Teorya potencyału

lato 1900

Nauka o potencyale

Jedna z najważniejszych części fizyki matematycznej, właściwie więcej należąca do matematyki niż do fizyki, bo nie zbudowana na podstawach ~~ale~~ empirycznie poznanych danych praw fizycznych, tylko na ogólnych własnościach przestrzeni ~~i obsz~~ (zatem oddział rodzaj geometryi). Tylko ze względów dydaktycznych i po części konwencyonalnych ~~[illegible]~~ traktuje się ten przedmiot w fizyce, mianowicie w związku z elektrycznością ponieważ obejmuje to prawie całą elektrostatykę i magnetyzm. ~~[illegible]~~ Przekonamy się na przyszły rok jak daleko ~~[illegible]~~ gruntowne poznanie teoryi potencyału ułatwia całą naukę o elektryczności. Będziemy mogli skończyć właściwie elektr. w stosunkowo krótkim czasie i ~~[illegible]~~ potem specyalnie zajmować się drganiami elektrycznemi, teoryą elektromagnetyczną światła i optyką.

Nazwa potencyał nam już znana jest z mechaniki = funkcya potencyalna funkcya której ~~[illegible]~~ pochodna = siła. Tylko siły konserwatywne mają potencyał, rozpraszające (tarcie, opór ośrodka etc.) nie mają. Jeżeli się mówi o teoryi potencyału, to się rozumie jednak specyalnie siły typu Newtonowskiego $\frac{1}{r^2}$ więc potencyał Newtonowski $\frac{1}{r}$ [oprócz tego jeszcze czasem t. zw. potencyał logarytmiczny].

Używane przez Laplace'a, ~~[illegible]~~ Gauss, nazwa wprowadzona przez Greena.

Gauss

Clausius, Dirichlet przez [illegible] – Korn

Exner, Riemann, Mascart-Joubert, Maxwell, Lang, Winkelmann,

2

Zastosowania:

w grawitacyi $f = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$

w elektryczności (elektrostatyce) hipoteza Coulomba $f = \frac{m_1 m_2}{r_2}$

Tutaj jednak ta różnica że czasem przyciąganie, czasem odpychanie, stosownie do znaku m

Na tę hipotezę udało się wybudować całą elektrostatykę

Podobną hipotezę próbowano potem użyć do wytłumaczenia zjawisk magnetycznych ale tutaj zaszła jeszcze ta komplikacya, że musiano założyć, że każda cząstka z jednego końca + z drugiego równie wiele −. ~~Ale~~ Wszystko to jednak dało się objąć teoryą sił Newtonowskich t.j. teoryą potencyału. Ale jeszcze nie dosyć tem.

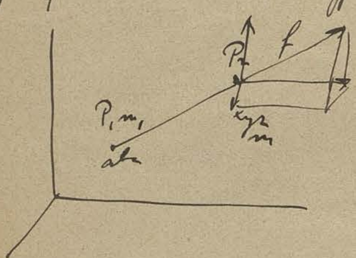
Helmholtz zauważył podział hydrodynamiki na t. ruchów niewirowych (potencyalnych) i wirowych. Zauważył że w pierwszym wypadku potencyał prędkości zadość czyni równaniu $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + - = 0$ na które napotkamy więc w teoryi pot. [widzi się i tutaj [illegible]] i użył tego do przeprowadzenia ścisłej analogii między tą hydr. a ~~elektryczn.~~

Dziwnym się to wydawało, czy może jakiś ~~[illegible]~~ istotny związek? Ale podobnie później w akustyce, przewodnictwie ciepła etc. Nasze przedstawianie nowoczesne teoryi wektorów i quaternionów dopiero wyraźnie pokazały że te analogie, wskutek których w różnych częściach fizyki te same prawa Newtonowskie $\frac{1}{r^2}$ i tę samą teoryę poten. zastosować można, polegają na ogólnych własnościach funkcyi przestrzennych.

~~więc~~ Pokazuje się że każdą taką funkcyę t.j. jakąś bądź wielkość (kierunkowe) ~~[illegible]~~ rozdzieloną w przestrzeni n.p. siła, albo prąd etc. może się rozłożyć w 2 części (tak samo jak hidrodyn. wirowa i nawirowa) z których jedna zależy od zwykłego Newtonowskiego potencyału a druga od t. zw. potencyału wektorowego. Więc nie jest to przypadek, że mamy tak często w fizyce do czynienia z wykładnikiem −2, bez ~~wzgl...~~ polega to na własności przestrzeni

Zatem wszystkie nasze rezultaty można zastosować do pewnej ogólnej rodziny funkcyj przestrzennych

trójwymiarowej. Dla lepszej zrozumiałości jednak będziemy się zwykle trzymali interpretacyi dynamicznej mianowicie elektrostatycznej, ponieważ inaczej przedmiot byłby zanadto abstrakcyjny. Więc zaczynajmy od nowa:



$$f = \frac{m_1 m_2}{r^2}$$ [elektr. albo magn. jeśli przyjąć to znak −

$$r^2 = (x_2 - a_1)^2 + \dots$$

$$X = f \cos\alpha$$

$$\frac{x_2 - a_1}{r} = \cos\alpha \quad \dots$$

$$X = \frac{m_1 m_2}{r^2}\,\frac{x_2 - a_1}{r}$$

$$Y = \frac{m_1 m_2}{r^2}\,\frac{y_2 - b_1}{r}$$

$$Z = \dots$$

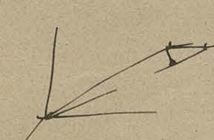
$$r = \sqrt{(x_2 - a_1)^2 + \dots}$$

Taka funkcya że:

$U = \dfrac{m_1 m_2}{r}$ to znaczy że $X = -\dfrac{\partial U}{\partial x}$ etc.

Istotnie: $$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{m_1 m_2}{\sqrt{(x_2 - a_1)^2 + \dots}}\right] = +\frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2\, 2(x-a)}{\sqrt{}^{\,3}} = \frac{m_1 m_2}{r^2}\,\frac{x-a}{r}$$

(Warto sobie raz na zawsze zapamiętać że $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \cos\alpha$ etc.) bezpośrednio bo to znaczy przyrost wielkości r gdy x się zmieni nieznacznie:

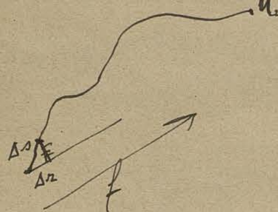


Wtedy: $$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dr}\,\frac{\partial r}{\partial x} = \dots$$

Tak samo $Y = -\dfrac{\partial U}{\partial y}$ etc. według symetryi, i ponieważ w ogóle kierunek osi XYZ jest dowolny [bo tylko fc.(r)] to w ogóle $F = -\dfrac{\partial U}{\partial s}$

4

Pojęcie pracy = Σ iloczynów z siły działającej w kierunku drogi i z długości drogi ~~przes~~



$$= \sum \overbrace{f \cos\varepsilon}\, \underbrace{\Delta s} = f(\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu)\Delta s = \int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = -\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \ldots\right) = \ldots$$

$$= \sum f\,\Delta r \quad = -(U_2 - U_1)$$

$$f \quad = \int -\frac{\partial U}{\partial s}\,ds = -(U_2 - U_1)$$ więc jeżeli punkty 1 i 2 są ustalone

to ona nie zależy od kształtu drogi między niemi, przyjmuje zawsze tę samą wartość

gdy punkt dostanie się w to samo położenie (jeszcze o tyle dowolne że f(2) więc —)

Z tego nowa definicya funkcyi potencyalnej:

Jeżeli punkt porusza się do nieskończoności: $P = U_1 - U_\infty$

~~Odtąd ...~~ Jeżeli jedna wartość U przyjęta to już oznaczona w całej przestrzeni

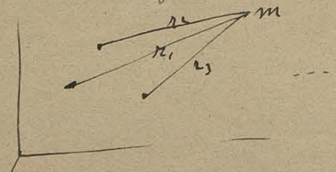
przyjmujemy więc $U_\infty = 0$ więc $P = U_1$ A więc:

funkcya pot. w pewnym punkcie = praca wykonana przez siłę odp. jeżeli ~~punkt~~ masa m_1 oddali się z niego do nieskończoności po jakiejś bądź drodze

---

Jaka korzyść tego pojęcia? Dopiero jeżeli więcej mas

N. p.



$$X = X_1 + X_2 + \ldots$$

$$X = \frac{m\,m_1}{r_1^2}\,\frac{x-a_1}{r_1} + \frac{m\,m_2}{r_2^2}\,\frac{x-a_2}{r_2} + \ldots = m\sum \frac{m_n(x-a_n)}{r_n^3}$$

$$Y = \frac{m\,m_1}{r_1^2}\,\frac{y-b_1}{r_1} + \ldots$$

$$Z = \ldots$$

$$X = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m\,m_1}{r_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m\,m_2}{r_2}\right) - \ldots = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{m\,m_1}{r_1} + \frac{m\,m_2}{r_2} + \ldots\right]$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[U_1 + U_2 + \ldots\right]$$

Jeśli masy rozdzielone w cienkiej warstwie na powierzchni

$$U = k\int\frac{\sigma . dS}{r} \qquad \sigma = \rho . \delta$$

$$U_1 = \frac{4\pi k\rho}{3}\left(\frac{A^3-a^3}{\cancel{A}}\right)\frac{1}{r}$$

$r = A: \quad U_1 = U_2$

$$U_2 = \frac{4\pi k\rho}{3}\;\frac{A^3-a^3}{r} + 2\pi k\rho\left(A^2-r^2\right)$$

$r = a: \quad U_2 = U_3$

$$U_3 = \cancel{A\pi}\; 2\pi k\rho\left(A^2-a^2\right)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial r} = -\frac{4\pi k\rho}{3}\;\frac{A^3-a^3}{r^2} \;\ldots\ldots\; \frac{4\pi k\rho}{3}\;\frac{A^3-a^3}{A^2} =$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial r} = k\pi\rho\left(\frac{4}{3}r - \frac{4}{3}\frac{a^3}{r^2}\right) \;\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial r} = 0$$

Stałą k w dotychczasowych wzorach stawiamy = 1

przyjmując że jednostka mas w odpowiedni sposób dobrana

Np. w elektrostatyce : system elektrostatyczny

w grawitacji inny system CGS, zatem tam musimy tę stałą zatrzymać, wynosi

$k = 0.000\,000\,0648$

gdyby się chciało stawiać $k=1$

trzebaby zamiast 1g przyjąć jako jednostkę 15.430kg

Więc $\underline{X} = -\frac{\partial U}{\partial x}$ $\quad U = \sum u_1 + \dots$

funkcya pot. poprostu dodaje się aby otrzymać wypadkową siłę

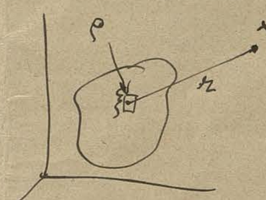
tak samo: $\underline{Y} = -\frac{\partial U}{\partial y}$ etc.

To staje się szczególnie ważnem jeśli ∞ wiele punktów

Dójmy na to że mamy izolator w którego wnętrzu znajdują się elektryczne ładunki n.p. ~~...~~ wosku lowet [Jak je można tam wytworzyć to inna kwestya], albo masy grawitacyjne

ρ = gęstość

$m_1, m_2 \dots = \cancel{\dots}\ \rho \Delta v$



więc siła powstająca:

$$\underline{X} = \sum \frac{m \rho \Delta v}{r^2} \frac{x-\xi}{r}$$

$$X = m \int \frac{\rho (x-\xi)}{r^3}\, dv \quad (= d\xi\, d\eta\, d\zeta)$$

ρ nie potrzebuje być wszędzie równe

$$Y = m \int \frac{\rho (y-\eta)}{r^3}\, dv$$

$$Z =$$

a według przyjętego rezultatu $\underline{X} = -\frac{\partial U}{\partial x}$ --

$$U = \sum u_1 + \dots = m \int \frac{\rho \Delta v}{r}$$

więc tutaj mamy przedewszystkiem już tę jedną korzyść, że wystarczy nam jedno całkowanie, podczas gdy tam musielibyśmy przeprowadzić 3 całkowania i to do tego więcej skomplikowane, a chcąc n.p. wyrachować siłę w innym kierunku F trzebaby tam użyć X Y Z, podczas gdy tutaj F = w dowolnym kierunku $= -\frac{\partial U}{\partial s}$

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right) = f(\cos\alpha, \cos\beta \dots) = f \cos\varepsilon$$

Z tego także wypływa że praca $P = -\int^{2} \frac{\partial U}{\partial s}\, ds = U_1 - U_2$ więc niezależna od drogi

to byłoby całkiem inaczej gdyby n.p. $F = -\frac{\partial U}{\partial s} + s$

więc jeśli to samo założenie jak przedtem że funkcya $U_\infty = 0$ to funkcya pot. = praca ..

albo co to samo = pracę którą zewnętrzne siły muszą wykonać aby, opierając się oporowi siły f, przeprowadzić punkt m z nieskończoności do 1.

To można bardzo stosownie także użyć jako pierwotnej definicyi funkcyi potencyalnej bo z niej wynika pierwsza definicya, ponieważ

chodzi nam o siłę w kierunku

Ponieważ droga dowolna, obieramy prostą na kierunku $P_1 P_1'$ wtedy praca $P_1^{1'} = F\Delta s$

zatem $$F\Delta s = \frac{Praca_1 - Praca_1'}{m} = U_1 - (U_1 + \Delta U)$$

$$F = -\frac{\Delta U}{\Delta s} = \frac{\partial U}{\partial s}$$

W elektryczności zwykle napotyka się na ten przypadek że masy nie są rozdzielone w przestrzeni tylko na powierzchni. Jeśli σ = gęstość powierzchniowa to wtedy

$m_n = \sigma\, dF_n$ więc $U = \int \frac{\sigma\, dF_n}{r}$

Odtąd będziemy nazywali potencyałem wartość funkcyi U dla $m = 1$

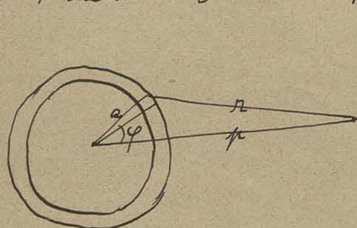
Gdyby masa skoncentrowana w punktach materyalnych to dla $r = 0$ $\lim F = \infty$ i $\lim V = \infty$

Jeśli jednak w przestrzeni to $dv = r^2\, d\omega\, dr$

$$\frac{dv}{r^2} = d\omega\, dr \quad \text{więc nie będzie } \infty$$

$$V = \int \frac{dv}{r} = r\, d\omega\, dr = 0$$

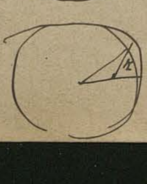
Masa rozłożona w warstwie kulistej nieskończ. cienkiej



$$U = m\int \frac{2\pi a^2 \sin\varphi\, d\varphi\, \overset{\sigma}{\rho\, da}}{r} = m\rho\cdot 2\pi a^2 \int \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{a^2+p^2-2ap\cos\varphi}}$$

$$= m\rho\frac{a\pi}{p}\int\frac{-2ap\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{}} = m\rho\frac{a\pi}{p}\, 2\left(\overset{=r}{\sqrt{a^2+p^2-2ap\cos\varphi}}\right)\Big|_0^{\pi} \quad r_\pi - r_0$$

$$= \frac{2ma\pi\rho}{p}\left[(a+p)-(p-a)\right] \text{ ext.} = \frac{4a^2 m\pi\rho}{p}$$



$$= \frac{2ma\pi\rho}{p}\left[(a+p)-(a-p)\right] \text{ int.} = 4am\pi\rho$$

Przy tem $4a^2\pi\rho$ = całkowita masa = M
$= 4a^2\pi\rho\, da$

$$U_{ext} = \frac{Mm}{p}$$

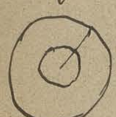
$$U_{int} = \frac{Mm}{a}$$ więc dla punktu zewnętrznego tak jak gdyby cała masa

skoncentrowana w środku, więc siła $F = -\frac{Mm}{p^2}$

dla punktu wewnętrznego $F=0$, ponieważ potencyał = stały

[specyalny przypadek ogólniejszego prawa (konduktor ~~z pustą~~ elektr. naelektryzowany) nie wywiera żadnej siły na wewnętrzne punkty]

Z tego otrzymuje się bezpośrednio wyrażenia dla kuli ~~pustej~~ pełnej



i zastępując a A

$$U_{int} = \int \frac{4\pi m a^2 \rho}{p}\, da = \frac{4}{3}\frac{\pi m a^3 \rho}{p} \; (A^3) = \frac{Mm}{p}$$

co naturalnie bezpośrednio z przyjętego rezultatu wypływa

To jest uzasadnieniem tego że w astronomii etc. można uważać siłę jako pochodzącą ze środka planety etc. [Dokładnie to nie jest ważne, ponieważ wtedy nie spłaszczenie odpowiednie i to też powoduje Precesyę i Nutacyę] tak samo w elektryczności: doświadczenia Coulomba z kulami naelektryzowanemi, aby ~~do~~ sprawdzić $\frac{mm'}{r^2}$

To ostatnie także nie całkiem ściśle bo tutaj ρ było założone jako jednakowe wszędzie podczas gdy w tych doświadczeniach elektryczność rozdziela się nierówno-miernie, o czem później;

$$U_{int} = m\int_a^A 4\pi a \rho\, da = m\, 4\pi\rho\, \frac{A^2 - a^2}{2} = m \cdot 2\pi\rho(A^2 - a^2)$$

nie da się wyrazić przez samą masę

$F = 0$

Jeśli teraz punkt leży w odległości r ~~od~~ od O w kulistej warstwie ~~pełnej~~:

8

$$U = \left[\frac{4\pi}{3}\rho\,\frac{r^3-a^3}{r} + 2\pi\rho\,(A^2-r^2)\right] m$$

$$= m\pi\rho\left[2A^2 - \frac{2}{3}r^2 - \frac{4}{3}\frac{a^3}{r}\right]$$

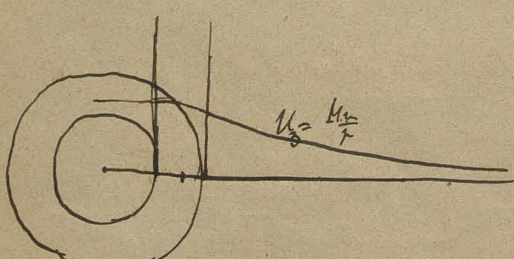
$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = m\pi\rho\left[\frac{4}{3}r - \frac{4}{3}\frac{a^3}{r^2}\right]$$

Jeśli $a=0$ ciało pełne

Przykład nasz dawniejszy wartości się ~~zmienia~~ dziurawe

$$F = m\,\frac{\frac{4}{3}\pi\rho r^3}{r^2}$$

Przebieg jego przedstawiony wobec graficznie:



$$U_2\Big|_{r=A} = m\frac{4\pi\rho}{3}\,\frac{A^3-a^3}{A} = \frac{Mm}{A} = U_3\Big|_{r=A}$$

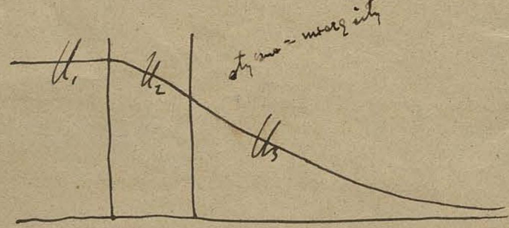
$$U_2\Big|_{r=a} = m\,2\pi\rho\,(A^2-a^2) = U_1$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial r} = -\frac{Mm}{r^2}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial r} = m\pi\rho\left[-\frac{4r}{3} + \frac{4a^3}{3r^2}\right]$$

$$r=A: \quad = m\pi\rho\,\frac{4}{3}\,\frac{a^3-A^3}{A^2} = \frac{\partial U_3}{\partial r}$$

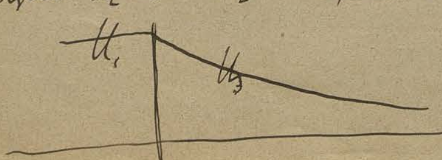
$$r=a: \quad m\pi\rho[0] = 0 = \frac{\partial U_1}{\partial r}$$



więc U jest funkcją ciągłą i

$\frac{\partial U}{\partial r}$ także

Inny rezultat jednak jeśli masa skoncentrowana na powierzchni, bo wtedy grubość części $U_2 = 0$ więc wprawdzie U będzie ciągłą funkcją ale $\frac{\partial U}{\partial r}$ nieciągłą



Wypływa to także bezpośrednio z odpowiedniej formuły

9

7

$U_{ex} = m \cdot \frac{4a^2\pi\sigma}{r}$

$U_{int} = m \cdot 4a\pi\sigma$

$r = a : U_e = U_i$

ale $\frac{\partial U_e}{\partial r} = - m\, 4\pi\sigma$

tymczasem $\frac{\partial U_i}{\partial r} = 0$

Jest to specyalny przypadek bardzo ogólnego równania $\frac{\partial U_e}{\partial r} \cancel{+} \frac{\partial U_i}{\partial r} = -4\pi\sigma$

które później poznamy

Jeszcze jedno wyrażenie bardzo ważne: $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

$U_{ex} = \frac{M}{r} = \cancel{M}$

$\frac{\partial \cancel{M}(\frac{1}{r})}{\partial x} = -\frac{\cancel{M}}{r^2}\,\frac{x-a}{r}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial x^2} &= \frac{3}{r^3}\frac{(x-a)^2}{r^2} - \frac{1}{r^3} \\ \frac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial y^2} &= \frac{3}{r^3}\frac{(y-b)^2}{r^2} - \frac{1}{r^3} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \frac{3}{r^3}\frac{(z-c)^2}{r^2} - \frac{1}{r^3} \end{aligned}\right\} \quad \Sigma = 0$$

[Równanie Laplace'a

Tak samo naturalnie U_3

A jak U_2 ? $U_2 = \pi\rho\left[2A^2 - \frac{2}{3}(x^2+y^2+z^2) - \frac{4}{3}\frac{a^3}{\cancel{r}}\right]$ stąd $a_2 = 0$

$\frac{\partial U_2}{\partial x} = \pi\rho\left[-\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}a^3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$

$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = \pi\rho\left[-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}a^3\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$

$\Sigma = -4\pi\rho + \cancel{\frac{4}{3}a^3\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{r}\right)}_{=0}} = -4\pi\rho$ [Równanie Poissona]

Oczywiście tamto równanie Laplace'a w nim jest zawarte jako specyalny przypadek; tymczasem tylko dowiedliśmy tego dla kuli, ale zobaczymy zaraz że jest to ogólny resultat że $\nabla^2 U = -4\pi\rho$

Do ~~wyciągania~~ co do mas, które mają ∞ blisko,

$$U = \sum \rho \frac{\Delta v}{r} = \int_\alpha^\beta \frac{\rho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}}$$

$$\frac{U'-U}{\Delta x} = \int_\alpha^\beta \rho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \left(\frac{\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}}{\Delta x}\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int \rho\, dv\, \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int \rho\, dv\, \frac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \int \ldots \frac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \int \ldots$$

$$\nabla^2 = \int \rho\, dv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ldots\right)\frac{1}{r} = 0$$

Gdy punkt leży w masie samej to tego nie wolno czynić, bo nie tylko zależą takie granice, i bo są części które dają nieskończenie wielki przyczynek

Ogólne prawo co do różniczkowania pod znakiem całkowania:

Rozróżnić dwa przypadki: zmienna zawarta w granicach, albo jako parametr pod znakiem

$$\int_0^x \cos\alpha x\, dx = \frac{\sin\alpha x}{\alpha}$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)\,dx = \lim \frac{\int_a^{t+\Delta t} - \int_a^t}{\Delta t} = \int_t^{t+\Delta t}\ldots = \frac{f(t)\,\Delta t}{\Delta t} = f(t)$$

$$\frac{d}{dt}\int_t^a f(x)\,dx = -f(t)$$

z wyjątkiem punktów takich, gdzie funkcja f

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \lim \int_a^b \frac{f(x,t+\Delta t)-f(x,t)}{\Delta t}\,dx = \lim \int_a^b f'(x, t+\theta\Delta t)\,dx = \int_a^b f'(x,t)\,dx$$

Jeżeli f' jest funkcją ciągłą w stosunku (x, t)

$$\frac{\alpha \sin\alpha x}{\alpha} = \int_0^x \alpha \sin\alpha x\, dx =$$

to jednak nie jest dozwolone jeżeli f(x) nie jest ciągłem mianowicie jeżeli staje się ∞

Jeżeli U do punktów w niej samem to:

$U = \int \frac{dv}{r}$ zdawałoby się ∞ dla r=0 ale $dv = r^2\, dr\, d\omega$ $U = \int r\, dr\, d\omega$

czy wolno $\frac{d}{dr}$ albo $\frac{\partial}{\partial x}$ etc.? $\int \frac{dv}{r^2} = \int dr\, d\omega$ to jeszcze jest ciągłe więc wolno

ale nie wolno $\frac{d^2}{dr^2}$ $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ etc. bo $\int \frac{dv}{r^3} = \ldots$ albo $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int r^2\, dr\, d\omega\left[\frac{3(x-a)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right]$ bo $= \infty - \infty$

nie można tego rozstrzygnąć bo zależy od wielkości ale można zawsze oddzielić kulę tak małą naokoło ~~w otoczeniu~~ punktu np. że zmienność ρ może być w niej zaniedbaną

$$\nabla^2 U = \underset{0}{\nabla^2 U_1} + \underset{-4\pi\rho}{\nabla^2 U_2}$$

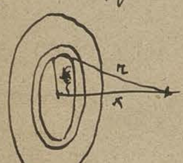
więc Poissona równanie ogólnie ważne.

A jeśli dana jakaś byłaby funkcja U —

Jeżeli więc U dane to zawsze można znaleźć rozkład mas ρ

Teraz co do drugiego ~~[illegible]~~ rodzaju mas, ~~[illegible]~~ rozszerzonej na powierzchni:

Tej argumentacji nie możemy użyć, bo widzimy że np. przy kuli już pierwsze pochodne są nieciągłe.



$$U = \int_0^A \frac{2\pi\sigma\xi\, d\xi}{\sqrt{\xi^2+x^2}} = 2\pi\sigma \sqrt{\xi^2+x^2}\Big|_0^A = 2\pi\sigma\left[\sqrt{A^2+x^2} - x\right]$$

~~Jeżeli więc A = ∞ (nieskończona płaszczyzna) to U = 2πσ~~

Teraz $\frac{\partial U}{\partial x} = 2\pi\sigma\left[\frac{x}{\sqrt{A^2+x^2}} - 1\right]\Big|_{x=0} = -2\pi\sigma$

Gdybyśmy się tak samo oddalali na lewej stronie byłoby także $\left(\frac{\partial U'}{\partial x}\right) = -2\pi\sigma$

ponieważ jednak kierunek x pozostaje ten sam, to musimy napisać: $-\frac{\partial U'}{\partial x} = -2\pi\sigma$

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U'}{\partial x} = -4\pi\sigma = \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U'}{\partial n'}$$

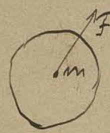
Ogólnie można wziąć tak mały krążek że σ ~~[illegible]~~ równomierna a x może tak blisko być, że ~~[illegible]~~ zmiana $\frac{\partial U_1}{\partial x} = C$

oznaczając ogólnie kierunek x przez n:

$$\frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial U'}{\partial n} = -4\pi\sigma$$

12

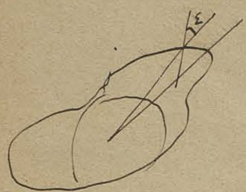
Twierdzenie Gaussa



$F = \frac{m}{r^2}$ $\int \frac{m}{r^2} df = \int \frac{m}{r^2} r^2 d\omega = \int m \sin\vartheta d\vartheta . d\varphi = 4\pi m$

niezależnie od r

Tak samo dla jakiejkolwiek powierzchni



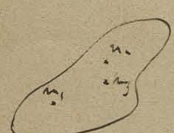
$\int F_n df = \int \frac{m}{r^2} \cos\varepsilon df = \int \frac{m}{r^2} df' = \int m \frac{df''}{r''^2} = 4\pi m$

$df' : df'' = r^2 : r''^2$

Linie siły: równie wiele przechodzi przez każdą jak przez — — powierzchnię

Jeżeli więcej mas:

Rozkładamy F w składowe F_1', F_2' — — : z każdej kierunek składowej normalnej



~~Składowa~~ Wypadkowa w normalnej złożona ze składowych

$4\pi m_1 = \int F_{1n} df$

$4\pi m_2 = \int F_{2n} df$

— — —

$4\pi \Sigma m = \int F_n df$

$\int v_n df = \iiint \operatorname{div} v . dv$

$v = \nabla U$

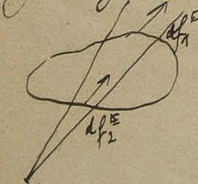
$\int \frac{\partial U}{\partial n} df = \iiint \nabla^2 U dv$

$= -4\pi m$

$\boxed{4\pi m = -\int \frac{\partial U}{\partial n} df}$

$= -\iiint \nabla^2 U dv$

Jeżeli jednak punkt znajduje się zewnątrz:



$F_1 \cos\lambda_1 df_1 = F_2 \cos\lambda_2 df_2$

a jeżeli się zechcą siły na zewnątrz to $F_1 \cos\lambda_1 df_1 = -F_2 \cos\lambda_2 df_2$

$\int F df = 0$ $\int \frac{\partial U}{\partial n} df = 0$ Tak samo dla większej ilości mas

więc ogólnie $\int \frac{\partial U}{\partial n} df = -4\pi m$ ← suma mas wewnętrznych

$\cancel{\iiint G \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\, dx\,dy\,dz}$

Twierdzenie Greena } pewny!

Przestrzeń jednokrotnie zwarta

G, H funkcje ciągłe

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(G \frac{\partial H}{\partial x}\right) = G \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\iiint G \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\, dx\,dy\,dz = \iint G \frac{\partial H}{\partial x}\Big|^{2}_{1} \underbrace{dy\,dz}_{df \cos(nx)} - \iiint \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x}\, dx\,dy\,dz$$

$$\iiint G \nabla^2 H\, dx\,dy\,dz = \iint G\left(\frac{\partial H}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial H}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial H}{\partial z}\cos nz\right) df - \iiint \cdots$$

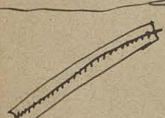
$$\underset{\frac{\partial x}{\partial n}}{\parallel} \quad \cdots$$

$$= \iint G \frac{\partial H}{\partial n}\, df - \iiint \cdots$$

$$\iiint G \nabla^2 H\, dx\,dy\,dz = \iint G \frac{\partial H}{\partial n}\, df - \iiint \left[\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y} + \cdots\right] dx\,dy\,dz$$

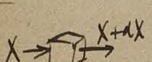
N. p. $G = 1 \;\|\; H = V$

$$\iiint \nabla^2 V\, dx\,dy\,dz = \iint \frac{\partial V}{\partial n}\, df = -\Sigma\, 4\pi m$$



$$\iint \frac{\partial V}{\partial n}\, df = \left[\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V'}{\partial n'}\right] f + 2 \cdots = -4\pi f . \sigma$$

element powierzchni otoczony warstwą elektr. ciągłą



$$dy\,dz\, dX + dx\,dz\, dY + dx\,dy\, dZ = + 4\pi \rho\, dx\,dy\,dz$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho$$

14

(p i 6)

Więc dane są masy w pewnym rozkładzie, z których obrachować daje się V

Własności tej funkcji geometrycznie przedstawiam. Pole elektrostatyczne, grawitacyjne

$V(x, y, z) = \text{const}$ powierzchnie poziome (ekwipotencyalne)

~~Kierunek~~ siły w jakim bądź kierunku $= -\frac{\partial V}{\partial s}$

Zatem składowa styczna $= 0$

siła skierowana w kierunku normalnym

~~Także z tego wynika~~ Jeżeli powierzchnia gładka, styczna, to punkt na niej nie będzie się poruszał.

Normalna jest naturalnie kierunkiem gdzie

V najszybciej się zmienia

$N = -\frac{\partial V}{\partial n}$ ‖ zatem tam większa gdzie one bliżej siebie leżą, gdzie się najmniej oddalają.

Przypominam że ~~praca~~ różnica V w dwóch punktach

= praca punktu o masie 1 na drodze + 0

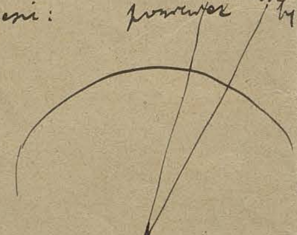
niezależnie od kształtu drogi.

Zmienna grubość ma oznaczać wielkość V

Przecinać mogą się tylko takie gdzie V ma tę samą wartość, ~~jeżeli z to potęgami wartości siło.~~

Więc ~~daje~~ system linij oznaczających kierunek siły, równocześnie można je także użyć do określenia natężenia siły : ~~natężenie~~ natężenie siły w jakimś kierunku = ilość linij siły przechodzących przez jedność powierzchni prostopadłą do tego kierunku

Najprościej przy jednej masie: powierzchnia ilość będzie się zmniejszała w stosunku



jeżeli wykreślimy wtedy $(4\pi m)$ linij

to przypada ich na jedność powierzchni

normalnej $\frac{4\pi m}{4\pi r^2} = \frac{m}{r^2}$

a pochyłej $\frac{m}{r^2}\cos\varepsilon$

Jeżeli wykreślimy linij przez każdy element prostop. do siły, jeżeli linij prop. do siły to można to wyrazić w takim sposób że linije będą tworzyć system wychodzące z punktów gdzie +, kończące się gdzie –

A że to samo i w ogólnym przypadku, wynika jak zaraz zobaczymy z twierdzenia Gaussa.

Więc wszędzie normalne do V; nie mogą się przecinać oprócz w punktach gdzie siła jest zero.

~~Nie mogą być w sobie zamknięte~~

Jeżeli punkt, przez który przechodzi linia siły opisuje pewną małą linię zamkniętą to to 15

powstaje włókno siły (rura siły) (Kraftröhre) (tube of force).

Zastosujemy na nie tw. Gaussa: (tam gdzie nie ma masy)

$$\varrho F_n + \varrho' F_n' = 0$$

$$\cancel{F_n : F_n'} = \quad \varrho F_n = \varrho' F_n'$$

zatem odstęp ich jest miarą siły, tem większa im bliżej one przy sobie

Jeżeli więc przez jeden przekrój ϱ wypuścimy F_n linij siły to natężenie w jakimś

będzie przekroju tego włókna będzie dane przez ilość przypadającą na 1 powierzchni $= \frac{F_n \cdot \varrho}{\varrho'} = F_n'$

zatem możemy stosować to jako ilustrację. I tak samo względem wszystkich włókien

Ilość tych linij przechodzących przez jakąś bądź powierzchnię = przepływ siły, prąd siły

$$= \int F_n \, df$$

~~Treść twierdzenia Gaussa~~

Jeżeli jednak w środku są zawarte jakieś masy

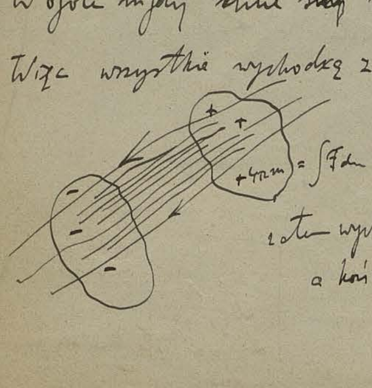
to $\varrho F_n = \varrho' F_n' - 4\pi\mu$ więc wtedy z jednej strony więcej będzie linij wchodziło

niż z drugiej strony wyjdzie. ~~[illegible]~~ Pewna ilość ich będzie ~~musi~~ miała tam punkty końcowe.

(prócz w ~~specyalnych osobliwych wypadkach~~)

W ogóle nigdy linie siły nie mogą być zamknięte bo mielibyśmy pracę wykonaną ≠ 0

Więc wszystkie wychodzą z mas i kończą się w masach (albo w nieskończoności)

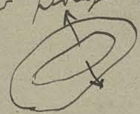


zatem wychodzą z ~~[illegible]~~ mas dodatnich a kończą się w ujemnych

16

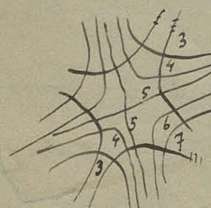
Z tego wzoru wynika że potencyał nie może mieć nigdzie maxi[mum] (mi[nimum]) gdzie tam gdzie są masy

bo jeśli max. (mi[n].) to w pewnym obrębie wszystkie F_n dodatnie albo ujemne



więc $\int F_n df = 4\pi m$

Może jednak nastąpić minimax. w pewnych punktach albo liniach t.j. w jednym kierunku max. w innym min.



bo wtedy w jednym kierunku + w drugim –

linie siły odpowiadające.

To tyż twierdzenie zastosowane do w punktach 0

wszystkie tożsame z tym że V_0 ...

Więc jeśli n.p. potencyał = ~~V~~ stałe na pewnej powierzchni zamkniętej to w całej przestrzeni (zawartej w środku) będzie ~~...~~ stałem jeśli w środku nie są zawarte jakieś masy

Tak samo jeśli na powierzchni zawierającej wszystkie masy = 0 to także w całej zewnętrznej przestrzeni = 0.

~~Jeśli dana ... powierzchnia poziomu i $\frac{\partial V}{\partial n}$ w wszystkich punktach to~~

W żadnym punkcie przestrzeni (nie zajętym przez masę) punkt ruchomy nie może być w równowadze stałej

~~bo ten byłb~~ Równowaga stała wymaga żeby w obrębie punktu wszystkich niesk. małej $F_n < 0$

więc $\frac{\partial U}{\partial n} > 0$

Tymczasem mamy $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0\right) = \int \frac{\partial U}{\partial n} df$ więc jeśli $\frac{\partial U}{\partial n}$ w pewnych miejscach >0 to musi w innych być <0

w obrębie dowolnym jeśli tego nie mamy)

~~(Więc tylko masy ze sobą mogą ...)~~

Gdyby elektryczność miała swobodę ruchu toby się rozpierzchła w wszech przestrzeni a taksamo masa grawitacyjna skoncentrowałaby się w jeden punkt

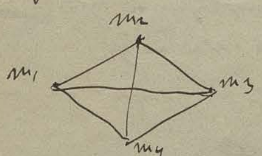
Więc tylko równowaga obojętna aby mieć stałą trzebaby jeszcze wprowadzić n.p. siły sprężyste albo ograniczyć ruchliwość

Aż dotąd była zawsze tylko mowa o potencyale w jednym punkcie = potencyał na masę 1 tam się znajdującą.

Gdyby tam była masa m to siła $= -m\frac{\partial U}{\partial s}$

a ~~poten~~ ~~funkcya potencyalna~~ potencyał $= -mU$ Znaczy że pracę mU zostaje wykonaną gdy ~~gd~~ masa m oddala się w ∞ ; jeśli ~~dwie masy~~ dowolna ilość mas m_1, m_2 m_3 ~~w dwóch punktach U~~ gdzie

~~potencyał $= U_1$; U_2~~



Jaką pracę mogą one zdziałać : $W =$

punkt m_1 oddala się w ∞ : $\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_1 m_4}{r_{14}}$

m_2 — — ∞ : $\frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_2 m_4}{r_{24}}$

m_3 — ∞ : $\frac{m_3 m_4}{r_{34}}$ $\Big\}$ Kombinacye bez powtórzeń

Z tem porównany wyrażenie $m_1 U_1 + m_2 U_2 + m_3 U_3 + m_4 U_4 =$

Kombinacye z powtórzeniem

$$= \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_1 m_4}{r_{14}} + \frac{m_2 m_1}{r_{12}} + \frac{m_2 m_4}{r_{24}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{13}} + \frac{m_3 m_2}{r_{23}} + \frac{m_3 m_4}{r_{34}}$$

$+$ — — — —

$= 2W$

Zatem Praca całkowita wykonalna = Energia potencyalna $= \frac{1}{2}\sum mU$

Jeśli zatem masy rozdzielone w przestrzeni etc. $W = \frac{1}{2}\int \rho U\, dv + \frac{1}{2}\int \sigma U\, df$

$W = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi}\int U \nabla^2 U\, dv$ $-\frac{1}{8\pi}\int U\frac{\partial U}{\partial n}df$

odnosi się do powierzchni zewnętrznej i do wszystkich powierzchni gdzie $\frac{\partial U}{\partial n}$ nieciągłe

$= -\frac{1}{8\pi}\int U\frac{\partial U}{\partial n}df + \frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]dv$ $= \frac{1}{2}\int \sigma U\, df$ $-\frac{1}{2}\int \sigma U\, df$

co się znosi z odpowiednią częścią lewej strony tak że z prawej strony zostaje tylko zewnętrzna powierzchnia

$W = \frac{1}{8\pi}\int FU\, df + \frac{1}{8\pi}\int (\ )^2 + \ldots$

Jeśli zatem na pewnej powierzchni U albo $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ i jeśli wewnątrz $\rho = 0$ to potencyał musi być stały (w pierwszym przypadku $= 0$) jak przedtem już w inny sposób

18

Uzupełnienie:

$\lim_{r=\infty} U r = \int \rho\, dv$

ponieważ $U = \int \frac{\rho\, dv}{R + (r-R)}$ $\Big\|$ $\lim U r = \lim_{R=\infty} [R] \int \frac{\rho\, dv}{R + (r-R)}$

$= \lim_{R=\infty} \int \frac{\rho\, dv}{1 + \frac{r-R}{R}} = \int \rho\, dv = M$

~~Aż dotąd uważaliśmy jako dane, wszystkie ... : dane są ...~~

~~... dane $\frac{\partial U}{\partial n}$ w pewnych to miejscach, zadanie było znaleźć ρ i U~~, jakie warunki potrzebne do oznaczenia?

Bo może się zdarzyć że całkowania $U = \int \frac{\rho}{r}$ .. nie możemy wykonać, tylko w inny sposób znajdziemy jakąś funkcję U a która ma być jest

Ogólnie musiała zadość czynić: wraz z pochodnemi Φ funkcya ciągła, skończona, jednowartościowa, ~~...~~ w pewnym obrębie przestrzeni S

$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho$ (w pewnych obszarach $\rho \geq 0$) $\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial n} + \frac{\partial\Phi}{\partial n'} = -4\pi\sigma$ (w pewnych powierzchniach) $\leftarrow$ która wchodzi także ciągła z wyjątkiem

nazywamy je harmonicznemi funkcyami

i na pewnej zamkniętej powierzchni musi być dane U albo $\frac{\partial U}{\partial n}$

przez to zupełnie oznaczona, bo gdyby jeszcze istniała druga rozwiązanie U_1 zadość czyniąca tym samym warunkom to mielibyśmy:

$\nabla(\Phi - \Phi_1) = 0 \qquad \frac{\partial(\Phi-\Phi_1)}{\partial n} + \frac{\partial(\Phi-\Phi_1)}{\partial n'} = 0$

i na pewnej powierzchni $\Phi - \Phi_1 = 0$ albo $\frac{\partial(\Phi-\Phi_1)}{\partial n} = 0$

zatem $\underbrace{(\Phi-\Phi_1)}_{=\Psi}$ ciągłe wszędzie, toż samo pochodne etc. — $\qquad U - U_1 \overset{=\Psi=0}{=} 0$ według dawniejszego twierdzenia

Zatem jeśli w ogóle istnieje funkcya zadość czyniąca to tylko jedna.

Dowolne są rozmieszczenia ρ i σ a na powierzchni U w jednych miejscach a $\frac{\partial U}{\partial n}$ w innych

albo także U samo to już wystarczy, gdyby $\frac{\partial U}{\partial n}$ samo to jeszcze nie oznacza stałe.

Ale że w każdym wypadku rozwiązanie jest możliwem tego nie zdołano jeszcze dowieść.

Przypominam jeszcze raz dowód owego twierdzenia

$$\int \varphi \nabla^2 \varphi \, dv = \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} df - \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \ldots \right] dv$$

i φ i jego pierwsze pochodne są wszędzie ciągłe

Jeśli zatem wszędzie $\nabla^2 \varphi = 0$ i na pewnej powierzchni φ albo $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ to wszędzie $\varphi = const$

Weźmy ~~tego~~ owego twierdzenia w tem uzasadnieniu:

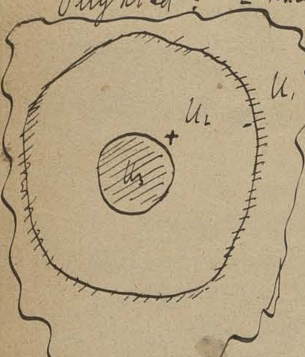
Jeśli damy ρ i σ i jeśli możemy wykonać całkowanie to wiemy że to będzie U i nie potrzebujemy więcej żadnych warunków na powierzchniach

Jeśli jednak całkowania nie możemy albo nie chcemy wykonać tylko jeśli w jakiś inny sposób otrzymaliśmy funkcję φ ~~tt~~ która zadość czyni owym warunkom dla ρ i σ to mimo to nie wiemy czy to jest będzie U (bo ~~nie~~ wiemy czy wogóle prócz tego jest oznaczona jakaś funkcja) czy tamte są warunki wystarczające.

Istotnie nie są, φ musi ~~musieć by~~ jeszcze odpowiadać owym pewnym warunkom na powierzchniach aby być oznaczonym.

Przykład: 2 koła, w środku ρ, na zewnętrznej $\sigma = \frac{-M}{4\pi A^2} = \frac{-a^3 \rho}{3 A^2}$

więc w całem $M = \frac{4\pi a^3 \rho}{3}$



Możemy sobie przedewszystkiem obrachować U w tym prostym przypadku

do tego nie potrzeba żadnych więcej warunków

$U_1 = 0$

$U_2 = M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{A}\right)$

$U_3 = \cancel{\frac{M}{r}} \cancel{\ldots} \; M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{A}\right) - 2\pi\rho(a^2 - r^2)$

ale jeśli znajdziemy jakimś sposobem funkcję φ która zadość czyni równaniom $\nabla^2 U_3 = -4\pi\rho$

$\frac{\partial U_1}{\partial r} - \frac{\partial U_2}{\partial r}\Big| = +4\pi\sigma$

---

to jeszcze nic nie możemy powiedzieć czy to jest U czy jakaś inna funkcja,

bo do tego musielibyśmy jeszcze wiedzieć jak φ ma być na jakiejś powierzchni

(To odpowiada stałym całkowania przy równaniach różniczkowych)

N. p. $\varphi_3 = U_3 + x$ ~~###~~

$\varphi_3' = U_3 + xy$

$\varphi_2 = M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{A}\right) + x$ ~~###~~

~~To nie dowodzi że zadość czynią warunkom~~

że $\varphi_\infty = 0$ $\varphi_2' = M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{A}\right) + xy$

$\varphi_1 = x$ ~~###~~

$\varphi_1' = xy$

itd.

21 Tak jest nieskończenie wiele możliwych rozwiązań

ale jeśli są ~~d~~ dane wartości U (albo $\frac{\partial U}{\partial n}$) na zewnątrz powierzchni [wśród S] to wówczas φ

jest już oznaczone

N. p. Jeśli warunek że $\varphi_{r=A} = 0$ na kuli $r=A$

to między wszystkimi możliwemi φ tylko to jedno $\varphi = U$ odpowiada temu warunkowi

gdyby na kuli $r=A$ φ miało inne wartości dane n. p. $\varphi_{r=A} = \alpha$

to tylko jedno $\varphi = U + \alpha$ temu warunkowi odpowiada etc.

Można także tak powiedzieć że do wyznaczenia oznaczonego równania $\Delta\varphi = \varrho$ potrzeba:

~~Zadania~~ Interpretacja fizyczne gdzie to wszystko zastosować można

1). Grawitacya $\rho > 0$ $\sigma = 0$ znak U –

2). Elektr. ρ, σ

3). Magn.

4). Hydrodynamika cieczy nieściśliwych jeśli potencyał prędkości

$\nabla^2\varphi = 0$ dane muszą być warunki dla powierzchni

Wtedy więc linie siły = linie prądu

$\varphi = U$

n. p. jeśli ściany stałe to tam składowa prędkości normalna $= 0$ $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$

Podobnie akustyka ~~widocznie że~~ $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \kappa^2 \nabla^2 \varphi$ Helmholtz

5). Prądy stałe elektryczne

$u = -\lambda \frac{\partial U}{\partial x}$ $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 = \nabla^2 U = 0$

$v = -\lambda \frac{\partial U}{\partial y}$

$w = -\lambda \frac{\partial U}{\partial z}$

6). ~~Ht~~ Analogiczna teorya przewodnictwa ciepła

$$c\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = -k\nabla^2\vartheta$$

Probescheibchen!
Vertheilung unabhängig von Material d. Körper
El. Nur an Oberfläche d. Leiter

Elektrostatyka; trudni się tylko stanem niezmiennym
Ell. i Magn.

odnoszą się stosowanie tylko do sił ~~elektr~~ ponderomotorycznych
nie do elektromotorycznych

Hypoteza że $+\frac{m_1 m_2}{r^2}$ $+\frac{m m_1}{r^2}$, doświadczenia Coulomba [1785] i Cavendisha [1772]; naturalnie nie ~~to~~ jest dowodem, tylko fakt że wszystkie konsekwencye, które z tego wyciągamy, w ogólności się sprawdzają.

Oprócz ~~tego~~ do hypotezy ogólnej należy dodać: że el. w niektórych ciałach (konduktorach) tak łatwo się porusza na podobę wody aż nie będzie w równowadze, co naturalnie tylko przez to jest umożliwione że istnieją inne izolatory które jej niedozwalają wyjść z konduktorów.

Gdyby nie było izolatorów ~~to~~ nie byłoby elektrostatyki.

Właściwie naturalnie wszystkie ciała mają pewne przewodnictwo, a więc elektrost. tylko idealny przypadek.

To było co do ~~sił~~ sił które cząsteczki el. na siebie wywierają. Mechaniczne w ciałach tak objawiają się jakgdyby el. do nich była przyczepiona, albo racyonalniej się wyrażając:

tak że energia elektr. + energ. mechaniczna (kinet. i pot.) = stała, więc że zachodzi zachowanie energii ~~praca wykonana przez siły el. dodana razem z pracą wykonaną przez mechaniczne = 0~~.

(Co do ~~ruchu~~ rozdziału elektryczności:

W konduktorach wszędzie równowaga tylko jeśli $\frac{\partial U}{\partial s}=0$ $U = \text{const}$

na powierzchni w kierunku stycznym $\frac{\partial U}{\partial s}=0$, tylko w normalnym wartość skończona $\frac{\partial U}{\partial n}$

(tam nie może się oddalić). ~~Jeśli także izolatory (powietrze etc.)~~

W izolatorach to nie potrzebuje zachodzić bo tam siła nie potrzebuje być $=0$, tylko może mieć dowolne wartości, z powodu izolacyi jednak jeśli nie były naładowane, to też nigdy nie zostaną naładowane, więc wolno robimy założenie że w nich $\rho=0$

Zatem wszędzie $\nabla^2 U = 0$

a tylko na powierzchni konduktorów:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U'}{\partial n'} = -4\pi\sigma}$$

U będzie tą funkcyą ciągłą jednowartościową która $\nabla^2 U = \ldots$ i która wszędzie z wyjątkiem tej na powierzchni gdzie $-4\pi\sigma$:

Zatem rozkład U całkiem znany jeśli dane σ i dane wartości U na pewnej powierzchni. "forze"

Wtedy $\cancel{U = \int \frac{\sigma\, df}{r} + \int \frac{\frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}\frac{\sigma df}{r}}{r}\, df}$

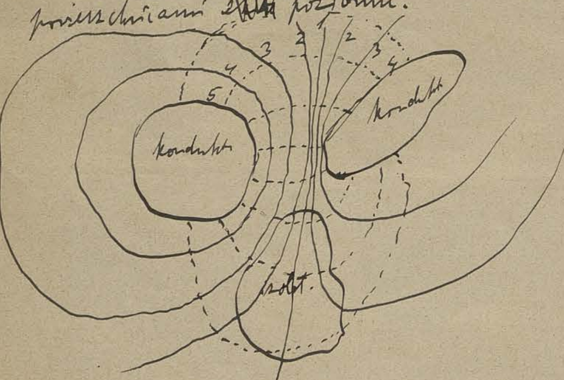
N. p. kula jeśli

Zatem pole elektrost. będzie miało tę nadzwyczajną własność że:

wszędzie ρ=0, tylko na powierzchniach konduktorów może być σ

więc linie siły wszystkie wychodzą z powierzchni konduktorów i kończą się na nich

(albo w ∞). Ponieważ styczna składowa musi być =0, zatem powierzchnie kondukt. = powierzchniami ~~ekw~~ poziomu.



zobaczymy później że takie izolatory mają pewien wpływ o tyle o ile ich stała dielektryczności >1 ale tym razem robimy założenie że tylko powietrze zatem izolatorów nie potrzebujemy uwzględniać.

więc każdy konduktor musi mieć w całej objętości jeden i ten sam potencyał

jeżeli dwa konduktory się dotkną to potencyał ich wyrównywa się.

Na dowolny potencyał można ciało przewodzące podnieść łącząc je z maszyną elektr.

Potencyał ziemi nazywamy 0, ~~bo~~ [więc po za ziemią, [illegible] więc [illegible] pot. w tym punkcie odmienić] ona jest konduktorem (w prawdzie nie dobrym ale wystarczającym)

wszystkie ciała które za pomocą połączeń metalicznych połączymy z ziemią mają $U=0$

Z tego naturalnie nie wynika żeby σ=0 na ziemi, przeciwnie $\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{600}{100}\cdot\frac{1}{300} = 0{\cdot}02$ $\sigma = -\frac{0{\cdot}02}{4\pi} = -0{\cdot}0016$

Ogólne zadanie elektrostatyki

Zazwyczaj znane potencjały w przewodnikach

bo ziemia i wszystko co z nią połączone = 0   a suma przewodników z ziemią od gniazd które

dane siły elektromot. wytwarzają

Zadanie: znaleźć rozkład elektr. σ i siły ponderomot.

Verteilungsproblem   Czy są jeszcze inne?

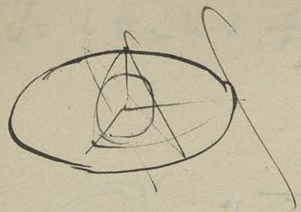
~~Odwrotnie~~

Albo też ciało odosobnione dany ładunek, jak się na nim rozdziel., jaki potencjał φ w nim wytworzy, jakie siły zewnętrz.?

To określone tylko o ile żadnych innych ciał, o ile potencjał w ∞ = $\lim k = \frac{e}{R}$

[Pierwszy sposób stawiania kwestyi racyonalniejszy]

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2+z^2}{b^2+\lambda} = 1$$



~~[illegible]~~

$$2\pi \sin\varphi \, d\varphi \; \frac{c a^2}{A^3}$$

$$\sqrt{\left(\frac{c}{A}\right)^2 (1 - \cos\varphi)^2 + \left(\frac{a}{A}\right)^2 \sin^2\varphi}$$

$$= 2\pi \frac{c a^2}{A^2} \frac{d\cos\varphi}{\sqrt{c^2 - 2c^2\cos\varphi + (c^2 - a^2)\cos^2\varphi + a^2}}$$

$$\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{\lambda}{a^2}\right) + \frac{y^2}{b^2}(1-\lambda) = 1$$

$$V_a = \pi\rho \int^{\infty}_{\lambda = f(x,y,z)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2+z^2}{b^2+s}\right) \frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)}\left(1+\frac{s}{b^2}\right)}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{a^2+s} \frac{ds}{D}$$

$$a^2 = b^2(1+\varepsilon^2)$$

$$s = \lambda u$$

$$= \pi\rho \int_1^{\infty} 1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda u} - \dots$$

$$X = \int_0^{\infty} \frac{x \, ds}{(a^2+s)^{3/2}(b^2+s)} = \int_0 \frac{x \, ds}{(b^2+s+e^2)^{3/2}(b^2+s)}$$

$$= \frac{1}{(b^2+s)^{5/2}} + \frac{e^2}{(b^2+s)^{7/2}}$$

$$Y = \int_0 \frac{y \, ds}{(a^2+s)^{1/2}(b^2+s)^2}$$

$$\int \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\sqrt{1+\frac{s}{a^2}}} = 2a^2 \frac{\sqrt{1+\frac{s}{a^2}}}{1+\frac{s}{b^2}} + \int \frac{\sqrt{1+\frac{s}{a^2}}}{\left(1+\frac{s}{b^2}\right)^2} ds$$

$$\frac{\sqrt{1+\frac{s}{a^2}}}{1+\frac{s}{b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{a^2}}\left(1+\frac{s}{b^2}\right)}$$

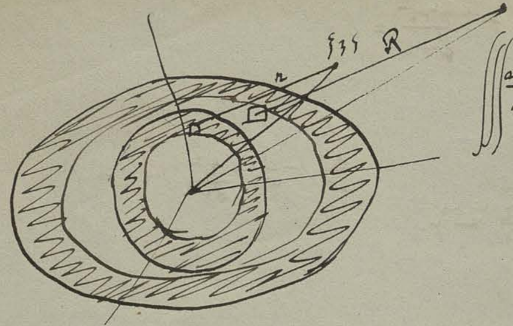
$$\int \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{b^2}\right)^2\sqrt{1+\frac{s}{a^2}}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{s \, ds}{\left(1+\frac{s}{b^2}\right)^2\sqrt{1+\frac{s}{a^2}}}$$

$$1+\frac{s}{a^2} + 1 + \dots - \frac{1}{a^2}$$

$$a = b \qquad \int \frac{x \, ds}{(a^2+s)^{5/2}} = \frac{x^2}{3} \frac{1}{(a^2+s)^{3/2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{2x}{3a^3}$$

$$\int \frac{y}{(b^2+s)^2\sqrt{b^2+s+e^2}} = \frac{y}{(b^2+s)^{5/2}}\sqrt{1+\frac{e^2}{b^2+s}} = \frac{y}{(b^2+s)^{5/2}}\left[1 - \frac{e^2}{2(b^2+s)}\right] \quad = \frac{y}{b^3}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\frac{e^2}{b^2}\right) = \frac{y}{b^3}\frac{2}{3}\left(1 - \frac{3}{10}\right.$$

$$\int \frac{x^2}{(b^2+s)\sqrt{b^2+s+e^2}} = \frac{x^2}{(b^2+s)^{5/2}}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{e^2}{(b^2+s)}\right] \quad = \frac{x}{b^3}\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}\frac{e^2}{b^2}\right) \quad \left(1 - \frac{9}{10}\right)$$



$$\iiint \frac{abc}{A^3}\,\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{\left[(\xi-x)\frac{a}{A}\right]^2+\left[(\eta-y)\frac{b}{A}\right]^2+\left[(\zeta-z)\frac{c}{A}\right]^2}}$$

$$=\iiint abc\,\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{[a(\xi-x)]^2+[b(\eta-y)]^2+[c\quad]^2}}$$

$X = \xi\frac{a}{A}$

$Y =$

$Z =$

$$=\iiint abc\,\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(AX-ax)^2+(BY-by)^2+(\quad)^2}}$$

Pot. sferoidy na punkt na powierzchni

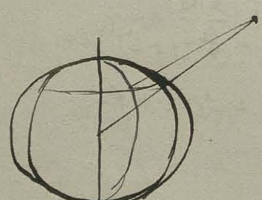
$r =$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$r^2=\frac{1}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}}=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\sin^2\varphi\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)}$$

$$=\frac{a^2}{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}$$

$$=a^2(1+\varepsilon^2\sin^2\varphi)$$



$$\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\varepsilon=0}^{2\pi}\frac{a^2\varepsilon^2\sin^2\varphi\;a\,d\varphi\;a\cos\varphi\,d\varepsilon}{\sqrt{(x-a\cos\varphi\cos\varepsilon)^2+(y-a\sin\varphi)^2+(a\cos\varphi\sin\varepsilon)^2}}=$$

$$a^4\varepsilon^2\iint\frac{\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,d\varepsilon}{\sqrt{x^2-2ax\cos\varphi\cos\varepsilon+a^2\cos^2\varphi+y^2-2ay\sin\varphi+a^2\sin^2\varphi}}$$

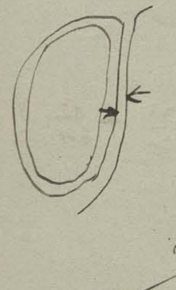
$$=a^4\varepsilon^2\iint\frac{\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,d\varepsilon}{\sqrt{x^2-2ax\cos\varphi\cos\varepsilon+a^2+y^2-2ay\sin\varphi}}$$

nad pow. 6 w kierunku od powierzchni na zewnątrz

$$W = \frac{1}{2}\sum m U = -\frac{1}{8\pi}\Big[\underbrace{\int U \nabla U\, dv}_{\text{nad } 6} + \int U \frac{\partial U}{\partial n}\, dS\Big]$$

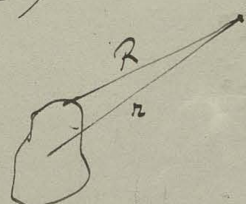
$$= \int U \frac{\partial U}{\partial n}\, dS' + \int^{\infty} U \frac{\partial U}{\partial n}\, dS - \int \Big[\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^2 + (\ )^2 + (\ )^2\Big] dv$$

w kierunku ku powierzchni



$$= \frac{1}{8\pi}\int \Big[\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^2 + - - \Big] dv \qquad = 0 \quad \text{ponieważ} \quad U \neq \frac{M}{r}$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} \neq -\frac{M}{r^2}$$



$$\lim_{R=\infty} U = \lim \int \frac{\rho\, dv}{R + (r-R)} = \lim \frac{1}{R}\int \frac{\rho\, dv}{1 + \frac{r-R}{R}} \qquad dS' = d\omega\, r^2$$

$$= \frac{1}{R}\int \rho\, dv$$

Jeżeli na pow. zamkniętej U albo $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$, a wewnątrz $\rho = 0$ to $\int U \nabla U\, dv = 0$

$$\int U \nabla U\, dv = 0 = +\int U \frac{\partial U}{\partial n}\, dS - \int \Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^2 (- -) \sim v$$

muszą zo jeżeli?

Geometrycznie: obszar jeden istnieje na pow.

w środku nie mogą być linie siły bo 1). nie istnieją zamknięte

2). nie ma początków ani końców

Rückseite I p. 256

$$V_i = \pi\rho\int_0^\infty\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)}}$$

$$V_a = \pi\rho\int_\lambda^\infty \qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

$\lambda>0$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = -2\pi\rho\int_0^\infty\frac{x}{a^2+s}\frac{ds}{D}$$

$$\frac{\partial V_a}{\partial x} = -2\pi\rho\int_\lambda^\infty\frac{x}{a^2+s}\frac{ds}{D} - \pi\rho\,\underbrace{\left[\frac{1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}}{D}\right]_{s=\lambda}}_{=0}\frac{\partial\lambda}{\partial x}$$

$$\frac{2x}{(a^2+\lambda)} = \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{z^2}{}\ \Big\}$$

$$\frac{2y}{b^2+\lambda}= \qquad \frac{2z}{c^2+\lambda}=$$

$V_i = V_a\big|_{\lambda=0}$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial V_i}{\partial x} = \dfrac{\partial V_a}{\partial x}\Big|_{\lambda=0}\end{array}\right\}\ \text{naturam rig[?]}$$

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = -2\pi\rho\int_0^\infty\frac{ds}{(a^2+s)D} \qquad \nabla^2 V = -2\pi\rho\int\frac{ds}{D}\left(\frac{1}{a^2+s}+\frac{1}{b^2+s}+\frac{1}{c^2+s}\right)$$

$$\frac{\partial D}{ds} = +\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{a^2}\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)+\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)+\ldots}{\left[(\ )(\ )(\ )\right]^{1/2}}$$

$$\nabla^2 V_i = -2\pi\rho\int\frac{\frac{\partial D}{ds}}{D^2} = -4\pi\rho\,\frac{1}{D}\Big|_0^\infty = -4\pi\rho \qquad = +\frac{1}{2}D\left(\frac{1}{s+a^2}+\frac{1}{s+b^2}+\frac{1}{s+c^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 V_a}{\partial x^2} = -2\pi\rho\int_\lambda^\infty\frac{ds}{(a^2+s)D}+2\pi\rho\,\frac{x}{(a^2+\lambda)D_\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}$$

$$\nabla^2 V_a = -2\pi\rho\,\underbrace{\int_\lambda^\infty\frac{ds}{D}\left(\frac{1}{a^2+s}+\frac{1}{b^2+s}+\frac{1}{c^2+s}\right)}_{\frac{2}{D_\lambda}}+\frac{2\pi\rho}{D_\lambda}\underbrace{\left[\frac{x}{a^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{y}{b^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{z}{c^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right]}_{=2} = 0$$

$$V_a = \pi\rho \int_s^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2+z^2}{b^2+s}\right) \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\sqrt{1+\frac{s}{a^2}}}$$

$$\frac{\partial V_a}{\partial x} = -2\pi\rho \int_\lambda^\infty \frac{x}{a^2+s}\,\frac{ds}{D}$$ na powierzchni odpowiedź $= -2\pi\rho \int_0^\infty \frac{x\;ds}{a^2+s\,.\,D}$

$$D = \sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)}$$

w razie obrotowej elipsoidy o małym ε spłaszczeniu ~~[illegible]~~: $b = c = \cancel{}\, a(1-\varepsilon)$

$$X = -2\pi\rho x \int_0^\infty \frac{ds\; a^3(1-\varepsilon)^2}{(a^2+s)^{3/2}\left[a^2(1-\varepsilon)^2+s\right]} = -2\pi\rho x a^3 \int \frac{ds}{(a^2+s)^{5/2}\left[1-\frac{2\varepsilon a^2}{a^2+s}\right]} = \dots \left[\int \frac{ds}{(a^2+s)^{5/2}} + 2\varepsilon a^2 \int \frac{ds}{(a^2+s)^{7/2}}\right]$$

$$Y = -2\pi\rho y \int_{s=0}^\infty \frac{ds\; a^3(1-\varepsilon)^2}{(a^2+s)^{1/2}\left[a^2(1-\varepsilon)^2+s\right]^2} = -2\pi\rho y a^3 \int \frac{ds}{(a^2+s)^{5/2}\left[1-\frac{2\varepsilon a^2}{a^2+s}\right]^2} = -\left[\int \frac{ds}{(a^2+s)^{5/2}} + 4\varepsilon a^2 \int \frac{ds}{(a^2+s)^{7/2}}\right]$$

$$\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)^{5/2}} = -\frac{2}{3}\frac{1}{(a^2+s)^{3/2}}\Big|_0^\infty = -\frac{2}{3a^3} \qquad \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)^{7/2}} = -\frac{2}{5a^5} \qquad \int \frac{ds}{(a^2+s)^{3/2}} = -\frac{2}{a}$$

$$X = +2\pi\rho x \left[\frac{2}{3} + \frac{4\varepsilon}{5}\right] = \frac{4\pi\rho}{3} x \left[1 + \frac{6\varepsilon}{5}\right]$$

$$Y = 2\pi\rho y \left[\frac{2}{3} + \frac{8\varepsilon}{5}\right] = \frac{4\pi\rho}{3} y \left[1 + \frac{12\varepsilon}{5}\right]$$

$$V = \pi\rho \left\{ \int \frac{ds.\,a^3\cancel{(1-\varepsilon)^2}}{(a^2+s)^{3/2}} \left(1+\frac{\varepsilon}{a^2+s}\right) - \int \frac{x^2 a^3 \cancel{(1-\varepsilon)^2}}{(a^2+s)^{5/2}}\left(1+\frac{\varepsilon}{a^2+s}\right) - \int \frac{r^2 a^3 \cancel{(1-\varepsilon)}}{(a^2+s)^{5/2}}\left(1+\frac{2\varepsilon}{a^2+s}\right)\right\}$$

$$= \pi\rho a^2 \left\{\left(2 + \frac{2\varepsilon}{3}\right) - \frac{x^2}{a^2}\left(\frac{2}{3} + \frac{2\varepsilon}{5}\right) - \frac{r^2}{a^2}\left(\frac{2}{3} + \frac{4\varepsilon}{5}\right)\right\}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{r^2}{a^2(1-\varepsilon)^2} = 1$$

$x^2 = \dots \rightarrow$

$$x^2 + r^2(1+2\varepsilon) = a^2$$

$g = 9{\cdot}831\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{191}\right)$

$\Omega =$

$$V = -\pi\rho\, abc \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s} - 1 \right) \frac{ds}{D}$$

$$= -\pi\rho\,(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - \chi)$$

$$\alpha = abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s) D} \qquad \beta = \qquad \gamma = \qquad \chi = abc \int_0^\infty \frac{ds}{D}$$

bo siły w kierunku stycznym do powierzchni wody muszą być zero!

$$\Omega = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) = \text{const}$$

$$x^2\left[\alpha - \frac{\omega^2}{2\pi\rho}\right] + y^2\left[\beta - \frac{\omega^2}{2\pi\rho}\right] + z^2\gamma = \text{const}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\left(\alpha - \frac{\omega^2}{2\pi\rho}\right) a^2 = \left(\beta - \frac{\omega^2}{2\pi\rho}\right) b^2 = \gamma c^2$$

w razie symetrji obrotowej $\left(\alpha - \frac{\omega^2}{2\pi\rho}\right) a^2 = \gamma c^2$

$$\cancel{\alpha = a^2 c \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)^2 \sqrt{c^2+s}} =}$$

$$\cancel{\gamma = a^2 c \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)(c^2+s)^{3/2}}}$$

potem popraw[ić] strony

I). jeśli $a > c$

$$\alpha a^2 - \gamma c^2 = \frac{\omega^2}{2\pi\rho} a^2$$

$$\int_0^\infty \frac{ds}{D}\left(\frac{a^2}{a^2+s} - \frac{c^2}{c^2+s}\right) = \int_0^\infty \underbrace{\frac{ds}{D}\left(\frac{1}{1+\frac{s}{a^2}} - \frac{1}{1+\frac{s}{c^2}}\right)}_{\text{dodatnie}}$$

II $c < a$ niemożliwe $c = a(1-\varepsilon)$

$$\frac{2}{3}\left[\underbrace{a^2\left(1+\frac{6\varepsilon}{5}\right) - c^2\left(1+\frac{12\varepsilon}{5}\right)}\right] = \frac{\omega^2 a^2}{2\pi\rho}$$

$$= a^2\left[\underbrace{\left(1+\frac{6\varepsilon}{5}\right) - \left(1+\frac{2\varepsilon}{5}\right)}_{\frac{4}{5}a^2\varepsilon}\right] \qquad \varepsilon = \frac{15}{16}\frac{\omega^2}{\pi\rho}$$

stimmt

$$g_P = \frac{4\pi\rho}{3} c \left[1 + \frac{6\varepsilon}{5}\right] = \frac{4\pi\rho}{3} a \left[1 - \frac{11\varepsilon}{5}\right]$$

$$g_A = \frac{4\pi\rho}{3} a \left[1 + \frac{12\varepsilon}{5}\right] = \frac{4\pi\rho}{3} a \left[1 - \frac{12\varepsilon}{5}\right]$$

$$g_P - g_A = \frac{4\pi\rho}{3} a \frac{\varepsilon}{5} = \frac{4\pi\rho}{3} a \frac{\omega^2 a}{4g} = \frac{a\omega^2}{4}$$

$$g_P - g_{A'} = \frac{a\omega^2}{4} + a\omega^2 = \frac{5}{4} a\omega^2 = g\varepsilon$$

$$\left.\frac{g_P - g_{A'}}{g} = \frac{5}{2}\omega^2 a - \varepsilon\right\}$$ Clairaut [illegible]

$$\varepsilon = \frac{15}{16}\frac{\omega^2}{\pi\rho} = \frac{5}{4}\frac{\omega^2 a}{g}$$

$$g = \frac{4}{3}\pi\rho a$$

$$\frac{\omega^2 a}{g} = \frac{1}{289}$$

$\varepsilon = \frac{1}{231}$ gdyby ziemia jednorodna

w rzeczywistości $\varepsilon \neq \frac{1}{297}$

Mac Laurin

$\frac{\omega^2}{2\pi\rho}$	e
0	0
0·1007	0·6
0·1868	0·8127
0·2247	0·93
0·1551	0·99
0	1·0

Dowolny elektr. ?? są przyczyny twórcze i utrzymujące różnicę potencjałów między pewnemi punktami

24 Jeżeli wtedy n.p. mamy stos galwaniczny siły elektromotorycznej E 19

to znaczy że jeżeli jeden biegun do ziemi, to drugi (i wszystko co z nim połączone) na $U=E$)

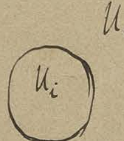
Jeżeli ciało (kond) odosobnione w przestrzeni na pot. U, to niech na nim znajduje się masa $\int \sigma\, df = M$

wtedy $\frac{M}{U}$ nazywamy pojemnością ciała (Capacität), zależy ono tylko od kształtu jego.

Gdyby ~~nie~~ było w bliskości innych ciał, toby także od nich zależała (jak później zobaczymy).

Siła w niej musi być $=0$ zatem $U = \mathrm{const} = \frac{4\pi\sigma}{a}$

N.p. Kula.



$$U_e = \frac{4\pi\sigma a^2}{r} \qquad \left.\frac{\partial U_e}{\partial r} - \frac{\partial U_i}{\partial r}\right|_{r=a} = -4\pi\sigma$$

$$U_i = +4\pi\sigma a = \text{Potencyał kuli} = V$$

1 Volt = $\frac{1}{300}$ st.

1 Farad = 9.10^{11} st.

1 Coul. = 3.10^9

$$\cancel{M} = 4\pi a^2\sigma$$

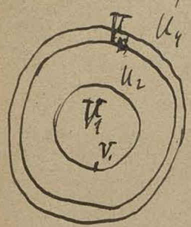
$$= aV$$

Czy kula jest pełna, czy próżna jest całkiem obojętnem

$\frac{M}{V} = a$ pojemność kuli = promień

N.p. w mierze st. kw. praktycznej jedność = 1 Farad = kula o promieniu $a=$

Kula wśród powłoki kulistej



Siła musi być $=0$ w środku i zewnątrz

~~więc jeżeli~~ V z powodu symetryi tylko zależne od r zatem

$$V_1 = 4\pi a_1 \sigma_1 + 4\pi a_2 \sigma_2 + 4\pi a_3 \sigma_3 = \mathrm{const} = V_1$$

$$\left[U_2 = \frac{4\pi a_1^2 \sigma_1}{r} + 4\pi a_2 \sigma_2 + 4\pi a_3 \sigma_3\right]$$

$$U_3 = \frac{4\pi a_1^2\sigma_1 + 4\pi a_2^2 \sigma_2}{r} + 4\pi a_3 \sigma_3 = \mathrm{const} = V_2$$

$$\left[U_4 = \frac{4\pi}{r}(a_1^2\sigma_1 + a_2^2\sigma_2 + a_3^2\sigma_3)\right]$$

Tylko możliwe jeżeli $a_1^2\sigma_1 = -a_2^2\sigma_2$, wtedy $U_3 = V_2 = 4\pi a_3\sigma_3$

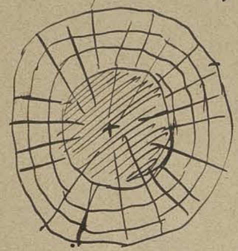
więc $M_1 = -M_2$ równe a przeciwne ind. ~~$\frac{a_1^2\sigma_1}{a_2^2}$~~

$$U_1 = V_1 = V_2 + 4\pi a_1\sigma_1\left[\frac{a_2 - a_1}{a_2}\right]$$

Jeszcze ~~...~~ Ad oznaczoności rozwiązania

Geometryczne przedstawienie

Jeśli wiemy że to są jedyne masy w całej przestrzeni i że nie mamy oprócz nich to U wyznaczone jest jednoznacznie

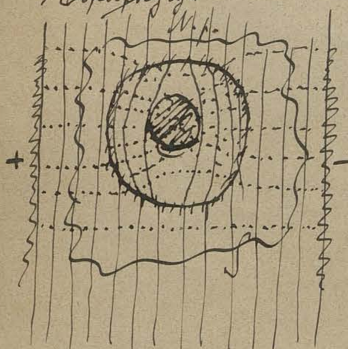


Jeśli jednak nie wiemy ~~...~~ nic oprócz stanu ρ i σ w przestrzeni S, to mogą się zewnątrz znajdować jeszcze inne masy etc.

~~Jak teraz oś φ = ... + x ?~~ więc przez co będzie teraz U oznaczone?

Przez wartości na powierzchni zamkniętej

Superpozycja

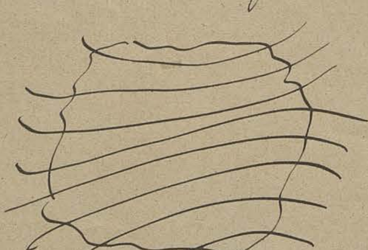


Przez superpozycję tych dwóch pól powstałoby —

ale jeśli ~~nie~~ wiemy co ~~...~~ zewnątrz powierzchni S się znajduje wtedy jedyny sposób określenia pola przez to że podajemy jeszcze n.p. wartości na kuli A, wtedy wszystko oznaczone.

Gdyby n.p. specyalny przypadek: wszędzie w S wewnątrz będzie $\rho = \sigma = 0$

więc $\nabla^2 U = 0$ to zawsze jeszcze może tam być pole [pochodzące z zewnętrznych przyczyn



jak długo nie postawimy ~~...~~ warunek żeby U było stałe na powierzchni pewnej.

N. p. jeżeli $V_2 = 0$ ~~/~~ $\sigma_3 = 0$ Butelka Leydeńska:

$$V_1 = 4\pi a_1 \sigma_1 \frac{a_2 - a_1}{a_2}$$

$$\mathcal{E}_1 = 4\pi a_1^2 \sigma_1 \qquad \frac{\mathcal{E}_1}{V_1} = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_2 - a_1}$$

więc w stosunku $\frac{a_2}{\delta}$ powiększona pojemność

Jeżeli powierzchnia zewnętrzna izolowana:

$$\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = 0 \qquad a_2^2 \sigma_2 + a_3^2 \sigma_3 = 0$$

Teraz opakujemy do środka $\mathcal{E}_1$, jakie teraz będzie V_1 V_2?

$$\mathcal{E}_1 = -\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3$$

więc $a_1^2 \sigma_1 = -a_2^2 \sigma_2 = a_3^2 \sigma_3$

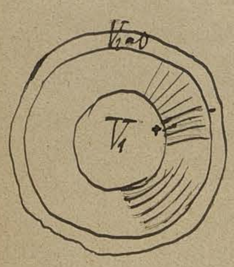
$$V_1 = 4\pi a_1 \sigma_1 \left[1 - \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1}{a_3}\right]$$

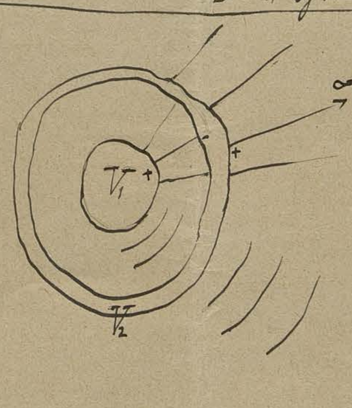
$$V_2 = 4\pi a_1 \sigma_1 \left(\frac{a_1}{a_3}\right)$$

pojemność kuli wewnętrznej:

$$\frac{\mathcal{E}_1}{V_1} = \frac{a_1}{1 - \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1}{a_3}} = a_1 \cdot \frac{a_2}{\delta + \frac{a_2 a_1}{a_3}}$$

zatem tylko bardzo mało powiększona





również wiele linii wychodzi z + jak
się kończy w − i znów wychodzi z + do ∞

Prościejszy przykład: nieskończ. płaszczyzny

jeśli $a_2 - a_1 = \delta$

$\lim a_1 = \infty$

naturalnie Φ stała być się ∞ ale σ:

I). $V_1 = 4\pi\sigma_1 \lim \dfrac{\delta}{1+\frac{\delta}{a_1}}$

$= 4\pi\sigma_1\delta$

$$\sigma_1 = \frac{V}{4\pi\delta}$$

$V_2 = 0$ ||

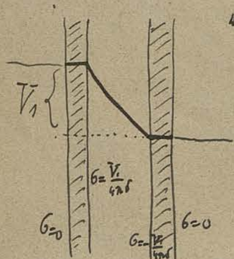
II). $V_1 = 4\pi a_1 \sigma_1 \lim \left[1 - \dfrac{a_1}{a_1+\delta} + \dfrac{a_1}{a_1+\delta+d}\right] = 4\pi a_1\sigma_1$

$\sigma_1 = \dfrac{V_1}{4\pi a} = 0$ etc.

Wypływa to bezpośrednio z natury zadania przy więc ~~po~~ uwzględnieniu rozkładu ... linii sił

wiemy różnicę V

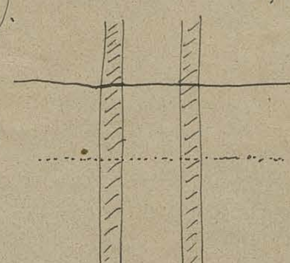
(I).

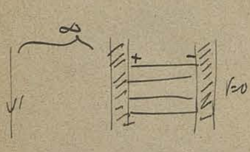


wiemy że $\sigma_2 = -\sigma_3$

(II).

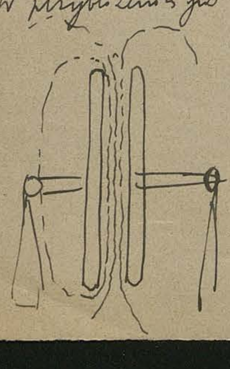
więc nachylenie krzywej pot. równe na obu stronach ~~...~~

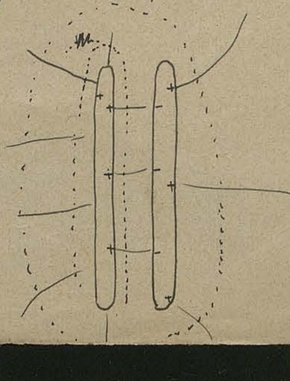




W przybliżeniu jest to urzeczywistnione w tablicy Franklina; kondensatory Kohlrauscha

(I)



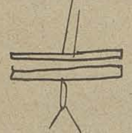


Jaki cel kondensatora?

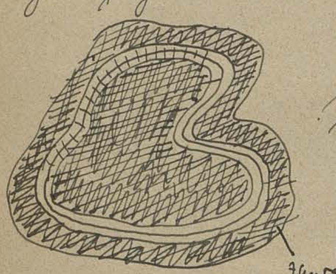
Naładuję się Potencyałem V_1 do $Q_1 = C_1 V_1$

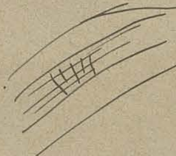
potem oddalając drugą ogniwo przez co C zmniejszy w c zatem potem potencyał $V_1' = \frac{Q_1}{c_1} = \frac{C_1}{c_1} V_1$

N.p. różnica napięć elektron. w różnych metalach (Volta)



Ogólniejszy kształt:





$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial n}$$

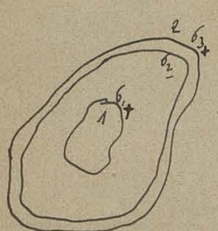
$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{(U_2 - U_1)}{\delta}$$

$$Q_1 = \frac{F V}{4\pi\delta}$$

1) ~~odpowiednio do średniej~~ = zaś sama

2) zaś istotna sama

Są to specyalne zastosowania dawniejszych twierdzeń:



2 = pow. poziomu

Jeśli 2 na pot. V_2 to ~~...~~ środek zostanie $V=0$

Jeśli ~~...~~ 2 izolowane, a ~~...~~ 1 na pot. V_1 prowadząc powierzchnię Gaussa raz w wewnętrznej części, potem w miejscu 2

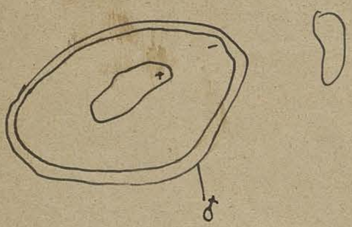
to $\iint_{2\,int} \frac{\partial U}{\partial n}\, df = \Sigma m_{int} = Q_1 = -Q_2 = Q_3$

więc równie wiele jak do środka odkładamy, wystąpi na zewnątrz; jaki pot. V_2 to zgoła nie może anować. To ~~...~~ σ_3 ułoży się w jakiś sposób, zależny tylko od kształtu powierzchni zewnętrznej, i od położenia ciał zewnętrznych a nie od wewnętrznych, a σ_1 i σ_2 ułożą się niezależnie od tego co zewnątrz.

~~Jeśli teraz $V_2 = 0$ to $Q_3 = 0$~~ Ten rozkład el. nie zmieni się jeśli stawiamy zamiast

V_1 V_2 : $V_1 - V_2$ 0 a wtedy Q_2 już tak się ułoży że skutek na zewnątrz = 0 Ar

Gdyby teraz n.p. jeszcze zewnętrzne masy, a $V_2=0$:

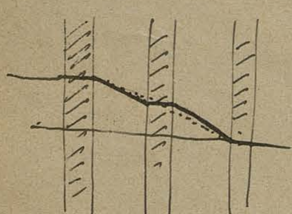


to one na ciało w środku żadnego nie mają wpływu bo mamy w środku system elektr. otoczony powierzchnią poziomu stałą, przez co rozkład już oznaczony, więc niezależny od zewnętrznych wpływów.

Więc ochrona, zasłona utworzona przez powierzchnię zamkniętą, połączoną z ziemią (także siatkę gęstą) ~~Jeżeli z~~

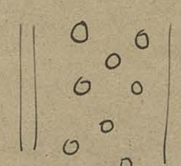
Jeżeli z drugiej strony środka ~~nie ma elektr.~~ ciała połączone z powłoką to wszystko na równym potencyale więc w środku nie będzie elektr. (Faraday'a klatka)

<u>Prawo Newtona</u> jedyne przy którym to zachodzi

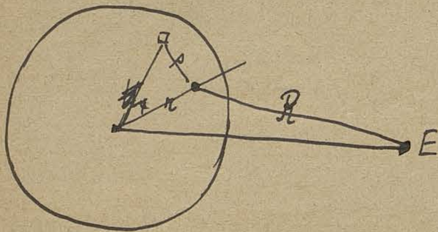


Jeśli się wstawi płytę izolowaną między okładki kondensatora to powiększy się spad potencyału więc i także pojemność.

Dielektrica (Clausius-Mossotti)



U_e



$$V_i = U_i + \frac{E}{R}$$

$$U_i = \cancel{\iint 6 a^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi} \iint \frac{df \cdot 6}{s}$$

$$= \iint \frac{6\, a^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi}} \quad \text{przy czem } 6 = fn(\varphi, \psi)!$$

$$= \iint 6 a \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi \left[1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{a}\right)\cos\varphi\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= a\left[\underbrace{\iint 6 \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}_{\varphi_0} + \frac{r}{a}\underbrace{\iint}_{\varphi_1} + \cdots\cdots\right]$$

$$U_e = \iint \frac{df\, 6}{s} = \iint \frac{6 a^2}{r} \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\varphi\right]^{\frac{1}{2}} \cdots =$$

$$= \frac{a^2}{r}\left[\iint 6 \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi + \frac{a}{r}\iint \cdots\right] = \frac{a^2}{r}\left[\varphi_0 + \frac{a}{r}\varphi_1 + \cdots\right]$$

$$\frac{E}{R} = \frac{E}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos\theta}} = \frac{E}{\rho}\left[1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 - \cdots\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{E}{\rho}\left[1 + \frac{r}{\rho}P_1 + \frac{r^2}{\rho^2}P_2 + \cdots\right]$$

$$a\left[\varphi_0 + \frac{r}{a}\varphi_1 + \frac{r^2}{a^2}\varphi_2 + \cdots\right] + \cancel{\frac{a^2}{r}\left[\varphi_0 + \frac{a}{r}\varphi_1 + \cdots\right]} + \frac{E}{\rho}\left[1 + \frac{r}{\rho}P_1 + \cdots\right] =$$

const $= V$

$$a\varphi_0 + \frac{E}{\rho} = V$$

$$\varphi_1 + \frac{E P_1}{\rho^2} = 0$$

$$\frac{\varphi_2}{a} + \frac{E P_2}{\rho^3} = 0 \quad \text{etc.}$$

$$U_i = a \sum \ldots = V - \frac{E}{R}$$

$$U_e = \frac{a^2}{r}\varphi_0 + \frac{a^3}{r^2}\varphi_1 + \cdots = \frac{a}{r}V - \left[\frac{a}{r}\frac{E}{\rho} + \frac{a^3}{r^2}\frac{E P_1}{\rho^2} + \frac{a^5}{r^3}\frac{E P_2}{\rho^3} + \cdots\right]$$

$$U_e = \frac{E}{R} + \frac{aV}{r} - \frac{Ea}{r\rho}\left[1+\frac{a^2}{r\rho}P_1+\frac{a^4}{r^2\rho^2}P_2+\dots\right] = \frac{aV}{r} - \frac{Ea}{r\rho}\left[\sqrt{1-2\frac{a^2}{r\rho}\cos\theta+\frac{a^4}{r^2\rho^2}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{aV}{r} - Ea\left[\sqrt{r^2\rho^2+a^4-2a^2r\rho\cos\theta}\right]^{-\frac{1}{2}} + E\left[r^2+\rho^2-2r\rho\cos\theta\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial r} = -\frac{aV}{r^2} + \frac{Ea(r\rho^2-a^2\rho\cos\theta)}{\sqrt{[r^2\rho^2+a^4-2a^2r\rho\cos\theta]}^3}\Bigg|_{r=a} = -\frac{V}{a} + \frac{Ea^2\rho(\rho-a\cos\theta)}{\sqrt{(a^2\rho^2+a^4-2a^3\rho\cos\theta)}^3}$$

$$-\frac{E(a+\rho\cos\theta)}{\sqrt{(a^2+\rho^2+2a\rho\cos\theta)}^3}$$

$$= -\frac{V}{a} + \frac{E\rho}{a}\left(\frac{\rho+a\cos\theta}{\sqrt{(\quad)}^3} - \frac{E(a+\rho\cos\theta)}{\sqrt{(\quad)}^3}\right) = -\frac{V}{a} + \frac{E\left(\frac{\rho^2}{a}-a\right)}{\sqrt{(\quad)}^3}$$

$$= \frac{1}{a}\left[-V + \frac{E(\rho^2-a^2)}{R_a^3}\right]$$

Więc jeśli $V=0$:

$$\sigma = -\frac{E(\rho^2-a^2)}{4\pi a}\,\frac{1}{R_a^3}$$

całkowita masa ?
$$2\pi a^2\int \sigma\sin\theta\,d\theta = -\frac{a}{2}E(\rho^2-a^2)\int\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{(\rho^2+a^2-2a\rho\cos\theta)}^3} = -\frac{aE(\rho^2-a^2)}{2a\rho}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+a^2-2a\rho\cos\theta}}\right]_0^{\pi}$$

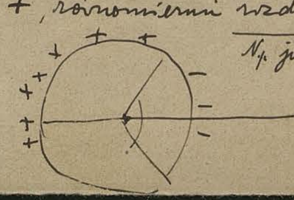
$$= +\frac{E(\rho^2-a^2)}{2\rho}\left[\frac{1}{a+\rho}-\frac{1}{(\rho-a)}\right] =$$

$$U_e = \frac{aV}{r} - \frac{Ea}{\rho}\frac{1}{\sqrt{r^2+\left(\frac{a^2}{\rho}\right)^2-2\frac{a^2r}{\rho}\cos\theta}}$$

$$= \frac{E}{2\rho}\left(\rho-a-(a+\rho)\right) = -\frac{Ea}{\rho}$$

Jeśli zatem kula była izolowaną to równie wiele +, równomiernie rozdzielonej (wtedy jest)

zatem wtedy $\sigma = \frac{E}{4\pi a}\left[\frac{1}{\rho} - \frac{(\rho^2-a^2)}{R_a^3}\right]$



Np. jeśli $\rho=2a$ to $\sigma=0$ dla $\theta=65°$

23

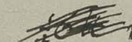
Redukcja cięższej z poziomu

na poziom ...

$$\cancel{V_i = D\rho \int_0^\infty \frac{1}{r^2}}$$

$s^2 = 0$ Przestrzeń ... ...

$$\cancel{\frac{x^2}{a^2+1} = \frac{x^2}{a^2+\varepsilon a^2+1}} \quad \frac{x^2}{(a^2+1)^2} \varepsilon a^2$$

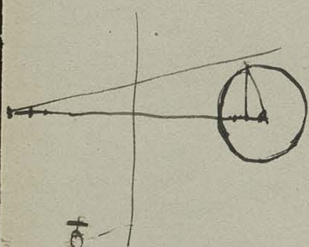


$$W = \frac{1}{2}\Sigma m\, h$$

$$U = \frac{\varphi}{a} -$$

$$W = \frac{\varepsilon a^3}{2\rho^4}$$

εE



$$\cancel{\int_{r=0}^{a} \frac{c}{\sqrt{a^2-r^2}} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+x^2}}}$$

Dwie kule morzyone!

$$W = \frac{1}{2}\int \cancel{\frac{2\pi y^2\,dx}{\dots}} \quad \frac{1}{2}\int^{M} \frac{2\pi\rho^2\,dr \sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{}}$$

$$\frac{1}{2}\int_{x=-a}^{+a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{2\pi y\,dy\,dx}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}} = \cancel{2\pi} \sqrt{(a+x)^2+y^2}\Big|_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} = \sqrt{2a^2+2ax} - (a+x)$$

$$= \sqrt{2a}\left[\sqrt{a+x} - (a+x)\right]$$

$$\sqrt{2a} \int \frac{2}{3}\sqrt{(a+x)}^3 - ax - \frac{x^2}{2}\Big|_0^a + \frac{2}{3}\sqrt{} -$$

$$\sqrt{2a}\ \frac{2}{3}\left(2\sqrt{8a^3} - \cancel{\sqrt{a^3}}\right) - 2a^2 \cancel{\dots} = \frac{8}{3}a^2 - \cancel{\frac{a^2}{4}} = \cancel{\dots}$$

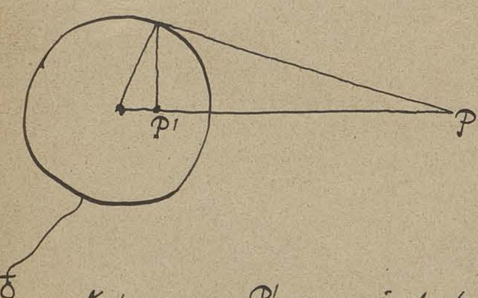
$$\frac{5}{3}a^2$$

+

$$u_e = \frac{E}{[r^2+\rho^2-2\rho r\cos\theta]^{\frac{1}{2}}} - \underbrace{\frac{Ea}{[r^2\rho^2+a^4-2a^2 r\rho\cos\theta]^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= \frac{Ea}{\rho}\,\frac{1}{\sqrt{r^2+\left(\frac{a^2}{\rho}\right)^2-2\frac{a^2}{\rho}r\cos\theta}}$$

to znaczy potencjał masy zawartej $-\frac{Ea}{\rho}$ w punkcie oddalonym o $\frac{a^2}{\rho}$



zatem potencjał zewnętrzny będzie taki sam jak gdyby tylko istniały te dwa punkty E w P i $-\frac{Ea}{\rho}$ w P'; kulę można zastąpić punktem naładowanym P', więc jest to „obraz" punktu P.

$P_0 = 1$

$P_1 = \cos\theta$

$P_2 = \frac{3}{2}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)$

$P_4 = \frac{5}{2}\left(\cos^3\theta - \frac{3}{5}\cos\theta\right)$

$P_5 =$ ——

graficzne przedstawienie wszelkich potencjałów

$$\frac{E}{r_1} - \frac{Ea}{\rho r_2} = \text{const}$$

$\frac{1}{2}$

$E r_2$

$$P_n(x) = \frac{1.3.5.\ldots(2n-1)}{n!}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - + \ldots\right]$$

$$(1+x^2-2x\cos\theta)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x\cos\theta \qquad \frac{-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}}{2}\cdot\frac{-\frac{5}{2}}{3}$$

$$+\frac{3}{8}(x^4 - 4x^3\cos\theta + 4x^2\cos^2\theta)$$

$$8x^3\cos^3\theta)$$

$$-\frac{5}{16}(\ldots\ldots$$

$$= 1 + x\cos\theta + x^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) + x^3\left(-\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\right)$$

Gdyby kula wewnątrz pusta, ponieważ punkt E nie wywierałby żadnego wpływu na wszystkie.

Siła między E a kulą

$$F = \frac{E^2}{(2x)^2}$$

$$F = \frac{Ea}{p}\left[\frac{1}{\left(p-\frac{a^2}{p}\right)^2} - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{Ea}{p}\left(\frac{p^2}{(p^2-a^2)^2} - \frac{1}{p^2}\right)$$

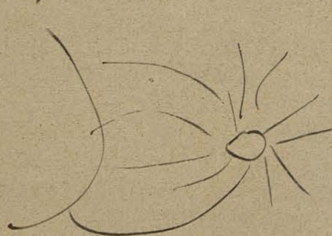
$$= \frac{Ea}{p}\,\frac{2p^2a^2 - a^4}{p^2(p^2-a^2)^2} \neq \text{dla małych: } \frac{2E\,p^2a^3}{p^7} = \frac{2Ea^3}{p^5}$$

$$W = \frac{1}{2}\Sigma eV = \frac{1}{2}\frac{Ea}{p}\left(\frac{1}{p-\frac{a^2}{p}} - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{2}\frac{Ea}{p}\left(\frac{p}{p^2-a^2} - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{2}\frac{Ea}{p}\,\frac{a^2}{p(p^2-a^2)} = \frac{1}{2}\frac{Ea^3}{p^2(p^2-a^2)}$$

$$\neq \frac{Ea^3}{2p^4}$$

$$-\frac{\partial W}{\partial p} = \frac{2Ea^3}{p^5} \quad \text{stimmt}$$

Ogólnie influencya



odwrócenie potencjałów

funkcya Greena!

$\bar{F}_{pp}$

[illegible]

W razie kuli zatem funkcya Greena

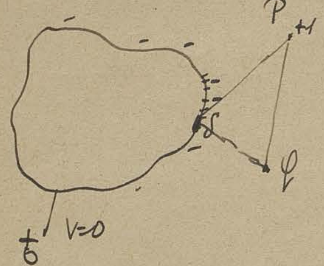
gdzie r' = odległość od punktu E

$$F_{pq} = \frac{a}{p\,r'}$$

racyonalniejszy porządek: kula, krążek, elipsoida

indukcya kuli, kondensatory

Więc U_e jest przykładem t. z. funkcyi Greena



= potencyał el. utworzonej pod wpływem indukcyjnego punktu P

$$U_i = 0 = \frac{1}{r_{ps}} + \underbrace{\int \frac{\sigma\, df}{\rho} \cdots}_{F(ps)}$$ na powierzchni S

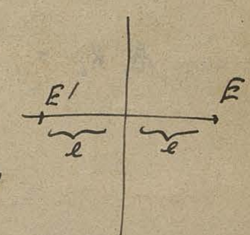
$$F_{p\varrho} = \int \frac{\sigma_{ps}}{r_{\varrho s}}\, ds$$

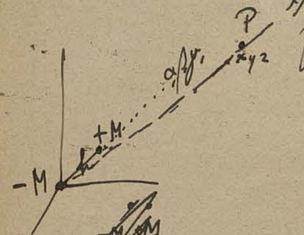
Również zupełnie analogicznie jest wyjęty obrachowanie indukcyi pod wpływem zewnętrznego punktu także odwrotnie indukcyę punktu wewnętrznego na otaczającą powierzchnię kulistą; to później w inny sposób

Jeśli promień kuli: $\lim a = \infty$:

$$p = a + l \qquad \lim \frac{-Ea}{p} = -E$$

$$\lim \left(a - \frac{a^2}{p}\right) = \lim \frac{a^2 + al - a^2}{a + l} = l$$





$$U = f(x - h\cos\alpha_1,\ y - h\cos\beta_1,\ z - h\cos\gamma_1) - f(x, y, z)$$

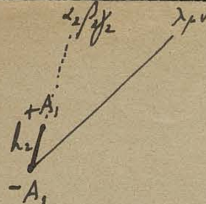
$$= -h\left(\cos\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma_1 \frac{\partial f}{\partial z}\right) = -h\frac{\partial f}{\partial h}$$

$$f = \frac{1}{r} \qquad \text{jeśli } \lim h = A_1$$

punkt podwójny

$$U = -A_1\left[\cos\alpha \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} + \cdots\right] = +\frac{A_1}{r^2}(\cos\alpha_1\cos\lambda + \cos\beta_1\cos\mu + \cos\gamma_1\cos\nu)$$

$$= A_1 \frac{\cos\varepsilon_1}{r^2}$$



$$U_2 = A_1\left[f_1\left(x-\frac{h_2}{2}\cos\alpha_2,\dots\right)-f_1(x\dots)\right]$$

$$= A_1\frac{h_2}{2}\Big[\underbrace{\cos\alpha_2\frac{\partial f_1}{\partial x}+\cos\beta_2\frac{\partial f_1}{\partial y}\dots}_{\frac{\partial f_1}{\partial h_2}}\Big] = \frac{A_1 h_2}{2}\frac{\partial f}{\partial h_2} \quad \frac{A\,h_1h_2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial h_1\,\partial h_2}\dots$$

$$= \frac{A_1 h_2}{2}\left[\cos\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos\varepsilon_1}{r^2}\right)+\cos\beta_2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos\varepsilon_1}{r^2}\right)+\dots\right]=$$

$$= \frac{A_1 h_2}{2}\left[\cos\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos\alpha_1\cos\lambda+\cos\beta_1\cos\mu+}{r^2}\right)+\dots\right.$$

$$= \frac{A_1 h_2}{2}\left[\cos\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1}{r^3}\right)+\dots\right.$$

$$= -\frac{A_1 h_2}{2}\left[\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2}{r^3}-\frac{3}{r^3}\,\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{r}\;\frac{x}{r}\cos\alpha_1+\frac{y}{r}\cos\beta_1+\frac{z}{r}\cos\gamma_1\right]$$

$$= -\frac{A_1 h_2}{2r^3}\left(\cos\vartheta_{12}-3\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_2\right)$$

$\lim A_1 h_2 = \frac{A_2}{h_1}$ $= \lim A\,h_1 h_2)$ $\qquad U_2 = \frac{1}{2}A_2\frac{3\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_2-\cos\vartheta_{12}}{r^3}$

jeśli $\left(x-\frac{h}{3}\cos\alpha_3\right)\dots$ etc. jeśli $\lim A\,h_1h_2\dots h_n=1$

Ogólnie: $U_n = (-1)^n\dfrac{1}{1.2.3.\,n!}\dfrac{\partial}{\partial h_1}\dfrac{\partial}{\partial h_2}\dots\dfrac{\partial}{\partial h_n}\left(\dfrac{1}{r}\right)$ $\quad$ • ~~jeśli~~ $A\,h_2=1$ $\quad \lim A_2 h_3 =$ ~~1~~ etc.

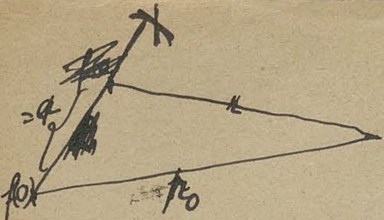
$$=\frac{Y_n}{r^{n+1}} \qquad Y_n = \text{funkcya harmoniczna rzędu } n$$

U_n = funkcya jednorodna rzędu $-(n+1)$

~~Gdy~~ Jeśli wszystkie osi równoległe w kierunku x ~~jeśli~~ $\quad \alpha_1=\alpha_2=\dots 0 \quad \beta_1=\dots=\frac{\pi}{2}$

$$Y_n = r^{n+1}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial h_1\,\partial h_2\dots} = r^{n+1}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^n} = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^n}$$

$r = \sqrt{}$



$$\frac{1}{\sqrt{a^2+\rho^2-2a\rho\cos\theta}} = \frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}\left[1+\frac{a^2}{\rho^2}-2\frac{a}{\rho}\cos\theta\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\rho} f_c.\left(\frac{a}{\rho}\right)$$

$$= \frac{1}{\rho} f_c.(x)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \Delta x\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial x^2}+\dots$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[1+\frac{a}{\rho}P_1+\frac{a^2}{\rho^2}P_2+\dots\right]$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[f(0)+2f'(0)+\frac{2^2}{2}f''(0)+\dots\right]$$

$$= \frac{1}{\rho}\quad 1+\frac{a}{\rho}$$

$$\frac{1}{r} = f(x_0-a)$$

$$\frac{1}{r_0} = f(x_0)$$

$$= f(x_0-a)$$

$$= \frac{Y_n}{r^{n+1}}a^n$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2-2ar_0\cos\theta+a^2}} = \frac{1}{r_0} + a\left(\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x}\right)_0 + \frac{a^2}{2!}\left(\frac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial x^2}\right)_0 + \dots \overbrace{\frac{a^n}{n!}\left(\frac{\partial^n(\frac{1}{r})}{\partial x^n}\right)_0}$$

$$= \frac{1}{r_0}\left[1+\frac{a}{r_0}P_1+\frac{a^2}{r_0^2}P_2+\dots\right]$$

zatem w tym przypadku $P_n = Y_n$ więc nasze dawniejsze P = szczególny rodzaj ogólnych Y (strefowe, zonal harmonics)

tamte Y służą do ogólniejszego rodzaju rozwinięcia:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+\rho^2-2a\rho\left[\cos\theta\cos\theta_1+\sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi-\varphi_1)\right]}}$$

~~Tak samo~~ Te wszystkie U czynią zadość równaniu $\nabla^2 U = 0$

Ale także inne wzorami: $Y_n r^n = U_n r^{2n+1}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U_n r^{2n+1}\right) = r^{2n+1}\frac{\partial U_n}{\partial x} + (2n+1)U_n r^{2n-1}x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\quad\right) = r^{2n+1}\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} + 2(2n+1)\frac{\partial U_n}{\partial x}r^{2n-1}x + (2n+1)U_n\left[r^{2n-1}+(2n-1)r^{2n-3}x^2\right]$$

$$\nabla^2(U_n') = r^{2n+1} \nabla^2 U_n + 2(2n+1) r^{2n-1} \underbrace{\left(x\frac{\partial U_n}{\partial x} + y\frac{\partial U_n}{\partial y} + z\frac{\partial U_n}{\partial z}\right)}_{-U_n(n+1)} + (2n+1) U_n \, 2(n+1) r^{2n-1}$$

$$= r^{2n+1} \nabla^2 U_n = 0$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(V_n r^{-(n+1)}\right) = -(n+1) r^{-n-1} \frac{\partial V_n}{\partial x}}$$

zatem to będzie tak samo dostać jak punkt rotacyjny $\frac{-(n+1)}{r^{n+2}} \ldots V_n$

$$Pot_e = a^n V_n r^{-(n+1)} \qquad Pot_i = V_n r^n \cdot a^{-(n+1)}$$

$$\sigma = \frac{1}{4\pi a^2}(2n+1) V_n$$

To także jedyne możliwe rozwiązanie

Tak samo jeśli suma takich funkcji

$$Pot_e = \frac{a}{r}\left[\varphi_0 + \frac{a^1 V_1}{r^2} + \frac{a^2 V_2}{r^3} + \ldots\right]$$

$$Pot_i = \frac{1}{a}\left[1 + \frac{r}{a} V_1 + \frac{r^2}{a^2} V_2 + \ldots\right]$$

$$\sigma = \frac{1}{4\pi a^2}\left[1 + 3 V_1 + 5 V_2 + \ldots\right]$$

Warunek $U_i + Pot_e = V_i$ z czego oznacza się V ...

potem z tego $V_e = U_e + Pot_e$ i σ t.j. to samo co tam w

specjalnym przypadku $U_e = \frac{E}{R}$ przeprowadziliśmy.

Trudności polega tylko ewentualnie w wyznaczeniu funkcji V z $Pot.e$

$$\iint P_n^2\, ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1} \qquad \iint P_n P_m\, ds = 0$$

Φ

$$P_n = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{n!}\left[\cos^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-4} + \ldots\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2}} =$$

$\cos\theta = x$

$$f(x) = a_0 P_0 + a_1 P_1 + \cdots\cdots$$

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n \, dx$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m P_n \, dx = 0 \qquad \frac{2}{2n+1}$$

$$\nabla^2 U = 0 \qquad r \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial \left(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$U = \cancel{a_0 P_0 + \frac{a}{r}}$$

$$= b_0 + \frac{b_0}{r} P_0 + \frac{b_1}{r^2} P_1 + \cdots$$

$$U = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} \qquad \frac{\partial U}{\partial \alpha} = -\alpha$$

$$\underbrace{(1-x^2) \frac{d^2 P_n}{dx^2} - 2x \frac{dP_n}{dx}}_{\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]} + n(n+1) P_n = 0$$

$$\int n(n+1) P_n P_m \, dx = \int P_m \frac{d}{dx}\left[\quad\right] dx =$$

$$= (1-x^2) P_m \frac{dP_n}{dx} - \int \frac{dP_m}{dx} \left[1-x^2\right] \frac{dP_n}{dx} \frac{dP_m}{dx}$$

$$\left[n(n+1) - m(m+1)\right] \int P_n P_m \, dx = (1-x^2) \left[P_n \frac{dP_m}{dx} - P_m \frac{dP_n}{dx}\right]_{-1}^{+1} = 0$$

28

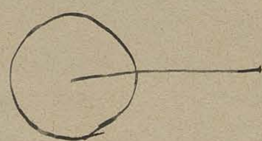
$$P_n = r^{n+1} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^n} = \cancel{\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left[(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \right]}$$

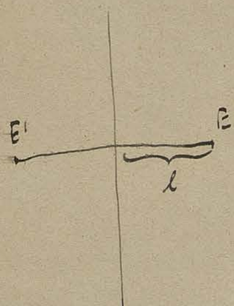
$$\cancel{r^{n+1} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{x}\right)}{\partial x^n}}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \xi$$

$$P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (\xi^2 - 1)^n}{d\xi^n}$$

Czy przyciąganie punktu E przez kulę tak jak gdyby E' działało?





$$F = -\frac{E^2}{4l^2} \quad ?$$

$$W = \frac{1}{2}\Sigma m V = \frac{1}{2} E \frac{E'}{2l} = -\frac{E^2}{4l}$$

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{E^2}{4l^2}$$ stimmt!

~~Uwaga~~.

Aż dotąd poznaliśmy więc następujące metody:

1). Ze symetryi kula, potem bezpośredni wyrachowanie potencyału

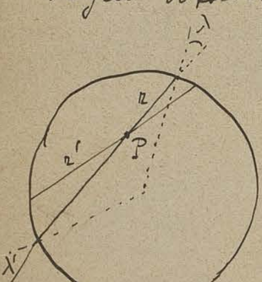
2). najracyonalniejszy sposób jest przekształcenie równania $\nabla^2 V = 0$ w nim współrzędne i oznaczenie V

3). Kula i punkt rozwinięcie za pomocą funkcyi kuli

4). Rozkład ~~pola~~ na powierzchni pozornej, równoważny z danym układem

Teraz jeszcze kilka specyalnych metod:

Użycie odkształcenia jednorodnego albo przekształcenia równomiernego



Sprężyna wewnątrz kuli:

$$\frac{\sigma\, ds}{r^2} \qquad \frac{\sigma'\, ds'}{r'^2}$$

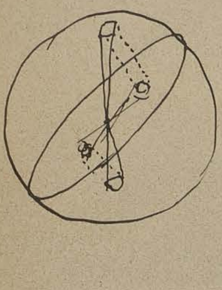
$$\frac{\sigma\, r^2 d\omega}{r^2 \cos\lambda} \qquad \frac{\sigma\, r'^2 d\omega}{r'^2 \cos\lambda'}$$

$\lambda = \lambda'$

więc równe a przeciwne

więc siła $= 0$

[i można pokazać według Laplace'a że to prawo $\frac{1}{r^2}$ jedyne możliwe prawo tego rodzaju]



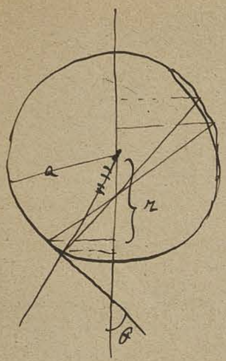
Na krążku

Także i w tej pozycyi ~~#~~ nastąpi równowaga bo obydwie odległości w tym samym stosunku zmniejszono

$$\cancel{\sigma\, ds}\ \frac{\sigma\, ds}{r^2} = \frac{\sigma\, ds'}{r'^2}$$

$$\frac{\sigma\, ds}{(r\cos\alpha)^2} = \frac{\sigma\, ds'}{(r'\cos\alpha)^2}$$

więc będzie ~~stanowić~~ równowaga jeśli wszystkie elektryczności zmieścimy na płaszczyźnie krążka



$$\sigma_1\, ds_1 = 2\sigma\, ds$$

$$\sigma_1 = \sigma \frac{ds}{ds_1} = \frac{2\sigma}{\cos\theta}$$

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}$$

$$\sigma_1 = \frac{2\sigma}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}} = \frac{E}{2\pi a^2\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}}$$

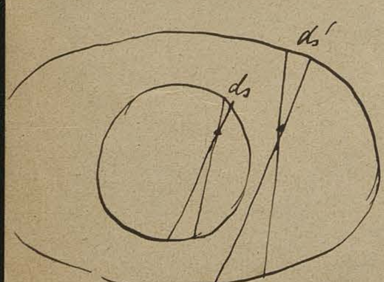
~~$C = \int_0$~~ U ponieważ stałe, więc najprościej w środku krążka

$$U = \int \frac{2\pi r\, dr\, \sigma_1}{r} = 2\pi\int \sigma_1\, dr = \frac{E}{a}\int_0^a \frac{d\left(\frac{r}{a}\right)}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}} = \frac{E}{a}\arcsin\frac{r}{a}\Big|_0^a$$

$$= \frac{E\pi}{2a}$$

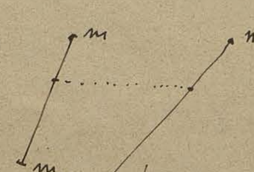
$$C = \frac{E}{U} = \frac{2a}{\pi} = \text{„pojemność''}$$

~~Rozwiąż~~ Odwzorowanie jednorodne kuli

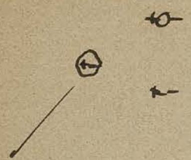


Każda prosta przechodzi w prostą

na każdej prostej wszystkie odległości równomiernie powiększone



więc także w nowej pozycji będzie równowaga



Nośniki jednolitym:

$$\varphi = \sum \mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = \sum \mu d \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}$$

$$= \sum \alpha \, dv \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}$$

$$\varphi = \int \left(\alpha \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} + \beta \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} + \gamma \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\right) dv$$

$$= -\int \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}}{r} dv + \int \frac{\alpha \cos nx + \beta \cos ny + \gamma \cos nz}{r} df$$

$$\alpha = \varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} \qquad = \int \frac{\nabla^2 U}{\varepsilon r} dv + \int \varepsilon \frac{\frac{\partial U}{\partial n}}{r} df$$

$$\Sigma$$

$$= 4\pi\varepsilon U$$

$$4\pi U = \int \frac{\nabla^2 U}{r} dv + \int \frac{\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U'}{\partial n}}{r} df =$$

więc $\qquad \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 4\pi\varepsilon \dfrac{\partial U}{\partial x}$ t.j. właśnie to czego szukaliśmy

$A\,dv = \Sigma n \lambda_x = \Sigma n \lambda \cos\alpha$ | $\cos\alpha$

$B\,dv = \Sigma n \lambda \cos\beta$ | $\cos\beta$

$C\,dv =$ | $\cos\gamma$

$J\,dv = \Sigma n \lambda$

więc w polu $\perp$ do X o sile F ~~sto~~ moment będzie

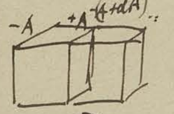
$F A\,dv$

Jeśli pole ma składowe $X\,Y\,Z$

to powstaną momenty

$A\,dv . Y - B\,dv . X$

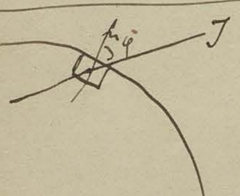
itd.



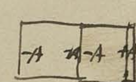
$A\,dx\,dy\,dz$ spowodowany przez to że w odstępie dx będzie $A\,dy\,dz$

więc magnetyzm wolny: $-\left[A + \frac{\partial A}{\partial x} dx\right] dy\,dz + A\,dy\,dz = -\frac{\partial A}{\partial x} dx\,dy\,dz = \rho\,dv$

$$\rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)$$



$J \cos\varphi = A \cos x + B \cos y + C \cos z$

Jeśli 

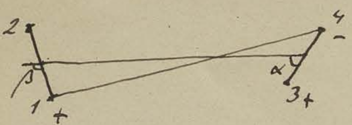
moment przy powierzchni w kierunku x

A to znaczy że $\sigma = A$

jeśli powierzchnia w inny sposób pochylona σ = składowa w kierunku normalnym

$= J \cos\varphi = A \cos x + \ldots$

$$W = \frac{1}{2}(\mu_1 U_1 + \mu_2 U_2 + \mu_3 U_3 + \mu_4 U_4)$$



$$= C + \frac{1}{2}\cancel{\mu_1\ \mu}$$

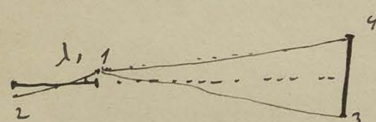
$$+ \frac{\mu_1 \mu_3}{k}\left[\frac{1}{r_{13}} - \frac{1}{r_{14}} - \frac{1}{r_{23}} + \frac{1}{r_{24}}\right]$$

$$\cancel{\frac{1}{r_{13}} = }$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x}dx + \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2(\frac{1}{r})}{\partial y^2}dy^2\right] + \dots$$

$$\cancel{r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \frac{\partial r}{\partial x}}$$

$$r_{13} = \sqrt{(x_1-x_3)^2 + (y_1-y_3)^2} \qquad \frac{\partial r_{13}}{\partial x} = \frac{x_1 - x_3}{\sqrt{}} =$$



$$\cancel{\frac{1}{r_{13}} = \frac{1}{r_0} \dots \frac{1}{r_0^2} \dots \frac{1}{r_0^2}}$$

$$\left[(x_1-x_3)^2 + (y_1-y_3)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[(R + \lambda_2 \cos\beta - \lambda_1 \cos\alpha_1)^2 + (\lambda_2 \sin\beta - \lambda_1 \sin\alpha)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= R^{-\frac{1}{2}}\left[1 + 2\frac{\lambda_2}{R}\cos\beta - 2\right.$$

$$\sqrt{(R - \lambda_1 \cos\alpha)^2 + (\lambda_2 - \lambda_1 \sin\alpha)^2} = R\sqrt{1 - \frac{2\lambda_1 \cos\alpha}{R} + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \sin\alpha}{R^2}}$$

$$\frac{1}{r_{13}} = \frac{1}{R}\left[1 - \frac{\lambda_1 \cos\alpha}{R} + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \sin}{2R^2} + \frac{3}{2}\frac{\lambda_1^2 \cos^2\alpha}{R^2} \dots\right] +$$

$$\frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{R}\left[1 + \frac{\lambda_1 \cos\alpha}{R} + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 \sin}{2R^2} + \frac{3}{2}\frac{\lambda_1^2 \cos^2\alpha}{R^2} + \dots\right] -$$

$$\frac{1}{r_{14}} = \frac{1}{R}\left[1 - \frac{\lambda_1 \cos\alpha}{R} + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 \sin\alpha}{2R^2} + \frac{3}{2}\frac{\lambda_1^2 \cos^2\alpha}{R^2}\right. -$$

$$\frac{1}{r_{24}} = \frac{1}{R}\left[1 + \frac{\lambda_1 \cos\alpha}{R} + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \sin}{} + \dots\right] +$$

32

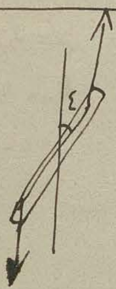
$$\frac{1}{r_{13}} - \frac{1}{r_{14}} - \frac{1}{r_{23}} + \frac{1}{r_{24}} =$$

$$= \frac{1}{R}\left[-\frac{4\lambda_1\lambda_2 \sin\alpha}{R^2} \cdots\right]\mu_1\mu_3$$

$$2\lambda_1\mu_1 = M_1$$
$$2\lambda_2\mu_2 = M_2$$

$$W = -\frac{M_1 m_2 \sin\alpha}{R^3}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = -\frac{M_1 M_2}{R^3}$$



$$\mu\lambda \sin\varepsilon = MH \sin\varepsilon = -K\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}$$

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -\frac{MH}{K}\varepsilon$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin\alpha t$$

$$\alpha^2 = \frac{MH}{K}$$

$$\left.\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{K}{MH}} \\ T' &= 2\pi\sqrt{\frac{K+k}{MH}} \end{aligned}\right\} \text{z nich } MH \text{ można wyrachować}$$

$$\frac{1}{R}\left[1 + \frac{\lambda_2\cos\beta - \lambda_1\cos\alpha_1}{R} + \frac{\frac{\lambda_2^2}{4} + \frac{\lambda_1^2}{4} - \frac{\lambda_1\lambda_2}{2}\cos(\alpha-\beta)}{R^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$1 - \frac{1}{2}\,\frac{\lambda_2\cos\beta - \lambda_1\cos\alpha_1}{R} - \frac{\frac{\lambda_2^2}{4} + \frac{\lambda_1^2}{4} - \frac{\lambda_1\lambda_2}{2}\cos(\alpha-\beta)}{2R^2} + \frac{3}{4}\left(\lambda_2\cos\beta - \lambda_1\cos\alpha\right)^2$$

$$-\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{\lambda_2\cos\beta + \lambda_1\cos\alpha}{R} - \frac{\frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_1^2}{4} - \lambda_1\lambda_2}{2R^2} - -\right.$$

$\cos(-\pi+\beta)$

$$D = \frac{MM'}{R^3}\left[\sin(\beta-\alpha) - 3\sin\alpha\cos\beta\right] + \frac{I}{R^5}$$

$\beta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$

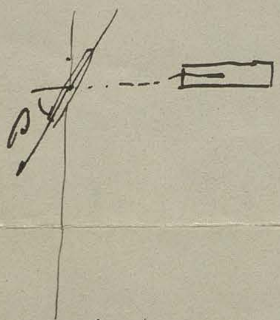
$\alpha = \pi - \varepsilon$

$\alpha = \frac{3\pi}{2} - \beta$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha$

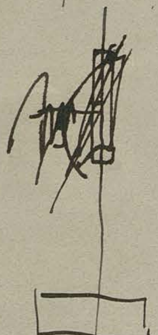
$\pi - \beta - \alpha$

$\alpha = 0$



$$D = \frac{MM'}{R^3}\sin\beta + \cancel{\frac{I}{R^5}} = \mu\lambda \cdot H\cos\beta$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{ctg}\beta = \frac{M'}{HR^3}$$



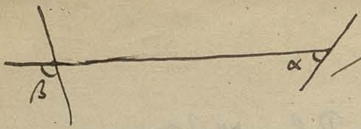
$$\beta = \pi - \varepsilon \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$D = \frac{MM'}{R^3}\left[-\cos\varepsilon + 3\cos\varepsilon\right] = \frac{2MM'\cos\varepsilon}{R^3} = MH\sin\varepsilon$$

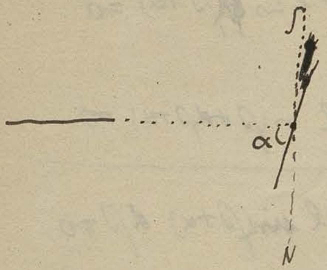
$$\operatorname{tg}\varepsilon = 2\frac{M'}{HR^3}$$

Służy do potwierdzenia prawa $\frac{1}{R^2}$ i do znalezienia stosunku $\frac{M}{H}$

co razem z oznacz. stosunku MH daje H i M



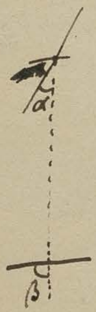
$$\left[\sin(\varphi-\alpha) + 3\sin\alpha\cos\beta\right]\frac{MM'}{R^3} + \frac{I}{R^5} = D$$



$$\beta = 0$$

$$2\sin\alpha\,\frac{MM'}{R^3} = MH\cos\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\varepsilon = \frac{2M'}{HR^3}$$



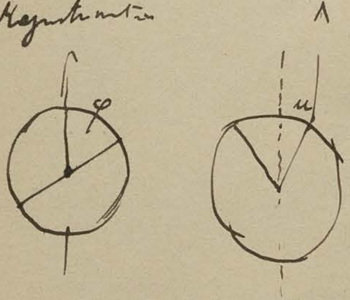
~~sin~~

$$\beta = \frac{\pi}{2} \quad \| \quad \alpha = \varepsilon$$

$$\cos\varepsilon\,\frac{MM'}{R^3} = MH\sin\varepsilon$$

$$\operatorname{ctg}\varepsilon = \frac{M'}{HR^3}$$

Magnetometer



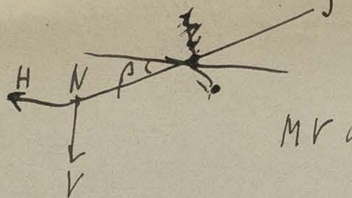
$$D(\varphi - u) = HM\sin u$$

$$D(\varphi + \cancel{\ } - u - du) = \overset{(H+dH)}{\cancel{H}}M\sin(u + du - \Delta d)$$

$$-D\,du = dH.M.\sin u + HM\cos u\,(du - \Delta d)$$

$$\frac{-du}{\varphi - u} = \frac{dH}{H} + \frac{\cos u}{\sin u}(du - \Delta d)$$

Wege Lloyd



$$MV\cos\beta - MH\sin\beta + Pl\cos(\beta+\alpha) = 0$$

$$M(V+dV)\cos(\beta+d\beta) - M(H+dH)\sin(\beta+d\beta) + Pl\cos(\beta+d\beta+\alpha) = 0$$

$$MdV\cos\beta \cancel{+ MH\sin\beta\, d\beta} - MdH\cancel{\sin\beta} + Pl\sin(\beta+\alpha)\,d\beta = 0$$
$$+ MH\,d\beta\cos\beta$$

Jüli $\beta = 0$:

$$MV + Pl\cos(\beta+\alpha) = 0$$

$$M\Delta V + (MH + Pl\sin(\beta+\alpha))\,\Delta\beta = 0$$

$$M\Delta V = -\Delta\beta\left[MH - MV\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\cos(\beta+\alpha)}\right]$$

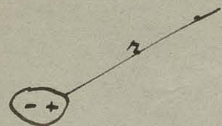
$V = H\,\mathrm{tg}\,i$

$$\Delta V = \Delta\beta . V\left[\mathrm{tg}(\beta+\alpha) - \mathrm{ctg}\, i\right]$$

POLSKIE
TOWARZYSTWO PRZYRODNIKÓW
IM. KOPERNIKA.

Lwów dnia ....

$$\Delta\varphi = e\,\Delta x\,\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} = \cancel{\ldots}$$



$$e\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}+\Delta z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}$$

$$\varphi = \Sigma \ldots$$

$$\varphi = \iiint\left(f\,\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x}+g\ldots+h\right)d\omega$$

$$\cancel{\frac{\partial \ldots}{\partial x} = \kappa\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial \ldots}{\partial \ldots}\right)}$$

$$\rho = \frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\gamma}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$f = \varepsilon X = \cancel{\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}(U+\varphi)} = -\varepsilon\frac{\partial U}{\partial x}$$

$g =$

$h =$

$$\rho_p\quad V = \varepsilon\,(\nabla^2 V)$$

$$-4\pi\rho = -4\pi\varepsilon\,\nabla^2 V = \nabla^2 V = 0$$

$$\sigma_p = \varepsilon\,\frac{\partial V}{\partial n} = \cancel{\varepsilon\left[\frac{\partial U}{\partial n}+\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right]}$$

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial n}+\varepsilon\,\frac{\partial V}{\partial n}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi\varepsilon\,\frac{\partial V}{\partial n}+\frac{\partial U}{\partial n}$$

$$\cancel{\varepsilon\frac{\partial U}{\partial x}}\qquad f = -\varepsilon\,\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\cancel{\varepsilon\nabla^2 V = \varepsilon\,\nabla^2(U+\varphi) = \rho_p =}$$

19

*) Ce que nous avons trouvé n'est pas la distance moyenne, mais la racine du carré moyen de la distance. D'après les formules (   ) et (   ) de mon mémoire précédent (Bullet. Crac.   il ~~faudrait~~ faudrait la multiplier

Dawniejsza teorya magnetyzmu   Coulomb-Poisson   przez analogię z elektr.

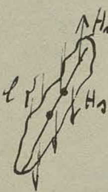
elementarne magnesy; spoczywa prop. do H, V; $H = J\cos i$ $V = J\sin i$

żaden nie postępowy $H \Sigma n = \Sigma s \cdot H$

$\xi = \frac{\Sigma n x}{\Sigma n}$ $\eta =$ $\zeta =$

powstaje jedność

wypadkowy moment



$\xi' = \frac{\Sigma s x}{\Sigma s}$

oś magnetyczna, bieguny

$M = l \Sigma n = l \Sigma s = l \Sigma m$; m = n albo s

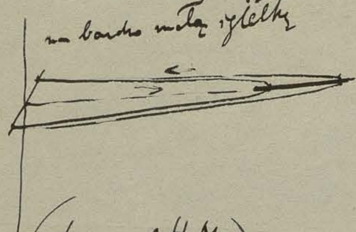
$$-H \underbrace{l \Sigma m}_{M} \cdot \sin\varphi = K \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{K}{HM}}$$

zmieniając K przez dodawanie ciężarków można otrzymać HM

Aby z osobna poznać H, M, trzeba jeszcze innych pomiarów

na bardzo małą igiełkę   „I Hauptlage"   Gauss

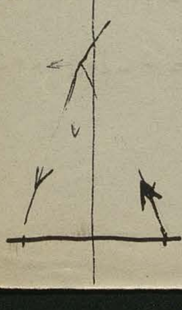


$$Hm\sin\varphi = m\cos\varphi \left(\frac{n}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)$$

$$= m\cos\varphi \frac{2nl}{R^3} = 2m\frac{M\cos\varphi}{R^3}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2HM}{R^3}$$

„II Hauptlage"   Gauss



$$Hm\sin\varphi = mn\cos\varphi\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)$$

$$\frac{1}{R^2 + (\frac{l}{2} - \delta\sin\varphi)^2} - \frac{1}{R^2 + (\frac{l}{2} + \delta\sin\varphi)^2} = \frac{1}{R^{\cdot}}$$

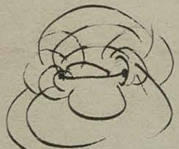
$$U = nHy + n\frac{N}{\sqrt{y^2+\left(x-\frac{l}{2}\right)^2}} - n\frac{N}{\sqrt{y^2+\left(x+\frac{l}{2}\right)^2}}$$

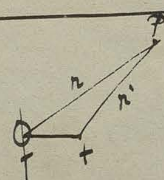
$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|^{y=R,\ x=0} = nH$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right| = \frac{nN}{\cancel{M}}\left\{\frac{x-\frac{l}{2}}{\sqrt{y^2+-\ }^{\,3}} - \frac{x+\frac{l}{2}}{\sqrt{\ \ }^{\,3}}\right\} = nN\frac{l}{R^3} = n\frac{M}{R^3}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{M}{HR^3}$$ ale oba wyrażenia tylko przybliżone, właściwie rozwinięcie $+\frac{\alpha}{R^5}$ i.t.d.

$U_n = \frac{n}{r}$





$$dU = \frac{n}{r'} + \frac{n}{r''} = n\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right) = -\frac{n}{r^2}\, l\cos\varphi = -\frac{n\alpha}{r^2}$$

$$U = -\sum \frac{n}{r^2}\, l\cos\varphi = -$$

więc jeśli znamy rozkład n to możemy obliczyć $\quad nl = J\,dv$

$$U = \int \frac{J\cos\varphi\, dv}{r^2}$$

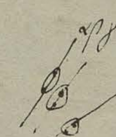
Moment wypadkowy $= \Sigma$ ...

Składowe momentu względem osi :

$A\,dv = nl\cos\alpha$

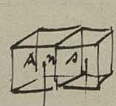
$B\,dv = nl\cos\beta$

$C\,dv = nl\cos\gamma$



$J = A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma$

$A\,dx\,dy\,dz = R\,dy\,dz.\ dx$



$$\rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)$$

$\sigma\,ds = A\,dx\,dy + B\,dx\,dz + C$ —

$\sigma = A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma$

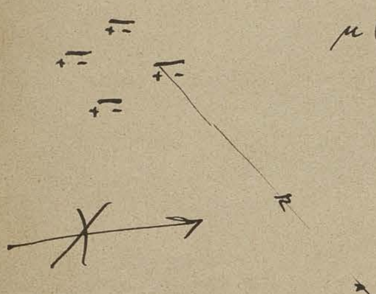
$$W = \frac{1}{2}(\sigma_1 U_1 + \sigma_2 U_2) = \frac{1}{2}\sigma_1 (U_2 - U_1)$$

$$U_2 - U_1 = x\frac{\partial U_1}{\partial x} + (a-x)\frac{K_1}{K_2}\frac{\partial U_1}{\partial x} = 4\pi\sigma\left[\frac{x}{K_1} + \frac{a-x}{K_2}\right]$$

$$W = 2\pi\sigma^2\left[\frac{x}{K_1} + \frac{a-x}{K_2}\right]$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 2\pi\sigma^2\left[\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}\right]$$ = ciśnienie na

---



$$\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = \mu\lambda\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} = \varphi$$

$$\Sigma\mu\lambda \cdot \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} \qquad \underbrace{\Sigma\mu\lambda}$$

w elemencie objętości = moment elektr.

$= f\,dv$

W całym więc powstanie w skutek polaryzacji $\varphi = \int\left[f\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} + g\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y} + h\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial z}\right]dv$

$$f = \varepsilon X = -\varepsilon\left[\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] = -\varepsilon\frac{\partial U}{\partial x}$$

$g =$

$h =$

$$\varphi = -\varepsilon\int\left[\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} + \dots\right]dv = \int\varepsilon\frac{\nabla^2 U}{r}dv - \int\varepsilon\frac{\partial U}{\partial n}\frac{1}{r}df$$

we wnętrzu jednego diel.

z od całe dielektr., więc powierzchni przewodn.

$$\varphi = 4\pi\varepsilon U + \text{const} \cancel{= \nabla^2 U} \qquad \cancel{U = \frac{V}{1+4\pi\varepsilon}}$$

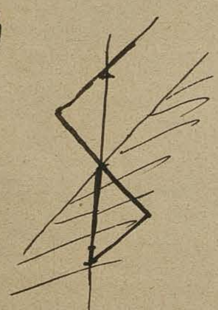
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 4\pi\varepsilon\frac{\partial U}{\partial x}$$

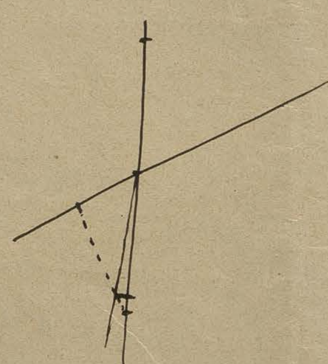
$$\frac{\partial V}{\partial x} = (1+4\pi\varepsilon)\,\frac{\partial U}{\partial x} = K\,\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \qquad K\,\frac{\partial U}{\partial y}$$

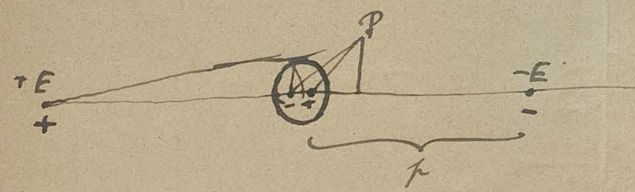
$$\frac{\partial V}{\partial z} = \qquad K\,\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho = K\,\nabla^2 U \qquad\qquad \nabla^2 U = -4\pi(\rho + \rho')$$





Co gdyby kula przewodząca znajdowała się w polu jednostajnem?



Gęstość elektr. swobodnej znosi się

Jak długo nie ma kuli przew.

$$\text{pot.} = \frac{E}{p+x} - \frac{E}{p-x} = \frac{E}{p}\left[1-\frac{x}{p}-\left(1+\frac{x}{p}\right)\right]$$

$$= -\frac{2Ex}{p^2}$$

$$\text{Siła}_0 = \frac{2E}{p^2} = A$$

$$U_e = V_e + \varphi_e$$

$$\varphi_e = \frac{Ea}{p}\left[-\lambda \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\right.$$

$$= +\frac{2Ea}{p}\,\frac{a^2}{p}\,\frac{x}{r^3}$$

$$= A\,\frac{a^3 x}{r^3}$$

$$= A\,\frac{a^3}{r^2}\cos\varphi$$

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial \varphi_e}{\partial r} = +\frac{3a^3 x}{4\pi\, r^4}\Big|_{r=a} = \frac{3}{4\pi}\cos\varphi$$

Uważamy że te rezultaty możnaby otrzymać wprost z tamtego rozwiązania stawiając $K=\infty$

Doprawdy otrzymujemy te same warunki: $\nabla^2 U = 0$

$$\frac{\partial U_1}{\partial r} = 0$$

Zmiana która następuje: φ w tym wypadku mniejsze w stosunku $\frac{K-1}{K+2}$

to jest wpływ jej obecności

Więc jeśli n takich kul w jedności objętości mają zastąpić owe dielektr.

to: $$n \frac{a^3}{r^2}\cos\varphi = \frac{K-1}{K+2}\,\frac{A^3}{r^2}\cos\varphi$$

$$\cancel{n = \frac{K-1}{K+2}} \qquad n\frac{a^3}{A^3} = \frac{K-1}{K+2} = h$$

N. p. powietrze $K = 1{\cdot}000590$

$$h = 0{\cdot}000197 = 1{\cdot}97 \cdot 10^{-4}$$

$$\left[\; \lambda = \frac{3\eta}{Nmc} \qquad c^2 = \frac{3p}{Nm} \right.$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{4\pi\sigma^2}{3} N = \frac{\frac{4\pi\sigma^3}{3}\cdot N}{\sigma} = \frac{8h}{\sigma}$$

$$\sigma = 8h\lambda$$

$$\lambda = 95 \cdot 10^{-7}\ \text{cm}$$

$$= 8 \cdot 95 \cdot 10^{-11} = 760 \cdot 10^{-11}$$

$$= 0{\cdot}76 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}$$

Benzol C_6H_6: $K = \cancel{\ldots}\ 2{\cdot}2$

$(C_2H_5)OH$ 25

$(CH_3)_2O$ 4·5

H_2O 80

h razem możliwe = ca $\frac{2}{3}$

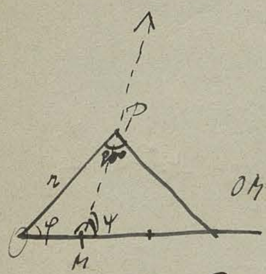
$\sqrt{K} = 7$

39

$$U = \mu \frac{M}{r^2}\cos\varphi = \frac{\mu M x}{\sqrt{x^2+z^2}^3}$$

$$\left.\begin{aligned} X &= \mu\frac{M}{r^3}(3\cos^2\varphi - 1) \\ Y &= \mu\frac{M}{r^3}(3\sin\varphi\cos\varphi \end{aligned}\right\} F = M\mu\frac{MP}{r^3\, OM}$$

$$\cancel{F = \mu\frac{M}{r^3}\left[9\cos^2\varphi - 6\cos^2\varphi + 1\right] = \frac{\mu M}{r^3}\left[3\cos^2\varphi + 1\right]}$$



$$OM = \frac{r}{3\cos\varphi}$$

$$\sin\psi : r = \sin(\psi + \varphi) : \frac{r}{3\cos\varphi}$$

$$\cancel{MP = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{9\cos^2\varphi} - \frac{2r^2}{3}}}$$

$$\cancel{= \sqrt{3\cos^2\varphi - 1}\ \frac{r}{3\cos\varphi}}$$

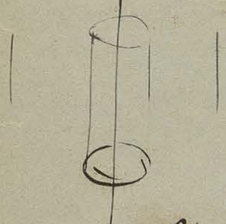
$$\cancel{= OM\,.\sqrt{3\cos^2\varphi - 1}}$$

$$\frac{\sin\psi}{3\cos\varphi} = -\sin\psi\cos\psi + \cos\psi\sin\psi$$

$$\sin\psi(1 - 3\cos^2\varphi) = -3\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi$$

$$\cancel{\psi = \varphi + \ldots}$$

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{1 - 3\cos^2\varphi} = \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{3\cos^2\varphi - 1} = \frac{Y}{X}$$



$$-4\pi R^2 f\rho = 2\pi r\, f.\, F$$

$$F = \frac{2\pi R^2\rho}{r}$$

$$\cancel{\frac{\partial U_1}{\partial x} = -2\pi R^2\rho\frac{x}{r^3}}$$

$$\cancel{U_1 = 2\pi R^2 \rho\frac{x}{r^2}}$$

$$U = 2\pi R^2\rho\ \lg r$$

$$U_1 = 2\pi R^2\rho\ \frac{x}{r^2}$$

$$2\pi r F = -4\pi r^2\pi\rho$$

$$F = -2\pi r\rho$$

$$\cancel{F_1 = 2\pi\rho x}$$

$$U = \pi r^2\rho$$

$$U_1 = 2\pi\rho x$$

$\cancel{\frac{2\pi a^2 \ldots}{\sqrt{r}}}$

$V_1 = \frac{4\pi}{3}\frac{(A^3 - a^3)}{r}$

$V_2 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{3}{2}A^2 - \frac{r^2}{2} - \frac{a^3}{r}\right)$

$V_3 = 2\pi a^2$

$U_1 = cx - \frac{4\pi}{3}(A^3 - a^3)\frac{J\cos\delta}{r^2} = \cos\delta\left[cr - \frac{4\pi}{3}(A^3 - a^3)\frac{J}{r^2}\right]$

$U_2 = cx + \frac{4\pi}{3}\left(-Jr\cos\delta + \frac{a^3 J\cos\delta}{r^2}\right) = \cos\delta\left[cr - J\frac{4\pi}{3}r + \frac{4\pi}{3}\frac{a^3 J}{r^2}\right]$

$U_3 = c'x$

$$c\cancel{\cos\delta} + \frac{8\pi}{3}(A^3 - a^3)\frac{J\cancel{\cos\delta}}{A^3} = \mu\left[c\cancel{\cos\delta} - \frac{4\pi}{3}J\cancel{\cos\delta} - \frac{8\pi}{3}\frac{a^3 J\cancel{\cos\delta}}{A^3}\right]$$

$$\frac{4\pi}{3}\left[2\left(1 - \frac{a^3}{A^3}\right) + \mu\left(1 + 2\frac{a^3}{A^3}\right)\right]J = (\mu - 1)c$$
$$= 4\pi\kappa c$$

$\cancel{[illegible]}$

$\cancel{\mu\left[c\cos\delta - \frac{4\pi}{3}J\cos\delta\right] = c\cos\delta}$ $\cancel{\mu\left[c - \frac{4\pi J}{3} - \frac{8\pi a^3}{\ldots}\right]}$

$\cancel{\mu}\, J = \frac{(\mu-1)c}{4\pi\mu} = \frac{\kappa c}{1 + 4\pi\kappa}$

$$\varphi = \iiint \left[\alpha \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} + \beta \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y} + \gamma \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz = \iint \frac{\alpha \cos nx + \beta \cos ny + \gamma \cos nz}{r}\, dS$$

$$- \iiint \frac{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)}{r}\, dv$$

$$\varphi = \iint \frac{\sigma_p\, dS}{r} + \iiint \frac{\rho_p}{r}\, dv$$

w razie Indukcyi:

[illegible] cała siła

$$\alpha = -\kappa \frac{\partial U}{\partial x}$$

(II). $\beta = -\kappa \frac{\partial U}{\partial y}$

$$\gamma = -\kappa \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$= -\left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \ldots\right] =$$

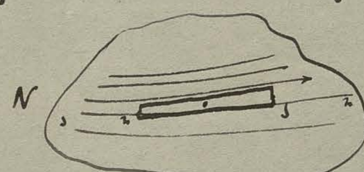
$$\rho_p = +\left[\frac{\partial\left(\kappa \frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\kappa \frac{\partial U}{\partial y}\right)}{\partial y} \ldots\right] = -\mathrm{div}(\kappa \mathfrak{H})$$

(III). (I).

Jak mierzyć tę siłę wewnątrz ciała?

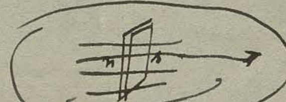
S $\mathfrak{H} + \nabla\varphi$

w przeciwnym stronę $\iint \frac{\sigma_p\, dS}{r}$ znika, więc tam otrzymujemy siłę istotnie działającą $= \mathfrak{H}$



Jeśli κ stałe:

$$\cancel{\varphi = \iint \frac{\kappa \frac{\partial U}{\partial y_1} + \kappa' \frac{\partial U}{\partial y_1'}}{r}\, dS}$$



w poprzecznej stronie

potrzeba $\sigma = n \;\Big\|\; \sigma = s$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = J = \kappa \mathfrak{H}$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi(\sigma)$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi J$$

$$= (1 + 4\pi\kappa)\mathfrak{H}$$

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

$$\cancel{\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} = -4\pi(\sigma_p + \sigma_p') - 4\pi\ldots}$$

$$\cancel{= +4\pi\left(\kappa \frac{\partial U}{\partial y} + \kappa' \frac{\partial U'}{\partial y'}\right)}$$

$$\cancel{\sigma_p + \sigma_p' = \kappa \frac{\partial U}{\partial y} + \kappa' \frac{\partial U'}{\partial y'}}$$

$$\cancel{\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial y} \ldots\right)}$$

$\mathfrak{H}$ podobnie ujściowe z magnetyzmu rzeczywistego ujściowe z tych porowych

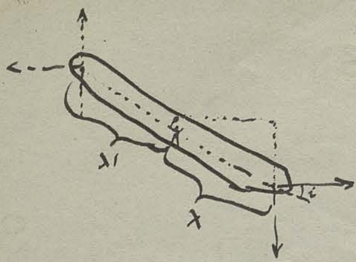
$= \nabla U$

$$U = \varphi + \iint \frac{\sigma_v}{r}\, dS + \iiint \frac{\rho_v}{r}\, dv \quad \ldots$$

$$\nabla^2 U = -4\pi(\rho_v + \rho_p) = -4\pi\rho_v - 4\pi\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \ldots\right] = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \ldots$$

$$-4\pi\rho_v = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial U}{\partial x}(1 + 4\pi\kappa)\right] + \frac{\partial}{\partial y}[\ \ldots\ ] + \frac{\partial}{\partial z}[\ \ldots\ ] = -\mathrm{div}(\mu \mathfrak{H}) = -\mathrm{div}\, \mathfrak{B}$$

zatem tylko tam rzeczywisty magnetyzm gdzie linie indukcyi powstają lub kończą się, wy-łącznie...



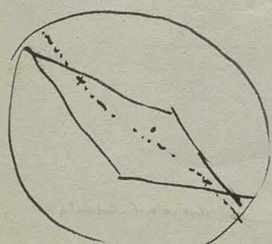
$$V n \lambda \cos i + V s' \lambda' \cos i \pm H n \lambda'' \sin i - H s \lambda''' \sin i + \mu \delta \cos \varepsilon = 0$$

$$M(V \cos i - H \sin i) = -\mu \delta \cos \varepsilon$$

$$\operatorname{tg} i_1 = \frac{H}{V} + \frac{\mu \delta \cos \varepsilon}{M V \cos i}$$

$$\operatorname{tg} i_2 = \frac{H}{V} + \frac{\mu \delta \cos(\varepsilon + \pi)}{M V \cos i}$$

$$H/V = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg} i_1 + \operatorname{tg} i_2)$$



jeszcze obrót o 180

(1905 Lwów)

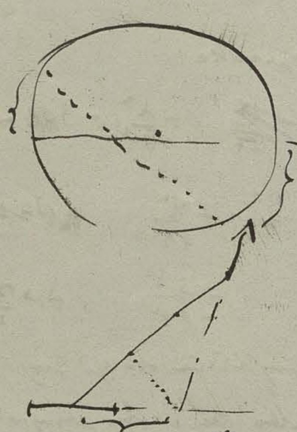
$\delta = 4.1$

$i = 63.6$

$H = 0.207$

ekscentryczne zawieszenie

środek magnesu obu odczytań | średnia z 8 odczytań



$$\frac{r}{3\cos\theta} = \frac{r^2}{3x}$$

$$U = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) = n\left[\frac{1}{r_0} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)_0 + \frac{\frac{\lambda^2}{4}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)_0 + \frac{\frac{\lambda^3}{8}}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{r}\right)_0 \ldots - \left(\frac{1}{r_0} - \frac{\lambda}{2} \ldots + \right.\right.$$

$$= n\lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)_0 + \frac{n\lambda^3}{24}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{r}\right)_0 = M\left[\frac{x}{r^3} + \frac{\lambda^2}{24}\left(-\frac{9x}{r^5} + \frac{15x^3}{r^7}\right)\right]$$

$$\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$$

$$-\frac{3x}{r^5} - \frac{6x}{r^5} + \frac{15x^3}{r^7}$$

W pierwszym przybliżeniu:

$$U = M\frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$X = \frac{1}{r^3}(1 - 3\cos^2\theta)$$

$$Y = -\frac{3\sin\theta\cos\theta}{r^3}$$

$$F = \frac{1}{r^3}\sqrt{(1 - 6\cos^2\theta + 9\cos^2\theta)} = \frac{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}{r^3}$$

Dla danego r największe dla $\theta = 0$

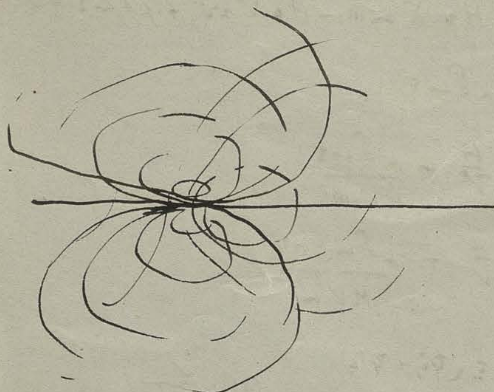
minim. dla $\theta = \frac{\pi}{2}$

stosunek $= 1 : 2$!

kierunek $\dfrac{Y}{X} = -\dfrac{3\sin\theta\cos\theta}{1 - 3\cos^2\theta} = \dfrac{y}{\left(x - \sqrt{\frac{\ldots}{3x}}\right)^2}$

$$= \frac{3xy}{3x^2 - x^2 - y^2} = \frac{-3xy}{y^2 + x^2 - 3x^2} =$$

obecnie sposób mierzenia H!



(I Hauptlage)

lub

(II Hauptlage)

→ doświadczenia Gaussa nad ścisłością prawa zasadniczego

$$2m\frac{M}{r^3}\cos\varphi = m H \sin\varphi$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{M}{H}\frac{2}{r^3}$$

albo też okres drgań w polu wypadkowem

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{K}{mH}}$$

$$\tau_1 = 2\pi\sqrt{\frac{K}{m\left(H \pm \frac{2M}{r^3}\right)}}$$

$$\left(\frac{2\pi}{\tau_1}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 = \frac{2Mm}{K r^3}$$

$$\frac{\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2}}{\frac{1}{\tau^2}} = \frac{2M}{H r^3}$$

poprawka:

$$1 + \frac{\lambda^2}{8r^2}\left(-3 + 5\sin^2\theta\right)$$

$$= 1 + \frac{\lambda^2}{4r^2} \qquad \theta = 0$$

$$1 - \frac{3\lambda^2}{8r^2} \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

więc albo przybliżenie obliczyć przy pomocy λ albo też w obu przypadkach stworzyć i pierwiastek wziąć z wyj. $\frac{3}{2}$

Ale Fechner wszystko dokładnie! równoczesny!

Ogólnie pędy $\cancel{\ } U = \frac{m}{r^{p-1}}$

$$U = m\left(\frac{1}{r^{p-1}} - \frac{1}{r^{p-1}}\right) = m\lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^{p-1}}\right) = -m\lambda(p-1)\frac{x}{r^{p+1}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \cancel{\ } - m(p-1)\left(\frac{1}{r^{p+1}} - \frac{(p+1)x^2}{r^{p+3}}\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = + \frac{m\lambda(p-1)(p+1)xy}{r^{p+3}}$$

$\cancel{\ }$ $\theta = 0$ $\quad X = M(p-1)(p+1)$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad X = M(p-1)$

więc stosunek $\frac{F_0}{F_{\frac{\pi}{2}}} = p$

$$\frac{\cancel{t}\varphi_1}{\cancel{t}\varphi_2} = p$$

Obróćmy jeszcze dwie pozycje?

momenty dalsze żadne

chyba potęgowe siły?

Już obie magnesy skierowane identycznie:

Siły potęgowe

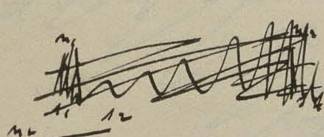
$m_1 \quad m_1$

$m_2 \quad m_2$

$$-\cancel{m}_2 m_1\lambda_1\left(\frac{2}{r^3} - \frac{2}{r^3}\right) = -\cancel{\ }6\frac{m_1\lambda_1 m_2\lambda_2 x}{r^5}$$

$X = -6\frac{m_1 m_2}{r^4}$ przyciąganie

$Y = 0$



X nie możliwe wskutek symetrji

chyba Y

$$\cancel{m_2 m_1 \lambda_1\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^3}\right) = 3\frac{m_1 m_2}{r^5}}$$

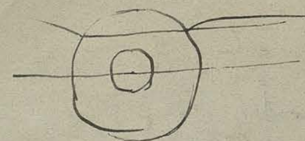
$m_1 \quad 1.$

$$m_2 m_1\left(\frac{3xy}{r^5} - \frac{3xy}{r^5}\right) = \frac{3m_1 m_2}{r^4}$$

$$\cancel{X = 3\frac{m}{r^4}}$$

$$X = m_2\lambda_2\frac{\partial}{\partial y}\frac{m_1}{\cancel{r}}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right) = m_1 m_2\left(\frac{3y}{r^5} - \frac{15x^2 y}{r^7}\right) = 0$$

$$Y = \frac{3xy}{r^5} - \frac{3xy'}{r^5} = \frac{3m_1m_2}{r^4}$$



$$U_1 = \frac{4\pi}{3}\frac{(A^3 - a^3)}{r}$$

$$U_2 = \frac{4\pi}{3}\left(3A^2 - r^2 - \frac{2a^3}{r}\right)$$

$$U_3 = 2\pi a^2$$

$$-\frac{4\pi}{3}(A^3 - a^3)\frac{J\cos\delta}{r^2} + cx = V_1$$

$$\frac{4\pi}{3}\left(-4J\cos\delta + \frac{a^3 J\cos\delta}{r^2}\right) + cx = V_2$$

$$0 \qquad + cx = V_3$$

$$\frac{4}{3} - 2 = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} = \frac{8\pi}{3}(A^3 - a^3)\frac{J\cos\delta}{A^3} + c\cos\delta$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial r} = -\frac{8\pi}{3}a^3\frac{J\cos\delta}{A^3} + \left(c - \frac{16\pi}{3}J\right)\cos\delta$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial r} = c\cos\delta$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{3}{2}A^2 - \frac{r^2}{2} - \frac{a^3}{r}\right)$$

$$\frac{8\pi}{3}\frac{A^3 - a^3}{A^3}J + c = \mu\left[\frac{8\pi}{3}\frac{a^3}{A^3}J + \left(c - \frac{16\pi}{3}J\right)\right]$$

$$\frac{8\pi}{3}J + c = \mu c - \frac{16\pi J}{3}\mu$$

$$c = \frac{\frac{8\pi}{3}J(1+2\mu)}{\mu - 1}$$

$$\frac{8\pi}{3}\frac{3A^3 - 2a^3}{A^3}J = c(\mu - 1)$$

$$= c\,4\pi\kappa$$

$$J = \frac{c\kappa}{2}$$

$$= \frac{\frac{8\pi}{3}J\left(3 + \frac{8\pi\kappa}{3}\right)}{4\pi\kappa} =$$

$$J = \frac{\frac{\kappa c}{2}}{1 + \frac{8\pi}{3}\kappa}$$

$$\mu\left[-8\pi J + c\right] = c$$

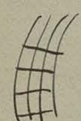
$$J = \frac{c(1-\mu)}{-8\pi\mu} = \frac{\frac{\kappa}{2}c}{-\mu}$$

ze wszystkim magnes. linii magnesowania

Np. 1. układ solenoidalny

jeśli we wszystkim $\rho = 0$ $\qquad \rho J = \rho' J'$

2/. układ lamellarny: że linii magnes. $\perp$ powierzch.



$A = K \frac{\partial F}{\partial x} \qquad B = K \frac{\partial F}{\partial y} \qquad C = K \frac{\partial F}{\partial z} \qquad K = f(x,y,z)$

natężenie wartości magnet.

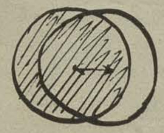
3/. Magnes. jednorodny

$\sigma = J \cos \lambda$

$\delta . \sigma ds = J \frac{dv}{\delta}$ $\qquad dS \, \delta \cos \lambda = dv$

$\sigma ds = J \frac{dv}{\delta}$

$\frac{J}{\delta}$



$\frac{4 \pi R^3 J}{3 \delta}$

$U = \int \frac{J \cos \varphi \, dv}{r^2} = \dots$

$= \int \frac{A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma}{r^2} dx \, dy \, dz$

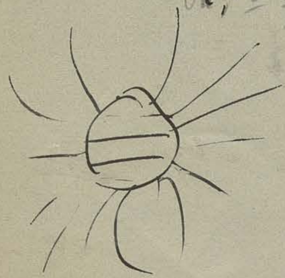
$= \int \left[A \frac{\partial (\frac{1}{r})}{\partial x} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \dots \right] dx \, dy \, dz =$

$= \iint A \frac{1}{r} dy \, dz + \dots = \iint \left[A \cos \lambda + \dots \right] dS$

$- \iiint \frac{\frac{\partial A}{\partial x} + \dots}{r} dx \, dy \, dz$

$U_a = \frac{4}{3} \pi R^3 J \frac{\cos \varphi}{l^2}$

$U_i = \frac{4}{3} \pi J l \cos \varphi$



$\frac{\partial U_a}{\partial l} = \frac{8}{3} \pi R^3 J \frac{\cos \varphi}{l^3}$

$\frac{\partial U_i}{\partial l} = \frac{4}{3} \pi J \cos \varphi$

$\frac{4}{3} \dots D \cos \varphi$

44

$$U_1 = A_0 + \left[-A + A\left(\frac{K-1}{K+2}\right)\right] r\cos\varphi = A_0 - A\frac{3}{K+2} r\cos\varphi$$

$$U_2 = A_0 + \left[-A + \frac{A(K-1)a^3}{K+2\ r^3}\right] r\cos\varphi = A_0 - A\left[1 - \frac{K-1}{K+2}\frac{a^3}{r^3}\right] r\cos\varphi$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial r} = -A\frac{3}{K+2}\cos\varphi$$

$$-\frac{\partial U_2}{\partial r} = -\left(1 + 2\frac{K-1}{K+2}\right)\cos\varphi \quad \underbrace{}_{+\frac{3K}{K+2}\cos\varphi}$$

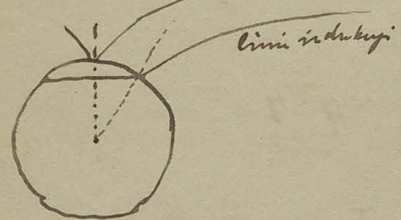
$$K\frac{3}{K+2} + \frac{3K}{K+2} = 0$$

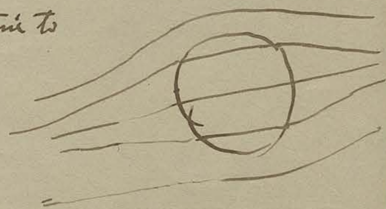
Wszę warunki spełnione

Ponieważ U_1 zależy tylko od x, to linie sił wewnątrz w kierunku x

wewnątrz załamywanie; $K_1 > K_2$ więc zgęszczanie

Gdyby odwrotnie to

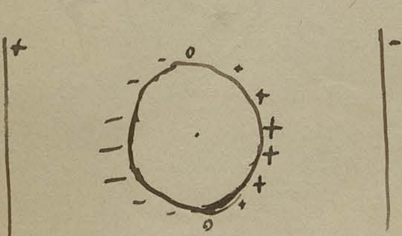




ρ w środku $= 0$

a $6''$ na powierzchni ? $\quad 4\pi 6'' = 4\pi \varepsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial n_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial n_2}$

$$= +(K-1)\frac{3A}{K+2}\cos\varphi = +3\frac{K-1}{K+2}A\cos\varphi$$



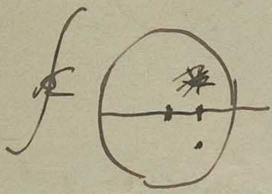
Ilość linij siły we wnętrzu

$$\sum -\frac{\partial U_1}{\partial x} = A\frac{3}{K+2}\cdot a^2\pi$$

$$\sum -\frac{\partial V_1}{\partial x} = K\frac{3A}{K+2}\cdot a^2\pi$$

$$\int \frac{x}{r^3}\, dv = \int \frac{1}{r^2} \cos\varphi \cdot 2\pi \sin\varphi \, d\varphi \, dr$$

$$= 2\pi \left. \frac{\sin^2\varphi}{2} \right|_0^{\pi}$$

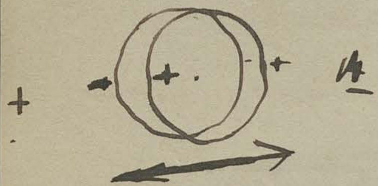


$$\cancel{2\pi a}$$

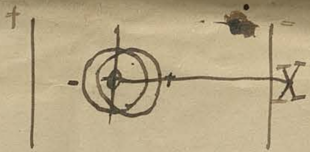
$$V_i = 2\pi \rho \left(a^2 - \frac{x^2}{3}\right)$$

$$\cancel{2\pi c a^2} - \frac{2\pi M}{3}(x+\delta)^2 - \cancel{2\pi c a^2} + \frac{2\pi c}{3} x^2$$

$$= \frac{4\pi M}{3} x \delta \quad = \frac{4}{3}\pi c x$$



POLSKIE
TOWARZYSTWO PRZYRODNIKÓW
IM. KOPERNIKA.

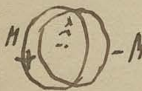


Lwów dnia ....

$$\varphi_i = c\int \frac{x}{r^3}\,dv = \pm\frac{4}{3}\pi c x$$

$$\varphi_a = c\int \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x}\,dv = c\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\frac{dv}{r}\right) = + c\,\frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \cos\varphi}{r^2} = +\frac{4\pi a^3 c}{3}\,\frac{x}{r^3}$$

Naturalnie ponieważ w środku wszystko się znosi wyznaczymy wtedy wystarczy



$$V' = -Ax + A_0$$

Pole zewnętrzne $\frac{\partial V'}{\partial x} = \cancel{\ldots} -A$

$$= A_0 + \left(A \pm \frac{4}{3}\pi c\right) r\cos\varphi$$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla^2 U = \underset{0}{\nabla^2 V} + \underset{0}{\nabla^2 \varphi} \\[2ex] K_1\frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{\partial U_2}{\partial r} = 0 \end{array}\right\} \text{warunki}$$

$$U_1 = U_2\big|_{r=a}$$

$$\begin{cases} U_1 = A_0 \pm Ax \pm \frac{4}{3}\pi c x \\ U_2 = A_0 \pm Ax + \frac{4}{3}\pi a^3 c \frac{x}{r^3} \end{cases}$$

$$= A_0 + \left(A + \frac{4}{3}\pi \frac{a^3 c}{r^3}\right) r\cos\varphi$$

$$\cancel{K_1\left[A \pm \frac{4}{3}\pi c\right]\cos\varphi + \left[A + \frac{4}{3}\pi\frac{a^3 c}{r^3}\right]\cos\varphi\Big|_{r=a} \pm \frac{8}{3}\pi\frac{a^3 c}{r^3}\cos\varphi\Big|_{r=a} = 0}$$

$$\cancel{(K_1 \pm 1)A \pm \ldots \frac{4}{3}\pi c\,[K}$$

$$\cancel{\frac{4}{3}\pi c = + \frac{A(1 \pm K_1)}{2}}$$

$$c = -\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

$$c = -\varepsilon\frac{\partial U}{\partial x} = -\varepsilon\left(-A \pm + \frac{4}{3}\pi c\right)$$

$$c = + \frac{\varepsilon A}{1 + \frac{4\pi}{3}\varepsilon} = \frac{3}{4\pi}\,\frac{A(K-1)}{2+K}$$

$\boxed{-+}$ $\boxed{-+}$ $\boxed{-+}$

$$\sum \mu \left[\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right] = \sum \mu\, l \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} = \alpha\, dv \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x}$$

$$\varphi = \int \left(\alpha \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} + \dots \right) dv =$$

$$= -\int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \dots\right) dv + \int \frac{\alpha \cos n x + \dots}{r} df$$

$$\alpha = -\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} \qquad = \int \rho'' \frac{dv}{r} + \int \sigma'' \frac{df}{r}$$

$$\rho'' = -\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) \qquad \sigma'' = -(\alpha \cos n x + \beta \dots)$$

$$= + \varepsilon \nabla^2 U + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \dots\right) \qquad = +\left(\varepsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial x}\right)$$

$=$

$$\cancel{U = \int \rho' \frac{dv}{r} + \int \sigma' \frac{df}{dr} = V + \int \rho'' \frac{dv}{r} + \int \sigma'' \frac{df}{dr}}$$

$$4\pi \rho' = (\rho + \rho'') 4\pi$$

$$4\pi\rho' = 4\pi\left[-K\nabla^2 U \dots + 4\pi\varepsilon\nabla^2 U + \dots\right] = -4\pi\nabla^2 U$$

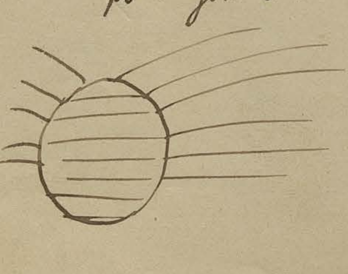
$$4\pi\sigma' = \left[\bar{K}_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - \bar{K}_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} + 4\pi\varepsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + 4\pi\varepsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial x}\right]$$

$$= -\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial x}\right)$$

więc $\rho''\sigma''$ ma znak przeciwny do $\rho'\sigma'$ i ρ znak przeciwny do U

Polaryzacya jednorodna

Kula w polu jednorodnem



Twierdzimy że ona będzie polaryzowana jednorodnie

t.j. że $\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \dots = 0$

$\alpha = c$

$\beta = 0$

$\gamma = 0$

$$(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b} + [\mathfrak{a}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{b}] = \ldots$$

$$\nabla(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b} + (\mathfrak{b}\nabla)\mathfrak{a} + [\mathfrak{a}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{b}] + [\mathfrak{b}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{a}]$$

$$\mathrm{curl}\,[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = (\mathfrak{b}\nabla)\mathfrak{a} - (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{a}$$

$$\mathrm{div}\,[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \mathfrak{b}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{b}$$

$$\sum \left(\mathfrak{f} - m\frac{d^2 r}{dt^2}\right) d\delta = 0$$

$$\sum \mathfrak{f}\, d\delta = \sum m \frac{d^2 r}{dt^2} dr$$

$$= \frac{d}{dt}\sum \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 dt$$

$$P_1^2 \quad = E_1^2$$

$$\sum m \frac{d^2 r}{dt^2} = 0$$

$$\sum m \frac{dr}{dt}\,dt$$

$$\cancel{(v\nabla)v = \frac{1}{2}\nabla(v^2) - [v\,\mathrm{curl}\,v]}$$

$$\cancel{\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} +}$$

$$\cancel{\frac{d\,\mathrm{curl}\,v}{dt} = \frac{\partial\,\mathrm{curl}\,v}{\partial t} - \mathrm{curl}\,[v\,\mathrm{curl}\,v]}$$

$$\cancel{\frac{\partial\,\mathrm{curl}\,v}{\partial t} = d}$$

$$\cancel{(\mathrm{curl}\,v\nabla)v - (v\nabla)\mathrm{curl}\,v \qquad = \frac{\partial\,\mathrm{curl}\,v}{\partial t} + (v\nabla)\,\mathrm{curl}\,v}$$

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 + \nabla_a(r\mathfrak{a}) + V.\mathrm{curl}\,\mathfrak{a}\,r = \underbrace{\mathfrak{a}_0 + \tfrac{1}{2}V\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{a}\,r}_{\mathfrak{b}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}V\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{a}\,r + \nabla_a(r\mathfrak{a})}_{\mathrm{curl}\,C = 0}$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}_0 + \tfrac{1}{2}\nabla(r\mathfrak{a}) + \tfrac{1}{2}V\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{a}\,r$$

$\Sigma S(\zeta - \gamma)(d\varpi_0 + V d\omega\, r)$

$v = v_0 + V\omega r$

$\frac{dv}{dt} = \frac{d\varpi_0}{dt} + V r \frac{d\omega}{dt}$

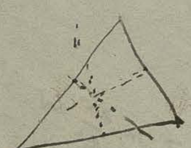
$\Sigma f\, dv = \int m \frac{d^2 r}{dt^2}\, dv$

$\frac{d\varpi_0}{dt} + V r \frac{d\omega}{dt}$

$V r \gamma = V r\, m \frac{d^2 r}{dt^2}\, dv$

$\parallel$

$\frac{d\varpi_0}{dt}$



$r = \frac{\alpha}{2} + x V\alpha n = \frac{\beta}{2} + y V\beta n = \alpha + z\frac{\gamma}{2} V\gamma n$

$\frac{\alpha}{2} + x \underbrace{V\alpha V\alpha\beta}_{\alpha S\alpha\beta - \beta.\alpha^2} =$

$\alpha S\alpha\beta - \beta.\alpha^2 = \frac{\beta}{2} + y\{\beta S\beta\alpha - \alpha.\beta^2\}$

$= \alpha + z\frac{\alpha - \beta}{2}$

$\frac{1}{2} + x S\alpha\beta = -y.\beta^2$

$-\alpha^2 \quad = \frac{1}{2} + y S\alpha\beta$

Jakie prawo działania sił ?

$$\sqrt{\lg a - \lg y} = \frac{1}{4\sqrt{}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2c \lg \frac{a}{x}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\lg\frac{a}{y}}}\;\frac{1}{\frac{a}{y}}\;\frac{a}{y^2}\;\frac{dy}{dt} \qquad X = \frac{c}{x}$$

$$t = \frac{2k}{a}\left[\sqrt{s(a-s)} + \frac{a}{2}\arccos\frac{a-2s}{a}\right]$$

$$dt = \frac{2k}{a}\left[\frac{1}{2}\frac{a-2s}{\sqrt{s(a-s)}} + \frac{a}{2}\frac{a}{\sqrt{a^2-(a-2s)^2}}\cdot\frac{-2}{a}\right]ds = -\frac{2ks}{a\sqrt{s(a-s)}}ds = -\frac{2k}{a}\sqrt{\frac{s}{a-s}}\,ds$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{a}{2k}\sqrt{\frac{a-s}{s}}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{a}{2k}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{a-s}}\left(-\frac{1}{s} - \frac{a-s}{s^2}\right)\frac{ds}{dt} = -\frac{a}{4k}\sqrt{\frac{s}{a-s}}\;\frac{a}{s^2}\;\frac{ds}{dt} = \frac{a^2}{8k^2}\;\frac{a}{s^2}\ ?$$

$$x = \frac{a}{k}\left(1-e^{-kt}\right) \qquad X = -k\cancel{m}v_x$$

$$y = \frac{g+bk}{k^2}\left(1-e^{-kt}\right) - \frac{g}{k}t \qquad Y = -kmv_y - gm$$

Zachowanie energii   wahadło, prawo Keplera, Komety $U + \frac{mv^2}{2} = \text{const}$

W których przypadkach istnieje potencjał i jaki ?

1). $X = +ax$ $\qquad U = -\frac{a}{2}(x^2+z^2) + gy$

$Y = g$

$Z = +az$

2). $X = ax + by$

$Y = bx + cz$

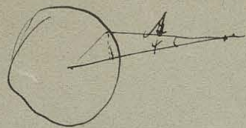
$Z = bz$

3). $X = +a \sin\alpha y$

$Y = +a\alpha x \cos\alpha y$ $\qquad U = -ax\sin\alpha y$

Obliczenie siły bezpośrednio

$$\frac{2\pi a^2 \sin\varphi\, d\varphi\, \cancel{\ldots} \cos\psi}{s^2}$$



$$s^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi$$

$$\cos\psi = \frac{r - a\cos\varphi}{s}$$

$$\frac{a^2+r^2-s^2}{2ar} = \cos\varphi$$

$$\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{s\,ds}{ar}$$

$$2\pi a^2 \int \frac{r - a\cos\varphi}{(a^2+r^2-2ar\cos\varphi)^{3/2}} \sin\varphi\, d\varphi = \int \frac{r - \frac{a^2+r^2-s^2}{2r}}{s^3} \frac{s\,ds}{ar} =$$

$$= \int \frac{r^2-a^2+s^2}{2ar^2 s^2}\, ds = \frac{1}{2ar^2}\underbrace{\int ds}_{2a} \;\cancel{+}\; \frac{r^2-a^2}{2ar^2}\underbrace{\frac{1}{s}\Big|}_{\frac{1}{a+r} - \frac{1}{r-a}}$$

$$\frac{1}{r^2} \quad + \quad \frac{1}{r^2} \quad = \frac{4\pi a^2}{r^2}$$

Znaczenie równania $\nabla^2 U = -4\pi\rho$ np. dla powierzchni ziemi; w morzu

---

O Grawitacji

Najnowsza teorja księżyca: Brown:

$$\frac{1}{r^{2 \pm 0{\cdot}00000004}}$$

Prawo pewne dla planet wszystkich odstępów rzędu

dla pow. ziemi: Newton: $T_{☾} = 27^d\, 7^h\, 4^m = 2\,360\,580^{sec}$ | $R_{☾} = 60_a$

$a =$

$$\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 \frac{1}{R} : g = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{a^2}$$

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}\frac{R^3}{a^2} = 4.\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 .60.6370000.3600 =$$

$|\, g \cdot 9088$

ale czy też ważne dla mniejszych odstępów niżeli promień ziemi?

Nieco o grawitacyi

Jeśli gęstość zmienna:

$U = \frac{2\pi a^2 \sigma \sin\varphi \, d\varphi \, da}{} = \frac{4 a^2 \pi \sigma}{r}$ | ~~$4a\pi\sigma$~~

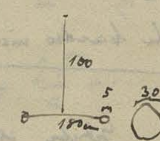
$\int \frac{4 a^2 \pi \rho \, da}{r} = M \frac{\int \rho a^2 da}{r}$ więc dla punktów zewnętrznych rzecz obojętna

co do Ziemi wewnątrz niewiadome prawo rozkładu ρ; powierzchnia $\rho = 2'5$, średnia $= 5'6$

Z kąd wiemy to?

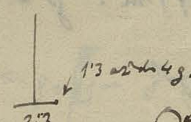
Metod mnóstwo

Cavendish waga skręceń 5'45



Boys " ~~nić~~ nitka kwarcowa

moment skręcenia z czasu wahania i momentu bezwładn.

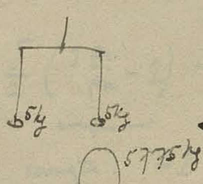


7'4 kg Rezultat 5'527

Peter Mann w próżni: 5'5271 Ziemi: $5'985 \cdot 10^{27}$

Eötvös trochę podobnie 5'55

Waga zwykła



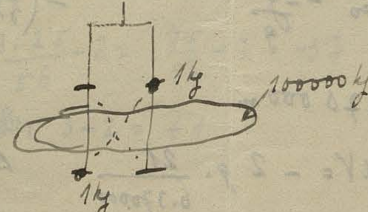
$\Delta_p = 0'589$ mg

Jolly $\Delta = 5'7$

Rachunek!

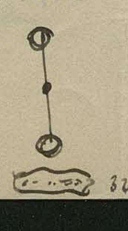
Poynting 5'49

Krigar Menzel (Spandau)



$\Delta = 5'505$

Wilsing Differentialpendel



5'579

Rachunek!

Wiele mniej dokładne inne:

Zboczenie pionu   Bouguer (1749) Chimborazo

Maskelyne (1776) Shehallion $\Delta = 4{\cdot}7$

James & Clarke (1856) Arthurs Seat $5{\cdot}32$

Bergat staw wody wypuszczony $5{\cdot}41$

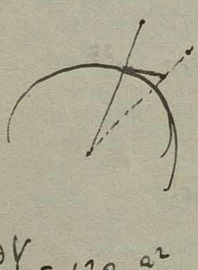
Wobec tego: Mendenhall (1880) Fusi-yama $\Delta = 5{\cdot}77$

Także (ale bardzo niedokładne) ze zmiany g w głębokości

~~[illegible]~~ Gdyby ziemia jednorodna, to g musiałoby się zmniejszać w głębokości

Airy i Pribram (Sterneck) ~~[illegible]~~ wzrost ~~[illegible]~~ 991 m: $g = 1{\cdot}0000885\, g_0$

co pochodzi z lekkości warstw zewnętrznych



$$V_{x=0} = -g\frac{a^2}{r^2} = g\frac{a^2}{(a+y)^2}$$

$$X_{y=0} = -g\frac{a^2}{(a^2+x^2)}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

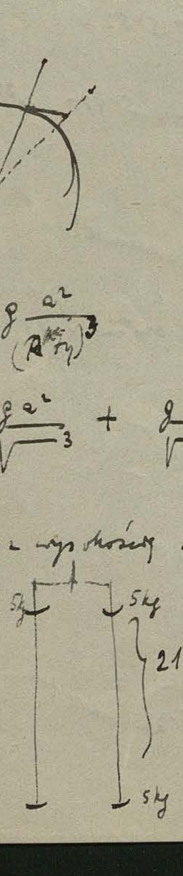
$$\frac{\partial V}{\partial y} = +2g\frac{a^2}{(a+y)^3}\Big|_{y=0} = +\frac{2g}{a} = -$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{ga^2}{\sqrt{\ }^3} + \frac{ga^2x^2}{\sqrt{\ }^5}\Big|_{x=0} = -\frac{g}{a}$$

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) = -\frac{2g}{a}+\frac{g}{a}+\frac{g}{a}=0$$

Zmiana z wysokością: $a = 6\,370\,000$ m

Jolly:



$$dV = -2g\cdot\frac{21}{6\,370\,000}$$ $\Delta = 33$ mg

50

We wnętrzu n. p. w głębokościach morza: $\Delta V = +4\pi k$ bo przyroszcz

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{2g}{a} = -4\pi$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -4\pi + \frac{2g}{a} \qquad \text{więc} \quad \frac{\partial V}{\partial(-y)} = 4\pi k - \frac{2g}{a}$$

$$\frac{\frac{4}{3}a^3\rho_m\pi k}{a^2} = g_0$$

$$a\rho_m = \frac{3g_0}{4\pi k}$$

Także bezpośrednio: $V = \frac{Mk}{r^2} = \frac{M_0 - 4a^2\pi\rho_e\delta}{(a-\delta)^2}k = g_0\left[\frac{1-\frac{4a^2\pi\delta\rho_e}{\frac{4}{3}a^3\pi\rho_m}}{\left(1-\frac{\delta}{a}\right)^2}\right]$

$$= g_0\,\frac{1-\frac{3\delta\rho_e}{a\rho_m}}{\left(1-\frac{\delta}{a}\right)^2} = g_0\left(1-\frac{3\delta\rho_e}{a\rho_m}\right)\left(1+\frac{2\delta}{a}+\dots\right)$$

$$= g_0\left[1-\delta\left(\frac{3\rho_e}{a\rho_m}-\frac{2}{a}\right)+\dots\right.$$

$$= g_0\left[1-\delta\underbrace{\left(\frac{4\pi k}{g_0}-\frac{2}{a}\right)}\right]$$

$k = 0{\cdot}000\,000\,067$ cgs

$$\frac{6{\cdot}7\cdot10^{-8}\cdot12{\cdot}6}{10^3} - \frac{2}{6{\cdot}37\cdot10^8}$$

$$= 8\cdot10^{-10} - 3\cdot10^{-9}$$

$$V = g_0\left[1-\frac{\delta}{a}\underbrace{\left(3\frac{\rho_e}{\rho_m}-2\right)}+\dots\right]$$

zewnątrz: -2

zmieni znak jeżeli $\rho_e > \frac{2\rho_m}{3}$

w wodzie: $\frac{3}{5{\cdot}6} - 2 = -1{\cdot}4$

w skale: $\frac{3\cdot2{\cdot}5}{5{\cdot}6} - 2 = \frac{7{\cdot}5}{5{\cdot}6} - 2 = -0{\cdot}7$

w ziemi jednolitej: $3 - 2 = +1$

n. p. $\delta = 1000$ m

$a = 6{,}370$ km $\qquad \frac{1}{64}\,\%$ pro 1 km

Naturalnie wypadnie inaczej jak by nie było bez wyżyn:

Np. Plateau, wyżyna grubości δ

Dozyje z kuli i z krążka:

$$\gamma = g_0\left[1 - \frac{2\delta}{a}\right] + \underbrace{2\pi k \delta}_{2\pi k \rho_e \delta} \qquad 4\pi k \rho_m = \frac{3 g_0}{a}$$

$$= \frac{3 g_0}{2a}\,\delta\,\frac{\rho_e}{\rho_m}$$

$$= g_0\left[1 - \frac{\delta}{2a}\left(4 - \frac{3\rho_e}{\rho_m}\right)\right]$$

$$\underbrace{\frac{3\cdot 2{\cdot}6}{5{\cdot}6} = 1{\cdot}3}_{2{\cdot}7}$$

więc zmniejszenie ~~ciężkości~~ ciężkości na wyżynie, ale nie tak znaczne jak w balonie

przyjmując przybliżenie $\frac{\rho_e}{\rho_m} = \frac{1}{2}$

będzie $\gamma = g_0\left[1 - \frac{\delta}{a}\left(2 - \frac{3}{4}\right)\right] = g_0\left[1 - \frac{5\delta}{4a}\right]$

Formułkę Bouguera używamy do redukcji ciężkości z wyżyny na poziom morza

---

Zmiana wskutek obrotu ziemi

$$g = g_{90} - \left(\frac{2\pi a \cos\varphi}{T}\right)^2 \frac{\cos\varphi}{a\cos\varphi}$$

$$= g_{90}\left(1 - \underbrace{\frac{4\pi^2 a}{T^2}}_{\frac{1}{290}} \cos^2\varphi\right)$$

Do tego wskutek eliptyczności:

później udowodnimy

$$g = g_{90}\left(1 - \frac{1}{552}\cos^2\varphi\right) \text{ zatem } g = g_{90}\left(1 - \frac{1}{191}\cos^2\varphi\right)$$

Mimo tych redukcji na poziom morza i na 45° szer. geogr. rezultaty w różnych miejscach ziemi

~~Jeśli~~ znając δ, i φ ~~[illegible]~~ dla każdego miejsca obliczyć g ; różnica tego = Δ 51

Np. Greenwich Δ=0 g = 981·264

Wiedeń	g = 980·913	Δ = +26
Warszawa	981·224	−20
Budapeszt	980·887	+64
Trafoi (Tyrol)	980·570	−167
Landeck "	980·780	−154
Salt Lake City	980·050	−262
Denver Col.	979·983	−252
More (Indien) 4690 m	979·169	−498
~~[illegible]~~ Rzym	980·373	+56
Capri	980·263	+169
Shetland	982·229	+88
St. Helena	978·786	+225
Mauritius	978·959	+224
Honolulu	978·059	+257

Clairaut wzorem $\alpha = \frac{5}{2}\,\frac{f_{odśrodk.}}{g_0} + \frac{g_{eq} - g_{pol}}{g_{eq}}$

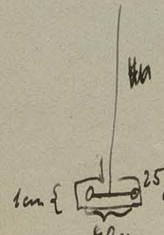
$g_\varphi = g_{eq} + (g_{pol} - g_{eq}) \sin^2\varphi$

$g_{pol} = 983{\cdot}136$

$g_{eq} = 978{\cdot}057$

$g_{45} = 980{\cdot}596$

Metoda Eötvösa



czas ważenia ~~[illegible]~~ 10 – 20 min!

Taki czuły że wykazałby δ = 1/2′

gdyby w odległości 1 m od niego mucha się podniosła o 1 mm

Tvrzení Laneovo do vnitřku pokud:

$-4\pi \cdot 4a^2\pi\, \delta \cdot \rho_c = 4a^2\pi$ ---

Mesa $\odot = 324.000$ ♁ $= 1{\cdot}9 \cdot 10^{33}\ g.$

♁ $= 6 \cdot 10^{27}\ g$

♁ $= 17{\cdot}6''$ ze $\odot$

$\odot = 32'\ 2$ ♁

$2{\cdot}5 \frac{\text{gcal}}{\text{min}}$

$= 3{\cdot}8 \cdot 10^{33} \frac{\text{gcal}}{\text{sek}}$

☾ $m = 0{\cdot}0122\ m$♁

$r = 0{\cdot}27\ r$♁

$g = 0{\cdot}167\ g$♁

$\rho = 0{\cdot}62\ \rho$♁

$\frac{.324.000}{\cancel{110^2}\ 108{\cdot}6^2} = 27$

$\rho = 0{\cdot}25\ \rho$♁

$k\frac{M}{a} = ga$

$\sqrt{2ag} = \sqrt{2 \cdot 6 \cdot 10^{4}}$

$= \sqrt{1{\cdot}2 \cdot 10^{4}} = 11\ km$

$4\ \delta\ 4^{+}$

Źródła Poynting & Thomson Properties of matter

~~[illegible]~~ planety i ☾

$$\frac{k m_1 m_2}{r^2} = m_1 \omega^2 r \qquad \frac{m_\odot}{m_\oplus} = \left(\frac{27}{365}\right)^2 \left(\frac{150.10^6}{6.360 \cancel{00} 0}\right)^3 = 300.000$$

$$\frac{150.10^6}{20.10^4} = \frac{1500}{2}$$

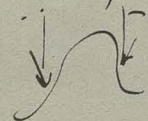
gęstość ⊙ 0·25

$\cancel{g.f}$ $g = f.\ 3626 \neq 60^2$

k [illegible] gęstość [illegible] masa ziemi

1740 Bouguer Peru Chimborazo 8'' [illegible] — [illegible] gęstość [illegible] 12''

1772 Maskelyne Schiehallion 12''



~~21~~''

zatem gęstość ziemi $1\frac{4}{5}$ = gęstość $2\frac{1}{2}$

$1\frac{4}{5} \cdot 2\frac{1}{2} = 5$

Nierówności [illegible] przed [illegible]

Mitchell

Cavendish 1798

$$\frac{k M m}{r^2} l = \mu \theta$$

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{K}{\mu}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{4\pi^2 K \theta}{\tau^2} = \dfrac{k M m l}{r^2} \\ g = \dfrac{4}{3}\pi \dfrac{R^3 \rho}{R^2} k = \dfrac{4}{3} k \pi R \rho \end{array} \right.$$

$l = 3$ ~~stopy~~

$\bigcirc^m$ Pb = 2 cale

◯ 12 cali

$\rho = 5{\cdot}45$

$\rho = \frac{1}{4} \ldots$

Reich, Baily, $\underbrace{\text{Cornu \& Baille}}_{1870}$ 5·5

Boys Quartz fibres [illegible] temperatur [illegible] 1895 $\theta = 351 - 577$ (scala [illegible])

m Au ~~0·2 15~~ 5 mm

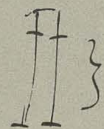
$l = 2{\cdot}2$ cm

$k = 6{\cdot}6576 . 10^{-8}$

$\rho = 5{\cdot}5270$

Braun 1896 powietrznie. $\rho = 5.52725$

Wilsing[1886] 5.579

Jolly 1878  21 m $\frac{32\ mg}{5\ kg}$ 5.69

Richarz Krigar-Menzel 1898 2 m $\frac{1.2453\ mg}{1\ kg}$ 5.505

Poynting

0 Pol

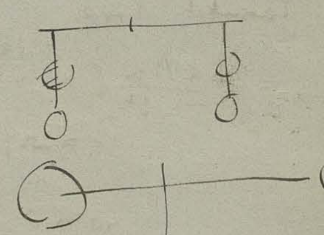
350. lb $\delta = \frac{4}{10}\ mg$ $\rho = 5.4934$

prawo $\frac{1}{r^2}$ zgodnie ważne tyl bab

Austin & Thwing 1897 permeability

Poynting & Gray not direction 1899 ~~~~ Kule z Quartzu

Chemiczne związki Landolt, Hydrodollen



$1g \xrightarrow[1\ cm]{} 1g$ $F = \frac{Dyn}{15.10^6}$

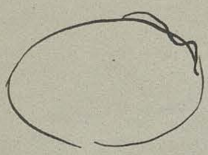
10 : 15

2 : 3 = 6

Pojęcie Geoidy

(swobodnej)
danej powierzchni ekwipotencjalnej odpowiada tylko jeden układ ciężarów

więcej



$$\overline{W}_1 = V_1 + v \leftarrow \text{siła przyciąg.}$$

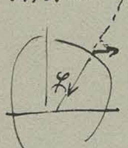
$$\overline{W}_2 = V_2 + v$$

$u = W_1 - W_2 = V_1 - V_2$ w powierzchni $= 0$

$\nabla^2 W_1 = -4\pi\rho \quad \Delta^2 u = 0$ w swobodnej przestrzeni

$$g = g + f + g\frac{2h}{R}$$

odśrodk.



$g - \frac{\omega^2 r^2}{T} \cos^2 \varphi$

$$\frac{g_{\frac{\pi}{2}} - g_0}{g_0} = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 r^2}{T} - e$$

Kondensacja Helmerta Redukcje: ...
Dodatkowe badania ...

~~... ...~~

Helmert: (1900) 1901 $g = 978.046\,[1 + 0.005302 \sin^2\varphi - 0.000007 \sin^2 2\varphi]$

1884 $g = 978.000\,[1 + 0.005310 \sin^2\varphi]$

$$e = \frac{1}{298.25}$$

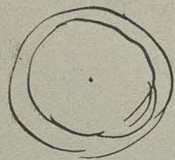
Hecker na oceanach Hypsometr
1903

lokalne anomalie (Sternek) Karpaty $\Delta g = 0.06$

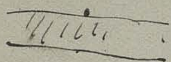
Pratt (Kompensacja) Alpy austriackie $\Delta g = -0.12$

na oceanach Hecker lokalne dist.

Czasowe zmienności



$$g_0 = g - \frac{4\rho\pi^2 h}{R}$$



$x = 2\pi b$

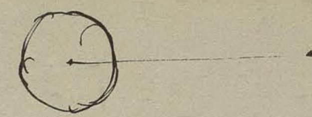
0	7.61 − 12.16
0.1	− 11.28
0.2	10.43
0.3	− 9.63
0.4	7.61 − 8.53
0.5	7.87 − 8.37
0.6	6.87 − 7.84
0.7	6.00 − 7.05
0.8	5.42 − 5.81
0.9	4.05 − 4.38
1.0	1.60 − 2

Stieltjes

Wiechert 7.7 8.6

1/5 3 − 3.5

$$U_e = \frac{E}{\sqrt{r^2+p^2-2pr\cos\theta}} - \frac{E a}{p\sqrt{r^2+\left(\frac{a^2}{p}\right)^2-2r\frac{a^2}{p}\cos\theta}}$$



$$E = c p^2$$

$$= c p\left[1+\left(\tfrac{r}{p}\right)^2-2\tfrac{r}{p}\cos\theta\right]^{-\frac12} - \left[1+\left(\tfrac{r}{p}\right)^2+2\tfrac{r}{p}\cos\theta\right]^{-\frac12}$$

$$- c a p\left\{\left[r^2+\cdots\right]^{-\frac12} - \left[\right.\right.$$

$$= c p\left\{\cancel{1} + \tfrac{r}{p}\cos\theta - \cancel{\tfrac12\left(\tfrac{r}{p}\right)^2} \qquad \cancel{-1} + \tfrac{r}{p}\cos\theta - \cdots\right\}$$

$$- c\frac{ap}{r}\left\{\cancel{1} + \frac{a^2}{pr}\cos\theta \cdots \qquad \cancel{-1} + \frac{a^2}{pr}\cos\theta \cdots\right\}$$

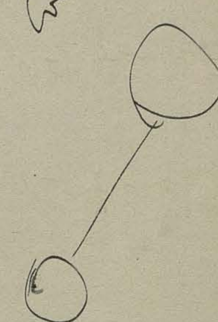
$$= 2\left(c r\cos\theta - c\frac{a^3}{r^2}\cos\theta\right)$$

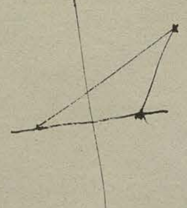
$$\frac{Ea}{p} =$$

$$\frac{a^2}{p}$$

$$U = C\left\{x - \frac{a^3 x}{r^3}\right\}$$

$$\sigma = -4\pi\frac{\partial U}{\partial n} = c\cos\theta\left(1+2\frac{a^3}{r^3}\right)$$





$$U = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} = c$$

$$\frac{1}{(x-a)^2+y^2} = c^2 + \frac{2c}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} + \frac{1}{(x+a)^2+y^2}$$

$$U_e = \frac{a}{r}V + \frac{E}{R} - \frac{a}{r}\frac{E}{p}\left[1 + \frac{a^2}{rp}P_1 + \frac{a^4}{r^2p^2}P_2 + \dots\right]$$

$$= \frac{aV}{r} + \frac{E}{R} - \frac{aE}{rp}\left[1 \cancel{+} 2\frac{a^2}{rp}\cos\theta + \frac{a^4}{r^2p^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{aV}{r} + \frac{E}{\sqrt{r^2+p^2 \cancel{+} 2rp\cos\psi}} - \frac{aE}{\sqrt{r^2p^2 \cancel{+} 2a^2rp\cos\psi + a^4}}$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial r} = -\frac{aV}{r^2} - \frac{E(r-p\cos\psi)}{\sqrt{\quad}^{\,3}} + aE\frac{(rp^2 - a^2p\cos\psi)}{\sqrt{\quad}^{\,3}}\Bigg|_{r=a}$$

$$= -\frac{V}{a} - E\frac{a - \cancel{p\cos\psi} \cancel{+} \frac{p^2}{a} + \cancel{p\cos\psi}}{(a-p\cos\psi)^3} = \cancel{-\frac{aV}{a}} \cancel{+} \frac{E(p^2-a^2)}{}$$

$$= -\frac{1}{a}\left(V - \frac{E(p^2-a^2)}{R^3}\right)$$

$$\int r\theta\, dv$$

$$E_1^2(p_2^2+s^2) = \Sigma_2^2(p_1^2+s^2) \qquad \Sigma_1^2 p_2 = \Sigma_2^2 p_1$$

$$\frac{p_1}{p_2}(p_2^2+s^2) = p_1^2+s^2$$

$$p_1p_2^2 - p_1^2p_2 = s^2(p_2-p_1)$$

$$p_1p_2 = s^2$$

$$p_2 = \frac{s^2}{p_1} \qquad \Sigma_2^2 = \frac{\Sigma_1^2 s^2}{p_1^2}$$

$$\Sigma_2 = \frac{\Sigma_1 s}{p_1}$$

$$U = \frac{\Sigma_1}{\sqrt{p_1^2 + a^2 - 2ap_1\cos\theta}} - \underbrace{\frac{\Sigma_1 a}{p_1\sqrt{\left(\frac{s^2}{p_1}\right)^2 + a^2 - 2\frac{as^2}{p_1}\cos\theta}}}$$

54e 9

Tytuły:

Potential: Tumlirz Potential.

Clausius Potentialfunktion u. Pot.

Betti Lehrb. d. Pot. Theorie u. Anw. s. Elektrostatik u. Magn.

Neumann Vorl. ü. Th. d. Pot. u. d. Kugelf.

Korn Lehrb. d. Pot. th.

Korn Abh. d.

Lejeune Dirichlet → Vorl.

Gauss Ostw. Klass. ...

Beer Einleit. i. d. Elektr. Magn. u. El. dyn.

Riemann Schwere El. u. Magn.

Mascart-Joubert

Maxwell

Föppl

Cohn d. el. magn. Feld

J. J. Thomson

S. Thompson (prakt.)

Exner ~~Elektrostatik~~ Elektricität

Lang

Auerbach

Voigt

Winkelmann

Christiansen

$$\cancel{(1+4\pi\kappa_1)\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_2}=-4\pi\kappa\frac{\partial V}{\partial n_1}}\qquad \cancel{\varphi=U-V}$$

$$\cancel{(1+4\pi\kappa_1)\frac{\partial U_1}{\partial n_1}+\frac{\partial U_2}{\partial n_2}}$$

$$\cancel{-(1+4\pi\kappa_1)\frac{\partial V_1}{\partial n_1}-\frac{\partial V_2}{\partial n_2}=-4\pi\kappa\frac{\partial V_1}{\partial n_1}}$$

$$=0$$

$$\frac{\partial}{\partial n_1}(U_1-V_1)+\frac{\partial(U_2-V_2)}{\partial n_2}=-4\pi\kappa_1\frac{\partial U}{\partial n_1}-4\pi\kappa_2\frac{\partial U_2}{\partial n_2}$$

$$\mu_1\frac{\partial U_1}{\partial n_1}+\mu_2\frac{\partial U_2}{\partial n_2}=\frac{\partial V_1}{\partial n_1}+\frac{\partial V_2}{\partial n_2}=0$$

IV indukcya

$\cancel{J=\kappa B}$

$J=\kappa H$

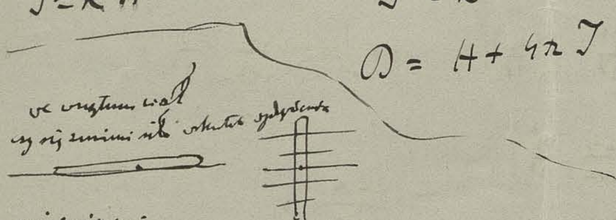
$$B=\mu H=(1+4\pi\kappa)H$$

$$J=\kappa H$$

$$B=H+4\pi J$$

μ zdolność magn.

κ podatność " "



we wszystkim wid[?]

czy się zmieni ile wewnątrz cylindra

nie zmieni się

wszystko wewnątrz

[illegible] H

zmieni się

to co było w cylindrze było B

wsze teorie potencyalne

φ U V

odpowiadają

J H B

wszędzie B ciągłe wraz z pochodnymi

$\left.\begin{matrix}H\\J\end{matrix}\right\}$ ciągłe ale pochodne tylko styczne

~~[illegible]~~ Różnica [illegible] że tam są takie przewodniki i [illegible] T-[illegible] [illegible]

Tworzy magnetyzm [illegible] ale w każdym razie div = 0

K	Bi	$-14 \cdot 10^{-6}$
	Sb	$-5 \cdot 10^{-6}$
	H_2O	$-0{\cdot}8 \cdot 10^{-6}$
	Hg	$-2{\cdot}6 \cdot 10^{-6}$
	O_2	$+0{\cdot}12 \cdot 10^{-6}$
	H_2	$-0{\cdot}034 \cdot 10^{-6}$

$$U_e = cx\left[1 - \frac{\mu-1}{\mu+2}\,\frac{a^3}{r^3}\right) \qquad -cx\left[-\right.$$

$$U_i = \cancel{cx[\ldots]}\; cx\,\frac{3}{\mu+2} \qquad -cx\,\frac{3}{\mu+2}$$

$$U_e = cx\left[1 - \frac{\mu-1}{\mu+2}\left(\frac{a^3}{r^3} - \frac{\alpha a_1}{r^3}\right)\right] \qquad cx\left[1 - \frac{\mu-1}{\mu+2}\,\frac{a^3}{r^3}\right]$$

$$\cancel{U_m = cx\left[\frac{3}{\mu+2} + \alpha\frac{\mu-1}{\mu+2}\,\frac{a^3}{r^3}\right]} \qquad \frac{3cx}{\mu+2}$$

$$U_i = \cancel{c}\,cx\,\frac{3}{\mu+1} - \alpha) -$$

we wnętrzu

$$\boxed{\frac{9\mu}{9\mu + 2(\mu-1)^2(1-\beta)}}$$

$$\beta = \frac{R_1}{R_2}$$

izolującej
indukcji $\frac{3\mu}{\mu+2} > 1$

$\mu = 300$

$$\frac{9}{2/300} \quad 3/10$$

$$\frac{\cancel{2}1}{20} = \frac{1}{0{\cdot}25}$$

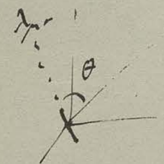
potencyał wypadkowy? sił magn. element. równoległych $U = \frac{\alpha}{r^3}\Sigma M$

więc proporcjonalny do ΣM

zatem ogólnie rozkładając na elementy objęt.

$U = \sum \frac{1}{r^2}\cos\theta\, \mathfrak{I}\, dv$ gdzie ...

gdy nachylenie osi



$$\Phi = \int \frac{1}{r^2}\,\mathfrak{I}(\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu)\,dv$$

$$= \int \frac{A(x-\xi)+B(y-\eta)+C(z-\zeta)}{r^3}\,d\xi\, d\eta\, d\zeta = \int\left[A\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial\xi}+B\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}+C\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right]d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$= \int \frac{(Al+Bm+Cn)}{r}\,dS - \iiint \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}\left[\frac{\partial A}{\partial\xi}+\frac{\partial B}{\partial\eta}+\frac{\partial C}{\partial\zeta}\right]$$

$$= \int\frac{\sigma\, dS}{r} - \int\rho\,\frac{dv}{r}$$

$\sigma = Al+Bm+Cn = \mathfrak{I}\cos\vartheta$

$$= \int\frac{\mathfrak{I}\cos\vartheta}{r}\,dS - \int\rho\,\frac{dv}{r}$$

$\rho = \frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}$

Siła ~~magnetyczna~~ $-\frac{\partial V}{\partial x}$ ...

Siła pochodząca z magn. elementarnych $-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ...

~~zatem~~

$-4\pi\sigma = \frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial n_2}$

$-4\pi\rho = \nabla^2\Phi$

$A = -\kappa\frac{\partial(\overbrace{V+\Phi}^{U})}{\partial\xi}$ $B = -\kappa\cdot$ $C=$

~~więc tak samo jak w elektr.~~

~~więc przy podstawieniu~~

$$-4\pi\rho = \nabla^2\Phi = 4\pi\kappa\,\nabla^2(V+\Phi)$$

$$\nabla^2\Phi\,(1+4\pi\kappa) = 4\pi\kappa\,\nabla^2 V = 0$$

bo nie ma mas magnetycznych wolnych? także też $\frac{\partial V}{\partial n_1}, \frac{\partial V}{\partial n_2} = 0$

więc $\nabla^2\Phi = 0$

solenoidalna magn.

$\mathfrak{I} = -\kappa\, \nabla U = +\kappa R$

zatem

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial n_2} = -4\pi\kappa_1\frac{\partial(V+\Phi)}{\partial n_1} \pm 4\pi\kappa_2\frac{\partial(V+\Phi_2)}{\partial n_2}$$

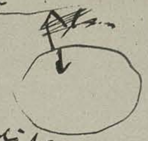
więc pozostaje $\Phi = \int\frac{\kappa\frac{\partial\varphi}{\partial n}}{r}\,dS$

Pole wewnątrz ∇V tylko nie może pozostać stałe w danym punkcie bo nie ma tam nieciągłości, więc ...

Ogólnie $\varphi = \int \overset{\sigma}{(J \cos\theta)} \frac{dS}{r} - \int \rho \frac{dv}{r}$

$$\sigma = -[Al + Bm + Cn]$$

jeżeli kierunek normalny ku środkowi



$$\rho = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}$$

$$-4\pi\sigma = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2}$$

$$-4\pi\rho = \nabla^2 \varphi$$

Zakładając $A = -\kappa \frac{\partial (V+\varphi)}{\partial x} = -\kappa \frac{\partial U}{\partial x}$

$B = \qquad = -\kappa \frac{\partial U}{\partial y}$

$C =$

$\boxed{\nabla U = f}$!

ogólnie z drugiej strony

$$\sigma = +\kappa \left(\frac{\partial U}{\partial x} l + \frac{\partial U}{\partial y} m + \frac{\partial U}{\partial z} n \right) = +\kappa_1 \frac{\partial U_1}{\partial n_1} + \kappa_2 \frac{\partial U_2}{\partial n_2}$$

$$\rho = -\kappa \nabla^2 U$$

---

więc kombinując:

$$-4\pi\sigma = -4\pi\kappa_1 \frac{\partial U_1}{\partial n_1} - 4\pi\kappa_2 \frac{\partial U_2}{\partial n_2} = \frac{\partial (U_1 - V)}{\partial n_1} + \frac{\partial (U_2 - V)}{\partial n_2}$$

$$(1 + 4\pi\kappa_1) \frac{\partial U_1}{\partial n_1} + (1 + 4\pi\kappa_2) \frac{\partial U_2}{\partial n_2} = \frac{\partial V_1}{\partial n_1} + \frac{\partial V_2}{\partial n_2} = 0$$

$$\mu_1 \frac{\partial U_1}{\partial n_1} + \mu_2 \frac{\partial U_2}{\partial n_2} = 0$$

podczas gdy mamy $\frac{\partial U_1}{\partial n_1} = \frac{\partial U_2}{\partial n_2}$

$$-4\pi\rho = 4\pi\kappa \nabla^2 U = \nabla^2 (U - V)$$

$$(1 + 4\pi\kappa) \nabla^2 U = \nabla^2 V = 0$$

wzgl. κ bardzo mało

Bi $\kappa = - \cancel{\ldots}\, 15 \cdot 10^{-5}$

Hg $- 2{\cdot}6 \cdot 10^{-6}$ diamagn.

H_2O $- 0{\cdot}8 \cdot 10^{-6}$

CS_2 $- 0{\cdot}8 \cdot 10^{-6}$

$FeSO_4$ $+ 6 \cdot 10^{-6}$

O_2 $+ 0{\cdot}157 \cdot 10^{-6}$ paramagn.

H_2 $+ 0{\cdot}0003 \cdot 10^{-6}$?

$Ni = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$ Fe

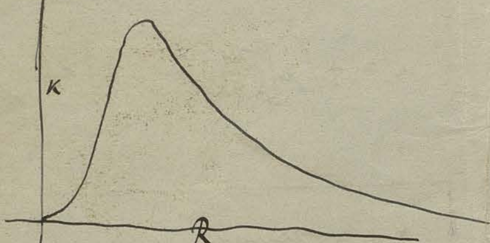
Co między Ni i Fe

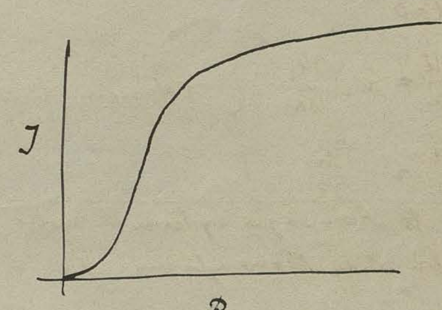
skutek potrzebny ... gdy ... drog. !

... zielone

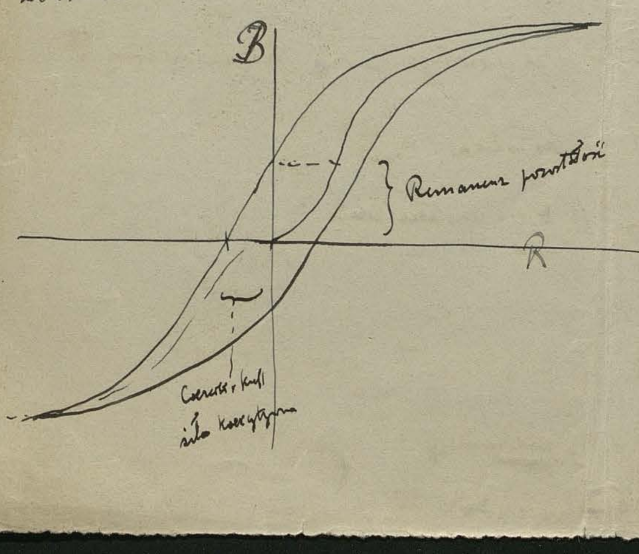
Fe

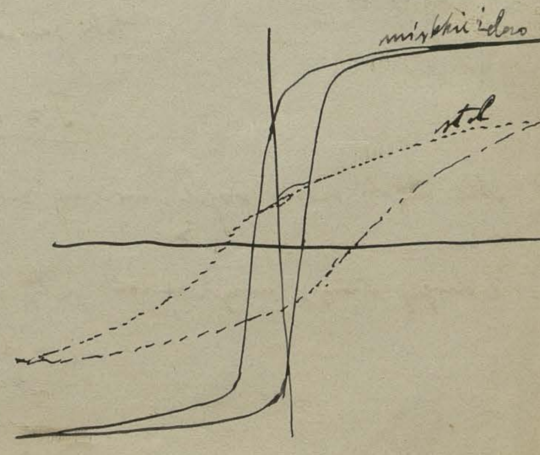
		miękki					
K	0	9	43	179	206	122	58
R	0	0·32	2·14	3·24	4·50	9·79	21·7



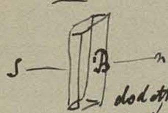


w żelazie

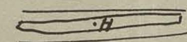




Ponieważ siły Newton[owskie] – zatem $\Delta^2 U = 0$ w przestrzeni zewnętrznej (później może? magnesu samego)



$\mathfrak{B} = H + 4\pi J$



wytworzyć pole sił

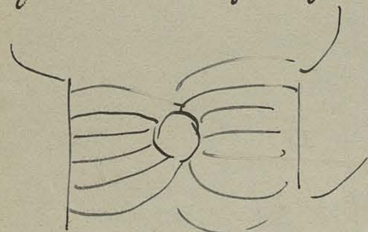
dodatkowa siła pochodząca z magn. powierzchni.

$\frac{\partial U}{\partial n} = -4\pi\sigma$

gęstość powierzchni $= J$

pokazuje się

Zjawiska indukcji magnet. n.p.



więc hipoteza z powodu analogii z ~~..~~ odpowiednimi zjawiskami dielektrycznymi wprowadzamy analogiczną teorię:

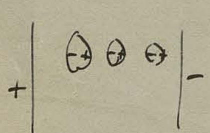
$\Delta^2 U = 0$

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} &= \mu_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} \\ \frac{\partial U_1}{\partial s} &= \frac{\partial U_2}{\partial s} \end{aligned}\right\}$$ załamanie linij sił

$$W = \frac{1}{2}\int \mu \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \quad \right] d\tau$$

to właściwie już wystarczy dla nauki

Jak sobie wtedy tłumaczyliśmy K: Faraday-Mossotti-Clausius



Tak samo tutaj: że powstaje pewne namagnesowanie J

$\underline{J = \kappa H}$ hipoteza

Ale w jaki sposób w ogóle możemy zmierzyć H we wnętrzu ciała?

Z drugiej strony z naszych równań $\mu_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial U_2}{\partial n}$:

$$\mu H = \mathfrak{B} = H + 4\pi J = H(1 + 4\pi\kappa)$$

$\mu = 1 + 4\pi\kappa$ ← podatność magn.

(przenikliwość magnet.) zdolność magn.

Ortotermiczna granica ? dla małych pól (Baur)

H	B	J	κ	μ
3630	24700	1680	0·46	6·80
9500	30200	1650	0·17	3·18
11180	31560	1620	0·15	2·82

H	J	κ
0·0158	0·263	16·5
0·0308	0·547	17·6
0·0708	1·633	23·0

Ewing & Low

H	B	J	κ	μ
24500	45350 24500 20850 : 4 5212·5	1660 1680 Steinmetz	0·07	1·85

więc $J_{max} \neq 1700$

Energia nie jest już funkcją ciągłego BH, ale możemy przyjąć $dW = \frac{1}{8\pi}\int H\,dB\,dv$

$W = \frac{1}{8\pi}\int \mu\, \cancel{H^2\,dv = \frac{1}{8\pi}\int BH}\,dv$ jeśli jednorodne: $= \frac{BH}{8\pi}\int dv$.

A przy procesie kołowym cały [illegible]  = 'ilość energii rozproszonej'.

Steinmetz $W_{rozpr.} = 0{\cdot}002 . R^{1{\cdot}6}$ więc tu gorzej [illegible]
ogrzanie

Czy można odmagnesować żelazo namagn. ?

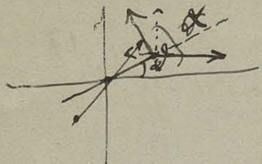
1). zegarek namagn. ↕

2). ~~[illegible]~~ ogrzać powyżej 800°

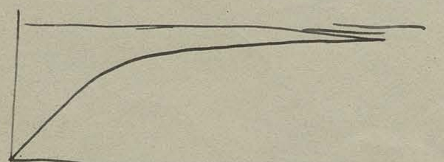
Przewodnictwo magn. (Hopkinson)

~~Weber~~ Poisson rozdział.

Weber skupienie drobin



$$tg\alpha = \frac{D\sin\alpha}{X + D\cos\alpha}$$



Maxwell że powróci do pierwotnej pozycji tylko dla ~~siły~~ wychyleń $< \beta_0$

dla większych nie powróci do pop. poz.

Ewing ciężenie siły   Langevin

Metoda Maxwella. $W = -\frac{1}{8\pi}\int K H^2 dv$

Siła w polu dielektr. i paramagn.

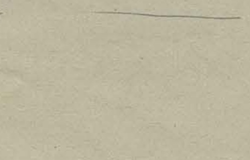
$$T = \frac{1}{8\pi}\int K \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{8\pi}\int D E\, dv$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int \mu \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{8\pi}\int B H\, dv$$

ilość linii polaryzacji dielektr. wychodzących z mas rozmieszczonych jest stała bo ~~m~~ magnetyczna powierz.

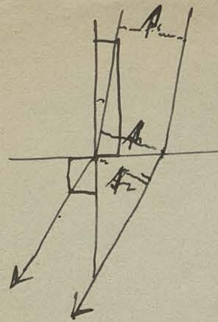
$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} K \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{D}{4\pi}$$

a w dobrym ciągu ilość się nie zmienia $D_{1n} = D_{2n}$



ilość linii wchodzących w kierunku normalnym do powierzchni

to się nie zmienia



$= \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}$

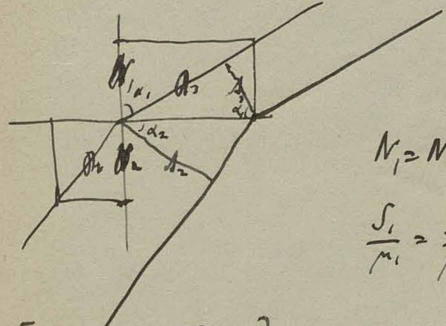
$s_1 : s_2 = \cos\alpha_1 : \cos\alpha_2$

$\overset{H}{F_1} : \overset{H}{F_2} = \frac{1}{\sin\alpha_1} : \frac{1}{\sin\alpha_2}$

$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}$

$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2}\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}$

$= \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} = \frac{s_2}{s_1}$



$N_1 = N_2$

$\frac{S_1}{\mu_1} = \frac{S_2}{\mu_2}$

$B_1 = \frac{N_1}{\cos\alpha_1}$

$B_2 = \frac{N_2}{\cos\alpha_2}$

$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} = \frac{s_2}{s_1}$

$B_1 s_1 = B_2 s_2$

$\frac{1}{8\pi}\left[B_1^2(V-v) + B_2^2\frac{v}{\mu}\right]$

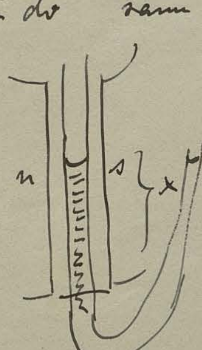
nie zmniejsza ~~pól~~ ~~co się~~ równań powierzchni gęstość ilość linii się nie zmienia

jeśli tak, potem je wyjaśnimy że $\sim B$

$\frac{1}{8\pi}\int\frac{B^2}{\mu}dv$ same przez się takie ~~siły~~ zmiany przy których się zmniejsza energia potencjalna

jednorodne pole magn.

Np.



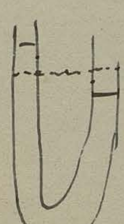
$\frac{B^2}{\mu}dv$

$\frac{1}{8\pi}B^2\left[q\frac{x}{\mu} + q\frac{(h-x)}{1}\right] + W_0 = W$

$= W_0' + \frac{B^2}{8\pi}qx\left(\frac{1}{\mu}-1\right)$

$\delta W = \frac{B^2}{8\pi}q\,\delta x\,\frac{1-\mu}{\mu} + q s g\,\delta x^2 = 0$

$\delta x = \frac{B^2}{8\pi}\frac{1}{sg}$



W ogóle woda się tak poruszy, że tak jak wypełnią
wiatraki linii ~

Prawo Ohma do pewnego stopnia a prawo prawdopodobne:

$$J = q\, fc.(\vec{E})$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{f(0)}_{=0} + E\left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)_0 + \frac{E^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial E^2}\right)_0 + \ldots$$

ważne dla małych E

$$J = \rho\, \vec{E}\, d = -\rho\, \frac{\partial U}{\partial n}\, d$$ dla drutu $$J = \rho \frac{dE}{l} = \frac{E}{w}$$

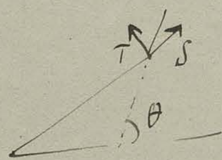
$U_{\cancel{(z)}} \cancel{r - \frac{\mu-1}{\mu+2}\frac{a^3}{r^2}}$

$\Omega_i = \frac{4}{3}\pi J x$

$\Omega_e = \frac{4}{3}\pi J \frac{a^3}{r^3} x$

$\Omega_i = + \frac{3}{\mu+2} c x$

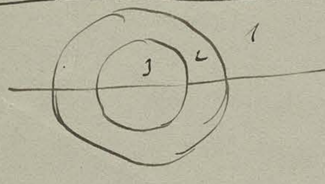
$\Omega_a = \left(1 - \frac{\mu-1}{\mu+2}\frac{a^3}{r^3}\right) c x$



$S = \left(1 + 2\frac{\mu-1}{\mu+2}\frac{a^3}{r^3}\right) c \cos\varphi$

$T = \left(1 - \frac{\mu-1}{\mu+2}\frac{a^3}{r^3}\right) c \sin\varphi$

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1 - \frac{\mu-1}{\mu+2}\frac{a^3}{r^3}}{1 + 2\frac{\mu-1}{\mu+2}\frac{a^3}{r^3}} \operatorname{tg}\varphi$



$\cancel{U_1 = c x \left[1 - \frac{\mu-1}{\mu+2}\frac{a^3}{r^3} - \beta\frac{b^3}{r^3}\right]}$

$\cancel{U_2 = c x \left[\frac{3}{\mu+2}\right.} -$

$U_1 = c x \left[1 + \alpha\frac{a^3}{r^3} + \beta\frac{b^3}{r^3}\right]$

$U_2 = c x \left[1 + \alpha + \beta\frac{b^3}{r^3}\right]$

$U_3 = c x \left[1 + \alpha + \beta\right]$

$\left[1 - 2\alpha - 2\beta\frac{b^3}{a^3}\right] = \mu\left[1 + \alpha - 2\beta\frac{b^3}{a^3}\right]$

$\mu\left[1 + \alpha - 2\beta\right] = \left[1 + \alpha + \beta\right]$

$1 - \mu = \alpha(2+\mu) + \beta\,2\frac{b^3}{a^3}(1-\mu)$ | $1+2\mu$

$1 - \mu = \alpha(\mu - 1) - \beta(1 + 2\mu)$ | $(1-\mu)\,2\varepsilon$

$\frac{b^3}{a^3} = \varepsilon$

$\cancel{(1-\mu)(1+\mu) = \alpha\left[(2+\mu)(1+2\mu) + (\mu-1)(1-\mu)\right]}$

$(1-\mu)\left[1 + 2\mu + 2\varepsilon(1-\mu)\right] = \alpha\left[(1+2\mu)(2+\mu) - 2\varepsilon(\mu-1)^2\right]$

$2 + 5\mu + 2\mu^2$

$-2 + 4\mu - 2\mu^2$

$\cancel{\alpha = \frac{3}{(\mu-1)} + -}$

innengetr. pole $\dfrac{9\mu}{9\mu + 2(\mu-1)^2(1-\varepsilon)}\, c$

$$\int \sum m\, r\, d\varphi \sin\varphi = \underbrace{\int \sum x m}_{\int \xi \sum m}\, d\varphi$$

$$= \underline{M}\, \rho \int \sin\varphi\, d\varphi = \underline{M}\, \rho (1-\cos\varphi)$$

$$\cancel{\sum m r}(\cos\varphi - \sin\varphi_0)$$

$$\sum m y = \eta \sum m$$

$$-2\pi R^2\rho \, \frac{x}{z^2}$$

$$= F = 2\pi R^2 \rho \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{r^2}\cos\varphi =$$

$$2\pi R^2 \rho \, \frac{x}{z^2}$$

$$\Omega_a = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\Omega_a = 2\pi R^2 J \frac{x}{r^2}$$

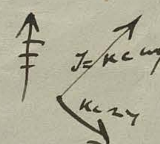
$$\Omega_i = -\pi\rho\left(R^2 + 2a \lg \frac{a}{R}\right) + \pi\rho l^2 - \pi\rho\left(R^2 + 2 \lg \frac{a}{R}\right) - \pi\rho l'^2$$

$$= \pi\rho(l^2 - l'^2) = 2\pi\rho\left[l^2 - (l - \delta\cos\varphi)\right] = 2\pi J x$$

$$\mu \frac{\partial U_i}{\partial n} = \frac{\partial U_a}{\partial n} \qquad J = \frac{1}{2\pi}\frac{\mu - 1}{\mu + 1} c = \frac{\kappa}{1 + 2\pi\kappa} c$$

$$A = \frac{1 + 2\pi\kappa\cos^2\varphi}{1 + 2\pi\kappa}\kappa c \qquad J = \kappa c$$

$$B = \frac{\pi\kappa\sin 2\varphi}{1 + 2\pi\kappa} c$$



$$W = -\frac{\kappa}{2}\int R^2 \, dv \qquad X = \frac{\kappa}{2}\int \frac{\partial (R^2)}{\partial x} \, dv$$

33 ~~[illegible]~~ 21

$(\xi - x)\cos\lambda + (\eta - y)\cos\mu + \ldots = 0$

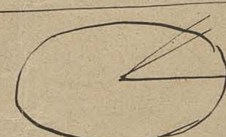
$\xi\cos\lambda + \eta\cos\mu + \zeta\cos\nu - \underbrace{(x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu)}_{} = 0$

$$\frac{2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}{\sqrt{\frac{4x^2}{a^4}+\ldots}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$$

$$\cos\theta = \frac{p\left[1-\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}\right)\right]}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-\ldots)^2}} \quad \Bigg\| \quad \cos\theta' = \frac{p'\left[1-\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{\ldots}\right]}{\sqrt{}}$$

$\sigma : \sigma' = \cos\theta : \cos\theta' = p : p'$

U punktu elipsoida obrotowe



$\int \frac{\sigma\,ds}{r}$ dla środka $=$

$$\int \frac{E p\,ds}{4\pi abc\,r} = \int\frac{3E}{4\pi abc}\int\frac{dV}{r} = \frac{3E}{4\pi abc}\int\frac{r^2 d\omega\,\frac{r}{3}}{r} = \frac{E}{4\pi abc}\int r^2 d\omega$$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$ $\qquad x = r\cos\theta$

$y^2+z^2 = r^2\sin^2\theta$

$\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} = \frac{1}{r^2}$ $\qquad U = \frac{E}{4\pi ab^2}\, 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\pi\sin\theta\,d\theta}{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\frac{1}{b^2}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos^2\theta} = \int_1^0\frac{du}{\frac{1}{b^2}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)u^2} = b^2\int_1^0\frac{du}{1+\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)u^2} = \frac{b^2}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}}\operatorname{arctg}\left(u\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)\Bigg|_1^0 =$$

$$U = \frac{E}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)$$

$\sigma\, ds = \sigma'\, ds'$

Teraz jaki stosunek $ds : ds'$?

równanie kuli: $\frac{x^2+y^2+z^2}{A^2} = 1$

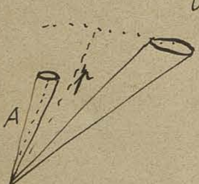
elipsoidy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$ więc osi rozciągnięte w stosunkach $\frac{a}{A}$ $\frac{b}{A}$ $\frac{c}{A}$

w stosunkowo

kostka staje się równoległościanem

Każdy element objętości powiększony w stosunku

$\frac{abc}{A^3}$ Zatem w ogóle ciało jakiekolwiek będzie ~~kostełka~~ powiększone w tym stosunku, naturalnie więc także ~~stożek~~ stożek ds

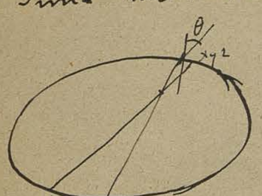


$$\frac{A\,ds}{3} : \frac{p\,ds'}{3} = A^3 : abc$$

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{abc}{A^2 p}$$

$$\sigma' = \sigma\frac{ds}{ds'} = \frac{\sigma A^2 p}{abc} = \frac{E p}{4\pi abc}$$

Inna metoda: (bezpośrednia)



$$\frac{\sigma\,ds}{r^2} = \frac{\sigma\,d\omega}{\cos\lambda} \qquad \frac{\sigma'\,d\omega}{\cos\lambda'}$$

będzie równowaga jeśli σ prop $\cos\theta$

$$\cos\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \dots}} = \frac{\frac{2x}{a^2}}{\sqrt{\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}+\frac{4z^2}{c^4}}} = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+\dots}}$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} - \left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}\right)}{\sqrt{}\;\sqrt{}}$$

rozkład. el. na elipsoidzie

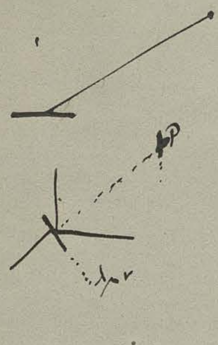
Otrzymał elips. wydłużonej i pojemność

Siła mechan. na powierzchni kuli (bańka mydlana naelektryzowana)

wewnątrz kondensatora kulistego

59

$$U = \cancel{\frac{M}{r}}\ \frac{M x}{r^3} = \frac{M \cos\theta}{r^2}$$



jeśli magnes nachylony względem

$$U = \frac{M(\cos\alpha \cos\lambda + \sin\beta \cos\varphi \sin\varphi \cos\mu)}{r^2}$$

$$= \cancel{M\cos\lambda}\ \frac{A x + B y + C z}{r^3} = A \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} + B \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y} + C \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial z}$$

$$V\left(v \frac{d^2 v}{dt^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(V v \frac{dv}{dt}\right)$$

$$\Sigma m \left[v \frac{dv}{dt}\right] = \text{const}$$

Maximum.

$$w = \Sigma v \qquad \Delta \Sigma \int \delta v = 0$$

$$\Sigma \int \frac{\Delta b}{\cancel{db}} v = 0$$

$$\cancel{\int \frac{db}{db_0} \Sigma v = 0}$$

$$\int \Delta b\, \Sigma v = 0 = \int b_0 [b c] \Sigma v = 0$$

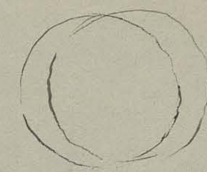
$$\Sigma v \perp [b c]$$

$$b\ \Sigma v$$

$$b = B\, b_0$$

$$\frac{db}{db_0} =$$

$U_e = cx\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right) = c\, r\cos\varphi\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right)$



$-4\pi\sigma\Big| = c\cos\varphi\left[1+\frac{2a^3}{r^3}\right]\Big|^{r=a} = -3c\cos\varphi$

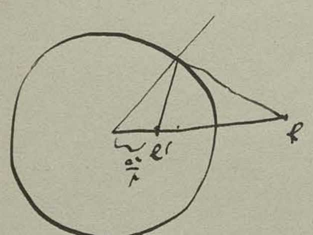
$\sigma = \frac{3c\cos\varphi}{4\pi}$

cały ładunek + $\int a^2 2\pi\sigma \sin\varphi\, d\varphi = \frac{2\pi a^2}{4\pi}\, c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \frac{3a^2c}{4}$

środek mocy ładunku +: $\frac{a^3\int 2\pi\sigma \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{a^2\int 2\pi\sigma\sin\varphi\,d\varphi} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi}{\int \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi} = \frac{\frac{\cos^3\varphi}{3}}{\frac{\cos^2\varphi}{2}} = \frac{2}{3}a$

odl. $= \frac{4}{3}a$

Moment $= \frac{3a^2c}{4}\cdot\frac{4}{3}a = \ldots ac$



$U_e = \frac{e}{r} + \frac{e'}{r'}$

$U_i = \frac{e''}{r} + \frac{e'''}{r'}$

$e + \frac{e'p}{a} = e'' + \frac{e'''p}{a}$

$(e-Ke'')a + (e'-Ke''')\frac{p^3}{a^2} = 0$

$(e-Ke'')p + (e'-Ke''')\frac{p^2}{a} = 0$

$Ke'' = e$

$Ke''' = e'$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{e}{\sqrt{p^2+a^2-2ap\cos\theta}} + \underbrace{\frac{e'}{\sqrt{\frac{a^4}{p^2}+a^2-\frac{2a^3}{p}\cos\theta}}}_{=\frac{e'p}{a\sqrt{a^2+p^2-2ap\cos\theta}}} = \frac{e''}{\sqrt{p^2+a^2-\ldots}}\end{array}\right\} U_i = U_e\Big|_{r=a}$$

$e + \frac{e'p}{a} = \frac{1}{K}\left[e + \frac{e'p}{a}\right]$

$e' = -\frac{a}{p}e$

$e + \frac{e'p}{a} = e'' + \frac{e'''p}{a}$

$$\frac{e(r-p\cos\theta)}{\sqrt{R}^3} + \frac{e'p^3\left(r-\frac{a^2}{p}\cos\theta\right)}{a^3\sqrt{R}^3} = K\left[\frac{e''(r-p\cos\theta)}{\sqrt{R}^3} + e'''\frac{p^3}{a^3}(\ \cdots\ )\right]$$

$$(e-Ke'')(a-p\cos\theta) + \underbrace{e'\left(\frac{p^3}{a^2}-\frac{p^2}{a}\cos\theta\right)}_{e'\frac{p^2}{a^2}(p-a\cos\theta)} = 0$$

$$u_2 - u_1 = x\frac{\partial u_1}{\partial x} + (l-x)\frac{\partial u_2}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial x}\left[x + (l-x)\frac{k_1}{k_2}\right]$$

$$= \frac{\sigma_1}{4\pi}\left[\frac{x}{k_1} + \frac{l-x}{k_2}\right]$$

$$W = \frac{S}{2}\,\sigma_1^2\,\frac{1}{4\pi}\left[\frac{x}{k_1} + \frac{l-x}{k_2}\right]$$

$$u_e = cx\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) = cx - ca^3\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}$$

ogólnie

$$\frac{\partial u_e}{\partial x} = c\left[1 - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\frac{xa^3}{r}}{\partial x}\right)\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} =$$

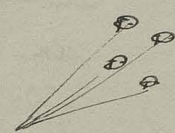
$$\frac{\partial u}{\partial z} =$$

Naturalnie

$$\nabla^2 u = 0$$

$$\varphi = \int\left[\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right]dv$$

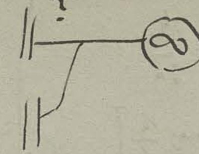
$$\frac{\partial b}{\partial x}\;\frac{\partial H}{\partial x}\;-$$



$$-\int \cancel{na^3\,\nabla^2}\,H\,dv + \cancel{\int na^3\,H\frac{\partial S}{\partial n}}$$

$$= \cancel{\int na^3\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial n}\,d\,S} = \cancel{[illegible]}$$

Jak mierzyć pojemność elektrostatyczną :



Faraday 1837

specif. inductive capacity   ~~zdolność~~ zdolność dielektryczna

~~Alk 26~~

Wosk	1'8	Terpentyna	2'2		Boltzmann
Parafina	2	Benzol	2'3	powietrze	1'000590
Siarka	3	Anilina	7'2	H_2	1'000264
Szelak	3	Alk.	26	CO_2	1'000946
Mika	6	Woda	88		
Szkło	3-8				

([illegible])

1). V

2). $\frac{V}{k}$

3). $\left(V - \frac{V}{k}\right)$

Silow

Tomaszewski

$$W = \frac{1}{2}\sum E u = -\frac{1}{2}\int u\left[\frac{\partial\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} + \dots\right]dv$$

$$= \frac{\partial\left(u\,k\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} + \dots + k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

$$= -\underbrace{\int u\,k\frac{\partial u}{\partial n}\,dS}_{=0} + \frac{1}{8\pi}\int k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \dots\Big]\,dS$$

68

$\Sigma e \Sigma \frac{e'}{r}$

W mieszanym polu już nie można użyć $F = \frac{ee'}{K r^2}$ ani $X = \int \frac{x-\xi}{K r^3}$

tylko zachowujemy:

$$W = \frac{1}{2}\int K\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] dv$$

$U =$ ciągłe ; $\frac{\partial U}{\partial n}$ nieciągłe na powierzchni ;

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U \cdot K\frac{\partial U}{\partial x}\right) = K\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + UK\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial x}$$

mod przejściowe z powodu nieciągłości

$$\underbrace{\qquad}_{U\frac{\partial\left(K\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x} + \dots}$$

$$\int U K \frac{\partial U}{\partial n} dS = 2W + - \int 4\pi \rho U dv$$

$$W = \frac{1}{2}\int U \cdot 4\pi\sigma\, dS -$$

jeżeli tylko przewodniki w dielektryku

$$W = \frac{1}{2}\sum U \varphi$$

$$\int K \frac{\partial U}{\partial n} dS = - 4\pi m$$

$$\int K \frac{\partial U}{\partial n} dS$$

$$\frac{\partial\left(K\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(K\frac{\partial U}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(K\frac{\partial U}{\partial z}\right)}{\partial z} = -4\pi\rho$$

więc w wnętrzu ciał jednorodnych:

$$\boxed{K\Delta^2 U = -4\pi\rho = 0}$$

zatem elektr. tylko na powierzchni

$$\underbrace{K_1\frac{\partial U_1}{\partial n_1} + K_2\frac{\partial U_2}{\partial n_2} = -4\pi\sigma}$$

$$\underline{K_1\frac{\partial U_1}{\partial n} = -4\pi\sigma} \text{ na przewodn.}$$

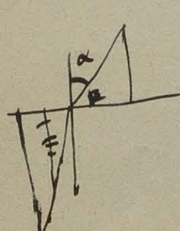
$$\underline{K_1\frac{\partial U_1}{\partial n} = K_2\frac{\partial U_2}{\partial n}} \text{ na izolat. nieprzewodn.}$$

druga wzdłuż powierzchni:

$$s_1\frac{\partial U_1}{\partial s_1} + \left(\delta_1\frac{\partial U_1}{\partial n_1} + \delta_2\frac{\partial U_2}{\partial n_2}\right) - s_2\frac{\partial U_2}{\partial s_2} + \left(-\delta_2'\frac{\partial U_2'}{\partial n_2} + \delta_1'\frac{\partial U_1'}{\partial n_1}\right) = 0$$

ponieważ $\frac{\delta}{s}$ nieskończ. małe : $\underline{\frac{\partial U_1}{\partial s_1} = \frac{\partial U_2}{\partial s_2}}$

Na powierzchniach izolat.



$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\frac{\partial U_1}{\partial s_1}}{\frac{\partial U_1}{\partial n_1}} \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\frac{\partial U_2}{\partial s_2}}{-\frac{\partial U_2}{\partial n_2}}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = -\frac{\frac{\partial U_2}{\partial n_2}}{\frac{\partial U_1}{\partial n_1}} = \frac{K_1}{K_2}$$

$$\frac{vol}{Vol} = \frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{K-1}{K+2} =$$

teorya kinet. $\lambda = \frac{1}{N\pi s^2\sqrt{2}} = \frac{\mu}{(\frac{1}{3})\rho c}$

$\alpha = \frac{1}{6} N \pi s^3$

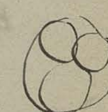
$\alpha\lambda = \frac{1}{6}\frac{s}{\sqrt{2}} \neq \frac{s}{10}$

		$K=$	$\alpha=$	s
Nx.	$\lambda_{H_2} = 0.000018$	1.000264	0.000088	$0.14 \cdot 10^{-7}$ cm
	$\lambda_{O_2} = 0.000010$	590	0.000166	$0.16 \cdot 10^{-7}$
	CH_4			0.23

przestrzeń 5 razy mniejsza niż według innych metod

---

w prawdzie ścisły ów wzór nie może być, bo n.p. $K=80$ dla wody niemożliwe



$$\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = \frac{3.14}{4.2} \neq \frac{3}{4} = \frac{K-1}{K+2} = \alpha$$

$\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$

$$K-1 = \alpha K + 2\alpha$$

$$K = \frac{2\alpha+1}{1-\alpha} = \frac{10}{1} = 10 = \text{największa możliwa wartość}$$

a rzeczywiście że stąd teorya nie może być ścisłą bo uważamy indukcyę nie uwzględniono

---

oprócz tego inny kształt molekuł

{ Polaryzacya dielektr.
„Przesunięcie dielektr."

$\frac{1}{vol}\frac{n^2-1}{n^2+2} = \rho$

$\frac{n^2+2}{n^2-1}\rho =$ wart. stała

$f = \frac{e e'}{K r^2}$ $\quad U = \int \frac{\rho \, dv}{K r}$

$\nabla^2 U = - \frac{4\pi\rho}{K}$ $\quad K \frac{\partial U}{\partial n} = -4\pi\sigma$

na powierzchni

zatem $C = K C_0$

Albo ładujęc do potencjału V [illegible] φ

a potem zanurzając do dielektryka pot. $= V = \frac{V_0}{K}$

a siły zmniejszone jeśli poprzednio ładowało $\frac{1}{K}$

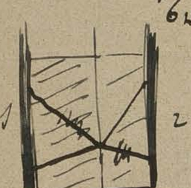
jeśli w dielektryku ładowało $= K$

Energia pola dielektryka $\quad W = \frac{1}{2} \iint \frac{\rho \rho' \, dv}{K r} = \frac{1}{2} \int \rho U \, dv$

Dotąd ośrodek jednorodny wszystko dobrze ale co gdy dwa izolatory?

na zewnątrz

$\underbrace{K_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} + K_2 \frac{\partial U_2}{\partial n'}}_{6w} = 0$ $\quad \frac{\partial U_1}{\partial n_1} + \frac{\partial U_2}{\partial n'} = \frac{\partial U_1}{\partial n_1}\left(1 - \frac{K_1}{K_2}\right) = -4\pi\sigma_f'$



$\sigma_1 = - \frac{1}{4\pi} K_1 \frac{\partial U_1}{\partial x}$ $\quad \sigma_2 = \frac{1}{4\pi} K_2 \frac{\partial U_2}{\partial x}$

$U_2 - U_1 = (a-x) \frac{\partial U_2}{\partial x} + x \frac{\partial U_1}{\partial x}$

$= \frac{\partial U_1}{\partial x} \left[x + (a-x) \frac{K_1}{K_2} \right]$

"prawo ...

zbrane!

$U_1 = 0 \quad U_2 = V$

$\sigma_1 = \frac{K_1}{4\pi} \cdot \frac{V - U_1}{x} = -\sigma_2 = \frac{K_2}{4\pi} \frac{U_2 - V}{l - x}$

$V = \frac{\frac{K_1 U_1}{x} + \frac{K_2 U_2}{l-x}}{\frac{K_1}{x} + \frac{K_2}{l-x}}$

bo gdy $U_1 = 0$

$\sigma_1 U_1 + \sigma_2 U_2 =$

$W = \frac{1}{2} F \left(U_1 \sigma_1 + U_2 \sigma_2 \right)$

$= \frac{F}{8\pi} \left[- K_1 U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + K_2 U_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} \right] = \frac{F}{8\pi} \left[- U_1 + U_2 \right] \overbrace{K_1 \frac{\partial U_1}{\partial x}}^{=\sigma}$

$= \frac{F}{8\pi} (U_2 - U_1) K_1 \left[x + (a-x) \frac{K_1}{K_2} \right]$ $\quad \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{F}{8\pi} (U_2 - U_1) \left[K_1 - \frac{K_1}{K_2} \right]$

bo w powierzchni granicznej siła równa

Zatem: $\frac{\partial V_1}{\partial n_1} = - \frac{\partial V_2}{\partial n_2}$

$$\frac{1}{K_1} \frac{\partial V_1}{\partial s_1} = \frac{1}{K_2} \frac{\partial V_2}{\partial s_2}$$

$$K_1 \frac{\partial U_1}{\partial n_1} = - K_2 \frac{\partial U_2}{\partial n_2}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial s_1} = \frac{\partial U_2}{\partial s_2}$$

$$-4\pi\sigma = \left(1 - \frac{K_1}{K_2}\right) \frac{\partial U_1}{\partial n_1}$$

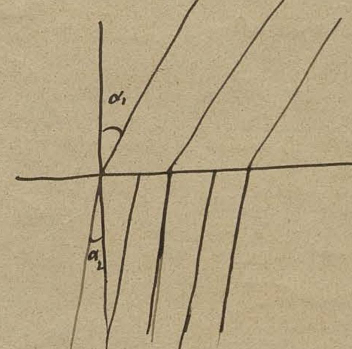
Widzimy że nie ma żadnej elektr. więc równie wiele linij sił jak wchodzi musi wychodzić!

$\cancel{F_1 \quad F_2}$

$$\frac{1}{K_1} \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{K_1} \frac{\partial V_1}{\partial s_1} : \frac{\partial V_1}{\partial n_1} = \frac{1}{K_2} \operatorname{tg} \alpha_2$$

Taki sam załamanie

ale pewna ilość ich kończy się w powierzchni σ'



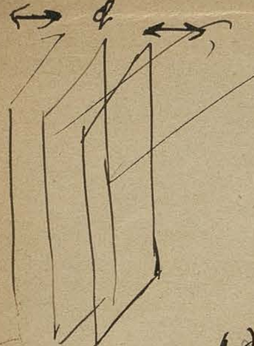
Na powierzchniach konduktorów:

$$\int \nabla^2 V \, dv = -4\pi\sigma = K \frac{\partial U}{\partial n}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = K \frac{\partial U}{\partial x} = \cancel{\frac{\partial U}{\partial x} + \ldots 4\pi\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}} \; (1 + 4\pi\varepsilon)\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

$$\cancel{0 = 4\pi\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} - (1 + 4\pi\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} = (K - 1) \frac{\partial U}{\partial x} - 4\pi\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x}$$



$$F = \frac{V^2}{8\pi s^2}$$

Zmniejszona w stosunku K

$$\varphi = \cancel{2\,\frac{V-V'}{4\pi s}}\, f$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\overbrace{\frac{1}{K}\iint \frac{e_2}{r_{12}}}^{V}\Big) = -\mathfrak{X} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$H \Big\{$

$\cancel{V = K U}$

$\iint \frac{e_2}{r_{12}} = V$

= zwykły pot. mas wszystkich

$X_1 \geq X_2$

$\cancel{\frac{1}{K_1}\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_1}$ $\quad K_1\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_1 = K_2\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_2$, jeżeli nie było naelektryzowania

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_2$$

następuje załamanie linii siły H

$$\operatorname{tg}\alpha_1 : \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\partial U_2}{\partial n} : \frac{\partial U_1}{\partial n} = K_1 : K_2$$

Jeśli sobie utworzymy pochodne $\frac{\partial V}{\partial x}$ etc. to one naturalnie nie zostają zmienione

zatem $B \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right.$ pozostaje

Indukcya nie zmienia

linie indukcyi przechodzą niezałamane

zatem i $-4\pi\rho$ jak dawniej $= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \ldots = \frac{\partial (K\mathfrak{X})}{\partial x} + \frac{\partial (KY)}{\partial y} + \frac{\partial (KZ)}{\partial z}$

$$\boxed{-4\pi\rho = K\nabla^2 U \neq -\nabla^2 V}$$

Jeśli jednak masa pośrednicząca to jak dawniej całka Gaussa

$$df\left(\frac{\partial V_1}{\partial n_1}+\frac{\partial V_2}{\partial n_2}\right) = -4\pi\, df\, \sigma$$

$$-4\pi\sigma = K_1\frac{\partial U_1}{\partial n} + K_2\frac{\partial U_2}{\partial n_2}$$

więc na konduktorach $\boxed{-4\pi\sigma = K\frac{\partial U}{\partial n}} = \frac{\partial V}{\partial n}$

Więc ~~W~~ indukcja D [V] oznacza rozkład elektr.

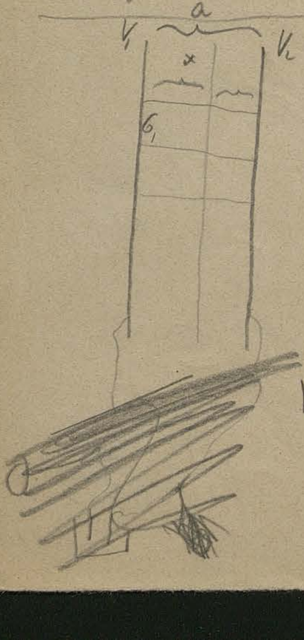
podczas gdy siły (na jednostkę masy) otrzymuje się = H (U)

Więc aby kondensator naładować do tego samego pot. U trzeba użyć

Q: K razy większe aniżeli bez ośrodka diel.

Sposób jak Faraday mierzył K

Energia $= \frac{1}{2}\sum QU = \frac{1}{2}\iiint \nabla^2 V .\, U\, dv$



$$\sigma_1 = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi}\frac{V_2 - V_1}{a}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\frac{V_2 - V_1}{a}$$

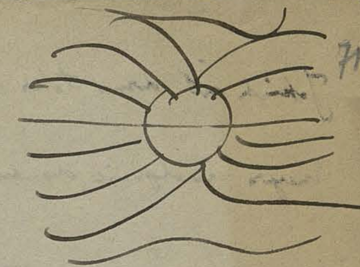
$$\cancel{V_2 - V_1 = (a-x)K_2\frac{\partial U_2}{\partial x} + x\frac{\partial U_1}{\partial x}K_1}$$

$$U_2 - U_1 = x\frac{\partial U_1}{\partial x} + (a-x)\frac{\partial U_2}{\partial x}$$

$$\frac{V_2 - V_1}{a} = K_2\frac{\partial U_2}{\partial x} = K_1\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\sigma}{4\pi}$$

$$\cancel{V_2 - V_1 = (a-x)K_2\frac{\partial U_2}{\partial x} +}$$

71



$$U_e = \frac{4}{3}\pi a^3 J \frac{x}{r^3} + cx = \left(\frac{4}{3}\pi a^3 \frac{J}{r^2} + cr\right)\cos\varphi$$

$$U_i = \frac{4}{3}\pi J x + cx = \left(\frac{4}{3}\pi J + c\right) r \cos\varphi$$

$$\mu\left(\frac{4}{3}\pi J + c\right) = -\frac{8}{3\pi}\cancel{\pi} J + c \qquad \Big/ \ \mu \frac{\partial U_i}{\partial r} = \frac{\partial U_e}{\partial r}$$

$$\frac{4}{3}\pi J = \frac{c(1-\mu)}{\mu+2}$$

$$U_e = cx\left\{1 + \frac{1-\mu}{\mu+2}\,\frac{a^3}{r^3}\right\} = cx\left\{1 - \frac{\mu-1}{\mu+2}\,\frac{a^3}{r^3}\right\}$$

$$U_i = cx\left\{1 + \frac{1-\mu}{\mu+2}\right\} = cx\,\frac{3}{\mu+2}$$

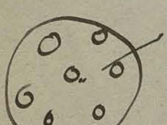
Dla kul przewodzącej: $\frac{\partial U_i}{\partial r} = 0 \quad (K = \infty)$

$$U_i = 0$$

$$U_e = cx\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)$$

Jeżeli dużo kulek przewodzących $U_e = c\left(1 - \sum \frac{2a^3}{r^3}\right)$ [illegible] $= \frac{4}{3}\pi a^3 n$ [illegible]

~~jeżeli w kulkach~~



$$\sum cx\frac{\alpha^3}{r^3} = \sum c\alpha^3 \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} \dots = \frac{n c\alpha^3 x}{r^3} \nearrow$$ liczonym od środka sfery

jeżeli mają zastąpić:

$$n\alpha^3 = \frac{K-1}{K+2}\,a^3$$

$$\underbrace{n\frac{4\alpha^3\pi}{3}} = \frac{K-1}{K+2}\,\frac{4a^3\pi}{3}$$

stosunek objętości $= \frac{K-1}{K+2}$

To tylko przy pominięciu wzajemnego oddziaływania w ogólności nie dozwolone, gdyż wyrażenie [illegible] jako kwadratowe

~~[illegible] [illegible]~~ ρ

jeżeli w cząstce w ogóle całe wyrazić jako stosunek kulek przewodzących to gęstość

$$\rho \sim \frac{K-1}{K+2}$$

Pole pomiędzy kul. dielektr.: $\frac{\partial U_i}{\partial x} = \frac{3c}{\mu+2}$

przy zastąpieniu:

więc $\cancel{U_e = \frac{3c}{\mu+2}\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)}$

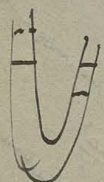
$$U_e = cx - \frac{3cn}{K+2}\,\frac{x}{r^3}\,a^3$$

zatem $3 n\alpha^3 = (K-1)$

Jakich sił doznaje taka kula? Żadnych!

Energia analogicznie do en. elektr.: $W = \frac{1}{8\pi}\int \mu H^2 dv = \frac{1}{8\pi}\int H B dv = \frac{1}{8\pi}\int \frac{B^2}{\mu} dv$

ruch ciał diamagn.
paramagn. w niejednorodnym polu



$$W = W_0 + \frac{B^2}{8\pi}\left(\frac{1}{\mu}-1\right) q x + \rho q \frac{x^2}{2} g$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0: \quad \frac{1-\mu}{\mu}\,\frac{B^2}{8\pi} = -\rho q x g$$

$$x = \frac{\mu-1}{\mu}\,\frac{B^2}{8\pi \rho g} \approx \frac{\kappa H^2}{2\rho g}$$

$\kappa_{H_2O} = -10^{-6}$

$\cancel{H = 100\,000}$ 20.000

$$\frac{4\cdot 10^8 \cdot 10^{-6}}{2\cdot 10^3} = \frac{2}{10} = 2\,\text{mm}$$

$$U_e = cx + \alpha \frac{x}{r^3} = \cancel{\quad} x\left(c + \frac{\alpha}{r^3}\right) = \cos\varphi\left(cr + \frac{\alpha}{r^2}\right)$$

$$U_i = cx + \beta x = x(c+\beta) = r\cos\varphi\left(c + \frac{\alpha}{a^3}\right)$$

$$\beta = \frac{\alpha}{a^3}$$

$$U_e = cx + \frac{\alpha x}{r^3}$$

$$U_i = cx + \frac{\alpha x}{a^3}$$

$$K_1\left(c - \frac{2\alpha}{a^3}\right) = \left(c + \frac{\alpha}{a^3}\right) K_2$$

$$\frac{\alpha}{a^3} = \frac{c\,(K_1 - K_2)}{2K_1 + K_2}\ \alpha.$$

$$U_e = cx\left\{1 + \frac{a^3}{r^3}\,\frac{K_1 - K_2}{2K_1 + K_2}\right\}$$

$$U_i = cx\left\{1 + \frac{K_1 - K_2}{2K_1 + K_2}\right\}$$

$$U_1 = cx + \frac{\alpha x}{r^3} + \frac{\beta x}{r^3}$$

$$U_2 = \alpha$$

Hohlkugel im Innern: $E = \dfrac{c}{1 + \frac{2}{9}\frac{(\mu-1)^2}{\mu}\left[1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right]}$

$$J = \frac{3 \kappa c}{3\mu} = \frac{\kappa c}{\mu} = \frac{\kappa c}{1 + 4\pi\kappa}$$

$$U_i = \cancel{\frac{\mu-1}{\mu+2} c x} \qquad \Big| \qquad \frac{3 \kappa c}{K+2}$$

$$U_e = \cancel{\frac{\mu-1}{\mu+2} c x \frac{a^3}{r^3}} \qquad \Big| \qquad c x \left[1 - \frac{a^3}{r^3} \frac{K-1}{K+2}\right]$$

$$U_1 = c x \left[1 - \frac{A^3}{r^3} \frac{K-1}{K+2}\right] + c' x \left[1 - \frac{a^3}{r^3} \frac{K-1}{K+2}\right]$$

$$U_2 = \frac{3 c x}{K+2} - c' x \left[1 - \frac{a^3}{r^3} \frac{K-1}{K+2}\right]$$

$$U_3 = \frac{3 c x}{K+2} - \frac{3 c' x}{K+2}$$

$$(c\ [illegible]) \cos\theta \left[1 + \frac{\mu-1}{\mu+2} 2\right] = \mu \left\{ \frac{3c}{\mu+2} \cos\theta - c' \left[1 + \frac{2a^3}{A^3} \frac{\mu-1}{\mu+2}\right]\right\}$$

$$- c' \cos\theta \left[1 + 2 \frac{\mu-1}{\mu+2}\right] \frac{a^3}{A^3}$$

c

73

$$W = \frac{1}{2}\varphi U = \frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{C} = \frac{1}{2}\varphi^2 \frac{4\pi}{f}\frac{aK_1+(K_2-K_1)x}{K_1K_2\,\cancel{(aK_1+(K_2-K_1)x}} = \frac{f}{8\pi}\frac{U^2 K_1K_2}{aK_1+(K_2-K_1)x}$$

$$\frac{dW}{dx} = \underbrace{\frac{1}{2}\varphi^2\frac{4\pi}{f}}_{=\,\sigma f}\ \underbrace{\frac{K_2-K_1}{K_1K_2}}_{=\,\frac{1}{K_1}-\frac{1}{K_2}} = 2\pi\sigma^2 f\left(\frac{1}{K_1}-\frac{1}{K_2}\right)$$ } Dostaję ciśnienie na powierzchnię odgraniczającą jeżeli a stałe

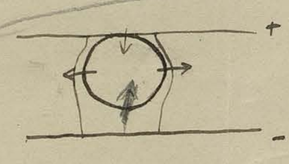
$$\frac{dW}{da} = 2\pi\sigma^2 f\,\frac{K_1}{K_1K_2} = \frac{2\pi\sigma^2 f}{K_2}$$ } ciśnienie na pow. prawą jeżeli x stałe, K_2 ruchome

$$\frac{dW}{d(a-x)} = 2\pi\sigma^2 f\,\frac{d}{d(a-x)}\left(\frac{K_2x+(a-x)K_1}{K_1K_2}\right) = \frac{2\pi\sigma^2 f}{K_1}$$ } — — jeżeli a-x stałe, K_1 ruchome

różnice naturalnie = ciśnienie na | ~~[illegible] z tego wynika że możemy [illegible]~~

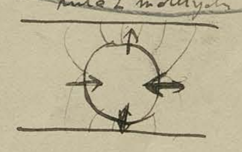
Więc powstają siły mechaniczne w takich cieczach:

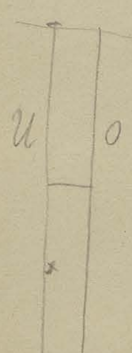
n.p. bańka powietrza



Kropla

~~Kule z materyału~~





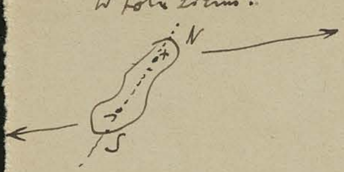
$$2W = \frac{U}{\delta}\left[xU + (a-x)KU\right]$$

$$\frac{1}{\delta}\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{U^2}{\delta^2}(1-K)$$

O Magnetyzmie

przyp.. że siła przyc. Σn więc $J\Sigma$ [illegible]

W polu ziemi:



siły równoległe więc wypadkowa = Σn w środku mas

$$\xi \Sigma n = \Sigma n x \qquad \xi' \Sigma s = \Sigma s x \quad \text{etc}$$

Ponieważ normalnie nigdy niema postępowego w polu ziemi więc $\Sigma n = -\Sigma s$

~~Moment~~ w polu ~~ziemi~~ = Punkty takie otrzymane biegunami

punkty w których można sobie wystawić skoncentrowane — jeżeli chodzi o ~~siły~~ pola równoległe!

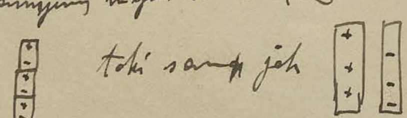
Moment siły $= J\underbrace{\lambda \Sigma n}_{} \cdot \cos\varphi$ $\qquad \lambda = \sqrt{(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2}$

wielkość zależna tylko od magnesu = moment jego

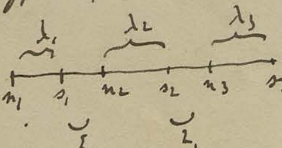
$V = J \sin i$

$H = J \cos i$

Jeżeli rozłamujemy magnes to mamy $\boxed{+ \mid -}$ zatem hipoteza że to już także w stanie normalnym

Moment  taki sam jak

bo ~~momentów~~ wszystkich molekuł ~~tak~~ tworzy się jako sumy przesunięć wypadkowej



$$\Sigma \lambda n$$

$$\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3 \;\Big|\; (n_1+n_2+n_3)\,\Lambda$$

$$\Lambda = \frac{(\lambda_1+\varepsilon_1)n_2 + (\lambda_1+\varepsilon_1+\lambda_2+\varepsilon_2)n_3}{n_1+n_2+n_3}$$

$$-\lambda_1 s_1 - \lambda_2 s_2 - \lambda_3 s_3 = \quad + \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2)s_3 + (\lambda_1+\lambda_2+\varepsilon_1)s_2 + \lambda_1 s_1}{s_1+s_2+s_3}$$

więc moment wypadkowy otrzymamy także przez sumowanie składowych

więc każdemu elementowi objętościowemu przypiszemy pewien moment $J\,dv$; wtedy

~~$\int J dv = \Sigma n \lambda$~~ $\qquad \int A\,dv = \Sigma n \lambda_x = \Sigma n \lambda \cos\varphi$ $\qquad \Big\} \; \cos\varphi,\ \cos\psi,\ - \qquad \int J\,dv = \Sigma n \lambda$

$\int B\,dv =$

$\int C\,dv =$

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

~~jeśli lim b = c = 0~~

$$\frac{y^2+z^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$\cancel{\sigma = \frac{Ep}{4\pi abc} = \lim \frac{E}{4\pi a} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2+z^2}{b^4}}}{b^2} = \lim \frac{E}{4\pi a} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{1}{b^2} - \frac{x^2}{a^2 b^2}}}{b^2}}$$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

lim $c = 0$

$$\sigma = \frac{Ep}{4\pi abc} = \lim \frac{E}{4\pi} \frac{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^4} + \frac{1}{c^2} - \frac{x^2+y^2}{a^2c^2}}}{a^2 c} = \cancel{\lim \frac{E}{4\pi a^2}}$$

$$= \cancel{\lim \frac{E}{4\pi} \frac{\sqrt{\frac{1-\frac{z^2}{c^2}}{a^2} + \frac{z^2}{c^4}}}{a^2 c}} = \lim \frac{E}{4\pi ab} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)c^2 + 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

$$2\sigma = \frac{E}{2\pi ab} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

$a = b$: $\frac{E}{2\pi a^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}}}$ jak przedtem w inny sposób

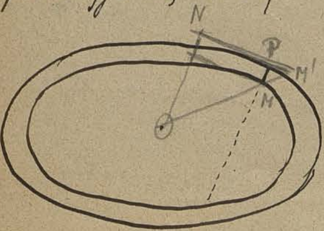
---

Jeszcze inna metoda:

Warstwa elipsoidyczna zawarta między elipsoidami homotetycznemi nie wywiera siły na punkty wewnętrzne

$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{A^2} = 1$ $\quad$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\quad \Big\| \quad$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = (1+\varepsilon)^2$

pokazuje się stąd że grubość prop. p

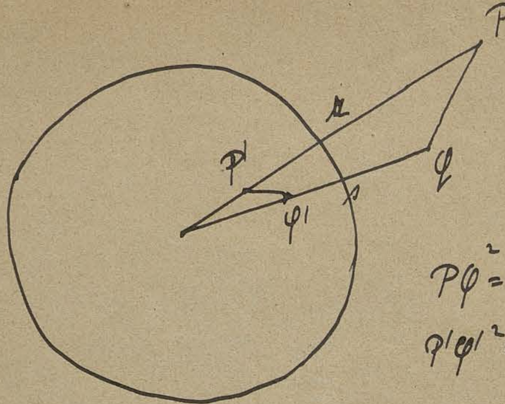


Naturalnie ~~powierzchnie~~ wszystkie lim równoległe w ten sam sposób ~~rozważymy~~

$\delta : MM' = p : OM'$

$\delta = \pm \frac{MM'}{OM'} = p \cdot \text{const}$

Inwersya



$rr' = a^2$

$ss' = a^2$

$\overline{P\varphi}^2 = r^2 + s^2 - 2rs\cos\theta$

$\overline{P'\varphi'}^2 = r'^2 + s'^2 - 2r's'\cos\theta =$

$= \frac{a^4}{r^2} + \frac{a^4}{s^2} - \frac{2a^4}{rs}\cos\theta = \frac{a^4}{r^2s^2}\left[s^2 + r^2 - 2rs\cos\theta\right]$

$= \frac{a^4}{r^2s^2}\overline{P\varphi}^2$

$P'\varphi' = \frac{a^2}{rs} P\varphi$

Pot. ~~E~~ punktu P w $\varphi = \frac{E}{P\varphi}$

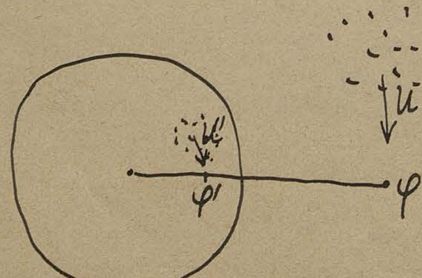
$U' = \frac{E'}{\overline{P'\varphi'}} = \frac{E'}{P\varphi}\frac{rs}{a^2} = \frac{E'}{E}\frac{rs}{a^2}U$

jeżeli teraz zrobimy

$E' = E\frac{a}{r}$

$U' = \frac{s}{a}U = \frac{a}{s'}U$

więc jeżeli mamy teraz jakieś bądź masy zewnątrz i odwzorujemy je, zmieniając równocześnie masy E w ów sposób, to potencyał tak otrzymanych mas w punkcie otrzym—



$U' = U\frac{a}{s'}$

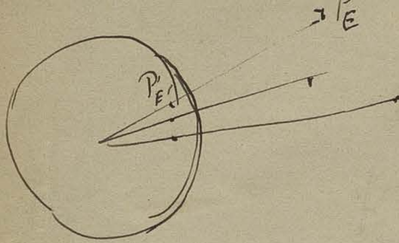
więc jeżeli teraz dodamy jeszcze masy Ua w punkcie O ze znakiem — to

$V = U' + \frac{Ua}{s'} = 0$ zatem równowaga

Metoda obrazów

$rr' = a^2$

$E'' = E' \frac{a}{a}$

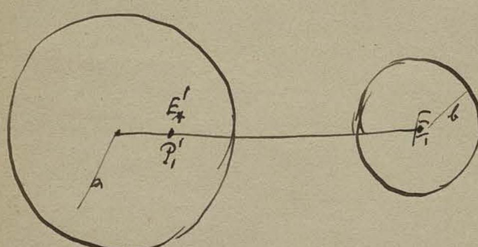


dostanie elektr. 6 przestrz. w skutek indukcyi

równa się działaniu mas E' — —

więc jeśli ~~zwięt trzy...~~ rozkład dany to żadnej nie ma trudności

Ale n. p. kula na kulę:



Murphy:

metoda przybliżenia

E_1 wyrabia obraz w P'_1

$$E'_1 = \frac{E_1 a}{\overline{E_1 P'_1}}$$

to odwrotnie wywołuje $E_2 = \dfrac{E'_1 b}{\overline{E_1 P'}}$ w P_2

to znów $E'_2 = \dfrac{E_2 a}{P_2 —}$ — itd.

Jeszcze nie mówimy przykładów ~~W~~ metody rozwiązania $\nabla^2 V = 0$

Dwuwymiarowe przykłady

Potencyał pręta:

$$6 \int \frac{ds}{\sqrt{r^2+s^2}} = 2 \lg\left(s + \sqrt{r^2+s^2}\right)\Big|_0^R = 2 \lg \frac{R}{s}$$

$z = \text{const}$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

N.p. symetrya kołowa

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dV}{dr}\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \cancel{\frac{d^2V}{dr^2} \dots + \frac{dV}{dr}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \dfrac{d^2V}{dr^2}\dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{dV}{dr}\dfrac{1}{r} - \dfrac{dV}{dr}\dfrac{x^2}{r^3} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \dfrac{d^2V}{dr^2}\dfrac{y^2}{r^2} + \dfrac{dV}{dr}\dfrac{1}{r} - \dfrac{dV}{dr}\dfrac{y^2}{r^3} \end{cases}$$

$$= \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr}$$

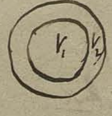
$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0$$

$$r\frac{dV}{dr} = \text{const} = \alpha$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{\alpha}{r}$$

$$V = \alpha \lg r + \beta$$

N.p. Condensator walcowaty



$$V_1 = \beta_1 \qquad \alpha_1 = 0$$

$$V_{2a} = \alpha_2 \log a + \beta_2 = V_1$$

$$V_{2A} = \alpha_2 \lg A + \beta_2 = V_3$$

$$\alpha_2 \lg \frac{a}{A} = V_1 - V_3$$

$$\alpha_2 = \frac{V_1 - V_3}{\lg \frac{a}{A}}$$

$$C = \frac{l}{2 \lg \frac{A}{a}}$$

$$\varphi = 2\pi a \sigma l = \frac{(V_3 - V_1)\, l}{2 \lg \frac{a}{A}}$$

$$\sigma_a = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_2}{\partial r} = -\frac{\alpha}{4\pi r} = -\frac{\alpha}{4\pi a}$$

$$\sigma_a = \frac{V_3 - V_1}{4\pi a \lg \frac{a}{A}}$$

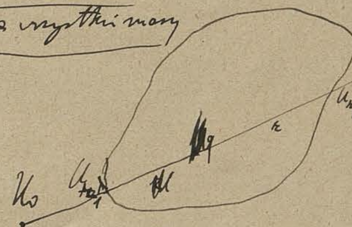
Zastosowania twierdzenia Greena

I $G = 1 \quad H = U$

II $G = U \quad H = U$

$$\iiint G\, \nabla^2 H \, dv = \iint G \frac{\partial H}{\partial n} df - \iiint \left[\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} \cdots \right] dv$$

III $G = \frac{1}{r} \quad H = U$ (powierzchnia zamykająca wszystkie masy)



$$\underbrace{\iiint \frac{\nabla^2 U}{r} dv}_{= -4\pi U} = \iint \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} df - \iiint \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \cdots$$

$$= \iint \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} df + \iiint \frac{1}{r^2}\underbrace{\left[\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial y} + \cdots\right]}_{\frac{\partial U}{\partial x}\cos(rx) + \cdots \; = \frac{\partial U}{\partial r}} dv$$

$$\underbrace{dv = r^2 d\omega = r^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi \, dr}$$

$$-4\pi U = \iint \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} df + \iint d\omega \int \underbrace{\frac{\partial U}{\partial r} dr}_{U_{r_2} - U_{r_1}}$$

Jak długo punkt leży zewnątrz

$$U_0 = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{\partial U}{\partial n}\frac{1}{r} df - \frac{1}{4\pi}\iint d\omega \left(U_{r_2} - U_{r_1}\right)$$

Jeśli teraz ~~punkt zewnętrzny to~~ powierzchnia = pow. poziomu to $U_{r_2} = U_{r_1}$

zatem $U_0 = -\cancel{4\pi}\iint \underbrace{\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial n}}_{\sigma}\frac{1}{r} df$

[o wartości równowagi powierzchni]

A jeśli punkt wewnętrzny:

$$U_0 = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{\partial U}{\partial n}\frac{1}{r} df - \frac{1}{4\pi}\iint d\omega \left(U_r - U_0\right)$$

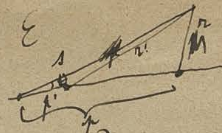
$$= -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{\partial U}{\partial n}\frac{1}{r} df - U_p + U_0$$

$U_p = -\frac{1}{4\pi}\iint \cdots$ zatem także w powierzchni, i to będzie wartość stała zatem równowaga jeśli powierzchnia przewodząca

$\cancel{\varepsilon_1^2 \quad p^2 + r_1^2 - 2}$

$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon'}{r'} = c = 0$

$\varepsilon^2 r'^2 = \varepsilon'^2 r^2$



$$\varepsilon_1^2 (p'^2 + s^2 - 2sp'\cos\vartheta) = \varepsilon_2^2 (p^2 + s^2 - 2ps\cos\vartheta)$$

powstała sprzecz. dowolny

więc $\varepsilon_1^2 p' = \varepsilon_2^2 p$

w takim razie odpadnie i pozostaje

$$\varepsilon_1^2 (p_2^2 + s^2) = \varepsilon_2^2 (p_1^2 + s^2)$$

$$\boxed{p' = \frac{\varepsilon_2^2 p}{\varepsilon_1^2}}$$

$\cancel{\varepsilon_1^2 p_2^2 - \varepsilon_2^2 p_1^2 = (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2) s^2}$

$\cancel{s^2 \; \varepsilon_2^2 p_1 p_2 = \varepsilon_1^2 p_1 p_2} =$

$\cancel{\varepsilon_1^2 \frac{\varepsilon_1^4}{\varepsilon_1^2} p^2 + s^2}$ zatem $s = \mathrm{const}$ zatem kula koło środka sprzecz.

więc tworząc $\frac{\partial U}{\partial n}$ można tworzyć poprostu $\frac{\partial U}{\partial s}$

można takie p ε_1 s wziąć za dane

$\cancel{U = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p^2 + s^2 - 2ps\cos\vartheta}}}$ z tego wynika:

$$\varepsilon_2^2 = \varepsilon_1^2 \frac{p'}{p}$$

$$p_2^2 + s^2 = (p_1^2 + s^2)\frac{p_2}{p_1}$$

$$p_1 p_2^2 - p_2 p_1^2 = (p_2 - p_1) s^2 \qquad s^2 = \frac{p p'^2 - p' p^2}{p' - p} = p p'$$

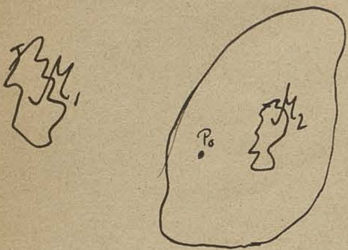
zatem $p' = \frac{a^2}{p}$ $\qquad \varepsilon_2^2 = \frac{\varepsilon_1^2 a^2}{p^2}$ $\qquad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1 a}{p}$

$$U = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{p^2 + a^2 - 2pa\cos\vartheta}} - \frac{\frac{a}{p}\varepsilon_1}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{p}\right)^2 + a^2 - 2\frac{a^3}{p}\cos\vartheta}}$$

$$= \cancel{\frac{a}{\sqrt{a^2 + p^2 - \ldots}}}$$

z tego bezpośrednio wynika że w dowolnym można zastąpić i odwrotnie ową punktem, a wzór dla σ taki sam jak przy mnożeniu powierzchnie zawierające całą mas

$$U_0 = U_1 + U_2$$



$$U_{2\,ext} = -\iint \frac{\partial(U_1+U_2)}{\partial n}\frac{1}{r}\,df = - U_p + U_0$$

$U_0 = U_1 + U_2$

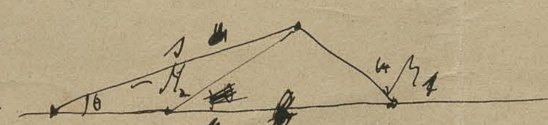
$$U_p = U_1 - \iint \frac{1}{4\pi}\frac{\partial(U_1+U_2)}{\partial n}\,df = \text{const}$$

zatem teraz potencyał $U_1 + \int \sigma \sim$ = w równowadze

$$U_{ext} = U_{2\,ext} = -\frac{1}{4\pi}\int \sigma$$

To przedstawia nam teraz możliwość rozwiązania w prosty sposób różne zadania n. p. wyznaczyjemy sobie potencyał U_2 powstający wskutek M_1, M_2, jeżeli otoczymy teraz jakąkolwiek powierzchnię przewodnika i na niej rozdzielimy masę $-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial n}$ to jest to układ ~~tylko~~ zostający w równowadze pod działaniem zewnętrznej masy M_1 zatem z układu powstała wskutek indukcyi masy M_1.

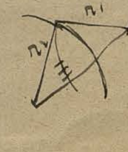
N. p.



$$U = \frac{\varepsilon_1}{r_1} - \frac{\varepsilon_2}{r_2} = \text{const.}$$ w ogólnym wypadku stopnia 4

tylko jeżeli $U=0$: $$\frac{\varepsilon_1}{r_1} = \frac{\varepsilon_2}{r_2}$$

$$\varepsilon_1^2 r_2^2 = \varepsilon_2^2 r_1^2$$



$x^2 + y^2 = \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2}[(x-a)^2 + y^2]$

$x^2(1-\alpha^2) + y^2(1-\alpha^2) - 2a\alpha^2 x$

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\Sigma_1 \left(a - p\cos\theta\right)}{\left[p^2 + a^2 - 2ap\cos\theta\right]^{3/2}} - \frac{\Sigma'\left(a - p'\cos\theta\right)}{\left[p'^2 + a^2 - 2ap'\cos\theta\right]^{3/2}}$$

$$p' = \frac{a^2}{p}$$

$$= \frac{\Sigma_1 \left(a - p\cos\theta\right)}{\left[\quad\right]^{3/2}} - \frac{\frac{\Sigma a}{p}\left(a - \frac{a^2}{p}\cos\theta\right)}{\left[\left(\frac{a^2}{p}\right)^2 + a^2 - 2a\frac{a^2}{p}\cos\theta\right]^{3/2}}$$

$$= \cancel{\frac{\Sigma_1 \left(a - p\cos\theta - a + \frac{a^2}{p}\cos\theta\right)}{\left[\quad\right]^{3/2}}} = \frac{\Sigma_1 \left(a^2 - p^2\right)\cos\theta}{p\, r^3}$$

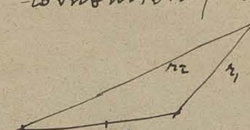
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \lg\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{\Sigma\left(p^2 - a^2\right)}{a\left(a^2 + p^2 - 2ap\cos\theta\right)^{3/2}}$$

$$\int_{-c}^{+c} \frac{d\xi}{\sqrt{y^2 + (x-\xi)^2}} = -\lg\left(x - \xi + \sqrt{\quad}\right)\Big| = \lg\frac{x + r_1 - c}{x + r_2 + c}$$

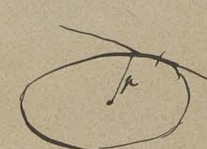
W podobny sposób, jeśli dany rozkład równomierny na prostej pewnej długości 2c

to $U = \lg \dfrac{r_1 + r_2 - 2c}{r_1 + r_2 + 2c}$



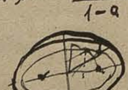
zatem powierzchnie ekwip. = elipsoidy obrotowe

znajduje się $-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial n}$ = propor. p, prostop. z środka na



$$r_1 + r_2 - 2c = a\left(r_1 + r_2 + 2c\right)$$

$$\left(r_1 + r_2\right) = \frac{2c\left(1+a\right)}{1-a} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2\left(1-e^2\right)} = 1$$



Dowodzimy raz twierdzenie że wzór w kondensatorach

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\,\frac{V_3-V_1}{\delta}$$

$$e = \frac{F}{4\pi\delta}(V_3-V_1) \qquad C = \frac{F}{4\pi\delta}$$

Tutaj $\lg\frac{A}{a} = \lg\left(1+\frac{\delta}{a}\right) = \frac{\delta}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{a}\right)^2 + \dots$

$$F = 2a\pi l$$

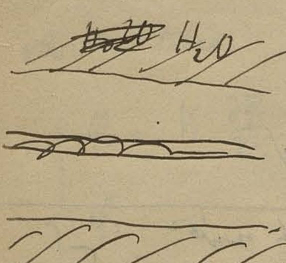
$$\frac{l}{2\,\frac{\delta}{a}} = \frac{2a\pi l}{4\pi\delta} \quad \text{q.e.d.}$$

ważny rezultat $C = \dfrac{l}{2\lg\frac{A}{a}}$

więc powiększenie A stosunkowo mały wpływ

~~Zresztą to nie~~

Ważne n.p. dla kablów, gdzie staramy się C zrobić jaknajmniejsze



n.p. $a = 3$ mm

$A = 15$ mm $\qquad C = \dfrac{l}{2\lg 5} = \dfrac{l}{2}\,\dfrac{1}{2\cdot3\ldots0\cdot699}$

$A = \cancel{100}\;30$ mm $\qquad C = \dfrac{l}{2}\,\dfrac{1}{\lg 10} = \dfrac{l}{2}\,\dfrac{1}{2\cdot3\cdot1}$

$A = 60$ mm $\qquad C = \dfrac{l}{2}\,\dfrac{1}{\lg 20} = \dfrac{l}{2}\,\dfrac{1}{2\cdot3\cdot1\cdot3}$

więc n.p. $C = \frac{l}{4}$

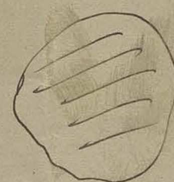
$l = 5000$ km $\qquad C = \frac{5000}{4} = 1000$ km

więc równo C jak kula $a = 1000$ km

ziemia $a = 6360$ km. więc 6 takich kablów = pojemność ziemi!

Zresztą te ~~wzory~~ rozwiązania doświadczalne, gdzie przy kondensatorach mało mają zastosowania, bo założenie że wszystkie linie siły horyzontalne

$W = \frac{1}{2}\sum V\varphi = \frac{1}{2}\sum\sum \frac{ee'}{r}$

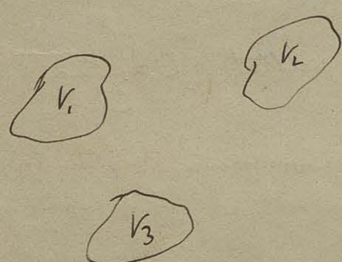


Więc jeśli ciało przewodzące:

$V = \text{const.}$

$W = \frac{1}{2} V\varphi$

Jeśli różne ciała przewodzące w równowadze elektr.



$W = \frac{1}{2}\left(\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2 + \varphi_3 V_3\right)$

Przy przesuwaniu zmieni się wprawdzie nie φ, jeśli ciała izolowane ale V

~~Ener~~

Energia musi pozostać stała

$dW + dA = 0$

$Fds = -dW$

V_1 będzie zależało od φ_n i w jaki sposób?

Teraz jeśli wszystkie ciała izolowane, ale jednemu dodamy ładunek $\delta\varphi_1$ jak się zmieni W?

$\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \ldots$

$V_1 \quad V_2 \quad V_3 \ldots$

$\varphi_1 + \delta\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3$

$V_1 + \delta V_1 \quad V_2 + \delta V_2 \quad V_3 + \delta V_3 \ldots$

$$\delta W = \delta \frac{1}{2}\sum\sum \frac{ee'}{r} = \frac{1}{2}\sum\sum\left(\frac{e\,\delta e'}{r} + \frac{e'\,\delta e}{r}\right) = \sum e \sum \frac{\delta e'}{r} = \sum \delta e' \sum \frac{e}{r}$$

$$= \underbrace{\sum \varphi\,\delta V = \sum V\,\delta\varphi}$$

Z drugiej strony:

$$\delta W = \frac{1}{2}\left[\varphi_1 \delta V_1 + V_1 \delta\varphi_1 + \cancel{\delta\varphi_1 \delta V_1} + \varphi_2 \delta V_2 + \varphi_3 \delta V_3 + \dots\right]$$

$$= V_1 \delta\varphi_1$$

$$V_1 \delta\varphi_1 = \varphi_1 \delta V_1 + \varphi_2 \delta V_2 + \dots$$

$$\begin{cases} V_1 = \varphi_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varphi_1} + \varphi_2 \dfrac{\partial V_2}{\partial \varphi_1} + \dots \\ V_2 = \varphi_1 \dfrac{\partial V_2}{\partial \varphi_1} + \varphi_2 \dfrac{\partial V_2}{\partial \varphi_2} + \dots \\ \dots \end{cases}$$

Potencial coefficients

Co także $\dfrac{\partial V_2}{\partial \varphi_1}$ oznacza?

jeśli wszystkie $\varphi = 0$ z wyjątkiem $\varphi_2 = 1$

$$V_1 = \frac{\partial V_2}{\partial \varphi_1}$$

odwrotnie także

$$\begin{cases} \varphi_1 = V_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial V_1} + V_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial V_1} + \dots \\ \varphi_2 = - \end{cases}$$

$V_1 \dots = 0 \qquad V_2 = 1$

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial V_1} =$$

wzajemnej pojemności

ogólnie nazywamy pojemnością

$\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial V_n}$ A.: jeśli wszystkie inne konduktory $= 0$.

Teraz co do sił mechanicznych: $F \delta s = \delta A = -\delta W = -\frac{1}{2}\sum V \delta\varphi = -\frac{1}{2}\sum \varphi \delta V$

pod działaniem sił zawsze A stara się być > 0, zatem $\delta V < 0$

potencjał zniża się przez to że ciało ~~się~~ poddaje się przyciąganiu

Drugi przykład: potencyały mogą pozostać stałe przez połączenie ze zewnętrznemi źródłami elektryczności

To zredukujemy na prosty przykład

najprzód praca mechaniczna δA, przez co energia się obniżyła o $-\frac{1}{2} \Sigma V \delta\varphi$
$= \frac{1}{2} \Sigma \varphi \delta V$

teraz jednak połączamy znów nasz system z źródłem elektr., tak że potencyały podniosą się na pierwotną wysokość wtedy

przyrost energii $\delta W' = \Sigma \varphi\, \delta V$ według tego co przedtem powiedziałem

zatem w całem podwyższenie energii o $\frac{1}{2} \Sigma \varphi \delta V = \frac{1}{2} \Sigma V \delta\varphi$

więc w tym przypadku energia podwyższa się, dąży do maximum, na koszt źródeł elektr. zewnętrznych.

Jeśli odwrotnie postępujemy:

mechaniczną pracą oddali się od systemu:

$$\delta \mathrm{Pr} = -\delta A$$

$\delta W = \delta \mathrm{Pr}$ energia elektr. powiększy się

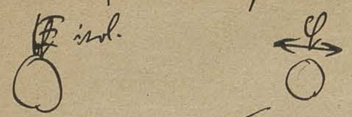
$= \frac{1}{2} \Sigma \varphi \delta V$ teraz możemy wyciągnąć elektr. z tego aż te same potencyały co przedtem

$\delta W = -\Sigma \varphi \delta V$ zatem wcale obniżyliśmy energię el. o $\frac{1}{2} \Sigma \varphi \delta V$

~~ale teraz bez dostarcz~~ więc została praca wykonana $\frac{1}{2} \Sigma \varphi \delta V$
a o równie wiele obniżyła się energia el.

więc $\Sigma \varphi \delta V$ stracone musiało się zamienić w energię elektr. w syst. stałych konduktorów

Możemy teraz powtarzać taki proces:



I). do ziemi $\varphi = -\frac{Ea}{r}$ $V=0$

II. izolowane do ∞ $\varphi = -\frac{Ea}{r}$ $V = \frac{\varphi}{a} = -\frac{E}{r}$

wyciągamy stamtąd $\varphi = -\frac{Ea}{r}$

III). znów do ... $\varphi = 0$

potrzeba -- wyciągamy $\varphi = +\frac{Ea}{r}$

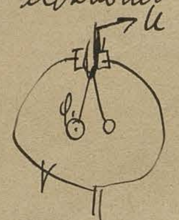
etc.

Co się dzieje z energią elektr. przy wchodzeniu! Riess Luftthermometer!

Maszyna influencyjna

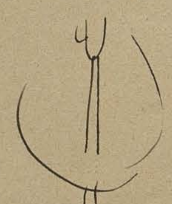
Zastosowanie elektrometru służy do mierzenia potencjałów

Elektroskop



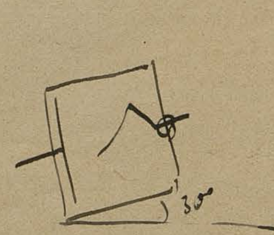
$\varphi_1 = a(U-V)$

bo $\frac{\varphi_1}{a} + V = U$



Braun

Wilson



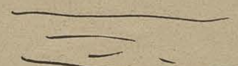
Muszą być empirycznie kalibrowane

Do tego służą bezwzględne

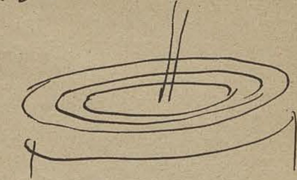
Kula w kuli trudno praktycznie ...

absolut
~~bezwz~~ Elektrometr Thomsona

Pole jednostajne



Guard ring



$$\delta W = F\delta s = \frac{1}{2}\cancel{\Sigma q \delta V} = \frac{1}{2}\Sigma V \delta q$$

$$q = \frac{V}{4\pi d}\cdot f \qquad F\delta s = \frac{1}{8\pi}V^2 f\,\delta\left(\frac{1}{d}\right) = \frac{V^2}{8\pi d^2} f\,\delta s$$

albo F zmieniać obkładając ciężary albo naprężając sprężynę

$$V = s\sqrt{\frac{8\pi F}{f}}$$

albo f zmieniając odstęp

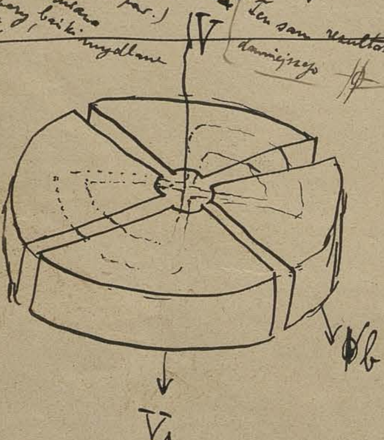
Ten sam rezultat z dawniejszego q

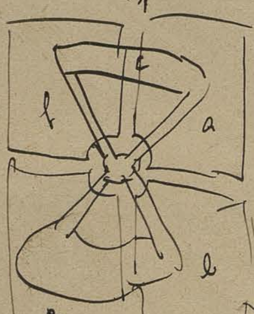
to się odnosi w ogóle do napięcia na powierzchni (przeciek na par.) kulce, tj. 2f, zmiana ciśnienia pary, bańki mydlane, ciecz etc.

Albo Lippmann Kapil. Elektrom.

gdy izolowane są

$$\delta W = \Sigma q\,\delta V = \Sigma V\,\delta q$$





przy wychyleniu o kąt φ:

ale – Schuster nie zgadza się
przewod. – gdy
wtedy gdy igła w pozycji
symetrycznej!

$$a' = a + k\varphi(V - V_a)$$

$$b' = b - k\varphi(V - V_b)$$

$$c' = c + k\varphi(V_a - V_b) - k\varphi(V - V_a)$$

$$c' = c + k\varphi(V_a - V_b)$$

$$W' = \frac{1}{2}\left(a'V_a + b'V_b + c'V\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{a'a + \ldots}_{W} + k\varphi\,\underbrace{\big[V_a(V - V_a) - V_b(V - V_b) + V(V_a - V_b)\big]}_{\left[2V(V_a - V_b) + V_b^2 - V_a^2\right]}$$

$$W' - W = \frac{k\varphi}{2}\left[2V(V_a - V_b) + V_b^2 - V_a^2\right] =$$

$$= k\varphi\left[V(V_a - V_b) + \tfrac{1}{2}(V_b - V_a)(V_b + V_a)\right]$$

$$= k\varphi(V_a - V_b)\left[V + \frac{V_b + V_a}{2}\right] = A$$

$$F = \frac{A}{2\varphi} = K\,(V_a - V_b)\left[\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\right]$$

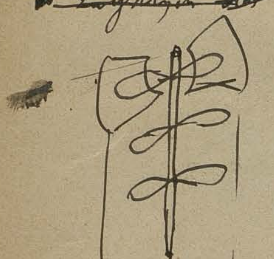
Jeśli V bardzo wielkie to $F\ V(V_a - V_b)$

Te aparaty najczulsze do mierzenia $\frac{1}{100}$ V – kilka Volt

można naturalnie użyć i do wyższych pot.

multiple vane-electrometer (electrostatic voltmeter)

~~W zwykłych etc.~~ do lampek żarowych etc. w technice 50–200V

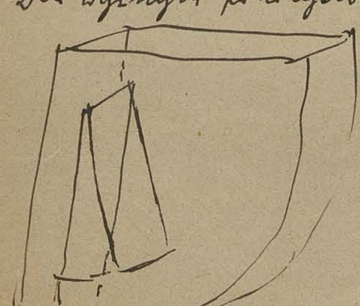


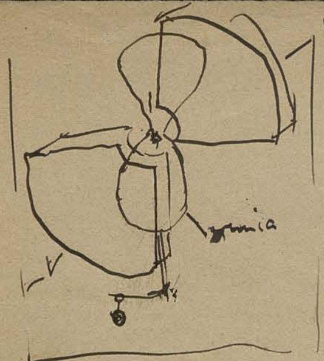
Korzyść że wszystkie prądy a co ważniejsze że także dla prądów przemiennych

Torsion Electrometer Kohlrausch

Dla wyższych potencjałów Hartmann-Braun

kilkaset do kilku tysięcy





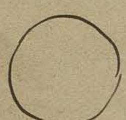
~~Vetr~~
Vertical elektrometer

Potencyały ~~ot~~ ogniw galwanicznych kilka V

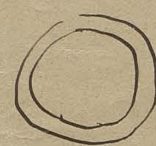
maszyn elektr. dowolnie wysokie w praktyce kilkanaście 1000V przy dużej odległości tylko 2000V

granicę stanowi siła oporna powietrza

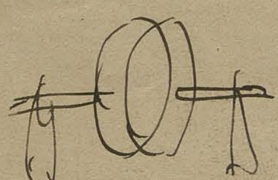
~~Akumulator~~ Aby mierzyć ilość Q potrzeba jeszcze znać pojemność



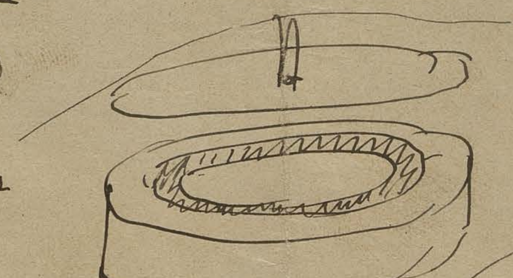
Kula niepraktyczna



condensator Kohlrauscha



trzeba uwzględnić wpływ ~~..~~ powierzchni zewnętrznych etc

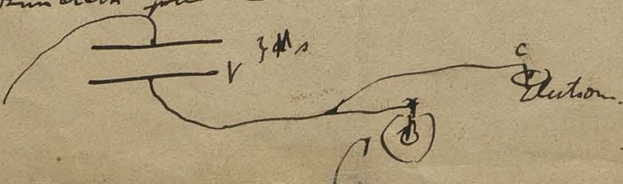


Guard ring condenser

Albo też zapomocą Luftkondensatora

~~potem można innymi kalibrować inne~~
We większych rozmiarach ~~potem~~

Np Akk:



$(C+c+\frac{sf}{4\pi})V_1 = \text{const.}$

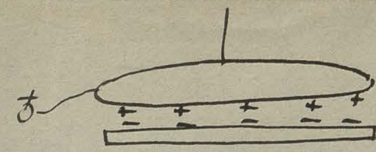
$(C+c+\cancel{\frac{sf}{4\pi}})V_2 = \uparrow$

$C+c = \ldots$

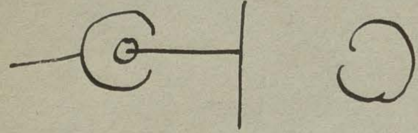
tak samo c z osobna

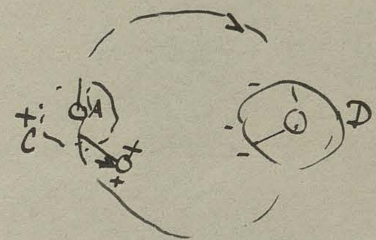
Elektr. Tarcie

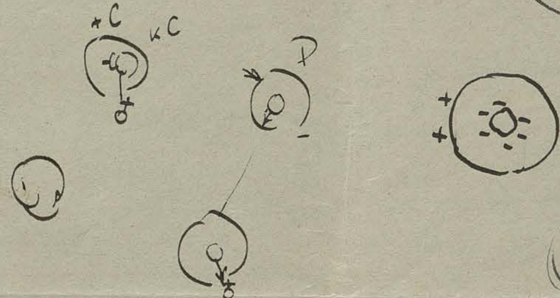
Elektrofor działa przez indukcyę



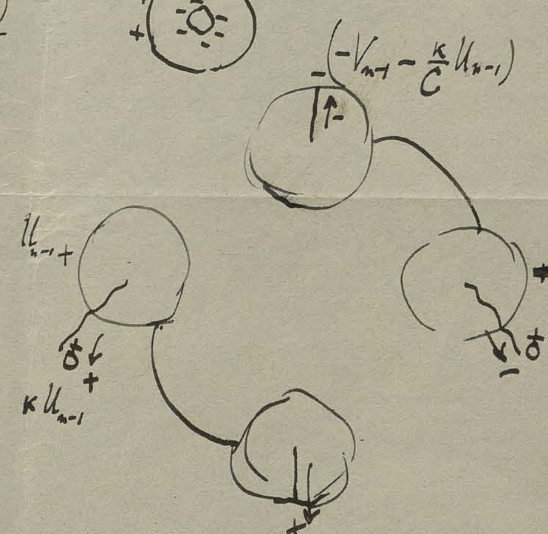
Maszyny influencyjne

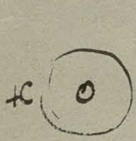


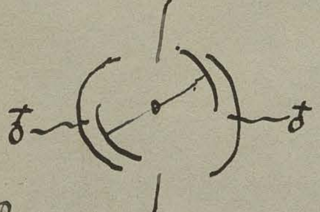




Lepiej ustawy:







Replenisher

$\cancel{U_n = \ldots U_{n-1}}$

$\cancel{U_n = (1+\alpha)\, U_{n-1}}$

$\cancel{= (1+\alpha)^{n-1}\, U_0}$

$$-V_n = -V_{n-1} - \frac{k}{C}\, U_{n-1}$$

$$\cancel{V_{n-1} = V_{n-2} + \frac{k}{C}\, U_{n-2}}$$

$$U_n = U_{n-1} + \frac{k}{C}\, V_{n-1}$$

$$\cancel{V_{n-2} = V_{n-3} + \alpha\, U_{n-3}}$$

$$\cancel{U_n = U_{n-1} + \alpha\, \alpha U_{n-2} + \alpha\, \alpha U_{n-3} + \ldots}$$

$$(U_n + V_n) = (U_{n-1} + V_{n-1})(1+\alpha)$$

$$(U_n + V_n) = (U_0 + V_0)(1+\alpha)^n$$

Dielektryki

Powstawanie indukcji $\quad Q = K C (V_1 - V_2)$

$$-4\pi\sigma = \cancel{} K \frac{\partial U}{\partial n} = K F_n = D_n$$

ogólnie definicja linij siły

← podstawowy wzór dielektryki

$$-4\pi m = \int K F_n = \int D_n \, dq$$

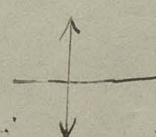
z mocy tw. wynikałoby

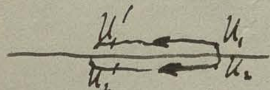
4π m linij polaryzacji = 4π K m linij siły

$\rho = \operatorname{div} \mathfrak{D} =$ prawdziwa indukcja

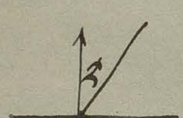
gdzie niema indukcji

$$K_1 \underbrace{\frac{\partial U_1}{\partial n_1}}_{\frac{\partial V}{\partial n_1}} + K_2 \underbrace{\frac{\partial U_2}{\partial n_2}}_{\frac{\partial V_2}{\partial n_2}} = 0$$





U jest funkcją ciągłą



$$F_1 \sin\alpha_1 = F_2 \sin\alpha_2$$

$$K_1 F_1 \cos\alpha_1 = K_2 F_2 \cos\alpha_2$$

$$K_1 \operatorname{tg}\alpha_1 = K_2 \operatorname{tg}\alpha_2$$

$x' = \frac{x}{r}\, r' = \frac{x a^2}{r^2} =$

$y' = \frac{y a^2}{r^2}$

$z' = \text{--}$

$x = \frac{x' r}{r'} = \frac{x' a^2}{r'^2}$

N.p. kula:

$(x - m)^2 + y^2 + z^2 = n^2$

$\cancel{\left(\frac{r^2 x'}{a^2} - m\right)^2}$

$\left(\frac{x' a^2}{r'^2} - m\right)^2 + \left(\frac{y' a^2}{r'^2}\right)^2 + \quad = n^2$

$x' a^2 -$

To odwzorowanie odznacza się tem że kąty pozostają niezmienione

$\cancel{x'a^2}$

$$\underbrace{\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{r'^4} a^4 - 2m \frac{x' a^2}{r'^2} + m^2 = n^2}$$

$$a^4 - 2m x' a^2 + (m^2 - n^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0$$

Kula będzie znowu kulą etc. $\left[x' - \frac{m a^2}{m^2 - n^2}\right]^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{m^2 a^4}{(m^2 - n^2)^2} - \frac{a^4}{m^2 - n^2} = \frac{a^4 n^2}{(m^2 - n^2)^2}$

$n' = \frac{a^2 n}{m^2 - n^2}$

N.p. Kula A zewnątrz σ

Potencyał jej w punktach wewnętrznych $= 4\pi\sigma A = \frac{E}{A}$

Jeśli odwzorujemy ją w ten sposób że $dE = \sigma' df' = \frac{\sigma\, df\, a}{r}$

to potencyał w punktach wewnętrznych obrazu: $= 4\pi\sigma A \cdot \frac{a}{r}$

zatem $= 0$ jeśli w punkcie O przyjmiemy ~~punkt~~ masę $-\frac{Ea}{A}$

T.zn. będzie równowaga między i $\sigma' df' = \frac{df\, a}{r} \frac{E}{4\pi A^2}$

Teraz jaki stosunek $df' : df$?

$P'\varphi' = \frac{a^2}{rs} P\varphi$

$ds' = \frac{a^2 ds}{r^2}$

$df' = \frac{a^4}{r^4} df$

$$\sigma' = \frac{a}{r}\,\frac{E}{4\pi A^2}\,\frac{r^4}{a^4} = \frac{r^3}{a^3}\,\frac{E}{4\pi A^2} = \frac{a^3}{r'^3}\,\frac{E}{4\pi A^2} = \frac{a^2 E'}{r'^3 . 4\pi A}$$

$A =$ promień kuli pierwotnej trzebaby jeszcze wyrazić to przez A' etc.

ale wystarczy nam tym razem rezultat że prop. $\frac{1}{r'^3}$

$$A' = \frac{a^2 A}{m^2 - A^2} \qquad m' = \frac{m a^2}{m^2 - A^2}$$

$$\cancel{\sigma' = \frac{E'}{r'^3 . 4\pi}}$$

$$\frac{A'm}{m'} = \frac{A}{m}$$

$$A' = \frac{a^2 \frac{A'm}{m'}}{m^2 - A'^2 \frac{m^2}{m'^2}}$$

$$m - \frac{m}{m'^2} A'^2 = \frac{a^2}{m'}$$

$$m = \frac{a^2}{m'\left[1 - \frac{A'^2}{m'^2}\right]} = \frac{a^2 m'}{m'^2 - A'^2}$$

$$A = \frac{a^2 A'}{m'^2 - A'^2}$$

$$\sigma = \frac{E'}{r'^3 . 4\pi}\left(\frac{m'^2 - A'^2}{A'}\right)$$