Томъ II. Листъ 14 и 15.

ВѢСТНИКЪ МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

№ 38 и 39.

I.

Доказательство второй основной теоремы ученія о теплѣ, какъ движеніи, въ общей ея формѣ. (*)

(*по Томсону и Кирхгоффу*).

Совокупность перемѣнъ, которымъ подвергается какое нибудь тѣло, называютъ круговымъ процессомъ, ежели подъ конецъ этихъ перемѣнъ тѣло опять приходитъ въ свое начальное состояніе. Извѣстно, что посредствомъ таковаго процесса можно *превращать* теплоту въ работу, или, обратно, работу въ теплоту. Кромѣ того, подвергаемое круговому процессу тѣло (такъ называемая машина, напримѣръ: опредѣленная масса газа, подвергаемая разнымъ сжатіямъ и расширеніямъ) можетъ заимствовать тепло изъ какого нибудь резервуара теплоты и передавать тепло другое резервуару, такъ что при круговомъ процессѣ можетъ *превращаться* тепло, имѣющее извѣстную температуру, въ тепло другой температуры.

Оба упомянутые *вида превращеній* состоятъ между собою въ опредѣленной зависимости, такъ что они взаимно условливаютъ другъ друга и могутъ другъ друга вознаграждать: если, напримѣръ, при какомъ нибудь круговомъ процессѣ превратилась теплота въ работу, то можно при другомъ круговомъ процессѣ возстановить утраченное тепло, ведя сей процессъ такъ, чтобы произошло соотвѣтствующее превращеніе надлежащаго количества тепла изъ нисшей температуры въ высшую,—и обратно. *Кляузіусъ* называетъ превращенія двухъ разныхъ видовъ эквивалентными, ежели они могутъ себя взаимно вознаграждать: превращеніе работы въ теплоту и переходъ тепла изъ нисшей температуры въ высшую суть поэтому превращенія между собою эквивалентныя, равно какъ превращеніе работы въ теплоту и переходъ тепла изъ высшей температуры въ нисшую суть два эквивалентныя между собою превращенія.

Вторая теорема ученія о теплѣ доказывается съ математическою строгостію пока только для *круговыхъ*

(*) Сущность доказательства второй основной теоремы теоріи тепла заимствована мною изъ одной изустной лекціи Господина Кирхгоффа нынѣшняго зимняго семетра. Мнѣ принадлежитъ лишь приведеніе этого отрывка изъ лекціи въ нѣкоторое цѣлое, съ тою преимущественно цѣлію, чтобы все содержаніе манускрипта приспособить къ статьѣ Господина Кляузіуса въ Liouville, Journal de Mathématiques, Vol. 20; кромѣ того я позволилъ себѣ измѣнить нѣсколько подлинное доказательство, данное Г-номъ Кирхгоффомъ для случая, когда круговой процессъ принадлежитъ къ необоротнымъ, — съ цѣлію, кратчайшимъ путемъ достигнуть до желаемаго результата. Неизлишнимъ считаю присовокупить, что я передаю Вамъ мой манускриптъ для напечатанія съ соизволенія самаго г-на Кирхгоффа.

Ровно годъ тому назадъ, 15 (27) Января 62-го г., въ бытность мою въ Цюрихѣ, слушалъ я чтеніе Кляузіуса въ Обществѣ Цюрихскихъ Естествоиспытателей „über die Anwendung des Satzes von der Aequiwalenz der Verwandlungen auf die innere Arbeit“ При круговомъ процессѣ *внутренняя* работа въ машинѣ равна нулю по окончаніи процесса; когда она не нуль, т. е когда процессъ не круговой, Кляузіусъ приходитъ къ тому же результату, который полученъ для круговыхъ процессовъ: но пока это и другія весьма интересныя соображенія г-на Кляузіуса не могутъ быть доказаны съ математическою строгостію, по причинѣ нашего невѣдѣнія о силахъ, при которыхъ совершаются внутреннія работы. По этой причинѣ манускриптъ мой содержитъ доказательство второй теоремы лишь въ прежней, строгой ея формѣ.

Упоминаемая въ текстѣ статья Господина *Томсона* носитъ слѣдующее заглавіе: „on the dynamical theory of Heat. Part VI—Ther„mo-electric currents. By William Thomson.“ (Извлеченіе изъ письма автора къ издателю).

процессовъ, при коихъ интегралъ *внутренней* работы въ самой машинѣ, взятый отъ начала до конца процесса, обращается въ нуль. Поэтому можно сказать, что эквивалентными называются два превращенія, принадлежащія къ двумъ *разнымъ* видамъ, которые могутъ другъ друга возстановлять, не требуя какого нибудь посторонняго, *остающагося* измѣненія въ *машинѣ*, служащей орудіемъ для превращеній. Кляузіусъ старался найти такія математическія выраженія для *величины* превращеній того и другаго вида, чтобы эти выраженія дѣлались равными одно другому, коль скоро превращенія эквивалентны. Онъ доказалъ, вопервыхъ, что эквивалентное число, которымъ должно быть выражаемо количество Q тепла температуры t, превратившагося въ работу, есть дробь

$$\frac{Q}{T},$$

гдѣ T означаетъ функцію температуры t, независимую ни отъ рода машины, служащей посредствующимъ орудіемъ для превращеній, ни отъ частныхъ случаевъ, коими могутъ различаться между собою самые процессы; функція T одна и таже для всѣхъ машинъ и для всѣхъ круговыхъ процессовъ и по всей вѣроятности есть ни что иное, какъ *абсолютная* температура.

Кляузіусъ открылъ далѣе, что эквивалентное число, коимъ долженъ быть выражаемъ *переходъ* количества Q тепла изъ температуры t_1 въ температуру t_2, есть разность

$$\frac{Q}{T_1} - \frac{Q}{T_2}$$

двухъ эквивалентныхъ чиселъ, выражающихъ два превращенія предъидущаго вида.

Въ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ предполагать, что машина въ продолженіе своего прикосновенія съ резервуаромъ теплоты имѣетъ *во всѣхъ* своихъ частяхъ одну и туже температуру, которая впрочемъ для разныхъ моментовъ времени можетъ быть *разная*. Но когда машина не находится въ прикосновеніи съ резервуаромъ и окружена абсолютнымъ непроводникомъ тепла, тогда условіе равенства температуры во всѣхъ точкахъ машины становится ненужнымъ

Условимся далѣе считать Q величиною положительною, когда это количество тепла *входитъ* въ машину изъ какого либо резервуара R, и отрицательною, когда оно *выходитъ* изъ машины въ резервуаръ. Соотвѣтственно съ этимъ принятіемъ, переходъ тепла *изъ высшей* температуры *въ низшую* долженъ быть и дѣйствительно есть, по данной выше формулѣ, величина отрицательная, а переходъ тепла *изъ низшей* температуры *въ высшую*—положительная (1).

Круговой процессъ называется *оборотнымъ* (umkehrbarer) круговымъ процессомъ, ежели его можно, буде угодно, повторить и въ *обратномъ* направленіи. Извѣстный примѣръ таковаго процесса представляетъ исполненное Клапейрономъ, по мысли Карно, графическое изображеніе перемѣнъ, совершаемыхъ надъ массой газа, приходящей въ прикосновеніе поочередно съ двуму резервуарами тепла. Кляузіусъ далъ чертежъ для случая, когда число резервуаровъ равно тремъ; чертежи этаго рода можно, разумѣется, разнообразить до безконечности.

Но есть круговые процессы, которыхъ невозможно повторить въ обратномъ направленіи. Напримѣръ: два сосуда, одинъ съ воздухомъ, другой пустой, окруженные совершенными непроводниками тепла, вдругъ приводятся въ сообщеніе между собою, и часть газа устремляется въ пустой сосудъ; когда потомъ газъ опять придетъ въ равновѣсіе, оказывается (Joule), что онъ не выигралъ и не потерялъ нисколько тепла. Отнимемъ теперь непроводники, окружающіе газъ, внесемъ его въ резервуаръ теплоты, имѣющей туже температуру какъ и газъ, и сожмемъ воздухъ постепенно въ первоначальный его объемъ; при этомъ превратится сжимающая работа въ тепло, которое перейдетъ въ резервуаръ, и масса воздуха возвратилась такимъ образомъ къ своему первоначальному состоянію въ разсужденіи своей температуры, объема и упругости. Круговой процессъ совершился; но повторить его въ обратномъ направленіи, очевидно, невозможно. Такаго рода круговые процессы называются *необоротными* круговыми процессами. Въ приведенномъ сейчасъ примѣрѣ результатомъ процесса было превращеніе работы въ нѣкоторое количество Q теплоты, перешедшей *изъ машины* въ резервуаръ. Если температура этаго тепла была t (T); то эквивалентное число, коимъ выражается результатъ процесса, есть $-\frac{Q}{T}$, количество отрицательное, слѣд. <0. Это маленькое замѣчаніе можетъ служить частнымъ примѣромъ той общей формулы, которою выражается *вторая теорема механической теоріи тепла, именно:*

»Алгебраическая сумма всѣхъ превращеній пер»ваго вида, совершившихся въ какомъ бы то ни было »круговомъ процессѣ, никогда не бываетъ величи»на положительная, но или нуль, или величина от»рицательная, ежели круговой пр цессъ не принадле»житъ къ числу оборотныхъ; для всѣхъ оборотныхъ »круговыхъ процессовъ эта сумма равна нулю.«

Доказательство, данное этой теоремѣ Кляузіусомъ, заставляло многихъ искать другихъ, можетъ быть менѣе краткихъ, но такъ сказать, болѣе членораздѣльныхъ доказательствъ, чтобъ достигнуть до этой теоремы. *Томсонъ* выразилъ въ нѣсколькихъ словахъ свою

(1) Кляузіусъ принимаетъ знаки, противные принятымъ здѣсь; но тогда выйдетъ, разумѣется, въ окончательномъ выводѣ для выраженія второй теоремы механической теоріи тепла $\sum \frac{Q}{T}$ не $<$, но >0. Принятое здѣсь обозначеніе произошло изъ желанія избѣжать обозначенія *прихода* тепла въ машину черезъ — и *выхода* изъ машины черезъ +; Кляузіусъ же ставитъ себя не въ машинѣ, но внѣ ея и означаетъ отдачу тепла машинѣ черезъ — и выхода тепла изъ машины черезъ +. (Liouville, томъ 20; Poggendorff's Annalen, т. 93). Впрочемъ и Кляузіусъ, желая сдѣлать свой результатъ независимымъ отъ температуръ резервуаровъ и только зависимымъ отъ температуръ самой машины, переноситъ себя мысленно въ машину и слѣд переходитъ къ тому условному принятію знаковъ въ эквивалентныхъ числахъ, которое сдѣлано здѣсь съ самаго начала.

мысль, какъ онъ желалъ доказать себѣ эту истину (2); *Г. Кирхгоффъ* развилъ мысль англійскаго физика и предложилъ слѣдующее доказательство въ своихъ чтеніяхъ о теоретической физикѣ.

Изъ холоднаго тѣла *въ теплое* никогда не можетъ переходить тепло, если въ тоже время не происходитъ никакой другой перемѣны, состоящей въ связи съ упомянутымъ переходомъ. Принявъ эту истину за основаніе, можно безъ всякаго затрудненія доказать нашу теорему для частнаго случая, когда машина M приходитъ во время круговаго процесса, принадлежащаго къ разряду оборотныхъ, въ прикосновеніе не болѣе, какъ съ *двумя* резервуарами R_1 и R_2, причемъ она можетъ заимствовать отъ резервуара R_1 нѣкоторое (положительное) количество Q_1 тепла, имѣя притомъ во всѣхъ своихъ частяхъ температуру t_1 (T_1), и потомъ опять отдать нѣкоторое (положительное) количество Q_2 тепла резервуару R_2, имѣя приэтомъ температуру t_2 (T_2). Такъ что для этаго частнаго случая дѣйствительно алгебраическая сумма

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{(-Q_2)}{T_2}=\frac{Q_1}{T_1}-\frac{Q_2}{T_2} \text{ есть нуль.}$$

Мы примемъ для этаго частнаго случая нашу теорему за доказанную (3). Представимъ себѣ теперь машину M, которая во время *оборотнаго* круговаго процесса приходитъ въ прикосновеніе по одиночкѣ съ резервуарами $R_1, R_2, \ldots R_n$, причемъ температуры въ машинѣ соотвѣтственно суть $t_1 > t_2 > \ldots > t_n$. Въ какомъ порядкѣ перемѣняются температуры въ машинѣ и слѣд. въ какомъ порядкѣ приходитъ она въ прикосновеніе съ тѣми резервуарами, для насъ это обстоятельство не имѣетъ значенія. Пусть $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_n$ суть количества тепла, *полученныя* машиною отъ соотвѣтственныхъ резервуаровъ. Ежели Q_m есть тепло, *отдаваемое* машиною резервуару R_m, то Q_m, какъ выше замѣчено, есть величина отрицательная. По окончаніи оборотнаго круговаго процесса должно быть

$$\Sigma\,\frac{Q}{T}=\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}+\ldots+\frac{Q_n}{T_n}=0\,.$$

Таково алгебраическое выраженіе второй теоремы во всей ея общности и строгости для круговаго процесса, принадлежащаго къ разряду оборотныхъ. Чтобы убѣдиться въ справедливости этаго уравненія, докажемъ слѣдующую *вводную* теорему:

»Представимъ себѣ другую машину M', которую »мы приводимъ въ прикосновеніе съ тѣми же резервуарами $R_1, R_2 \ldots R_n$, причемъ соотвѣтственныя »температуры въ машинѣ суть по прежнему $t_1, t_2, t_3 \ldots t_n$ »($T_1, T_2 \ldots T_n$). Работа, полученная съ машиною M' »пусть *равна* работѣ, которую получили прежде съ машиною M. Ежели круговой процессъ, совершившійся »съ машиною M', принадлежитъ къ числу оборотныхъ »и былъ веденъ такъ, что изъ (n—2) резервуаровъ »$R_1, R_2, \ldots R_{n-2}$ заимствованы машиною (положительныя или отрицательныя) количества $Q_1, Q_2, \ldots Q_{n-2}$ »тепла, соотвѣтственно равныя количествамъ Q_1, »$Q_2, \ldots Q_{n-2}$ тепла въ предъидущемъ круговомъ »процессѣ, веденномъ съ машиною M; то легко доказать, что количества Q'_{n-1} и Q'_n тепла, полученныя »машиною M' отъ остальныхъ двухъ резервуаровъ »R_{n-1} и R_n, непремѣнно равны соотвѣтственнымъ »количествамъ Q_{n-1} и Q_n тепла, которыя получены »были машиною M отъ тѣхъ же резервуаровъ.«—И такъ предстоитъ доказать справедливость уравненій

$$Q'_{n-1}=Q_{n-1} \quad \text{и} \quad Q'_n=Q_n\,.$$

Проведемъ сперва одинъ круговой процессъ съ машиною M' въ *прямомъ* направленіи, т. е. превращая теплоту въ работу; потомъ приведемъ въ дѣйствіе машину M, но въ *обратномъ* направленіи, т. е. такъ чтобъ она превращала работу въ теплоту; оба процесса вмѣстѣ составляютъ одинъ *обращенный* круговой процессъ. По окончаніи обѣихъ операцій мы находимъ, согласно условіямъ теоремы: 1-ое, что количества тепла въ разервуарахъ $R_1, R_2, \ldots R_{n-2}$ не претерпѣли никакого измѣненія, ибо резервуары получили при второй операціи каждый ровно столько тепла, сколько потерялъ во время первой; 2-ое, что по окончаніи обѣихъ операцій мы не выиграли и не истратили никакой работы. Между тѣмъ одинъ изъ двухъ остальныхъ резервуаровъ, напримѣръ R_{n-1}, получилъ *положительное* приращеніе ($Q_{n-1} - Q'_{n-1}$) тепла, и такъ какъ по окончаніи обѣихъ операцій нисколько тепла не превратилось въ работу, или обратно, то эта прибыль ($Q_{n-1}-Q'_{n-1}$) должна быть, въ силу *первой* теоремы теоріи тепла ($\Sigma\, Q=0$), равна потери ($Q'_n - Q_n$) единицъ тепла, происшедшей въ резервуарѣ R_n.

Такимъ обр. по окончаніи обѣихъ операцій обѣ машины пришли въ первоначальное свое состояніе, и никакая работа не развилась изъ тепла, ни обратно; между тѣмъ, нѣкоторое количество тепла, имѣвшаго температуру t_n превратилось въ тепло высшей температуры t_{n-1}. Такъ какъ это противорѣчитъ основному положенію механической теоріи тепла, то должно быть $(Q_{n-1} - Q'_{n-1}) = (Q'_n - Q_n) = 0$, т. е. $Q_{n-1} = Q'_{n-1}$ и $Q'_n = Q_n$.

Ежели бы мы предположили, что резервуаръ R_{n-1} потерялъ часть тепла, которую принялъ резервуаръ R_n, другими словами, что тепло изъ высшей температуры t_{n-1} перешло въ низшую; то стоитъ лишь обмѣнить направленіе процессовъ и заставить машину M' дѣйствовать въ обратномъ порядкѣ, превращая работу въ теплоту, и машину M въ прямомъ. Это, очевидно, дозволяется условіями теоремы, ибо процессы, совершаемые съ обѣими машинами, принадлежатъ къ числу оборотныхъ. Но тогда опять придемъ къ невозможному требованію слишкомъ экономическаго перехода теплоты изъ низкой температуры въ высокую, не производя въ тоже время никакого другаго зависимаго измѣненія.

Послѣ этой вспомогательной теоремы, обратимся къ выводу уравненія

$$\Sigma\,\frac{Q}{T}=0$$

(2) Transactions of the royal society of Edinburgh, Vol. XXI, Part. 1. 1854.

(3) Кляузіусъ доказалъ ее въ вышеприведенномъ своемъ мемуарѣ.

для машины M, совершающей *оборотные* круговые процессы. Приведемъ машину M въ дѣйствіе, и во время всего круговаго процесса пусть только два резервуара R_1 и R_2 приходятъ по одиночкѣ въ прикосновеніе съ машиною; пусть q_1 и q'_2 суть количества тепла (положительныя, или отрицательныя), принятыя машиною отъ R_1 и R_2; причемъ температуры машины пусть были соотвѣтственно прежнія: t_1 и t_2 (T_1 и T_2). Потомъ заставимъ машину совершить другой круговой процессъ, причемъ должны дѣйствовать резервуары R_2 и R_3, отдающіе машинѣ (положительныя, или отрицательныя) количества тепла q_2 и q'_3, причемъ машина имѣла соотвѣтственно температуры t_2 и t_3 (T_2 и T_3) во всѣхъ своихъ частяхъ, и т. д. Наконецъ, дадимъ машинѣ совершить $(n—1)$-ый круговой процессъ съ резервуарами R_{n-1} и R_n, которые при этомъ могутъ отдать машинѣ соотвѣтственно q_{n-1} и q'_n единицъ тепла, причемъ температуры машины были t_{n-1} и t_n (T_{n-1} и T_n). Для наглядности, прилагаемъ таблицу этихъ $(n—1)$ операцій:

Машина приходитъ въ прикосновеніе съ резервуарами:	Резервуары: R_1	R_2	$R_3 \ldots$	R_{n-2}	R_{n-1}	R_n
	отдаютъ машинѣ количества тепла:					
1) R_1 и R_2 . . .	q_1	q'_2				
2) R_2 и R_3 . . .		q_2	q'_3			
. . . .			. . . .			
. . . .			. . . .			
$n—2$) R_{n-2} и R_{n-1}				q_{n-2}	q'_{n-1}	
$n—1$) R_{n-1} и R_n					q_{n-1}	q_n
Суммы количествъ тепла, отданныхъ каждымъ резервуаромъ во время всѣхъ $(n—1)$ круговыхъ операцій:	q_1, (q'_2+q_2), (q'_3+q_3), $\ldots (q'_{n-2}+q_{n-2})$, $(q'_{n-1}+q_{n-1})$, q_n.					

Каждый отдѣльный круговой процессъ совершался только съ двумя резервуарами; вторая основная теорема теоріи тепла даетъ для этаго случая ур—ія, которыя мы уже условились считать за доказанныя:

$$\frac{q_1}{T_1}+\frac{q'_2}{T_2}=0; \frac{q_2}{T_2}+\frac{q'_3}{T_3}=0\,; \ldots; \frac{q_{n-1}}{T_{n-1}}+\frac{q'_n}{T_n}=0 \;.\,.(1)$$

Другихъ зависимостей, кромѣ этихъ $(n—1)$ ур—ій, между $(2n—2)$ величинами $q_1, q'_2, q_2, \ldots q'_{n-1}, q_{n-1}, q_n$ не существуетъ; слѣдовательно $[(2n-2)—(n—1)]=n—1$ изъ нихъ остаются совершенно произвольными. Но будемъ вести наши $(n—1)$ отдѣльныхъ круговыхъ процессовъ такъ, чтобъ $q_1, q'_2, \ldots q_n$ удовлетворяли, кромѣ необходимыхъ условій (1), еще слѣдующимъ $(n—1)$ уравненіямъ:

$$q_1=Q_1\,; q_2+q'_2=Q_2\,; \ldots; q_{n-2}+q'_{n-2}=Q_{n-2} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (2)$$

$$q_1+(q'_2+q_2)+(q'_3+q_3)+\ldots+(q'_{n-1}+q_{n-1})+q_n=Q_1+Q_2+\ldots+Q_{n-1}+Q_n \;.\;.\;. (3)$$

Тогда изъ $2(n—1)$ линейныхъ ур—ій (1), (2) и (3) величины $(2n—2)$ неизвѣстныхъ $q_1, q_2, q'_2, \ldots q_n$ совершенно опредѣлятся.

Ничто не мѣшаетъ намъ $(n—1)$ вышеупомянутыхъ отдѣльныхъ круговыхъ процессовъ разсматривать какъ *одинъ* непрерывный круговой процессъ, и притомъ какъ такой процессъ, въ которомъ резервуары $R_1, R_2, \ldots R_n$ отдали машинѣ каждый поочередно количества тепла $Q_1, Q_2, \ldots Q_{n-1}=q'_{n-1}+q_{n-1}$ и $Q_n=q_n$; температуры машины, во время принятія количествъ $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ тепла, пусть были соотвѣтственно $t_1, t_2, \ldots t_n$ ($T_1, T_2, \ldots T_n$), какъ и при отдѣльныхъ $(n—1)$ процессахъ. Такой новый взглядъ на наши $(n—1)$ отдѣльныхъ круговыхъ процессовъ, очевидно, нисколько не противорѣчитъ ур—іямъ (2), (3) и (1). Сумма ур—ій (1) даетъ тогда искомое уравненіе

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}+\ldots+\frac{Q_{n-1}}{T_{n-1}}+\frac{Q_n}{T_n}=0 \;.\;.\;.\;. (4)$$

Но я могу себѣ представить другой процессъ съ тою же машиною M, также принадлежащій къ числу оборотныхъ, въ которомъ резервуары $R_1, R_2, \ldots R_n$ и количества $Q_1, Q_2, \ldots Q_{n-2}$ тепла, отданныя машинѣ резервуарами при температурахъ $t_1, t_2, \ldots t_{n-2}$ ($T_1, T, \ldots T_{n-2}$), суть тѣже самыя, какъ въ предъидущемъ, изъ $(n—1)$ отдѣльныхъ процессовъ составленномъ процессѣ; даже температуры t_{n-1} и t_n (T_{n-1} и T_n), при которыхъ дѣйствуютъ резервуары R_{n-1} и R_n, могутъ быть тѣже самыя, какъ при тѣхъ $(n—1)$ отдѣльныхъ процессахъ; но резервуары R_{n-1} и R_n отдали машинѣ количества тепла Q'_{n-1} и Q'_n, кои повидимому могутъ быть неравны соотвѣтственно Q_{n-1} и Q_n. Ежели только суммы $(Q'_{n-1}+Q'_n)$ и $(Q_{n-1}+Q_n)$ равны между собою; то новый, третій, придуманный нами круговой процессъ удовлетворяетъ вполнѣ ур—іямъ (2) и (3); но спрашивается, будетъ ли для него справедливо ур—іе.

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}+\ldots+\frac{Q'_{n-1}}{T_{n-1}}+\frac{Q'_n}{T_n}=0 \;.\;.\;. (5)$$

какъ справедливо было ур—іе (4) для круговаго процесса втораго, составленнаго чрезъ простое совокупленіе $(n—1)$ отдѣльныхъ въ одинъ цѣльный круговой процессъ?

Отвѣтъ: »*непремѣнно*«; ибо, въ силу *вводной* теоремы, должно быть:

$$Q'_{n-1}=Q_{n-1} \quad \text{и} \quad Q'_n=Q_n \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (6)$$

Измѣняя $(n—1)$ величинъ $q_1, q_2, q_3, \ldots q_{n-1}$ и опредѣляя изъ ур—ій (1) для данныхъ температуръ $t_1 \ldots t_n$ соотвѣтственныя $(n—1)$ величинъ $q'_2, q'_3, \ldots q'_n$, будемъ получать *всѣ возможныя величины* для Q_1,

$Q_2, \dots Q_{n-1}$ изъ (n—1) ур—ій (2) и (3); но для каждой системы величинъ $Q_1 \dots Q_{n-1}$ послѣдняя величина Q_n не произвольна, но опредѣляется изъ ур—ія (5).

И такъ всякій *оборотный* круговой процессъ долженъ удовлетворять ур—ію

$$\Sigma \frac{Q}{T} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (II),$$

и съ тѣмъ вмѣстѣ, вторая основная теорема теоріи тепла для оборотнаго процесса совершенно доказана.

Изъ предъидущаго размотрѣнія открывается, что всякій оборотный круговой процессъ можетъ быть замѣненъ совокупностію вышеописанныхъ (n—1) отдѣльныхъ круговыхъ оборотныхъ процессовъ, совершенныхъ каждый съ двумя изъ резервуаровъ, выбранными поочередно; ибо этотъ оборотный процессъ удовлетворяетъ ур—ію (II), а слѣд. и ур—іямъ (6), такъ что для опредѣленія $2(n-1)$ неизвѣстныхъ $q_1, q'_2, \dots q_n$ имѣется ровно $2(n-1)$ линейныхъ уравненій (1), (2), (3), неболѣе.

Изъ различныхъ соображеній, основанныхъ на ур—іи (II) и которыя неумѣстно было бы здѣсь приводить, выходитъ, что функція T температуры t есть величина положительная и возрастаетъ вмѣстѣ съ повышеніемъ температуры t.

Съ помощію двухъ послѣднихъ замѣчаній, легко убѣдиться въ справедливости второй половины разсматриваемой нами теоремы, т. е: »Ежели круговой про»цессъ не принадлежитъ къ разряду оборотныхъ, то »сумма $\Sigma \frac{Q}{T}$ никогда не бываетъ величиною положительною.«

Пусть опять $R_1, R_2, \dots R_n$ суть резервуары, изъ коихъ машина во время какого нибудь *необоротнаго* круговаго процеса получаетъ количества Q_1, $Q_2, \dots Q_n$ тепла, имѣя притомъ соотвѣтственно температуры $t_1, t_2, \dots t_n$ ($T_1, T_2, \dots T_n$) во всѣхъ своихъ точкахъ. Представимъ себѣ *оборотный* круговой процессъ, совершенный съ машиною M, съ прежними резервуарами $R_1, \dots R_n$ при тѣхъ же температурахъ ($T_1, \dots T_n$) и веденный такъ, что количества тепла, полученныя машиною отъ первыхъ (n—1) резервуаровъ, были $Q_1, Q_2, \dots Q_{n-1}$; тогда количество Q'_n тепла, полученнаго машиною отъ резервуара R_n, опредѣлится само собою изъ ур—ія:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \; . \; . \; . \; . \; . + \frac{Q_{n-1}}{T_{n-1}} + \frac{Q'_n}{T_n} = 0 \, .$$

Что таковой, придуманный нами оборотный круговой процессъ возможенъ, въ томъ убѣждаетъ насъ возможность замѣнить его совокупностію (n—1) отдѣльныхъ круговыхъ оборотныхъ процессовъ, совершенныхъ каждый съ двумя резервуарами. Исполнимъ нашъ данный необоротный процессъ въ единственномъ возможномъ направленіи и потомъ придуманный нами оборотный процессъ въ противоположномъ этому направленіи. По окончаніи обоихъ процессовъ окажется, что машина приняла въ себя при температурѣ t_n (T_n) изъ резервуара R_n (положительное или отрицательное) количество ($Q_n - Q'_n$) единицъ тепла. Ежели бы разность ($Q_n - Q'_n$) была величина положительная; это значило бы, что посредствомъ двухъ упомянутыхъ круговыхъ процессовъ мы превратили тепло ($Q_n - Q'_n$) во *внѣшнюю* работу ($Q_n - Q'_n$).k.— Факторъ k означаетъ механическій эквивалентъ единицы теплоты. Нѣтъ ничего легче, какъ придумать еще одинъ оборотный круговой процессъ, при которомъ эта, состоящая въ нашемъ распоряженіи работа превратится опять въ тепло, но высшей температуры, нежели t_n (T_n) Напримѣръ, можно совершить круговой оборотный процессъ въ *обратномъ* направленіи (т. е. превращая работу въ теплоту) съ резервуарами R_n и R_{n-1} при температурахъ t_n и t_{n-1} (T_n и T_{n-1}; припомнимъ, что $T_{n-1} > T_n$): тогда не только работа ($Q_n - Q'_n$).k превратится въ тепло ($Q_n - Q'_n$) температуры t_{n-1} (T_{n-1}), которая перейдетъ въ резервуаръ R_{n-1}, но еще кромѣ того нѣкоторое количество тепла (4) перейдетъ изъ резервуара R_n въ резервуаръ R_{n-1}, т. е. изъ температуры t_n (T_n) въ температуру t_{n-1} (T_{n-1}).

По окончаніи всѣхъ трехъ круговыхъ процессовъ, даннаго необоротнаго и двухъ придуманныхъ нами оборотныхъ, оказывается, что машина возвратилась къ своему начальному состоянію (ибо процессы—круговые), что нисколько тепла не превратилось въ работу, ни обратно, что общая сумма тепла во всѣхъ резервуарахъ, вмѣстѣ взятыхъ, таже самая, какая была предъ началомъ операцій. *Единственнымъ* и потому невозможнымъ результатомъ этихъ трехъ процессовъ было бы превращеніе тепла изъ нисшей температуры t_n въ высшую t_{n-1}. И такъ разность ($Q_n - Q'_n$) не можетъ быть величиною положительною; всѣ T суть величины положительныя; слѣд. $\left(\frac{Q_n}{T_n} - \frac{Q'_n}{T_n}\right)$ также не можетъ быть положительнымъ количествомъ. Сумма

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \dots + \frac{Q_{n-1}}{T_{n-1}} + \frac{Q'_n}{T_n} = 0 \, ,$$

ибо второй процессъ былъ изъ разряда оборотныхъ. Такимъ образомъ приходимъ къ желаемому заключенію, что для необоротнаго круговаго процесса алгебраическая сумма

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \dots + \frac{Q_{n-1}}{T_{n-1}} + \frac{Q_n}{T_n} = \Sigma \frac{Q}{T}$$

должна быть или нуль, или величина отрицательная.

Гейдельбергъ, *Михаилъ Окатовъ*

28 Янв. (9 Февр.) 1863. *преподаватель Демидовскаго Лицея.*

---

(4) Это количество тепла, какъ доказывается для случая двухъ резервуаровъ, есть $(Q^n - Q'_n) \dfrac{T_n}{T_{n-1} - T^n}$.

О нахожденіи зависимости произвольной функціи отъ суммъ одиночныхъ.

(См. N. 32 и 35).

Чтобы предложить вопросъ „о нахожденіи зависимости произвольной функціи отъ суммъ одиночныхъ" въ самомъ общемъ видѣ, возьмемъ, съ этою цѣлью, извѣстную намъ теорему:

$$(a)\qquad \frac{2\pi}{\varDelta u} f(x, \psi 0) = \int_{-p}^{+q} \sum_{-\infty}^{+\infty} f(x, \psi y) \cos uy . dy ,$$

съ ея свойствомъ

$$0 = \int_{+p}^{+q} \sum_{-\infty}^{+\infty} f(x, \psi y) \cos uy . dy ;$$

гдѣ, какъ знаемъ, каждый изъ предѣловъ интегрированія, относительно y, долженъ быть меньше $\frac{2\pi}{\varDelta u}$.

Сдѣлаемъ въ теоремѣ (a) $p = x$, $q = m - x$, $f(x, \psi y) = \varphi(y + x)$; а въ ея свойствѣ: функцію $f(x, \psi y) = \varphi(y - x)$, $p = +x$, $q = m + x$; тогда найдемъ:

$$\frac{2\pi \varphi(x)}{\varDelta u} = \int_{-x}^{m-x} \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y + x) \cos uy . dy \quad . \ . \ . \ . \ . \quad \text{при } x < m$$

$$\frac{\pi \varphi(x)}{\varDelta u} = \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad — \ x = m$$

$$0 = \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad — \ x > m$$

$$0 = \int_{+x}^{m+x} \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y - x) \cos uy . dy \quad . \ . \ . \ . \quad \text{при } x \lesseqgtr m.$$

Откуда, измѣнивъ перемѣнныя:

$$y + x = y , \qquad y = x + y ;$$

получимъ:

$$\frac{2\pi \varphi(x)}{\varDelta u} = \int_{0}^{m} \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \cos u(y - x) . dy \quad . \ . \ . \ . \quad \text{при } x < m$$

$$\frac{\pi \varphi(x)}{\varDelta u} = \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad — \ x = m$$

$$0 = \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad — \ x > m$$

$$0 = \int_{0}^{m} \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \cos u(y + x) . dy \quad . \ . \ . \ . \quad \text{при } x \lesseqgtr m.$$

Складывая предпослѣднія три равенства съ послѣднимъ, а потомъ вычитая послѣднее — изъ каждаго ему предшествующихъ (*), найдемъ:

(*) Эти дѣйствія, надъ разсматриваемыми суммами, позволительны, ибо условія, при которыхъ каждая изъ нихъ имѣетъ мѣсто, не противурѣчатъ другъ другу. Въ самомъ дѣлѣ, при $m + x < \frac{2\pi}{\varDelta u}$, $m - x$, подавно, будетъ $< \frac{2\pi}{\varDelta u}$.

$$(b)\qquad \frac{\pi\,\varphi(x)}{\varDelta u}=\int\limits_0^m \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\cos uy\,.\,\cos ux\,.\,dy\;\ldots\ldots\ldots\qquad \text{при}\ \ x<m$$

$$(c)\qquad \frac{\pi\,\varphi(x)}{2\varDelta u}=\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad -\ \ x=m$$

$$(d)\qquad 0=\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad -\ \ x>m$$

$$(b')\qquad \frac{\pi\,\varphi(x)}{\varDelta u}=\int\limits_0^m \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\sin uy\,.\,\sin ux\,.\,dy\;\ldots\ldots\ldots\qquad \text{при}\ \ x<m$$

$$(c')\qquad \frac{\pi\,\varphi(x)}{2\varDelta u}=\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad -\ \ x=m$$

$$(d')\qquad 0=\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad -\ \ x>m.$$

Измѣнивъ, въ послѣднихъ формулахъ, перемѣнную u на $\frac{m}{n}u$, получимъ формулы:

$$\frac{\pi n\,\varphi(x)}{m\varDelta u}=\int\limits_0^n \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\cos\frac{muy}{n}\,.\,\cos\frac{mux}{n}\,.\,dy\;\ldots\ldots\ldots\qquad \text{при}\ \ x<m$$

$$\frac{\pi n\,\varphi(x)}{2m\varDelta u}=\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad -\ \ x=m$$

$$0=\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad -\ \ x>m$$

$$(e)\qquad \frac{\pi n\,\varphi(x)}{m\varDelta u}=\int\limits_0^n \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\sin\frac{muy}{n}\,.\,\sin\frac{mux}{n}\,.\,dy\;\ldots\ldots\ldots\qquad \text{при}\ \ x<m$$

$$\frac{\pi n\,\varphi(x)}{2m\varDelta u}=\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad -\ \ x=m$$

$$0=\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad -\ \ x>m,$$

имѣющія мѣсто при $m<\frac{2\pi}{\varDelta u}$ и при тѣхъ значеніяхъ n, для которыхъ функція φ и ея производная φ' остаются конечными и сплошными; ибо мы не имѣемъ никакого права дѣлать въ послѣднихъ формулахъ предѣломъ число, нарушающее условія, при которыхъ теорема (a) имѣетъ мѣсто.

Полагая въ (e) $m=\pi$, $\varDelta u=1$:

$$n\,\varphi(x)=\int\limits_0^n \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\sin\frac{\pi uy}{n}\,.\,\sin\frac{\pi ux}{n}\,.\,dy\,.$$

Такъ съ помощію теоремы (a) и ея свойства выводится формула, данная въ первый разъ Лагранжемъ.

Сдѣлавъ въ (b), (c), (d) и въ (b'), (c'), (d') $\varDelta u=du$:

$$(f)\qquad \pi\,\varphi(x)=\int\limits_0^m\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\cos uy\,.\,\cos ux\,.\,du\,dy\;\ldots\ldots\ldots\qquad \text{при}\ \ x<m$$

$$(g)\qquad \frac{\pi\,\varphi(x)}{2}=\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad -\ \ x=m$$

$$(h)\qquad 0=\;\ldots\ldots$$

$$(f') \qquad \pi\,\varphi(x) = \int_0^m\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\,\sin uy\,.\,\sin ux\,.\,du\,dy \;\ldots\ldots \text{ при } x < m$$

$$(g') \qquad \frac{\pi\,\varphi(x)}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \; x = m$$

$$(h') \qquad 0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \; x > m.$$

гдѣ функція φ и ея производная φ', какъ не трудно видѣть изъ статьи, данной нами въ 32 № В. М. Н., должны оставаться конечными и сплошными для всѣхъ значеній перемѣнной, отъ величины μ, по произволенію малой, до m.

Полагая въ (f), (g) и (h) функцію $\varphi(y) = A =$ постоянному числу:

$$\pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mu\,.\,\cos xu}{u}\,du \;\ldots\ldots\ldots \text{ при } x < m$$

$$\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \; x = m$$

$$0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \; x > m.$$

Принимая въ (f) $\varphi(y) = e^{-y}$, $m = \infty$:

$$\pi e^{-x} = \int_0^\infty\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y}\cos uy\,.\,\cos ux\,.\,du\;dy$$

или:

$$\pi e^{-x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ux}{1+u^2}\,du\;.$$

Возьмемъ, теперь, формулу (b'):

$$\pi\,\varphi(bx) = \int_0^\infty\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\;\sin uy\,.\,\sin uxb\,.\,du\;dy$$

или:

$$\pi\,\varphi(bx)\,.\,a^{b-1} = \int_0^\infty\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\sin uy\,.\,\sin uxb\,.\,a^{b-1}\,du\,dy$$

или:

$$\pi\sum_1^\infty{}^{b=1}\,\varphi(bx)\,a^{b-1} = \int_0^\infty\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\sin uy\,.\,du\,dy\sum_1^\infty{}^{b=1}\sin uxb\,.\,a^{b-1}$$

или

$$\frac{\pi}{a}\sum_1^\infty{}^{b=1}\,\varphi(bx)\,a^b = \int_0^\infty\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)\sin uy\,.\,\sin ux}{1-2a\cos ux+a^2}\,du\;dy\;.$$

Полагая, въ послѣднемъ равенствѣ, $\varphi(z) = e^{-az}$, найдемъ:

$$(i)\qquad \frac{\pi}{e^{ax}-a}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\sin ux\,.\,du}{(a^2+u^2)\,(1-2a\cos ux+a^2)}\,,$$

Или, при $a=-\varrho$, получимъ:

$$(k)\qquad \frac{\pi}{e^{ax}+\varrho}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\sin ux\,.\,du}{(a^2+u^2)\,(1+2\varrho\cos ux+\varrho^2)}$$

Сдѣлаемъ приложеніе формулъ (f) и (h) къ опредѣленію постояннаго числа въ разложеніи функціи:

$$f(u)=A_0+A_1\cos 1u+A_2\cos 2u+\ldots+A_x\cos xu+\ldots$$

Для сего умножимъ обѣ части послѣдняго равенства на $\varphi(y)\cos uy$ и проинтегрируемъ его, относительно y, между предѣлами отъ 0 до m, и относительно u, между предѣлами отъ $-\infty$ до $+\infty$; тогда найдемъ:

$$\int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty} f(u).\varphi(y)\cos uy.du\,dy=A_0\int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\cos uy.du\,dy+A_1\int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\cos uy.\cos 1u.du\,dy+A_2\int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\cos uy.\cos 2u.du\,dy+\ldots$$

Откуда, при $1>m$, имѣемъ:

$$\int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,.\,\varphi(y)\cos uy\,.\,du\,dy=A_0\,.\,\pi\,\varphi(0)$$

или:

$$A_0=\frac{1}{\pi\,\varphi(0)}\int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,.\,\varphi(y)\cos uy\,.\,du\,dy\,.$$

Перейдемъ, теперь, къ рѣшенію предложеннаго нами вопроса.

Для сего напишемъ формулы (f), (g) и (h) въ такомъ видѣ:

$$(l)\qquad \pi\,\varphi(x)=\int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\cos uy\,.\,e^{\pm iux}\,du\,dy\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{при}\ x<m$$

$$(m)\qquad \frac{\pi\,\varphi(x)}{2}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ -\ x=m$$

$$(n)\qquad 0\ =\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ -\ x>m;$$

и предложимъ себѣ найти значеніе слѣдующаго двойнаго интеграла:

$$\int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty} f(h+\varrho\,e^{iux})\,\varphi(y)\cos uy\,.\,du\,dy\,?$$

гдѣ, разумѣется, функція f должна оставаться конечною и сплошною для всѣхъ значеній перемѣнной u, между предѣлами отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Предполагая что $f(h+\varrho\,e^{iux})$ удовлетворяетъ условіямъ, при которыхъ она можетъ разлагаться въ сходящійся рядъ, по степенямъ $\varrho\,e^{iux}$, по теоремѣ Тайлора, имѣемъ:

$$\int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty} f(h+\varrho e^{iux})\varphi(y)\cos uy.du\,dy=\int_0^m\int_{\infty}^{+\infty}\left[\frac{f(h)}{0!}\varphi(y)\cos uy+\frac{\varrho f'(h)}{1!}\varphi(y)\cos uy.e^{iux}+\ldots+\frac{\varrho^n f^{(n)}(h)}{n!}\varphi(y)\cos uy.e^{iunx}+\ldots\right]du\,dy\,,$$

что, на основаніи равенствъ (l), (m), (n), доставитъ:

$$(o)\qquad \int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty} f(h+\varrho e^{iux})\varphi(y)\cos uy.du\,dy=\pi\left[\frac{\varphi(0)}{0!}f(h)+\frac{\varrho\varphi(x)}{1!}f'(h)+\frac{\varrho^2\varphi(2x)}{2!}f''(h)+\ldots+\frac{\varrho^n\varphi(nx)}{n!}f^{(n)}(h)+\ldots\right].\ \text{при } m=\infty$$

$$(p)\qquad \int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty} f(h+\varrho e^{iux})\varphi(y)\cos uy.du\,dy=\pi\,\varphi(0)\,f(h)+\frac{\varrho\pi.\varphi(x)f'(h)}{2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ -\ x=m\ (^*)$$

$$(q)\qquad \int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty} f(h+\varrho e^{iux})\varphi(y)\cos uy.du\,dy=\pi\,\varphi(0)\,f(h)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ -\ x>m.$$

Такъ съ помощію предложенныхъ нами теоремъ рѣшается вопросъ о нахожденіи зависимости произвольной функціи отъ суммъ одиночныхъ.

Полагая въ формулѣ (o) $\varphi(x)=e^{-ax}$, найдемъ:

$$(r)\qquad a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(h+\varrho e^{iux})}{a^2+u^2}du=\pi\left[\frac{\varrho^0 e^{-0}}{0!}f(h)+\frac{\varrho e^{-ax}}{1!}f'(h)+\ .\ .\ .+\frac{\varrho^n e^{-anx}}{n!}f^{(n)}(h)+\ .\ .\ .\right]$$

или:

$$(s)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(h+\varrho e^{iux})}{a^2+u^2}du=\frac{\pi}{a}f(h+\varrho e^{-ax})\ .$$

Очевидно, положеніе $h=0$, въ полученной формулѣ, предполагаетъ способность функціи $f(\varrho e^{iux})$ разлагаться въ сходящійся рядъ по теоремѣ Маклорена.

Далѣе, полагая, въ той-же формулѣ, $h=0$ и $f(z)=\varphi(\lg.z)$; получимъ:

$$(t)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(iux)}{a^2+u^2}du=\frac{\pi}{a}f(-ax)\ .$$

Посмотримъ теперь возможны-ли эти положенія?

Для сего имѣемъ равенство,

$$a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(iux)}{a^2+u^2}du=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(iux)e^{-ay}\cos uy.\,du\,dy=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\varphi(0)}{0!}e^{-ay}\cos uy+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}(0)(iux)^n}{n!}.e^{-ay}\cos uy+\ldots\right]du\,dy,$$

въ которомъ значеніе первой части опредѣляется интегралами, отличными, по сущности своей, отъ интеграловъ входящихъ въ составъ формулы, изъ которой разсматриваемая выведена; а по этому-то сдѣланныя нами положенія, для полученія формулы (t), какъ нарушающія условія, при которыхъ найдена формула (s), мы отрицаемъ, — за исключеніемъ случая $\varphi(z)=e^z$, приводящаго къ извѣстному уже намъ результату.

Сдѣлаемъ въ формулѣ (s) $f(z)=\lg.z$, $h=1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lg(1+\varrho e^{iux})}{a^2+u^2}du=\frac{\pi}{a}\lg(1+\varrho e^{ax})\ .$$

(*) Остальные члены обращаются въ нули, ибо въ нихъ параметръ тригонометрической функціи больше верхняго предѣла того интеграла, который берется относительно перемѣнной y.

или:

$$\int_0^\infty \frac{\lg\left[(1+\varrho\, e^{iux})(1+\varrho\, e^{iux})\right]}{a^2+u^2}\, du = \frac{\pi}{a} \lg\left(1+\varrho\, e^{-ax}\right).$$

или:

$$\int_0^\infty \frac{\lg\left(1+2\varrho\cos ux+\varrho^2\right)}{a^2+u^2}\, du = \frac{\pi}{a}\lg\left(1+\varrho\, e^{-ax}\right).$$

Или, дифференцируя обѣ части относительно x, найдемъ:

$$(u) \qquad \int_0^\infty \frac{u \,.\, \sin ux \,.\, du}{(a^2+u^2)(1+2\varrho\cos ux+\varrho^2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{e^{ax}+\varrho}.$$

Гдѣ, по сдѣланному нами условію, ϱ должно быть <1, ибо $\lg(1+\varrho\, e^{iux})$ разлагается въ сходящійся рядъ, по степенямъ $\varrho\, e^{iux}$, по теоремѣ Тайлора, при $\varrho<1$.

Но разсматривая строку, во второй части равенства (r), замѣчаемъ что при $\varrho=1$ сходимость ея хотя и уменьшается,—но все-же строка не перестаетъ быть сходящеюся; а потому полагая въ послѣднемъ равенствѣ, $\varrho=1$, найдемъ:

$$\int_0^\infty \frac{\lg(1+\cos ux)}{a^2+u^2}\, du = \frac{\pi}{a}\lg\left(1+e^{-ax}\right) - \frac{\pi \lg a}{2a}$$

или:

$$\int_0^\infty \frac{\lg\cos^2\frac{ux}{2}}{a^2+u^2}\, du = \frac{\pi}{a}\lg\left(\frac{1+e^{-ax}}{2}\right)$$

или:

$$\int_0^\infty \frac{\lg\cos ux}{a^2+u^2}\, du = \frac{\pi}{2a}\lg\left(\frac{1+e^{-2ax}}{2}\right).$$

Съ другой-же стороны, сравнивая значеніе интеграла въ равенствѣ (u) съ значеніемъ его въ равенствѣ (k), видимъ, что положеніе $\varrho=1$, въ 1-мъ изъ нихъ, соотвѣтствуетъ положенію $a=-1$ въ равенствѣ (i). — А поэтому заключаемъ: на сколько вѣренъ результатъ, происшедшій въ слѣдствіе положенія $\varrho=1$ въ равенствѣ (u), на столько-же справедливо положеніе $a=-1$, въ равенствѣ (i), доставляющее тотъ-же результатъ.

Найдемъ еще значеніе суммы:

$$\int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty} f(h+\varrho\, e^{iux})\, e^{-iunx}\, \varphi(y)\cos uy \,.\, du\, dy,$$

гдѣ функція f, по предъидущему, остается конечною и сплошною для всѣхъ значеній u между предѣлами отъ $-\infty$ до $+\infty$, а n число цѣлое.

Если $f(h+\varrho\, e^{iux})$ способна разлагаться въ сходящійся рядъ, по степенямъ $\varrho\, e^{iux}$, по теоремѣ Тайлора, то можемъ написать:

$$\int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty} f(h+\varrho\, e^{iux})\, e^{iunx}\, \varphi(y)\cos uy \,.\, du\, dy = \int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\frac{f(h)}{0!}\, e^{-iunx}\varphi(y)\cos uy + \frac{\varrho f'(h)}{1!}\, e^{iux(1-n)}\varphi(y)\cos uy + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\varrho^n f^{(n)}(h)}{n!}\varphi(y)\cos uy + \ldots + \frac{\varrho^k f^{(k)}(h)}{k!}\, e^{iux(k-n)}\varphi(y)\cos uy + \ldots\Big]\, du\, dy$$

что, на основаніи формулъ (l) и (n) доставитъ:

$$v)\qquad \int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty} f(h+\varrho\, e^{iux})\, e^{-iunx}\, \varphi(y)\cos uy.\, du\, dy = \frac{\pi\,\varphi(0)\,\varrho^n f^{(n)}(h)}{n!}\ \ldots \text{ при } x>m.$$

Такова зависимость, существующая между производною функціею n-го порядка и суммами дифференціальными.

Съ помощію этой зависимости легко выразить остаточный членъ Тайлоровой строки посредствомъ двойнаго интеграла; но мы не будемъ на этомъ останавливаться.

Сдѣлаемъ въ формулѣ (v) $\varphi(y) = A =$ постоянному числу:

$$\int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty} f(h+\varrho\, e^{iux})\cos uy.\, du\, dy = \frac{\pi\,\varrho^n f^{(n)}(h)}{n!}\ \ldots\ldots\ldots \text{ при } x>m$$

или:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(h+\varrho\, e^{iux})\,\frac{\sin mu}{u}\, du = \frac{\pi\,\varrho^n f^{(n)}(h)}{n!}\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Этимъ мы оканчиваемъ настоящую статью.

Въ слѣдующей-же статьѣ мы намѣрены показать, какимъ образомъ остаточный членъ, теоремы Тайлора, выражается одиночною конечною суммою чрезъ данную функцію.

С. Петербургъ 1863 г. 11 Января. *Н. Коціевскій.*

II.

Библіографическій указатель.

34. Weitere Ausführung der politischen Arithmetik, von Dr. *L. Oettinger*. Greifswald 1863.

Это сочиненіе, появившееся нынѣ въ отдѣльномъ изданіи, было уже напечатано по частямъ въ Grunert's Archiv der Math. und Phys. Th 37 и 38. Оно содержитъ не только историческій и критическій обзоръ различныхъ методъ вычисленія, употребительныхъ въ этой, по преимуществу практической отрасли арифметики; но и вообще старается изложить предметъ въ научной системѣ и обширности. Въ особенности кажутся намъ хорошо обработанными главы: о государственныхъ займахъ, съ примѣрами, взятыми изъ дѣйствительности, и о страхованіи жизни.

35. Geometrische und mechanische Theorie der Astroiden von Dr. *H. Zentsch*. Greifswald 1863.

Эта интересная монографія представляетъ обильный матеріалъ для упражненія въ приложеніи анализа къ изслѣдованію кривыхъ. Именно этимъ классомъ кривыхъ всего менѣе занимались до сихъ поръ математики, такъ что можетъ быть для нѣкоторыхъ читателей »Вѣстника« будетъ чуждо и самое названіе, недавно впрочемъ установившееся. Подъ названіемъ *астроиды* разумѣютъ кривую, которая составляется изъ последовательныхъ точекъ пересѣченія различныхъ положеній одной и той-же прямой, опредѣленной длины, которая поворачивается такъ, что своими концами постоянно опирается на 2 оси произвольныхъ координатъ. Постоянная длина прямой называется *параметромъ*, а уголъ, заключающійся между осями, *опредѣляющимъ* угломъ; и смотря по этому углу астроиды различаются на *прямыя* или *ортогональныя* и *косыя*.

36. *Serenus* von *Antissa* Ueber den Schnitt des Kegels, aus dem Griechischen, v. *E. Nizze*. Stralsund 1861.

Мы указываемъ на переводъ этого небольшаго сочиненія древняго писателя,(хотя уже онъ появился въ 1861 г.); ибо мы не встрѣчали упоминанія объ немъ въ доступныхъ намъ заграничныхъ періодическихъ каталогахъ и вообще думаемъ, что оно можетъ представить интересъ для занимающихся исторіею математики.

37. On the total solar eclipse of July 18 th. 1860, observed at Rivabellosa, near Miranda de Ebro in Spain, by *Warren de la Rue*. London 1862.

Это роскошное изданіе, снабженное фотографическими снимками и литографическими рисунками, представляетъ подробный и весьма важный отчетъ о наблюденіяхъ полнаго солнечнаго затмѣнія, произведенныхъ при помощи фотогеліографа, конструкціи Г-на Де-ла-Рю. Вѣроятно это сочиненіе будетъ находиться въ рукахъ большей части нашихъ астрономомъ, а потому мы ограничимся замѣчаніемъ, что произведенныя надъ фотографическими изображеніями микрометрическія измѣренія служатъ лучшимъ отвѣтамъ на счетъ принадлежности *выступовъ* къ солнцу.

III.

Извлеченія изъ періодическихъ изданій.

1. Прямой выводъ значенія двухъ извѣстныхъ опредѣленныхъ интеграловъ:

$$J = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx\ ,\quad J_1 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\ ,$$

Г. Цефус'а (Zeitschr. f. Math. 7 Jahr. Heft. 6).

Первый изъ этихъ интеграловъ есть предѣлъ отъ $L = \int_0^n \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx$,

гдѣ n можетъ рости до безконечности. Но такъ какъ для всѣхъ значеній x справедлива извѣстная строка:

$$\cos ax = 1 - \frac{a^2 x^2}{2!} + \frac{a^4 x^4}{4!} - \ldots,\quad \text{то мы получимъ}$$

$$L = \int_0^n \left[\frac{1}{1+x^2} - \frac{a^2}{2!}\,\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{a^4}{4!}\,\frac{x^4}{1+x^2} - \frac{a^6}{6!}\,\frac{x^6}{1+x^2} + \ldots\right] dx$$

$$= \int_0^n \left[\frac{1}{1+x^2} - \frac{a^2}{2!}\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) + \frac{a^4}{4!}\left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right) - \frac{a^6}{6!}\left(x^4 - x^2 + 1 - \frac{1}{1+x^2}\right) + \ldots\right] dx\,.$$

$$= \left[1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{a^6}{6!} + \ldots\right]\frac{\pi}{2} - \frac{n}{1}\left(\frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{a^6}{6!} + \ldots\right) + \frac{n^3}{3}\left(\frac{a^4}{4!} + \frac{a^6}{6!} + \ldots\right) - \frac{n^5}{5!}\left(\frac{a^6}{6!} + \ldots\right) + \ldots$$

Но вообще: $F(a) = F(0) + \frac{a}{1}F'(0) + \frac{a^2}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{a^n}{n!}F^{(n)}(0) + \int_0^a \frac{(a-z)^n}{n!}\cdot F^{(n+1)}(z)\,dz\,\cdot$

откуда для значенія $F(a) = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$ и при $n = 0,\ 2,\ 4,\ 6,$ и т. д.

получимъ: $\frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{a^6}{6!} + \ldots = \int_0^a \frac{e^z - e^{-z}}{2}\,dz\,,$

$$\frac{a^4}{4!} + \frac{a^6}{6!} + \frac{a^8}{8!} + \ldots = \int_0^a \frac{(a-z)^2}{2!}\cdot\frac{e^z - e^{-z}}{2}\,dz \quad \text{и т. д.;}$$

такъ, что выраженіе L приводится къ формѣ:

$$\frac{\pi}{4}(e^a - e^{-a}) - \int_0^a \frac{e^z - e^{-z}}{z(a-z)}\left[\frac{n(a-z)}{1} - \frac{n^3(a-z)^3}{3!} + \frac{n^5(a-z)^5}{5!} - \ldots\right] dz = \frac{\pi}{4}(e^a - e^{-a}) - \int_0^a \frac{e^z - e^{-z}}{z(a-z)}\sin n(a-z)\,dz\,.$$

Подставляя сюда $n(a-z) = t$, получаемъ:

$$1)\quad L = \frac{\pi}{4}(e^a + e^{-a}) + \frac{1}{2}\int_0^{na}\left[e^{-a+\frac{t}{n}} - e^{a-\frac{t}{n}}\right]\frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{4}(e^a + e^{-a}) + \frac{1}{2}\,e^{-a}\int_0^{na}\frac{\sin t}{t} - \frac{1}{2}\,e^a\int_0^{na}\frac{\sin t}{t}\,dt + \frac{e^{-a}}{2}\int_0^{na}\left(e^{\frac{t}{n}} - 1\right)\frac{\sin t}{t}\,dt - \frac{e^a}{2}\int_0^{na}\left(e^{-\frac{t}{n}} - 1\right)\frac{\sin t}{t}\,dt\,.$$

Вводя здѣсь предѣльное значеніе для $n = \infty$, выходитъ

$$2)\quad J = e^a\left(\frac{\pi}{4} - \frac{J_1}{2}\right) + e^{-a}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{J_1}{2}\right) + \frac{e^{-a}}{2}\,lim.\int_0^{na}\frac{\sin t}{t}\left(e^{\frac{t}{n}} - 1\right)dt - \frac{e^a}{2}\,lim.\int_0^{na}\frac{\sin t}{t}\left(e^{-\frac{t}{n}} - 1\right)dt\,.$$

Не трудно доказать, что предѣльная величина двухъ послѣднихъ интеграловъ порознь есть нуль, ибо они при $t = nx$ превращаются въ

$$lim \int_0^a \frac{e^x - 1}{x} \sin nx\, dx\,, \quad lim \int_0^a \frac{e^{-x} - 1}{x} \sin nx\, dx\,,$$

такимъ образомъ выходитъ

$$J = e^a\left(\frac{\pi}{4} - \frac{J_1}{2}\right) + e^{-a}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{J_1}{2}\right).$$

Также доказывается, что и величина J, при $a = \infty$ обращается въ нуль; а слѣд. тогда

$$J_1 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}\ ;$$

поставляя это значеніе J_1 въ предъидущее уравненіе, выходитъ

$$J = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2}\ e^{-a}\,.$$

2. Въ засѣданіи Парижской Академіи 24 Ноября, Г. Фуко представилъ краткое описаніе прибора, который былъ употребленъ имъ для новаго опредѣленія скорости свѣта (см. Вѣст. № 34).

Представимъ себѣ сначала аппаратъ, находящійся въ покоѣ. Солнечный лучъ, направленный горизонтально посредствомъ геліостата, падаетъ первоначально на микрометрическую миру, которая состоитъ изъ посеребренной стеклянной пластинки, имѣющей рядъ прозрачныхъ вертикальныхъ черточекъ, въ разстояніи $1/_{10}$ доли милиметра одна отъ другой. Дѣленіе миры было произведено съ особенною тщательностію, ибо она служила въ опытѣ главнымъ измѣряющимъ элементомъ. Лучи, проходящіе чрезъ эти дѣленія, падаютъ на первое вращающееся плоское зеркало, гдѣ они испытываютъ первое отраженіе и направляются къ вогнутому зеркалу, отстоящему отъ перваго на 4 метра. Между этими двумя зеркалами, но ближе къ первому, помѣщается объективъ, кривизна поверхностей котораго именно такова, что, съ одной стороны, плоскость миры, а съ другой – поверхность вогнутаго зеркала, находятся точно на разстояніяхъ его сопряженныхъ фокусовъ; такъ что на поверхности вогнутаго зеркала получается изображеніе миры. Вогнутое зеркало на столько наклонено, чтобы отраженные отъ него лучи могли проходить мимо аппарата съ вращающимся зеркаломъ, отъ котораго получается изображеніе на извѣстномъ разстояніи въ пространствѣ. Въ этомъ именно мѣстѣ устанавливается второе вогнутое зеркало, такимъ образомъ, что пучекъ еще разъ отраженныхъ лучей проходитъ подлѣ перваго зеркала и даетъ второе изображеніе миры; это изображеніе принимается на поверхность третьяго вогнутаго зеркала и такимъ образомъ далѣе до образованія послѣдняго изображенія миры на поверхности зеркала какого либо нечетнаго порядка. Въ приборѣ Фуко было пять зеркалъ и развиваемая ими длина для прохожденія свѣта равнялась 20 метрамъ. Разстояніе послѣдняго зеркала отъ предъидущаго составляло 4 метра и такова же фокусная длина послѣдняго зеркала, которое обращено прямо противъ предъидущаго, такъ что всѣ падающіе на него лучи возвращаются по тому же направленію, по которому они пришли. Достигнуть этого легко на опытѣ и тогда можно быть увѣреннымъ, что всѣ лучи возвратятся окончательно къ мирѣ, къ тѣмъ самымъ пунктамъ, чрезъ которыя они вошли.

Возвращенные такимъ образомъ лучи даютъ весьма отчетливое изображеніе миры, въ чемъ легко убѣдиться посредствомъ частнаго отраженія отъ наклоненной стеклянной пластинки, соединенной неизмѣнно съ мирою и съ микроскопомъ, какіе обыкновенно употребляются въ астрономическихъ наблюденіяхъ.

Изображеніе, получаемое въ микроскопѣ отъ возвратныхъ лучей, занимамаетъ опредѣленное положеніе въ отношеніи къ пластинкѣ и къ мирѣ. Это положеніе соотвѣтствуетъ дѣйствительному изображенію миры, видимой чрезъ отраженіе отъ плоскости стекла. Но когда зеркало начнетъ вращаться, то это изображеніе измѣняетъ мѣсто, разумѣется въ томъ случаѣ, если свѣтъ, пробѣгая два раза пространство вогнутыхъ зеркалъ, находитъ плоское зеркало уже въ другомъ положеніи. Отсюда слѣдуетъ, что возвратное изображеніе должно перемѣщаться въ сторону вращенія зеркала, и это отклоненіе увеличивается съ увеличеніемъ скорости вращенія; оно увеличивается также, какъ очевидно, съ длиною пробѣгаемаго свѣтомъ пространства и съ разстояніемъ миры отъ вращающагося зеркала.

Называя W скорость свѣта, n число оборотовъ зеркала, l длину ломанной линіи между вращающимся зеркаломъ и послѣднимъ вогнутымъ зеркаломъ, r разстояніе миры отъ вращающагося зеркала и d отклоненіе изображенія, получается слѣдующее выраженіе для скорости свѣта въ функціи извѣстныхъ величинъ, которыя опредѣляются отдѣльно измѣреніемъ: $V = \frac{8\pi nlr}{d}$.

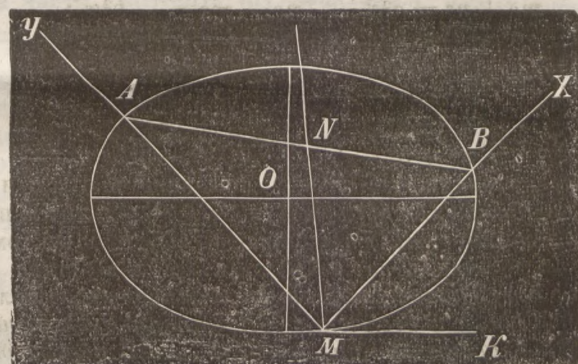
Разстоянія l и r измѣряются непосредственно масштабомъ или другимъ способомъ. Отклоненіе d опредѣляется микрометрически; но что касается числа n оборотовъ зеркала въ секунду, то мы должны предварительно объяснить, какимъ образомъ сообщается аппарату съ зеркаломъ постоянная скорость вращенія.

Это зеркало изъ посеребреннаго стекла, имѣющаго 14 милиметровъ въ діаметрѣ, насажено на ось небольшой воздушной тюрбины извѣстной конструкціи; причемъ воздухъ, выходящій изъ поддувальника, проходитъ предварительно черезъ особо принаровленный къ тому регуляторъ, изобрѣтенія Кавалье. Воздухъ, выходящій изъ отверстій тюрбины, представляетъ движущую силу весьма постояннаго дѣйствія, тѣмъ болѣе, что ускоренное вращеніе зеркала тотчасъ встрѣчаетъ препятствіе въ окружающемъ воздухѣ, которое, при данной скорости, остается также совершенно постояннымъ. Такимъ образомъ здѣсь уравновѣшиваются двѣ противуположныя силы и предохраняютъ движеніе отъ всякой неравномѣрности.

Для счета числа оборотовъ, или собственно говоря для сообщенія аппарату опредѣленной скорости сдѣлано было слѣдующее устройство: между микроскопомъ и отражающимъ стекломъ помѣщенъ былъ дискъ, котораго край, нарѣзанный мѣлкими зубцами, проекцировался на изображеніе, которое наблюдалось въ микроскопѣ и раздѣлялъ его по поламъ. Диску сообщается однообразное вращеніе, которое дѣлаетъ зубцы невидимыми при постоянномъ свѣтѣ. Но изображеніе появляется только на одинъ моментъ при каждомъ новомъ обращеніи зеркала; поэтому, если скорость вращенія диска будетъ такова, что каждый слѣдующій зубецъ приходитъ въ положеніе предъидущаго, именно во время одного полнаго оборота зеркала, то самый дискъ является снова зубчатымъ и представляется неподвижнымъ. Такимъ образомъ, если число зубцовъ диска есть n и время обращенія его равно одной секундѣ, то, регулируя истеченіе воздуха въ тюрбинѣ, можно дойти до видимой неподвижности диска и быть увѣреннымъ, что зеркало совершаетъ тогда n оборотовъ въ секунду. При помощи часоваго механизма устройства Фроманъ, Г. Фуко могъ сообщать зеркалу 400 оборотовъ въ секунду, и въ теченіе нѣсколькихъ минутъ поддерживать постоянное отношеніе въ дѣйствіи обоихъ вращающихся приборовъ.

Г. Фуко замѣчаетъ еще, что причина открытыхъ имъ несогласій въ первоначальныхъ опытахъ заключалась въ неточности показаній микрометра, а потому онъ предпочелъ въ послѣдствіи, вмѣсто микрометрическаго измѣренія отклоненія, удержать за нимъ постоянную величину и искать изъ опыта: каково должно быть тогда разстояніе между мирою и вращающимся зеркаломъ. Полученные такимъ образомъ результаты согласуются въ предѣлахъ ошибокъ наблюденій, и выводимое въ среднемъ для скорости свѣта число 298000 километровъ въ секунду, по утвержденію Фуко, заслуживаетъ весьма большаго довѣрія. *Г.*

Рѣшеніе задачи N. 6 въ N. 31 Вѣстника.



Уравненіе эллипса отъ центра

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 .$$

Перенесемъ начало координатъ въ точку M, которой координаты пусть будутъ $+\alpha$, $-\beta$. Тогда уравненіе эллипса будетъ:

$$a^2 (y-\beta)^2 + b^2 (x+\alpha)^2 = a^2b^2 .$$

Перемѣнимъ положеніе осей по направленію MA и MB. Тогда вмѣсто x и y надо вставить $cx - sy$, $sx + cy$, гдѣ $s = \sin\varphi$ $c = \cos\varphi$; уголъ φ есть уголъ BMK. Уравненіе эллипса относительно осей MA и MB будетъ

$$a^2 (sx + cy - \beta)^2 + b^2 (cx - sy + \alpha)^2 = a^2 b^2 .$$

Найдемъ точки A и B

$$A\,(0\,y_1) \qquad a^2 (cy_1 - \beta)^2 + b^2 (\alpha - sy_1)^2 = a^2 b^2 ;\; a^2c^2y_1^2 + a^2\beta^2 - 2a^2 c\beta y_1 + b^2\alpha^2 + b^2s^2y_1^2 - 2b^2\alpha s y_1 = a^2b^2$$

$$B\,(x_1\,0) \qquad a^2 (sx_1 - \beta)^2 + b^2 (cx_1 + \alpha)^2 = a^2 b^2 ;\; a^2s^2x_1^2 + a^2\beta^2 - 2a^2 s\beta x_1 + b^2c^2x_1^2 + b^2\alpha^2 + 2b^2\alpha c x_1 = a^2b^2$$

Такъ какъ $a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = a^2b^2$ то,

$$\left.\begin{aligned}(a^2c^2 + b^2s^2)\, y_1^2 - 2\,(a^2c\beta + b^2s\alpha)\, y_1 = 0\\ (a^2s^2 + b^2c^2)\, x_1^2 - 2\,(a^2s\beta - b^2c\alpha)\, x_1 = 0\end{aligned}\right\} . \quad \text{(I)}$$

Корни уравненій (I) $y_1 = 0$ и $x_1 = 0$ соотвѣтствуютъ точкѣ M. Другія значенія дадутъ координаты точекъ A и B

$$\left.\begin{aligned}y_1 = \frac{2\,(a^2c\beta + b^2s\alpha)}{a^2c^2 + b^2s^2} = \frac{2m}{k}\\ x_1 = \frac{2\,(a^2s\beta - b^2c\alpha)}{a^2s^2 + b^2c^2} = \frac{2n}{l}\end{aligned}\right\} \quad .\;.\;.\;. \quad \text{(II)}$$

гдѣ для краткости положено:

$$a^2c\beta + b^2s\alpha = m . \quad a^2c^2 + b^2s^2 = k .$$

$$a^2s\beta - b^2c\alpha = n . \quad a^2s^2 - b^2c^2 = l .$$

Уравненіе линіи AB, проходящей чрезъ точки A и B, есть:

$$Y - y_1 = \frac{y_1}{-x_1} \quad \text{или} \quad Yx = x_1 y_1 - Xy_1 .$$

Выведемъ уравненіе нормали въ точкѣ M.—Урав. нормали вообще есть

$$(X - x)\,\frac{df}{dy} = (Y - y)\,\frac{df}{dx} .$$

Въ нашемъ случаѣ

$$f = a^2 (sx + cy - \beta)^2 + b^2 (cx - sy + \alpha)^2 - a^2b^2 = 0 .$$

Отсюда

$$\frac{df}{dy} = 2a^2 (sx + cy - \beta)\, c + 2b^2 (cx - sy + \alpha)\, s ,$$

$$\frac{df}{dx} = 2a^2 (sx + cy - \beta)\, s + 2b^2 (cx - sy + \alpha)\, c .$$

Уравненіе нормали будетъ:

$$(X-x)\,[a^2(sx+cy-\beta)\,c-b^2(cx-sy+a)\,s]=$$
$$(Y-y)\,[a^2(sx+cy-\beta)\,s+b^2(cx-sy+a)\,c].$$

Для точки M, $x=y=0$. Слѣд. уравненіе нормали MN будетъ:

$X(-a^2\beta c-b^2 as)=Y(-a^2\beta s+b^2 ac)$, или $Xm=Yn$.

Найдемъ пересѣченіе AB съ нормалью MN. Имѣемъ 2 уравненія

$Yx_1=x_1y_1-Xy_1$ . . . Ур. линіи (AB)

$Yn=Xm$ . . . . — (MN)

изъ которымъ находимъ координаты точки N

$$x'=\frac{n\,x_1y_1}{mx_1+ny_1},\quad y'=\frac{m\,x_1y_1}{mx_1+ny_1}.$$

Вставивъ изъ уравненій (II), вмѣсто x_1 и y_1 ихъ величины, имѣемъ

$$x'=\frac{n\cdot\frac{2n}{l}\cdot\frac{2m}{k}}{m\cdot\frac{2n}{l}+n\frac{2m}{k}}=\frac{2n}{k+l}\ \text{ и }\ y'=\frac{2m}{k+l}.$$

Эти координаты x' и y' относятся къ осямъ MA и MB. Чтобъ ихъ отнести къ осямъ, проходящимъ чрезъ M и параллельныхъ главнымъ, надо вмѣсто x' и y' вставить $cx'+sy'$ и $cy'-sx'$. Тогда

$$cx'+sy'=\frac{2n}{k+l},\quad cy'-sx'=\frac{2m}{k+l};$$

отсюда: $x'=\dfrac{2}{k+l}(nc-ms)$, $y'=\dfrac{2}{k+l}(ns+mc)$.

Но $mc=(a^2c\beta+b^2sa)\,c$, $nc=(a^2s\beta-b^2ca)\,c$

$ns=(a^2s\beta-b^2ca)\,s$, $ms=(a^2c\beta+b^2sa)\,s$

$mc+ns=a^2\beta$, $nc-ms=-b^2a$;

ибо $c^2+s^2=1$ и $k+l=a^2+b^2$:

слѣд. $x'=-\dfrac{2b^2a}{a^2+b^2}$, $y'=\dfrac{2a^2\beta}{a^2+b^2}$.

Тогда: $x'=a\Big(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\Big)$, $y'=\beta\Big(\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\Big)$.

Отсюда видно, что x' и y' не зависятъ отъ c и s, т. е. отъ положенія осей MA и MB. Слѣд. точка пересѣченія линіи AB съ нормалью MN при всякомъ положеніи прямаго угла AMB, лишь бы z вершина ея наход. въ одной точкѣ, сохраняетъ, неизмѣнно свое положеніе; или *линія пересѣченія AB, соединяющая точки пересѣченія стороны прямаго угла AMB съ кривою, при обращеніи прямаго угла около его вершины, всегда проходитъ чрезъ одну постоянною точку (N), чрезъ которую проходитъ также и нормаль къ кривой.*

Найдемъ уравненіе этой точки N, когда точка M будетъ двигаться по данной кривой. Пусть

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=d,\quad x'=ad,\quad a=\frac{x'}{d},$$
$$y'=\beta d,\quad \beta=\frac{y'}{d}.$$

Такъ какъ a и β должны удовлетворять уравненію данной кривой, то должно быть: $a^2\beta^2+b^2a^2=a^2b^2$;

или $a^2\dfrac{y'^2}{d^2}+b^2\dfrac{x'^2}{d^2}=a^2b^2$. Или отнимая значки,

$\dfrac{a^2y^2}{d^2}+\dfrac{b^2x^2}{d^2}=a^2b^2$. Полагая $bd=B$, $ad=A$, имѣемъ

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2,$$

уравненіе искомой кривой, т. е. *Уравненіе искомой кривой есть эллипсъ, котораго оси пропорціональны осямъ даннаго.*

Полярное уравненіе даннаго эллипса

(D) $r=\dfrac{p}{1+e\cos\varphi}$, гдѣ $p=\dfrac{b^2}{a}$, $e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

$f=\sqrt{a^2-b^2}$, $F=\sqrt{A^2-B^2}=fd$

искомаго $R=\dfrac{P}{1+E\cos\varphi}$, или $R=\dfrac{pd}{1+e\cos\varphi}$,

гдѣ $P=\dfrac{B^2}{A}=pd$, $E=\dfrac{\sqrt{A^2-B^2}}{A}=e$.

Т. е. *параллельные радіусы векторы находятся между собою въ постоянномъ отношеніи.*

Когда уравненіе (D) выражаетъ гиперболу, то $e>1$ $p^1=a(e^2-1)$. Для гиперболы

$e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\dfrac{d\sqrt{a^2+b^2}}{ad}=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2}}{A^2}$, $d=\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}>1$.

Слѣд. $R>r$, $F>f$.

Слѣд. если данная кривая гипербола, то и искомая гипербола съ большимъ фокуснымъ разстояніямъ; изъ 2-хъ параллельныхъ радіусовъ векторовъ радіусъ искомой $>$ радіуса данной гиперболы.

Если данная кривая парабола, то ея уравненіе будетъ $r=\dfrac{p}{1+\cos\varphi}$.

Для параболы $e=1$ $a=\infty$, потому

$$d=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{1-\frac{p}{a}}{1+\frac{p}{a}}.$$

Въ предѣлѣ $a=\infty$ для параболы $d=1$; поэтому уравненіе искомой параболы будетъ

$$R=\frac{p}{1+\cos\varphi}.$$

одинакое съ даннымъ. Найдемъ разстояніе вершинъ обѣихъ параболъ. Для этого найдемъ предѣлъ

$$D=a-A=a(1-d)=a\Big(1-\frac{a-p}{a+p}\Big)=\frac{2pa}{a+p}$$

или $D=\dfrac{2p}{1+\frac{p}{a}}$. При $a=\infty$, $D=2p$. (*)

Искомую кривую для параболы можно найти и непосредственно, изъ уравненія $y^2=2px$, поступая точно такъ какъ это дѣлали въ случаѣ эллипса.

2-е рѣшеніе. Можно также получить рѣшеніе, взявъ общее уравненіе кривыхъ втораго порядка отъ вершины $y^2=2px-\dfrac{p}{a}x^2$, гдѣ p есть ордината въ фокусѣ:

для эллипса a . . . $+$

для гиперболы a . . . $-$

для параболы a . . . ∞

Приэтомъ можемъ поступать точно такъ какъ дѣлали въ началѣ задачи.

3-е рѣшеніе. Написавъ уравненіе двухъ прямыхъ, между собою перпендикулярныхъ и проходящихъ чрезъ какую нибудь точку кривой коническаго сѣченія, опредѣлимъ точки ихъ пересѣченія съ кривою; потомъ напишемъ уравненіе прямой, проходящей чрезъ этѣ 2 точки. Затѣмъ найдемъ пересѣченіе послѣдней съ нормалью; полученные координаты будутъ независимы отъ наклоненія взятыхъ 2-хъ прямыхъ. Послѣ того, выражая точку кривой чрезъ найденную постоянную, вставивъ въ уравненіе кривой, легко получимъ уравненіе искомой постоянной точки.

Но такой пріемъ въ рѣшеніи ведетъ къ болѣе продолжительнымъ вычисленіямъ.

Смоленскъ 14 Января. *А. Бѣляевъ.*

(*) Авторъ присоединилъ къ этому рѣшенію нѣсколько пояснительныхъ чертежей, которые, къ сожалѣнію, Редакція принуждена была опустить. *Ред.*

Типографія А. Марциновскаго. — ВИЛЬНО. 1863 г. Марта 18-го. — Редакторъ-Издатель *М. Гусевъ.*