910835 I /2

Dublet

Nat. 1097

Towary zregeſtrowane *in Tres Claſſes* rozdzielić. Taxę onych ſprawiedliwą bez depaktacyi Kupca y detrymentu Skarbu ułożyć y wyprowadzić, Kwit Kupcowi *in forma debita* napiſać, y tenże ſam tak w Regeſtra Piſarſkie iako y Rewizorſkie z wyrażeniem Gatunkow Towarow y ſpecyſikacyą Solucyi od nich wpiſać. Perceptę odebrać, y tę w ſkrzynię ſkarbową w raz z Panem Piſarzem włożyć y zamknąć. Jeżeliby ſię z Rewizyi y konſkrypcyi Towarow co więcey nad Regeſtr, y Auſzczug Kupiecki, lub dobrowolne opowiedzenie pokazało, to *irremiſſibiliter* Konfiſkacyi podlegać powinno, ktorą takową Konfiſkatę Rewizor w Regeſtra ſwoie Rewizorſkie pod Expedycyą ma *annotare.* Na dokończeniu zaś Kwartału powinien Rewizor na Ultymę Regeſtra ſwoie Rewizorſkie odeſłać, na ktorą to Ultymę raz Piſarz, a drugi raz Rewizor jeździć ...

GEOMETRYA

DLA

SZKOŁ NARODOWYCH.

CZĘSC II.

Cena oprawney w papier Zł. 1 i gr. 3 ſre:

w Drukarni Nadworney J.K. Mci
Roku 1781.

Dzieło: *Geometrya*, ułożone przez J.P. Lhuilier Obywatela Geneweńſkiego, w Towarzyſtwo Nauk w tymże Mieście uſtanowione policzonego, które za ogłoſzonym w Polſzcze, i obcych kraiach Uczonych do piſania wezwaniem, z pomiędzy innych, potwierdzenie i nadgrodę odebrało, od Towarzyſtwa do Kſiąg Elementarnych rozſtrząśnione, a przez J. X. Gawrońſkiego Kanonika Koadjutora Krakowſkiego Lektora, J.K. Mci i w tymże Towarzyſtwie zaſiadaiącego, na Polſki język z Francuſkiego przełożone, Szkołom Narodowym do użycia podług przepiſów naſzych podaiemy. w Warſzawie dnia 30. Października Roku 1780.

JGNACY Xżę MASSALSKI Biſkup Wil. Prezy:
MICHAŁ Xżę PONIATOWSKI Biſkup Płocki.
AUGUST Xżę SUŁKOWSKI Wwda Kaliſki.
JĘDRZEY MOKRONOSKI Wwda Mazow:
JACEK: MAŁACHOWSKI Podkan: Koro:
JOACHYM CHREPTOWICZ Podkan: W.X.L.
MICHAŁ MNISZECH Marſzałek Nadwor: Lit.
JGNACY POTOCKI Piſarz W.W.X.L.
ADAM Xżę CZARTORYSKI Gene: Ziem. Pod:
STANISŁAW Xżę PONIATOWSKI Ge: Lieut. W.K.
FRANCISZEK BIELINSKI Stta Czerſki
ANDRZEY ZAMOYSKI Kaw: Or. Orła Biał:

ZBIOR RZECZY ZAWARTYCH W ROZDZIAŁACH TEY CZĘSCI GEOMETRYI.

ZBIOR SŁOW POLSKICH,

Albo nowych, albo mniey znanych, użytych w tey Części Geometryi, z przydanemi o bok słowami Łacińskiemi, toż samo w używaniu Matematyków znaczącemi.

Biegòn. *Polus*
Bryła. *Solidum.*
Bryłowatość. *Soliditas.*
Bytność. *Existentia.*
Ciągło. *Continuè.*
Ciągły. *Continuus.*
Czworokątny. *Quadrangularis.*
Czworościan. *Tetradedrum.*
Dwòdzielny. *Subduplicatus*
Dwòmnożny. *Duplicatus.*
Dwòmnożyć. *Duplicare.*
Dwódziestościan. *Icosaèdrum.*
Dwónastościan. *Dodecaèdrum*
Graniastostup. *Prisma*
Jednoimienny. *Ejusdem nominis*
Kąt płaski. *Angulus planus*
Kąt bryłowy. *Angulus solidus.*
Kloc. *Truncus*

Krawędz

Krawędź. *Arrête* (po Francusku.)
Krzywy. *Curvus.*
Kula *Sphera.*
Kulisty. *Sphericus.*
Nadmiar. *Excessus.*
Ośmiościan, *Octoëdrum.*
Ostrosłup albo Ostrogran. *Pyramis.*
Ostrokrąg. *Conus*
Ostrokrąg ścięty. *Conus truncatus*
Płaszczyzna *Planum.*
Początkowy. *Elementaris.*
Pòłkole. *Semicirculus.*
Pòłkula. *Hemisphærium.*
Przecięcie. *Sectio.*
Rodzenie się. *Generatio*
Ròwnik. *Æquator.*
Ròwnoległoboczny. *Parallelogrammicus*
Ròwnoległościan. *Parallelogrammum*
Rózległość. *Extensio*
Sciana. *Paries*
Spodek. *Pes*
Stały. *Constans*
Sześcian. *Hexàëdrum*
albo *Cubus*
Tròykątny. *Triangularis*
Tròymnożny. *Triplicatus*
Walec. *Cylinder*
Warsta. *Stratum*
Wielościan. *Polyedrum*
Wyczerpanie. *Exhaustio*
Wymiar. *Dimensio*
Wyrocznia. *Oraculum*

Prze-

Przestroga. Na Tablicy VI. Fig. 3. opuszczone są litery, p, q, które wpisać należy na końcach linii naybliższey równoodległey od linii PQ.

OMYŁKI DO POPRAWIENIA

Karta.	*Wiersz.*	*Stoi.*	*Popraw.*
18	3	(BD. (AC.	AC, BD.
27	-	*Fig.* 2.	*Fig.* 3.
57	19	be. -	bc.
59	20	Dost: -	Dostyczney
	22	Dost.	Dostawy
79	5	$1\frac{1}{3}$ -	- $3\frac{1}{3}$.
100	przedostatni wiersz cały zmazać.		
108	5	GE. -	GF.
-	7	GF. -	GH.
-	25	Równoległobokow	Równoległoboku.
120	- 24	z ich -	ich.
133	1	Które y -	którey.
155	- 17	abc -	aby
175	22	powierzchni	na powierzchni
188	- 7	ściętego -	całego.
197	- 12	pośrodka -	od środka
215	- 11	utworzony	utworzona
218	- 26	iaki -	iak i
225	6	C : b.	B : b.
236	5	do powierzchni	do powierzchni podstawy

CZĘSC

CZĘSC DRUGA

O Bryłach.

WSTĘP.

W Części pierwſzey ſamemi tylko zatrudnialiśmy ſię liniiami i powierzchniami; lubo iakażkolwiek *rozległość* (extenſio) będzie rzeczy iakiey, nie ieſt ona ani ſamą liniią, ani ſamą powierzchnią, ale ſię rozciąga wzdłuż, w ſzerz i wgłąb. I tak, pokòy naprzykład, ma ſwoię długość, ma ſzerekość, i wyſokość, czyli grubość. Tarcica, choćby naycieńſza, ma także długość, ſzerokość i grubość. Nie byłoby powierzchni, tey tarcicy, to ieſt: nie byłoby rozległości iey, uważaney co do długości tylko, i ſzerokości, gdyby nie było tarcicy uważaney co do wſzyſtkich iey wymiarów. Powierzchnia ogranicza rozległość, i onę kończy; aby zaś granica iakiey rozległości była w ſamey rzeczy, trzeba ażeby i ta rozległość była. Nie byłoby więc powierzchni, gdyby nie było rozległości, którą kończy; tak iak (mowiąc przez podobieńſtwo lubo dalekie) nie byłoby koloru naprzykład w ſuknie, gdyby nie było ſukna.

Podobnym ſpoſobem, lubo częſto nie uważaliśmy tylko długość iakiey rozległości (cośmy nazywali liniią) niemaſz iednak tey długości, ieżeli niemaſz powierzchni, którą ona kończy, lub na którey może być w rzeczy ſamey ciągnioną. Nie będzie więc długości, gdy nie będzie powierzchni; a że nie będzie powierzchni, ieżeli nie będzie rozległości maiącey trzy wymiary; więc i linii nie będzie, tylko tam, gdzie ieſt rozległość, z trzema wymiarami.

Gdy ſię kto bawi około rozległości, ile ta trzy wymiary w ſobie zamyka, w takim razie mowi ſię, iż ſię bawi około *Ciała* (Corpus) albo *Bryły* (Solidum.)

Geome-

Geometrya nieuważa inaczey Ciała, tylko ile to rozciągnione ieſt w zdłuż, w ſzerz, i wzwyż albo w głąb; innemi zaś własnościami iego cale ſię nie zatrudnia, zoſtawuiąc ie do uważania Fizykom. Lubo zaś zdaie ſię, iż ſobie ściśle nader w uważaniu ciała założyli granice Geometrowie, maią iednak obſzerne i tak pole dochodzenia wielu bardzo prawd okrytych których wiadomość po więkſzey części koniecznie ieſt potrzebna chcącemu w Fizyce poſtąpić.

Nie ſami tylko Geometrowie, uważaiąc ciała, iednę ſobie w nich własność, to ieſt rozległość za cel wyſtawuią. Jeſt to, a przynaymniey być powinien, powſzechny poſtępowania ſpoſob, że gdy kto rzecz iaką z gruntu chcę poznać, i poiąć; po części nayprzod iey własności uważa, a dopiero łączy ie razem, i dokładnieyſzey o rzeczy całey nabywa wiadomości. Rozum ludzki nadto ieſt ograniczony, aby wiele poſpołem nieznanych ieſzcze własności mogł dochodzić, a tym bardziey ie ogarnąć.

Skutek takowego własności rzeczy z oſobna dochodzenia, tym więkſzey ieſt wagi, im więcey rzeczom taż wła-

wizor iezdzić ma, azeby tym ſpoſobem dozor na Komorze nieuſtanny ſność ſłużyć będzie; a taką własnością ieſt rozległość. Cokolwiek pod zmyſły naſze podpada i podpadać może, wſzyſtko to ieſt rozległym; cokolwiek więc odkryie tym ſposobem Geometra, może to do wſzyſtkich rzeczy przyſtoſować, które tylko pod zmyſły naſze podpadaią, lub im poddane być mogą. A ztąd ſię okazuie ważność w wynalazkach Geometrycznych, i obfitość w przyſtoſowaniu onychże.

Lubo maiąc wzgląd na ſłabość poięcia ludzkiego, iednę tylko własność ciała uważa Geometra, dla większey ieszcze iak wygody i tę ieſzcze dzieli nieiako na części, i w myśli ie oſobno ſtawia, chociaż w rzeczy ſamey oſobno ſię nie znayduią. Nie ma względu rolnik na grubość ziemi w tym mieyſcu, gdzie rolą ſwoię uprawia. Dosyć mu na tym, że ta grubość ieſt doſtateczna do przyięcia ziarna, do doſtarczania ſoku i do rozwinienia ſię tegoż ziarna. Wielkość pola znać oſobliwiey ſtara ſię, aby wiedział, ile na nim ziarna poſiać może, a zatym powierzchnią ſwego pola, bez względu na grubość ziemi uważa. Tak i piſzący, miarkuie wielkość powierzchni papieru, końcem zmieſzczenia na nim tego, co ma pifać: nie wchodząc w iego grubość, i dosyć maiąc na tym, że mu atramentu nie przebiia.

Jakożkolwiek mała będzie grubość ciała iakiego, wfzelako iednak, ciało to, dwie ftrony odmienne, przeciwne fobie mieć mufi, i iedna z nich odłączyć fię w rzeczy famey może od drugiey, luboby nie znalazło fię fposobne narzędzie do uczynienia tego rozłączenia. Ciało więc chociaż naycieńfze, nie może być za iedno brane, co powierzchnia; a zatym nie prawdziwie rzecz wykładaią niektórzy Geometrowie. gdy mowią: że ciało albo bryła fkłada fię z powierzchni, położonych iednych na drugich; bo iakażkolwiek byłaby liczba tych warft, z których ciało złożone uważamy, każda iednak wfzczegulności ta warfta byłaby bryłą, a nie powierzchnią, ponieważ miałaby dwie ftrony przeciwne, i mogące fię od fiebie odłączyć.

Co fię zaś powiedziało o powierzchniach, to i o liniiach, twierdzić należy; że nie dla tego fą od Geometrów uważane, iakoby w rzeczy famey znaydowały fię, ale tylko dla łatwości i wygody, dy. Nie wiele ſw to wchodzi podróżny, iak ſzeroka ieſt droga, którą ma przebyć, dosyć mu na tym, iż ſię nią udać może. Liczba kroków, które ma czynić nie zawiſła od ſzerokości, ale od ſamey długości tey drogi; tę przeto długość ſzczegulniey uważa.

Niechby była bardzo mała ſzerokość powierzchni iakiey, naprzykład Równoległoboku, i niechby ta ſama tak mała ſzerokość podzielona była na iak naywięcey części, przez linie równoodległe od długości, wſzelako każda z tych części będzie powierzchnią, i chociażby iak naymnieyſza była odległość dwóch liniy, które tę ſzczupłą powierzchnią kończą, za iednę iednak liniią wziąść ich nie można; a ztąd łatwo każdy widzi, iako to wyrażenie ieſt niedokładne a bardziey ieſzcze fałſzywe; że powierzchnia ſkłada ſię z liniy położonych iednych przy drugich.

Nakoniec zdarzaią ſię przypadki, gdzie nie potrzeba nawet uważać przeciągu całey linii, ale koniec iey tylko ieden, lub obadwa, albo zgoła to, co dzieli dwie iey części. W takim razie mówi ſię, że Geometra ſamym ſię zatrutrudnia *punktem*. Punktu w ſamey iſtocie niemaſz, ieżeli niemaſz linii, którą punkt kończy, albo iey części, które oddziela. Podróżny cel ſwoiey drogi, iak punkt iaki ſobie wyſtawia, wielkością iego cale ſię nie zaprzątaiąc, aż poki do niego nie doydzie, doſzedłſzy, uważa dopiero obſzerność mieyſca, do którego dążył. Niemaſz wierzchołka kąta, ieżeli nie będzie dwóch liniy ten kąt czyniących. Uwagi nad którémi ſię zaſtanawia Geometra czyli to, co do położenia punktów iednych względem drugich, czyli względem linii iakiey, pochodzą z ſamego wyſtawienia ſobie w myśli tych rzeczy w iſtocie ſię nie znayduiących, dla łatwieyſzego doyścia tego, czego ſzuka.

Jakożkolwiek mała będzie rozległość względem zmyſłów naſzych, lub względem wielkości ciał, które nam nayczęściey pod zmyſły podpadaią: wſzelako można oddalić myślą tę małość względem innych większych rzeczy, i uważać ciało choćby też naymnieyſze, iak gdyby wielkim bardzo było, a to względem tyſiączney naprzykład części ſwoiey.

Niech będzie iak naymnieyſza liniia, tey linii koniec ieden, zawſze różnić ſię

bę-

będzie od drugiego. J znowu niechby kto na iak naywięcey części podzielił iaką liniią, każda z tych części dwa końce odmienne mieć będzie, a ztąd poznać można, iak nie prawdziwe ieſt to wyrażenie; że liniia ſkłada ſię z punktów przy ſobie położonych.

Wyſtawuiąc ſobie Geometra pod temi różnemi poſtaciami rozległość, uprzedzać tym ſamym zdaie ſię te trudności, które częſto zwykły bywać zarzucane o prawdziwey *bytności* (exiſtentia) tych rzeczy, które ſą celem iego nauki.

Powierzchnia płaſka, ieſt powierzchnią, na którey ku wſzyſtkim ſtronom liniie proſte prowadzić można: i takiemi to liniiami i powierzchniami dotąd zatrudnialiśmy ſię, których wſzyſtkie części na teyże ſamey *Płaſzczyznie* zoſtaią (in eodem Plano). W części naſtępuiącey takie nadto liniie i powierzchnie zabawić nas będą, które na odmiennych płaſzczyznach znayduią ſię.

Z dwoiakiemi liniiami mieliśmy ieſzcze do czynienia, z proſtemi i z kołowemi, lub ich częściami. Powierzchnię także, około których bawiliśmy ſię,

były

były albo zakończone liniiami proftemi, albo liniią kołową, albo liniiami pròftemi, i częściami liniy kołowych. W części naftępuiącey będziemy nadto zabawiać fię różnemi powierzchniami *krzywemi* (curva) które wyftawić fobie można iak gdyby początek miały z obrotu powierzchni płafkich, które iużeśmy roftrząfali. Obaczemy to w fzczegulności, gdy o każdey takiey powierzchni mowa będzie.

Co fię zaś tycze *Brył*; te dwoiakiego gatunku zabawiać nas będą; iedne, które fą zakończone powierzchniami płafkiemi, drugie, które fię kończą powierzchniami krzywemi albo częścią krzywemi, częścią płafkiemi.

Geometrya więc, ieft to nauka, która fię zabawia famą rozległością.

Liniie profte dwoiakośmy uważali, raz co do ich wielkości, drugi raz co do ich położenia iednych względem drugich. W pierwfzym względzie przyrównywaliśmy iedne do drugich, albo profto zaraz, albo przez fpolną im miarę, do którey ftofowaliśmy każdą z ofobna liniią. W drugim względzie, albo liniie

z fobą

z sobą się spotykały, i ztąd początek kątów, i ich podziałów; albo się też nie spotykały.

Nauczyliśmy się dawać linii iedney względem drugiey iakiekolwiek do upodobania położenie: to iest robić kąt iakikolwiek dany, lub pociągnąć równoodległą od linii daney. Wyznaczyliśmy mieysce wierzchołków, kątów iakichkolwiek danych, których ramiona przechodzą przez dwa punkta dane, i wiele ztąd użytecznych używań wywiedliśmy. Nie mogąc zaś dokładnie wyznaczyć stosunku okrągu koła do linii prostey, przybliżyliśmy iak naybardziey stosunek ten do prawdziwego. Widzieliśmy oraz, że porównanie okręgów iednych do drugich, nie zawisło od porównania okręgu z liniią.

Co do powierzchni; przytoczyliśmy nayprzód przypadki, w których dwie figury mogą przystać do siebię. Widzieliśmy, że to przystawanie zawisło iedynie od wielkości i położenia liniy iednych względem drugich, to iest, że tylko takie dwie figury przystać mogą do siebie, w których boki iednakowey są wielkości iedne względem drugich, i

iedna-

iednakowego położenia. Jednym z nayznamienitszych przystosowań było przeniesienie, czyli przerysowanie iakieykolwiek figury prostokreślney. Widzieliśmy także, iż wielkość figur prostokreślnych nie zawisła od wielkości i położenia ich boków, gdyż Troykąty, lub Równoległoboki, byleby iednakowe miały podstawy, i wysokości, są równe; równe też będą, tak dwa naprzykład Troykąty, ako i dwa Równoległoboki, gdy ich podstawy będą w stosunku odwrotnym ich wysokości; Nadto równość w wielkości figur nie tylko nie zawisła od wielkości i położenia boków, ale nawet ani od ich liczby; ponieważ Tróykąt, Równoległobok, i kwadrat może być tak zrobiony, że się równać będzie iakieykolwiek figurze daney prostokreślney; może iesżcze zrównany być z summą lub różnicą figur innych prostokreślnych.

Można też przez przybliżenie porównać koło z figurą iaką prostokreślną, i zrysować takie koło, któreby mało co różniło się od iedney lub więcey figur prostokreśnych; dokładnie zaś można mieć koło równe innemu danemu, lub wielu innym kołom także danym.

Lubo

Lubo wielkość figury nie ieſt tym ſamym wyznaczona, że wyznaczony ieſt iey obwód i położenie boków; podany iednak mieliśmy ſpoſób ieden z naywygodnieyſzych, wykryślenia figury proſtokreślney o ilukolwiek bokach danych, maiąc dany iey obwód, widzieliśmy oraz granice, w których przy nie powiękſzonym obwodzie, powierzchnia figury być może powiękſzona; lubo zmnieyſzenia iey nie ma żadnych granic.

Z podobieńſtwa położenia liniy, które kończą figurę, i z proporcyonalności tychże liniy wynikało wiele twierdzeń, a z tych znowu wiele wniosków, i przyſtoſowań. Szczególniey zaś wynikało, przenieſienie na papier, działań na ziemi częſtokroć nierówney odprawionych; które to przenieſienie dokładnieyſzym i łatwieyſzym ieſzcze ſtawało ſię, używſzy rachunku.

W tym wſzyſtkim, co ſię dotąd mówiło, nie wſpomniało ſię tylko o linii proſtey, i o linii kołowey, o powierzchniach płaſkich zakończonych przez liniie proſte, albo przez liniie kołowe, lub ich części; o bryłach obwiedzionych powierzchniami płaſkiemi, albo krzy-

wemi

wemi, maiącemi swoy początek od powierzchni płaskich. Ta część Geometryi, nazywa się *Geometryą początkową* (Geometria Elementaris) służy ona za fundament koniecznie potrzebny do innych części zawilszych, z których się składa *Geometrya wyższa*; (Geometria sublimis), a w tey rzecz iest o rozmaitych innych liniiach krzywych, o powierzchniach przez nie zakończonych i o wielu bardzo takich bryłach, których początek czasem można, a czasem nie można wyprowadzić z tych ostatnich liniy krzywych, lub z powierzchni niemi zakończonych.

Różni się też Geometrya początkowa od wyższey, i co do sposobu rysowania figur do niey należących; w Geometryi albowiem początkowey, dosyć iest na cerklu i linii do wykreślenia figur iey własnych; każde przeto zagadnienie, które z pomocą tych dwóch tylko narzędziów może być rozwiązane, do niey należy. Jeżeli zaś zagadnienie, mogąc być rozwiązanym, z pomocą samey linii i cerkla, to iest przez same linie i łuki koła, rozwięzuie się z użyciem innych ieszcze narzędziów, albo liniy krzywych, odmiennych od koła, o tako-

takowym rozwiązaniu mówić się zwykło, iż nie iest wykonane sposobem zadosyć czyniącym.

ROZDZIAŁ I.

O położeniu tak Liniy iako i Płaszczyzn iednych względem drugich.

1. *Twierdz:* 1. Gdy liniia ma dwa swoie punkta, na iedney płaszczyznie, ma ie oraz i wszystkie na teyże płaszczyznie.

Dowodz: Liniia prosta wyznacza się przez dwa punkta; a zatym liniia prosta poprowadzona przez dwa punkta dane, na daney także płaszczyznie zniydzie się z każdą inną prostą, przez też dwa punkta poprowadzoną, i iednę z nią liniią uczyni.

2. *Twierdz.* Przez liniią prostą i punkt gdziekolwiek dany, może zawsze przechodzić iedna płaszczyzna.

Dowodz Wystawmy sobie myślą, iż przez tę liniią przechodzi iakakolwiek płaszczyzna; niechay ta płaszczyzna obraca brąca ſię około teyże linii, w tym obrocie przeydzie przez punkt dany, a w przechodzeniu będzie tą ſamą płaſzczyzną, którey ſzukamy.

Można także i przez dwie liniie przecinaiące ſię (a) przeprowadzić płaſzczyznę; ponieważ płaſzczyzna przechodząca przez iednę z tych liniy i przez ktòrykolwiek punkt drugiey, przechodzi razem i przez przecięcie tych dwóch liniy, i przez punkt należący do drugiey linii, a zatym i druga ta liniia cała ieſt na teyże płaſzczyznie.

Można nakoniec i przez trzy boki Tróykąta przeprowadzić płaſzczyznę. Jakoż płaſzczyzna przechodząca przez dwa boki Tróykąta, przechodzi też i przez dwa punkta, w których trzeci bok przecia

---

(a) *Mówię.* przecinaiące ſię, *bo wiele ieſt liniy, których położenie ieſt takie, że przez nie nie może razem przechodzić iedna płaſzczyzna; na przykład w koſtce od grania, tak ieſt położone ramie iedno kąta, na iedney ſtronie, i bok przeciwny drugiemu ramieniu tegoż kąta, na inney ſtronie, że przez te dwie linie iedna płaszczyzna przechodzić nie może.*

cina tamte dwa, a zatym i ten trzeci bok na teyże ieſt płaſzczyznie.

3. *Twierdz.* 3. Gdy ſię dwie płaſzczyzny przecinaią, tym ſpólnym ich przecięciem, ieſt liniia proſta.

Dowodz. Weźmy na tym ſpólnym przecięciu dwa iakiekolwiek punkta, i poprowadźmy przez nie, na iedney z dwóch płaſzczyznie, liniią proſtą; ta liniia będzie miała na drugiey płaſzczyznie dwa punkta do ſiebie należące, więc i cała będzie na teyże drugiey płaſzczyznie; a zatym będzie cała na obydwóch płaszczyznach, to ieſt będzie ſpolnym ich przecięciem.

To co ſię o płaſzczyznach powiedziało, można porównać z tym, co ſię linii tycze; to ieſt: liniia proſta wyznacza ſię przez dwa punkta, płaſzczyzna wyznacza ſię przez trzy punkta lub przez dwie linie przecinaiące ſię. Gdy znowu dwie linie wzaiem ſię przecinaią, punkt ſpòlnym ich ieſt przecięciem; gdy zaś przecinaią ſię dwie płaſzczyzny, ſpolnym ich przecięciem ieſt liniia proſta.

4. *Twierdz.* 4. Gdy liniia proſta do dwóch innych, które ſię przecinaią na

iedney

iedney płaſzczyznie, proſtopadłą ieſt w punkcie ich przecięcia, będzie też proſtopadłą i do każdey inney linii, przechodzącey przez ten punkt na teyże płaſzczyznie.

Można to nayprzod obiaśnić na karcie przełamaney. Liniia proſta, podług którey karta ſię przełamała, proſtopadłą ieſt do boków, części dwóch, tey karty przełamaney. Obracaiąc część iednę złamaną, około złamania, czyli ſpólnego przecięcia, bok ieden z dwóch, do którego liniia przecięcia była proſtopadłą, odmieniać będzie położenie, wſzelako iednak, na iedney zoſtanie płaszczyznie, i liniia przecięcia zawſze do niego będzie proſtopadłą. Ten przykład prawdę tę zmyſłom dosyć ukazuie, nie dosyć iednak ukazuie ią rozumowi.

Dowodz. Niech będą dwie liniie proſte, AB, CD, przecinaiące ſię w P, i niech do obydwóch proſtopadłą będzie liniia SP. Na płaſzczyznie przechodzącey przez te dwie linie, przeciągnąwſzy przez punkt P. iakązkolwiek liniią EF, do tey linii będzie też proſtopadłą liniia SP. *Tab. I. Fig. 1.*

B Weźmy

Weźmy linije równe: PA, PB, i znowu PC, PD, także równe. Poprowadźmy BD spotykaiące liniią EF, w punktach AC, E, i F.

Ponieważ Tróykąty: APC, BPD, maią dwa boki równe iedne względem drugich, i kąty między temi bokami zawarte, także równe, więc mogą przystać do siebie; a w szczegulności kąt PAC, równy iest kątowi PBD. Przeto i Tróykąty APE, BPF iako maiące równe boki: PA, PB, i kąty równe iedne względem drugich, mogą też do siebie przystać, a wszczegulności, równe są w nich boki PE, PF, i AE, BF.

Pociągniymy ieszcze linije SA, SB, SC, SD; Tróykąty prostokątne SPA, SPB, maią bok spolny SP, i boki PA, PB, równe: a zatym mogą do siebie przystać, a w szczegulności linije SA, SB, są równe. Podobnie równe są i linije SC, SD. Dwa więc Tróykąty CSA, BSD, których boki wszystkie równe są iedne względem drugich, mogą do siebie przystać, a wszezegulnoćci kąty SAC, SBD są równe.

Poprowadziwszy SE, SF; Tróykąty: SAE, SBF maią boki SA, AE, równe

wzglę-

względem boków SB, BF. i kąty między temi bokami zawarte, równe; więc mogą do siebie przystać; a wszczegulności równe są linije, SE, SF.

Więc w Tróykątach SPE, SPF, równe są boki w iednym, względem boków drugiego, a zatym i te przystać mogą do siebie; a wszczegulności kąt SPE, równa się kątowi SPF; a że są kątami przyległemi, czynią razem dwa kąty proste; każdy z nich przeto będzie kątem prostym; a zatym liniia SP, będzie też prostopadłą i do linii EF.

To Twiedzenie bardziey w dowodzeniu długie niż trudne, powinno być obiaśnionym przez figurę z papieru grubszego, lub z drewna, i z nici; lub w inny sposob. Toż rozumieć trzeba i względem wszystkich prawie podań, w tey części zawartych.

5. *Defin:* Gdy liniia prostopadłą iest do wszystkich innych, które się w punkcie iey spadku przecinaią na płaszczyznie iakiey, o takiey linii mówi się, że iest prostopadłą do tey płaszczyzny; a zatym ieżeli liniia prostopadłą iest do

dwóch innych w punkcie ich przecięcia, na płaszczyznie, ta liniia prostopadłą iest i do tey płaszcyzny.

6. *Twierdz:* 5. *Wzaiemnie*, ieżeli liniia, prostopadłą iest do trzech innych liniy, które się w iednym iey puncie przecinaią; płaszczyzna ta, która przechodzi przez dwie z tych trzech linii przechodzi też i przez trzecią.

Tab. I. *Fig.* 1, Niech będzie linia SP. prostopadłą do linii PB, PD, PF, które przechodzą przez tenże sam punkt P, linii SP.

Niechay płaszczyzna iaka przechodzi przez liniią SP, i PF. Jakażkolwiek będzie liniia, w którey ta płaszczyzna, przecina drugą płaszczyznę przechodzącą przez linie PB, i PD, wszelako liniia SP będzie prostopadłą do tego spolnego przecięcia, a zatym gdyby liniia PF, nie była tym spólnym przecięciem, tedy liniia SP, byłaby prostopadłą do dwóch linii leżących na teyże co i ona płaszczyznie, to iest: byłaby prostopadłą do linii PF, i do drugiey ieszcze linii różney od PF przecinaiącey spolnie dwie płaszczyzny; co być nie może. Liniia więc PF. nie iest różna od spolnego przecięcia dwóch płaszczyzn SPF, BPD, a zatym iest tym

spol-

ſpolnym przecięciem, i przeto należy i do drugiey płaſzczyzny BPD; to ieſt ta płaſzczyzna BPD przechodząca przez liniie PB, PD, przechodzi też i przez liniią PF.

7. *Twierdz*: 6. Dwie liniie proſtopadłe do iedney płaſzczyzny, ſą od ſiebie równoodległe. *Tab. I.*

Niech będą dwie liniie BA, CD proſtopadłe do iedney płaſzczyzny, na którą ſpadaią w punktach B, i C, te dwie liniie ſo równoodległe. *Fig. 2.*

Poprowadzmy liniią BC, a od końca C ſpolnego linii BC, z liniią DC, proſtopadłą do płaſzczyzny, wyciągniymy na tey płaſzczyznie proſtopadłą CE, do BC, równą iakieykolwiek długości BA, wziętey na drugiey linii proſtopadłey do teyże płaſzczyzny. Poprowadźmy ieſzcze i liniie BE, AE. Dwa Tróykąty ABC, ECB, maią ſpólny bok BC, boki także BA, CE, równe, z wykryślenia, i kąty proſte: ABC, BCE; więc te Tróykąty mogą przyſtać do ſiebie, a w ſzczegulności liniie BE, AC, ſą równe. Dwa tedy Tróykąty ABE, ECA maią względem ſiebie równe wſzyſtkie boki,

azaa zatym przyſtać mogą do ſiebie; a w ſzczególności równe ſą kąty ABE, ACE; że zaś liniia AB, proſtopadłą ieſt do linii BE, (ponieważ wzieliśmy ią za proſtopadłą do płaſzczyzny przechodzącey przez liniie BC, BE) więc kąt ACE, ieſt też proſty; a zatym liniia EC proſtopadła do dwóch liniy CB, CD, z wykryślenia, ieſt też proſtopadłą i do linii CA. Przeto ta liniia CA ieſt na tey ſamey płaſzczyznie, co i liniie BC, CD. Aże płaſzczyzna przechodząca przez liniie AC, CB, przechodzi też i przez liniią AB, więc linie AB, CD, ſą na iedney płaſzczyznie; będąc zaś na iedney płaſzczyznie, że ſą proſtopadłemi do linii BC, więc od ſiebie równoodległemi będą.

Przeſtroga Aby łatwiey zrozumieć to dowodzenie, dobrze będzie przegiąć Figurę 2, w linii BC; tak, aby część iedna ABCD tey Figury, przypadała proſto nad drugą częścią BEC. Podobnie dopomagać można łatwieyſzemu wyobrażeniu i w innych Figurach, gdzie nie iedna zachodzi płaſzczyzna.

Uwaga W pierwſzey części cokolwiek ſię mówiło o liniiach równoodległych, zawſze to było w tym rozumieniu, że te liniie kreślone były, na tey

ſamey

ſamey płaſzczyznie, na ktòrey i każda inna liniia łącząca dwa ich punkta, leżała.

8, *Twiedz:* 7. Jeżeli dwie liniie ſą od ſiebie rόwnoodległemi, a iedna z nich proſtopadłą ieſt do iakiey płaſzczyzny, będzie i druga do teyże płaſzczyzny proſtopadłą.

Weźmy dwie liniie BA, CD za rόwnoodległe; eżeli iedna z nich nap: CD, ieſt proſtopadłą do iakiey płaſzczyzny, będzie do teyże płaſzyzny proſtopadłą i druga BA. *Tab. I. Fig. 2*

Na płaſzczyznie, do ktόrey wzieliśmy za proſtopadłą, CD, pociągniymy CB; będą do CB, proſtopadłemi obiedwie liniie AB, i CD. Na teyże płaſzczyznie niech będzie CE proſtopadłą do BC, i rόwną długości BA. Poprowadźmy ieſzcze AC, AE, BE. Całe dowodzenie na tym zawiſło, aby okazać, że kąt ABE ieſt proſtym, to ieſt, że liniia AB proſtopadła do linii BC, ieſt razem proſtopadłą i do linii BE, leżącey na tey ſamey płaſzczyznie, do ktόrey liniia CD ieſt proſtopadłą.

Dwa Trόykąty proſtokątne ABC, ECB. maią ramiona kąta proſtego rόwne iedne

dne względem drugich ; a zatym te dwa Tróykąty mogą przystać do siebie, a w szczególności linie AC, BE, są równe. Maią tedy dwa Tróykąty ABE, ECA, wszystkie trzy boki równe iedne względem drugich, i mogą zatym przystać do siebie; a w szczególności równe są kąty ABE, ACE, Płaszczyzna przechodząca przez dwie linie równoodległe AB, CD, przechodzi też tak przez liniią BC, iako i przez AC, więc linie DC, BC, AC, na iedney płaszczyznie leżą. A że linia CE iest prostopadłą do dwóch linii CD, BC; będzie też prostopadłą i do trzeciey linii CA ; a zatym kąt ACE iest prostym ; a że ten kąt, iest równy kątowi ABE, więc i kąt ABE, iest prostym.

Tab. I. 9. *Zagad:* Spuścić prostopadłą do płaszczyzny, z punktu nie na niey danego.

Fig. 3. Niech będzie taki punkt S, z którego spuścić trzeba prostopadłą na daną płaszczyznę.

Rozwiązanie. Na płaszczyznie daney nakreślmy iakąkolwiek liniią AB. Niech przez tę liniią i przez punkt dany S, przechodzi inna płaszyzna, na którey pociągniyciągniymy SD, prostopadłą do AB. Na daney płaszczyznie niech też będzie poprowadzona DP, prostopadła do AB; a przez linije SD, DP, niech przechodzi płaszczyzna, na którey niech będzie SP prostopadłą do linii DP; ta liniia SP będzie razem prostopadłą, którey szukaliśmy.

Wykreślenie służące do dowodzenia. Niech przez P, przechodzi liniia EF, równoodległa od AB.

Dowodz: Liniie SD, PD, z wykreślenia są prostopadłe do linii AB; więc liniia DB, wzaiemnie iest do obydwóch tych liniy prostopadłą; a zatym prostopadłą iest i do płaszczyzny przechodzącey, przez te dwie linije. Aże liniia EF równoodległą iest od linii AB, więc liniia EF iest też prostopadłą do teyże płaszczyzny SDP; a wszczególności prostopadłą iest do linii SP; i liniia SP, iest wzaiemnie do linii EF prostopadłą. Ze zaś liniia SP zrobiona była prostopadłą do linii PD, więc liniia SP iest razem prostopadłą do linii EF, i PD, które się przy iey spadku P, przecinaią na daney płaszczyznie, a zatym liniia SP, prostopadłą iest do teyże płaszczyzny.

10.

10. *Zagadn:* 2. Od punktu danego na płaszczyznie wynieść prostopadłą do teyże płaszczyzny.

Rozwiąz: Spuśćmy do płaszczyzny daney z punktu iakiegokolwiek nie na niey będącego, prostopadłą, a przez punkt dany poprowadźmy równoodległą od teyże prostopadłey.

11, *Uwaga* 1. Od punktu danego, iednę tylko prowadzić można prostopadłą, do płaszczyzny.

12. *Uwaga.* 2. Gdy liniia iaka nie iest ani na samey płaszczyznie, ani do niey prostopadłą; może być albo od niey równoodległą, albo tak, iak zechcemy do niey nachyloną.

Nayprzod. Jeżeli, spuściwszy z dwóch punktów linii iakiey, dwie prostopadłe na płaszczyznę, te prostopadłe będą sobie równe; tedy ta liniia od któréy są spuszczone, będzie równoodległa od płaszczyzny, na którą ie spuścilismy, to iest: nie spotka nigdzie tey płaszczyzny, choćby tak liniia, iako i płaszczyzna naydaley były przedłużone.

Powtore

Powtore. Niech będzie liniia SD. nie prostopadłą do płaszczyzny; ale niech spotyka płaszczyznę w punkcie naprz: D. Z punktu któregokolwiek tey linii naprz: z S, spuśćmy do tey płaszczyzny prostopadłą natrafiaiącą na nię w punkcie P, i poprowadźmy PD. Kąt SDP, nazywa się kątem *pochyłości* (angulus inclinationis) tey liniy SD, do płaszczyzny. *Tab. I. Fig. 2.*

Ten kąt iest naymnieyszym z tych wszystkich, które czynić może liniia SD, z iakąkolwiek inną liniią poprowadzoną na tey płaszczyznie, przez punkt D, i gdyby z punktu P, iako ze środka promieniem równym linii PD, nakryślony był okrąg koła, wszystkie liniie ciągnione od punktu S, do punktów tego okręgu, czyniłyby iednakowy zawsze kąt z tą płaszczyzną.

Ponieważ te podania są tylko do innych głownieyszych *pomocnicze* (subsidiariae) i łatwe do dowiedzenia, przestaie się tu na samym ich wyrażeniu.

13. *Twierdz:* 8. Gdy dwie liniie rownoodległe są od trzeciey, która na odmienney od nich leży płaszczyznie; te dwie

dwie liniie i od siebie równoodległe będą.

Tab: *I.* *Fig*: 4. Niech będą dwie liniie AB, CD, równoodległe od linii EF, będą te dwie liniie i od siebie równoodległemi. Od punktu któregokolwiek na linii EF, naprz: G, wyciągniymy, dwie do tey linii prostopadłe: GH GI, na płaszczyznach przechodzących przez tęż liniią EF, i przez AB, i CD. Ponieważ liniia EF, iest prostopadłą, tak do lini GH, iako i do linii GI, więc też będzie prostopadłą do płaszczyzny przechodzącey przez te dwie liniie. A że znowu dwie liniie AB, CB są równoodległe od linii EF, więc są obiedwie prostopadłe do płaszczyzny przechodzącey przez liniie GH, GI, a zatym są od siebie równoodległe.

14. *Twierdz*: 9. Gdy dwie liniie, które się przecinaią są równoodległe względem dwóch drugich, które się także przecinaią, kąt zawarty między dwiema pierwszemi liniami, równy będzie kątowi zawartemu między dwiema drugiemi.

Tab: *I.* *Fig*: 5. Niech będą dwie liniie AB, AC, równoodległe względem dwóch drugich

DE,

DE, DF; kąt BAC zawarty między dwiema pierwszemi, równy iest kątowi EDF zawartemu między dwiema drugiemi.

Weźmy równe liniie AB, DE, i równe także liniie AC, DF. Pociągniymy liniie AD, BE, CF, BC, EF.

Ponieważ linie AB, ED, są równe, i równoodległe, Czworokąt ABED będzie oraz Równoległobokiem, i liniie też AD, BE, bądą równemi, i równoodległemi.

Podobnie równe są i równoodległe liniie AD, CF; więc liniie BE, CF są też równe, i równoodległe, względem linii AD; a zatym równe są sobie, i od siebie równoodległe. Jest tedy Czworokąt BEFC, oraz Równoległobokiem, a w szczegulności równe są liniie BC, EF. Przeto Tróykąty BAC, EDF, boki trzy równe maią, iedne względem drugich, a zatym przystać mogą do siebie, a w szczegulności równe są kąty BAC, EDF.

15. *Przystosowanie.* Niech będą dwie płaszczyzny, które się przecinaią. Na każdey z tych płaszczyznie wystawmy prostopadłą, do spolnego ich przecięcia, wyprowadzoną od punktu któregokolwiek

wiek tegoż przecięcia. Kąt zawarty między dwiema temi proſtopadłemi, iednakowy zawſze będzie, choćiaż coraz inny na ſpolnym przecięciu punkt wybierać będziemy, do wyprowadzenia z niego tych proſtopadłych.

Defin: Jeſt przeto taki kąt zdatnym do wymierzenia pochyłości tych dwóch płaſzczyzn iedney względem drugiey. Gdy zatym kąt zawarty między temi dwiema proſtopadłemi, ieſt proſty, mówi ſię, że w takim razie *płaſzczyzna iedna ieſt proſtopadłą do drugiey.* Gdyby zaś kąt między temi dwiema proſtopadłemi zawarty, miał: 10°, 20°, 30° i t. d. w tym razie i dwie płaſzyzny zawierałyby kąty: 10°, 20° 30°, it. d.

Można ieſzcze i w inny ſpoſob, przeświadczyć ſię iako pochyłość dwóch proſtopadłych, wyciągnionych na dwóch płaſzczyznach, od iednego punktu linii przecięcia ſpolnego tych płaſzczyzn, odpowiada zawſze pochyłości tychże dwóch płaſzczyn. Wyſtawmy albowiem ſobie te dwie płaſzczyzny przyſtaiące do ſiebie, i leżące iedna na drugiey. Niech potym ſpodnia płaſzczyzna zoſtanie na ſwoim mieyſcu; a wy-a wyżſza niech ſię podnoſi, i obraca około ſpólnego przecięcia. Spolne przecięcie, podczas tego obrotu będzie zawſze proſtopadłe, do dwóch liniy proſtopadłych wyciągnionych na obydwóch płaſzczyznach, od iednego punktu; a zatym te dwie proſtopadłe zoſtaiące zawſze każda na ſwoiey płaſzczyznie, odpowiadać będą podczas tego obrotu, pochyłości dwóch płaſzczyzn. Gdy naprz: płaſzczyzna ruchoma, obieży połowę drogi, którą iey obeyść trzeba, aby ſię znalazła na drugiey ſtronie, w równi z płaſzyzną ruchomą, w ten czas i proſtopadła do ſpolnego przecięcia, znayduiąca ſię na płaſzczyznie ruchomey obieży połowę tey drogi, którą ma obeyść, aby ſię w iedney równi ſtykała końcem ſwoim z drugą liniią proſtopadłą, do ſpolnego przecięcia wyciągnioną na płaſzczyznie nieruchomey. Toż mówić i o innych częściach tego obrotu.

16. *Twierdz:* 10. Gdy iaka proſta liniia proſtopadłą ieſt do płaſzyzny, do tey że płaſzczyzny proſtopadłą będzie każda inna płaſzczyzna przez tę liniią przechodząca.

Niech

Tab: I. Fig: 6. Niech będzie liniia GP, proſtopadłą do iakiey płaſzczyzny, i niech przez tę liniią GP, przechodzi inna iakakolwiek płaſzczyzna; ta proſtopadłą będzie do pierwſzey płaſzczyzny.

Niech liniia AB, będzie ſpolnym tych dwóch płaſzczyzn przecięciem; od punktu P, przez pierwſzą płaſzczyznę wyciągniymy PC, proſtopadłą do tego ſpolnego przecięcia.

Ponieważ liniią GP, wzieliśmy za proſtopadłą do pierwſzey płaſzczyzny, więc GP proſtopadłą będzie tak do linii, AB, iako i do linii PC; bo te dwie liniie przechodzą przez pierwſzą płaſzczyznę; a zatym od punktu któregokolwiek nap: P. znayduiącego ſię na ſpolnym przecięciu dwóch tych płaſzczyzn, wyciągnowſzy, proſtopadłe PG. PC, do tegoż ſpolnego przecięcia, te liniie będą proſtopadłe iedna do drugiey; a ztąd proſtopadłe będą do ſiebie i te dwie płaſzczyzny.

17. *Wnioſek.* Gdy liniia iaka proſtopadłą ieſt do płaſzczyzny, a na teyże płaſzczyznie pociągniemy iakąkolwiek inną liniią, i do tey ſpuściemy drugą proſtopadłą

ſtopadłą od ſpodku pierwſzey proſtopadłey; poprowadziwſzy potym od któregokolwiek punktu pierwſzey proſtopadłey, liniią do punktu, w którym druga proſt opadła ſpotyka liniią pociągnioną na płaſzczyznie; ta oſtatnia liniia poprowadzona, proſtopadłą będzie do linii na płaſzczyznie pociągnioney.

Niech będzie SP, proſtopadłą do płaſzczyzny; pociągnyimy na teyże płaſzczyznie liniią AB, i ſpuśćmy do niey proſtopadłą PD od ſpodku P, linii SP. Poprowadziwſzy z punktu któregokolwiek, naprz: S, linii proſtopadłey SP, liniią SD, do punktu D, w którym proſtopadła PD ſpotyka liniią AB, ta liniia SD, będzie proſtopadłą do AB. *Tab: I. Fig: 3.*

Przez punkt P, przeciągniymy EF równoodległą od AB.

Ponieważ liniia SP proſtopadła ieſt do płaſzczyzny, daney, będzie też proſtopadłą i do EF znayduiącey ſię na tey płaſzczyznie; a wzaiemnie i EF będzie proſtopadłą do SP. Taż liniia EF, iako równoodległa od AB, ieſt też proſtopadlą do PD; a zatym będąc proſtopadłą tak do PD, iako, i do PS, będzie także proſtopaſtopadłą i do płaſzczyzny SPD przechodzącey przez te dwie liniie; więc i AB równoodległa od EF będzie też proſtopadłą do płaſzczyzny SPD, a wſzczegulności będzie proſtopadłą do linii SD, znayduiącey ſię na tey płaſzczyznie.

18. *Twierdz:* 11. Gdy płaſzczyzna iedna proſtopadłą ieſt do drugiey, a przez którykolwiek punkt iędney z tych płaſzczyzny pociągniemy proſtopadłą do drugiey, ta proſtopadła, padnie na ſpolne przecięcie tych dwóch płaſzczyzn.

Dowodz: Gdyby liniia SP nie padała na ſpolne przecięcie dwóch płaſzczyzn, tedy ſpuściwſzy z tegoż ſamego punktu S, proſtopadłą, do ſpolnego przecięcia, ta byłaby oraz proſtopadłą i do drugiey płaſzczyzny, a zatym dwie proſtopadłe z iednego punktu ſpuſzczone byłyby, na iednę płaſzczyznę, co być nie może.

19. *Twierdz:* 12. Gdy dwie płaſzczyzny proſtopadłe ſą do trzeciey, ſpolne przecięcie tychże dwóch płaſzczyzn, proſtopadłe też będzie do teyże trzeciey płaſzczyzny.

Dowodz: Od punktu, w którym liniia przecięcia dwóch pierwſzych płazczyzn,

ſpotyka

ſpotyka trzecią płaſzczyznę; pociągnąwſzy tak na iedney iak i na drugiey z dwóch pierwſzych płaſzczyzn proſtopadłe do dwóch liniy ſpolnego ich przecięcia z trzecią płaſzczyzną, te dwie proſtopadłe, proſtopadłemi też będą do trzeciey płaſzczyzny; a zatym gdyby te dwie proſtopadłe nie zeſzły ſię w iednę, i nie były w rzeczy ſamey iedną linią, która ieſt ſpolnym przecięciem dwóch pierwſzych płaſzczyzn, tedy od iednego punktu możnaby do iedney płaſzczyzny dwie proſtopadłe wyprowadzić; to zaś być nie może.

20. *Twierdz*: 13. Ggdy iedna linia proſtopadłą ieſt do dwóch płaſzczyzn, te dwie płaſzczyzny, nigdzie ſię z ſobą nie zeydą, choćby naydaley były przedłużone.

Dowodz: Gdyby te dwie płaſzczyzny mogły ſię ſpotkać z ſobą, tedy Tróykąt zrobiony z tey proſtopadłey i z dwóch liniy poprowadzonych od punktu iakiegokolwiek na ſpolnym przecięciu dwoch tych płaſzczyzn, do punktów w których proſtopadła ſpotyka też płaſzczyny, miałby dwa kąty proſte, co być nie może.

Defin: Dwie płaszczyzny, które nawet przedłużone spotkać się z sobą nie mogą, nazywaią się *równoodległemi.*

21. *Twierdz:* 14. Gdy dwie liniie są równoodległe względem dwóch drugich, płaszczyzna przechodząca przez dwie pierwsze liniie, będzie równoodległa od płaszczyzny przechodzącey przez dwie drugie liniie.

Tab. I. Fig. 7. Niech będą dwie liniie AB, AC równoodległe względem dwóch drugich DE,DF; płaszczyzna przechodząca przez liniie AB, AC, równoodległa będzie od płaszczyzny przechodzącey przez liniie DE, DF.

Z wierzchołku A, kąta zawartego między dwiema pierwszemi liniiami spuśćmy prostopadłą AG do płaszczyzny przechodzącey przez drugie dwie liniie, i od spodku G, tey prostopadłey poprowadźmy na teyże samey płaszczyznie liniie GH. GI, równoodległe względem liniy DE, DF.

Liniia AG, prostopadła do drugiey płaszczyzny, iest też prostopadłą, i do liniy GH, GI; a że liniie AC, GI, są obiedwie

biedwie równoodległe od linii DF, więc i od siebie są równoodległemi; a zatym liniia AG, iest także prostopadłą do linii AC. Tymże sposobem pokazać można, że liniia AG, iest też prostopałą i do linii AB. Więc ta liniia AG, iest prostopadłą do płaszczyzny przechodzącey, przez liniie AB, AC; a zatym i dwie płaszczyzny przechodzące iedna przez liniie AB, AC, druga przez liniie DE, DF, są obiedwie prostopadłe do teyże samey linii AG, a przeto są od siebie równoodległe.

22. *Twierdz*: 15, Gdy dwie płaszczyzny równoodległe od siebie przecina trzecia płaszczyzna, ich spólne przecięcia z trzecią płaszczyzną, będą też od siebie równoodległe.

Dowodz: Gdyby te spolne przecięcia, z trzecią płaszczyzną spotkały się gdzie z sobą, tedy punkt przecięcia tych dwóch przecięć, należąc tak do iednego iak i do drugiego spolnego przecięcia, dwóch płaszczyzn z trzecią, należałby też tak do iedney, iak i do drugiey z dwóch płaszczyzn przecinaiących trzecią; a zatym dwie płaszczyzny spotkałyby się gdzie z sobą, to iest nie byłyby, iak są, równoodległe.

23. *Twierdz*: 16. Gdy dwie płaszczyzny są od siebie równoodległe; liniia która

ra ieſt proſtopadłą do iedney, z tych płaſzczyzn, będzie proſtopadłą i do drugiey.

Tab. I. Fig. 7. Niech będą dwie płaſzczyzny równoodległe: BAC, EDF; i liniia AG proſtopadła, do iedney z tych płazczyzn nap: do pierwſzey; taż liniia proſtopadłą będzie i do drugiey płaſzczyzny.

Jeżeli liniia AG, nie ieſt proſtopadłą do któreykolwiek linii, takiey iak GH, przeciągnioney przez ſpodek G, teyże linii AG, który ieſt na płaſzczyznie EDF; tedy przeciągnąwſzy przez linie GH, AG, płaſzczyznę, któraby przecieła płaſzczyznę BAC, w linii AB; liniia AG będzie proſtopadłą do linii AB; więc liniie AB, GH, z których iedna ieſt, a druga nie ieſt proſtopadłą do linii AG, leżącey na teyże ſamey, co one, płaſzczyznie, ſpotkać ſię mogą z ſobą; a przeto i płaſzczyzny, na których leżą ſpotkać ſię też z ſobą mogą, i nie będą równoodległe; co ieſt przeciwko warunkowi,

24, *Twie*: 17. Gdy dwie liniie leżące albo nie leżące na iedney płaſzczyznie, przecięte ſą przez trzy równoodległe od ſiebie

pła-

płaſzczyzny, te liniie będą od tych płaſzczyzn przecięte proporcyonalnie.

Niech będą dwie liniie AB, CD, leżące, albo nie, na iedney płaſzczyznie; niech trzy płaſzczyzny rownoodległe przecinaią pierwſzą liniią w punktach, B, F, A, a drugą w punktach, C,G,D; będzie, BF : AF = CG : DG. *Tab. I. Fig: 8.*

Poprowadźmy liniią BD, ſpotykaiącą płaſzczyznę średnią w punkcie E.

Liniie EF, AD, ſą ſpolnemi przecięciami płaſzczyzny BAD, z dwiema płaſzczyznami rownoodległemi; więc te dwie liniie ſą od ſiebie równoodległe ; a zatym podobne ſą Tróykąty: BFE, BAD; przeto, BF : AF = BE : ED.

Dla teyże przyczyny podobne będą Tróykąty ; BDC , EDG, a zatym BE: ED = CG : GD. Więc też będzie, BF: AF = CG : GD.

Uwaga W tym razie tylko liniie BC, AD ſą równoodległe, i oraz liniie FE, EG, iednę czynią liniią, gdy liniie AB, CD na teyże ſamey płaſzczyznie znayduią ſię.

ROZDZIAŁ

ROZDZIAŁ II.

O Kątach Bryłowych,

DEfin: Wykreślmy iakikolwiek Wielokąt na płaszczyznie ; od każdego wierzchołka kąta w tym Wielokącie wyciągniymy linie do iednego punktu, nie na tey płaszczyznie będącego. Przy tym punkcie tyle się zrobi kątów znayduiących się na odmiennych płaszczyznach, ile Wielokąt nayprzód wykreślony, miał boków. Summa tych wszystkich *kątów płaskich*, nazywa się *kątem Bryłowym* (angulus solidus). Punkt, który iest spólnym wierzchołkiem wszystkich kątów płaskich, nazywa się: *wierzchołkiem* tego kąta bryłowego. Płaszczyzny na których się znayduią kąty płaskie, które ten wierzchołek czynią, nazwać można, *ścianami* (paries albo facies;) a zaś społne tych płaszczyzn przecięcia *krawędziami* (po Francuzku *Arrêtes.*)

Przestroga. W tym wszystkim, co się tu o kątach bryłowych powie, wystawiać sobie trzeba nie inne Wielokąty, iak tylko te, których krawędzie scho-

dząc

dząe się w ich wierzchołkach, same kąty wyskakuiące tam czynią (b).

Trzy rzeczy uważać można w kącie bryłowym: ściany albo kąty płaskie, które go tworzą, pochyłości wzaiemne tych ścian, i stosunek placu zawartego między temi ścianami, do placu całego, około wierzchołka kąta bryłowego; w podobny prawie sposób, iak też uważaliśmy wielkość kąta płaskiego, względem całego placu, około wierzchołka tegoż kąta, na iedney z tym placem płaszczyznie znayduiącego się. *Obacz niżey, co służy do ostatniey tey uwagi, w Rozdziale o kuli (Sphæra.)* Jako Wielokąt, w którego wierzchołkach kończą się krawędzie kąta bryłowego, może być na Tróykąty podzielony przez przekątne ciągnione od iednego z wierzchołków iego; tak też i kąt bryłowy iakikolwiek, podzielić można na inne kąty bryłowe, złożone z trzech tylko kątów płaskich. Przeto i Geometrowie nay-więcey się bawią około kątów bryłowych

(b) *Obacz o innych kątach bryłowych, Rozprawę P: Bermanna, pod tytułem* De angulis solidis Dissertatio Vitembergæ 1764.

wych, trzema kątami płaſkiemi określonych, aby doſzli pochyłości ścian, lub ich wielkości; a potym wiadome maiąc doſtatecznie te pochyłości i wielkości ścian, wyznaczaią kąt bryłowy, który ſię z tych ścian układa. Część ta Geometryi, w ktòrey o kątach bryłowych rzecz ieſt, pod tą, pod którą ie wyſtawuiemy poſtacia nazywa ſię Trygonometryą *kulną*, albo sferyczną. (Trigonometria ſpherica). Damy przyczynę tego nazwiſka, gdy ſię o kuli mówić będzie. Jeſt ta część koniecznie potrzebna Aſtronomom. Na daniu pierwſzych o niey początków, tu przeſtaniemy, i nie więcey mowić będziemy o kątach bryłowych, tylko tyle, ile wiedzieć potrzeba będzie dla zrozumienia podań ściągaiących ſię do ſamychże brył.

25, *Twierdz:* 1. W kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów płaſkich, ſumma dwóch z tych trzech kątów, większa ieſt od kąta trzeciego.

Tab. II. Fig. 1. *Dowodz*: Niech będzie kąt bryłowy w A zrobiony z trzech kątów płaſkich: BAC, BAD, CAD; którykolwiek z tych trzech kątów wzięty, mnieyſzy ieſt od ſummy dwóch innych.

Jeżeli

Jeżeli te trzy kąty ſą wſzyſtkie równe, iuż oczywiście dwa, większe ſą od iednego.

Jeżeli zaś kąt ieden nap: BAC, większy ieſt tak od kąta BAD, iak i od kąta CAD, tedy wſzelako mnieyſzy będzie od ſummy obydwóch.

Zróbmy albowiem na płaſzczyznie BAC, kąt BAE równy kątowi nap: BAD; i weźmy dwie długości równe AD, AE; na linii także AB, weźmy punkt którykolwiek, nap: B; Przez trzy punkta: B, D, E, niech przechodzi płaſzczyzna przecinaiąca krawędź AC w punkcie C.

Dwa Tróykąty: BAD, BAE, maią bok ſpolny AB, boki: AD, AE, równe, i kąty między temi bokami zawarte, równe; więc te Tróykąty mogą przyſtać do ſiebie, a wſzczególności, linie: BD, BE, ſą równe. Aże w Tróykącie, BDC, ſumma boków: BD, CD większa ieſt od trzeciego boku: BC, więc bok DC, większy ieſt od linii CE; a zatym Tróykąty: CAD, CAE maią bok ſpolny AC, boki: AD, AE, równe; podſtawa zaś DC, iednego większa ieſt od podſtawy CE, drugiego; więc kąt: CAD, w wierzchołku

pier-

pierwſzego Tróykąta, większy ieſt od kąta: CAE, w wierzchołku drugiego; więc i ſumma kątów: BAD, CAD, większa ieſt od ſummy kątów: BAE, CAE, to ieſt: większa od kąta BAC.

26. *Twierdz:* 2. W kącie bryłowym, ſumma wſzyſtkich kątów płaſkich, mnieyſza ieſt od ſummy czterech kątów proſtych. (c)

Dowodz: Wierzchołki Wielokąta, na których wſpieraią ſię wſzyſtkie krawędzie kąta bryłowego, ſą oraz wierzchołkami tylu innych kątów bryłowych zro-

bionych

(c) *Trzeba mieć na pamięci, że ſię tu nie mówi, tylko o kątach bryłowych, których krawędzie wſpieraią ſię na wierzchołkach Wielokąta, maiącego ſame tylko kąty wyſkakuiące. W przypadku od tego odmiennym, mogą być kąty bryłowe takie, w których ſumma kątów płaſkich, będzie większa od 4. kątów proſtych tyle, ile zechcemy. P. Le Sage Genewenczyk pierwſzy tę prawdę odkrył, która też pierwſza i ſama iedna zdaie ſię uchybienie zadawać Euklideſowi. Obacz Hiſtoryą Akademii Nauk Paryſkiey na Rok 1756.*

bionych przez kąty trzy płaſkie, ile ten Wielokąt ma wierzchołków; gdyż każde dwa z tych kątów płaſkich wchodzących w kąt ieden bryłowy, znayduią ſię przy podſtawach ścian tego kąta bryłowego, a trzeci takowy kąt należy do podſtawy kąta bryłowego w wierzchołku, to ieſt: do Wielokąta na którym ſię wſzyſtkie krawędzie kąta bryłowego w wierzchołku, wſpieraią.

Na każdey z tych ścian ſumma trzech kątów, iednego w wierzchołku, a dwóch przy podſtawie ściany, równa ſię ſummie dwoch kątów proſtych; a za tym ſumma wſzyſtkich kątów w wierzchołku i wſzyſtkich kątów przy podſtawach ścian, równać ſię będzie, dwom kątom proſtym tyle razy wziętym, ile ma ścian kąt bryłowy.

Summa dwóch kątów przy podſtawach ścian, większa ieſt od kąta trzeciego przy podſtawie kąta bryłowego, który kąt trzeci, z dwoma tamtemi robi kąt ieden bryłowy przy tey podſtawie; a zatym ſumma wſzyſtkich kątów przy podſtwach ścian wſzyſtkich, większa ieſt od ſummy wſzyſtkich kątów przy podſtawie kąta bryłowego.

Więc

Więc ſummie wſzyſtkich kątów, przy podſtawach ścian, mniey nie doſtaie do ſummy dwa razy tylu kątów proſtych, ile Wielokąt, czyli podſtawa kąta bryłowego, ma boków; niżeli ſummie wſzyſtkich kątów Wielokąta tego nie doſtaie do teyże ſummy dwa razy tylu kątów proſtych, ile ten Wielokąt ma boków.

A że ſummie kątów wſzyſtkich Wielokąta do przerzeczoney ſummy, brakuie 4. kątów proſtych, więc ſummie kątów wſzyſtkich przy podſtawach ścian, brakować będzie do teyże ſummy mniey niż 4. kąty proſte. Ze zaś ſumma wſzyſtkich kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, ſpełnia ten niedoſtatek mnieyſzy od 4. kątów proſtych, więc ſumma wſzyſtkich kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, mnieyſza ieſt od 4. kątów proſtych.

To Twierdzenie obiaśnić trzeba przez wiele przykładów ſzczegulnych, biorąc różne liczby ścian kąta bryłowego nap: 3. 4. 5. 6. i t. d. w których to razach, takoważ liczba 3. 4. 5. 6. i t. d. będzie wyrażać boki Wielokąta ſłużącego kątowi bryłowemu za podſtawę; ſumma zaś ką-

tow

tów Wielokąta będzie ważyć: 2, 4, 6, 8, i t. d. kątów prostych, a zatym summa kątów przy podstawach ścian będzie ważyć więcey niż 2, 4, 6, 8, i t. d. kątów prostych. Ze zaś summa tych ostatnich kątów wraz z summą kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, waży w tychże razach, kątów prostych 6, 8, 10, 12, więc summa kątów samych przy tym wierzchołku mnieysza iest, niż *nadmiar* (excessus) liczb.

6, 8, 10, 12, i t. d.

nad liczby - - 2, 4, 6, 8, i t. d.

To iest: ta summa kątów przy wierzchołku mnieysza iest od 4. kątów prostych.

Można prawdę tego Twierdzenia okazać i w sposób następuiący:

Obierzmy punkt iakikolwiek, wpośród Wielokąta, i pociągniymy od niego linije do wszystkich wierzchołków tego Wielokąta. Summa wszystkich kątów, około tego punktu, zrówna summę 4. kątów prostych. Wynieśmy teraz myślą ten punkt nad płaszczyznę Wielokąta,

podług

podług ciągu linii proſtopadłey do tey płaſzczyzny. Im bardziey ten punkt oddalony będzie od wierzchołków Wielokąta, tym bardziey zmnieyſzy ſię każdy kąt przy tym punkcie, zawarty między liniiami, od niego poprowadzonemi do wierzchołków Wielokąta; a zatym tym mnieyſza będzie ſumma wſzytkich kątów przy tym punkcie, od ſummy pierwſzey 4. kątów proſtych.

27. *Przyſtoſowanie.* Pięć tylko ieſt gatunków kątów należących do Wielokątów foremnych, z których może ſię złożyć kąt bryłowy.

1. W kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów Tróykąta równobocznego, każdy taki kąt ważyłby $\frac{2}{3}$ kąta proſtego, a zatym ſumma ich ważyłaby 2. kąty proſte.

2. W kącie bryłowym, złożonym z czterech kątów Tróykąta równobocznego, ſumma takich kątów, ważyłaby $2\frac{2}{3}$ kąty proſte.

3. W kącie bryłowym, złożonym z pięciu kątów Tróykąta równobocznego, ſumma takich kątów ważyłaby $3\frac{1}{3}$ kąty proſte.

Sześć

Sześć kątów Tròykata równobocznego, waży kątów prostych cztery. Są one zdatne do napełnienia placu, około punktu iakiego na płaszczyznie, nie zaś do zrobienia kąta bryłowego. Summa więcey niż sześciu takowych kątów, ważyłaby też więcey niż cztery kąty proste.

4. W kącie bryłowym złożonym z trzech kątów kwadratu, każdy takowy kąt, byłby kątem prostym, a zatym summa takowych kątów równałaby się summie 3 kątów prostych; summa 4 kątów kwadratu, byłaby summą 4 kątów prostych; a przeto z 4 takowych kątów składać się nie może kąt bryłowy, daleko zaś bardziey składać się nie może z większey liczby takich kątów.

5. W kącie bryłowym, złożonym z trzech kątów, Pięciokąta foremnego, każdy takowy kąt ważyłby $1\frac{1}{5}$ kąt prosty; a zatym summa ich ważyłaby $3\frac{3}{5}$ kąty proste.

Summa czterech takowych kątów, a tym bardziey więcey niż czterech ważyłaby więcey, niż cztery kąty proste.

Summa trzech kątów Sześciokąta foremnego waży cztery kąty proste, a zatym żaden kąt bryłowy nie złoży się z samych kątów Sześciokąta foremnego; tym bardziey zaś żaden kąt bryłowy składać się nie może z samych kątów należących do Wielokątów foremnych, które więcey niż sześć boków maią.

Jeżeli tedy znayduią się bryły iakie, których ścianami są Wielokąty iednakowego tylko gatunku, takich brył gatunków, więcey iak pięć być nie może.

Bryła, którey każdy kąt bryłowy złożony iest z trzech kątów Tróykąta równobocznego, ma 4. ściany, z których każda iest Tróykątem równobocznym, i 4 kąty bryłowe. Nazywa się *Czworościanem* (Tetràëdrum).

Bryła, którey każdy kąt złożony iest z 4. kątów Tróykąta równobocznego, ma ścian 8, z których każda iest Tróykątem równobocznym, i 6. kątów bryłowych. Nazywa się *Ośmiościanem* (Octòëdrum.)

Bryła, którey każdy kąt złożony iest z 5 kątów Tróykąta równobocznego, ma ma 20. ścian, z których każda ieſt Tróykątem równobocznym, i 12, kątów bryłowych. Nazywa ſię *Dwudzieſtościanem* (Icosaédrum.)

Bryła, którey każdy kąt złożony ieſt z 3 kątów kwadratu, ma 6 ścian, z których każda ieſt kwadratem, i 8 kątów bryłowych. Nazywa ſię *Sześcianem* (Hexaédrum,) a zwyczayniey (*Cubus.*)

Bryła, którey każdy kąt złożony ieſt z 3 kątów Pięciokąta foremnego, ma 12 ścian, z których każda, ieſt Pięciokątem foremnym, i 20 kątów bryłowych. Nazywa ſię *Dwunaſtościanem* (Dodecaédrum.)

Doſyć będzie pokazać uczniom takie bryły, nie wchodząc w obſzerne w tey mierze rozwodzenia ſię, które więcey ſamey ciekawości dogadzaią, niż pożytek przynoſzą. Te bryły, gdy wſzyſtkie kąty maią równe, i wſzyſtkie ściany foremne, i mogące przyſtać iedne do drugich, nazywaią ſię bryłami *foremnemi.*

Gdyby w kącie bryłowym pomieſzać chcieliśmy różne kąty Wielokątów foremnych, końcem złożenia tegoż kąta bryłowego, liczba takich kątów płaskich, mogłaby być do upodobania powiększona.

28. *Twierdz: 3.* Gdy dwa kąty bryłowe złożone są z trzech kątów płaskich, równych iednych, względem drugich; pochyłości ścian, tychże kątów bryłowych równe też są iedne względem drugich.

Tab. II Fig. 2. Niech będą dwa kąty bryłowe: ABCD, abcd złożone z równych kątów względem siebie: BAD, bad, BAC, bac, DAC, dac; pochyłości płaszczyzn równe też będą iedne względem drugich; nap: pochyłość płaszczyzny BAD do BAC, równa iest pochyłości płaszczyzny bad, do bac.

Wykreśl: Weźmy równe liniie AB, ab, na płaszczyznach: BAD, bad: wynieśmy do AB prostopadłą BD, a do ab, prostopadłą bd. Na płaszczyznach także BAC, bac, wyprowadzmy do tychze linii AB, ab, prostopadłe: BC, bc. Kąty CBD, cbd, będą kątami pochyłości płaszczyzn BAD, BAC, i bad, bac; a zatym dowieść należy, że te kąty: CBD, cbd, są równe.

Dowodz:

Dowodz: Dwa Tróykąty DBA, dba ſą proſtokątne w B i b; maią równe kąty BAD, bad, i boki: AB, ab, równe; więc mogą przyſtać do ſiebie; a wſzczegulności, liniie: BD, bd ſą równe, iako też i liniie AD, ad.

Dla teyże przyczyny i Tróykąty BAC, bac przyſtać do ſiebie mogą, a wſzczegulności liniie BC, bc, ſą równe, iako też i liniie AC, ac.

Więc Tróykąty CAD, cad, maią boki AC, ac równe; i boki AD, ad także równe, a maiąc oprocz tego i kąty między temi bokami zawarte, równe, przyſtać do ſiebie mogą; wſzczegulności zaś liniie CD, cd, ſą równe.

Więc Tróykąty: CBD, cbd, maią wſzyſtkie boki równe, iedne względem drugich, a zatym do ſiebie przyſtać mogą; a wſzczegulności kąty: CBD, cbd, ſą równe.

29. *Twierdz:* 4. Gdy dwa kąty bryłowe, ſkładaią ſię z trzech kątów płaſkich, które równe ſą iedne względem drugich, takie kąty bryłowe, mogą przyſtać do ſiebie.

Niech będzie kąt bryłowy w A. złożony z trzech kątów płaskich: BAD, BAC, DAC, równych względem kątów płaskich: bad, bac, dac, z których się składa kąt drugi bryłowy w *a*.; te dwa kąty bryłowe, mogą przystać do siebie.

Wystawmy sobie w myśli drugi z tych kątów, iakoby przeniesiony, tak; aby wierzchołek a, przypadł na wierzchołek A; liniia zaś ab aby leżała na linii AB. Ponieważ kąty: BAD, bad, wzięte są za równe, liniia więc ad, będzie też leżeć na linii AD.

Aże trzy kąty płaskie w *a*, równe są trzem kątom w A; równe więc będą pochyłości płaszczyzn BAD, BAC, i płaszczyzn bad, bac; a zatym płaszczyzna bac, leżeć będzie na płaszczyznie BAC. Dla równości zaś kątów bac, BAC, liniia ac leżeć będzie na linii AC; więc tak liniia ad, leży na linii AD, iak i ac na AC; a zatym płaszczyzna cad przystanie do płaszczyzny CAD; przystaną tedy do siebie te dwa kąty bryłowe.

3°. *Wniosek.* Kąt bryłowy, określony trzema kątami płaskiemi, iuż tym samym iest wyznaczony, gdy mamy wiadome te trzy kąty płaskie.

Możnaby

Możnaby też pokazać, że z trzech kątów płaskich czyniących kąt bryłowy maiąc wiadome dwa z tych kąty, i pochyłość ich ścian, wyznacza się także kąt bryłowy; iako też z wiadomey tylko pochyłości wszystkich trzech ścian tego kąta.

Te iednak ostatnie podania, iż nie służą do naszego zamierzenia, przeto dosyć iest tu o nich tylko namienić.

31. *Zagadn:* 1. Zrobić kąt bryłowy, maiąc dane trzy kąty płaskie, z których ma być złożony tenże kąt bryłowy.

Do składu tego kąta bryłowego z 3, kątów płaskich; następuiący sposob, zdaie się być naywygodnieyszym.

Niech będą dane trzy kąty płaskie: BAD, BAC, DAC, do zrobienia kąta bryłowego. Wystawmy sobie myślą, iż ten kąt iuż iest zrobiony. Weźmy którykolwiek punkt C, na krawędzi nap: AC; i od tego punktu, spuśćmy na inne krawędzie, AB, AD, liniie prostopadłe: CB, CD; a znowu od punktów B, i D, na płaszczyznie BAD, poprowadźmy do teyże krawędzi, prostopadłe: BE, DE, *Tab: II. Fig: 3.*

które

które ſię przetną, w punkcie E. Pociągniymy nakoniec liniie: CE, AE.

Ponieważ liniie CB, EB ſą proſtopadłe do linii AB, liniia więc AB ieſt proſtopadłą do płaszczyzny: CBE; a zatym płaszczyzna BAD, która przechodzi przez liniią AB, ieſt też proſtopadłą do płaszczyzny: CBE; a wzaiemnie, i ta płaszczyzna ieſt do tamtey proſtopadłą. Dla teyże przyczyny, płaſzczyzna, CDE, proſtopadłą ieſt do płaszczyzny BAD; więc obiedwie płaszczyzny: CBE, CDE, proſtopadłe ſą do płeszczyzny: BAD; a zatym ſpolne ich przecięcie CE, ieſt także proſtopadłym do płaszczyzny BAD; i płaszczyzna CAE, ieſt także proſtopadłą do teyże płaszczyzny BAD. Zkąd wypada takowe wykreślenie.

Po obydwóch ſtronach linii ac, przy punkcie *a*, nakreślmy kąty: cab, cad, równe względem kątów danych CAB, CAD. Od punktu któregokolwiek teyże linii ac, nap: od *c* ſpuśćmy na dwa drugie ramiona, ab, ad, liniie proſtopadłe; cb, cd; a na ramionach trzeciego kąta weźmy, zacząwſzy od wierzchołka A, liniie AB, AD, równe względem liniy ab, ad. Od punktów B, i D wy-

pro-

prowadźmy proſtopadłe do liniy AB, AD, przecinaiące ſię w punkcie E, a od tego punktu wynieśmy znowu proſtopadłą EC, do płaszczyzny BAD. Niech przez linie EC, i AE przechodzi inna płaszyzna, na którey z punktu A, iak ze środka, promieniem równym odległości ac, nakreślmy łuk koła, który przetnie proſtopadłą EC, punkcie C; Naoſtatek przez punkt C, i linie AB, AD, niech przechodzą dwie płaſzczyzny te, wraz z płaſzyzną BAD, zrobią kąt bryłowy, którego ſzukamy.

Jnaczey ieſzcze punkt C, będzie wyznaczony na proſtopadłey EC; gdy tyłą linią, EC, weźmiemy, aby kwadrat iey równał ſię różnicy kwadratów: linii ac, i AE, albo różnicy kwadratów: cd, i DE, albo nakoniec różnicy kwadratów: be i BE.

32. *Uwaga.* Używaiąc tego wykreślenia, można łatwo dowieść naſtępuiące Twierdzenie, na którym ſię zaſadza Trygonometrya kulna; to ieſt, że:

W każdym kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów płaſkich, wſtawa iednego kąta płaſkiego, ieſt do wſtawy drugie-

drugiego, iak wſtawa kąta pochyłości przeciwnego pierwſzemu kątowi, do wſtawy kąta pochyłości przeciwnego drugiemu kątowi; to ieſt, iak wſtawa kąta pochyłosci płaszczyzn dwóch ścian pod pierwſzym kątem będących, do wſtawy kąta pochyłości dwóch także ścian pod drugim kątem będących.

Jakoż liniie: CD, CB, ſą wſtawami, pierwſza kąta CAD, drugą, kąta CAB, wziąwſzy za promień liniią AC; a zatym te dwie liniie tak ſię do ſiebie maią, iak wſtawy tych dwòch kątów.

Aże w Tróykącie ECD proſtokątnym w E; CD : CE = Pr: Wſt. CDE

A w Tróyk. EBC; CE: CB = Wſt:CBE; Pr:

Więc złożywſzy te ſtoſunki, będzie; CD:CB = Wſt: CBE: Wſt. CDE.

To ieſt: Wſtawa kąta CAD, tak ſię ma do wſtawy kąta CAB, iak wſtawa kąta pochyłości dwóch płaszczyzn BAD, BAC, do wſtawy kąta pochyłości dwóch płaſzczyzn BAD, CAD.

32. *Zagadn:*

33. *Zagadn:* 2. Maiąc dane trzy kąty płaskie, z których się ma składać kąt bryłowy, wyrachować, iaka ma być pochyłość płaszczyzn, aby ten kąt zrobiły.

Sposob 1. W Czworokącie ABED, kąty przeciwne B, i D są proste: więc Czworokąt ten może być w koło wpisanym, a zatym kąty (w tymże samym odcinku) ADB, AEB będą równe. Wyrachowawszy tedy w Tróykącie BAD kąt ADB, iuż tym samym znaydziemy i kąt AEB, równy tamtemu.

Stosunek boku BC do BE, to iest stosunek wstawy całey, czyli promienia, do Dostawy kąta pochyłości CBE, składa się z stosunków boków: BC do AB i AB do BE.

Ażeiest; BC : AB = Stycz. BAC : Wst. całey,

i - AB : BE = Wst. cała : Dostycz. AEB

więc; BC : BE = Sstycz. BAC : Dost. AEB
A zatym; - - - -
Stycz. BAC : Dost : AEB = Pr : Dost : CBE.

Sposob 2. Wyciągnowszy od punktu iednego nap: B znayduiącego się na któreykolreykolwiek krawędzi kąta bryłowego, proſtopadłe: BD, BC, do tey krawędzi, a na dwóch płaſzczyznach, których ſpólnym przecięciem ieſt ta krawędź, niech te dwie proſtopadłe ſpotykaią dwie drugie krawędzie w punktach: C, i D: Liniie BC, BD będą ſtycznemi, a liniie AC, AD będą ſiecznemi względem kątów, BAC, BAD, biorąc za promień liniią AB. Więc te liniie, mogą być wyrachowane na miarę linii ſtałey AB, czyli promienia, W Tróykącie CAD wiedząc dwa boki AC, AD i kąt CAD, między niemi zawarty możemy wyznaczyć bok trzeci CD. W Tróykącie zatym CBD wiedzieć będziemy trzy boki, a ztąd możemy wyznaczyć kąt CBD, który ieſt kątem pochyłości dwóch płaſzczyzn: BAD, BAC. Inne też kąty pochyłości łatwo wyznaczemy podług uwagi poprzedzaiącey.

PRZYGOTOWANIE DO ROZDZIAŁOW NASTĘPUIĄCYCH.

O podnieſieniu liczby do iey Sześcianu albo Kubusa, *i o wyciągnieniu Pierwiaſtku Sześciennego, albo Kubicznego.*

Przed naſtępuiącemi *Rozdziałami*, kładzie ſię nauka o podnieſieniu liczby do Sześcianu, i o wyciąganiu Pierwiaſtku ſześcien-

ſześciennego; bo właśnie w tych rozdziałach, można będzie naukę tę do praktyki zaraz przyſtoſować.

34. Sześcian liczby iakiey robi ſię, gdy tę liczbę przez nią ſamą raz mnożemy, i tak rozmnożoną, ieſzcze raz przez nią mnożemy albo, co na iedno wychodzi, gdy tę liczbę mnożemy przez iey kwadrat. I tak Sześciany dziewięciu liczb pierwſzych.

1, 2, 3, 4, 5, 6. 7, 8, 9.

ſą: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Sześciany liczb:

10. 20. 30, 40, - - - 90.

są; 1000, 8000, 27000, 64000, - - - 729000.

Sześciany liczb:

100, 200, 300, - - 900.

ſą: 1000000, 8000000, 27000000, 729000000.

35. Sześciany więc liczb maiących iedynę tylko cyfrę, a reſztę zerów, ſą te

ſame,

ſame, co i ſześciany tychże cyfr ſamych przez ſię, przydawſzy im trzy razy tyle zerów, ile ich było w liczbie z którey ſię Sześcian robi.

Wyraz ten *Sześcian*, wzięty ieſt z Geometryi, w którey, aby mieć bryłowatość iakiego Sześcianu, rozmnaża ſię liczba wyrażaiąca wielkość boku iego, raz i drugi przez ſiebie.

Sześcian każdey liczby znaleść można, mnożąc iey kwadrat przez nią ſamę; podamy tu iednak inny ſpoſob zrobienia Sześcianu z liczby daney, a ten ſposób pomoże nam do przeciwnego działania, to ieſt do wyciągania Pierwiaſtku Sześciennego z liczby iakieykolwiek.

36. Sześcian liczby złożony z dwóch części, może być rozłożony na cztery części naſtępuiące.

1. Na Sześcian pierwſzey części.

2. Na Kwadrat pierwſzey części trzy razy wzięty i rozmnożony przez część drugą.

3. Na Kwadrat drugiey części trzy razy wzięty, i rozmnożony przez część pierwſzą.

4. Na

4. Na Sześcian drugiey części.

I tak liczbę 5. rozłożywszy na dwie części naprzyk: 1, i 4; można uważać iey Sześcian, iakoby złożony z czterech części: 1, 12, 48, 64, których Summa ieſt: 125. Gdybyśmy zaś tę ſamę liczbę 5, uważali iako złożoną z dwóch części 2, i 3; iey Sześcian mogłby ſię był rozłożyć na cztery części: 8. 36, 54, 27.

Niechby potrzeba znaleść Sześcian liczby nap: 47; Ponieważ iey kwadrat (podług reguły iuż nam wiadomey) ſkłada ſię z kwadratu pierwſzey części 40, z teyże części 40, dwa razy wziętey, przez drugą, 7. rozmnożoney, i z kwadratu drugiey części 7; mnożąc cały ten kwadrat ieſzcze raz przez 40, i przez 7, albo przez 47, Sześcian z 47 ſkładać ſię będzie:

Z Kwadratu liczby 40, rozmnożonego przez 7, z 40, rozmnożonych przez kwadrat liczby 7, dwa razy wzięty, i z Sześcianu teyże liczby 7; (biorąc 7 za liczbę mnożącą;) biorąc znowu 40, za liczbę mnożącą; Sześcian z 47, ſkładać ſię ieſzcze będzie z Sześcianu liczby 40; z 7, rozmnożonych przez kwadrat

liczby

liczby 40, dwa razy wzięty; i z 40 rozmnożonych przez Kwadrat liczby 7, raz wzięty; a razem to wszyſtko zebrawszy, ſkładać ſię będzie z Sześcianu liczby 40, z kwadratu teyże liczby trzy razy wziętego, a rozmnożonego przez 7, z kwadratu liczby 7, trzy razy wziętego, a rozmnożonego przez 40, i z Sześcianu liczby 7. Co uczyni Summę: 103823, która ieſt Sześcianem liczby 47.

Ponieważ zaś niemożna ieszcze dowieść tego Algebraicznie, trzeba przynaymniey będzie z Geometryi zaciągnąć obiaśnienia, pokazuiąc; że Sześcian linii złożoney z dwóch części, może być w rzeczy ſamey rozłożony na Sześciany każdey, z tych dwóch części, i na 6. Równoległościanow, z których trzy mieć będą za podſtawę kwadrat iedney części; a za wyſokość część drugą; trzy zaś inne, mieć będą za podſtawę kwadrat drugiey części, a za wyſokość część pierwszą.

Wykonać to w ſkutku będzie można na Sześcianie z drewna lub z papieru tak zrobionym, aby te części od ſiebie ſię oddzielały.

38. Nay-

38. Naywygodniey ieſt, rozłożyć liczbę na iedności, dzieſiątki, ſta, i t. d. które w ſobie zawiera.

Niech będzie liczba nap: 12. Podzielmy ią na dwie części, 10, i 2. Sześcian iey ſkładać ſię będzie z części naſtępuiących:

1000. Sześcan dzieſiątku

600. Kwadrat dzieſiątku trzy razy wzięty przez iedności rozmnożony.

120. Kwadrat iedności trzy razy wzięty przez dzieſiątek rozmnożony

8. Sześcian dwóch iedności.

1728 Sześcian z 12.

Niech będzie liczba 84, rozebrana na dwie części 80, i 4; Sześcian iey mieć będzie części naſtępuiące:

512000. Sześcian dziesiątków,
76800. Kwadrat dziesiątków trzy razy wzięty, przez iedności romnożony.
3840. Kwadrat tychże iedności trzy razy wzięty przez dziesiątki rozmnożony.
64. Sześcian z iedności.

592704. Sześcian z 84.

Niech będzie liczba 324, rozebrana na dwie części 320 i 4; aby zaś mieć Sześcian pierwszey części, rozłożmy ią na części 300, i 20,

27000000. Sześcian stów
5400000. Kwadrat stów potróyny przez dziesiątki rozmnożony.
360000. Kwadrat dziesiątków potróyny przez sta rozmnożony.

8000. Sześcian dziesiątków.

1228800. Kwadrat z 320 potróyny rozmnożony przez iedności

15360. Kwadrat z iedności potróyny, rozmnożony przez 320.
64. Sześcian iedności.

34012224. Sześcian z 324.

Niechby

Niechby trzeba zrobić Sześcian z 8421.

512000000000	Sześcian z 8000.
76800000000	Kwadrat z 8000 potróyny, roz: przez 400.
3840000000.	Kwadrat z 400 potróyny roz: przez 8000.
64000000.	Sześcian z 400.
4233600000.	Kwadrat z 8400 potròyny rozm: przez 20.
10080000.	Kwadrat z 20. potróyny rozmn: przez 8400.
8000.	Sześcian z 20.
212689200.	Kwadrat z 8420 potróyny rozmn: przez 1.
25260.	Kwadrat z 1. potróyny rozmn: przez 8420.
1.	Sześcian z 1.
597160402461.	Sześcian z 8421.

39. Widziemy na poprzedzaiących przykładach, iż przez takowy rozbior, każda część naſtępuiąca Sześcianu mniey ma iednym zerem, od części, która ią poprzedziła; i że iako pierwſza część Sześcianu ieſt zawſze Sześcianem, a po nim naſtępuią dwie części, każda złożona z potróynego kwadratu iedney części rozmnożonego przez część drugą; tak i daley, tymże porządkiem idą, i dalſze wyrazy części ſkładaiących Sześcian.

40. Można było opuścić zera kładąc tylko ſame cyfry znaczące, a w każdey części naſtępuiącey wyſtępuiąc z oſtatnią cyfrą w prawą. I tak części Sześcianu mogły być w ten ſposób wypiſane.

```
27
 54
  36
   8
  12288
   1536
     64
34012224
```

41. Ten

41. Ten ſposob poſtępowania, pokazuie nam, że liczba wyrażaiąca Sześcian iednośei, kończy ſię na oſtatniey po prawey ręce cyfrze, że Sześcian dzieſiątków kończy ſię na czwartey od prawey ręki cyfrze; liczba Sześcianu ſtów, kończy ſię na ſiodmey cyfrze od teyże ſtrony rachuiąc, i t, d.

Zeby więc wiedzieć liczbę cyfr wyrażaiących Pierwiaſtek Sześcianu danego, trzeba od prawey ſtrony zaczynaiąc, oddziały co trzy cyfry kreſkami poczynić; a ile będzie tych oddziałów, tyle też cyfr będzie ſię znaydowało w Pierwiaſtku. Oddział pierwſzy po lewey ſtronie może mieć trzy, dwie, a czaſem i iednę tylko cyfrę, iako to przykłady poprzedzaiące okazuią. I tak Pierwiaſtki ſześcienne liczb 1,331; 32,767; 226,981; maią dwie cyfry.

42. Niechby trzeba z liczby 1331, wyciągnąć pierwiaſtek ſześcienny;

Ta liczba ma dwie cyfry w ſwoim Pierwiaſtku, bo dwa w niey uczynić można oddziały, tym ſpoſobem: 1,331. Naywiękſza liczba dzieſiątków tego Pierwiaſtku taka być powinna, aby iey

Sześcian

Sześcian niebył większy od 1; a zatym będzie tylko ieden dziesiątek w Pierwiastku. Sześcian z 10, iest: 1000; który Sześcian odiąwszy od 1331, zostanie 331. Ta reszta powinna zamykać w sobie potróyny kwadrat dziesiątka rozmnożony przez iedności; potróyny kwadrat tych iedności, rozmnożony przez dziesiątek, i Sześcian tychże iedności. Aże wszczegulności ta reszta, ma w sobie zamykać kwadrat potróyny dziesiątka rozmnożony przez iedności; wystawmy więc sobie tę resztę 331, iak gdyby zamykała tylko sam potróyny kwadrat z 10, to iest 300. Wieloraz z 331, przez 300 podzielonych, iest: 1, więc iedna iedność będzie w Pierwiastku. Rozmnożywszy 300 przez 1, będzie 300, a te, od 331, odiąwszy, zostanie 31. Ta reszta ma ieszcze w sobie zamykać potróyny kwadrat iedności przez dziesiątek rozmnożony, to iest: 30; i Sześcian iedności, to iest: 1, a zewszystkim 31, które odiąwszy od ostatniey reszty nic nie zostanie; a zatym Pierwiastek sześcienny liczby 1331, iest: 11.

Wyciągniymy Pierwiastek sześcienny z liczby 68,921. Pierwiastek tey liczby ma dwie cyfry. Liczba dziesiątków taka ka być powinna, aby Sześcian iey odiąć można od pierwszego podziału: 68. Aże z Tablicy dziewiąciu pierwszych sześcianów (34) którą uczniowie umieć na pamięć powinni, Sześcian naybliższy 68; iest 64. a tego Pierwiastek iest: 4; więc w Pierwiastku będą 4 dziesiątki. Sześcian z 40, iest: 64000; odiąwszy go od 68921, zostanie 4921. Ta reszta ma wszczegulności zawierać w sobie potróyny kwadrat dziesiątków, rozmnożony przez iedności, to iest ma w sobie zawierać 4800 rozmnożone przez iedności. Dzieląc 4921. przez 4800, wypada 1, na wieloraz, więc będzie w Pierwiastku iedna iedność. Odiąwszy od 4921, kwadrat potróyny 4800. rozmnożony przez 1, zostanie 121. Ta reszta ma ieszcze w sobie zawierać kwadrat potróyny iedności, rozmnożony przez 4 dziesiątki, to iest 120, i Sześcian iedności, to iest 1, a że wszystkim, 121; które odiąwszy od ostatniey reszty, nic nie zostanie; a zatym Pierwiastek zupełny będzie: 41.

Wyciągniymy Pierwiastek sześcienny z liczby 884,636. Ta też liczba ma dwie cyfry w swoim Pierwiastku. Sześcian naybliższy liczby 884. iest: 729, którego Pierwiaſtkiem ieſt: 9, więc Pierwiaſtek będzie miał 9 dzieſiątków. Sześcian z 90, ieſt 729000; który odiąwszy od 884736, zoſtanie 155736. Kwadrat z 90, ieſt 8100, potròyny będzie: 24300. Dzieląc przez 24300, reſztę 155736, na wieloraz wypada 6, więc Pierwiaſtek mieć będzie 6. iedności. Rozmnożywſzy 24300 przez 6, będzie 145800, które odiąwſzy od 155736, zoſtanie 9936. Kwadrat potróyny 6 iedności, rozmnożony przez 9 dzieſiątków, będzie 9720, odiąwſzy go od 9936, zoſtanie 216, nakoniec Sześcian z 6, ieſt 216; a zatym Pierwiaſtek zupełny będzie 96. Jakoż Sześcian z 96, ieſt: 884,736.

Wyciągniymy Pierwiaſtek ſześcienny z liczby 590.589,719. Ten powinien mieć trzy cyfry.

Liczba ſtów w Pierwiaſtku taka być powinna, aby iey Sześcian, nieprzechodził 590. Z dziewięciu pierwſzych Sześcianów, naybliżſzy liczby 590 ieſt Sześcian: 512, którego Pierwiaſtek; ieſt 8; a zatym 8 ſtów będzie w Pierwiaſtku. Odiąwſzy 512000000, od Sześcianu danego, zoſtanie 78589719. Kwadrat

drat potróyny ſtów 8, albo 800, to ieſt 1920000 znayduie ſię razy 40 w tey reſzcie; mogłoby więc zdawać ſię, iż 4 dzieſiątki Pierwiaſtek mieć powinien; aleby nie można od 78589719 odiąć dwóch innych części, to ieſt kwadratu potróynego dzieſiątków rozmnożonego przez ſta, i Sześcianu dzieſiątków; nie można przeto więcey dać Pierwiaſtkowi, iak 3 dzieſiątki. Liczbę 1920000, rozmnożoną przez 30, to ieſt 57600000, odiąwſzy od 78589719, zoſtanie 20989719; od tey reſzty odiąwſzy znowu kwadrat potróyny 3 dzieſiątków, przez ſta rozmnożonych, to ieſt 2160000, zoſtaie 18829719, a po odięciu Sześcianu dzieſiątków, to ieſt 27000, będzie wreście, 18802719. Kwadrat potróyny części Pierwiaſtku znalezioney, to ieſt liczby 830, ieſt 2066700; przez ten dzieląc reſztę 18802719, wypadnie 9 iednoſci na wieloraz. Odiąwſzy od tey reſzty, liczbę 2066700, rozmnożoną przez 9, to ieſt: 18600300, zoſtanie 202419; zkąd znowu odiąwſzy kwadrat potróyny iedności 9, rozmnożony przez 830, to ieſt 201690, zoſtaie 729. Naoſtatek Sześcian z 9 ieſt: 729, a zatym Pierwiaſtek którego ſzukaliśmy będzie 839.

Wzor

Wzor działań w przykładach poprzedzaiących.

Przykład 1.	*Przykład 2.*
1,331. | 10.	68,921 | 40
1 000 |	64 000 |
300 | 331 | 1.	4800 | 4 921 | 1.
| 300 |	| 4 800 |
31.	121.
30	120
1.	1
1	1
0	0

Przykład

Przykład 3.

```
     884.736. | 90
     729 000  |
     ----------
24300 | 155736 | 6.
      | 145800 |
     ----------
       9936.
       9720.
       -----
        216.
        216.
       -----
         0.
```

Przykład 4.

```
         590,589,719. | 800
         512 000 000  |
         -------------
        | 78589719 | 30.
1920000 | 57600000 |
         -------------
          20989719.
           2160000
         -------------
          18829719.
             27000
         -------------
        | 18802719 | 9
2066700 | 18600300 |
         -------------
            202419
            201690
         -------------
               729
               729
         -------------
                0.
```

Więcey takowych przykładów należy podać Uczniom, nie używaiąc ieszcze żadnego skrócenia.

45. Pierwſze ſkrócenie, na tym zawiſło, aby opuſzczać zera, w liczbach dzielących, podzielnych, i w wielorazach; maiąc iednak zawſze uwagę na mieyſca, które zaſtępować przypada cyfrom znaczącym. W ſzczególności zaś co do wielorazow, będzie ten z opuſzczania zerów pożytek, że zaraz przy ſobie kłaść będzie można cyfry wyrażaiące Pierwiaſtek, którego ſzukamy.

Drugie ſkrócenie, związane z pierwſzym na tym ſię zaſadza, aby do każdego naſtępuiącego dzielenia, tyle tylko cyfr z Sześcianu przyłączać do reſzty pozoſtałey, ile ich wyciągać będzie przypadaiące odeymowanie; daremna albowiem byłaby praca, przy każdym odeymowaniu, wſzyſtkie pozoſtałe Sześcianu cyfry na nowo wypisywać, ponieważ oſtatnie zwłaſzcza cyfry przez większą część działania nie naruſzone zoſtaią.

Trzecie ſkrócenie na tym zawiſło, aby za iędnym razem odiąć kwadrat potróyny części znalezioney, rozmnożony przez część naſtępuiącą; kwadrat potróyny teyże części drugiey, rozmnożony przez część pierwſzą znalezioną, i Sześcian

tey

tey części drugiey. To zaś wykona ſię, dodaiąc razem te trzy liczby odeymować ſię maiące, i tak dodane odeymuiąc od Sześcianu, z którego Pierwiaſtek wyciągamy. Zawſze iednak mieć trzeba na to uwagę, aby w liczbach, które pierwey dodawać, a potym ich ſummę odeymować mamy, zachowane było mieyſce każdey cyfrze właściwe; iako też wzgląd mieć należy na położenie cyfrów tych, od których inne odeymować przypada.

Przyſtoſowanie. Niechby z liczby 257,259,456, trzeba wyciągać Pierwiaſtek Sześcienny. Ten będzie miał cyfr trzy, Naywiękſzy Sześcian zawarty w 257, ieſt 216, którego Pierwiaſtek ieſt: 6, odiąwſzy ten Sześcian od 257, zoſtanie 41. Do tey reſzty przyłączmy naſtępuiący oddział 259, będzie 41259. Niemaiąc tym czaſem względu na oſtatnie dwie cyfry: 59, dzielmy 412 przez potróyny kwadrat z 6, to ieſt przez 108, wieloraz będzie 3. Weźmy teraz ſummę trzech liczb: $^{324}_{162}$. to ieſt kwadratu potróynego z 6. ^{27} ſtów rozmnożonego przez 3 dzieſiątki, kwadratu potróynego z 3 dzieſiątków rozmnożonego przez 6. ſtów, i Sześcianu z 3 dzieſiątków. Summę mę 34047 odeymiymy od 41259, zoſtanie 7212; przy których przypiſawſzy oſtatni oddział 456, będzie 7212456. Nie uważaiąc tym czaſem na oſtatnie dwie cyfry, dzielmy 72124 przez kwadrat potroyny z części Pierwiaſtku znalezioney, to ieſt przez 11907, wypadnie 6, na wieloraz. Weźmy ſummę trzech liczb: $\begin{array}{r}71442\\6804\\216\end{array}$ to ieſt kwadrat potroyny części pierwey znalezioney, rozmnożony przez 6 iedności, kwadrat potroyny z 6. iedności rozmnożony przez część pierwey znalezioną, i Sześcian z 6. iedności. Summa 7212456 równa ſię reſzcie oſtatniey; co znakiem ieſt że Pierwiaſtek, którego ſzukaliśmy, ani mnieyſzy ani większy ieſt, iak 636.

To działanie bardziey długie, niż trudne, wyciąga od uczniów częſtego w nim ćwiczenia ſię.

44. Aby wyciągnąć Pierwiaſtek Sześcienny z ułomku, którego tak licznik, iako i mianownik ieſt Sześcianem; trzeba go oſobno wyciągać z każdego z tych wyrazów. I tak Pierwiaſtek ſześcienny z $\frac{125}{216}$, ieſt: $\frac{5}{6}$. Pierwiaſtek z $\frac{64}{343}$. ieſt: $\frac{4}{7}$. Aby zaś wyciągnąć Pierwiaſtek Sześcienny z liczby mieſzaney,

trzeba

trzeba ią pierwey zamienić na ułomek. I tak Pierwiastki sześcienne liczb mieszanych $3\frac{3}{8}$, $37\frac{1}{27}$, są te same co i ułomków $\frac{27}{8}$, $\frac{1000}{27}$. to iest: $\frac{3}{2}$. $\frac{10}{3}$, albo $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$.

45. Co się o Pierwiastku kwadratowym powiedziało (w Części 1. Geom: § 128) ściąga się i do Pierwiastku sześciennego; to iest; że ieżeli nie można mieć Pierwiastku Sześciennego liczby całkowitey, w liczbach całkowitych, tedy go i w ułomkach nie znaydziemy. Dowodzi się to ogulnie tymże samym, iak względem Pierwiastku kwadratowego sposobem. (d)

46. Pierwiastek Sześcienny liczby iakiey, można tak do prawdziwego przybliżyć, iak tylko zechcemy. Sposob nayogulnieyszy iest, używaiąc do tego ułomków dziesiątnych. Niechby naprzykład trzeba z 2 wyciągnąć Pierwiastek

---

(d) Otoż i drugi rodzay ilości nie spółmiernych. Pierwszego rodzaiu ilości niespółmierne można Geometrycznie wyrazić; lecz wyrazenie tych drugich, wyższey nad początkową nauki potrzebuie.

ſtek ześcienny, przybliżaiąc go do prawdziwego w cząſtkach tyſiącznych. Wyciągaymy ten Pierwiaſtek, ſposobem dopiero podanym, z liczby 2000000,000, a oſtatnie trzy tego Pierwiaſtku cyfry połozmy za dzieſiątne. Pierwiaſtek Sześcienny liczby: 2000000000 w liczbach całkowitych naybliżſzych wyrażony, ieſt: 1259; a zatym Pierwiaſtek Sześcienny liczby 2, przybliżony aż do części tyſiącznych iedności będzie 1,259. Jakoż Sześcian z 1,259, ieſt: 1,995616979 mnieyſzy od 2, a Sześcian 1,26, ieſt: 2,259576, więkſzy od 2.

47. Chcąc Pierwiaſtek ſześcienny liczby nap: 2, przybliżyć do prawdziwego, w ułomkach zwyczaynych, podwoiwszy pierwſze dziewięć Sześcianów liczb *naturalnych*, 1,2,3,4. i t. d. uważać należy (podobnie iako ſię o przybliżeniu Pierwiaſtku kwadratowego w Części I. powiedziało:) ieżeli między temi Sześcianami podwoionemi, nieznayduie ſię taki, któryby bliſki bardzo był Sześcianu zupełnego. Znaydziemy nap: że 64. podwoione, to ieſt 128, mało ſię co różni od 125, to ieſt od Sześcianu liczby 5; a zatym 2, które równa ſię cale $\frac{128}{64}$; będzie też prawie równe $\frac{125}{64}$; przeto

przeto i Pierwiastek Sześcienny liczby 2, będzie prawie równy $\frac{5}{4}$. Aby zaś poprawić ten pierwszy mniey dokładny Pierwiastek Sześcienny, podzielemy rożnicę między $\frac{128}{64}$ i $\frac{125}{64}$, to iest, $\frac{3}{64}$., przez kwadrat potróyny tego pierwszego Pierwiastku to iest przez $\frac{75}{16}$, i wieloraz $\frac{1}{100}$, dodamy do Pierwiastku $\frac{5}{4}$; Summa $\frac{126}{100}$, będzie Pierwiastkiem bardziey przybliżonym. Jakoż Sześcian z $\frac{126}{100}$ iest. $2\frac{326}{1000000}$; a i to uchybienie możnaby ieszcze zmnieyszyć podobnym iak wyżey sposobem.

Niechby z liczby 3, trzeba wyciągnąć Pierwiastek sześcienny przez przybliżenie.

Liczba 3, równa się zupełnie $\frac{1029}{343}$, a niewiele się różni od $\frac{1000}{343}$; a zatym Pierwiastek Sześcienny liczby 3, będzie prawie równy $\frac{10}{7}$, a poprawuiąc to pierwsze uchybienie, Pierwiastek bardziey do prawdziwego przybliżony będzie $\frac{3629}{2100}$.

48. Gdy ani licznik ani mianownik iakiego ułomku, nie iest Sześcianem; trzeba obadwa te wyrazy rozmnożyć przez taką liczbę, aby po rozmnożeniu,

mianownik ſtał ſię Sześcianem; potym dopiero wyciąga ſię Pierwiaſtek z licznika, przez przybliżenie, a wyciągniony, dzieli ſię przez Pierwiaſtek zupełny mianownika. I tak chcąc wyciągnąć Pierwiaſtek ſześcienny z $\frac{1}{4}$; zamieniam ten ułomek na $\frac{2}{8}$; a wyciągnąwſzy z 2, przez przybliżenie Pierwiaſtek ſześcienny: 1,259. -- biorę iego połowę 0,629 - - -; to ieſt: dzielę go przez Pierwiaſtek ſześcienny mianownika 8; Podobnie Pierwiaſtek Sześcienny z $\frac{5}{12}$, ten ſam ieſt, co i Pierwiaſtek Sześcienny z $\frac{90}{216}$; to ieſt $\frac{1}{6}$. Pierwiaſtku ſześciennego z 90.

ROZDZIAŁ III.

O Równoległościanach proſtokątnych (e).

49. *DEfin:* Gdy Bryła iaka zakończona ieſt ſześcią ścianami proſtokątnem, taka Bryła nazywa ſię, *Rowno-legło-*

(e) *Częſte używanie Równoległościanów proſtokątnych ieſt nam pobudką do mówienia o nich w ſzczegulności: tym bardziey, że przez to przysposobią ſię Uczniowie do zamieniania z większą łatwością innych nie proſtokątnych Rowno ległościanów na proſtokątne.*

ległościanem prostokątnym (Parallelopipedum Rectangulum).

50. *Twierdz.* 1. W każdym Równoległościanie prostokątnym, Sciany na przeciwko siebie stoiące, są równe i równoodległe; a każda z tych ścian w szczególności prostopadłą iest, do każdey z czterech innych ścian, które z nią spolny maią bok ieden.

Niech będzie ABCDEFGH, Równoległościan prostokątny; spolne dwóch ścian: GBCF, GBAH przecięcie GB, prostopadłym iest do dwóch innych boków: BC, BA należących do tychże Scian, więc to przecięcie iest też prostopadłym i do płaszczyzny przechodzącey przez liniie AB, BC, to iest do ściany ABCD. Płaszczyzny zatym ABGH, BCFG, które przechodzą przez to spolne przecięcie GB, są do ściany ABCD, prostopadłe. Toż mówić i o dwóch drugich ścianach, których spolnym przecięciem iest liniia ED; a zatym cztery ściany Równoległościanu prostokątnego, są prostopadłe do tey ściany, z którą maią po iednym boku spolnym. *Tab. II. Fig. 4.*

Dowiedliśmy że liniia GB, prostopadłą iest do ściany ABCD. Podobnie dowieśćby można, że taż liniia ieſt proſtopadłą i do ściany GFEH; więc te obie ściany ſą proſtopadłe do iedney linii GB, a zatym ſą od ſiebie równoodległe.

Na oſtatek w Proſtokącie ABGH liniie przeciwne AB, GH ſą równe; iako też i liniie BC, FG, a zatym dwie przeciwne ściany ABCD, EFGH, mogą przyſtać do ſiebie.

51. *Uwaga.* Ponieważ w Równoległościanie proſtokątnym z czterech ścian otaczaiących ten Równoległościan, każda ma ieden bok ſpólny z bokiem iedney ściany z dwóch pozoſtałych; przeto można wyſtawić ſobie *rodzenie ſię* (generatio albo formatio) Równoległościanu proſtokątnego, w ſposob naſtępuiący.

Niech będzie Proſtokąt iakikolwiek, na którego wierzchołkach wszyſtkich wyſtawione ſą proſtopadłe do iego płaſzczyzny wſzyſtkie równe. Niech ten Prostokąt poſuwa ſię równoodlegle od pierwſzego ſwego położenia, i tak, aby wierzchołki kątów iego wzdłuż liniy proſtopadłych wznoſiły ſię. Mieyſce to, które takowym poſuwaniem ſię przey-

przeydzie Proſtokąt, będzie Równoległościanem proſtokątnym.

52. *Defin*: Równoległościan proſtokątny, którego wſzyſtkie sciany ſą kwadratami, nazywamy *Sześcianem*, albo z Łacińſkiego, *Kubusem*.

Sześcian więc, ieſt to Bryła zakończona ſześcią kwadratami. Wypływa zaś z Twierdzenia poprzedzaiącego, że te 6. kwadratów, ſą równe, że każde z nich dwa, na przeciwko ſiebie ſtoiące, ſą równoodległe, i że cztery z tych kwadratów wspieraiące ſię na czterech bokach kwadratu iednego z dwóch kwadratów pozoſtałych, ſą do tego kwadratu proſtopadłe.

Wyſtawiwszy ſobie Równoległościan proſtokątny, iako zbudowany na iedney z ścian ſwoich, proſtopadła ſpuszczona na tę ścianę, od punktu któregokolwiek ściany przeciwney, nazywa ſię *wysokością* tego Równoległościanu. Ta zaś wysokość równa ieſt ſpolnemu przecięciu dwóch ścian zbudowanych na dwóch przyległych ſobie bokach podſtawy.

53. *Twier*:

53. *Twierdz.* 2. Gdy podſtawy dwóch Równoległościanów mogą przyſtać do ſiebie, a ich wysokości ſą równe, te dwa Równoległościany, mogą też przyſtać do ſiebie, to ieſt nie różnią ſię od ſiebie tylko mieyſcem.

Dowodz: Wſzyſtkie ściany tych dwóch Równoległościanów, podobnie położone, mogą przyſtać do ſiebie; wſzyſtkie też tych Równoległościanów kąty bryłowe, ſkładaią ſię z trzech kątów proſtych, a zatym wszyſtkie te kąty bryłowe mogą przyſtać do ſiebie. Przenioſzſzy tedy myślą ieden z tych Równoległościanów, tak, aby ieden z kątów iego bryłowych, przyſtał do iednego z kątów bryłowych Równoległościanu drugiego, i aby ściany pierwſzego kąta, które mogą przyſtać do ścian drugiego, w ſamey rzeczy do niego przyſtały, wſzytkie końce krawędzi pierwſzego kąta, przyſtaną do końców krawędzi odpowiadaiących przy drugim kącie; a przeto i wierzchołki kątów bryłowych pierwſzego Rownoległościanu, które ſą przy końcach tych krawędzi, przypadną na wierzchołki kątów bryłowych drugiego Równoległościanu, będące przy końcakch tychże ścian odpowiadaiących pierwszym; zatym i te kąty bryłowe przyſtaną iedne do drugich.

54. *Wniosek.* Podzieliwszy wyſokość iakiego Równoległościanu proſtokątnego na pewną liczbę części równych, a przez te wszyſtkie punkta podziału przeciągnąwſzy płaszczyzny równoodległe od podſtawy; Równoległościan podzielony będzie na tyle Równoległościanów mnieyszych, które przyſtać do ſiebie mogą, na ile części była podzielona wysokość; będą albowiem miały te wszyſtkie Równoległościany mnieysze, iednakową wyſokość, a takie podſtawy, z których każda przyſtać może do podſtawy wielkiego Równoległościanu.

55. *Twierdz;* 3. Dwa Równoległościany proſtokątne, wyſtawione na teyże ſamey podſtawie, lub na podſtawach mogących przyſtać do ſiebie, tak ſię maią ieden do drugiego, iak ich wysokości.

Dowodz: 1. Gdyby wyſokość iednego, Równoległościanu, była dwa, trzy, cztery i t. d. razy większa od wysokości drugiego, pierwszy Równoległościan, mógłby ſię podzielić na 2, 3, 4, i t. d.

i t. d. Równoległościany mogące przystać do drugiego; a zatym ten pierwszy Równoległościan byłby też większy od drugiego, 2, 3, 4, i t. d. razy, Co przystosować można, i w innych przypadkach, gdzieby tylko wysokość iednego Równoległościanu zawierała w sobie zupełnie wysokość drugiego.

2. Gdyby zaś wysokość iednego Równoległościanu zawierała nap. 3. takich części; jakich 5 zawiera wysokośc drugiego; w takim razie, podzieliwszy pierwszą wysokość na trzy, a drugą na pięć równych części, a przez punkta podziału przeciągnąwszy płaszczyzny równoodległe od podstaw, podzielilibyśmy pierwszy Równoległościan na 3, a drugi na 5. Rownoległościanów iednakowey wysokości, i których podstawy przystaćby mogły do siebie; a zatym pierwszy Równoległościan takby się miał do drugiego iak 3, do 5, to iest iak wysokość pierwszego do wysokości drugiego. Rozumowanie to służy i do innego iakiegokolwiek stosunku.

Na koniec, to, co się powiedziało w przypadkach spółmiernych, przystosować można i do przypadków nie spół-

mier-

miernych, tak iakośmy uczynili mówiąc o figurach płaſkich, w Części 1.

Jakoż niech będą AB, CD wysokości dwóch Równoległościanów proſtokątnych, zbudowanych na teyże ſamey podſtawie, albo na podſtawach mogących do ſiebie przyſtać; i niech te wyſokości będą nieſpołmierne; wszelako dwa takie Równoległościany mieć ſię do ſiebie będą, iak ich wysokości. *Tab. II. Fig: 5.*

Gdyby albowiem ſtoſunek tych dwóch Równoległościanów nie był równy ſtoſunkowi ich wysokości, tedy iedna z tych wysokości, byłaby nadto mała do uczynienia tey równości ſtosunków. Niechże więc ieżeli to być może, ſtosunek pierwſzego Równoległościanu, do drugiego, będzie równy ſtoſunkowi linii AE, (większey od AB) do CD.

Podzielmy liniią CD na pewną liczbę części równych mnieyszych iednak od różnicy BE, i przenieśmy iednę z tych części na liniią AB; tyle razy, ile można; oſtatni punkt podziału padnie między A i B, a przeniozłszy daley ku E, iednę ieſzcze taką część, punkt podziału padnie między B i E, nap. w F.

Ro-

Rownoległościany maiące iednakowe podstawy, a wysokości spólmierne CD, i AF, będą do siebie iak te wysokości CD i AF.

Aże (przez przypuszczenie) Równoległościan, którego wysokością iest AB, tak się ma do Równoległościanu, którego wysokością iest CD, iak się ma liniia AE do linii CD.

Więc (przez złożenie stosunków) Rownoległościany, których wysokościami są AB, i AF, miałyby się do siebie, iak liniie AE, i AF, Że zaś pierwszy poprzednik mnieyszy iest od swego następnika, a drugi poprzednik większy od swego następnika, więc proporcya ta niema mieysca, a zatym stosunek Równoległościanów, których AB, i CD, są wysokościami, nie iest różnym od stosunku tychże wysokości.

To samo w krótkości tak się wyraża: Niech będą oznaczone przez R.AB, R.AF, R.CD, Równoległościany maiące iednakowe podstawy, wysokości zaś: AB AF, CD.

Gdyby można uczynić tę proporcyą:

$$R.\ AB : R.\ CD = AE : CD.$$

tedy ponieważ iest; - - $R.\ CD : R.\ AF = CD : AF.$

byćby powinno - - $R.\ AB : R.\ AF = AE : AF.$

Ta zaś ostatnia proporcya utrzymać się nie może, więc ani pierwsza.

56. *Twierdz.* 4. Dwa Równoległościany, maiące iednakowe wysokości, są do siebie, iak ich podstawy.

Przenieśmy ieden z tych Równoległościanów, tak, aby podstawa iego stykała się w wierzchołku spolnym, z drugą podstawą. Niech ABCD będzie iedną z tych podstaw, a drugą: EBGF. Dopełniymy Prostokąta, CBGH przedłużywszy boki, DC, FG, aż do ich spolnego przecięcia, w punkcie H; i wystawmy sobie wmyśli Równoległościan trzeci stoiący na podstawie CBGH, dawszy mu wysokość równą wysokości, iednakowey dwóch danych Równoległościanów. Równoległościan, którego podstawa iest: ABCD, i ten, którego podstawa iest: CBGH, wystawuiąc ie sobie iak gdyby miały za podstawę prostokąt, którego iednym bokiem byłaby liniia CB, a drugim, wysokość spolna obydwóch danych Równoległościanów; te mowię Równoległościany są do siebie iak ich wysokości AB, i BG, albo iak Prostokąty ABCD i CBGH. *Tab: II. Fig. 6.*

Podobnie Równoległościany, których, CBGH, i BEFG. są podstawami, uważa-

ne,

ne, iak gdyby miały za podstawę Prostokąt, którego iednym bokiem byłaby liniia BG, a drugim spolna wysokość dwóch danych Równoległościanów są także do siebie, iak ich wysokości, BC, BE, albo iak Prostokąt, CBGH, do Prostokąta BEFG.

Więc (przez złożenie stosunków) Równoległościan, którego podstawą iest ABCD, tak się ma do Równoległościanu, którego podstawą iest BEFG, iak się ma pierwsza podstawa do drugiey.

Krócey to samo.

Niech Równoległościany, których podstawami są Prostokąty: ABCD, CBGH, BEFG, będą oznaczone wyrazami następuiącemi: R. ABCD, R. CBGH, R. BEFG.

1. proporcya,

R. ABCD : R. CBGH = ABCD : CBGH.

2. proporcya;

R. CBGH : R. BEFG = CBGH : BEFG.

---

więc - - - - - -

R. ABCD : R. BEFG = ABCD : BEFG.

57. Wnio-

Wniosek 1. Dwa Równoległościany prostokątne, ieżeli maią równe tak wysokości, iak i podstawy, są równe; także, ieżeli równe dwa Równoległościany prostokątne, maią równe podstawy, równe będą i ich wysokości; albo ieżeli równe maią wysokości, równe będą i ich podstawy.

58. *Wniosek* 2. Można zawsze zamienić, albo w myśli zamienionym sobie wystawić Równoległościan ieden prostokątny, na drugi, iednakową z nim wysokość maiący, a któryby za podstawę miał Prostokąt, z iednym bokiem danym; to się zaś stanie, zamieniaiąc podstawę Równoległościanu danego, na Prostokąt, w któryby wchodził ten bok dany.

59. *Twierdz.* 5. Dwa Równoległościany prostokątne, ieżeli maią podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości, są równe; i wzaiemnie, ieżeli dwa Równoległościany są równe, będą podstawy ich, w stosunku odwrótnym ich wysokości.

Niech będzie ABCD podstawa, a BI wysokość Równoległościanu iednego Prosto- *Tab. II. Fig. 6.*

prostokątnego; drugiego zaś Równoległościanu niech będzie podstawa BEFG, a wysokość BL.

1. Niech zachodzi ta między podstawami y wysokościami proporcya:

ABCD : BEFG = BL : BI, tedy te Równoległościany będą równe.

Wystawmy sobie drugi Równoległościan, iakoby zamieniony na inny teyże samey wysokości BL, a maiący za ieden bok swoiey podstawy, bok nap: BC, należący do podstawy pierwszego Równoległościanu, i niech będzie tego nowego Równoległościanu podstawa CBMN.

Będzie zatym podstawa ABCD do podstawy BEFG. iak AB do BM; a żeśmy też przypuścili ABCD : BEFG = BL: BI, więc będzie AB : BM = BL: BI, a zatym Prostokąt maiący za boki, AB, BL. równy będzie Prostokątowi maiącemu za boki: BM, BL: Ze zaś pierwszy i trzeci Równoległościan maią za podstawy te dwa równe Prostokąty, i spolną przytym maią wysokość BC, więc są sobie równe. Aże trzeci Równoległościan równy iest drugiemu, więc i pierwszy równy także będzie drugiemu.

2. Niech

2. Niech Równoległościan, którego ABCD ieſt podſtawą, a BI wysokością, będzie równy Równoległościanowi, którego podſtawą ieſt BEFG: a wyſokością BL; idzie zatym że, - - ABCD: BEFG = BL : BI.

Zróbmy to ſamo co wyżey wykreślenie.

Uważaiąc pierwszy i trzeci Równoległościan, iako maiące za wysokość ſpolną, BC, będzie pierwszy do trzeciego iak Proſtokąt AB × BI do Proſt: BM × BL. A że te dwa Równoległościany ſą (przez przypuszczenie, albo wykreślenie) równe drugiemu, więc i ſobie ſą równe, więc AB × BI = BM × BL; a zatym AB : BM = BL : BI. Ze zaś AB: BM = ABCD : CBMN = ABCD : BEFG; więc ABCD : BEFG = BL : BI.

60. *Wniosek.* Z tego wszyſtkiego co ſię powiedziało, wynika ſposob znalezienia dwóch liniy, któreby były do ſiebie w ſtosunku dwóch Równoległościanów zawieraiących boki dane.

Przykład. Maiąc dany Sześcian i Równoległościan proſtokątny, znaleść liniią taką, aby ſtosunek Sześcianu do Równolewnoległościanu równy był stosunkowi boku Sześcianu do tey linii.

Niech będzie S bok Sześcianu, P,Q;R, boki trzy Rownoległościanu. Zamieńmy nayprzod Prostokąt, którego bokami są P, i Q na inny, któryby miał za bok ieden, bok Sześcianu; to iest szukaymy czwartey proporcyonalney do S, P, i Q; Niech będzie L, tą czwartą proporcyonalną. Równoległościan dany, równy będzie innemu, któryby miał za boki: S,L,R; a zatym stosunek Sześcianu do Równoległościanu danego, równać się będzie stosunkowi kwadratu S^2 do Prostokąta $L \times R$. Zamieńmy znowu ten drugi Rownoległościan równy danemu, na inny, któryby znowu miał S za bok ieden, to iest szukaymy czwartey proporcyonalney do S, L, i R. Niech będzie M, tą czwartą proporcyonalną: Równoległościan drugi, a zatym i pierwszy dany, iemu równy, równać się będzie trzeciemu, któryby miał za boki: S, S, M; więc stosunek Sześcianu do Rownoległościanu danego, równać się będzie stosunkowi kwadratu S^2 do prostokąta $S \times M$, to iest stosunkowi S, do M.

Aby tedy znaleść w liniiach, stosunek Sześcianu do Równoległościanu, prosto-

kątne-

kątnego, trzeba 1°. do boku Sześcianu, i do dwóch boków Równoległościanu szukać czwartey proporcyonalney; 2°. trzeba znowu do tegoż boku trzeciego, Równoległościanu, i do czwartey proporcyonalney dopiero znalezioney, szukać inney czwartey proporcyonalney; a stosunek boku Sześcianu, do tey ostatniey linii, równy będzie stosunkowi Sześcianu do Równoległościanu.

Idzie zatym, że ieżeli mamy dwa Równoległościany prostokątne, będziemy mogli wyrazić w liniiach ich stosunek, szukaiąc w liniach stosunku tychże Równoległościanów do iakiego Sześcianu; wziąwszy albowiem bok tego Sześcianu, za poprzednika, każdego z tych stosunków; stosunek ich następników, wyrażać będzie stosunek w liniiach, tych dwóch Równoległościanów.

61. *Uwaga.* Wszystko to, co się powiedziało o przyrównywaniu, albo mierze Geometryczney Równoległościanów prostokątnych, zgadza się zupełnie z nauką podaną w Arytmetyce o przyrównywaniu liczebnym Równoległościanów.

Przykł. Niech iedność wyraża bok Sześcianu wziętego za miarę do przyrównywania; a niech boki Równoległościanu, który chcemy do Sześcianu przyrównywać, zawieraią ten bok Sześcianu kilka razy oznaczonemi przez liczby nap. 5, 7, i 9. Czwarta proporcyonalna do boku Sześcianu, i do dwóch pierwſzych boków Równoległościanu wyrazi ſię przez liczbę 35, to ieſt zawierać będzie bok Sześcianu, razy 35; czwartą zaś drugą proporcyonalną, do tegoż boku Sześcianu, do trzeciego boku Równoległościanu i do pierwſzey czwartey proporcyonalney, wyrazi liczba 315; to ieſt zawierać ta będzie bok ſześcianu, razy 315. A zatym Równoległościan, zawierać będzie w ſobie Sześcian razy 315; to ieſt, wziąwſzy Sześcian za iedność albo ſpolną miarę; ten Równoległościan wyrazi ſię przez liczbę 315, która podług wykreślenia pochodzi z rozmnożenia liczb 5. 7, i 9.

62. *Defin.* Gdy cztery takie mamy linie, że ſtoſunki, pierwſzey do drugiey, drugiey do trzeciey, trzeciey do czwartey ſą równe, o takich liniiach mowi ſię, że ſą *ciągło* (continuè) proporcyonalne.

Przykłady

Przykłady liczebne: Cztery liczby: 1,2.4,8, nazywaią się ciągło proporcyonalnemi, a cztery linie, któreby tak się do siebie miały, iak te cztery liczby nazywałyby się też ciągło proporcyonalnemi. Toż mówić i o liczbach, 8,12,18.27, z których każda zawiera w sobie, poprzedzaiącą ieden raz i pół, i t. d.

Stosunek pierwszey z tych linii, do czwartey, składa się z stosunku, pierwszey do drugiey, drugiey do trzeciey, i trzeciey do czwartey (a to przez definicyą stosunku składanego). Ze zaś wszystkie te szczególne stosunki są równe, więc stosunek pierwszey tey linii do czwartey, składa się z 3 stosunków równych, ma zaś nazwisko stosunku *troymnożnego* (ratio triplicata) i pierwsza ta liniia do czwartey, będzie w stosunku tróymnożnym.

63. *Przystosowanie.* Niechby Równoległościan, który wymierzać mamy przez Sześcian wzięty za iedność, był i on sam Sześcianem.

Niech będzie AB bok Sześcianu maiącego służyć za miarę; AC bok Sześcianu który wymierzyć mamy. Szukaymy do AB, i AC, trzeciey proporcyonalney AE *Tab. II. Fig. 7.*

 (kreśląc

(kreśląc Tróykąt proſtokątny ABC, maiący, AB zaiedno ramie kąta proſtego, a AC zaprzeciwproſtkątną; i wyſtawuiąc do linii AC, w punkcie C, proſtopadłą CE, aż do iey ſpotkania ſię w E, z liniią AB przedłużoną) Szukaymy daley do AB, AC, AE, czwartey proporcyonalney, AF) wyprowadzaiąc od punktu E linii AE, proſtopadłą EF, aż do iey ſpotkania ſię w punkcie F z linią AC przedłużoną) Pierwſzy Sześcian, wzięty za miarę, tak ſię będzie miał do Sześcianu, który wymierzać przypada, iak liniia AB, do linii AF; to ieſt: iak liniia pierwſza do czwartey z liniy ciągło proporcyonalnych; z których pierwſzych dwóch iedna ieſt bokiem Sześcianu wziętego za miarę, a druga bokiem Sześcianu wziętego do wymierzenia; a zatym ſtoſunek pierwſzego Sześcianu do drugiego ieſt tróymnożnym ſtoſunku ich boków.

I tak, ieżeli bok Sześcianu iakiego trzy razy zawiera w ſobie bok Sześcianu wziętego za miarę, Sześcian pierwſzy będzie do drugięgo, iak 3 × 3 × 3 do 1. albo iak 27, do 1; to ieſt ieżeli liniia AC zawiera w ſobie razy trzy liniią AB; liniia też AE zawierać będzie trzy razy liniią AB; liniia też AE zawierać będzie razy 3

liniią

liniią AC, a zatym 9 razy liniią AB, a liniia AF zawierać będzie 3 razy liniią AE, a tym ſamym 27 razy liniią AB.

64. *Wzaiemnie.* Gdy trzeba znaleść Sześcian, któryby do drugiego był w ſtoſunku danym, i takim, któryby ſię równał ſtoſunkowi boku Sześcianu tego drugiego, do linii daney; bok Sześcianu, którego ſzukamy, ma być drugą liniią z czterech ciągło proporcyonalnych, między któremi pierwſza z czwartą, ſą w danym ſtoſunku; to ieſt: bok ten ſzukany, ma być liniią pierwſzą z dwóch średnich ciągło proporcyonalnych między pierwſzą i czwartą.

Zagadnienie to, nie może być rozwiązane przez Geometryą początkową, chyba trefunkiem przez doświadczanie i ſzukanie nie pewne; do dokładnego i pewnego rozwiązania, potrzeba iedney przynaymniey z liniy krzywych, nazwanych *przecięciami konicznemi* (ſectiones conicæ) o których ſię potym namieni. I toć to zagadnienie o znalezieniu dwóch średnich proporcyonalnych, pierwſzym powodem być muſiało Geometrom, do uważania, tych liniy krzywych dopiero wſpomnionych, i do uczynienia pierwſzego go kroku w wyżſzey Geometryi. Gdy ſię w *Delos* radzono Wyroczni, coby za ſpoſób był ziednania Bogów zagniewanych, i odwrócenia zarazy powietrza niſzczącego Państwo Attyckie; miał ſię dać głos ſłyſzeć: aby *dwumnożono ołtarze* (duplicentur Altaria) Po wielu niepożytecznych zawodach, poſtrzeżono nakoniec, iż trzeba było znaleść bok Sześcianu, dwa razy tak wielkiego, iak drugi wzięty za ſpolną miarę; to ieſt: iż trzeba było wynaleść pierwſzą z dwóch średnich Geometrycznych, między dwiema liniiami, z których iedna dwa razy w ſobie zamykałaby drugą.

65. W Arytmetyce; gdy ſtoſunek dany, ieſt ſtoſunkiem liczby iedney Sześcienney, do drugiey także Sześcienney, rozwiązać można dokładnie to zagadnienie. Tak nap: gdyby dwa Sześciany miały być do ſiebie, iak 1. do 8; albo iak 1 do 27, albo iak 8 do 27. i t. d. boki ich byłyby ieden do drugiego, iak 1. do 2, albo iak 1. do 3, albo iak 2, do 3. i t.d.

Ale gdy ſtoſunek dany nie ieſt ſtoſunkiem dwóch liczb Sześiennych, rózwiązanie będzie tylko do prawdziwego przybliżone. I tak, gdy Sześcian ieden,

ma

ma być dwa razy tak wielki, iak drugi, wziąwſzy bok tego drugiego, za iedność, bok pierwſzego powinienby być wyrażony przez liczbę taką, którey Sześcianem, ieſt 2; a zatym pierwiaſtek Sześcienny, liczby 2, wyrażałby ten bok; Pierwiaſtek zaś ten przybliżony, ieſt 1,26 to ieſt bok mnieyſzego Sześcianu, tak by ſię miał do boku Sześcianu dwa razy tak wielkiego, iak 1, do 1,26, albo iak 100, do 126. albo ieſzcze dokładniey iak 23, do 29.

66. *Uwaga*. Gdy ſtoſunek dwóch liniy ieſt dany; dany ieſt tym ſamym i ſtoſunek ich Sześcianów.

Tak albowiem mieć ſię będą do ſiebie te Sześciany, iak liniia pierwſza do czwartey ciągło proporcyonalney, wziąwſzy za pierwſze dwa wyrazy tey proporcyi dwie linie których ſtoſunek ieſt dany.

Zkąd wypada wnioſek naſtępuiący:

67. Gdy cztery liniie ſą w proporcyi, ich Sześciany w proporcyi też będą; to ieſt; gdy ſtoſunek dwóch pierwſzych liniy równa ſię ſtoſunkowi dwóch drugich; ſtoſunek też Sześcianów z dwóch

pier-

pierwszych liniy, równać się będzie stosunkowi Sześcianów z dwóch drugich liniy.

W Arytmetyce: cztery licz: 2, 3, 8, 12 składaią proporcyą
ich Sześciany: - - 8, 27, 512, 1728, składaią także proporcyą.

68 *Uwaga*. Podanie zamknięte w tym wniosku, iest tylko wyszczegulnieniem podania następuiącego:

Niech będą trzy iakiekolwiek proporcye, i cztery takie Równoległościany prostokątne; aby krawędzie pierwszego Równoległościanu, były trzema poprzednikami trzech pierwszych stosunków, krawędzie drugiego, trzema następnikami tychże trzech pierwszych stosunków, krawędzie trzeciego, trzema poprzednikami, trzech drugich stosunków, a krawędzie czwartego, trzema następnikami tychże trzech drugich stosunków; stosunek pierwszych dwóch Równoległościanów równy będzie stosunkowi dwóch ostatnich.

Trzeba nayprzod to podanie obiaśnić na przykładach liczebnych.

W ogul

W ogulności zaś niech będą trzy iakie-kolwiek proporcye: A : B = C : D.

a : b = c : d.

a : *b* = *c* : *d*.

Zamieńmy stosunek A do B na inny b do czwartey linii *E*: Zamieńmy podobnie i stosunek C do D na inny d, do czwartey linii *e*.

Będą podstawy drugiego i czwartego Równoległościanu równe prostokątom B × b, i, D × d ; a zatym podstawy dwóch pierwszych Równoległościanów będą się miały, do siebie iak a do *E*, a podstawy zaś dwóch drugich Równoległościanów będą się miały do siebie iak c do *e*.

Aże przez przypuszczenie i wykreślenie stosunki ; A do B, b do *E*, C do D, d do *e*, są wszystkie równe, - -

więc - - b : *E* = d : *e*.

Ze zaś - a : b = c : d

więc a : *E* = c : *e*.

A zatym stosunek podstaw Równoległościanów dwóch pierwszych, równy ieſt

ieſt ſtoſunkowi Równoległościanów dwóch drugich.

Jeſt też z przypuſzczenia;

$$a : b = c : d$$

więc Proſtokąty aa, Eb, cc, ed ſkładaią propo cyą; a zatym cztery Równoległościany; któreby te Proſtokąty miały za podſtawy, i z których dwa pierwſze miałyby ſpolną wyſokość A, dwa zaś drugie wyſokość C, byłyby także z ſobą w proporcyi, Aże pierwſzy z tych Równoległościanów miałby za krawędzie trzy linie: A, a, a, drugi zaś równałby ſię temu, któryby miał za krawędzie trzy linie: B, b, b: a to dla tego, że ſą równe Proſtokąty: B × b i A × E) trzeci z tych Równoległościanów miałby za krawędzie, trzy linie; C, c, c, a czwarty równałby ſię temu, któryby miał za krawędzie, trzy linie: D, d, d; więc te cztery Równoległościany byłyby w proporcyi.

RO·

ROZDZIAŁ IV.

O Równoległościanach nie prostokątnych.

69. D*Efin:* Bryła zakończona 6 ścianami parzysto równoległemi, nazywa się *Równoległościanem* a zatym Równoległościany prostokątne, o których w Rozdziale poprzedzaiącym mowa była, są pewnym gatunkiem Równoległościanów.

70. *Twierdz.* 1. W Równoległościanie, wszystkie ściany są Równoległobokami; każde zaś dwie ściany przeciwne, mogą przystać do siebie.

Niech będzie Równoległościan ABCDEFGH; wszystkie iego ściany są Równoległobokami, a ściany przeciwne nap: ABCD, EFGH mogą do siebie przystać. *Tab. III Fig. 1*

Dowodz: Ponieważ płaszczyzny równoodległe ABCD, GHFE, są przecięte trzecią płaszczyzną BGFC, więc ich spólne przecięcia BC, FG z tą płaszczyzną, są równoodległe. Także pokazać można, że liniie HE, GF są równoodległe, i liniie: HG, EF równoodległe; a zatym

że

że ściana HGFE ieſt Równoległobokiem. Podobnie i wſzyſtkie inne ściany ſą także Równoległobokami.

W ſzczególności zaś, linije: BA, GH, i linije BC, GE, ſą od ſiebie równoodległemi; więc równe ſą kąty ABC, HGF. Aże te linije BA, GF, i BC, GF ſą równe, więc Równoległoboki, ABCD, HGFE, mogą przyſtać do ſiebie. Toż mowić o każdey inney parze ścian przeciwnych,

71. Ztąd też wyſtawić ſobie można każdy Równoległościan, iakoby utworzył ſię naſtępuiącym ſpoſobem:

Niech będzie iakikolwiek Równoległobok; a od iednego z iego wierzchołków wyciągniymy liniią czyniącą z iego płaſzczyzną, kąt iakikolwiek ;wyciągniymy potym i przez drugie wierzchołki, linije równoodległe od pierwſzey, i zrobmy wſzyſtkie ſobie równemi. Niech nakoniec ten Równoległobok poſuwa ſię równoodlegle od pierwſzego ſwego położenia, i niech wierzchołki iego nie ſchodzą nigdy z liniy równoodległych, mieyſce od Rownoległoboków, tym ſpoſobem przebyte, będzie Równoległościanem.

72. *Twierdz.*

72. *Twierdz. 2.* Dwa Równoległościany mogą przystać do siebie, gdy i wszystkie ich odpowiadaiące sobie ściany przystać do siebie mogą, i gdy kąty ich bryłowe także sobie odpowiadaiące, robią się z kątów równych należących do tychże ścian.

Niech będą dwa Równoległościany: AF, af, których wszystkie ściany odpowiadaiące sobie w iednym i w drugim Równoległościanie, mogą przystać do siebie, i których kąty bryłowe także sobie odpowiadaiące nap: A, i a, robią się z równych kątów tychże ścian; te dwa Równoległościany przystać de siebie mogą. *Tab: III Fig: 12 i 12a.*

Dowodz: Ponieważ kąty bryłowe, A, i a, robią się z równych względem siebie kątów płaskich, więc przystać do siebie mogą. Przeniozłszy tedy Równoległościan af, tak aby kąt bryłowy a, przystał w rzeczy samey do kąta bryłowego A; ponieważ i kąty płaskie, z których się te bryłowe robią, przystaią iedne do drugich sobie równych; a linie ab, ad, ah, są równe względem liniy AB, AD, AH; więc punkta: b, d, h, przystaną do punktów: B,D,H, i ściany także że czyniące dwa kąty bryłowe a, i A, przyſtaną iedne do drugich; a zatym i punkta: c, g, e, przyſtaną do punktów odpowiadaiących ſobie: C, G, E; a wſzczególności linie: bc, bg, przyſtaną do liniy: BC, BG. Więc i płaſzczyzna przechodząca przez linie: bc, bg. leżeć będzie na płaſzczyznie przechodzącey przez linie BC, BG. Że zaś przypuściliśmy iż ściana bcfg, przyſtać może do ściany BCFG, więc punkt f, przyſtanie do punktu F.

Tymże ſpoſobem okazać można, że i wſzyſtkie inne ściany, i kąty Równoległościanu af, przenieſionego, przyſtaną do innych ścian i kątów Równoległościanu AF, a zatym te dwa Równoległościany przyſtać do ſiebie mogą.

73. *Uwaga.* Tymże cale ſpoſobem dowodzi ſię, że dwie iakiekolwiek Bryły, przyſtać mogą do ſiebie, gdy wſzyſtkie kąty ich bryłowe odpowiadaiące ſobie, przyſtać także do ſiebie mogą, i gdy ściany iedney Bryły przyſtać mogą do ścian odpowiadaiących w drugiey Bryle.

73. *Definicye.* Uważaiąc Równoległościan iakoby zbudowany na iedney z ścian ſwoich, ta ściana nazywa ſię, *podſtawą* iego; a proſtopadła od punktu któregokolwiek ściany przeciwney, do tey ſpu-

ſpuſzczona, nazywa ſię *wyſokością* tego Równoległościanu.

Gdy ściany zbudowane na bokach podſtawy, ſą do niey proſtopodłemi, taki Rownoległościan nazywa ſię *proſtym* (Parallelopipedum rectum) Równoległościany proſtokątne, ſą gatunkiem Równoległościanów proſtych, w których podſtawa nawet ſama ieſt proſtokątem.

75. *Twierdz.* 3. Dwa Równoległościany równe ſą w *bryłowatości* (ſoliditas) gdy maią iednakową wyſokość, i na teyże ſamey ſą zbudowane podſtawie, a dwie ich ściany, na iedney płaſzczyznie znayduiące ſię, ſtoią na tymże ſamym boku podſtawy.

Niech będą dwa Równoległościany: ACGE. i ACLI. zbudowane na teyże ſamey podſtawie AC; i niech dwie ich ściany, AG, AL znayduią ſię na teyże ſamey płaſzczyznie; te dwa Równoległościany, ſą równe w bryłowatości. *Tab. III Fig. 3*

Dowodz. Dwie Bryły: ADIEHM, BCKFGL, maią takie wſzyſtkie ściany odpowiadaiące ſobie, iż iedne do drugich przyſtać mogą; wſzyſtkie podobnie kąty ich

ich bryłowe przyſtać mogą do ſiebie. Jakoż Tróykąt HAM, może przyſtać do Tróykąta GBL, a wſzczegulności kąty HAM, GBL, ſą równe. Równoległobok HADE przyſtać może do Równoległoboku: GBCF ſobie przeciwnego, w pierwſzym Równoległościanie, a wſzczęgulności kąty: HAD, GBC, ſą równe; Równoległoboki także: MADI, LBCK przeciwne ſobie, w drugim Równoległościanie, mogą do ſiebie przyſtać, a wſzczegulności kąty: MAD. LBC, ſą równe, więc kąty bryłowe A,B, i ściany tych kątów mogą przyſtać do ſiebie. Toż mowić i o wſzyſtkich innych kątach bryłowych, i o wſzyſtkich innych, tych dwóch Brył, ścianach. Zaczym te dwie Bryły przyſtać mogą do ſiebie. i ſą równe ſobie w bryłowatości. Aże od całey Bryły ACLE odiąwſzy pierwſzą z Brył wyżey wyrażonych, ADIEHM, zoſtaie ſię Równoległościan ACLI a odiąwſzy od teyże całey Bryły ACLE, drugą Bryłę BCKFGL, zoſtaie ſię Równoległościan ACGE; więc te dwa Równoległościany ſą równe. (f)

76.

(f) *To dowodzenie ieſt ogulne, i rozciąga ſię do iakiegożkolwiek położenia linii MI; czyliby punkt M przypadał na punkt*

76. *Twierdz.* 4. Dwa Równoległościany są równe w bryłowatości, gdy iednaką maią wysokość, i na teyże samey są zbudowane podstawie, chociaż żadna z ich ścian stoiących na bokach podstawy, nie będzie na teyże samey płaszczyznie.

Niech będą dwa Równoległościany: ACGE, i ACLI, na teyże samey podstawie AC, z iednaką wysokością; i niech inne ich ściany na odmiennych znayduią się płaszczyznach; te dwa Równoległościany są równe. *Tab. III Fig. 4.*

Dowodz. Przedłużmy linije KI, HE tak daleko, aż się znidą z sobą w punkcie O. Niech ieszcze i linija LM, przedłużona, przecina HE, w N; a linija GF także przedłużona niech przecina IK w P i niech Q będzie punktem przecięcia liniy GF, LM, albo ich przedłużeń.

Pociągniymy linije AN, DO, EQ, CP.

Bryła ACQO, będzie Równoległościanem, czego bardzo łatwo dowieść można.

H Ró-

G, czyliby się znaydował między G i H, czyli nakoniec byłby na linii HG przedłużoney.

Równoległościan ACQO, ma tę ſamę co tamte dwa, podſtawę AC.

Ma ścianę AO na płaſzczyznie ściany AE, należącey do Równoległościanu, ACGE, więc temu Równoległościanowi będzie równy.

Ma zaś oprócz tego ścianę AQ na płaſzczyznie ściany AL, należącey do Równoległościanu ACLI, więc będzie równy i temu drugiemu Równoległościanowi.

Więc Rownoległościan ACQO równy ieſt tak Równoległościanowi ACGE. iako i Równoległościanowi ACLI; a zatym i te dwa Równoległościany ſą też ſobie równe,

77 *Twierdz.* 5. Dwa Równoległościany ſą równe, gdy iednaką maią wyſokość i równe podſtawy, z iednym ſpolnym bokiem, i gdy ich ściany na tymże ſamym boku ſpolnym wyſtawione, znayduią ſię na teyże ſamey płaſzczyznie.

Tb. III Fig. 5. Niech będą dwa Równoległościany: ACGE, ICOQ iednakiey wyſokości; a podſtawy ich równe AC, IC, niech maią bok

bok ſpolny CD, na którym wyſtawione ſą dwie ściany DF, DP na teyże ſamey płaſzczyznie znayduiące ſię, te dwa Równoległościany ſą równe.

Wykreśl. Przez punkta I, i L, poprowadźmy na płaſzczyznie AG, czyli AO, liniie JN, LM, równoodległe od AH, albo BG, i niech te równoodległe ſpotykaią w N i M. linią HO. Pociągniymy i liniie EN, FM. Bryła JCME będzie też Równoległościanem.

Dowodz: Równoległościan: ICME, ma też ſamę podſtawę JC, i tę ſamę wyſokość, co i Równoległościan JCOQ, a zatym ſą ſobie równe.

Tenże Równoległościan JCME, i Równoległościan ACGE, uważaiąc w nich ścianę ſpolną DF, iak podſtawę, maią też iednaką wyſokość, a zatym ſą ſobie równe. Więc Równoległościan JCME, równy ieſt tak iednemu, iak i drugiemu Równoległościanowi: ACGE, i JCOQ, a zatym i te dwa Równoległościany ſą równe.

78. *Twierdz:* 6. Dwa Równoległościany ſą równe, gdy maią iednaką wyſokość, *Tab. III Fig.* 5

 i gdy

gdy ich podſtawy maiące bok ieden ſpolny, ſą równe.

Niech we dwóch Równoległościanach iednakiey wyſokości będą dwie podſtawy: AC, i IC równe, i maiące ſpolny bok CD; te dwa Równoległościany będą równe.

Wykreśl. Na podſtawie IC, iednego z tych Równoległościanów, który nazwiemy pierwſzym, poſtawmy trzeci Równoległościan teyże ſamey wyſokości, tak, aby ściana iego ſtoiąca na boku CD, znaydowała ſię na płaſzczyznie ściany drugiego Równoległościanu, ſtoiącey na tymże boku;

Ten trzeci Równoległościan, iako maiący z pierwſzym ſpolną podſtawę i wyſokość, będzie mu równy. Tenże trzeci Równoległościan, będzie równy, i drugiemu; bo maią równe podſtawy: IC, AC, z ſpolnym bokiem CD, i ściany ich ſtoiące na boku CD, znayduią ſię na teyże ſamey płaſzczyznie.

Więc ten trzeci Równoległościan równy ieſt tak pierwſzemu iak i drugiemu, a zatym i one ſobie równe będą.

W ſzcze-

Wszczegulności. Równoległościan każdy równy iest Równoległościanowi prostokątnemu, który ma tę samę, co i tamten wysokość, podstawę równą podstawie iego, i bok ieden spolny obydwom podstawom.

79. Zkąd wynika, że cokolwiek się powiedziało o Równoległościanach prostokątnych, wszystko to do iakichkolwiek innych można przystosować; kładąc zamiast każdego z nich, Równoległościan prostokątny, tegoż samey wysokości, i podstawy równey, a maiącey bok ieden spolny z podstawami Równoległościanów nie prostokątnych. I tak.

1. Dwa Równoległościany, maiące rowne podstawy i wysokości, są równe; bo Równoległościany prostokątne iednakiey wysokości, i maiące ztamtemi Równoległościanami rowne podstawy, a w nich spolny bok ieden, są równe.

2. Dwa Równoległościany są też równe, których podstawy są w stosunku odwrótnym, ich wysokości.

3. Dwa Równoległościany, których bryłowatości są równe, maią podstawy w stosunku odwrótnym ich wysokości.

4.

4. Wszyſtko to, co ſię powiedziało o zamienianiu ſtoſunku dwoch Równoległościanów proſtokątnych, na ſtoſunek dwóch liniy; i o mierze liczebney dwóch Równoległościanów proſtokątnych, przyſtoſować można do miary Równoległościanów nie proſtokątnych; używaiąc do tego, boku iednego podſtawy, wyſokości iey względem tego boku, i wyſokości Równoległościanu.

80. *Przeſtroga* Gdyby ściſłe i prawdziwe Geometryczne dowodzenie wyżey położone przytrudnym ſię zdawało uczniom do poięcia, mimo wyſtawionych im przed oczy figur, z drewna, lub papieru wyrobionych; można im to będzie łatwiey do poięcia podać w ſpoſob naſtępuiący.

Niechay dwa Równoległościany z równemi podſtawami, i wyſokościami ſtoią na teyże ſamey płaſzczyznie. Niech inna iakakolwiek płaſzczyzna równoodległa od pierwſzey, przecina te dwa Równoległościany. Przecięcia ich będą równe, i podobne ich podſtawom, a zatym i ſobie równe będą; i gdziekolwiek te dwa Równoległościany przetniemy przez płaſzczyznę równoodległą od ich

pod-

podſtaw, równe zawſze będą te przecięcia. Zadney więc niemaſz przyczyny, dla ktoreyby ieden z tych Równoległościanow nie miał być równym drugiemu.

Trzeba tu iednak oſtrzedz zaraz uczniów, iż tym ſpoſobem, ſłabo ſię w rzeczy ſamey dowodzi równość dwóch Równoległościanow. Bo chociażby iak naywięcey było tych przecięć równoodległych od podſtaw Rownoległościanow, to ieſt: chociażby iak naymnieyſza była odległość każdego z tych przecięcia, od drugiego naybliżſzego, wſzelako części Równoległościanów zawarte między takiemi dwoma przecięciami, ſą ieſzcze Równoległościanami, które tak ſię względem ſiebie maią, iak ſię maią całe Równoległościany, których tamte ſą częsciami. Aby więc wnieść można równość Równoległościanow, z równości ich części, trzebaby pierwey dowieśc równości tych części.

Może ſię imaginacya naſza tak daleko zapuścić, że przez nię wyſtawiemy ſobie dwoch Równoległościanów przycięcia tak bliſkie iedne od drugich, iż części między niemi zawarte będą ſię zda-

waé

wać nie różnić od podstaw tychże Równoległościanów; lecz prawdziwe rozumowanie uczynić tu różnicę potrafi i powinno. Wiemy albowiem że małość lub wielkość iakiey rzeczy, nie iest w sobie małością lub wielkością ale się albo za małość bierze względem inney rzeczy większey, albo za wielkość, względem inney mnieyszey; i nie można nigdy Bryły choć by też nayciensżey za iedno brać z powierzchniami, które ią kończą. Prawda to iest, że im większa będzie liczba przecięciów, dwóch Równoległościanów przez płaszczyzny równoodległe od ich podstaw, tym mnieysza będzie różnica małych dwóch ich części zawartych między dwiema naybliższemi płaszczyznami, czyli przecięciami; ale znowu, ieżeli iakakolwiek iest choćby też naymnieysza, ta różnica, tedy wielokroć powtorżona może uczynić różnicę wielką, w dwóch Równoległościanach, których równości chcemy dowodzić, z równości z ich cząstek, czyli z małych Równoległościanów, z których się składaią.

Ta sama trudność do rozwiązania zostaie, gdyby kto równości dwóch Równoległościanów maiących iednaką podstawę

ſtawę i wyſokość, a z których ieden byłby naprzykład. proſty, a drugi nie, chciał dowodzić z podnoſzenia ſię w gorę ich podſtaw w rowney zawſze od pierwſzego położenia odległości; ponieważ pierwey dowieść trzebaby, że mieyſca od podſtaw przebyte, nie podług tey drogi brane być powinny, którą w ſamey rzeczy punkt każdy tych podſtaw przebył; (bo do iednakiey wyſokości poſtępuiąc, więcey mieyſca przeydzie punkt nap: ſkrayny Równoległościanu ukośnego, niż tego, który ieſt proſty) ale to mieyſce od podſtaw Równoległościanów przebyte, powinno ſię wymierzać wzdłuż linii proſtopadłey do teyże podſtawy, ponieważ ta tylko liniia mierzy odległość, w którey podſtawa podnoſzeniem ſię ſwoim oddaliła ſię od pierwſzego ſwego położenia.

Naſtępuiące porównywanie może iakożkolwiek ſłużyć do ułatwienia tych wątpliwości, lubo ich nie znoſi cale.

Gdy dwa Równoległoboki zrobione na teyże ſamey podſtawie, i z równą wyſokością, przetniemy liniią równoodległą od podſtawy, obadwa przecięcia równe będą podſtawie. Wſzyſtkie też inne ne takowe przecięcia tych dwóch Równoległoboków, byłyby równe, i tyleby ich było w iednym, co i w drugim Równoległoboku. Toż mówić i odwoch Tróykątach, ktòrych przecięcia równoodległe od podstawy spolney, byłyby także równe. Dla czegoż więc te dwa całe Równoległoboki, lub Tróykąty niemiałyby sobie być równe ? Ponieważ tedy tym sposobem dochodziemy względem powierzchni płaskich, tey samey prawdy, którey doszliśmy ścisłym pierwey dowodzeniem; iuż ten sam skutek, powinien nas wątpliwości pozbawić, ktorąbyśmy mieć mogli w używaniu tego sposobu. Można zatym przystosować go i do Brył dla teyże przyczyny.

Obiaśni się to iaśnie i potym, gdy mowić będziemy o sposobie *wyczerpania* (de methodo exhaustionis.)

81. *Twierdzenie 7.* W iakimkolwiek Równoległościanie, przez krawędź którąkolwiek, i przez przekątną iedney z ścian iego przeciągnąwszy płaszczyznę; przecięcie Równoległościanu przez tę płaszczyznę, będzie Równoległobokiem, i podzieli Równoległościan na dwie części, które przystać do siebie mogą.

Niech

Niech będzie Równoległościan: ACGE; *Tab: III*
przez krawędź AH, i przez przekątną *Fig.* 1.
HF niech przechodzi płaszczyzna; liniie AH, CF są równoodległe, a płaszczyzna, która przechodzi przez AH, HF, przechodzi też i przez CF. Ze zaś liniie: AH, CF są równe, i równoodległe, więc Czworokąt ACFH, iest oraz i Równoległobokiem.

Dwie Bryły: ABCFGH, FEHACD, mogą przystać do siebie.

1. Wszystkie ich ściany, są równe iedne względem drugich, bo ściany ich *Rownoległoboczne* (Parallelogrammicæ) są ścianami przeciwnemi w Równoległościanie; ściany zaś ich Tróykątne iak nap: ADC, HEF, maią równe boki iedne względem drugich.

2: Wszystkie ich kąty bryłowe mogą przystać iędne do drugich; nap: kąt bryłowy w A iedney Bryły, robi się z trzech kątów płaskich: CAB, BAH, HAC, które równe są względem kątów EFH, EFC, HFC, z których się robi kąt bryłowy w F, drugiey Bryły.

Więc te dwie Bryły mogą przystać do siebie, a wszczegulności są sobie równe.

ROZD:

ROZDZIAŁ V.

O Graniastosłupach.

82. T*Wierdz: przybrane.* Niech będą dwie prostokreślne Figury równe i podobne, wykreślone na dwóch równoodległych płaszczyznach; niech iesz cze i boki ich równe, będą równoodległe iedne względem drugich; Czworokąty, których bokami przeciwnemi, będą boki równe tych Figur, są Równoległobokami.

Dowodz: We wszystkich takowych Czworokątach, boki dwa przeciwne są równe, i równoodległe; a zatym i inne boki są też równe i równoodległe.

83. *Defin:* Niech będzie Bryła iaka zakończona dwiema Figurami prostokreślnemi, równemi, podobnemi i równoodległemi a maiącemi wszystkie boki, iedne względem drugich równoodległe, i tylą Równoległobokami maiącemi za boki, boki przeciwne tamtych dwóch Figur, ile każda z tych Figur ma boków, ta Bryła nazywa się *Graniastosłupem* (Prisma). I tak Równoległościany, o których w poprzedzaiących Rozdziałach mówi-

mówiliśmy, ſą pewnemi Graniaſtoſłupów gatunkami. Jedna z tych Figur równych i równoodległych, na którey wyſtawiamy ſobie, iakoby zbudowany Graniaſtoſłup nazywa ſię iego *podſtawą*, a proſtopadła ſpuſzczona na tę podſtawę, z punktu jakiegokolwiek ściany przeciwney nazywa ſię *wyſokością* tego Graniaſtoſłupa. Graniaſtoſłup albo ieſt *proſty*, albo *ukośny*; *proſty*, gdy ściany iego ſtoią do pionu względem podſtawy; *ukośny*, gdy też ściany ſą do podſtawy nachylone.

Różne także nazwiſka przybiera Graniaſtoſłup, podług rozmaitey liczby boków podſtawy ſwoiey, albo podług wielości ścian pobocznych. Nazywa ſię *tróykątnym*, *czworokątnym*, *pięciokątnym*, *ſześciokątnym*, gdy podſtawa iego ieſt Tróykątem, Czworokątem, Pięciokątem, Sześciokątem i t. d.

84. *Twierdz*: 1. Przeciąwſzy gdziekolwiek Graniaſtoſłup płaſzczyzną równoodległą od iego Podſtawy, przecięcie to będzie Figurą równą i podobną podſtawie.

Dowodz: Przecięcie iedney którey kolwiek ściany poboczney, przez tę płaſzczyſzczyznę, równoodległym będzie od tego boku podſtawy, na którym ta ściana ſtoi; i te dwie linie będą bokami przeciwnemi Równoległoboku, który za dwa inne boki, ma części dwóch innych boków teyże ściany, zawarte między podſtawą i płaſzczyzną przecinaiącą; więc te dwie linie będą równe.

Przecięcia więc przez tę płaſzczyznę dwóch ścian przyległych, będą równoodległe względem boków ſobie przeciwnych, należących do podſtawy, a zatym kąt, który te ſpolne przecięcia zrobią, równy będzie kątowi zawartemu między temi bokami podſtawy.

Będzie tedy mieć przecięcie Graniaſtoſłupa przez tę płaſzczyznę, wſzyſtkie ſwoie boki i wſzyſtkie kąty równe względem boków i kątów podſtawy Graniaſtoſłupa, i dla tego przecięcie to przyſtać może do podſtawy.

85. Można ſobie wyſtawić Graniaſtoſłup, iakoby zrobiony przez poſuwanie ſię w gorę iego podſtawy, w ſpoſób następuiący:

Niech będzie Figura iaka proſtokreślna, odryſowana na płaſzczyznie. Od wierz-

wierzchołku kąta którego kolwiek tey Figury, wyciągniymy liniią prostą czyniącą iakikolwiek kąt z tą płaszczyzną. Niech się potym wznosi do gory ta Figura, w równey zawsze od siebie odległości, a ten wierzchołek niech nigdy nieschodzi z linii od niego wyprowadzoney; Bryła która się takim ruchem utworzy, będzie Graniastosłupem.

86. *Twierdz.* 2. Graniastosłup troykątny, iest połową Równoległościanu takiego, któryby za podstawę miał Rownoległobok dwa razy większy od podstawy tego Graniastosłupa, zdwoma bokami rownaiącemi się bokom podstawy tegoż Graniastosłupa tróykątnego.

Niech będzie Graniastosłup tróykatny ABCDEF, którego podstawą iest Troykat ABC. Dokończmy Równoległoboku ABCG, którego dwoma bokami są AB, BC; na tym Równoległoboku dokończmy Równoległościanu ACEH, którvby miał spolne dwie ściany AE, i BD z Graniastosłupem tróykątnym. *Tab. IV. Fig. 1.*

Dwa Graniastosłupy Tróykatne: ABCDEF, DHFAGC, mogą do siebie przystać, bo są dwiema częściami oddzielonemi mi przez płaſzczyznę przekątną ACDF; a zatym ieden z nich, nap: Graniaſtosłup ABCDEF, ieſt połową Równoległościanu ACEH,

87 *Wnioſek.* Cokolwiek ſię powiedziało o Równoległościanach względem ich wielkości, wſzyſtko to przyſtoſować można do Graniaſtosłupów troykątnych, które tych Rownoległościanow ſą połowami.

1. Dwa Graniaſtosłupy troykątne, rowney wyſokości i podſtawy, równaią ſię iw bryłowatości.

2. Dwa Graniaſtosłupy troykątne, których podſtawy ſą rowne, maią ſię do ſiebie, iak ich wyſokości.

3. Dwa Graniaſtosłupy troykątne iednakiey wyſokości, maią ſię do ſiebie iak ich podſtawy.

4. Dwa Graniaſtosłupy troykątne, których podſtawy ſą w ſtoſunku odwrotnym ich wyſokości, równaią ſię ſobie w bryłowatości.

5. Dwa Graniaſtoſłupy troykątne, równe w bryłowatości, maią podſtawy w ſtoſunku odwrótnym ich wyſokości.

6. Co

6. Co ſię powiedziało o porownywaniu liczebnym dwòch Rownoległościanòw, to twierdzić można i o porownywaniu dwòch Graniaſtosłupòw tròykątnych. Trzeba podobnie dla znalezienia ich bryłowatości przez rachunek, rozmnożyć liczbę, znaczącą wielkość podſtawy Graniaſtoſłupa tròykątnego, przez liczbę znaczącą wielkość iego wyſokości.

7. Maiąc wiadomą podſtawę Graniaſtosłupa tróykątnego, i kąty dwòch ścian iego, ktòre z kątem podſtawy czynią ieden kąt bryłowy, można wyznaczyć Graniaſtosłup tròykątny, i iego wyſokość, a zatym i bryłowatość tymże ſamym ſpoſobem, iak ſię czyniło względem Rownoległościanòw.

8. Graniaſtosłupy tròykątne, maiące ſpòlny kąt ieden bryłowy, ſą do ſiebie iak Rownoległościany proſtokątne, maiące te ſame trzy krawędzie; w rachunku zaś tak ſą do ſiebie, iak liczby trzy ciągło iedna przez drugą rozmnożone, wyrażaiące wielkość tych trzech krawędzi.

88. *Twierdz:* 3. Graniaſtosłup nie tròykątny może być rozłożony na Gra-

niastosłupy tròykątne teyże co on wysokości; za podstawy zaś maiące Tròykąty, na ktòre rozdzielona iest iego podstawa przez tyle przekątnych ciągnionych od iednego tey podstawy wierzchołka do innych, ile ich poprowadzić można.

Tab. IV. Fig. 2 Niech będzie ABCDE, podstawa nap: pięciokątna Graniastosłupa ABCDE edcba. Od iey wierzchołka nap: A poprowadźmy przekątne: AD, AC, te rozdzielą Podstawę na trzy Tròykąty: AED, ADC, ACB. Na ścianie przeciwney podstawie, od punktu *a*, odpowiadaiącego punktowi A, poprowadzmy przekątne: ad. ac.

Liniie Aa, Dd, są obiedwie ròwnoodległe od linii Ee, i oney ròwne; więc i względem siebie będą ròwnoodległemi i ròwnemi; a przeto Czworokąt ADda, iest Ròwnoległobokiem, a zatym Bryła ADE eda, iest Graniastosłupem tròykątnym. Tymże sposobem okazuie się, że i Bryły: ACDdca, ACBbca, są Graniastosłupami tròykątnemi.

89. *Twierdz: 4.* Dwa iakiekolwiek Graniastosłupy maiące ròwną wysokość, tak się do siebie maią, iak ich podstawy.

Jakoż

Jakoż Graniaſtosłupy ADE eda, ADC cda, ACB bca, i t. d. maią ſię do ſiebie iak ich podſtawy; ADE, ACD, ABC; więc ieden z nich, nap: Graniaſtosłup: ADE eda, tak ſię ma do ſummy wſzyſtkich, to ieſt, do Graniaſtosłupa pięciokątnego, iak podſtawa tròykątna pierwſzego, do ſummy podſtaw wſzyſtkich, to ieſt, do podſtawy Graniaſtosłupa pięciokątnego.

Podobnie też i każdy inny Graniaſtoſłup iednakiey wyſokości, takby ſię miał do Graniaſtoſłupa tròykątnego: ADEeda, iak podſtawa iego do podſtawy tròykątney ADE.

Więc (złożywſzy ſtoſunki) będzie ſtoſunek iakiegokolwiek Graniaſtoſłupa do Graniaſtoſłupa ABCDE edcba, ròwny ſtoſunkowi podſtawy pierwſzego Graniaſtoſłupa, do podſtawy ABCDE; (a to wtedy, gdy wyſokości tych dwòch Graniaſtoſłupòw ſą ròwne.)

Wſzczegulności zaś, gdy Ròwnoſegłościan i Graniaſtosłup iakikolwek ròwne mieć będą podſtawy i wyſokości; bryłowatość iednego, ròwna będzie bryłowatości drugiego.

A zatym cokolwiek ſię o Ròwnoległościanach powiedziało, można to i do

 Gra-

Graniastosłupów iakichkolwiek przystosować, co do wielkości ich, ile te zawisły od ich podstaw i wysokości. Można przeto do iakichkolwiek Graniastosłupów przystosować wnioski, co do Graniastosłupów tròykątnych wszczegulności, ktòre po Twierdzeniu 2gim tego Rozdziału następuią.

ROZDZIAŁ VI.

O Piramidach albo Ostrosłupach.

90. D*Efin:* Niech punkt iaki znayduie się nad płaszczyzną Figury iakieykolwiek prostokreślney; przez ten punkt i przez wszystkie boki Figury, niechay przechodzą płaszczyzny; zrobi się ztąd Bryła kończąca się z iedney strony na tey Figurze, a z innych stron, na tylu Tròykątach maiących spolny wierzchołek w owym punkcie, ile ta Figura ma bokòw. Bryła ta nazywa się *Ostrosłupem* (Pyramis.) Powierzchnią Ostrosłupa można sobie wystawić iakoby zrobioną ruchem nici przywiązaney iednym końcem do punktu znayduiącego się nad płaszczyzną Figury, a drugim końcem wyciągnionym obracaiącey się około obwodu teyże Figury. Figura prostokreślna,

ſła, ktòrey boki ſłużą za podſtawy Tròykątòw kończących Oſtroſłup, nazywa ſię *podſtawą* oſtroſłupa, te Tròykąty nazywaią ſię iego *ścianami*; punkt ktòry ieſt wierzchołkiem ſpolnym wſzyſtkich ścian Oſtrosłupa, nazywa ſię *wierzchołkiem* iego. Proſtopadła ſpuſzczona od tego wierzchołka, na płaſzczyznę podſtawy, zowie ſię *wyſokością* Oſtroſłupa.

Oſtrosłup rożne przybiera nazwiſka, podług wielkości bokòw podſtawy ſwoiey. Nazywa ſię tròykątnym, czworokątnym, pięciąkątnym, ſześciokątnym i t. d. gdy podſtawa iego ieſt Tròykątem, Czworokątem, Pięciokątem, Sześciokątem i t. d.

Ten Oſtroſłup nazywać będziemy *proſtym*, ktòrego podſtawą ieſt Figura proſtokreślna mogąca ſię na kole opiſać; i gdy proſtopadłey ſpuſzczoney od wierzchołka tego Oſtroſłupa, drugi koniec przypada na środek tego koła.

W takim Oſtroſłupie wyſokość wſzyſtkich ścian ieſt iednakowa, i tych ścian płaſzczyzny rowrie ſą nachylone do płaſzczyzny podſtawy.

W Oſtrosłupie, ktòrego podſtawą ieſt Figura proſtokreślna mogąca ſię wpiſać w koło, a którego wyſokość wychodzi od środka, tego koła, wſzyſtkie krawędzie ścian ſą równe, a zatym wſzyſtkie te ściany ſą Tròykątami równoramiennemi. Ale że środek koła opiſanego na podſtawie, może czaſem za tę podſtawę wychodzić, dla tego, takowego Oſtroſłupa nie można nazywać proſtym.

Zeby iednak nazwiſko to Oſtroſłupa proſtego (złe do tych czas zwyczaynie określone) ogulnieyſzym uczynić, przydamy naſtępucący warunek.

Gdy w Figurze proſtokreślney, znayduie ſię taki punkt, przez który ciągnione liniie a po obywòch ſtronach na obwodzie Figury zakończone, dzielą ſię w tym punkcie na dwie ròwne części, ten punkt nazywa ſię środkiem Figury.

I tak punkt przecięcia przekątnych w Równoległoboku, ieſt tego Ròwnoległoboku środkiem. Jeżeli tedy Figura proſtokreślna maiąca taki środek, ſłuży za podſtawę Oſtroſłupowi, i ieżeli proſtopadła od wierzchołku iego ſpuſzczona przypada na ten środek Figury, taki Oſtrosłup nazwiemy proſtym.

Oſtro-

Otrosłup nazywafię *foremnym*, gdy za podstawę ma Figurę prostokreślną foremną.

91. *Twierdz:* 1. Preciąwfzy Ostrosłup płafzczyzną rownoodległą od podstawy iego, przecięcie to będzie Figurą podobną do podstawy.

Niech będzie Ostrosłup SABCDE, maiący wierzchołek w punkcie S, a którego podstawą iest Figura prostofkreślna ABCDE. Niech ten Ostrosłup przecina płafzczyzna rownoodległa od podstawy, przecięcie to abcde będzie podobne do podstawy. *Tab: IV Fig: 3*

Ponieważ płafzczyzna podstawy rów noodległa iest od płafzczyzny przecinaiącey; będą też i przecięcia ścian, fpólne z temi płafzczyznami, równoodległe iedne względem drugich; więc wfzystkie boki przecięcia nap. ab, bc równoodległe będą względem boków AB, BC podstawy; a zatym i wfzystkie kąty przecięcia, równe będą względem kątów podstawy, nap: kąt abc, równy będzie kątowi ABC. Iest tedy przecięcie równokątne z podstawą.

Tròykąty SAB, sab fą podobne, więc Sb: SB = ab : AB.

Tròy-

Tròykąty też, Sbc. SBC podobne; więc: Sb: SB=bc: BC; a zatym ab: AB=bc: BC.

Więc przecięcie, i podſtawa, maią około kątów względem ſiebie równych, boki proporcyonalne, a zatym przecięcie podobne ieſt do podſtawy.

W ſzczegulności zaś, przecięcie takie, i podſtawa, maią ſię do ſiebie w ſtoſunku dwumnożnym boków ich, odpowiadaiących ſobie; albo ſą do ſiebie w ſtoſunku dwumnożnym liniy nap: Sb, SB; albo nakoniec w ſtoſunku dwumnożnym ich odległości od wierzchołka S, Oſtroſłupa, maiącey ſię wymierzać przez proſtopadłą ſpuſzczoną od tego wierzchołka, do ich płaſzczyzn; tak dalece, że przeciąwſzy Oſtroſłup płaſzczyznami równoodległemi od podſtawy, a w takich od wierzchołka odległościach, aby te miały ſię do ſiebie, iak liczby 1,2,3,4,5, i t. d: powierzchnie tych przecięciów będą do ſiebie iak liczby 1,4,9,16,25, i t. d. (Obacz Geometryi Części I. Rozdz. IX.)

Uwaga. Tego Podania częſte ieſt w Fizyce używanie; i dla tego trzeba ie iak nayiaśniey uczniom wyłożyć, i o gruntownym iego zrozumieniu od nich być przeświadczonym.

92. *Wnio-*

92. *Wniosek* 1. Niech będą dwa Ostrosłupy ziednakową wysokością, i zrównemi podstawami znayduiącemi się na teyże samey płaszczyznie, i po iedney stronie tey płaszczyzny. Gdy te Ostrosłupy przetniemy płaszczyznami równoodległemi od ich podstaw, przecięcia odpowiadaiące sobie, tak się mieć do siebie będą, iak podstawy tych Ostrosłupów; a wszczegulności, gdy te podstawy równe będą, wszystkie też przecięcia iednego Ostrosłupa będą równe przecięciom odpowiadaiącym drugiego.

93. *Wniosek* 2. Z tego co się powiedziało o równości Graniastosłupów maiących iednaką wysokość i równe podstawy, a stoiących na teyże samey płaszczyznie, iako też i o proporcyonalności tych Graniastosłupów z ich podstawami, gdy te przy równych wysokościach, są nierówne; możnaby mniemać, że też i Ostrosłupy maiące równe wysokości, i podstawy, są równe, i że gdy równe maią wysokości, będą do siebie iak ich podstawy.

Następuiące Twierdzenia zamienią to mniemanie w pewność, gdy ich dowody przytoczemy.

91. *Twierdzenie przybrane.* Niech będzie Ostrosłup Tròykątny przecięty płaszczyznami ròwnoodległemi od podstawy, i w iednakowey od siebie odległości zostaiącemi. Na podstawie, i na każdym przecięciu wystawmy ku wierzchołkowi Ostrosłupa, Graniastosłupy z ktòrych każdy miałby wysokość ròwną odległości dwòch płaszczyn nayblizszych. Na tychże przecięciach, wystawmy znowu inne Gtaniastosłupy ku podstawie, z tą samą, co pierwsze, wysokością. Niech każdy z tych Graniastosłupòw ma iednę krawędź spolną z Ostrosłupem, i dwie ściany na tychże płaszczyznach co i dwie krawędzie Ostrosłupa. Rożnica summy wszystkich pierwszych Graniostosłupów (ktòre nazwę opisanemi) od summydrugich (ktòre nazwę wpisanemi) ròwna będzie pierwszemu Graniastosłupowi, ktòry iest wystawiony na podstawie Ostrosłupa.

Tab. I. V. Fig: 4. Nich będzie Ostrosłup tròykątny SABC, kròrego wierzchołek S, a podstawa ABC.

Podzielmy ten Ostrosłup na części nap: 5, płaszczyznami ròwnoodległemi od podstawy, i w iednakowey od siebie odległości zostaiącemi. Niech będą: $A^1B^1C^1$ $A^2B^2C^2$ $A^3B^3C^3$ $A^4B^4C^4$ przecięcia Ostrosłupa,

przez

przez te płaszczyny. Na podstawie i na wszystkich przecięciach Ostrosłupa wystawmy ku iego wierzchołkowi Graniastosłupy, kończące się na przecięciu naybliższym; te będą opisanemi na Ostrosłupie, bo ich ściany występować będą za ściany Ostrosłupa. Wystawmy znowu na tychże przecięciach ku podstawie, inne Graniastosłupy teyże samey co pierwsze wysokości; te będą wpisanemi w Ostrosłup, bo za ściany ich, będą wychodzić ściany Ostrosłupa. Rożnica między summą pierwszych i drugich Graniastosłupów, równać się będzie Graniastosłupowi opisanemu, wystawionemu na podstawie Ostrosłupa.

Wykreśl: Podzielmy liniie AB, AC, na 5 równych części. wpunkach: b^1, b^2, b^3, b^4, c^1, c^2, c^3, c^4. i pociągniymy liniie; b^1c^1, b^2c^2, b^4c^4.

Tròykąty: Ab^1c^1, Ab^2c^2, Ab^3c^3, Ab^4c^4, będą ròwne względem Ostrosłupa przecięciów: $A^1B^1C^1$, $A^2B^2C^2$, $A^3B^3C^3$, $A^4B^4C^4$.

Rożnica między Graniastosłupem opisanym a stoiącym na podstawie ABC, i między Graniastosłupem wpisanym a stoiącym

iącym na podſtawie $A^1B^1C^1$ równa ſię Graniaſtoſłupowi teyże ſamey co tamte wyſokości, maiącemu za podſtawę, ròżnicę tamtych dwóch podſtaw, to ieſt Czworokąt BCc^1b^1.

Podobnie i ròżnica między Graniaſtoſłupem opiſanym, a ſtoiącym na przecięciu $A^1B^1C^1$, i między Graniaſtoſłupem wpiſanym a ſtoiącym na przecięciu $A^2B^2C^2$ ròwna ſię Graniaſtoſłupowi, teyże ſamey co one wyſokości, maiącemu za podſtawę, ròżnicę tamtych dwòch podſtaw, to ieſt Czworokąt $b^1c^1b^2c^2$.

Także róznice dwòch par Graniaſtoſłupòw naſtępuiących, ròwne ſą Graniaſtoſłupom, teyże co one wyſokości maiącym za podſtawy Cworokąty $b^2c^2b^3c^3$ i $b^3c^3\ b^4c^4$.

Oſtantni zaś Graniaſtoſłup opiſany, rowna ſię Graniaſtoſłupowi, teyże co on wyſokosci, maiącemu za podſtawę Tròykąt Ab^4c^4.

Ròżnica tedy między ſummą wſzyſtkich Graniaſtoſłupòw opiſanych, a ſummą wſzyſtkich Graniſtoſłupów wpiſanych, ròwna będzie ſummie wſyſtkich Graniaſtoſłupòw teyże co one wyſokości, ktòreby

ſtały

ſtały na Czworokątach BCc^1b^1, $b^1c^1c^2b^2$, $b^2c^2c^3b^3$, $b^3c^3c^4b^4$, i na Tròykącie Ab^4c^4, to ieſt: rowna będzie Graniaſtoſłupowi tròykątnemu teyże co one wyſokości, a maiącemu za podſtawę Tròykąt ABC. Ta więc ròżnica ròwna ſię w ſamey rzeczy pierwſzemu Graniaſtoſłupowi opiſanemu.

95. *Wnioſek.* Pierwſzy ten Graniaſtoſłup opiſany na Oſtroſłupie SABC, ktòrego podſtawa ABC nie odmienia ſię, będzie tym mnieyſzy, im mnieyſzą damy mu wyſokość, to ieſt, im liczba przecięć Oſtroſłupa będzie większa. Można zaś uczynić ten Graniaſtoſłup mnieyſzym od iakiegokolwiek Graniaſtoſłupa naznaczonego, zamieniaiąc ten oſtatni Graniaſtoſłup na inny, ktòryby miał za podſtawę Tròykąt ABC, i dzieląc wyſokość iednoſtayną Oſtroſłupa, na tyle części, aby każda z nich była mnieyſza od wyſokości tego Graniaſtoſłupa tak przerobionego.

Maiąc więc dany Oſtroſłup, można weń wpiſać, i opiſać na nim ſpoſobem wyżey wyrażonym, tyle Graniaſtoſłupòw, aby ròżnica dwòch ſumm, mnieyſza była od iakiegokolwiek Graniaſtoſłupa na znaczo-

znaczonego, a tym bardziey, aby rożnica Ostrosłupa od iedney z tych summ mnieysza była od iakiegokolwiek Graniastosłupa naznaczonego.

96. *Twierdz.* 2. Dwa Ostrosłupy maiące rowne wysokości i podstawy, są rowne.

Gdyby te dwa Ostrosłupy nie były rowne, tedy daymy, że ieden z nich byłby większy od drugiego. Niechby więc ta mniemana ich rożnica zamieniona była na Graniastosłup maiący rowną z temi Ostrosłupami podstawę. Podzielmy wysokość iednego z tych Ostrosłupa na tyle części rownych, aby każda z nich mnieysza była od wysokości tego Graniastosłupa. Wpiszmy w ten Ostrosłup i opiszmy na nim Graniastosłupy sposobem wyrażonym w poprzedzaiącym Twierdzeniu przybranym. Toż uczyńmy i na drugim Ostrosłupie; wszystkie Graniastosłupy wpisane, i opisane, na tych dwoch Ostrosłupach, bedą rowne iedne względem drugich (87, 88) a zatym summa Graniastosłupow wpisanych nap: w ieden Ostrosłup będzie rowna summie Graniastosłupow wpisanych w drugi Ostrosłup. Że zaś zrobiliśmy rożnicę dwoch summ

Gra-

Graniastosłupów wpisanych i opisanych na pierwszym Ostrosłupie, mnieyszą od różnicy mniemaney dwòch Ostrosłupów, więc tym bardziey różnica tego Ostrosłupa od summy wszystkich Graniastosłupòw weń wpisanych, mnieysza będzie, od ròznicy mniemaney tych dwòch Ostrosłupòw; a zatym i ròżnica pierwszego Ostrosłupa, od summy Graniastosłupów wpisanych w drugi Ostrosłup, mnieysza będzie, niż ròżnica pierwszego Ostrosłupa od drugiego. Summa tedy Graniastosłupów wpisanych w ten drugi Ostrosłup, byłaby większa od tego drugiego Ostrosłupa, co być nie może; a przeto te dwa Ostrosłupy nie mogą sobie być nièròwne.

97. *Twierdz:* 3. Graniastosłup tróykątny, może zawsze być rozłożony na trzy Ostrosłupy tròykątne ròwne, z ktòrych dwa mieć będą tę samę podstawę i wysokość, co i Graniastosłup.

Niech będzie Graniastosłup tròykątny ABCEF, można go rozłożyć na trzy Ostrosłupy tròykątne ròwne, z ktòrych dwa, tę samę, co on mieć będą podstawę i wysokość. *Tab. IV Fig.* 5

Przez bok AC, podstawy ABC, Graniastosłupa, i przez koniec F, krawędzi iego tego Graniastosłupa nie przechodzącey-przez punkta: A i C, przeciągniymy płaszczyznę ACF; odetnie ona od Graniastosłupa, Ostrosłup tròykątny FABC. maiący za wierzchołek, punkt F, a za podstawę, Tròykąt: ABC; a zatym ten Ostrosłup, tę samę co i Graniastosłup mieć będzie podstawę i wysokość.

Podobnie i przez bok EF, ściany przeciwney podstawie, i przez punkt C przeciągniymy płaszczyznę ECF; odetnie ona od Graniastosłupa, Ostrosłup tròykątny: CEDF, maiący za wierzchołek, punkt C, a za podstawę Tròykąt DEF, ròwny Tròykątowi: ABC, a zatym i ten drugi Ostrosłup ma tę samę także co i Graniastosłup, podstawę i wysokość.

Więc dwa Ostrosłupy: FABC, CDEF równe maią wysokości, i podstawy, a zatym są ròwne (96). Zostanie ieszcze po tych dwòch przecięciach, Ostrosłup CFEA, zakończony czterema Tròykątami: ACF, ACE, AEF, ECF.

Wystawmy sobie, ten ostatni Ostrosłup iako maiący za podstawę, Tròykąt: nap: ACE, a za wierzchołek, punkt F, Ostrosłup zaś CEDF, iakoby miał za podstawę, Tròy-

Tròykąt: CDE, a za wierzchołek tenże punkt F. Przekątna CE, Równoległoboku ACDE, dzieli go na dwa Tróykąty, które przystać do siebie mogą; więc te dwa Ostrosłupy maią podstawy równe, ACE, DEC i na iedney płaszczyznie znayduiące się;a oprocz tego,maią spólny wierzchołek w punkcie F, a zatym i wysokość równą; więc są równe; wszystkie tedy trzy Ostrosłupy, na które Graniastosłup był podzielony, są równe.

Wzaiemnie Ostrosłup tróykątny, można zawsze sobie wystawić, iako trzecią część Graniastosłupa maiącego tę samę co i Ostrosłup podstawę, i wysokość.

Niech będzie Ostrosłup tróykątny: ABCF, którego podstawa ABC, a wierzchołek F.

Na teyże podstawie ABC, wystawmy sobie iakoby zbudowany Graniastosłup, ABCDEF, którego dwie ściany ABFE, BCDF znaydowałyby się na tych samych płaszczyznach, na których znayduią się dwie ściany Ostrosłupa,i krawędź im spolna BF. Podług Twierdzenia poprzedzaiącego, ten Graniastosłup iest trzy razy tak wielki, iak Ostrosłup; więc też i ten Ostrosłup iest trzecią częścią tego Graniastoſłupa. A że wſzyſtkie Graniaſtoſłupy maiące równe podſtawy i wyſokości, ſą równe; więc Oſtroſłup tróykątny ieſt trzecią częścią Graniaſtoſłupa iakiegokolwiek, maiącego taką ſamę iak on podſtawę i wyſokość.

98. *Twierdz:* 4. Oſtrosłup iakikolwiek ieſt trzecią częścią Graniaſtoſłupa maiącego tę ſamę co on podſtawę, i wyſokość.

Dowodz. Jakażkolwiek będzie podſtawa Oſtrosłupa, poprowadźmy na niey przekątnych tyle do wſzyſtkich kątów, ile można. Przez te wſzyſtkie przekątne, i przez wierzchołek Oſtrosłupa niech przechodzą płaſzczyzny; Oſtroſłup będzie przez te płaſzczyzny podzielony na tyle Oſtroſłupów tróykątnych, na ile Tróykątów podſtawa była podzielona przez przekątne; każdy z tych Oſtrosłupów tróykątnych, będzie trzecią częścią Graniaſtosłupa maiącego taką ſamę iak on podſtawę, i wyſokość; a zatym ſumma wſzyſtkich tych Oſtrosłupów tróykątnych, to ieſt cały iakikolwiek Oſtrosłup z nich ſię ſkładaiący, równać ſię będzie trzeciey części, ſummy wſzyſtkich tych Graniaſtosłupów, albo co na iedno wychodzi, równać ſię będzie

dzie trzeciey części Graniastosłupa maiącego tę samę podstawę i wysokość, co i Ostrosłup.

99. *Wniośki.* Cokolwiek się o stosunku Graniastosłupów powiedziało, toż mówić można i o stosunku Ostrosłupów, które, maiąc takie same iak i te Graniastosłupy, podstawy, i wysokości, są trzeciemi względem nich częściami.

1. Dwa Ostrosłupy iakiekolwiek (proste, lub ukośne foremne, lub nie foremne) z równemi wysokościami, tak się do siebie maią, iak ich podstawy.

2. Dwa Ostrosłupy z równemi podstawami, tak się do siebie maią, iak ich wysokości,

3. Dwa Ostrosłupy są równe, gdy ich podstawy są w stosunku odwrotnym ich wysokości.

4. Dwa Ostrosłupy równe, maią podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości, i wyraz liczebny bryłowatości Ostrosłupa będzie znaleziony, gdy się weźmie trzecia część dwóch liczb rozmożonych, z których iedna znaczyłaby

wielkość powierzchni podſtawy tego Oſtrosłupa, a druga, wielkość iego wyſokości.

100. *Uwaga.* Maiąc dane wliczbach, ſześć krawędzi iakiego Oſtrosłupa tróykątnego, można wyznaczyć bryłowatość tego Oſtrosłupa.

Jakoż złożywſzy Tròykąt z trzech takowych krawędzi, i uważaiąc go iak podſtawę Oſtrosłupa; a na trzech bokach tey podſtawy, zrobiwſzy trzy Tròykąty, na teyże ſamey, co i podſtawa płaſzczyznie, dawſzy każdemu z nich za boki, po dwie krawędzie z trzech pozoſtałych; te Tróykąty będą ścianami Oſtroſłupa. Kąt każdy bryłowy przy podſtawie, ſkładać ſię będzie, z kąta Tròykąta wziętego za podſtawę, i z dwòch kątòw ścian dwòch przy podſtawie. Ponieważ zaś te kąty ſą wiadome, więc będzie można wyznaczyć pochyłość ścian do podſtawy, a wſzczegulności będzie można wyrachować ſtoſunek wyſokości Oſtrosłupa, do ſpólnego przecięcia tych dwòch ścian. Aże to ſpòlne przecięcie ieſt dane co do wielkości, więc doydziemy i wyſokości Oſtrosłupa, a zatym i iego bryłowatości,

ktora

ktòra zawisła od wyſokości Oſtrosłupa, i powierzchni iego podſtawy.

101. *Uwaga* 2. Można tę bryłowatość wyznaczyć i bez Trygonometryi, iako ſię to pokaże w Algebrze.

102. *Uwaga* 3. Gdy Oſtrosłup ieſt foremny, a zatym trzy ścian iego krawędzie ſą rowne; Kwadrat wyſokości Oſtrosłupa, rowna ſię rożnicy kwadratu iedney krawędzi, od kwadratu promienia koła na podſtawie opiſanego. A przeto tą wyſokość może być bardzo łatwo w liczbach wyznaczona, bez pomocy Trygonometryi. Ten zaś ſpoſob poſtępowania przyſtoſować można do wſzyſtkich Oſtrosłupòw foremnych, iakażkolwiek byłaby liczba ich bokòw w podſtawie.

Przykł: 1. Wyznaczyć bryłowatość Bryły nazwaney *Czworościanem* (Tetraedrum.).

Bok ieden Troykąta rownobocznego wyznaczywſzy przez liczbę 2, kwadrat wyſokości tego Tróykąta wyrazi ſię przez liczbę 3. Promień koła opiſanego ieſt $\frac{2}{3}$ tey wyſokości, więc kwadrat tego pro-

promienia, ieſt $\frac{4}{9}$, kwadratu wyſokości Tròykąta, a zatym kwadrat tego promienia ieſt $\frac{12}{9}$. Ze zaś kwadrat wyſokości tego Oſtrosłupa ieſt $4 - \frac{12}{9} = \frac{24}{9} = \frac{4 \times 6}{9}$ więc ſama wyſokość będzie $= \frac{2V6}{3}$.

Powierzchnia Tròykąta ſłużącego za podſtawę wyrazi ſię przez V3, a zatym bryłowatość Oſtroſłupa będzie wyrażona przez $\frac{2V2}{3}$; to ieſt bryłowatość Oſtrosłupa tak ſię ma do bryłowatości Sześcianu rownego co do bokow Oſtrosłupowi, iak $\frac{2V2}{3}$ do 8, albo iak V2 do 12; albo iak 2 do 12V2, albo iak 1 do 6V2; albo nakoniec iak 1 do V72; ktory to ſtoſunek bliſki ieſt ſtoſunku 2 do 17, albo 33 do 280, a bardzo mało rożni ſię od ſtoſunku 68 do 577.

Przykł. 2. Wyznaczyć bryłowatość Ośmiościanu foremnego.

Można ſobie Ośmiościan wyſtawić w myśli, iakoby złożony z dwuch Oſtrosłupów proſtych kwadratowych, ſtykaiących ſię z ſobą rownemi podſtawami.

Wyra-

Wyraziwſzy bok ieden Ośmiościanu tego, przez 2, kwadrat promienia koła opiſanego na podſtawie iednego z tych dwóch Oſtroſłupów, będzie wyrażony przez 2, a kwadrat wyſokości tego Oſtroſłupa wyrazi ſię przez różnicę między kwadratem z 2, to ieſt 4, i 2, to ieſt będzie $=4-2=2$. Wyſokość zaś tego Oſtroſłupa wyrazi ſię przez $\sqrt{2}$; więc bryłowatość iednego tego Oſtroſłupa będzie oznaczona przez $\frac{4\sqrt{2}}{3}$, a zatym bryłowatość Ośmiościanu przez $\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

Jeſt tedy bryłowatość Ośmiościanu foremnego do bryłowatości Sześcianu równego co do wielkości boków, iak $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ do 8, albo iak $\sqrt{2}:3$, który to ſtoſunek bliſki ieſt ſtoſunkowi 8 do 17, albo 17 do 36, a bardzo mało różni ſię od ſtoſunku 33 do 70.

103. *Uwaga* 3. Ponieważ ściany Oſtroſłupa ſą powierzchniami płaſkiemi i to ieſzcze tróykątnemi, wyznaczenie iego powierzchni, żadney nie podlega trudności. Gdy Oſtroſłup ieſt foremny, powierzchnia iego (oprócz podſtawy) ró-

wna będzie Tróykątowi, któryby miał za podstawę, obwod podstawy Ostrosłupa; a wysokość równą wysokości ściany któreykolwiek (ponieważ wszystkie są równe.)

Wyboczenie (Digressio) *o sposobie wyczerpania nazwanego po Łacinie* Methodus exhaustionis; *maiące służyć za wstęp do Rozdziałów następuiących.*

104. Sposob, którego się użyło dla dowiedzenia równości dwóch Ostrosłupów, których podstawy i wysokości są równe, na to wypada, aby okazać, iż każdy z tych Ostrosłupów zawarty iest między dwiema ilościami, których różnica może być mnieysza od iakieykolwiek ilości naznaczoney; to iest: że każdy Ostrosłup iest zawarty między summą Graniastosłupów na nim opisanych i summą Graniastosłupów weń wpisanych; i że tych dwóch summ różnica może być mnieysza od iakieykolwiek ilości naznaczoney; a tym bardziey każdego z tych Ostrosłupa różnica, od iedney z tych summ, może być mnieysza, niż iakakolwiek ilość naznaczona. Zkąd można było Ostrosłupom porownywanym do siebie przystosować to wszystko, cokolwiek się powiedziało o stosunku iedney

dney z tych ſumm, nap: ſummy Graniaſtosłupów opiſanych na iednym Oſtrosłupie, do drugiey z tych ſumm, to ieſt do ſummy Graniaſtosłupów w iednakiey liczbie, opiſanych na drugim Oſtrosłupie. Że zaś, gdy Oſtrosłupy miały równe podſtawy i wyſokości, te dwie ſummy Graniaſtosłupów były równe; więc też i Oſtrosłupy, których różnica od tych dwóch ſumm może być mnieyſza, niż iakakolwiek ilość naznaczona, będą równe.

105. Gdyby dwa Oſtrosłupy miały tylko wyſokości równe, a podſtawy nierówne; możnaby tymże ſamym prawie ſpoſobem okazać, że ſą do ſiebie, iak ich podſtawy; a to ztądby ſię wniosło, że w tymże ſamym ſtoſunku byłyby do ſiebie ſummy Graniaſtosłupów opiſanych na każdym z tych Oſtrosłupow; i że każdy z tych Oſtrosłupów może ſię różnić od każdey z tych ſumm, odpowiadaiących ſobie, ilością mnieyſzą, niżeli ieſt iakakolwiek ilość naznaczona.

106. Ponieważ ten ſpoſób wnoſzenia ſtoſunku dwóch ilości, które bezśrednie z ſobą porównywać ieſt trudno, będzie bardzo często używany w Rozdziałach naſtę-

następniących, przeto nie zawadzi okazać ieszcze pewność iego na kilku przykładach, aby iuż potym nie trzeba było za każdym razem powtarzać całego ciągu takowego działania, który zawsze iest iednakowy,

Przykł. 1. Niechby dowiedziono było, że dwa Równoległoboki maiące równe wysokości, są do siebie, iak ich podstawy. Trzeba ieszcze dowieść, że i dwa Troykąty, których równe są wysokości, maią się do siebie iak ich podstawy. (W tym zaś stawiamy się mniemaniu, iakoby nam nie wiadomo było, że Tròykąt iest połową Równoległoboku, teyże co on podstawy i wysokości:)

Tab. IV. Fig. 6. Niech będą dwa Tróykąty: ABC. abc. równey wysokości, a z nie równemi podstawami; trzeba dowieść, że się tak maią do siebie, iak ich podstawy; a to ztąd, że i Równoległoboki iednakiey wysokości są do siebie, iak ich podstawy.

Podzielmy bok ieden nap. AC. na pewną liczbę części równych. Przez wszystkie punkta podziału poprowadźmy równoodległe od podstawy; a na każdey z tych równoodległych wpiszmy i opiszmy Tróy-

Tròykątowi ABC, Rownoległoboki, maiące za fpolną wyfokość równe oddalenie dwoch naybliżfzych ròwnoodległych.

Ròżnica Równoległoboków opifanych, od Ròwnoległobokow wpifanych, ròwnać fię będzie naywiękfzemu z nich Ròwnoległobokowi. Ta zaś ròżnica może być mnieyfzą zrobiona, niż iakikolwiek Ròwnoległobok naznaczony, odmieniwfzy go na inny Równoległobok, któryby tę famę, co i Troykąt miał podftawę, i kąt z nim przy podftawie fpolny, a potym podzieliwfzy drugi bok AC, Tròykąta na tyle częśći równych, aby każda z nich mnieyfza była od drugiego boku, Równoległoboku naznaczonego.

Gdyby to być mogło, abc dwa Tróykąty: ABC, abc. nie miały fię do fiebie, iak ich podftawy; tedy ieden z tych Troykątow; nap: ABC, byłby do uczynienia tego ftofunku, nadto wielki, lub nadto mały.

Niechby więc, ieżeli to być może, trzeba powiękfzyć Tròykąt ABC, Równoległobokiem ABFE. aby fię tak miał do Tròykąta abc, iak AB do ab.

Podziel-

Podzielmy bok AC. na tyle części równych, aby każda z nich mnieyſza była od linii AE; wpiſzmy potym i opiſzmy Tróykątowi Równoległoboki, w ſpoſób wyżey wyrażony. Niech będzie naywiękſzy z nich Równoległobok AGHB. Różnica ſummy Równoległoboków opiſanych od ſummy Równoległobokow wpiſanych, uczyniona ieſt mnieyſzą, niżeli Równoległobok ABFE; tym bardziey zaś Różnica ſummy Równoległoboków opiſanych, na Tróykącie ABC, od tegoż Tróykąta, ABC, mnieyſza będzie, niżeli Równoległobok ABFE; a zatym ſumma wſzyſtkich Równoległoboków opiſanych, mnieyſza ieſt od Równoległoboku ABFE, wraz wziętego z Tróykątem ABC.

Podzielmy i bok ac, Tróykąta abc, na tyleż części równych, na ile ich był podzielony bok AC; opiſzmy na tym Tróykącie Równoległoboki, tak iak wyżey.

Równoległoboki opiſane, na tych dwóch Tróykątach, a odpowiadaiące ſobie, tak ſię mieć będą do ſiebie, iak podſtawy AB, ab, tychże Tróykątow; więc też i ſumma wſzyſtkich Równoległoboków opiſanych na Tróykącie ABC, tak ſię

mieć

mieć będzie do fummy Równoległoboków opifanych na Tróykącie abc, iak podftawa AB, pierwfzego Tróykąta, do podftawy ab, drugiego; to ieft: przez przypufzczenie, iak fumma, z Tróykąta ABC, i z Równoległoboku ABFE, do Tróykąta abc. A że zrobiliśmy pierwfzy poprzednik mnieyfzym od drugiego, więc też i pierwfzy naftępnik byćby powinien mnieyfzy od drugiego; to ieft fumma wfzyftkich Równoległoboków opifanych na Tróykącie abc, powinnaby być mnieyfza od Tróykąta abc, co iednak być nie może; a zatym ftofunek podftaw tych dwóch Tróykątów, tenże fam ieft, co i famych Tróykątow.

Podobnym fpofobem możnaby okazać, że i drugi Tróykąt abc, nie powinien być powiękfzony, aby miał ten fam do Tróykąta ABC, ftofunek, co i ich podftawy.

Przykł: 2. Niech Tróykąty ABC, abc wyftawuią dwóch Oftrofłupów przecięcia przechodzące przez wierzchołki C, c, i przez proftopadłe fpufzczone od tych wierzchołków do podftaw Oftrofłupów. Niech te obadwa Oftrofłupy, będą iednakiey wyfokości. Trzeba dowieść, że bryłowatości tych Oftrosłupów, tak fię mają ią do ſiebie, iak ich podſtawy, a to z właſności Graniaſtoſłupów iednakowey wyſokości, które także w takim iak ich podſtawy ſtoſunku ſą do ſiebie, czego ſię iuż wyżey dowiodło.

Okaże ſię, w podobny ſpoſob, że opiſawſzy i wpiſawſzy iednemu z tych Oſtroſłupowi, Graniaſtoſłupy, równey wſzyſtkie wyſokości; różnica wpiſanych od opiſanych, równać ſię będzie naywiękſzemu Graniaſtosłupowi opiſanemu, i że można w to potrafić, aby ta różnica mnieyſza była niż iakikolwiek Graniaſtoſłup naznaczony; a tym bardziey różnica Oſtroſłupa od każdey z tych ſumm mnieyſza będzie, niżeli ten Graniaſtoſłup.

Wpiſawſzy i opiſawſzy drugiemu Oſtrosłupowi, tyle co i pierwſzemu Graniaſtosłupów; ſumma tych wſzyſtkich Graniaſtosłupów opiſanych na pierwſzym Oſtrosłupie, tak ſię mieć będzie do ſummy opiſanych na drugim, iak podſtawa pierwſzego Oſtroſłupa, do podſtawy drugiego. Także i ſummy Graniaſtoſłupów wpiſanych, w tym ſamym ſtoſunku będą, co i podſtawy dwóch Oſtroſłupów.

Gdyby to albowiem być mogło, aby ſtoſunek dwóch tych Oſtroſłupow, nieròwny

wny był ſtoſunkowi ich podſtaw, tedy ieden z tych Oſtroſłupów, byłby nap: nadto mały na ten ſtoſunek. Przydaymy mu więc tę ilość, ktorą powiękſzony, zachowa ten ſtoſunek, i zamieńmy też ilość na Graniaſtoſłup równey z nim podſtawy. Temu Oſtroſłupowi wpiſzmy i opiſzmy Graniaſtoſłupy iednakiey wyſokości, tak iednak małey, aby różnica ſumm Graniaſtoſłupów wpiſanych od opiſanych, mnieyſza była od różnicy naznaczoney; będzie tym bardziey różnica ſummy Graniaſtoſłupów opiſanych na tym Oſtroſłupie, od tegoż Oſtroſłupa mnieyſza, niżeli różnica naznaczona; a zatym ſumma tych Graniaſtosłupów mnieyſza będzie niżeli ſumma z Oſtroſłupa i z różnicy naznaczoney.

Na drugim Oſtroſłupie opiſzmy tyleż co i na pierwſzym Graniaſtoſłupów.

Summa wſzyſtkich Graniaſtoſłupów opiſanych na pierwſzym Oſtrosłupie, tak ſię mieć będzie do ſummy Graniaſtoſłupów opiſanych na drugim Oſtroſłupie, iak podſtawa pierwſzego Oſtroſłupa, do podſtawy drugiego; to ieſt: iak ſumma z pierwſzego Oſtroſłupa, i z różnicy iego mniemaney, do drugiego Oſtroſłupa.

Aże

Aże się pokazało, iż pierwszy poprzednik mnieyszy iest od drugiego, więc i pierwszy następnik powinienby być mnieyszy od drugiego, co iednak być nie może.

Więc stosunek dwóch tych Ostrosłupow, nie rożni się od stosunku ich podstaw.

107. *Uwaga.* Użyliśmy iuż tego sposobu, mowiąc o kwadrowaniu koła, w Części I. Dowiodłszy albowiem, iż obwody dwoch Wielokątow foremnych, z iednaką liczbą bokow, wpisanych, lub opisanych, dwom kołom, tak się do siebie maią, iak tych kół promienie; pokazawszy oraz, iż różnica obwodu koła, od obwodu Wielokąta wpisanego, lub opisanego, mnieyszą być może od iakieykolwiek ilości naznaczoney, wywiedliśmy ztąd proporcyonalność okręgow kol, do ich promieni. Dowiedliśmy także rowności koła z Troykątem maiącym za wysokość promień iego, a za podstawę, okrąg; a to z podobney własności Wielokąta na kole opisanego,

W ktorymkolwiek z tych przykładow, nap: w ostatnim, koło iest granicą między Wielokątami wpisanemi, i opisanemi, do

ktorey

którey każdy z nich, tym bardziey się zbliża, im więceybokòw mu damy, tak dalece, że przyiść można do tego, iż ich obwody ròżnić się od siebie będą mnieyszą ilością, niż iakakolwiek ilość naznaczona, a tym mniey ieszcze różnić się będą ich obwody od okręgu koła. Wielokąty podobne na dwòch kołach opisane, zawsze tę maią własność, iż są proporcyonalnemi tychże koł promieniom. Łącząc te z sobą własności, wypadło z nich, że i granice tych Wielokątòw, to iest koła, tęż samę własność maią; lubo choćby ie na więcey coraz cząstek podzielić (byleby ich liczba była skończona) nieprzyidziemy nigdy do tego, abyśmy cale zgubili tę rożnicę ktòra zachodzi między Wielokątem, i kołem, to iest, abyśmy Wielokąt cale na koło iemu rowne zamienili.

Ten sposob postępowania, nazywa się *sposobem wyczerpania* (Methodus exhaustionis) używanym bardzo często u dawnych, ktòrym się to, i sprawiedliwie niezdawało, aby linie krzywe uważać iak złożone z liczby bardzo wielkiey, maleńkich liniy prostych; powierzchnie zaś krzywe, aby uważać iak zbior bardzo wielu powierzchni płaskich, małości nadzwyczayney; bryły także krzywe, aby uważać iak *Wielościany* (Polyedra) bardzo wielką liczbę, boków maiące.

Po tych, które się tu dały obiaśnieniach, obeydzie się w następuiących podaniach, bez powtarzania za każdym razem całego ciągu tego sposobu *wyczerpania*. Dosyć będzie okazać, że powierzchnie krzywe i Bryły niemi zakończone, o których mamy mówić, zawarte zawsze są między powierzchniami lub Bryłami, o których iuż mowiliśmy, a które mogą się rożnić od siebie mnieyszą ilością, niż iakakolwiek ilość podana. Gdy zaś przyidzie mówić o ścianach Brył, o ich *warstach* (laminae) i t. d, tedy rozumiem, że przez poprzedzaiące obszerne obiaśnienia, dosyć się wytłumaczyło, iak dalecy być powinniśmy od uważania powierzchni krzywych, iakoby złożonych z płaszczyzn, i od uważania Brył, iakoby złożonych z powierzchni usłanych iednych nad drugiemi.

ROZDZIAŁ VII.

O Walcach.

180. Niech będą dwa koła równe nakreślone na dwòch płaszczyznach równoodległych. Przez liniią łączącą ich środki, niech przechodzi iakakolwiek inna płaszczyzna. Niech będą złączone inną liniią końce dwòch promieni znayduiących się po iedney stronie linii łączącey środki, i służących za spolne przecięcia tey płaszczyzny z płaszczyznami dwòch kół; niechay ta liniia końce dwóch promieni łącząca obraca się równym wszystkich iey punktów ruchem, około okręgów tych dwòch kół. Powierzchnia krzywa obrotem tym linii naznaczona, nazywa się *powierzchnią Walcową*. Bryła zakończona temi dwoma kołami, i tą powierzchnią zowie się *Walcem* (Cylinder:) Liniia prosta łącząca środki tych dwòch kół, nazywa się *Osiątego* Walca. (Axis) Dwa koła na ktòrych się Walec kończy, nazywaią się iego *podstawami*. Prostopadła spuszczona od punktu ktòregokolwiek, iedney z tych podstaw do płaszczyzny podstawy drugiey, nazywa się *wysokością* Walca. Gdy oś

Walca, albo liniia łącząca środki dwòch podstaw iego, prostopadłą iest do płaszczyzn podstaw, Walec zowie się *prostym*, gdy zaś ta oś iest pochyłą do tychże płaszczyzn, wtedy Walec zowie się *ukośnym*.

109. *Wniosek*. Liniia robiąca obrotem swoim powierzchnią walcową, rownoodległą iest w początkowym swoim położeniu, od osi walca [bo ta liniia z osią, czyni dwa boki przeciwne w Czworokącie tym, ktorego dwoma innemi bokami, są dwa promienie kol rowne i rownoodległe). Ze zaś ta liniia zawsze iest od pierwszego swego położenia rownoodległą, więc zawsze będzie rownoodległą od osi. Wzaiemnie, gdy przez punkt ktorykolwiek powierzchni walcowey pociągniemy liniią, rownoodległą od osi, ta liniia zmiesza się z linią ktora obrotem swoim kreśli powierzchnią Walca, a przez tenże punkt przechodzi, i cała ta liniia znaydować się będzie na powierzchni walcowey. Liniia rownoodległa od osi, a przechodząca przez punkt ktorykolwiek powierzchni walcowey, nazywa się *bokiem* Walca; wszystkie zatym boki Walca są rowne, a wszczegulności rownaią się osi.

110.

110. *Twierdz.* 1. Przeciąwszy Walec płaszczyzną równoodległą od podstawy, przecięcie to będzie kołem.

Niech będzie CAac, połową przecięcia Walca, od płaszczyzny przechodzącey przez oś iego Cc, i niech BD będzie spolnym przecięciem tey płaszczyzny, i drugiey równoodległey od podstawy. *Tab. V. Fig. 1.*

Przecięcie Walca przez tę drugą płaszczyznę, będzie kołem.

Dowodz: Bok Aa, Walca iest od osi Cc równoodległym; przecięcia także BD, CA płaszczyzny przechodzącey przez oś, i dwóch płaszczyzn równoodległych, są równoodległemi; więc Czworokąt: ACBD, iest Równoległobokiem, a zatym bok BD, równa się bokowi AC.

Tymże sposobem okazać można równość wszystkich liniy prowadzonych od punktu B, do każdego punktu przecięcia powierzchni Walcowey, przez płaszczyznę równoodległą od podstawy; a zatym to przecięcie iest kołem, którego środkiem, punkt B; i wszystkie takie przecięcia są sobie równe, a wszczególności, równe są podstawie.

111. *Wniosek.* Ztąd wynika inny sposob. ktòrym wystawić sobie można *rodzenie się* (generatio) iakiegokolwiek Walca, to iest przez ruch koła taki, ktòrymby się to koło w ròwney zawsze od pierwszego swego położenia odległości posuwało, a ieden z punktòw iego nie schodził nigdy z linii prostey daney co do iey położenia.

W szczegulności zaś, Walec prosty, można uważać iakoby zrobiony obrotem Ròwnoległoboku prostokątnego, około iednego z bokòw iego.

112. *Twierdz:* 2. Powierzchnia krzywa (g) Walca prostego, ròwna się Prostokątowi, ktòryby miał za podstawę, okrąg podstawy Walca, a za wysokość, bok Walca.

Dowodz: Wpiszmy w podstawę Walca, i opiszmy na niey dwa Wielokąty foremne, z ròwną liczbą bokòw, i na tych Wielokątach, iak na podstawach, uważaymy iakoby zrobione Graniastosłupy proste,

---

(g) *Powierzchnią krzywą Walca nazywamy tę, w ktòrą nie wchodzą podstawy Walca.*

ſte, teyże co i Walec wyſokości; powierzchnie pobocznych ścian tych dwóch Graniaſtoſłupów równe będą względem Proſtokątów maiących wyſokość Walca; podſtawy zaś równe obwodom tych Wielokątów, a zatym te dwie powierzchnie pobocznych ścian Graniaſtoſłupów, tak ſię mieć do ſiebie będą, iak obwody tychże Wielokątów. Tym mniey więc różnić ſię od ſiebie będą te dwie powierzchnie, im mniey brakować będzie tym Wielokątom do równości, to ieſt, im większa liczba będzie ich boków; i różnica tych powierzchni mnieyſza być może, niż iakakolwiek ilość naznaczona; a tym bardziey powierzchnia krzywa, może ſię mniey ieſzcze różnić od iedney z tamtych powierzchni; więc (podług tego co ſię powiedziało o ſpoſobie wyczerpania, i w Rozdziale XIII. Części I.) powierzchnia krzywa Walca proſtego, równa ſię Proſtokątowi maiącemu wyſokość tego Walca, a podſtawę równą okręgowi podſtawy iego.

113. *Wnioſki* 1. Powierzchnie krzywe Walców proſtych, iednakiey wyſokości, tak ſię do ſiebie maią, iak promienie ich podſtaw.

2 Po-

2. Powierzchnie krzywe Walców prostych maiących równe podstawy, są do siebie, iak ich wysokości.

3. Powierzchnia cała Walca prostego, równa się Prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg podstawy Walca, a za wysokość summę z wysokości Walca, i z promienia podstawy iego, (ponieważ summa z powierzchni dwòch podstaw Walca, rowna iest Prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg, a za wysokość, promień iedney z tych podstaw). Jest zatym powierzchnia cała Walca prostego proporcyonalna Prostokątowi, ktòryby miał za boki, promień podstawy Walca, i summę z tegoż promienia i z wysokości walca; (gdyż stosunek okręgu do promienia, iest iednostaynym,)

114. *Uwaga.* Można okazać, iż wyznaczenie powierzchni krzywey Walca ukośnego, zawisło od wyznaczenia obwodu przecięcia Walca tego, przez płaszczyznę prostopadłą do iego osi; ale że wyznaczenie tego obwodu, większey niż początkowey Geometryi wiadomości wyciąga, przeto nie może być przez nię wyznaczona i powiezchnia krżywa Walca ukośnego.

115. *Twierdz*: 3. Dwa Walce równe ſą w bryłowatości, których tak podſtawy jako i wyſokości, ſą równe.

Dowodz: Wpiſawſzy, i opiſawſzy podſtawom tych dwóch Walców, Wielokąty foremne, o iednakowey liczbie boków, a zrobiwſzy na tych Wielokątach, Graniaſtoſłupy równey z Walcami wyſokości, maiące ściany równoodległe względem oſi tych Walców; rożnica Graniaſtoſłupa opiſanego na iednym z tych Walców, od Graniaſtoſłupa w tenże Walec wpiſanego, równać ſię będzie Graniaſtoſłupowi maiącemu tę ſamę, co tamte dwa wyſokość, a podſtawę równą różnicy dwoch ich podſtaw. A że różnica tych dwóch podſtaw, mnieyſza być może, niż iakakolwiek ilość naznaczona; więc też i różnicę dwoch Graniaſtoſłupow, wpiſanego i opiſanego, można uczynić mnieyſzą od iakieykolwiek ilości naznaczoney, a tym bardziey różnica iednego z tych Graniaſtoſłupa, od Walca może być mnieyſzą uczyniona, niż iakakolwiek ilość naznaczona.

Ze zaś dwa Graniaſtoſłupy podobne, nap: opiſane na tych dwoch Walcach ſą równe, więc też i te dwa Walce ſą równe

wne, (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpania.)

116. *Twierdzenie* 4. Walce z równemi podstawami, maią się do siebie, iak ich wysokości.

117. *Twierd*, 5. Walce z równą wysokością maią się do siebie, iak ich podstawy.

Dowodzenie tych dwóch Twierdzeń to samo iest prawie, co i dowodzenie Twierdzenia 3; położywszy stosunki nie równości podstaw, lub wysokości, na mieysce stosunków równości.

118. *Wnioski.* Cokolwiek się powiedziało o porownywaniu Graniastosłupow maiących podstawy rożnego gatunku, wszystko to przystosować można do porownywania Walcow z Graniastosłupami. Walec równy naprzykład iest iakiemukolwiek Graniastosłupowi maiącemu rowną z nim podstawę i wysokość. Walec tak się ma Graniastosłupa teyże co on wysokości, iak podstawa tego Walca, do podstawy Graniastosłupa, a zatym Walec tak się ma do Graniastosłupa teyże co i on wysokości, a którego podstawa iest

ieſt Wielokątem opiſanym na podſtawie Walca, iak podſtawa Walca, do podſtawy Graniaſtoſłupa, to ieſt, iak obwod podſtawy Walca, do obwodu podſtawy Graniſtoſłupa; nap: Walec, ktòrego wyſokość równa ſię średnicy podſtawy iego, tak ſię ma do Sześcianu tey średnicy, iak okrąg koła, do teyże średnicy wziętey 4 razy.

Gdy Walec równy ieſt Graniaſtoſłupowi w bryłowatości, wyſokość ich będzie w ſtoſunku odwrotnym podſtaw, i znowu, ieżeli wyſokości ſą w ſtoſunku odwrotnym podſtaw, tedy Walec równa ſię Graniaſtoſłupowi.

Stoſunek dwòch Walców, może podobnie, iak i ſtoſunek Graniaſtoſłupow, wyłożonym być w liniiach ſpoſobem naſtępuiącym: Wyraźmy w liniiach ſtoſunek ich podſtaw; znalazſzy trzecią proporcyonalną do promienia Walca pierwſzego, i do promienia Walca drugiego. Do wyſokości Walca pierwſzego, do wyſokości drugiego, i do tey trzeciey proporcyonalney, ſzukaymy czwartey proporcyonalney; ſtoſunek promienia Walca pierwſzego, do tey czwartey proporcyonalney, równy będzie ſtoſunkowi

bryło-

bryłowatości pierwſzego Walca, do bryłowatości drugiego.

Przykład liczebny. Niech będzie promień podſtawy drugiego Walca, trzy razy tak wielki iak promień podſtawy pierwſzego; wyſokość zaś drugiego Walca, niech będzie cztery razy tak wielka, iak wyſokość pierwſzego. Trzecia proporcyonalna do promienia Walca pierwſzego i do promienia Walca drugiego, będzie 9. razy tak wielka, iak promień pierwſzego Walca; a ponieważ wyſokość drugiego Walca, 4 razy ieſt tak wielka iak wyſokość pierwſzego, będzie więc czwarta proporcyonalna do wyſokości pierwſzego Walca, do wyſokości drugiego, i do tey trzeciey proporcyonalney, cztery razy tak wielka, iak ta trzecia proporcyonalna, to ieſt: 36 razy tak wielka iak pierwſzy promień, a zatym drugi Walec zawiera w ſobie pierwſzy, razy 36. Jakoż, gdyby podſtawa drugiego Walca zawierała w ſobie razy 9 podſtawę pierwſzego, a wyſokość ich była równa, tedy drugi Walec byłby 9 razy tak wielki iak pierwſzy; a że nadto wyſokość drugiego Walca zawiera w ſobie razy 4, wyſokość pierwſzego, będzie więc i z tey miary drugi Walec 4

razy

razy tak wielki, iak pierwſzy, a z obydwóch razem tych miar będzie 36 razy tak wielki, iak pierwſzy.

Co ſię zaś tycze miary liczebney iakiego Walca, ta będzie znaleziona, wyraziwſzy nayprzod w liczbach, powierzchnią iego podſtawy, (podług tego co ſię powiedziało o powierzchni koła,) a potym rozmnożywſzy tę liczbę przez inną, oznaczaiącą wyſokość Walca.

119. *Uwaga.* Wyznaczenie dokładne tak powierzchni krzywey Walca proſtego, iakoteż i całey iego powierzchni; to ieſt dokładne porównywanie tey powierzchni z powierzchnią proſtą, nap: z kwadratem, zawiſło od ſkwadrowania koła; a zatym od wyproſtowania iego okręgu. Toż mowić i o bryłowatości Walca, czyli o dokładnym porownywaniu tey bryłowatości z bryłowatością nap: Sześcianu.

Wyznaczenie wielkości kawałków Walca, maiących za podſtawy, wycinki, lub odcinki koła, zawiſło także od wyznaczenia Walca; ponieważ te kawałki tak ſię maią do Walca całego, ktòrego

ſą

są częściami, iak ich podstawy do koła służącego za podstawę temu Walcowi. (h)

ROZDZIAŁ VIII.

O *Ostrokręgach.*

120. D*Efin:* Niech będzie koło nakreślone naiakiey płaszczyźnie i niech od punktu nad tą płaszczyzną znayduiącego się, wyciągniona liniia lub nitka, obraca się około okręgu, tego koła. Powierzchnia krzywa obrotem tym linii lub nitki naznaczona nazywa się *powierzchnią Ostrokręgu*; Bryła zakończona przez tę powierzchnią i koło, około ktòrego nitka się obracała, nazwiemy *Ostrokręgiem* (Conus), koło, na którym Ostrokrąg stoi, nazwiemy *podstawą* iego; *wierz-*

(*h*) *Lubo niektóre części powierzchni Walcowey same przez się wyznaczyć można; nie można iednak wyznaczyć ich stosunku do całey powierzchni Walca. Toż mówić i o częściach Walca, których bryłowatości mogą być wyznaczone. Ale ta rzecz bardziey iest ciekawa, niż użyteczna, dla tego też dosyć iest o tym namienić.*

wierzchołkiem zaś, punkt ten, od którego nitka była wyciągniona. Liniia od tego wierzchołku do środka podstawy prowadzona, nazywa się *Osią* Ostrokręgu, a prostopadła spuszczona od wierzchołku do płaszczyzny podstawy: nazywa się *wysokością.* Gdy oś iest prostopadłą do płaszczyzny podstawy, Ostrokręgu; Ostrokrąg nazywa się *prostym*; gdy zaś ta oś nie iest do płaszczyzny podstawy prostopadłą, Ostrokrąg nazywa się *ukośnym.*

121. *Wniosek.* Poprowadziwszy liniią od wierzchołku Ostrokręgu do któregokolwiek punktu Okręgu podstawy iego, ta liniia zmieszasię wtedy z nitką rodzącą obrotem swoim, powierzchnią Ostrokręgu, gdy ta nitka przechodzić będzie przez ten punkt okręgu podstawy; a zatym ta liniia cała będzie na powierzchni krżywey tego Ostrokręgu.

Liniia poprowadzona od wierzchołku Ostrokręgu powierzchni iego krżywey, aż do okręgu podstawy, nazywa się *bokiem* Ostrokręgu.

122. *Twierdz:* 1. Gdy płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek Ostrokręgu iakiegożkolwiek przecina go, przecięcie to iest zawsze Tróykątem.

Dowo-

Dowodz: Liniie poprowadzone na tey płaſzczyznie od wierzchołku Oſtrokręgu, do dwòch punktòw okręgu, w ktòrych go ta płaſzczyzna przecina, będą bokami Oſtrokręgu, i ſpolnemi powierzchni iego krżywey, z tą płaſzczyzną przecięciami; a zatym przecięcie Oſtrokręgu przez tę płaſzczyznę, będzie Tròykątem maiącym za podſtawę, ſpolne przecięcie tey płaſzczyzny, z płaſzczyzną podſtawy Oſtrokręgu, a za boki, dwie liniie poprowadzone od wierzchołku, do punktòw przecięcia okręgu, od płaſzczyzny przechodzącey przez wierzchołek,

123. *Twierdz*: 2. Gdy Oſtrokrąg przecięty ieſt przez płaſzczyznę ròwnoodległą od iego podſtawy, przecięcie to ieſt kołem.

Tab. V. Fig: 2. Niech Tròykąt ASB wyraża iakiekolwiek przecięcie Oſtrokręgu od płaſzczyzny przechodzącey przez iego Oś, SC; niech liniia DFE wyraża ſpolne przecięcie tey płaſzczyzny i inney ròwnoodległey od podſtawy.

Tròykąty SCB, SFE, ſą podobne; więc $SC : CB = SF : FE$. Aże płaſzczyzna przecinaiąca Oſtrokrąg ròwnoodlegle od

podſtawy

podſtawy, przechodzi przez punkt nieruchomy F, a przeto trzy pierwſze wyrazy tey proporcyi ſą ſtałe iakiżkolwiek będzie promień podſtawy przez którą, a razem i przez oś przechodzi płaſzczyzna; więc też i czwarty wyraz ieſt ſtałym. Poprowadziwſzy tedy liniie od punktu F, do okręgu przecięcia, te liniie równe zawſze będą, a zatym to przecięcie ieſt kołem, którego punkt F, ieſt środkiem.

124. *Wnioſki.* Te koł powierzchnie tak ſię do ſiebie maią, iak kwadraty ich promieni, albo iak kwadraty odległości ich od wierzchołka. (To podanie ieſt wielce przydatne w Fizyce.)

Gdy Oſtrokrąg ieſt proſtym, wtedy wſzyſtkie płaſzczyzny, równoodległe od podſtawy, ſą do Oſi proſtopadłemi; a ztąd, można uważać Oſtrokrąg proſty, iakoby zrobiony obrotem Tróykąta proſtokątnego, około iednego z ramion kąta iego proſtego. To ramie będzie Oſią Oſtrokręgu, drugie, naznaczy powierzchnią podſtawy, przeciwproſtokątna zaś, naznaczy powierzchnią krzywą Oſtrokręgu.

125. *Twierdz: przybrane* 1. Gdy linija poprowadzona na płaszczyznie podstawy Ostrokręgu, dotyka się tey podstawy; płaszczyzna przez tę liniią i przez bok Ostrokręgu do punktu dotknięcia, ciągniony, przechodząca, wszystkie inne punkta swoie mieć będzie za Ostrokręgiem; to iest: nic spolnego z Ostrokręgiem nie będzie miała, oprocz boku, przez który przechodzi,

Tab. V. Fig. 3. Niech będzie SCA, przecięcie Ostrokręgu od płaszczyzny przechodzącey przez Oś SC, i przez podstawy promień CA. Niech AT, będzie styczną z tą podstawą, w końcu A, promienia CA; Płaszczyzna przechodząca przez liniie: SA, AT, będzie mieć za Ostrokręgiem, wszystkie punkta swoie, które nie są w linii SA.

Dowodz: Niech płaszczyzna iakakolwiek równoodległa od podstawy, Ostrokrąg przecina; niech *ca*, będzie spolnym przecięciem tey płaszczyzny, i drugiey przez oś przechodzącey; niech iesz cze *at* będzie przecięciem teyże płaszczyzny, i drugiey przechodzącey przez liniie: SA, AT. Liniie: *ca*, *at*, będą równoodległemi względem liniy: CA, AT;

a zatym

a zatym kąt *cat*, będzie równy kątowi CAT. Aże kąt CAT ieſt proſtym, więc proſtym także będzie i kąt *cat*; a zatym, oprocz punktu *a*, linii *at*, każdy inny punkt, teyże linii, będzie w większey od środka *c*, odległości, niżeli promień *ca*, to ieſt: niżeli odległość punktu na powierzchni Oſtrokręgu, i oraz na płaſzczyznie *cat*, znayduiącego ſię, od punktu Oſi, do teyże płaſzczyzny należącego. Każdy tedy inny punkt tey linii *at*, oprocz punktu *a*, ieſt za okręgiem.

126. *Defin*: O tey płaſzczyznie mowi ſię, iż ſię *dotyka Oſtrokręgu*, ktora iednę tylko liniią ma ſpolną z powierzchnią krżywą Oſtrokręgu.

127. *Wnioſek*. Opiſawſzy Wielokąt na podſtawie Oſtrokręgu, a przez wierzchołek tego Oſtrokręgu, i przez boki Wielokąta przeciągnąwſzy płaſzczyzny; ponieważ te boki Wielokąta opiſanego, ſłużyć będą za podſtawy ścian Oſtrogranu, wierzchołek zaś iego, będzie ten ſam, co i wierzchołek Oſtrokręgu, więc ściany tego Oſtrogranu dotykać ſię będą powierzchni Oſtrokręgu. Oſtrogran ten nazywa ſię opiſanym na Oſtrokręgu inny zaś, któryby ſpolny z Oſtrokręgiem

miał wierzchołek, a za podſtawę Wielokąt wpiſany w podſtawę Oſtrokręgu, nazywałby ſię w Oſtrokrąg *wpiſanym*.

128. *Twierdz: przybrane* 2. Maiąc dany Oſtrokrąg proſty, można weń wpiſać, i opiſać na nim dwa Oſtrograny foremne, ktòrychby ſtoſunek powierzchni ściennych bardziey ſię zbliżał do ſtoſunku równości, niż iakikolwiek naznaczony ſtoſunek nieròwności.

Powierzchnie ścienne tych dwóch Oſtrogranòw, ròwnaią ſię Tróykątom, maiącym za podſtawy, obwody podſtaw Oſtrogranów, a wyſokości zaś, ròwne wyſokościom iedney z ścian każdego Oſtrogranu; a zatym tak ſię do ſiebie maią te Oſtrograny, iak te dwa Tròykąty. Aże podſtawy tych dwòch Tròykątòw, tak ſię maią do ſiebie, iak proſtopadłe ſpuſzczone od środku, do dwóch ktòrychkolwiek bokòw podſtaw Oſtrogranu; więc te powierzchnie ścienne, tak ſię też do ſiebie mieć będą, iak Tròykąty ròwney z ścianami Oſtrogranów wyſokości, a maiące za podſtawy, te proſtopadłe; albo iak Proſtokąty, teyże z dwiema temi Tróykątami podſtawy i wyſokości. Że zaś ſtoſunek takich dwóch

Pro-

Proſtokątów, może być bardziey przybliżonym do ſtoſunku równości, niż iakikolwiek dany ſtoſunek nierówności, to ſię tak dowodzi.

Niech będzie SCA, przecięcie Oſtrokręgu proſtego, od płaſzczyzny przechodzącey przez oś tego Oſtrokręgu i przez wyſokości SA, SB dwoch ścian Oſtrogranów foremnych, i maiących za podſtawy Wielokąty z równą liczbą boków; ieden z tych Oſtrogranów niech będzie opiſanym na Oſtrokręgu, a drugi weń wpiſanym. *Tab. V. Fig. 4.*

Powierzchnia ścienna Oſtrogranu opiſanego proporcyonalna ieſt z Proſtokątem CA przez SA, a powierzchnia ścienna Oſtrogranu wpiſanego, proporcyonalna ieſt Proſtokątowi CB, przez SB. Poprowadźmy BD równoodległą od SA. Powierzchnia ścienna Oſtrogranu, maiącego za podſtawę, podſtawę Oſtrogranu wpiſanego, a za wyſokość liniią CD, takby ſię miała do powierzchni ścienney, Oſtrogranu opiſanego, iak Proſtokąt: $CB \times BD$ do Proſtokąta $CA \times AS$; to ieſt (dla podobieńſtwa Tròykątów SAC, DBC) iak kwadrat z CB do kwadratu z CA; albo iak powierzchnie podſtaw, dwóch

Oſtro-

Oſtrogranów. A że ſię dowiodło w Rozdziale o kwadrowaniu koła w Części I. że te dwie powierzchnie bardziey mogą być zbliżonemi do ſtoſunku równości, niż iakikolwiek dany ſtoſunek nierówności, więc też i ſtoſunek powierzchni ściennych, tych dwóch Oſtrogranów, bliżſzy może być ſtoſunku równości, niż iakikolwiek dany ſtoſunek nierówności. Ze zaś powierzchnia ścienna Oſtrogranu, którego SCA ieſt przecięciem, mniey ſię różni od Oſtrogranu, którego przecięciem ieſt: SCB, niżeli od Oſtrogranu, którego przecięciem ieſt: DCB, więc tym bardziey ſtoſunek powierzchni ściennych dwóch Oſtrogranów, iednego wpiſanego, drugiego opiſanego, mniey ſię różnić może od ſtoſunku równości, niżeli od tegoż ſtoſunku różni ſię iakikolwiek dany ſtoſunek nierówności.

129. *Twierdz. 3.* Powierzchnia krzywa Oſtrokręgu proſtego, równa ſię Tróykątowi maiącemu za podſtawę obwod podſtawy Oſtrokręgu, a za wyſokość bok Oſtrokręgu.

Dowódz. Powierzchnia krzywa Oſtrokręgu proſtego ieſt Granicą między powierzwierzchniami ściennemi Ostrogranów prostych weń wpisanych i na nim opisanych. Aże stosunek takich dwóch powierzchni Ostrogranów, może być do stosunku równości bardziey przybliżonym, niżeli iakikolwiek dany stosunek nierówności, więc tym bardziey stosunek powierzchni Ostrokręgu prostego, do powierzchni iednego z tych Ostrogranów, nap: opisanego, mniey się różnić może od stosunku równości, niżeli się od tegoż stosunku różni iakikolwiek dany stosunek nierówności. Że zaś powierzchnia ścienna Ostrogranu opisanego, równa się Tròykątowi maiącemu za wysokość, bok Ostrokręgu, a za podstawę obwod podstawy, tego Ostrogranu; więc (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpania, a wszczególności w Rozdziale o kwadrowaniu koła, że powierzchnia koła, równa się Tròykątowi maiącemu za podstawę obwod koła, a za wysokość, promień iego): Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego, iest też równa Tròykątowi, któryby miał za podstawę obwod podstawy Ostrokręgu, a za wysokość bok iego.

130. *Wniosek.* Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego, równa się wycinko-

cinkowi koła, któreby miało za promień, bok Ostrokręgu, a ktòrego łuk ròwnyby był w długości okręgowi podstawy Ostrokręgu; a to dla tego, że powierzchnia tego wycinku, ròwna się także Tròykątowi, maiącemu za wysokość bok Ostrokręgu, a za podstawę łuk tego wycinku, albo okrąg podstawy Ostrokręgu.

131. Dla znalezienia ważności kątowey, tego wycinku, następuiąca czyni się proporcya: Jak się ma bok Ostrokręgu, do promienia podstawy iego, tak się ma 360° do ważności kątowey, ktòrey szukamy.

Jakoż, gdyby bok Ostrokręgu, był dwa, trzy, i t. d. razy większy od promienia podstawy, tedy okrąg cały maiący za promień bok Ostrokręgu. byłby dwa, trzy i t. d. razy większy od okręgu podstawy; a zatym i łuk pierwszego koła, ktòryby się ròwnał okręgowi podstawy, byłby połową, trzecią, częścią i t. d. okręgu, do ktòrego należy.

132. *Defin:* Niech będzie Ostrokrąg przecięty płaszczyzną ròwnoodległą od podstawy iego, Bryła zakończona z iedney strony, podstawą Ostrokręgu a z dru-

drugiey tym przecięciem, nazywa się *Ostrokręgiem ściętym* (Conus truncatus.)

133. *Twierdz:* 4. Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego ściętego, równa się Prostokątowi maiącemu za wysokość, bok tego Ostrokręgu ściętego, a za podstawę liniią równą takiemu Okręgowi, którego promieniem byłaby połowa summy promieni do dwòch podstaw Ostrokręgu tegoż ściętego należących; to iest średnia arytmetyczna między dwoma temi promieniami.

Niech Tròykąt SCA, wyraża połowę przecięcia Ostrokręgu prostego, od płaszczyzny przechodzącey prześ oś iego. Niech tenże Ostrokrąg będzie ieszcze przecięty płaszczyzną ròwnoodległą od podstawy, a spolnym tey płaszczczyzny z pierwszą przecięciem, niech będzie: *ca.* Przecięcie: CAac, oznaczy przecięcie Ostrokręgu ściętego. Pociągniymy liniią AB, prostopadłą do boku SA, i równą Okręgowi koła, którego promieniem iest: CA. Tròykąt SAB, będzie równy powierzchni krzywey Ostrokręgu całego: poprowadźmy ieszcze liniią *ab*, równoodległą od AB, i spotykaiącą w punkcie *b*, liniią SB. Ta liniia *Tab. V. Fig.* 5.

ab,

ab, będzie też równa okręgowi koła, którego, promieniem iest: *ca*, a Tróykąt Sab, równać się będzie powierzchni krzywey Ostrokręgu Sac; będzie zatym Czworokąt ABba, równy powierzchni krzywey Ostrokręgu ściętego caCA.

Podzielmy teraz liniią Aa, na dwie części równe w punkcie: E. i poprowadźmy EF, równoodległą od AB.

Ta liniia EF, będzie równa okręgowi koła, którego promień równałby się linii: ED, toiest średniey Arytmetyczney między promieniami, CA, i *ca*, dwóch podstaw Ostrokręgu ściętego; a przeto powierzchnia Czworokąta ABba, równa się Prostokątowi AHGa, maiącemu za wysokość, bok Aa, Ostrokręgu ściętego, a za podstawę liniią EF równą okręgowi średnie arytmetyczni e proporcyonalnemu, między okręgami dwóch podstaw tegoż Ostrokręgu.

134. *Uwaga* 1. Wyrażenie następuiące powierzchni krżywey Ostrokręgu prostego, czyli to całego, czyli też ściętego, posłuży nam, gdy mówić będziemy o powierzchni *kuli* (Sphera.)

Od środku E, linii Aa, wyciągniymy liniią EI prostopadłą do Aa, spotykaiącą oś SC, w punkcie I. Poprowadźmy i drugą liniią aL, równoodległą od SC, a prostopadłą do AC.

Summa kątów IED, DEa, równa się kątowi prostemu; tak iako i summa kątów: AaL, DEa; więc te dwie summy są sobie równe; a zatym kąt IED, równa się kątowi AaL. Są tedy podobne, dwa Tróykąty prostokątne: IED, AaL, a zatym boki ich będą proporcyonalne; więc, IE : ED = Aa : aL, (albo Cc) a ztąd i okręgi, maiące za promienie, liniie: IE, ED, są też do siebie, iak liniie: Aa, Cc; a zatym Prostokąt z linii Cc, przez okrąg, którego liniia IE, byłaby promieniem, równałby się Prostokątowi z linii Aa, przez okrąg, któryby miał za promień, liniią ED. Aże ten drugi Prostokąt równy iest powierzchni krzywey Ostrokręgu ściętego; więc też i pierwszy byłby równy teyżeOstrokręgu ściętego powierzchni. Jest tedy powierzchnia krzywa Ostrokręgu ściętego, równa Prostokątowi maiącemu wysokość równą wysokości Ostroręgu ściętego, a podstawę równą okręgowi takiego koła, którego promieniem byłaby prostopadła, od środku boku Ostrokręgu ściętego wyciągniona, aż do

iego

iego osi, która to prostopadła iest czwartą geometrycznie proporcyonalną, do wysokości Ostrokręgu ściętego, do iego boku, i do średniey arytmetyczney między dwoma promieniami; co wszystko łatwo przystosować można i do Ostrokręgu ściętego.

135. *Uwaga* 2. Wyznaczenie więc dokładne powierzchni Ostrokręgu, lub iey części, zawisło od wyprostowania okręgu koła.

Co się tycze Ostrokręgu ukośnego, ieszcze cięższey iest wyznaczyć powierzchnią iego krzywą, niżeli Walca ukośnego; to zaś pochodzi z nierówności iego boków, a zatym z nierówności ścian Ostrogranów, z podstawami foremnemi, opisanych lub opisać się mogących na tym Ostrokręgu.

136. *Twierdz. przybrane* Bryłowatości dwóch Ostrogranów z podstawami foremnemi, iednego wpisanego w Ostrokrąg, a drugiego na nim opisanego, różnica może być mnieysza, niż iakakolwiek ilość naznaczona; to iest stosunek ich bryłowatości, może bardziey być przybliżonym do stosunku rowności, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności.

Dowodz:

Dowodz: Różnica tych dwóch Ostrogranów, równa się Ostrogranowi teyże co one wysokości, a którego podstawa byłaby równa różnicy ich podstaw. Aże stosunek tych podstaw, może być bardziey przybliżonym do stosunku równości, niż dany iakikolwiek inny stosunek nie równości, więc też i stosunek tych dwóch Ostrogranów, może się zbliżyć do stosunku równości bardziey niż inny dany iakikolwiek stosunek nie równości. Zamieniwszy różnicę dwóch Ostrogranów, na trzeci Ostrogran teyże co one wysokości, można będzie wpisać i opisać podstawie Ostrokręgu dwa Wielokąty, z równą liczbą boków, takie, którychby rożnica mnieysza była od podstawy tego trzeciego Ostrogranu, a tym bardziey ieden z Ostrogranów wystawionych na tych Wielokątach, równey z Ostrokręgiem wysokości, mniey się różnić będzie od Ostrokręgu, niż iakąkolwiek ilością naznaczoną.

137. *Twierdz.* 5. Bryłowatość iakiegokolwiek Ostrokręgu, iest trzecią częścią bryłowatości Walca równey z Ostrokręgiem podstawy i wysokości.

Dowodz: Ostrograny i Graniastosłupy *iednoimienne* (eiusdem nominis) wpisane, lub

lub opiſane, pierwſze na Oſtrokręgu a drugie na Walcu, iednakiey z niemi wyſokości, ſą trzecią częścią pierwſze względem drugich. Aże te Oſtrograny i Graniaſtosłupy mogą ſię różnić pierwſze od Oſtrokręgu, drugie od Walca, na którym ſą nap. opiſane, mniey niż iakąkolwiek daną ilością; więc (podług tego, co ſię powiedziało o ſpoſobie wyczerpania) Oſtrokrąg ieſt też trzecią częścią Walca.

138. *Wnioſek.* Cokolwiek mowiliśmy o porównywaniu Walców, zawisłym od ich wyſokości, i podſtaw, można to wſzyſtko i do Oſtrokręgów przyſtoſować, które trzecią ich ſą częścią; podobnie iakośmy i to co ſię mówiło o porownywaniu Graniaſtosłupów, do Oſtrogranów przyſtoſowali. J tak.

1. Oſtrokręgi, których podſtawy ſą równe, maią ſię do ſiebie, iak ich wyſokości.

2. Oſtrokręgi, których wyſokości ſą równe, maią ſię do ſiebie, iak ich podſtawy.

3. Oſtrokręgi, których bryłowatości ſą równe, maią podſtawy w ſtoſunku odwrotnym ich wyſokości.

4.

4. Oſtrokręgi, których podſtawy maią ſię do ſiebie, w ſtoſunku odwrotnym ich wyſokości, ſą równe.

5. Stoſunek dwóch Oſtrokręgów w liniiach wyrażony, tak ſię znayduie: zamienia ſię ſtoſunek podſtawy iednego, do podſtawy drugiego na ſtoſunek linii do linii; znayduiąc trzecią proporcyonalną do promienia podſtawy pierwſzego Oſtrokręgu, i do promienia podſtawy drugiego. Zamienia ſię także ſtoſunek wyſokości pierwſzego Oſtrokręgu, do wyſokości drugiego, na ſtoſunek trzeciey proporcyonalney znalezioney, do czwartey. Stoſunek promienia podſtawy pierwſzego Oſtrokręgu, do tey czwartey proporcyonalney, równy będzie ſtoſunkowi pierwſzego Oſtrokręgu, do drugiego.

6. Wyrażenie liczebne bryłowatości Oſtrokręgu, znayduiemy; mnożąc liczbę oznaczaiącą wielkość powierzchni podſtawy iego, przez liczbę oznaczaiącą wielkość wyſokości, a potym tey liczby rozmnożoney biorąc część trzecią.

Wyznaczenie tedy dokładne bryłowatości Oſtrokręgu, zawiſło od wyznaczenia

nia dokładnego, iego podſtawy, a zatym od wyproſtowania okręgu koła.

Bryłowatość Oſtrokręgu, ròwna ſię bryłowatości iakiegokolwiek Oſtrogranu, równey z Oſtrokręgiem wyſokości i podſtawy.

139. *Twierdz:* 6. Bryłowatość Oſtrokręgu proſtego, równa ſię bryłowatości Oſtrokręgu innego, którego powierzchnia podſtawy byłaby równa, powierzchni całey Oſtrokręgu proſtego, a wyſokość, równa promieniowi koła wpiſanego w Tróykąt równoramienny wyrażaiący przecięcie Oſtrokręgu proſtego od płaſzczyzny przez oś iego przechodzącey.

Niech będzie ASB przecięcie Oſtrokręgu proſtego, od płaſzczyzny przez oś iego przechodzącey.

Tab. V. Fig: 6. Niech będzie SC proſtopadła do AB, wyſokością, czyli oſią tego Oſtrokręgu. Podzielmy ieden z kątów przy podſtawie AB, nap: kąt A, na dwie równe części, przez liniią AD, i prowadźmy ią aż do punktu D, proſtopadłey SC; od tegoż punktu D, niech idzie proſtopadła

DE

DE do SA. Liniie równe DC, DE, będą promieniami, koła wpiſanego w Tròykąt przechodzący przez oś Oſtrokręgu.

Powierzchnia podſtawy Oſtrokręgu, tak ſię ma do iego powierzchni krzywey, iak AC, do AS; a zatym powierzchnia podſtawy, tak ſię mieć będzie do całey powierzchni Oſtrogręgu, iak AC do AC+AS, albo iak AC^2 do AC (AC+AS); więc powierzchnia cała Oſtrokręgu równa ſię kołu maiącemu za promień średnią geometryczną między promieniem AC podſtawy Oſtrogręgu, i ſummą z tego promienia i z boku Oſtrokręgu. Aże liniia AD, dzieli kąt CAS na dwie równe części więc AS : AC = SD : CD; i AS+AC : AC = SD+CD : CD; a nakoniec (AS+AC)AC : AC^2 = SC : CD.

Więc Oſtrokrąg maiący za promień podſtawy, średnią geometryczną między AC, i $\overline{AC+AS}$, a za wyſokość liniią CD, miałby powierzchnią ſwoię, do powierzchni Oſtrokręgu podanego, w ſtoſunku odwrotnym wyſokości; a zatym te dwa Oſtrokręgi byłyby równe. Że zaś podſtawa pierwſzego Oſtrokręgu ieſt równa całey powierzchni Oſtrokręgu podanego; więc bryłowatość Oſtrokręgu proſtego, równa ſię bryłowatości Oſtrokręgu innego, maiącego podſtawę równą całey proſtego Oſtrokręgu powierzchni, a wyſokość równą promieniowi koła wpiſanego w Tròykąt, który ieſt przecięciem tego Oſtrokręgu od płaſzczyzny przechodzącey przez oś iego.

ROZDZIAŁ IX.

O Kuli.

140. D*Efin:* Niechby Połkole obracało ſię około ſwoiey średnicy. Okrąg iego przebiegnie, tym ſwoim obrotem powierzchnią krzywą, którą nazwiemy *Powierzchnią kuliſtą* (ſuperficies ſpherica); całe zaś połkole obiegnie mieyſce tą powierzchnią krzywą zakończone, które ſię nazywa *Kulą* (Sphera albo Globus).

Podczas tego obrotu, każdy punkt okręgu połkola, w iednakowey zawſze byłby od iego środka odległości; a zatym i każdy punkt powierzchni kuliſtey, w iednakowey też będzie odległości od tego środka.

Kula

Kula więc ieſt bryłą zakończoną pr zez powierzchnią krzywą, ktòrey wſzyſtkie punkta iednakowo ſą odległe od pewnego punktu nazwanego *środkiem*.

Odległość środka od punktu ktòregokolwiek powierzchni kuli, nazywa ſię *promieniem*. Liniia każda przechodząca przez środek kuli, a po obydwòch ſtronach kończąca ſię na iey powierzchni, nazywa ſię średnicą, i dwa razy ieſt większą od promienia. Ta zaś średnica, około ktòrey obracaiąc ſię połkole, zrobiło kulę nazywa ſię *Oſią* kuli.

Gdybyśmy przecieli kulę płaſzczyzną przechodzącą przez iey środek, wſzyſtkie punkta przecięcia powierzchni kuliſtey, przez tę płaſzczyznę, byłyby iednakowo odległe od środka kuli, który na tymże ieſt przecięciu.

Więc takie przecięcie ieſt kołem maiącym za promień, promień kuli.

Przecięcie kuli od płaſzczyzny, która przez iey środek przechodzi, nazywa ſię *wielkim kołem kuli*.

Dwa takie koła przecinaią ſię, iedno z drugim na dwie części równe.

Jakoż ſpolne ich przecięcie przechodzi, przez środek kuli, a żatym i przez środek tak iednego, iak i drugiego koła; więc ieſt średnicą obydwòch. Aże średnica przecina koło na dwie równe części, więc i dwa koła wielkie kuli przecinaią ſię na dwie części rowne.

Gdyby kula przecięta była płaſzczyzną nie przechodzącą przez iey środek, ale proſtopadłą do oſi iey obrotu, przecięcie to kuli byłoby kołem od ſpolnego przecięcia tey płaſzczyzny z płaſzczyzną połkola, nakreślonym, pod czas obrotu tegoż połkola tworzącego kulę.

Ze zaś można ſobie wyſtawić w myśli, kulę daną, iakoby utworzoną przez obrot ktoregokolwiek połkola wielkiego, około iego średnicy, i kula z tego obrotu powſtała, iednakowey zawſze ieſt wielkości; więc gdziekolwiek przetniemy kulę płaſzczyzną, wſzędzie przecięcie iey, będzie kołem; ponieważ można wziąść za oś kuli, tę iey średnicę, ktora do tey płaſzczyzny ieſt proſtopadłą.

Przecięcie kuli od płaſzczyzny nie przechodzącey przez iey środek, nazywa ſię *małym kołem*.

Gdy

Gdy przez koniec promienia kuli, przechodzi płaſzczyzna proſtopadła do tego promienia, wſzyſtkie inne punkta tey płaſzczyzny będą za kulą.

Jakoż odległość któregokolwiek innego punktu tey płaſzczyzny, od środka kuli, ieſt przeciwproſtokątną Tróykąta proſtokątnego, ktòry ma promień, za iedno ramie kąta proſtego, a za drugie, odległość tego punktu, od końca promienia. Wſzyſtkie tedy inne punkta tey płaſzczyzny ſą pośrodka odległe większą ilością, niżeli ieſt promień, a zatym ſą za kulą.

O płaſzczyznie, nie maiącey ani mieć mogącey więcey nad ieden punkt ſpolny z kulą, mòwi ſię, iż ſię kuli *dotyka*. Ta zaś płaſzczyzna powinna być proſtopadłą do promienia, poprowadzonego do punktu dotknięcia.

Przez punkt dotknięcia pociągnąwſzy na tey płaſzyznie iakąkolwiek liniią proſtą, ta będzie proſtopadłą do tego promienia, ktòry do punktu dotknięcia byłby poprowadzony; a zatym liniia ta, będzie ſtyczną z tym kołem, ktòreby było przecięciem kuli od płaszczyzny przechodzącey przez tę liniią, i przez ten promień.

Jakośmy się zatrudniali wyżey około Walcow, i Ostrokregow prostych, tak teraz zatrudniać się będziemy około powierzchni i bryłowatości kuli, i iey części rożnych.

141. *Twierdz. przybrane.* Niech będzie łuk koła, przez ktorego punkt średni poprowadziliśmy styczną, aż do iey zeyścia się z obydwoch stron, z promieniami przez końce tego łuku przeciągnionemi.

Tak iednę, iak i drugą połowę tego łuku, podzielmy na dwie części rowne i przez punkta podziału, poprowadźmy znowu dwie styczne aż do ich zeyścia się z promieniami przeciągnionemi przez końce tych połow.

Część promienia przeciągnionego, zawarta między okręgiem, i pierwszą styczną, więcey niż dwa razy większa iest od części zawartey między okręgiem, i iedną z drugich dwoch stycznych.

Tab. VI. Fig. 1. Niech będzie ADB, łuk koła, przez ktorego punkt średni D, poprowadzona iest stycz-

na

na ſpotykaiąca w punktach E, i *e*; promienie CB, CA przedłużone. Przez średnie punkta. F, i *f*, łukow: BD, AD, poprowadźmy ſtyczne: GH, Gh, które ſpotykaią w punktach: G, H, h, promienie przechodzące przez końce łukòw: BD, AD.

Trzeba dowieść, iż liniia BE, więcey niż dwa razy ieſt większa od linii BH.

Niech liniia CF, ſpotyka w pukcie L, liniią Ee; Tróykąty: CDL, CFG, mogą przyſtać do ſiebie, więc liniie: DG, albo BH, i FL, ſą równe.

Poprowadźmy cieńciwę BD, którą liniia CL ſpotyka w punkcie I, i BM równoodległą od CL.

Tróykąty proſtokątne: BDM, JDL, ſą do ſiebie podobne; a że BD dwa razy ieſt większa od DI, więc też i BM, dwa razy większa będzie od JL; a zatym BM, więcey niż dwa razy większa ieſt od FL, albo BH. Ze zaś w Tròykącie EBM, kąt M, ieſt roztwarty, a przeto liniia BE, większa od linii BM; więc tym bardziey liniia BE, więcey niż dwa razy większa ieſt od linii BH.

142.

142. *Wniosek* 1. Niech będzie promień CN, prostopadły do promienia CA. Od punktów: E,H,B, spuśćmy prostopadłe: EO, HP, BQ do promienia CN; stosunek liniy: EB, HB, równy będzie stosunkowi liniy OQ, PQ. Aże EB więcey niż dwa razy iest większa od BH, więc i OQ więcey niż dwa razy większa też będzie od PQ.

143. *Wniosek* 2. Gdy daley dzielić będziemy łuk AB, na części równe; 4,8,16, 32, i t. d. i przez punkta średnie podziałow, pociągniemy styczne, aż do ich zeyścia się z promieniami przechodzącemi przez końce każdego w szczegulności podziału; gdy nadto, od punktu, w ktòrym ostatnia styczna spotyka promień przedłużony CE, spuściemy prostopadłą EO, na promień CN; rożnica między odległością spodku O, tey prostopadłey, od środka C, i odległością od tegoż środka C, spodku Q, prostopadłey BQ, z końca B, łuku AB spuszczoney, ta mowię różnica zmnieysza się więcey niż połową za każdym następuiącym podziałem, a zatym może się na ostatek stać mnieyszą od iakieykolwiek ilości naznaczoney.

144, *Twierdz:*

144. *Twierdz.* 1. Niech będzie łuk koła, mnieyſzy od czwartey części okręgu iego, i niech ten łuk obraca ſię około promienia proſtopadłego do drugiego promienia, który przechodzi przez ieden koniec tego łuku. Z drugiego iego końca ſpuśćmy proſtopadłą na pierwſzy promień, to ieſt na oś obrotu łuku.

Część powierzchni kuli utworzona, tym około oſi obrotem łuku, równa ſię Proſtokątowi, maiącemu za podſtawę liniią równą całemu okręgowi, którego ten łuk ieſt częścią; a za wyſokość, liniią równą odległości środka, od ſpodku proſtopadłey ſpuſzczoney na oś obrotu: powierzchnia zaś cała kuli cztery razy ieſt większa, niżeli powierzchnia wielkiego koła, teyże kuli.

Niech będzie łuk ADB; niech promień CN, będzie proſtopadłym do promienia CA, przechodzącego przez ieden koniec tego łuku. *Tab. VI Fig.* 1.

Poprowadźmy BQ, proſtopadłą do CN. Niech koła czwarta część ABN, obraca ſię około promienia CN, iak około oſi ſwoiey. Powierzchnia krzywa, obrotem łuku AB naznaczona, równa ſię Proſtokątowi

kątowi

kątowi, któryby miał za wyſokość, liniią CQ, a za podſtawę, liniią rowną okręgowi, którego CA ieſt promieniem.

Dowodz: Niech ſtyczna Ee, przechodzi przez średni punkt D. łuku AB, i niech ſpotyka w punktach E, i *e*, promienie przechodzące przez dwa końce tego łuku.

Dzielmy daley łuk AB, na części równe: 4.8,16.32, i t. d. a od punktu, w ktòrym oſtatnia ſtyczna ſpotyka promień CB, przy każdym náſtępuiącym podziale, ſpuſzczaymy proſtopadłą na promień CN. Rożnica między odległością środka. od ſpodku tey proſtopadłey, a liniią CQ, zmnieyſzać ſię będzie więcey niż połową, za każdym naſtępnym podziałem; więc różnica ta, może ſię naoſtatek ſtać mnieyſzą, niż iakakolwiek ilość naznaczona.

Podczas obrotu łuku AB, około linii CN, każda ſtyczna kréśli powierzchnią krzywą Oſtrokręgu ściętego ròwnaiącą ſię Proſtokątowi maiącemu za podſtawę, liniią równą okręgowi, ktòrego promieniem, ieſt CN, a za wyſokość. odległość dwòch proſtopadłych ſpuſzczonych

nych na oś, od końcow tey ſtyczney; a zatym ſumma powierzchni krzywych, zrobionych od wſzyſtkich tych ſtycznych, równa ſię Proſtokątowi, maiącemu tę ſamę podſtawę a wyſokość równą ſummie wſzyſtkich tych wyſokości; to ieſt równą odległości środka, od ſpodku proſtopadłey ſpuſzczoney na oś z punktu tego, gdzie oſtatnia ſtyczna ſpotyka promień CB. Może tedy rożnica ſummy powierzchni krzywych Oſtrokręgu zrobionych obrotem wſzyſtkich ſtycznych, mnieyſza być od Proſtokąta z taką iak ſię wyżey powiedziało podſtawą a z wyſokością CQ, niżeli iakakolwiek ilość naznaczona. Summa zaś tych wſzyſtkich powierzchni krzywych, większa ieſt zawſze od powierzchni utworzoney obrotem łuku AB; więc (podług tego, co ſię powiedziało o ſpoſobie wyczerpania, i w Rozdziale o kwadrowaniu koła) powierzchnia krzywa utworzona obrotem łuku AB, równa ſię Proſtokątowi, maiącemu za podſtawę, okrąg, ktòrego promieniem ieſt CA, a za wyſokość, odległość CQ, środka C, od ſpodku Q, proſtopadłey ſpuſczoney na oś z końca B, tego łuku.

Mowiąc w ſzczegulności; powierzchnia Połkuli (Hemiſpherium) utworzoney obrobrotem czwartey części koła, ABN, równa się Prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg, ktòrego, CA iest promieniem, a za wysokość, promień CN.

A zatym powierzchnia krzywa, utworzona obrotem łuku BN, ròwna się Prostokątowi maiącemu wysokość NQ, a podstawę ròwną okręgowi wielkiego koła kuli.

Powierzchnia także całey kuli, równa się Prostokątowi maiącemu za wysokość średnicę kuli, a za podstawę, okrąg wielkiego iey koła, Aże powierzchnia wielkiego koła ròwna się Prostokątowi maiącemu za wysokość połowę promienia, albo czwartą część średnicy, a okrąg tego koła, za podstawę.

Więc powierzchnia kuli cztery razy iest większa od powierzchni wielkiego iey koła, ktòrego promień ròwna się średnicy kuli.

145. Idzie zatym, że powierzchnia kuli, tak się ma do powierzchni kwadratu iey średnicy, iak powierzchnia koła iakiegokolwiek, cztery razy wzięta, do kwadratu średnicy tegoż koła: Aże powierz-

wierzchnia koła, ieſt do powierzchni kwadratu średnicy iego, iak okrąg koła do iey średnicy cztery razy wziętey ia-ko ſię w Rozdziale XIII. Części I. do-wiodło) więc powierzchnia kuli tak ſię ma do powierzchni kwadratu iey śre-dnicy, iak cztery razy okrąg koła, do średnicy iego cztery też razy wziętey, to ieſt) iak okrąg koła, do ſwoiey średni-cy. Więc wyznaczenie dokładne po-wierzchni kuli, zawiſło od ſkwadrowa-nia koła, i od wyproſtowania okręgu iego.

146. Powierzchnia cała kuli, tak ſię ma do powierzchni nakreśloney obrotem łuku NB, iak ſię ma średnica kuli, do li-nii NQ, albo iak kwadrat tey średni-cy, do Proſtokąta z linii NQ, i z średnicy; albo nakoniec, iak kwadrat średnicy, do kwadratu linii NB; a zatym, iak koło, ktòreby miało za promień tę średnicę, do koła, ktòreby miało za promień liniią NB; aże powierzchnia kuli równa ſię powierzchni pierwſzego koła; więc po-wierzchnia nakreślona obrotem łuku NB, równa ſię powierzchni drugiego koła.

Niech będzie NBFA, połkole tworzące *Tab. VI.* obrotem ſwoim kulę; niech będzie; NEDA *Fig. 2.*

Pro-

Proſtokąt, ktòrego podſtawą ieſt średnica tego połkola, a wyſokością promień iego. Podczas obrotu połkola, ten Proſtokąt utworzy Walec proſty, ktòrego powierzchnia krzywa zrobiona przez obrot linii ED, ròwnać ſię będzie Proſtokątowi maiącemu za wyſokość średnicę DE, albo AN, a za podſtawę okrąg podſtawy tego Walca, a zatym ta powierzchnia krzywa, ròwna ſię powierzchni kuli.

147. Podobnie ſię okaże, iż poprowadziwſzy liniią QBP, proſtopadłą do oſi, powierzchnia krzywa należąca do Walca, a zrobiona przez obrot linii EP, rowna ieſt powierzchni należącey do kuli, a zrobioney przez obrot łuku NB.

148. Walec utworzony obrotem Proſtokąta ADEN, miałby wyſokość równą średnicy podſtawy ſwoiey; dotykałyby ſię w punktach: A, i N, kuli utworzoney obrotem połkola AFBN; dotykałby ſię iey także w okręgu, ktòrego promieniem byłby promień CF kuli.

O takim Walcu mòwi ſię, iż ieſt na kuli opiſanym. Nazywa ſię on także i Walcem Archimedeſa, od nazwiſka tego Matematyka, który pierwſzy znalazł równość

wność powierzchni kuli z powierzchnią krzywą tego Walca, iako też i stosunek ich bryłowatości.

149. Powierzchnia iedney z dwóch podstaw tego Walca, równa się Prostokątowi z okręgu tey podstawy, i z połowy iey promienia; a zatym powierzchnia obydwòch razem tych podstaw, równa się Prostokątowi z okręgu iedney podstawy, i z iey promienia. Aże powierzchnia krzywa Walca, równa iest Prostokątowi z okręgu podstawy iego, i z średnicy teyże podstawy, albo z promienia dwa razy wziętego; więc powierzchnia cała Walca, równa iest Prostokątowi z okręgu iego podstawy, i z promienia trzy razy wziętego; a zatym powierzchnia krzywa tego Walca iest $\frac{2}{3}$ powierzchni iego całey; a przeto i powierzchnia kuli iest też $\frac{2}{3}$ powierzchni całey Walca na niey opisanego.

150. *Uwaga.* To, co się dotąd powiedziało, trzeba przystosować do niektórych przykładów liczebnych podobnych następuiącemu.

Przykł: Jakaż iest wielkość powierzchni Ziemi w milach kwadratowych Niemieckich, rachuiąc na stopień, mil 15?

Niech będą dwa koła wielkie Ziemi, iedno proſtopadłe do drugiego. Podzielmy okrąg iednego z tych kół, nap: co dzieſięć, albo co pięć ſtopniów, i przez punkta podziału niech przechodzą płaſzczyzny równoodległe od koła drugiego. Trzeba znaleść wielkość powierzchni zawartych między dwoma naybliżſzemi od ſiebie podſtawami.

Wſzczegulności zaś, ieżeli uczniowie maią wiadomość początkową Geografii, mogą wyrachować dwie powierzchnie zawarte między kołami, z których iedno odległe ieſt od *Równika* (æquator), na $23^{\circ}\frac{1}{2}$, a drugie od *Biegónu* (polus) także na $23^{\circ}\frac{1}{2}$.

Tob. VI. Fig. 2 Niech będzie CF promieniem iednego koła wielkiego; niech NBF. wyraża czwartą część drugiego koła do niego proſtopadłego; niech BQ,bq, będą przecięciami tego koła proſtopadłego i dwóch płaſzczyzn równoodległych od koła, pierwſzego.

Powierzchnia krzywa połkuli, tak ſię ma do powierzchni części zawartey między płaſzczyznami CF i BQ, iak ſię ma promień kuli, do linii CQ, która ieſt

wſtawą

wstawą łuku BF. Podobnie i powierzchnia krzywa połkuli, tak się ma do powierzchni części zawartey między płaszczyznami: CF, i bq, iak wstawa cała, czyli promień do wstawy łuku bF, to iest do linii Cq. Można więc wyrachować te części powierzchni półkuli, a zatym i ich różnicę, to iest: część powierzchni zawartey między płaszczyznami: BQ, i *bq*.

151. *Twierdz.* 2. Bryłowatość kuli równa się $\frac{2}{3}$ bryłowatości Walca na tey kuli opisanego.

Niech będzie ACBMA czwarta część koła, tworząca Połkulę obrotem swoim około promienia CB. Niech będzie CABD kwadrat opisany na tey czwartey części koła. Ten kwadrat obracaiąc się około CB, utworzy Walec opisany na połkuli, który będzie połową Walca opisanego na całey kuli. Trzeba dowieść, iż Połkula utworzona obrotem czwartey części koła AMBC równa się $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem kwadratu ACBD. *Tab. VI. Fig. 3.*

Poprowadźmy przekątną CD; Tròykąt BCD utworzy Ostrokrąg, którego podstawa wykreślona będzie promieniem BD, a za wysokość tego Ostrokręgu będzie BC; to iest będzie ten Ostrokrąg równey z Walcem podstawy, i wysokości.

Od dwóch ktòrychkolwiek punktów nap: P, i p Osi CB wyciągniniymy prostopadłe do niey linii: PQ, pq; te przetną okrąg w M, i m, a liniią CD w L, i l; nakreślmy nadto, linie: MN, mn, LO, lo, równoodległe od osi. Kwadrat promienia CM, ròwna się summie kwadratòw z PM, i CP; aże liniia PQ równa iest promieniowi, (tak iako BD, CA i CB są równe) i CP równa PL; więc kwadrat z PQ, ròwna się summie kwadratòw z PM, i z PL.

Ze zaś Walce utworżone obrotem Prostokątów Pq. PN, PO, maiących iednakie wysokości, są do siebie, iak ich podstawy, albo iak kwadraty promieniòw tychże podstaw; więc pierwszy z tych Walcow będzie równy summie dwoch innych. Podobnym sposobem okazać można, że Walec Pq równa się summie Walców utworzonych obrotem Prostokątów Pm, i Pl.

Tako-

Takowe dowodzenie ma mieyſce chociaż nie od punktów P, i p, ale od ktòrychkolwiek innych będą wywiedzione proſtopadłe do oſi CB; a zatym podzieliwſzy oś, na iakąkolwiek liczbę części rò-wnych, a od każdego punktu podziału wyciągnąwſzy proſtopadłe przecinaiące tak okrąg iako i liniią CD; Summa wſzyſtkich Walców ſkładaiących Walec ADB, ròwnać ſię będzie ſummie wſzyſtkich Walcow wpiſanych w Półkulę, wraz z ſummą wſzyſtkich Walców opiſanych na Oſtrokręgu, albo ſummie wſzyſtkich Walców opiſanych na Pólkuli, wraz z ſummą wſzyſtkich Walców w Oſtrokrąg wpiſanych. Aże ſumma wſzyſtkich Walcow wpiſanych lub opiſanych na Pòlkuli, może ſię mnieyſzą ilością różnić od teyże Pòłkuli, niż iakakolwiek ilość naznaczona; a wtedy i ſumma wſzyſtkich Walcòw wpiſanych, lub opiſanych Oſtrokręgowi, ròżnić ſię też od tego Oſtrokręgu będzie mnieyſzą ilością, niż ieſt ta ilość dana.

Więc (podług tego, co ſię powiedziało o ſpoſobie wyczerpania;) Walec utworzony obrotem kwadratu CABD, ròwna ſię ſummie z Pòlkuli utworzoney obrotem czwartey części koła, i z Oſtrokręgu utworzonego obrotem Tróykąta BCD.

O2 Aże-

Aże Oſtrokrąg utworzony obrotem Tróykąta BC, ieſt $\frac{1}{3}$ Walca; więc Pòłkula utworzona obrotem czwartey części koła AMBC, ieſt $\frac{2}{3}$ Walca.

A zatym kula, którąby utworzyła ſię obrotem Półkola, byłaby też $\frac{2}{3}$ Walca opiſanego na tey kuli, a utworzonego obrotem Proſtokąta opiſanego na Półkolu tworzącym kulę.

152. *Wnioſek* 1. Stoſunek bryłowatości kuli do bryłowatości Walca opiſanego, ten ſam ieſt co, i ſtoſunek powierzchni kuli, do powierzchni całey Walca opiſanego; (149).

153. *Wnioſek* 2. Bryłowatość kuli, równa ſię bryłowatości Oſtrokręgu, któryby miał za podſtawę, koło równe powierzchni kuli, a za wyſokość, promień teyże kuli. Jakoż ten Oſtrokrąg maiąc podſtawę cztery razy większą od podſtawy Walca na kuli opiſanego, byłby cztery razy większy od Oſtrokręgu innego równey z nim wyſokości, a maiącego podſtawę równą z Walcem. Aże ten drugi Oſtrokrąg, gdyby miał połowę tylko wyſokości Walca, byłby połową Oſtrokręgu maiącego równą z Walcem wyſo-

wyſokość i podſtawę, a zatym byłby połową tego Oſtrokręgu, który ieſt $\frac{1}{3}$ Walca; więc Oſtrokrąg maiący równą z Walcem podſtawę, a wyſokość równą promieniowi kuli, ieſt $\frac{1}{6}$ tego Walca; a zatym Oſtrokrąg maiący za wyſokość promień kuli, a podſtawę cztery razy większą od podſtawy Walca, byłby $\frac{4}{6}$ albo $\frac{2}{3}$ Walca. Że zaś i kula ieſt $\frac{2}{3}$ tegoż Walca, więc kula równa ſię temu Oſtrokręgowi.

Można to ſamo ieſzcze i w ten ſpoſob okazać:

Niech będzie iakikolwiek *Wielościan* (Polyedrum) którego wſzyſtkie ściany dotykaią ſię kuli: uważaiąc każdą z tych ścian iak podſtawę Oſtrogranu maiącego ſwoy wierzchołek w środku Wielościanu; bryłowatość tego Wielościanu, równać ſię będzie bryłowatości iednego takiego Oſtrogranu, któryby miał za wyſokość promień kuli, a za podſtawę ſummę podſtaw, Oſtrogranów, na które podzielony był ten Wielościan; to ieſt powierzchnią całą tego Wielościanu.

To podanie zawſze ieſt prawdziwe, iakażkolwiek będzie liczba ścian tego

Wielo-

Wieleścianu więc (podług tego, co ſię mowiło o ſpoſobie wyczerpania,) możnaby łatwo dowieść, że też i do kuli wſzczegulności przyſtoſowane to podanie, ieſt prawdziwym, a zatym że kula, rowna ſię Oſtrokręgowi, ktoryby miał za wyſokość, iey promień, a za podſtawę, całą iey powierzchnią.

154. *Wnioſek* 3. Wycinek kuli utworzoney obrotem wycinka kołowego BCM, rowny ieſt Oſtrokręgowi maiącemu za wyſokość, promień tey kuli, a za podſtawę, koło, rowne powierzchni kuliſtey, utworzoney obrotem łuku BM; to ieſt koło, ktorego promieniem byłaby cięciwa BM; a zatym bryłowatość tego wycinka, tak ſię ma do bryłowatości kuli, iak powierzchnia tego wycinka, do powierzchni kuli; albo iak wyſokość BP, do średnicy kuli.

155. *Wnioſek* 4. Taż bryłowatość wycinka kuli, utworzonego obrotem wycinka koła BCM, ieſt $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem Proſtokąta BPQD. Jakoż powierzchnia tego wycinka, tak ſię ma do powierzchni kuli, iak BP, do średnicy kuli albo iak Walec utworzony obrotem Proſtokąta BPQD do Walca opiſanego

go na kuli. Aże kula ieſt $\frac{2}{3}$ Walca na niey opiſanego, więc i wycinek kuli, utworzony obrotem wycinka koła BCM, ieſt też $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem Proſtokąta BPQD.

156. *Wnioſek* 5. Podobnie, i część kuli utworzona obrotem wycinka ACM ieſt $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem Proſtokąta CAQP. Aże część kuli (którą to część nazwać można *klocem kuliſtym* (Truncus ſphæricus) utworzony obrotem części kołowey ACPM, ieſt ſummą z wycinka kuliſtego utworzonego obrotem wycinka kołowego ACM. i z Oſtrokręgu utworzonego obrotem Tròykąta CPM; więc bryłowatość tego kloca kuliſtego, równa ſię ſummie z $\frac{2}{3}$ Walca teyże z nim wyſokości, któryby miał za podſtawę, koło wielkie kuli, i z $\frac{1}{3}$ Walca iednakiey także wyſokości, a którego podſtawa byłaby ròwna drugiemu kołu kloc ten kończącemu; a zatym bryłowatość tego kloca tak ſię ma do bryłowatnści Walca utworzonego obrotem Proſtokąta CAQP, iak $\frac{2}{3}\ CA^2 + \frac{1}{3}\ MP^2$ do CA^2.

157. *Wnioſek* 6. Aby znaleść odcinek kuli utworzoney obrotem odcinka kołowego BMP; uważaymy ſobie ten odcinek

nek kuliſty, iak różnicę między Pólkulą utworzoną obrotem czwartey części kołowey ABC, a klocem kuliſtym utworzonym przez obrot odcinka ÇAMP; albo też iak różnicę wycinka kuliſtego utworżonego obrotem wycinka BOM; od Oſtrokręgu utworzonego obrotem Tròykąta CPM; albo nakoniec, iak różnicę Walca utworzonego obrotem Proſtokąta BPQD, od Oſtrokręgu ściętego, utworzonego obrotem Czworokąta BDŁP.

ROZDZIAŁ X.

O Bryłach podobnych.

158. DWie Bryły ſamemi tylko płaſzczyſtemi powierzchniami zakończone, i których wſzyſtkie kąty bryłowe odpowiadaiące ſobie mogą przyſtać do ſiebie, a ściany ich także odpowiadaiące ſą podobne; te mowię dwie Bryły nie różnią ſię chyba ſamą tylko wielkością, i iedna wzorem ieſt drugiey. Tak nap: dwa Sześciany, z których ieden ma bok długi na poł ſtopy, a drugi, na cal ieden, różnią ſię ſamą tylko wielkością. Takie Bryły nazywaią ſię podobnemi.

Przy-

Przykłady. Dwa Równoległościany proſtokątne ſą podobne, gdy ich podſtawy i ściany ſą podobne iedne względem drugich,

Dwa Graniaſtoſłupy proſte, ſą podobne, gdy podobne ſą ich podſtawy, i gdy wyſokość ich proporcyonalna iednemu z boków, tychże podſtaw.

Dwa Oſtrograny, maiące kąt bryłowaty ſpólny w wierzchołku podobne będą, gdy podſtawy ich ſą równoodległe.

159. *Uwaga*. Gdy dwie Figury proſtokreślne, ſą podobne; wziąwſzy punkt iakikolwiek w iedney z tych figur, i poprowadziwſzy od tego punktu liniie do wſzyſtkich wierzchołków tey figury; można będzie znaleść i w drugiey figurze punkt podobnie pierwſzemu położony; od którego ciągnąc liniie do każdego tey figury wierzchołka, podzielemy ią na Tróykąty podobne względem Tróykątów, na które podzielona była pierwſza figura. Podobnie też:

160. *Twierdz*: 1. Wziąwſzy w Bryle zakończoney powierzchniami płaſzczyſtemi, punkt iakikolwiek za wierzchołek tylu Oſtrogranów, ile ta Bryła ma ſcian, biorąc też ſciany za podſtawy; można znaleść i w drugiey Bryle podobney, punkt podobnie pierwſzemu położony, który wziąwſzy także za wierzchołek,

tyluż

tyluż co i w pierwſzey Bryle Oſtrogranów, wſzyſtkie te Oſtroſtrograny będą podobne względem Oſtrogranów pierwſzey Bryły.

Przykład. Weźmy środek Sześcianu za wierzchołek ſześciu Oſtrogranów, maiących za podſtawy, ściany tego Sześcianu; gdy w innym iakimkolwiek Sześkianie, weźmiemy także środek za wierzchołek ſześciu Oſtogranów maiących za podſtawy, ściany tego drugiego Sześcianu; te drugie Oſtrograny, będą podobne względem pierwſzych.

Tož mówić i o innych Bryłach foremnych.

Natym podaniu zaſadza ſię cała Nauka o Bryłach podobnych; należy więc nad wyłuſzczeniem iey nieco zabawić ſię.

Wybrawſzy iakikolwiek punkt w Bryle za wierzchołek Oſtrogranów maiących ściany tey Bryły, za podſtawy, i na te Oſtrograny, Bryłę podzieliwſzy, ſpuśćmy od tego punkru proſtopadłą do iedney z ścian tey Bryły; a na ścianie odpowiadaiącey w drugiey Bryle, weźmy punkt podobnie na tey ścianie położony, iaki ſpodek proſtopadłey ſpuſzczoney na ścianę pierwſzey

Bryły

Bryły; od tego punktu, na ścianie drugiey Bryły położonego, wyprowadźmy prostopadłą do tey ściany, tak wysoką aby stosunek iey do pierwszey prostopadłey równał się stosunkowi dwòch krawędzi, odpowiadaiących sobie w obydwóch Bryłach. Wierzch tey drugiey prostopadłey weźmy za wierzhołek wszystkich Ostrogranòw, na ktòre, tę drugą Bryłę dzielić mamy. Ostrograny tey drugiey bryły, będą podobne względem Ostrogranòw, na które podzielona pierwsza Bryła.

Dowodz: Odległości dwòch punktów służących za wierzchołki Ostrogranów, od wierzchołków odpowiadaiących sobie w ścianach, do których prostopadłe są ciągnione, te mowię odległości, są przeciwprostkątnemi Tróykątów prostokątnych podobnych, maiących za boki te prostopadłe, i odległości ich spodków od wierzchołków kątów ścian tychże. Więc wszystkie ściany tych dwóch Ostrogranów, odpowiadaiące sobie boki, maią proporcyonalne, to iest maią ie w stosunku dwòch krawędzi odpowadaiących sobie w dwóch Bryłach; azatym wszystkie te ściany, są podobne, i wszystkie ich kąty są ròwne iedne względem drugich, a przeto i kąty bryłowe które się z nich składaią, mogą przystać do siebie; są więc te dwa

dwa Oſtrograny podobne. Pochyłości też ścian Oſtrogranów do płaſzczyzn podſtaw ſą równe iedne względem drugich; aże także równe ſą pochyłości, tych podſtaw do płaſzczyzn ścian tych odpowiadaiących ſobie w Bryłach, które ściany ſpolną krawędź maią z podſtawami tych Oſtrogranów, więc i ściany odpowiadaiące ſobie w tych dwoch Oſtrogranach, będą podobnie nachylone do ścian tych odpowiadaiących ſobie w dwoch Bryłach, a które maią ſpolną krawędź z pierwſzemi dwiema ścianami; to ieſt z podſtawami dwóch tych Oſtrogranów.

Na ścianach dwóch, odpowiadaiących ſobie w tych dwóch pierwſzych Oſtrogranach, ſpuśćmy od ich wierzchołków proſtopadłe do podſtaw tychże dwóch ścian; a od ſpodków tych proſtopadłych poprowadźmy na ścianach odpowiadaiących ſobie w dwóch Bryłach, inne dwie proſtopadłe do tychże dwóch podſtaw, ścian Oſtrogranów. Oprócz tego, na płaſzczyznie przechodzącey przez dwie w obydwóch bryłach ciągnione proſtopadłe, ſpuśćmy do drugich dwóch proſtopadłych, na płaſzczyznach ścian odpowiadaiących ſobie, w Bryłach, od tychże co i pierwſze wierzchołków, trzecie dwie proſtopadłe; te oſtatnie proſtopadłe, będą proſtopadłemi do płaſzczyzn

dwoch

dwòch tych ścian odpowiadaiących sobie, na których ciągnione były dwie drugie prostopadłe; Tròykąty zawarte trzema temi prostopadłemi, tak w iedney, iak i w drugiey Bryle, będą ròwnokątne, a zatym i podobne. Ażepierwsze dwie prostopadłe ciągnione na płaszczyznach ścian, dwòch pierwszych Ostrogranòw, maią się do siebie, iak krawędzie odpowiadaiące sobie w dwòch Bryłach; więc też i odległości wierzchołkòw, tych dwòch Ostrogranòw od drugich dwóch ścian także sobie odpowiadaiących, w tych Bryłach, będą w tymże samym stosunku; i odległości spodków ich, od dwóch krawędzi należących do tych ścian, a odpowiadaiących sobie, w tymże też stosunku będą.

Spodki prostopadłych spuszczonych na dwie ściany odpowiadaiące sobie w pierwszych dwóch Ostrogranach, były podobnie położone na dwòch Brył krawędziach odpowiadaiących sobie, a zatym odległości tych spodkòw od końców odpowiadaiących sobie, tych krawędzi, są do siebie w tymże samym stosunku; a zatym odległości spodków liniy prostopadłych spuszczonych do płaszczyzn drugich dwóch ścian Bryl, od końcòw tychże dwóch krawędzi, będą w tym samym stosunku. Więc na tych dwòch ścianach, spodki prostopadłych podobnie

są

ſą położone. Ze zaś i wielkości tych proſtopadłych ſą proporcyonalne krawędziom tych dwóch Brył; więc wierzchołki pierwſzych dwóch Oſtrogranòw, ſą też podobnie położone względem dwòch ścian drugich, odpowiadaiących ſobie w Bryłach; a zatym i drugie dwa Oſtrograny maiące ſpolny wierzchołek, a te dwie ściany Brył za podſtawy, będą do ſiebie podobne.

Tož mówić i o innych Oſtrogranach odpowiadaiących ſobie, z których ſię te dwie Bryły ſkładaią. (i)

161. *Twierd:* 2. Powierzchnie Brył podobnych, zakończonych ſamemi tylko płaſzczyſtemi powierzchniami, maią ſię

(i) *To Twierdzenie, ieſt bardziey długie niż trudne, i łatwo poiąć ie można, maiąc Figurę przed oczema z drewna, lub z papieru zrobioną. Jużby też nawet po tak wielu Geometrycznych ćwiczeniach powinni wprawieni bydź Uczniowie, aby w myśli ſamey umieli ſobie wyſtawić Figurę pomagaiącą do zrozumienia Twierdzenia podanego. a zdatnieyſzą do obiaśnienia iego, niżby była Figura odryſowaua w perſpektywie, i przed oczy im ſtawiona.*

ſię do ſiebie, iak kwadraty boków ich odpowiadaiących ſobie, czyli, ſą w ſtoſunku dwumnożnym tychże boków.

Dowodz: Wſzyſtkie ściany dwòch Brył podobnych, po dwie brane ſą ſobie podobne; i tak brane, w iednakowym do ſiebie ſą ſtoſunku, to ieſt w ſtoſunku dwumnożnym, dwòch krawędzi odpowiadaiących ſobie; więc i ſumma wſzyſtkich ścian kończących iednę Bryłę, będzie do ſummy wſzyſtkich ścian kończących drugą Bryłę, w tymże ſamym ſtoſunku.

162. *Twierdz*: 3. Bryłowatości dwòch Brył podobnych, ſą do ſiebie w ſtoſunku ſześciennym dwòch ich krawędzi odpowiadaiących ſobie, czyli, ſą w ſtoſunku tròymnożnym tychże dwòch krawędzi.

1. Widzieliśmy iuż, że ſtoſunek iednego Sześcianu do drugiego, ten ſam ieſt, co i ſtoſunek boku pierwſzego Sześcianu, do czwartey linii ciągło proporcyonalney; która ſię znayduie, ſzukaiąc nayprzod trzeciey ciągło proporcyonalney, do boku Sześcianu pierwſzego, i do boku Sześcianu drugiego; a potym do tychże dwòch bokòw, i do trzeciey pro-

por-

porcyonalney znalezioney, szukaiąc czwartey.

Gdyby tedy bok drugiego Sześcianu był dwa razy nap: większy od boku Sześcianu pierwszego, ta czwarta ciągło proporcyonalna, byłaby ośm razy większa od boku Sześcianu pierwszego, a zatym i Sześcian drugi byłby ośm razy większy od Sześcianu pierwszego.

2. Niech będą dwa Równoległościany prostokątne podobne.

Gdy krawędź iedna, iednego z tych Równoległościanów, iest nap: dwa razy większa, od krawędzi iedney drugiego Równoległościanu; wszystkie też inne krawędzie pierwszego Równoległościanu, będą dwa razy większe od krawędzi drugiego. Powierzchnia więc podstawy pierwszego Równoległościanu, będzie cztery razy większa, niż powierzchnia podstawy drugiego. Aże też i wysokość pierwszego, dwa razy iest większa od wysokości drugiego; więc bryłowatość pierwszego iest ośm razy większa od bryłowatości drugiego. To rozumowanie przystosować można do wszystkich innych liczebnych przykładów podobnych przytoczonemu.

W ogul-

W ogulności zaś mowiąc: niech będą trzy krawędzie: A,B,C, iednego Równoległościanu prostokątnego; a zaś: a,b,c, krawędzie drugiego Równoległościanu, pierwszemu podobnego; będą te trzy stosunki równe; A : a = C : b = C : c. Liniiom A,i a, znaydźmy dwie liniieL,i M, ciągło proporcyonalne; tak aby było A: a = a : L = L : M,

Będzie pierwszy Rownoległościan do drugiego, iak A do M.

Jakoż uważaiąc liniie A i a, B, i b, iak boki podstaw, tych dwóch Równoległościanów, zamieńmy Prostokąt z linii a, i b, na inny,któryby miał za bok ieden, liniią B, a za bok drugi, tę liniią, która wypadnie z proporcyi B : b = a : x. Ze zaś stosunek linii B do b, wzięty iest za równy stosunkowi linii A do a, więc też będzie A : a = a : x; a zatym ta czwarta proporcyonalna, ktorey szukamy, będzie w samey rzeczy trzecią proporcyonalną do A, i a. Nazwiymy tę trzecią proporcyonalną ; L. Będzie podstawa drugiego Równoległościanu, równa Prostokątowi z B przez L; i ten drugi Równoległościan, będzie równy Rownoległościanowi, którby miał trzy linie B, c, L, za krawędzie ; a zatym stosunek iego do pierwszego Równoległościanu, będzie ten sam, co i stosunek Prostokąta z liniy c, i L, do Prostokąta z liniy A, i C.

Zamieńmy Prostokąt z liniy *c* i L, na inny, któryby miał za bok ieden liniią C, a za bok drugi liniią, która wypadnie z proporcyi C : *c* = L : x. Ze zaś stosunek linii C do *c*. wzięty iest za równy stosunkowi A do *a*, a stosunek A do *a*, zrobiliśmy równy stosunkowi *a*, do L, więc też będzie *a* : L = L : = x; a zatym ta czwarta proporcyonalna, którey szukamy będzie w samey rzeczy trzecią proporcyonalną do *a*, i L. Nazwiymy tę trzecią proporcyonalną : M; Prostokąty : C × , M i *c* × L. będą równe, Ażeby się dowiodło *iż* pierwszy Równoległościan iest do drugiego w stosunku Prostokąta A × C do Prostokąta c × L; więc też ten pierwszy Rownoległościan będzie do drugiego w stosunku Prostokąta A × C do Prostokąta C × M, to iest w stosunku A do M.

Ze zaś iest A : a = a : L = L : M; więc stosunek pierwszego Równoległościanu do drugiego, równa się stosunkowi linii pierwszey do czwartey, ciągło proporcyonalney; która to pierwsza liniia służą-

służąca za pierwszy wyraz proporcyi, powinna być krawędzie n iednego z tych Równoległościanów, drugim zaś teyże proporcyi wyrazem, ma być krawędź drugiego Równoległościanu, pierwszemu odpowiadaiący; tak iak iest nap: krawędź A, i *a*.

Ale że też i dwa Sześciany maiące krawędzie A, i *a*, w tymże samym byłyby stosunku, więc dwa Równoległościany podobne, maią się do siebie w stosunku sześciennym ich krawędzi.

163. *Twierdz: przybrane.* Wysokości Graniastosłupów podobnych, lub Ostrogranów podobnych, tak się maią do siebie, iak ich krawędzie odpowiadaiące sobie.

Dowodz: Dwóch ścian odpowiadaiących sobie w dwóch Graniastosłupach podobnych, pochyłości do podstaw są równe; tychże ścian wysokości, tak się maią do siebie, iak boki, służące im za podstawy. Wysokości tych Graniastosłupów, równe są prostopadłym spuszczonym na ich podstawy od punktów którychkolwiek na podstawach przeciwnych, nap: od punktów na bokach odpowiadaiących sobie w tychże podſtawach; a zatym te wyſokości Graniaſtoſłupów, będą ſłużyć za iedno ramię kąta proſtego, w dwóch Tróykątach podobnych, które za przeciwproſtokątne, maią wyſokości dwóch ścian odpowiadaiących ſobie. Będą zatym te wyſokości dwóch Graniaſtoſłupów, tak ſię mieć do ſiębie, iak wyſokości dwóch ich ścian odpowiadaiących ſobie; to ieſt: iak krawędzie dwóch tychże Graniaſtoſłupów, odpowiadaiące ſobie. To ſamo rozumowanie przyſtoſować można i do Oſtrogranów,

3. Niech będą dwa iakiekolwiek Graniaſtoſłupy podobne, i te także ſą do ſiebie w ſtoſunku ſześciennym, ich krawędzi odpowiadaiących ſobie.

Rozumowanie Arytmetyczne, ktòreby mogło ſłużyć za wſtęp do ogulnego dowodzenia, to ſamo ieſt, co i poprzedzaiące.

Wyſtawuiąc ſobie podſtawy tych dwóch Graniaſtoſłupów, zamienione na dwa kwadraty równe im co do powierzchni; ponieważ powierzchnie tych dwóch podſtaw, maią ſię do ſiebie, iak kwadraty boków ich, odpowiadaiących ſobie; więc

też

też i powierzchnie kwadratów równych tym podstawom; mieć się do siebie będą, iak kwadraty boków odpowiadaiących sobie, w tychże podstawach; a zatym i stosunek boków, tych dwóch kwadratów, równy będzie stosunkowi boków odpowiadaiących sobie w podstawach, dwóch Graniastosłupów. Aże ten ostatni stosunek, równa się stosunkowi wysokości dwóch Graniastosłupów; więc Rownoległościany maiące za podstawy kwadraty, równe podstawom Graniastosłupów, i wysokości równe wysokościom Graniastosłupów, byłyby do siebie podobne; a zatym te dwa Równoległościany, takby się do siebie miały, iak Sześciany ich krawędzi, albo iak Sześciany krawędzi odpowiadaiących sobie w Graniastosłupach. Ze zaś te Równoległościany, byłyby równe względem Graniastosłupów, więc też i dwa Graniastosłupy podobne, maią się do siebie, iak Sześciany krawędzi ich, odpowiadaiących sobie.

4. Niech będą dwa iakiekolwiek Ostrograny podobne, stosunek ich równa się stosunkowi Sześcianów krawędzi ich, odpowiadaiących sobie.

Dwa

Dwa Graniastosłupy nap: proste, których podstawy i wysokości byłyby równe względem podstawy i wysokości, tych Ostrogranów; te mówię Graniastosłupy miałyby wysokości proporcyonalne bokom podstaw swoich; byłyby więc podobne; a zatym tak by się do siebie miały, iak Sześciany ich krawędzi. Aże byłyby trzy razy większe względem tych dwóch Ostrogranów, więc i te Ostrograny są do siebie w stosunku Sześciennym ich krawędzi.

5. Wszystkie Bryły podobne, zakończone powierzchniami płaskiemi, maią się do siebie iak Sześciany, ich krawędzi.

Dwie Bryły podobne, można rozłożyć na takie Ostrograny, z których każdy w szczegulności należący do iedney Bryły, podobny będzie drugiemu należącemu do drugiey Bryły. Te Ostrograny iedne względem drugich poiedynczo brane, mieć się do siebie będą w stosunku sześciennym ich krawędzi, odpowiadaiących sobie; więc i summa wszystkich Ostrogranów, z których się składa iedna Bryła, będzie do summy wszystkich Ostrogranów, z których się składa druga ga Bryła, w tymże samym stosunku, to iest w stosunku sześciennym, ich krawędzi, odpowiadaiących sobie.

164. *Defin:* Walce proste podobne do siebie są te, których stosunek wysokości, równa się stosunkowi promieni, ich podstaw; przecięcia zatym tych Walców przez osi przechodzące, są podobne, a ztąd podobne są i Prostokąty tworzące obrotem swoim te Walce.

Co zaś do Walców pochyłych, a do siebie podobnych; oprocz tego, że wysokości ich mieć się powinny do siebie, iak promienie ich podstaw, przecięcia też ich od płaszczyzny przechodzącey przez ich osi prostopadłe do podstawy, powinny być do siebie podobne, to iest ich osi powinny się mieć do siebie, iak promienie ich podstaw:

165. *Twierdz.* 4. Powierzchnie Walców prostych podobnych, maią się do siebie, iak kwadraty ich *Wymiarów* (Dimensio) odpowiadaiących sobie; to iest: iak kwadraty promieni, ich podstaw, albo iak kwadraty ich wysokości.

Powierzchnia każdego z tych Walców równa się Prostokątowi z okręgu podsta-

wy

wy iego, i z fummy wyfokościiego, i promienia podftawy; więc powierzchnie te, tak fię mieć do fiebie będą, iak Proftokąty z promieni ich podftaw, i z fummy tychże promienii wyfokości Walców. Aże Fromienie podftaw, fą do fiebie (dla podobieńftwa Walców) iak ich wyfokości, więc i fumma z tych promieni ieft do fummy z tych wyfokości, w tym ftofunku, w którym fą te promienie. Proftokąty więc, w których ftofunku maią fię do fiebie powierzchnie te Walców, fą podobne, a przeto tak fię będą do fiebie miały, iak kwadraty ich boków, odpowiadaiących fobie, nap: iak kwadraty promieni ich podftaw. Będą więc do fiebie i powierzchnie Walców w tymże famym ftofunku; to ieft, iak kwadraty promieni, ich podftaw.

Toż mówić i o powierzchniach krzywych w Walcach; to ieft, o takich, w których fię nie zamykaią podftąwy.

166. *Twierdz:* 5. Bryłowatości Walców podobnych, tak fię maią do fiebie, iak Sześciany ich wymiarów odpowiadaiących fobie; to ieft, fą do fiebie w ftofunku tróymnożnym tychże wymiarów, nap: w ftofunku troymnożnym promieni, ich podftaw.

Dowodz:

Dowodz: Opiſzmy na podſtawach, tych Walców, iakiekolwiek Wielokąty foremne, podobne; niech te Wielokąty będą podſtawami Graniaſtosłupów, teyże z Walcami wyſokości. Te Graniaſtosłupy będą podobne, a zatym będą ſię miały do ſiebie w ſtoſunku tròymnożnym, nap: promieni ich podſtaw.

Walce tak ſię do ſiebie maią, iak Graniaſtoſłupy na nich opiſane. Jakoż każdy Walec ieſt do Graniaſtosłupa na nim opiſanego, w ſtoſunku podſtawy tego Walca do podſtawy Graniaſtoſłupa. Aże podobne ſą dwa Wielokąty na podſtawach Walców opiſane, więc tenże ſam ſtoſunek będzie każdego Walca do Graniaſtosłupa na nim opiſanego; a zatym tak ſię mieć będzie ieden Walec, do Graniaſtoſłupa na nim opiſanego, iak i Walec drugi do Graniaſtosłupa na nim także opiſanego, tak więc pierwſzy Walec będzie ſię miał do drugiego, iak i pierwſzy Graniaſtosłup do drugiego.

Aże ſtoſunek tych Graniaſtosłupów równa ſię ſtoſunkowi tróymnożnemu promieni podſtaw Walców, na których ſą te Graniaſtosłupy opiſane; więc i ſtoſunek

ſunek tych Walców równać ſię także będzie ſtoſunkowi tróymnożnemu promieni tychże podſtaw.

167. Można obiaśnić przykładami liczebnemi to Twierdzenie; ma zaś być nayprzod przyſtoſowane do ſamych Walców proſtych, zkąd łatwo wnieść będzie można, że i w ukośnych Walcach, ten ſam ſtoſunek ma mieyſce; ponieważ Walce ukośne, równey podſtawy i wyſokości z Walcami proſtemi, byłyby im równe, a zatym byłyby też do ſiebie w ſtoſunku tróymnożnym promieni podſtaw ſwoich.

168. *Defin.* Oſtrokręgi proſte nazywaią ſię *podobnemi*, gdy tak ſię maią do ſiebie ich wyſokości, iak i promienie ich podſtaw. Przecięcia przechodzące przez oś tych Oſtrokręgów ſą podobne, a zatym podobne ſą Tróykąty, tworzące obrotem ſwoim te Oſtrokręgi.

Co zaś do Oſtrokręgów ukośnych: tych nie tylko wyſokości tak ſię mieć do ſiebie powinny, iak promienie ich podſtaw, ale nadto i oſi ich w tymże ſamym do ſiebie ſą ſtoſunku.

169. *Twierdz:* 6. Powierzchnie całe Ostrokręgów prostych, są do siebie w stosunku dwumnożnym promieni podstaw, albo w stosunku dwumnożnym boków tychże Ostrokręgów.

Dowodzenie tego, może być podobne do dowodzenia Twierdzenia 4. względem stosunku powierzchni Walców podobnych.

Może też być i w sposob następujący, który także służyćby mogł równie i do Walców:

W iednym którymkolwiek Ostrokręgu, powierzchnia krzywa, tak się ma do powierzchni podstawy, iak bok Ostrokręgu, do premienia tey podstawy. Aże i w drugim Ostrokręgu podobnym, pierwszemu tenże sam stosunek ma mieysce; więc powierzchnia krzywa iednego Ostrokręgu, tak się ma do powierzchni podstawy iego, iak powierzchnia krzywa drugiego Ostrokręgu podobnego, do powierzchni iego podstawy: więc i summa z powierzchni krzywey i z powierzchni podstawy iednego Ostrokręgu, to iest cała iego powierzchnia tak się ma do powierzchni podstawy iego, iak cała powierzchnia drugiego Ostrokręgu, do powierzchni

iego

iego podſtawy; a zatym cała powierzchnia pierwſzego Oſtrokręgu, tak ſię ma do całey powierzchni drugiego, iak powierzchnia podſtawy pierwſzego Oſtrokręgu, do powierzchni drugiego; albo iak kwadrat promienia pierwſzey podſtawy, do kwadratu promienia drugiey.

Podobnie dowieść można, że i powierzchnie krzywe Oſtrokręgów podobnych, ſą w ſtoſunku dwumnożnym promieni podſtaw, tych Oſtrogręgów lub ich boków odpowiadaiących ſobie.

170. *Twierdz*, 7. Bryłowatości Oſtrokręgów podobnych, maią ſię do ſiebie, iak Sześciany ich wymiarów odpowiadaiących ſobie; to ieſt: iak Sześciany promieni ich podſtaw, albo iak Sześciany ich boków, i t. d.

Twierdzenie to podobnie ſię dowodzi, iak i poprzedzaiące, względem bryłowatości Walców; kładąc zamiaſt Graniaſtoſłupów na Walcach opiſanych, Oſtrograny opiſane na Oſtrokręgach.

171. *Uwaga*. Wſzyſtko to, cokolwiek ſię powiedziało o ſtoſunku bryłowatości

Równo-

Równoległościanów, Graniastosłupow, Ostrogranów, i Ostrokręgów podobnych, na to wypada, że:

W ogulności mówiąc, te Bryły są w stosunku złożonym z stosunku ich podstaw, i z stosunku ich wysokości.

Ze zaś, gdy te Bryły są podobne, stosunek ich podstaw, iest dwumnożnym stosunku ich wysokości, więc stosunek złożony z stosunku ich podstaw, i z stosunku ich wysokości, składa się z stosunku dwumnożnego, i z stosunku poiedyńczego ich wysokości; będzie tedy taki stosunek tróymnożnym stosunku ich wysokości. Aże stosunek ich wysokości równa się stosunkowi ich boków którychkolwiek odpowiadaiących sobie, więc stosunek tych Bryl, gdy do siebie są podobne, iest też stosunkiem tróymnożnym boków ich którychkolwiek odpowiadaiących sobie.

172. *Twierdz.* 8. Powierzchnie kul, są do siebie w stosunku dwumnożnym ich promieni, to iest: iak kwadraty ich promieni. Bryłowatości zaś kul, są do siebie w stosunku tróymnożnym ich promieni, to iest, iak Sześciany tychże promieni.

Dowodz.

Dowodz. Powierzchnie kul, ſą cztery razy większe, niżeli powierzchnie ich kół wielkich; a zatym, tak ſię do ſiebie maią, iak powiezchnie tychże kół, to *ieſt*: iak kwadraty ich promieni.

Bryłowatości kul, ſą $\frac{2}{3}$ względem Walców na nich opiſanych; więc tak ſię maią do ſiebie, iak bryłowatości tych Walców, to ieſt iak Sześciany ich promieni.

173, *Uwaga.* Widzieliśmy w ſzczegulności, iż powierzchnia kuli, ieſt do powierzchni kwadratu iey średnicy, w ſtoſunku okręgu koła do iego średnicy, i ten ſtoſunek ieſt zawſze iednakowy. Widzieliśmy też, że bryłowatość kuli, ieſt do bryłowatości Sześcianu iey średnicy, iak okrąg koła do średnicy iego, 6 razy wziętey; który także ſtoſunek nigdy ſię nieodmienia.

Kule więc zachowuią własności Brył podobnych, tak w ſtoſunku ich powierzchni, iako i w ſtoſunku ich bryłowatości. Jakoż, ſą one w ſamey rzeczy Bryłami podobnemi; środek iedney kuli podobnie ieſt położony, iak i środek inney iakieykolwiek kuli; tak iedna iak i druga, tworzy ſię obrotem półkola, a te półkola ſą do ſiebie podobne.

Można-

Możnaby więc (z niewielką odmianą) to im przystosować, co się powiedziało o Bryłach podobnych, zakończonych powierzchniami płaskiemi, względem punktów podobnie położonych w tychże Bryłach.

174. *Defin:* Wycinki podobne kul, są te, których kąty w środku, są podobne, albo które obrotem podobnych wycinków kół tworzą się.

Odcinki kul, podobne, są te, których promienie podstaw, tak się do siebie maią, iak ich wysokości, albo iak promienie kul, do których należą; albo na koniec są te, które się tworzą podobnych poł odcinków koł obrotem.

175. *Twierdz:* 9. Powierzchnie kuliste, i powierzchnie całe, tak wycinków, iak i odcinków podobnych w kulach, są do siebie w stosunku dwumnożnym promieni kul, do których należą.

Dowodz: Niech będą: ACB. acb, dwa wycinki, kół podobne, które obrotem swoim, około promieni: AC, ac, tworzą podobne kul wycinki. *Tab. VI Fig. 4.*

Nayprzod

Nayprzod Powierzchnie kuliſte utworzone przez łuki: AB: ab, równać ſię będą powierzchniom kół maiących za promienie, liniie: AB, ab; więc tak ſię mieć będą do ſiebie, iak kwadraty tych liniy: AB, ab, albo iak kwadraty promieni: AC, ac.

Powtore. Powierzchnie Oſtrokręgowe utworzone obrotem promieni: CB, bc, maią ſię też do ſiebie, iak kwadraty promieni: CB, cb, albo CA, ca; Więc i powierzchnie całe wycinków podobnych tak ſię do ſiebie maią, iak kwadraty promieni CA, ca.

Koła wykreślone promieniami BD, bd, i ſłużące za podſtawy odcinkom kul, utworzonym przez obrot połodcinków kół; ABD, abd, ſą także do ſiebie, iak kwadraty liniy BD, bd, a zatym iak kwadraty promieni: CB, cb, albo CA, ca.

176. *Twierdz:* 10. Bryłowatości tak wycinków, iak i odcinków podobnych, w kulach, ſą do ſiebie w ſtoſunku tróymnożnym promieni kul, do których należą.

Dowodz. Nayprzod: Wycinek kuli, utworzony przez wycinek ACB, koła

tak

tak się ma do swoiey kuli, iak kwadrat linii AB, do kwadratu średnicy AE, albo iak kwadrat linii ab, do kwadratu średnicy ae; to iest: iak wycinek kuli, utworzony przez wycinek: acb, koła, do kuli swoiey. Więc tenże sam iest stosunek iednego z tych wycinka do swoiey kuli, co i drugiego wycinka do swoiey także kuli; azatym te wycinki, tak się do siebie maią, iak i kule do których należą. Aże stósunek tych kul, iest stosunkiem tròymnożnym ich promieni, więc i stosunek tych wycinków iest także stosunkiem tròymnożnym tychże promieni.

Powtore. Ostrokręgi podobne utworzone obrotem Tròykątòw, CBD, cbd, są do siebie w stosunku tróymnożnym promieni CB, cb; więc tak też maią się do siebie, iak i wycinki kul utworzone obrotem wycinkòw ACB, acb, do kòł należących; a zatym i ròżnice każdego wycinka kuli, od każdego Ostrokręgu, to iest odcinki kul, utworzone przez połodcinki kòł, ABD, abd, są do siebie w stosunku równym stosunkowi wycinków kul, to iest w stosunku tròymnożnym promieni: CB, cb.

177. *Twierdz:* 11. Gdy cztery iakie linie czynią proporcyą, i gdy dwa pierwſze wyrazy tey proporcyi, ſą liniiami odpowiadaiącemi ſobie, czyli podobnie położonemi, w dwóch Bryłach podobnych; a dwa oſtatnie wyrazy teyże proporcyi, ſą liniiami odpowiadaiącemi ſobie, w dwóch innych Bryłach podobnych; ſtoſunek dwóch pierwſzych Brył, będzie równy ſtoſunkowi dwóch brył drugich.

Dowodz. Gdyby te cztery liniie były bokami czterech Sześcianów, te cztery Sześciany czyniłyby proporcyą; aże ſtoſunek dwóch pierwſzych Brył, równa ſię ſtoſunkowi dwóch pierwſzych Sześcianów, a ſtoſunek dwóh drugich Brył, równa ſię ſtoſunkowi dwóch drugich Sześcianów; więc i ſtoſunek dwóch pierwſzych Brył, równa ſię ſtoſunkowi dwóch Brył drugich.

178. *Uwaga.* Bryłowatości Brył podobnych, prędzey roſną, niż ich powierzchnie.

Przykład. Niech będą liniie odpowiadaiące ſobie w dwóch Bryłach podobnych, dwa razy większe iedne względem

dem drugich; powierzchnia iedney ztych Bryły, będzie cztery razy większa od powierzchni drugiey Bryły; a zaś Bryłowatość iedney Bryły, będzie ośm razy większa od bryłowatości, drugiey Bryły.

W ogulności zaś mówiąc, niech będą AB, AC, liniiami odpowiadaiącemi sobie, w dwóch Bryłach podobnych. Zróbmy Tròykąt prostokątny maiący liniią AB, za iedno ramie kąta prostego, a liniią AC, za przeciwprostkątną. *Tab. VI. Fig. 5.*

Pociągniymy CD prostopadłą do AC, i natrafiaiącą na liniią AB przedłużoną, w punkcie D. Od tego punktu D, wyprowadźmy DE prostopadłą do AD, i natrafiaiącą na liniią AC przedłużoną, w punkcie E.

Powierzchnie dwóch Bryl, ktòreby miały AB, i AC za liniie odpowiadaiące sobie, maią się tak do siebie, iak liniie AB, i AD; a bryłowatości ich, są w tym samym stosunku, w ktòrym liniie AB, i AE.

Aże liniia AE, większa iest względem linii AB, niżeli liniia AD; więc też i bryłowatość drugiey Bryły większa iest względem bryłowatości pierwszey Bryły, niżeli powierzchnia tey drugiey Bryły, względem powierzchni pierwszey Bryły; to iest: bryłowatość drugiey Bryły prędzey się powiększa, niżeli iey powierzchnia.

179. *Uwaga.* Na poprzedzaiących Twierdzeniach zasadza się podział *Linii Brył* (Linea Solidorum) który znayduiemy na cerklu proporcyonalnym.

Ta liniia zawiera w sobie zwyczaynie 64, podziałów, które się rachować zaczynaią od *środka* narzędzia (à centro).

Odległości tego środka od punktów naznaczonych liczbami: 1. 8, 27, 64, tak się maią do siebie, iak
liczby - - 1, 2, 3, 4;
co znaczy, że Bryły podobne, których boki są w stosunku liczb: 1, 2, 3, 4, maią bryłowatości w stosunku liczb: 1, 8, 27, 64.

Jnne podziały wyznaczone są przez wyciągnienie przybliżone pierwiastków sześciennych. J tak, ponieważ boki

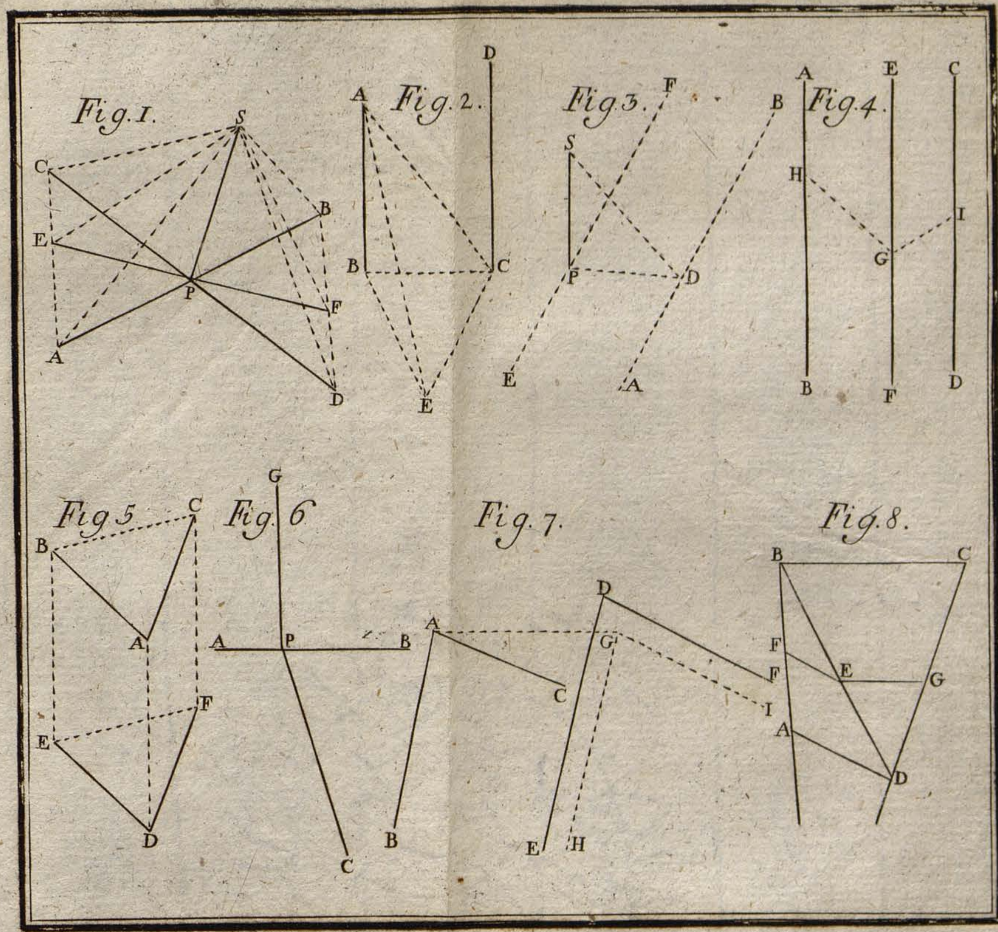
dwòch

dwòch Sześcianòw, z ktòrych ieden dwa razy ieſt większy od drugiego, tak ſię bliſko maią do ſiebie, iak liczby 126 i 100; więc też i odległości środka, od punktów naznaczonych na tey linii liczbami: 1, 2, tak ſię maią do ſiebie, iak liczby: 100, i 126. Używanie dwòch takich liniy, znayduiących ſię na dwoch ramionach cerkla proporcyonalnego, podobne ieſt używaniu innych liniy tamże ſię znayduiących, które w oſobnym na to Rozdziale iuż ſię wyłożyło. w Części I.

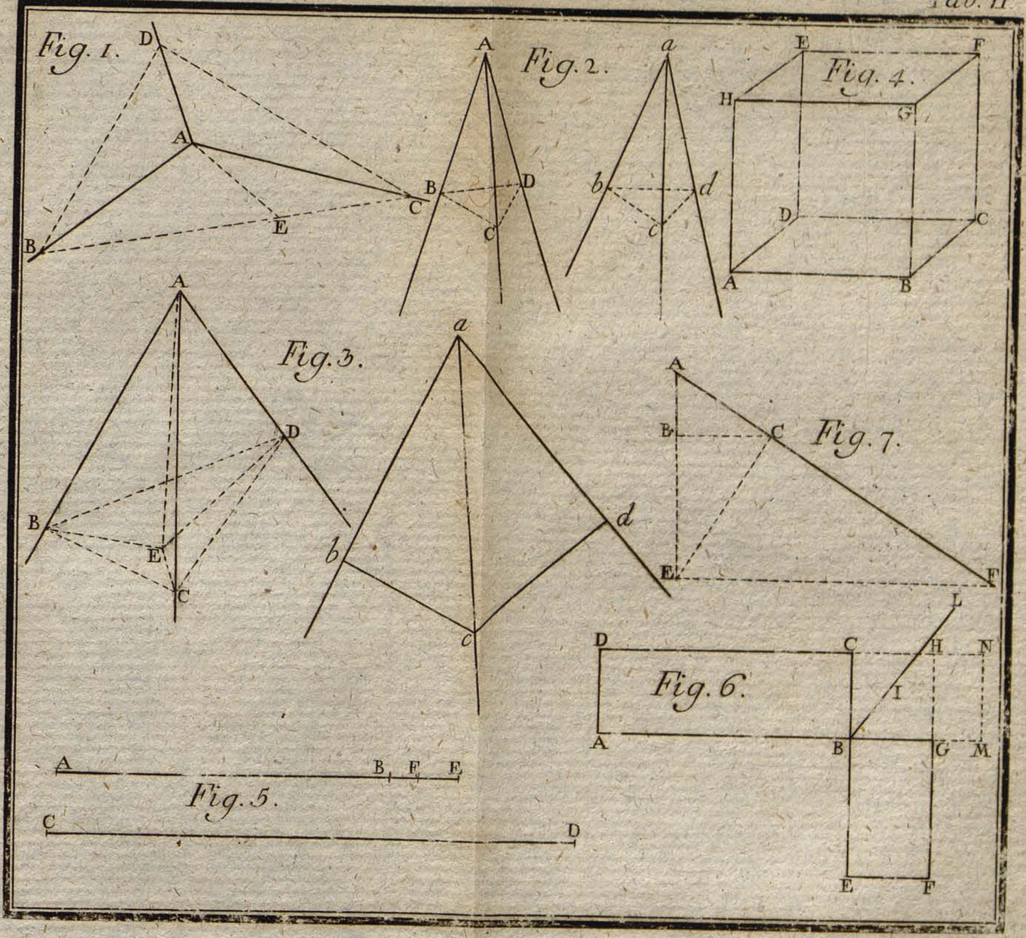
K O N I E C.

8

Tab. I.



Tab. II



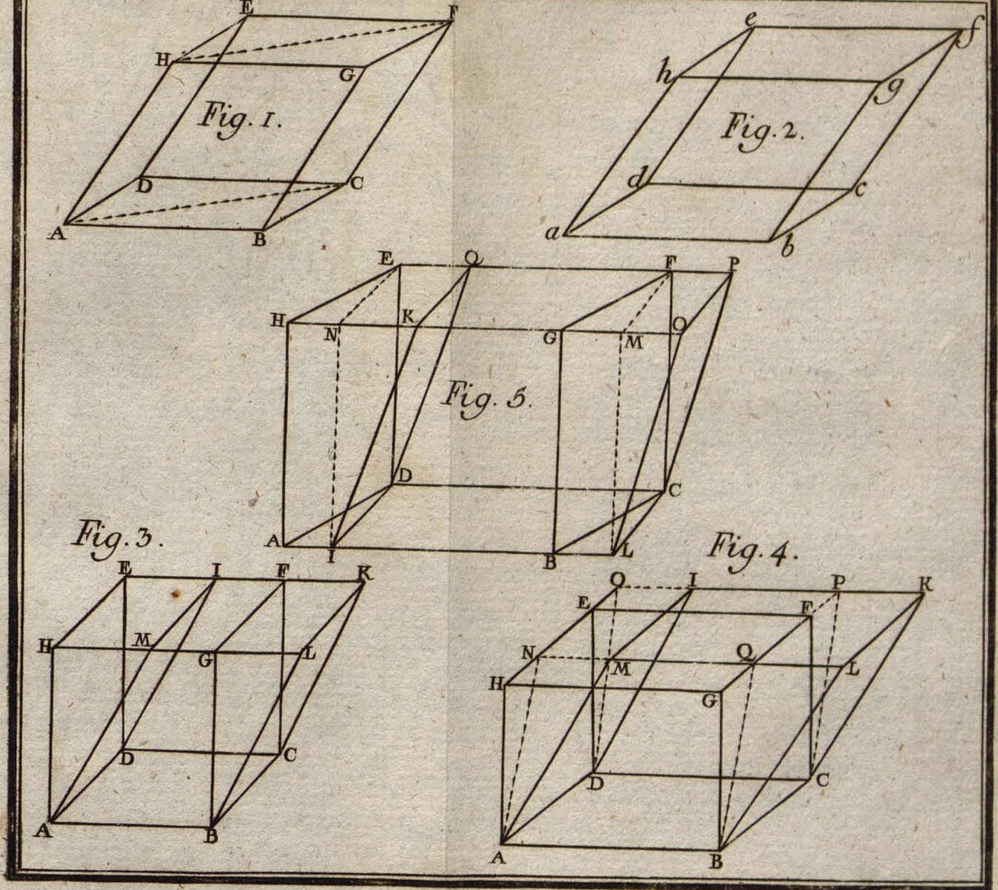
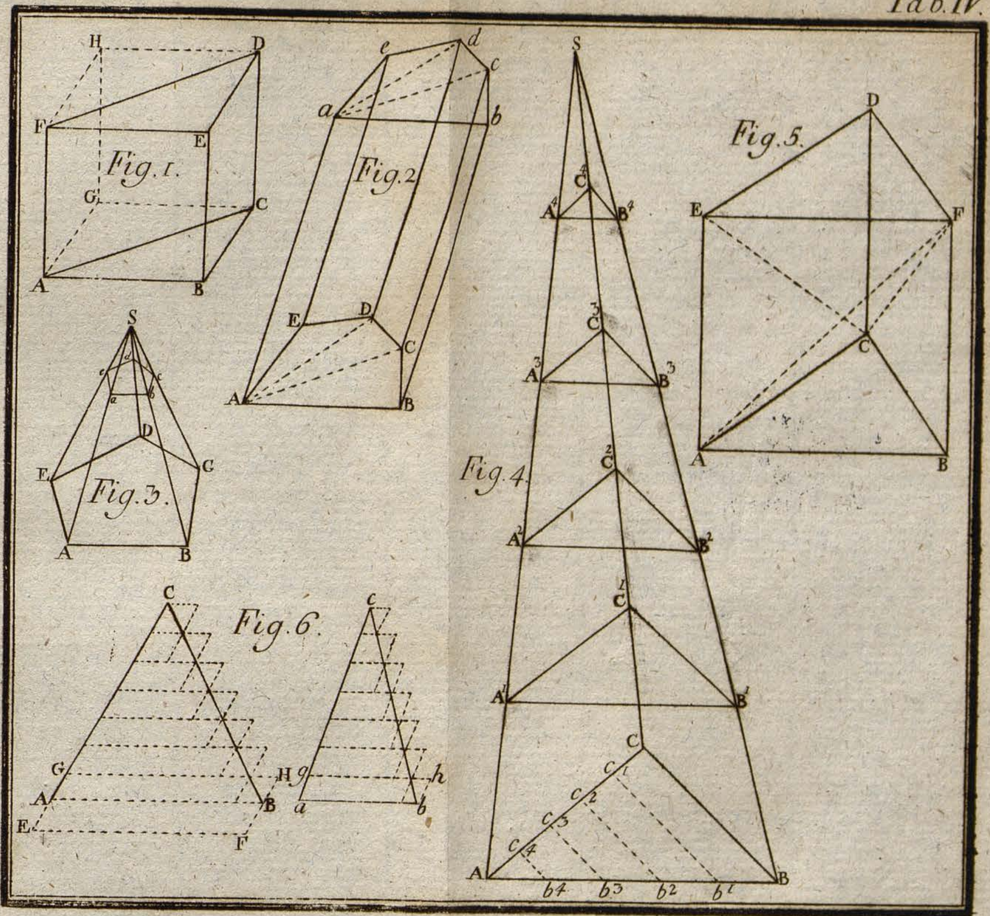
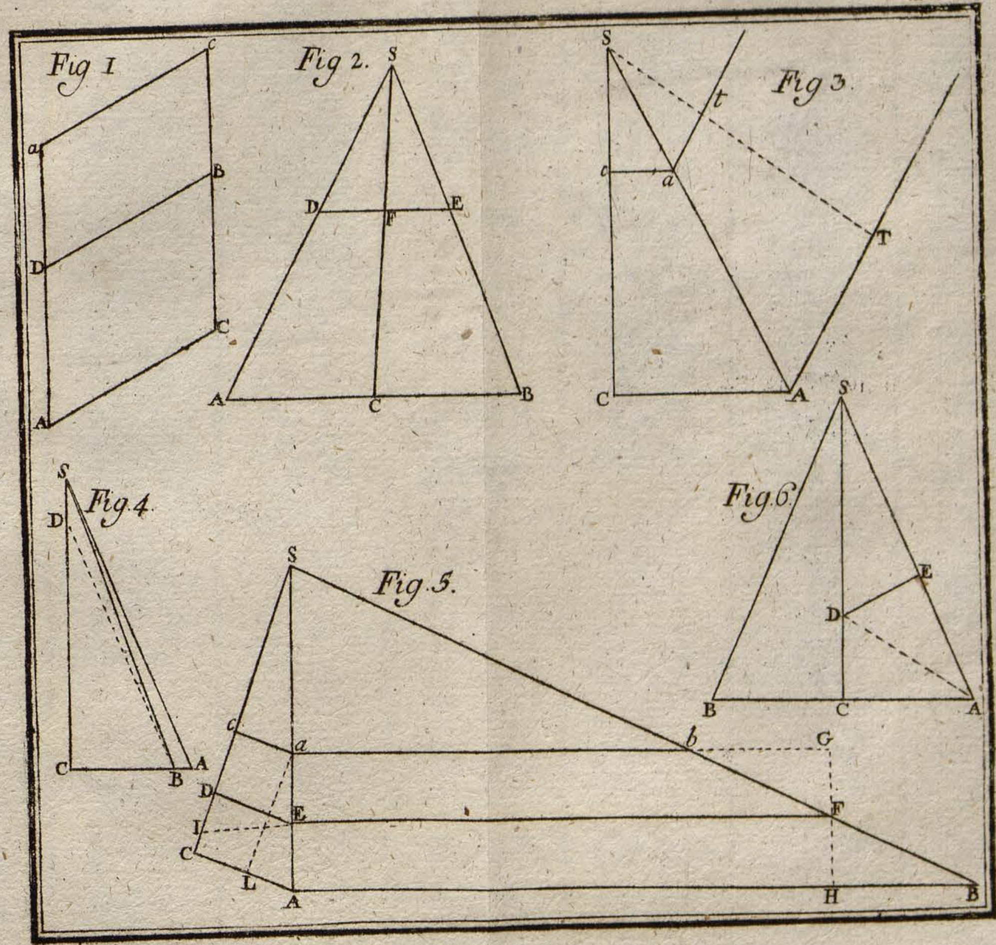


Fig. 1.
E
F
H
G
D
C
A
B
Fig. 2.
e
f
h
g
d
c
a
b
Fig. 5.
E
Q
F
P
H
N
K
G
M
O
D
C
A
I
B
L
Fig. 3.
E
I
F
K
H
M
G
L
D
C
A
B
Fig. 4.
O
I
P
K
E
F
N
M
Q
L
H
G
D
C
A
B

Tab. IV.



Tab. V.



Tab.VI

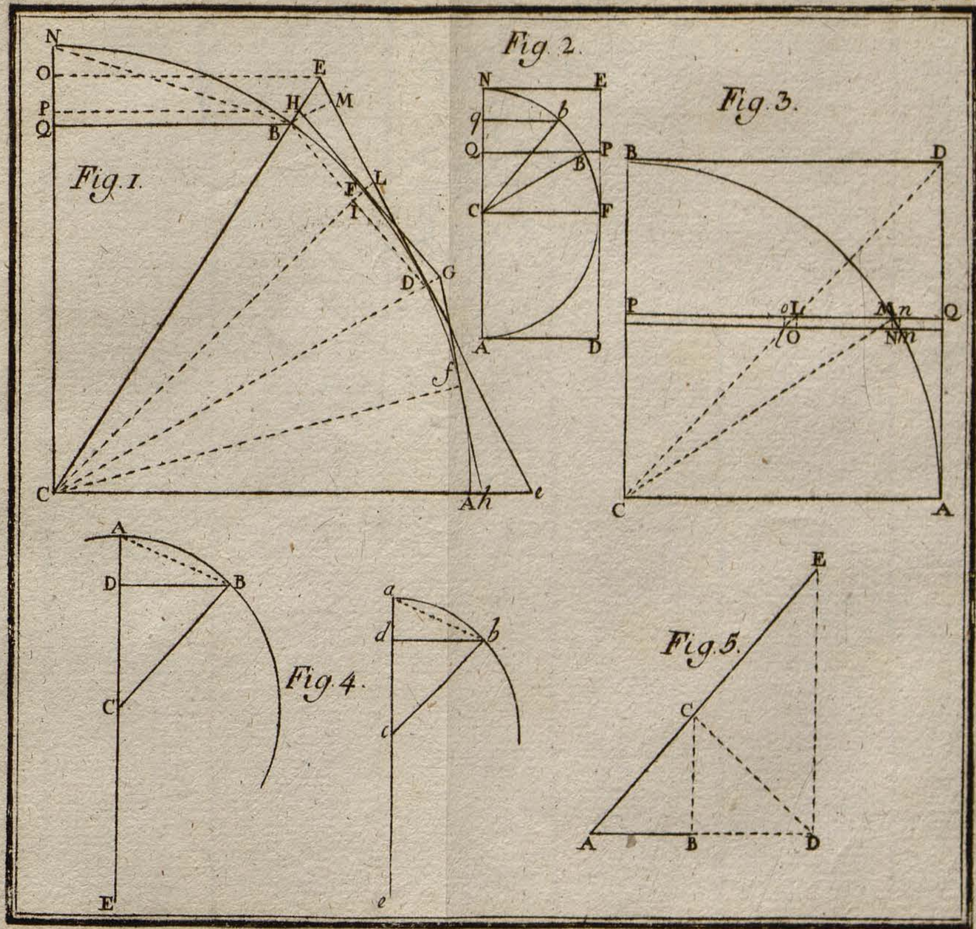


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
N
O
P
Q
C
E
M
H
B
L
F
I
G
D
f
A
h
e
q
b
B
C
F
A
D
A
D
B
C
E
a
d
b
c
e
C
A
B
D
E
B
D
P
o
L
O
M
n
N
m
Q
C
A

wary y ich gatunki wpiſać powinien. Powinien Piſarz należytą n
Szlakow attendencyą, y Strażnikow na nich będących, ażeby te w u
wicznym dozorze zoſtawały. Na Komorach ſrzednich powinien K
ty *ad Regnum* brane Wizować, y na nich Wizę *de die & An.* ſkonfr
towawſzy Towar na Wozie według nich podpiſywać. Na Kom
rach zaś Pogranicznych, przez ktore Towary iuż expedyowane *ex*
Regnum wychodzą, powinien Pan Piſarz porachowawſzy Paki, Balo
ſkrzynie &c. y one z Kwitem ſkonfrontowawſzy Kwit na Komor
zoſtawić, y zoſtawienie onego z wytknieniem Kupca y Towaru
Raptularzu zakonnotować, a ieżeliby ſię cokolwiek Towaru nad Kw
pokazało, powinien rozſądnie examinować, z iakiey to przyczy
czyli ten Towar po Expedycyi na tey Komorze
ny, w drodze do...