	170.0	150,0	160, 0	174, 5	14, 5	18,4	Опредѣляется *сѣверный* полюсъ;
3	166,3	153,5	169, 9	174, 5	14, 6	18,5	стрѣлка въ меридіанѣ.
			Среднее		14,55	18,6	

И здѣсь должно убѣдиться по формулѣ § 11 подобными вычисленіями, какія произведены для первыхъ 9 таблицъ, что найденныя цифры выражаютъ мѣста полюсовъ.

Вставляя вмѣсто D, L и z числа, взятыя изъ 10 табл. получимъ $\Delta L < \frac{2L}{2}$ т. е. < 31 миллим., условіе, которое всегда было саблюдено, потому что для перваго наблюденія магнитъ былъ привѣшенъ за точку, находившуюся на $\frac{1}{6}$ длины его отъ сѣверн. конца, т. е. на $16\frac{1}{2}$ миллим., а для 2-го и 3-го за точку, отстоявшую на 17,0 милл. отъ южнаго конца.

Ѳ. Петрушевскій.

III.

Основанія теоріи гиперболическихъ функцій съ приложеніемъ къ извлеченію корней и рѣшенію уравненій.

по Грунерту (*).

Гиперболическіе *Sin* и *Cos*, которые, для отличія отъ круговыхъ, мы будемъ писать курсивомъ и съ большой буквы, выражаютъ полуразность и полусумму показательныхъ функцій e^{φ} и $e^{-\varphi}$, а именно

$$(1)\qquad \mathit{Cos}\,\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}, \quad \mathit{Sin}\,\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2},$$

гдѣ φ означаетъ произвольную перемѣнную. Извѣстно, что для дѣйствительныхъ значеній послѣдней существуютъ сходящіеся ряды:

$$e^{\varphi} = 1 + \frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^4}{1..4} + \ldots$$

$$e^{-\varphi} = 1 - \frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^2}{1.2} - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^4}{1..4} - \ldots,$$

изъ коихъ непосредственно получаемъ:

$$(2)\quad \begin{cases} \mathit{Cos}\,\varphi = 1 + \dfrac{\varphi^2}{1.2} + \dfrac{\varphi^4}{1..4} + \dfrac{\varphi^6}{1\ldots6} + \ldots \\[2ex] \mathit{Sin}\,\varphi = \dfrac{\varphi}{1} + \dfrac{\varphi^3}{1.2.3} + \dfrac{\varphi^5}{1\ldots5} + \dfrac{\varphi^7}{1\ldots.7} + \ldots \end{cases}$$

Отсюда видно, что *Cos* можетъ быть только положительнымъ и возрастать отъ 1-цы до $+\infty$. Напротивъ того знакъ *Sin* зависитъ отъ знака самого φ и величина его можетъ измѣняться отъ $-\infty$ до $+\infty$. Гиперболическіе *Tang. Cotg. Sec.* и *Cosec.* составляются изъ *Sin* и *Cos* также какъ и круговыя.

(*) Archiv. fur Mathem. Bd. XXXVIII. Th. I.

Такъ какъ $Cos(-\varphi) = \dfrac{e^{-\varphi} + e^{\varphi}}{2} = \dfrac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$, то слѣд. $Cos(-\varphi) = Cos\,\varphi$

$Sin(-\varphi) = \dfrac{e^{-\varphi} - e^{\varphi}}{2} = -\dfrac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$; $Sin(-\varphi) = -Sin\,\varphi$

Возвышая въ квадратъ значенія Cos и Sin, а потомъ складывая и вычитая оныя, непосредственно получаются слѣд. формулы:

$$\left.\begin{aligned}
&Cos^2\varphi - Sin^2\varphi = 1\,, \quad \text{откуда} \quad Cos\,\varphi = \sqrt{Sin^2\varphi + 1} \quad \text{и} \quad Sin\,\varphi = \pm\sqrt{Cos^2\varphi - 1}\\
&Cos^2\varphi + Sin^2\varphi = \frac{e^{2\varphi} + e^{-2\varphi}}{2} = Cos\,2\varphi\,, \quad \text{а отсюда} \quad Cos\,2\varphi = 2\,Cos^2\varphi - 1 = 2\,Sin^2\varphi + 1\,.\\
&\text{Кромѣ того} \quad Cos\,\varphi\,.\,Sin\,\varphi = \frac{e^{2\varphi} - e^{-2\varphi}}{4} = \frac{Sin\,2\varphi}{2}\,, \quad \text{или} \quad 2\,Cos\,\varphi\,.\,Sin\,\varphi = Sin\,2\varphi\,.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Далѣе имѣемъ

$$Cos(\varphi+\psi) = \frac{e^{\varphi+\psi} + e^{-(\varphi+\psi)}}{2} = \frac{2e^{\varphi}\,e^{\psi} + 2e^{-\varphi}\,e^{-\psi}}{4} = \frac{(e^{\varphi} + e^{-\varphi})\,(e^{\psi} + e^{-\psi}) + (e^{\varphi} - e^{-\varphi})\,(e^{\psi} - e^{-\psi})}{4}$$

$$\left.\begin{aligned}
&= Cos\,\varphi\,Cos\,\psi + Sin\,\varphi\,Sin\,\psi\\
&\quad\text{точно также получимъ:}\\
&Sin(\varphi+\psi) = Sin\,\varphi\,Cos\,\psi + Cos\,\varphi\,Sin\,\psi\,;\\
&\quad\text{а измѣняя } +\psi \text{ въ } -\psi\,,\\
&Cos(\varphi-\psi) = Cos\,\varphi\,Cos\,\psi - Sin\,\varphi\,Sin\,\psi\\
&Sin(\varphi-\psi) = Sin\,\varphi\,Cos\,\psi - Cos\,\varphi\,Sin\,\psi\,.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Изъ этихъ уравненій имѣемъ:

$$Cos\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi) + Cos\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) = 2\,Cos\,\tfrac{1}{2}\varphi\,Cos\,\tfrac{1}{2}\psi$$
$$Cos\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi) - Cos\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) = 2\,Sin\,\tfrac{1}{2}\varphi\,Sin\,\tfrac{1}{2}\psi$$
$$Sin\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi) + Sin\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) = 2\,Sin\,\tfrac{1}{2}\varphi\,Cos\,\tfrac{1}{2}\psi$$
$$Sin\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi) - Sin\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) = 2\,Cos\,\tfrac{1}{2}\varphi\,Sin\,\tfrac{1}{2}\psi\,;$$

откуда, поставляя на мѣсто: φ , ψ , $\psi+\varphi$, $\varphi-\psi$
соотвѣтственно: $\varphi+\psi$, $\varphi-\psi$, 2φ , 2ψ
получаемъ:

$$\left.\begin{aligned}
&Cos\,\varphi + Cos\,\psi = 2\,Cos\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\,Cos\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)\\
&Cos\,\varphi - Cos\,\psi = 2\,Sin\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\,Sin\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)\\
&Sin\,\varphi + Sin\,\psi = 2\,Sin\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\,Cos\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)\\
&Sin\,\varphi - Sin\,\psi = 2\,Cos\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\,Sin\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Легко выводятся также и всѣ другія отношенія, подобныя извѣстнымъ тригонометрическимъ; мы остановимся здѣсь только на болѣе замѣчательныхъ изъ нихъ и допускающихъ приложенія.

Такъ какъ

$$(Cos\,\varphi \pm Sin\,\varphi)\,(Cos\,\varphi_1 \pm Sin\,\varphi_1) = (Cos\,\varphi\,Cos\,\varphi_1 + Sin\,\varphi\,Sin\,\varphi_1) \pm (Sin\,\varphi\,Cos\,\varphi_1 + Cos\,\varphi\,Sin\,\varphi_1)$$

и на основаніи (4) $\qquad = Cos(\varphi+\varphi_1) \pm Sin(\varphi+\varphi_1)$;

то можно писать и вообще

$$(Cos\,\varphi \pm Sin\,\varphi)\,(Cos\,\varphi_1 \pm Sin\,\varphi_1)\,(Cos\,\varphi_2 \pm Sin\,\varphi_2)\ldots(Cos\,\varphi_{n-1} \pm Sin\,\varphi_{n-1}) = Cos(\varphi+\varphi_1+\ldots\varphi_{n-1}) \pm Sin(\varphi+\varphi_1+\ldots+\varphi_{n-1})$$

и если здѣсь положимъ $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_{n-1}$, то, въ предположеніи n цѣлаго, получимъ

$$(Cos\,\varphi \pm Sin\,\varphi)^n = Cos\,n\varphi \pm Sin\,n\varphi\,. \qquad (6)$$

Кромѣ того имѣемъ:

$$(Cos\,\varphi \pm Sin\,\varphi)^{-n} = \frac{1}{(Cos\,\varphi \pm Sin\,\varphi)^n} = \frac{(Cos\,\varphi \mp Sin\,\varphi)^n}{(Cos\,\varphi \pm Sin\,\varphi)^n\,(Cos\,\varphi \mp Sin\,\varphi)^n} = (Cos\,\varphi \mp Sin\,\varphi)^n$$

и слѣд. $(Cos\,\varphi \pm Sin\,\varphi)^{-n} = Cos\,n\varphi \mp Sin\,n\varphi = Cos(-n\varphi) \pm Sin(-n\varphi)$,

т. е. формула (6) справедлива и для n отрицательнаго

Пусть m и n означаютъ произвольныя, положительныя или отрицательныя числа; на основаніи предъидущаго мы имѣемъ

$$(Cos\,\tfrac{m}{n}\varphi \pm Sin\,\tfrac{m}{n}\varphi)^n = Cos\,n\tfrac{m}{n}\varphi \pm Sin\,n\tfrac{m}{n}\varphi = Cos\,m\varphi \pm Sin\,m\varphi = (Cos\,\varphi \pm Sin\,\varphi)^m\,;$$

слѣд. при n положительномъ и цѣломъ

$$Cos\,\frac{m}{n}\varphi \pm Sin\,\frac{m}{n}\varphi$$

представляетъ величину n-аго корня количества $(Cos\,\varphi \pm Sin\,\varphi)^m$. Приэтомъ значеніе корня всегда положительно, ибо вообще $Sin^2\varphi = Cos^2\varphi - 1$ слѣд. всегда $Sin^2\varphi < Cos^2\varphi$, т. е. $Cos\,\varphi \pm Sin\,\varphi$ всегда положительно.

Предъидущія формулы представляютъ аналогію съ извѣстною тоеремою Моавра.

Употребленіе гиперболическихъ функцій для извлеченія корней основано на слѣдующемъ:

Если a величина положительная и больше нуля, то

$$(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1 \mathrel{\substack{=\\>}} 0\,, \text{ откуда } \frac{a^2+1}{2a} \mathrel{\substack{=\\>}} 1\,;$$

слѣдов. мы можемъ принять: $\dfrac{a^2+1}{2a} = Cos\,\varphi$, а такъ какъ можно написать тождество:

$$\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2 - \left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2 = 1\,,$$

то на основаніи уравненія (3) мы можемъ принять $Sin\,\varphi = \frac{a^2-1}{2a}$, гдѣ φ должно имѣть знакъ одинаковый съ правою частью равенства. Такимъ образомъ будетъ:

$$a = Cos\,\varphi + Sin\,\varphi$$

и $$a^{\frac{m}{n}} = (Cos\,\varphi + Sin\,\varphi)^{\frac{m}{n}} = Cos\,\frac{m}{n}\varphi + Sin\,\frac{m}{n}\varphi\,.$$

Послѣдняя формула можетъ служить для извлеченія всякихъ корней, если мы только всегда будемъ принимать корень положительнымъ.

Самое удобное выраженіе для вычисленія самого φ получается, пользуясь вышеприведенными формулами для Sin и Cos половинной дуги, (3); подставляя въ нихъ предъидущія значенія для $Sin\,\varphi$ и $Cos\,\varphi$ будемъ имѣть:

$$Cos^2\,\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{(a+1)^2}{4a}\,,\quad Sin^2\,\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{(a-1)^2}{4a}\,;$$

откуда $$Tang\,\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{a-1}{a+1}\,.$$

Приложеніе гиперболичесскихъ функцій къ рѣшенію уравненій 3-ей степени основывается на слѣдующихъ извѣстныхъ тригонометрическихъ формулахъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos^3\tfrac{1}{3}\varphi - \tfrac{3}{4}\cos\tfrac{1}{3}\varphi - \tfrac{1}{4}\cos\varphi = 0 \\ \sin^3\tfrac{1}{3}\varphi - \tfrac{3}{4}\sin\tfrac{1}{3}\varphi + \tfrac{1}{4}\sin\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

и подобныхъ онымъ для гиперболическихъ функцій

$$\left.\begin{aligned} Cos^3\tfrac{1}{3}\varphi - \tfrac{3}{4}Cos\tfrac{1}{3}\varphi - \tfrac{1}{4}Cos\,\varphi = 0 \\ Sin^3\tfrac{1}{3}\varphi + \tfrac{3}{4}Sin\tfrac{1}{3}\varphi - \tfrac{1}{4}Sin\,\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

которыя легко выводятся изъ уравненій (4).

Если мы въ уравненія (8) введемъ общаго произвольнаго дѣлителя r и сравнимъ сначала одно изъ нихъ, напр.

$$\left(\frac{Cos\,\frac{1}{3}\varphi}{r}\right)^3 - \frac{3}{4r^2}\,\frac{Cos\,\frac{1}{3}\varphi}{r} - \frac{Cos\,\varphi}{4r^3} = 0$$

съ кубическимъ уравненіемъ въ простѣйшей формѣ:

$$x^3 + ax + b = 0$$

то мы получимъ слѣдующія равенства:

$$a = -\frac{3}{4r^2}\,,\quad b = -\frac{Cos\,\varphi}{4r^3}\,,\quad x = \frac{Cos\,\frac{1}{3}\varphi}{r}\,;$$

откуда $r = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{a}}$, $Cos\,\varphi = -4br^3$.

Дабы r было дѣйствительнымъ, a должно быть отрицательнымъ; а такъ какъ $Cos\,\varphi$ всегда положителенъ и не можетъ быть менѣе I-цы, то въ формулѣ для r знакъ передъ корнемъ будетъ зависѣть отъ b, и если послѣднее отрицательно, то долженъ быть удержанъ передъ корнемъ верхній знакъ, если же положительно, то нижній. Условіе для величины Cos даетъ

$$16\,b^2r^6 \mathrel{\substack{=\\>}} 1\,,\ 16\,b^2\,\frac{1}{64}\left(-\frac{3}{a}\right)^3 \mathrel{\substack{=\\>}} 1\,;\ \text{слѣд.}\ -\frac{27b^2}{4a^3} \mathrel{\substack{=\\>}} 1\,.$$

Принимая при этихъ предположеніяхъ

$$\frac{Cos\,\frac{1}{3}\varphi}{r} = u\,,\ \text{ мы имѣемъ }\ u^3 + au + b = 0$$

а слѣд. $$0 = x^3 - u^3 + a(x-u) = (x-u)(x^2 + ux + u^2 + a).$$

И такъ u есть одинъ корень; остается разрѣшить еще уравненіе

$$x^2 + ux + u^2 + a = 0$$

въ отношеніи x, для опредѣленія двухъ другихъ корней:

$$x = -\tfrac{1}{2}u \pm \sqrt{-\left(a + \tfrac{3}{4}u^2\right)}\,,$$

вводя значенія a и u, и помня что

$$Cos^2\,\tfrac{1}{3}\varphi - Sin^2\,\tfrac{1}{3}\varphi = 1$$

получится $$x = -\frac{Cos\,\frac{1}{3}\varphi}{2r} \pm \frac{Sin\,\frac{1}{3}\varphi}{2r}\sqrt{-3}\,.$$

И такъ 3 корня заданнаго уравненія, которые мы отмѣтимъ буквами u, v и w суть:

$$u = \tfrac{1}{r}\,Cos\,\tfrac{1}{3}\varphi$$

$$v = -\tfrac{1}{2r}\left(Cos\,\tfrac{1}{3}\varphi - Sin\,\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{-3}\right),$$

$$w = -\tfrac{1}{2r}\left(Cos\,\tfrac{1}{3}\varphi + Sin\,\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{-3}\right);$$

про условіяхъ a *отрицательно* и $-\frac{27b^2}{4a^3} \mathrel{\substack{=\\>}} 1$.

Если мы возьмемъ теперь второе изъ уравненій (8)

$$\left(\frac{Sin\frac{1}{3}\varphi}{r}\right)^3+\frac{3}{4r^2}\cdot\frac{Sin\frac{1}{3}\varphi}{r}-\frac{Sin\varphi}{4r^3}=0$$

и сравнимъ его съ $x^3+ax+b=0$,

то опредѣлимъ $r=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{a}}$; $Sin\varphi=-4br^3$;

слѣд. для дѣйствительности r нужно здѣсь только одно условіе, чтобы a было положительнымъ; величина же $Sin\varphi$, какъ извѣстно, можетъ принимать всѣ значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$. Означая снова первый дѣйствительный корень уравненія черезъ u и полагая

$$u=\frac{Sin\frac{1}{3}\varphi}{r}\ ,$$

мы опредѣлимъ совершенно также какъ и въ предъидущемъ два остальные корня

$$v=-\frac{1}{2r}\left(Sin\frac{1}{3}\varphi-Cos\frac{1}{3}\varphi\sqrt{-3}\right)$$

и

$$w=-\frac{1}{2r}\left(Sin\frac{1}{3}\varphi+Cos\frac{1}{3}\varphi\sqrt{-3}\right)\ .$$

Для полнаго рѣшенія заданнаго уравненія намъ недостаетъ еще случая, когда a отрицательно , но $\frac{-27b^2}{4a^3}<1$. Этотъ случай представляетъ возможность 2-хъ рѣшеній, а именно, сравнивая съ заданнымъ уравненіемъ 1-ую и 2-ую изъ формулъ (7); ибо при этомъ получается $r=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{a}}$: т. е. a должно быть отрицательно и $\begin{cases}\text{отъ 1-ой} & \cos\varphi=-4br^3\\ \text{а отъ 2-ой} & \sin\varphi=\ \ 4br^3,\end{cases}$

а дабы въ томъ и другомъ случаѣ φ было возможнымъ, выходитъ условіе $-\frac{27b^2}{4a^3}<1$, и не трудно убѣдиться, что если ω_1 есть та величина φ, которая удовлетворяетъ условію

$$\sin\omega_1=4br^3\ ,$$

то $\sin\frac{\omega_1}{3}$, $\sin\frac{\omega_1-2\pi}{3}$ и $\sin\frac{\omega_1+2\pi}{3}$

суть вообще 3 неравные и дѣйствительные корня, которые удовлетворяютъ заданному уравненію. Если же ω_2 есть величина φ, удовлетворяющая условію $\cos\omega_2=-4br^3$, то корни заданнаго уравненія будутъ:

$$\cos\frac{\omega_2}{3},\ \cos\frac{\omega_2-2\pi}{3},\ \cos\frac{\omega_2+2\pi}{3}\ .$$

Такимъ образомъ во всѣхъ случаяхъ возможно рѣшеніе кубическаго уравненія при помощи или обыкновенныхъ тригонометрическихъ таблицъ, или же таблицъ, составленныхъ для гиперболическихъ функцій, о вычисленіи которыхъ мы прибавимъ здѣсь еще нѣсколько словъ.

Такъ какъ $Cos\varphi\pm Sin\varphi=e^{\pm\varphi}$,

слѣдоват. $\pm\varphi=l(Cos\varphi\pm Sin\varphi)$, или $\varphi=\pm l(Cos\varphi\pm Sin\varphi)$.

Но $Cos^2\varphi-Sin^2\varphi=1$, а для круговыхъ функцій мы имѣемъ: $\sec^2\omega-\tan g^2\omega=1$, гдѣ ω берется между предѣлами $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$ а потому можно принять

$$Cos\varphi=\sec\omega\ ,\quad Sin\varphi=\mathrm{tang}\,\omega$$

откуда: $Tang\varphi=\sin\omega$, $Cotg\varphi=\mathrm{cosec}\,\omega$,

$$Sec\varphi=\cos\omega\ ,\ Cosec\varphi=\mathrm{cotg}\,\omega\ ;$$

а по предъидущему:

$$\varphi=\pm l(sec\,\omega\pm tang\,\omega)=\pm l\frac{1\pm\sin\omega}{\cos\omega}=\pm l\frac{1\pm\cos(\frac{\pi}{2}-\omega)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\omega)}$$

А такъ какъ извѣстно:

$$1+\cos(\frac{\pi}{2}-\omega)=2\cos(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\omega)^2$$

$$1-\cos(\frac{\pi}{2}-\omega)=2\sin(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\omega)^2$$

и $\sin(\frac{\pi}{2}-\omega)=2\sin(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\omega)\cos(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\omega)$;

то

$$\varphi=l\,\mathrm{cotg}(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\omega)=-l\,\mathrm{tang}(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\omega)=$$

$$=l\,\mathrm{tang}(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\omega)=-l\,\mathrm{cotg}(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\omega)\ .$$

Вычисленныя по этимъ формуламъ Таблицы Г-мъ *Гронау*, изданы Данцигскимъ Обществомъ испытателей природы въ видѣ прибавленія къ сочиненію: Auflösung der kubischen Gleichungen durch trigonometrische Functionen des Kreises und der Hyperbel. Von J. F. W. Gronau. Danzig 1861.« Таблицы напечатаны также въ настоящемъ году и особо подъ заглавіемъ: »Tafeln für die hyperbolischen Sectoren und für die Logarithmen ihrer *Sinus* und *Cosinus*.«

Употребленіе этихъ таблицъ всего лучше можетъ быть разъяснено примѣромъ. Пусть дано уравненіе

$$x^3-12x-28=0\ .$$

Сравнивая его съ общимъ уравненіемъ, которое мы разсматривали, получимъ:

$a=-12$, $b=-28$ и слѣд. $\frac{-27b^2}{4a^3}=\frac{21168}{6912}>1$.

Такъ какъ a и b оба отрицательны, то по предъидущему формулы, коими должно здѣсь пользоваться, суть:

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{a}}\ ,\quad Cos\varphi=-4br^3$$

слѣд.

$$=\frac{1}{4}\qquad\qquad =1.75000$$

кромѣ того

$$u=\frac{1}{r}\,Cos\frac{1}{3}\varphi$$

$$v=-\frac{1}{2r}\left(Cos\frac{1}{3}\varphi-Sin\frac{1}{3}\varphi\sqrt{3}\sqrt{-1}\right)$$

$$w=-\frac{1}{2r}\left(Cos\frac{1}{3}\varphi+Sin\frac{1}{3}\varphi\sqrt{3}\sqrt{-1}\right)$$

Взявъ $\log Cos\varphi=0{,}24304$ за аргументъ , по таблицамъ *Гронау* мы найдемъ $\varphi = 0,50326$ и $\frac{1}{3}\varphi = 0,16775$. Но здѣсь должно замѣтить, что въ формулѣ опредѣляющей, какъ мы видѣли выше $\varphi = l \operatorname{tang}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\omega\right)$, l выражаетъ натуральные логарифмы, между тѣмъ какъ таблицы въ этой колоннѣ даютъ обыкновенныя, Бригговы логарифмы $\log$, что во многихъ случаяхъ удобнѣе для вычисленія; поэтому полученныя выше величины для φ и $\frac{1}{3}\varphi$ должны быть еще раздѣлены на число модуля $M = 0,434295$. Но въ настоящемъ именно случаѣ этого дѣленія совсѣмъ не требуется производить, ибо значеніе $\frac{1}{3}\varphi$ нужно снова употребить только какъ аргументъ для отъисканія $\log Cos \frac{1}{3}\varphi$ и $\log Sin \frac{1}{3}\varphi$ и мы получаемъ непосредствено

$$\log Cos \tfrac{1}{3}\varphi = 0,03162\,, \quad \log Sin \tfrac{1}{3}\varphi = 0,59762 - 1\;.$$

и $$\log Sin \tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{3} = 0,83618 - 1$$

а затѣмъ:

$$Cos \tfrac{1}{3}\varphi = 1,07552 \qquad Sin \tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{3} = 0,68577\;.$$

Такимъ образомъ три корня уравненія будутъ:

$$u = 4,30208$$
$$v = -2,15104 + 1,37154\sqrt{-1}$$
$$w = -2,15104 - 1,37154\sqrt{-1}\;.$$

Г.

Краткія извѣстія.

— Г. *Перро* представилъ на обсужденіе Парижской Академіи ноту,объясняющую его идею устройства двухъ физическихъ инструментовъ, долженствующихъ служить къ тому, чтобы обнаружить измѣненія, испытываемыя силою тяжести на каждомъ мѣстѣ земной поверхности, какъ въ напряженіи такъ и направленіи, по причинѣ различныхъ движеній земли и притяженія небесныхъ тѣлъ.

Основная идея 1-го инструмента состоитъ въ томъ, чтобы на нижней оконечности весьма длинной спиральной пружины укрѣпить горизонтальную пластинку, на которую можетъ быть положена гиря. При наложеніи тяжести происходятъ два явленія: пониженіе пластинки и крученіе. Это послѣднее, по мнѣнію автора, основанному на предварительныхъ опытахъ, было бы въ состояніи показать и даже сдѣлать измѣримымъ измѣненіе вѣса гири. Употребляя пружину въ нѣсколько метровъ высоты и весьма малаго діаметра, по его утвержденію, возможно было бы наблюдать измѣненіе на одну сто-милліонную долю въ напряженіи.

Основаніе другаго проэктируемаго инструмента заключается въ слѣдующемъ: 2 неподвижныя точки привѣса находятся строго въ одномъ вертикалѣ въ разстояніи другъ отъ друга напр. 2 метровъ. Къ верхней точкѣ прикрѣплена тонкая нить длиною въ 1 метръ и на ней виситъ рычагъ съ неравными плечами. Этотъ рычагъ приводится въ горизонтальное положеніе съ помощію натягиваніи другой нити прикрѣпленой однимъ концомъ въ нижной неподвижной точкѣ, а другимъ къ оконечности короткаго плеча рычага. При такомъ устройствѣ рычагъ приметъ какое либо опредѣленное положеніе въ азимутѣ, зависящее отъ взаимнаго крученія нитей. Но очевидно, что это устойчивое равновѣсіе будетъ таковымъ, только при неизмѣнномъ направленіи силы тяжести; небольшое измѣненіе въ этомъ направленіи можетъ значительно измѣнить положеніе рычага. На основаніи предварительныхъ опытовъ, авторъ заключаетъ, что этотъ приборъ долженъ быть гораздо чувствительные самыхъ лучшихъ уровней, употребляемыхъ астрономами.

— *Леонъ Фуко*, обратившій въ послѣднее время свою дѣятельносв на устройство зеркальныхъ телескоповъ изъ посеребреннаго стекла, извѣщаетъ нынѣ Парижскую Академію о предварительной установкѣ на Обсерваторіи Невтоніанскаго телескопа съ зеркаломъ 80-ти сантиметровъ въ поперечникѣ, описывая притомъ и способъ приготовленія стекла и методу ручнаго шлифованія онаго въ извѣстномъ механическомъ зеведеніи Секретана. Форма зеркала параболическая, фокусное разстояніе 4^{m}, 50; оно заключено въ оправу, оставляющую свободнаго отверстія 78 сантим. Этотъ новый и безсомнѣнія весьма сильный инструментъ, будучи установленъ предварительно на Парижской Обсерваторіи для испытанія, предназначается быть поставленнымъ гдѣ либо не югѣ Франціи подъ болѣе благопріятнымъ небомъ и тогда онъ получитъ экваторіальный штативъ.

— Давно подозрѣваемая астрономами перемѣнчивость свѣта туманныхъ пятенъ доказана теперъ несомнѣннымъ наблюденіемъ, а именно полнымъ видимымъ исчезновеніемъ пятна въ созвѣздіи Тельца въ *Пр. восх.* $63^{0}\,18'$ и *Склон.* $19^{0}\,10'$. Другой туманъ повидимому также близкій къ исчезновенію, находящійся на новыхъ картахъ Боннской Обсерваторіи, а именно въ *Пр. вос.* $11^{s}\,16^{m}$ *склон.* $-0^{0}\,22'$ представляется въ настоящее время на границѣ видимости для наиболѣе сильныхъ рефракторовъ.

— Посмертное полное изданіе сочиненій знаменитаго Гауеса, предпринятое гёттингенскимъ ученымъ обществомъ, будетъ заключать весьма много совершенно новыхъ, еще до сихъ поръ нигдѣ не публикованныхъ изслѣдованій. Сюда принадлежитъ напр. 8-й отдѣлъ его: Disquisitiones arithmeticae; Ablandlung über Interpolation; Bestimmung der Anzahl der Classen der binären Formen; Untersuchungen über elliptische Functionen и др. Цѣлое изданіе будетъ состоять изъ 7-ми томовъ, коихъ содержаніе распредѣлено длѣдующимъ образомъ:

I. Disquisitiones arithmeticae.
II. Höhene Arithmetik.
III. Analysis.
IV. Geometrie und Methode der klensten Quadrate.
V. Mathematische Physik.
VI. Astronomie.
VII. Theoria motus corporum coelestium.

Подписка на цѣлое изданіе и на отдѣльные томы должна быть адресуема: »*An das Secretariat der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*« Цѣна каждаго тома (отъ 50 до 60 листовъ) 4 талера, безъ пересылки.

2-ое *Рѣшеніе задачи* N. 5.

(см. № 8 и 24 В. М. Н.)

Для доказательства, разсмотримъ рядъ количествъ:

$$u\ ,\ u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3\ ,\ \ldots\ldots u_n \ldots\ldots$$

Разности различныхъ порядковъ этаго ряда будутъ:

1-ыя	2-ыя	3-и
$u_1 - u \quad = \Delta u$	$\Delta u_1 - \Delta u \quad = \Delta^2 u$	$\Delta^2 u_1 - \Delta^2 u \quad = \Delta^3 u$
$u_2 - u_1 \quad = \Delta u_1$	$\Delta u_2 - \Delta u_1 \quad = \Delta^2 u_1$	$\Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1 \quad = \Delta^3 u_1$
$u_3 - u_2 \quad = \Delta u_2$	$\Delta u_3 - \Delta u_2 \quad = \Delta^2 u_2$	$\Delta^2 u_3 - \Delta^2 u_2 \quad = \Delta^3 u_2$
....	....	
$u_n - u_{n-1} = \Delta u_{n-1}$	$\Delta u_n - \Delta u_{n-1} = \Delta^2 u_{n-1}$	$\Delta^2 u_n - \Delta^2 u_{n-1} = \Delta^3 u_{n-1}$
....	....	.... и т. д.

Разности же какого бы то ни-было порядка количества u легко получить съ помощію предъидущихъ а именно:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta u = u_1 - u \\
&\Delta^2 u = \Delta u_1 - \Delta u = u_2 - 2u_1 + u \\
&\Delta^3 u = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u = (\Delta u_2 - \Delta u_1) - (\Delta u_1 - \Delta u) = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u \\
&\text{и вообще:} \\
&\Delta^n u = u_n - \frac{n}{1}\, u_{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\, u_{n-2} - \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\, u_{n-3} + \,.\,.\,.
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

Полагая въ этихъ формулахъ: $u = x^2$, $u_1 = (x+1)^2$, $u_2 = (x+2)^2 \,.\,.\,.$, получимъ:

$$\Delta u = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$$
$$\Delta^2 u = (x+2)^2 - 2\,(x+1)^2 + x^2 = 2$$
$$\Delta^3 u = (x+3)^2 - 3\,(x+2)^2 + 3\,(x+1)^2\, x^2 = 0$$
$$\Delta^4 u = \Delta^5 u = \,.\,.\,. = 0$$

т. е. вторыя разности квадратныхъ чиселъ равны числу $1\,.\,2$, а разности высшихъ порядковъ обращаются въ нули.

Точно также, полагая $u = x^3$, $u_1 = (x+1)^3 \,.\,.\,.$, докажемъ, что третьи разности кубичныхъ чиселъ равны числу: $1\,.\,2\,.\,3$ и разности высшихъ порядковъ нули.

И вообще, полагая $u = x^n$, $u_1 = (x+1)^n \,.\,.\,.$, получимъ:

$$\Delta^n u = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4 \ldots\ldots n$$
$$\Delta^{n+1} u = \Delta^{n+2} u = \,.\,.\,. = 0$$

Если положимъ теперь:

$$u_n = n^{n-1}\ ,\quad u_{n-1} = (n-1)^{n-1}\ ,\quad u_{n-2} = (n-2)^{n-1}\ ;\ .\,.$$

то очевидно, съ помощію (I) формулъ, получимъ:

$$\Delta^{n-1} u = (n-1)^{n-1} - \frac{n-1}{1}\,.\,(n-2)^{n-1} + \frac{(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2}\,(n-3)^{n-1} - \,.\,.\,. = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,n{-}1$$

$$\Delta^n u = n^{n-1} - \frac{n}{1}\,(n-1)^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,.\,(n-2)^{n-1} - \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,(n-3)^{n-1} + \,.\,.\,. = 0$$

Умножая же 1-ую формулу на nq, и вторую на p и складывая ихъ получимъ:

$$pn^{n-1} - (p-q)\,.\,\frac{n}{1}\,(n-1)^{n-1} + (p-2q)\,.\,\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,(n-2)^{n-1} - (p-3q)\,.\,\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,(n-3)^{n-1} + \,.\,.\,. = q\,\Gamma\,(n+1)$$

1862. 27 Января.

Л. Износковъ.

Печатать позволяется, Вильно 26 Мая 1862 года. *Ценсоръ Статскій Совѣтникъ и Кавалеръ А. Мухинъ.*

ВИЛЬНО Типографія А. Марциновскаго. Редакторъ-Издатель *М. Гусевъ.*