v. 3. 20

A Z 459.

NIEKTORE

U W A G I

NA DYSSERTACYĄ

O

WOLNOSCI CZŁOWIEKA.

podleyszey y nayniebespiecznieyszey dla częstych niezgod y Sedycyi. Treścią Stowarzyszenia essencyonalną nazywa on: *gdy każdy z nas oddaie do ogólności osobę swą y wszystkę siłę swoię pod nayższy Rząd y Dyrekcyą woli ogólney.* Ten woli rząd ogólney coż to iest, ieśli nie Demokracya? To *ciało moralne złożone*

w Paragrafie o Niewolniczym stanie.

1. Pomieszał Autor w iedno dwie rzeczy rożne; własność y Juryzdykcyą *Dominium proprietatis & Dominium Jurisdictionis.* Niewolnicy są własnością swych ...dy podległe Królom

y niewolą y podległość rządom. A ieszcze nie dowiodłszy, iż żaden nie może alienować swą wolność, oddaiąc się w niewolą, śmie wnosić, że żaden nie może poddać się pod rząd Królowi.

Zdanie zaś Grocyusza, iż każdy człowiek w partykularności może wolność

GEOMETRYA
DLA
SZKOŁ NARODOWYCH.

CZĘSC II.

Cena oprawney w papier Zł. 1 i gr. 3 śreb.

W Drukarni Nadworney J. K. Mci
Roku 1781.

Dzieło: *Geometrya*, ułożone przez J. P. Lhuilier Obywatela Genewenskiego, w Towarzystwo Nauk w tymże Mieście ustanowione policzonego, ktòre za ogłoszonym w Polszcze, i obcych kraiach Uczonych do pisania wezwaniem, z pomiędzy innych, potwierdzenie i nadgrodę odebrało, od Towarzystwa do Ksiąg Elementarnych rozstrząśnione, a przez J. X. Gawrońskiego Kanonika Koadjutora Krakowskiego Lektora, J.K. Mci i w tymże Towarzystwie zasiadaiącego, na Polski ięzyk z Francuskiego przełożone, Szkołom Narodowym do użycia podług przepisów naszych podaiemy. w Warszawie dnia 30. Października Roku 1780.

JGNACY Xżę MASSALSKI Biskup Wil. Prez.
MICHAŁ Xże PONIATOWSKI Biskup Płoc.
AUGUST Xżę SUŁKOWSKI Wwda Kaliski.
JĘDRZEY MOKRONOSKI Wwda Mazow.
JACEK MAŁACHOWSKI Podkan. Koron.
JOACHYM CHREPTOWICZ Podk. W.X.L.
MICHAŁ MNISZECH Marszałek Nadw. L.
JGNACY POTOCKI Pisarz W. W. X. L.
ADAM Xżę CZARTORYSKI Gen. Ziem. Pod.
STANISŁAW Xżę PONIATOWSKI Gen. Lieut. W. K.
FRANCISZEK BIELINSKI Stta Czerski.
ANDRZEY ZAMOYSKI Kaw. Or. Orła Biał.

ZBIOR RZECZY ZAWARTYCH W ROZDZIAŁACH TEY CZĘSCI GEOMETRYI.

ZBIOR SŁOW POLSKICH,

Albo nowych, albo mniey znanych, użytych w tey Części Geometryi, z przydanemi o bok słowami Łacińskiemi, toż samo w używaniu Matematyków znaczącemi.

Biegòn. *Polus*
Bryła. *Solidum.*
Bryłowatość. *Soliditas.*
Bytność. *Existentia.*
Ciągło. *Continuè.*
Ciągły. *Continuus.*
Czworokątny. *Quadrangularis.*
Czworościan. *Tetraëdrum.*
Dwòdzielny. *Subduplicatus*
Dwòmnożny. *Duplicatus.*
Dwòmnożyć. *Duplicare.*
Dwódziestościan. *Icosàëdrum.*
Dwónastościan. *Dodecàëdrum*
Graniastosłup. *Prisma*
Jednoimienny. *Ejusdem nominis*
Kąt płaski. *Angulus planus*
Kąt bryłowy. *Angulus solidus*
Kloc. *Truncus*

Krawędz

Krawędź. *Arrête* (po Francusku.)
Krzywy. *Curvus.*
Kula *Sphera.*
Kulisty. *Sphericus.*
Nadmiar. *Excessus.*
Ośmiościan, *Octoëdrum.*
Ostrosłup albo Ostrogran. *Pyramis.*
Ostrokrąg. *Conus*
Ostrokrąg ścięty. *Conus truncatus*
Płaszczyzna *Planum.*
Początkowy. *Elementaris.*
Pòłkole. *Semicirculus.*
Pòłkula. *Hemisphaerium.*
Przecięcie. *Sectio.*
Rodzenie się. *Generatio*
Ròwnik. *Æquator.*
Ròwnoległoboczny. *Parallelogrammicus*
Ròwnoległościan. *Parallelogrammum*
Ròzległość. *Extensio*
Sciana. *Paries*
Spodek. *Pes*
Stały. *Constans*
Sześcian. *Hexaëdrum*
albo *Cubus*
Tròykątny. *Triangularis*
Tròymnożny. *Triplicatus*
Walec. *Cylinder*
Warsta. *Stratum*
Wielościan. *Polyedrum*
Wyczerpanie. *Exhaustio*
Wymiar. *Dimensio*
Wyrocznia. *Oraculum*

Prze-

Przestroga. Na Tablicy VI. Fig. 3. opuszczone są litery, p, q, ktòre wpisać należy na końcach linii nayblizszey równoodległey od linii PQ.

OMYŁKI DO POPRAWIENIA

Karta.	*Wiersz.*	*Stoi.*	*Popraw.*
18	3	(BD. (AC.	AC, BD.
27	-	*Fig.* 2.	*Fig.* 3.
57	19	be. -	bc.
59	20	Dost: -	Dostyczney
	22	Dost.	Dostawy
79	5	$1\frac{1}{3}$ -	- $3\frac{1}{3}$.
100	przedostatni wiersz cały zmazać.		
108	5	GE. -	GF.
-	7	GF. -	GH.
-	25	Równoległobokow	Równoległoboku.
120	- 24	z ich -	ich.
133	1	Które y -	którey.
155	- 17	abc -	aby
175	22	powierzchni	na powierzchni
188	- 7	ściętego -	całego.
197	- 12	pośrodka -	od środka
215	- 11	utworzony	utworzona
218	- 26	iaki -	iak i
225	6	C : b.	B : b.
236	5	do powierzchni	do powierzchni podstawy

CZĘSC

CZĘSC DRUGA

O *Bryłach.*

WSTĘP.

W Części pierwszey samemi tylko zatrudnialiśmy się liniiami i powierzchniami; lubo iakażkolwiek *rozległość* (extensio) będzie rzeczy iakiey, nie iest ona ani samą liniią, ani samą powierzchnią, ale się rozciąga wzdłuż, w szerz i wgłąb. I tak, pokoy naprzykład, ma swoię długość, ma szerekość, i wysokość, czyli grubość. Tarcica, choćby naycieńsza, ma także długość, szerokość i grubość. Nie byłoby powierzchni, tey tarcicy, to iest: nie byłoby rozległości iey, uważaney co do długości tylko, i szerokości, gdyby nie było tarcicy uważaney co do wszystkich iey wymiarów. Powierzchnia ogranicza rozległość, i onę kończy; aby zaś granica iakiey rozległości była w samey rzeczy, trzeba ażeby i ta rozległość była. Nie byłoby więc powierzchni, gdyby nie było rozległości, którą kończy; tak iak (mowiąc przez podobieństwo lubo dalekie) nie byłoby koloru naprzykład w suknie, gdyby nie było sukna.

Podobnym sposobem, lubo często nie uważaliśmy tylko długość iakiey rozległości (cośmy nazywali liniią) niemasz iednak tey długości, ieżeli niemasz powierzchni, ktòrą ona kończy, lub na której może być w rzeczy samey ciągnioną. Nie będzie więc długości, gdy nie będzie powierzchni; a że nie będzie powierzchni, ieżeli nie będzie rozległości maiącey trzy wymiary; więc i linii nie będzie, tylko tam, gdzie iest rozległość, z trzema wymiarami.

Gdy się kto bawi około rozległości, ile ta trzy wymiary w sobie zamyka, w takim razie mowi się, iż się bawi około *Ciała* (Corpus) albo *Bryły* (Solidum.)

Geome-

Geometrya nie uważa inaczey Ciała, tylko ile to rozciągnione ieſt w zdłuż, w ſzerz, i wzwyż albo w głąb; innemi zaś własnościami iego cale ſię nie zatrudnia, zoſtawuiąc ie do uważania Fizykom. Lubo zaś zdaie ſię, iż ſobie ściśle nader w uważaniu ciała założyli granice Geometrowie, maią iednak obſzerne i tak pole dochodzenia wielu bardzo prawd ukrytych których wiadomość po więkſzey części koniecznie ieſt potrzebna chcącemu w Fizyce poſtąpić.

Nie ſami tylko Geometrowie, uważaiąc ciała, iednę ſobie w nich własność, to ieſt rozległość za cel wyſtawuią. Jeſt to, a przynaymniey być powinien, powſzechny poſtępowania ſpoſob, że gdy kto rzecz iaką z gruntu chce poznać, i poiąć; po części nayprzod iey własności uważa, a dopiero łączy ie razem, i dokładnieyſzey o rzeczy całey nabywa wiadomości. Rozum ludzki nadto ieſt ograniczony, aby wiele poſpołem nieznanych ieſzcze własności mogł dochodzić, a tym bardziey ie ogarnąć.

Skutek takowego własności rzeczy z oſobna dochodzenia, tym więkſzey ieſt wagi, im więcey rzeczom taż właſność ſłużyć będzie ; a taką własnością ieſt rozległość. Cokolwiek pod zmyſły naſze podpada i podpadać może, wſzyſtko to ieſt rozległym ; cokolwiek więc odkryie tym ſposobem Geometra, może to do wſzyſtkich rzeczy przyſtoſować, które tylko pod zmyſły naſze podpadaią, lub im poddane być mogą. A ztąd ſię okazuie ważność w wynalazkach Geometrycznych, i obſitość w przyſtoſowaniu onychże.

Lubo maiąc wzgląd na ſłabość poięcia ludzkiego, iednę tylko własność ciała uważa Geometra, dla większey iednak wygody i tę ieſzcze dzieli nieiako na części, i w myśli ie oſobno ſtawia, chociaż w rzeczy ſamey oſobno ſię nie znayduią. Nie ma względu rolnik na grubość ziemi w tym mieyſcu, gdzie rolą ſwoię uprawia. Dosyć mu natym, że ta grubość ieſt doſtateczna do przyięcia ziarna, do doſtarczania ſoku i do rozwinienia ſię tegoż ziarna. Wielkość pola znać oſobliwiey ſtara ſię, aby wiedział, ile na nim ziarna poſiać może, a zatym powierzchnią ſwego pola, bez względu na grubość ziemi uważa. Tak i piſzący, miarkuie wielkość powierzchni papieru, końcem zmieſzczenia na nim tego,

co

co ma pisać: nie wchodząc w iego grubość, i dosyć maiąc na tym, że mu atramentu nie przebiia.

Jakożkolwiek mała będzie grubość ciała iakiego, wszelako iednak, ciało to, dwie strony odmienne, przeciwne sobie mieć musi, i iedna z nich odłączyć się w rzeczy samey może od drugiey, luboby nie znalazło się sposobne narzędzie do uczynienia tego rozłączenia. Ciało więc chociaż naycieńsze, nie może być za iedno brane, co powierzchnia; a zatym nie prawdziwie rzecz wykładaią nie którzy Geometrowie. gdy mowią: że ciało albo bryła składa się z powierzchni położonych iednych na drugich; bo iakażkolwiek byłaby liczba tych warst, z których ciało złożone uważamy, każda iednak wszczegulności ta warsta byłaby bryłą, a nie powierzchnią, ponieważ miałaby dwie strony przeciwne, i mogące się od siebie odłączyć.

Co się zaś powiedziało o powierzchniach, to i o liniiach, twierdzić należy; że nie dla tego są od Geometrów uważane, iakoby w rzeczy samey znaydowały się, ale tylko dla łatwości i wygody.

dy. Nie wiele w to wchodzi podróżny, iak ſzeroka ieſt droga, którą ma przebyć, dosyć mu na tym, iż ſię nią udać może. Liczba kroków, które ma czynić nie zawiſła od ſzerokości, ale od ſamey długości tey drogi; tę przeto długość ſzczególniey uważa.

Niechby była bardzo mała ſzerokość powierzchni iakiey, naprzykład Równoległoboku, i niechby ta ſama tak mała ſzerokość podzielona była na iak naywięcey części, przez liniie równoodległe od długości, wſzelako każda z tych części będzie powierzchnią, i chociażby iak naymnieyſza była odległość dwóch liniy, które tę ſzczupłą powierzchnią kończą, za iednę iednak linią wziąść ich nie można; a ztąd łatwo każdy widzi, iako to wyrażenie ieſt niedokładne a bardziey ieſzcze fałſzywe; że powierzchnia ſkłada ſię z liniy położonych iednych przy drugich.

Nakoniec zdarzaią ſię przypadki, gdzie nie potrzeba nawet uważać przeciągu całey linii, ale koniec iey tylko ieden, lub obadwa, albo zgoła to, co dzieli dwie iey części. W takim razie mówi ſię, że Geometra ſamym ſię zatrutrudnia *punktem*. Punktu w ſamey iſtocie niemaſz, ieżeli niemaſz linii, którą punkt kończy, albo iey części, które oddziela. Podróżny cel ſwoiey drogi, iak punkt iaki ſobie wyſtawia, wielkością iego całe ſię nie zaprzątaiąc, aż poki do niego nie doydzie, doſzedłſzy, uważa dopiero obſzerność mieyſca, do którego dążył. Niemaſz wierzchołka kąta, ieżeli nie będzie dwóch liniy ten kąt czyniących. Uwagi nad którémi ſię zaſtanawia Geometra czyli to, co do położenia punktów iednych względem drugich, czyli względem linii iakiey, pochodzą z ſamego wyſtawienia ſobie w myśli tych rzeczy w iſtocie ſię nie znayduiących, dla łatwieyſzego doyścia tego, czego ſzuka.

Jakożkolwiek mała będzie rozległość względem zmyſłów naſzych, lub względem wielkości ciał, które nam nayczęściey pod zmyſły podpadaią: wſzelako można oddalić myślą tę małość względem innych większych rzeczy, i uważać ciało choćby też naymnieyſze, iak gdyby wielkim bardzo było, a to względem tyſiączney naprzykład części ſwoiey.

Niech będzie iak naymnieyſza liniia, tey linii koniec ieden, zawſze różnić ſię

bę-

będzie od drugiego. J znowu niechby kto na iak naywięcey części podzielił iaką liniią, każda z tych części dwa końce odmienne mieć będzie, a ztąd poznać można, iak nie prawdziwe ieſt to wyrażenie; że liniia ſkłada ſię z punktów przy ſobie położonych.

Wyſtawuiąc ſobie Geometra pod temi różnemi poſtaciami rozległość, uprzedzać tym ſamym zdaie ſię te trudności, które często zwykły bywać zarzucane o prawdziwey *bytności* (exiſtentia) tych rzeczy, które ſą celem iego nauki.

Powierzchnia płaſka, ieſt powierzchnią, na którey ku wſzyſtkim ſtronom liniie proſte prowadzić można: i takiemi to liniiami i powierzchniami dotąd zatrudnialiśmy ſię, których wſzyſtkie części na teyże ſamey *Płaſzczyznie* zoſtaią (in eodem Plano). W części naſtępuiącey takie nadto liniie i powierzchnie zabawiać nas będą, które na odmiennych płaſzczyznach znayduią ſię.

Z dwoiakiemi liniiami mieliśmy ieſzcze do czynienia, z proſtemi i z kołowemi, lub ich częściami. Powierzchnie także, około których bawiliśmy ſię, były

były albo zakończone liniiami proftemi, albo liniią kołową, albo liniiami proftemi, i częściami liniy kołowych. W części następuiącey będziemy nadto zabawiać się różnemi powierzchniami *krzywemi* (curva) które wystawić sobie można iak gdyby początek miały z obrotu powierzchni płaskich, które iużeśmy roztrząsali. Obaczemy to w szczegulności. gdy o każdey takiey powierzchni mowa będzie.

Co się zaś tycze *Bryl*; te dwoiakiego gatunku zabawiać nas będą; iedne, które są zakończone powierzchniami płaskiemi, drugie, które się kończą powierzchniami krzywemi albo częścią krzywemi, częścią płaskiemi.

Geometrya więc, iest to nauka, która się zabawia samą rozległością.

Liniie proste dwoiakośmy uważali, raz co do ich wielkości, drugi raz co do ich położenia iednych względem drugich. W pierwszym względzie przyrównywaliśmy iedne do drugich, albo prosto zaraz, albo przez spolną im miarę, do którey stosowaliśmy każdą z osobna liniią. W drugim względzie, albo liniie

z sobą

z sobą się spotykały, i ztąd początek kątów, i ich podziałów; albo się też nie spotykały.

Nauczyliśmy się dawać linii iedney względem drugiey iakiekolwiek do upodobania położenie: to iest robić kąt iakikolwiek dany, lub pociągnąć równoodległą od linii daney. Wyznaczyliśmy mieysce wierzchołków, kątów iakichkolwiek danych, których ramiona przechodzą przez dwa punkta dane, i wiele ztąd użytecznych używań wywiedliśmy. Nie mogąc zaś dokładnie wyznaczyć stosunku okręgu koła do linii prostey, przybliżyliśmy iak naybardziey stosunek ten do prawdziwego. Widzieliśmy oraz, że porównanie okręgów iednych do drugich, nie zawisło od porównania okręgu z linią.

Co do powierzchni; przytoczyliśmy nayprzód przypadki, w których dwie figury mogą przystać do siebie. Widzieliśmy, że to przystawanie zawisło iedynie od wielkości i położenia liniy iednych względem drugich, to iest, że tylko takie dwie figury przystać mogą do siebie, w których boki iednakowey są wielkości iedne względem drugich, i

iedna-

iednakowego położenia. Jednym z nayznamienitszych przystosowań było przeniesienie, czyli przerysowanie iakieykolwiek figury prostokreślney. Widzieliśmy także, iż wielkość figur pròstokreślnych nie zawisła od wielkości i położenia ich boków, gdyż Troykąty, lub Równoległoboki, byleby iednakowe miały podstawy, i wysokości, są równe; równe też będą, tak dwa naprzykład Troykąty, iako i dwa Równoległoboki, gdy ich podstawy będą w stosunku odwrótnym ich wysokości; Nadto równość w wielkości figur nie tylko nie zawisła od wielkości i położenia boków, ale nawet ani od ich liczby; ponieważ Tróykąt, Równoległobok, i kwadrat może być tak zrobiony, że się równać będzie iakieykolwiek figurze daney prostokreślney; może ieszcze zrównany być z summą lub różnicą figur innych prostokreślnych.

Można też przez przybliżenie porównać koło z figurą iaką prostokreślną, i zrysować takie koło, któreby mało co różniło się od iedney lub więcey figur prostokreśnych; dokładnie zaś można mieć koło równe innemu danemu, lub wielu innym kołom także danym.

Lubo

Lubo wielkość figury nie iest tym samym wyznaczona, że wyznaczony iest iey obwód i położenie boków; podany iednak mieliśmy sposób ieden z naywygodnieyszych, wykryślenia figury prostokreślney o ilukolwiek bokach danych, maiąc dany iey obwód, widzieliśmy oraz granice, w których przy nie powiększonym obwodzie, powierzchnia figury być może powiększona; lubo zmnieyszenia iey niema żadnych granic.

Z podobieństwa położenia liniy, które kończą figurę, i z proporcyonalności tychże liniy wynikało wiele twierdzeń, a z tych znowu wiele wniosków, i przystosowań. Szczegulniey zaś wynikało, przeniesienie na papier, działań na ziemi częstokroć nierówney odprawionych; które to przeniesienie dokładnieyszym i łatwieyszym ieszcze stawało się, używszy rachunku.

W tym wszystkim, co się dotąd mówiło, niewspomniało się tylko o linii prostey, i o linii kołowey, o powierzchniach płaskich zakończonych przez liniie proste, albo przez liniie kołowe, lub ich części; o bryłach obwiedzionych powierzchniami płaskiemi, albo krzy-

wemi

wemi, maiącemi swoy początek od powierzchni płaskich. Ta część Geometryi, nazywa się *Geometryą początkową* (Geometria Elementaris) służy ona za fundament koniecznie potrzebny do innych części zawilszych, z których się składa *Geometrya wyższa*; (Geometria sublimis), a w tey rzecz iest o rozmaitych innych liniiach krzywych, o powierzchniach przez nie zakończonych i o wielu bardzo takich bryłach, których początek czasem można, a czasem nie można wyprowadzić z tych ostatnich liniy krzywych, lub z powierzchni niemi zakończonych.

Różni się też Geometrya początkowa od wyższey, i co do sposobu rysowania figur do niey należących; w Geometryi albowiem początkowey, dosyć iest na cerklu i linii do wykreślenia figur iey własnych; każde przeto zagadnienie, które z pomocą tych dwòch tylko narzędziów może być rozwiązane, do niey należy. Jeżeli zaś zagadnienie, mogąc być rozwiązanym, z pomocą samey linii i cerkla, to iest przez same linije i łuki koła, rozwiązuie się z użyciem innych ieszcze narzędziów, albo liniy krzywych, odmiennych od koła, o

tako-

takowym rozwiązaniu mówić się zwykło, iż nie iest wykonane sposobem zadosyć czyniącym.

ROZDZIAŁ I.

O położeniu tak Liniy iako i Płaszczyzn iednych względem drugich.

1. T*Wierdz:* 1. Gdy liniia ma dwa swoie punkta, na iedney płaszczyznie, ma ie oraz i wszystkie na teyże płaszczyznie.

Dowodz: Liniia prosta wyznacza się przez dwa punkta; a zatym liniia prosta poprowadzona przez dwa punkta dane, na daney także płaszczyznie zniydzie się z każdą inną prostą, przez też dwa punkta poprowadzoną, i iednę z nią liniią uczyni.

2. *Twierdz.* Przez liniią prostą i punkt gdziekolwiek dany, może zawsze przechodzić iedna płaszczyzna.

Dowodz Wystawmy sobie myślą, iż przez tę liniią przechodzi iakakolwiek płaszczyzna; niechay ta płaszczyzna obraca

braca ſię około teyże linii, w tym obrocie przeydzie przez punkt dany, a w przechodzeniu będzie tą ſamą płaſzczyzną, którey ſzukamy.

Można także i przez dwie liniie przecinaiące ſię (a) przeprowadzić płaſzczyznę; ponieważ płaſzczyzna przechodząca przez iednę z tych liniy i przez ktorykolwiek punkt drugiey, przechodzi razem i przez przecięcie tych dwóch liniy, i przez punkt należący do drugiey linii, a zatym i druga ta liniia cała ieſt na teyże płaſzczyznie.

Można nakoniec i przez trzy boki Tróykąta przeprowadzić płaſzczyznę. Jakoż płaſzczyzna przechodząca przez dwa boki Tróykąta, przechodzi też i przez dwa punkta, w których trzeci bok przecia

(a) *Mówię*. przecinaiące ſię, *bo wiele ieſt liniy, których położenie ieſt takie, że przez nie nie może razem przechodzić iedna płaſzczyzna; na przykład w koſtce od grania, tak ieſt położone ramie iedno kąta, na iedney ſtronie, i bok przeciwny drugiemu ramieniu tegoż kąta, na inney ſtronie, że przez te dwie linie, iedna płaszczyzna przechodzić nie może.*

cina tamte dwa, a zatym i ten trzeci bok na teyże iest płaszczyznie.

3. *Twierdz.* 3. Gdy się dwie płaszczyzny przecinaią, tym spólnym ich przecięciem, iest liniia prosta.

Dowodz. Weźmy na tym spólnym przecięciu dwa iakiekolwiek punkta, i poprowadźmy przez nie, na iedney z dwóch płaszczyznie, liniią prostą; ta liniia będzie miała na drugiey płaszczyznie dwa punkta do siebie należące, więc i cała będzie na teyże drugiey płaszczyznie; a zatym będzie cała na obydwóch płaszczyznach, to iest będzie spolnym ich przecięciem.

To co się o płaszczyznach powiedziało, można porównać z tym, co się linii tycze; to iest: liniia prosta wyznacza się przez dwa punkta, płaszczyzna wyznacza się przez trzy punkta lub przez dwie liniie przecinaiące się. Gdy znowu dwie liniie wzaiem się przecinaią, punkt spólnym ich iest przecięciem; gdy zaś przecinaią się dwie płaszczyzny, spolnym ich przecięciem iest liniia prosta.

4. *Twierdz.* 4. Gdy liniia prosta do dwóch innych, które się przecinaią na

iedney

iedney płaſzczyznie, proſtopadłą ieſt w punkcie ich przecięcia, będzie też proſtopadłą i do każdey inney linii, przechodzącey przez ten punkt na teyże płaſzczyznie.

Można to nayprzod obiaśnić na karcie przełamaney. Liniia proſta, podług którey karta ſię przełamała, proſtopadłą ieſt do boków, części dwóch, tey karty przełamaney. Obracaiąc część iednę złamaną, około złamania, czyli ſpólnego przecięcia, bok ieden z dwóch, do którego liniia przecięcia była proſtopadłą, odmieniać będzie położenie, wſzelako iednak, na iedney zoſtanie płaszczyznie, i liniia przecięcia zawſze do niego będzie proſtopadłą. Ten przykład prawdę tę zmyſłom dosyć ukazuie, nie dosyć iednak ukazuie ią rozumowi.

Dowodz. Niech będą dwie liniie proſte, AB, CD, przecinaiące ſię w P, i niech do obydwóch proſtopadłą będzie liniia SP. Na płaſzczyznie przechodzącey przez te dwie liniie, przeciągnąwſzy przez punkt P. iakązkolwiek liniią EF, do tey linii będzie też proſtopadłą liniia SP. *Tab. I. Fig. I.*

Weźmy linie równe: PA, PB, i znowu PC, PD, także równe. Poprowadźmy BD spotykaiące linią EF, w punktach AC, E, i F.

Poniewaz Tróykąty: APC, BPD, maią dwa boki równe iedne względem drugich, i kąty między temi bokami zawarte, także równe, więc mogą przystać do siebie; a w szczególności kąt PAC, równy iest kątowi PBD. Przeto i Tróykąty APE, BPF iako maiące równe boki: PA, PB, i kąty równe iedne względem drugich, mogą też do siebie przystać, a wszczególności, równe są w nich boki PE, PF, i AE, BF.

Pociągnięmy ieszcze linie SA, SB, SC, SD; Tróykąty prostokątne SPA, SPB, maią bok spolny SP, i boki PA, PB, równe: a zatym mogą do siebie przystać, a w szczególności linie SA, SB, są równe. Podobnie równe są i linie SC, SD. Dwa więc Tróykąty CSA, BSD, których boki wszystkie równe są iedne względem drugich, mogą do siebie przystać, a wszezegulnoéci kąty SAC, SBD są równe.

Poprowadziwszy SE, SF; Tróykąty: SAE, SBF maią boki SA, AE, równe

wzglę-

względem boków SB, BF, i kąty między temi bokami zawarte, równe; więc mogą do siebie przystać; a wszczegulności równe są liniie, SE, SF.

Więc w Tróykątach SPE, SPF, równe są boki w iednym, względem boków drugiego, azatym i te przystać mogą do siebie; a wszczegulności kąt SPE, równa się kątowi SPF; a że są kątami przyległemi, czynią razem dwa kąty proste; każdy z nich przeto będzie kątem prostym; a zatym liniia SP, będzie też prostopadłą i do linii EF.

To Twiedzenie bardziey w dowodzeniu długie niż trudne, powinno być obiaśnionym przez figurę z papieru grubszego, lub z drewna, i z nici; lub w inny sposób. Toż rozumieć trzeba i względem wszystkich prawie podań, w tey części zawartych.

5. *Defin:* Gdy liniia prostopadłą iest do wszystkich innych, które się w punkcie iey spadku przecinaią na płaszczyznie iakiey, o takiey linii mówi się, że iest prostopadłą do tey płaszczyzny; a zatym ieżeli liniia prostopadłą iest do

dwóch innych w punkcie ich przecięcia, na płaszczyznie, ta liniia prostopadłą iest i do tey płaszczyzny.

6. *Twierdz:* 5. *Wzaiemnie*, ieżeli liniia, prostopadłą iest do trzech innych liniy, które się w iednym iey puncie przecinaią; płaszczyzna ta, która przechodzi przez dwie z tych trzech linii przechodzi też i przez trzecią.

Tab. I. Fig. 1, Niech będzie liniia SP. prostopadłą do linii PB, PD, PF, które przechodzą przez tenże sam punkt P, linii SP.

Niechay płaszczyzna iaka przechodzi przez liniią SP, i PF. Jakażkolwiek będzie liniia, w którey ta płaszczyzna, przecina drugą płaszczyznę przechodzącą przez liniie PB, i PD, wszelako liniia SP będzie prostopadłą do tego spolnego przecięcia, a zatym gdyby liniia PF, nie była tym spólnym przecięciem, tedy liniia SP, byłaby prostopadłą do dwóch linii leżących na teyże co i ona płaszczyznie, to iest: byłaby prostopadłą do linii PF, i do drugiey ieszcze linii różney od PF przecinaiącey spolnie dwie płaszczyzny; co być nie może. Liniia więc PF. nie iest różna od spolnego przecięcia dwóch płaszczyzn SPF, BPD, a zatym iest tym

spol-

ſpolnym przecięciem, i przeto należy i do drugiey płaſzczyzny BPD; to ieſt ta płaſzczyzna BPD przechodząca przez liniie PB, PD, przechodzi też i przez liniią PF.

7. *Twierdz:* 6. Dwie liniie proſtopadłe do iedney płaſzczyzny, ſą od ſiebie równoodległe. *Tab. I.*

Niech będą dwie liniie BA, CD *Fig. 2.* proſtopadłe do iedney płaſzczyzny, na którą ſpadaią w punktach B, i C, te dwie liniie ſo równoodległe.

Poprowadzmy liniią BC, a od końca C ſpolnego linii BC, z liniią DC, proſtopadłą do płaſzczyzny, wyciągniymy na tey płaſzczyznie proſtopadłą CE, do BC, równą iakieykolwiek długości BA, wziętey na drugiey linii proſtopadłey do teyże płaſzczyzny. Poprowadźmy ieſzcze i liniie BE, AE. Dwa Tróykąty ABC, ECB, maią ſpólny bok BC, boki także BA, CE, równe, z wykryślenia, i kąty proſte: ABC, BCE; więc te Tróykąty mogą przyſtać do ſiebie, a w ſzczegulności liniie BE, AC, ſą równe. Dwa tedy Tróykąty ABE, ECA maią względem ſiebie równe wſzyſtkie boki, a zatym przyſtać mogą do ſiebie; a w ſczególności równe ſą kąty ABE, ACE; że zaś liniia AB, proſtopadłą ieſt do linii BE, (ponieważ wzieliśmy ią za proſtopadłą do płaſzczyzny przechodzącey przez liniie BC, BE) więc kąt ACE, ieſt też proſty; a zatym liniia EC proſtopadła do dwóch liniy CB, CD, z wykryślenia, ieſt też proſtopadłą i do linii CA. Przeto ta liniia CA ieſt na tey ſamey płaſzczyźnie, co i liniie BC, CD. Aże płaſzczyzna przechodząca przez liniie AC, CB, przechodzi też i przez liniią AB, więc liniie AB, CD, ſą na iedney płaſzczyznie; będąc zaś na iedney płaſzczyznie, że ſą proſtopadłemi do linii BC, więc od ſiebie równoodległemi będą.

Przeſtroga Aby łatwiey zrozumieć to dowodzenie, dobrze będzie przegiąć Figurę 2, w linii BC; tak, aby część iedna ABCD tey Figury, przypadała proſto nad drugą częścią BEC. Podóbnie dopomagać można łatwieyſzemu wyobrażeniu i w innych Figurach, gdzie nie iedna zachodzi płaſzczyzna.

Uwaga W pierwſzey części cokolwiek ſię mówiło o liniiach równoodległych, zawſze to było w tym rozumieniu, że te linie kreślone były, na tey

ſamey

ſamey płaſzczyznie, na ktòrey i każda inna liniia łącząca dwa ich punkta, leżała.

8, *Twierdz*: 7. Jeżeli dwie liniie ſą od ſiebie równoodległemi, a iedna z nich proſtopadłą ieſt do iakiey płaſzczyzny, będzie i drnga do teyże płaſzczyzny proſtopadłą.

Weźmy dwie liniie BA, CD za równoodległe; eżeli iedna z nich nap: CD, ieſt proſtopadłą do iakiey płaſzczyzny, będzie do teyże płaſzyzny proſtopadłą i druga BA. *Tab. I. Fig. 2*

Na płaſzczyznie, do którey wzieliśmy za proſtopadłą, CD, pociągniymy CB; będą do CB, proſtopadłemi obiedwie liniie AB, i CD. Na teyże płaſzczyznie niech będzie CE proſtopadłą do BC, i równą długości BA. Poprowadźmy ieſzcze AC, AE, BE. Całe dowodzenie na tym zawiſło, aby okazać, że kąt ABE ieſt proſtym, to ieſt, że liniia AB proſtopadła do linii BC, ieſt razem proſtopadłą i do linii BE, leżącey na tey ſamey płaſzczyznie, do którey liniia CD ieſt proſtopadłą.

Dwa Tróykąty proſtokątne ABC, ECB. maią ramiona kąta proſtego równe iedne

dne względem drugich ; a zatym te dwa Tróykąty mogą przyſtać do ſiebie, a w ſzczegulności linije AC, BE, ſą równe. Maią tedy dwa Tróykąty ABE, ECA, wſzyſtkie trzy boki równe iedne względem drugich, i mogą zatym przyſtać do ſiebie; a wſzczegulności równe ſą kąty ABE, ACE, Płaſzczyzna przechodząca przez dwie linije równoodległe AB, CD, przechodzi też tak przez liniią BC, iako i przez AC, więc linije DC, BC, AC, na iedney płaſzczyznie leżą. A że liniia CE ieſt proſtopadłą do dwóch linii CD, BC; będzie też proſtopadłą i do trzeciey linii CA ; a zatym kąt ACE ieſt proſtym ; a że ten kąt, ieſt równy kątowi ABE, więc i kąt ABE, ieſt proſtym.

Tab. I. 9. *Zagad:* Spuścić proſtopadłą do płaſcczyzny, z punktu nie na niey danego.

Fig. 3. Niech będzie taki punkt S, z którego ſpuścić trzeba proſtopadłą na daną płaſzczyznę.

Rozwiązanie. Na płaſzczyznie daney nakreślmy iakąkolwiek liniią AB. Niech przez tę liniią i przez punkt dany S, przechodzi inna płaſzyzna, na którey pociągniyciągniymy SD, prostopadłą do AB. Na daney płaszczyznie niech też będzie poprowadzona DP, prostopadła do AB; a przez liniie SD, DP, niech przechodzi płaszczyzna, na którey niech będzie SP prostopadłą do linii DP; ta liniia SP będzie razem prostopadłą, którey szukaliśmy.

Wykreślenie służące do dowodzenia. Niech przez P, przechodzi liniia EF, równoodległa od AB.

Dowodz: Liniie SD, PD, z wykreślenia są prostopadłe do linii AB; więc liniia DB, wzaiemnie iest do obydwóch tych liniy prostopadłą; a zatym prostopadłą iest i do płaszczyzny przechodzącey, przez te dwie liniie. Aże liniia EF równoodległą iest od linii AB, więc liniia EF iest też prostopadłą do teyże płaszczyzny SDP; a wszczególności prostopadłą iest do linii SP; i liniia SP, iest wzaiemnie do linii EF prostopadłą. Ze zaś liniia SP zrobiona była prostopadłą do linii PD, więc liniia SP iest razem prostopadłą do linii EF, i PD, które się przy iey spadku P, przecinaią na daney płaszczyznie, a zatym liniia SP, prostopadłą iest do teyże płaszczyzny.

10.

10. *Zagadn:* 2. Od punktu danego na płaſzczyznie wynieść proſtopadłą do teyże płaſzczyzny.

Rozwiąz: Spuśćmy do płaſzczyzny daney z punktu iakiegokolwiek nie na niey będącego, proſtopadłą, a przez punkt dany poprowadźmy równoodległą od teyże proſtopadłey.

11, *Uwaga* 1. Od punktu danego, iednę tylko prowadzić można proſtopadłą, do płaſzczyzny.

12. *Uwaga.* 2. Gdy liniia iaka nie ieſt ani na ſamey płaſzczyznie, ani do niey proſtopadłą; może być albo od niey równoodległą, albo tak, iak zechcemy do niey nachyloną.

Nayprzod. Jeżeli, ſpuściwſzy z dwóch punktów linii iakiey, dwie proſtopadłe na płaſzczyznę, te proſtopadłe będą ſobie równe; tedy ta liniia od którey ſą ſpuſzczone, będzie równoodległa od płaſzczyzny, na którą ie ſpuścilismy, to ieſt: nie ſpotka nigdzie tey płaſzczyzny, choćby tak liniia, iako i płaſzczyzna naydaley były przedłużone.

Powtore

Powtore. Niech będzie liniia SD. nie proſtopadłą do płaſzczyzny; ale niech ſpotyka płaſzczyznę w punkcie naprz: D. Z punktu któregokolwiek tey linii naprz: z S, ſpuśćmy do tey płaſzczyzny proſtopadłą natrafiaiącą na nię w punkcie P, i poprowadźmy PD. Kąt SDP, nazywa ſię kątem *pochyłości* (angulus inclinationis) tey liniy SD, do płaſzczyzny. *Tab. I. Fig. 2.*

Ten kąt ieſt naymnieyſzym z tych wſzyſtkich, które czynić może liniia SD, z akąkolwiek inną liniią poprowadzoną na tey płaſzczyznie, przez punkt D, i gdyby z punktu P, iako ze środka promieniem równym linii PD, nakryślony był okrąg koła, wſzyſtkie liniie ciągnione od punktu S, do punktów tego okręgu, czyniłyby iednakowy zawſze kąt z tą płaſzczyzną.

Ponieważ te podania ſą tylko do innych głownieyſzych *pomocnicze* (ſubſidiariæ) i łatwe do dowiedzenia, przestaie ſię tu na ſamym ich wyrażeniu.

13. *Twierdz:* 8. *Gdy* dwie liniie równoodległe ſą od trzeciey, która na odmienney od nich leży płaſzczyznie; te

dwie

dwie liniie i od ſiebie równoodległe będą.

Tab: I. *Fig: 4.* Niech będą dwie liniie AB, CD, równoodległe od linii EF, będą te dwie liniie i od ſiebie równoodległemi. Od punktu któregokolwiek na linii EF, naprz: G, wyciągniymy dwie do tey linii proſtopadłe: GH. GI, na płaſzczyznach przechodzących przez też liniią EF, i przez AB, i CD. Ponieważ liniia EF, ieſt proſtopadłą, tak do lini GH, iako i do linii GI, więc też będzie proſtopadłą do płaſzczyzny przechodzącey przez te dwie liniie. A że znowu dwie liniie AB, CB ſą równoodległe od linii EF, więc ſą obiedwie proſtopadłe do płaſzczyzny przechodzącey przez liniie GH, GI, a zatym ſą od ſiebie równoodległe.

14. *Twierdz:* 9. Gdy dwie liniie, które ſię przecinaią ſą równoodległe względem dwóch drugich, które ſię także przecinaią, kąt zawarty między dwiema pierwſzemi liniami, równy będzie kątowi zawartemu między dwiema drugiemi.

Tab: I. *Fig: 5.* Niech będą dwie liniie AB, AC, równoodległe względem dwóch drugich DE, DE, DF; kąt BAC zawarty między dwiema pierwſzemi, równy ieſt kątowi EDF zawartemu między dwiema drugiemi.

Weźmy równe liniie AB, DE, i równe t kże liniie AC, DF. Pociągniymy liniie AD, BE, CF, BC, EF.

Ponieważ linie AB, ED, ſą równe, i równoodległe, Czworokąt ABED będzie oraz Równoległobokiem, i liniie też AD, BE, bądą równemi, i równoodległemi.

Podobnie równe ſą i równoodległe liniie AD, CF; więc liniie BE, CF ſą też równe, irownoodległe, względem linii AD; a zatym równe ſą ſobie, i od ſiebie równoodległe. Jeſt tedy Czworokąt BEFC, oraz Równoległobokiem, a w ſzczegulności równe ſą liniie BC, EF. Przeto Tróykąty BAC, EDF, boki trzy równe maią, iedne względem drugich, azatym przystać mogą do ſiebie, a w ſzczegulności równe ſą kąty BAC, EDF.

15. *Przyſtoſowanie.* Niech będą dwie płaſzczyzny, które ſię przecinaią. Na każdey z tych płaſzczyznie wyſtawmy proſtopadłą, do ſpolnego ich przecięcia, wyprowadzoną od punktu któregokolwiek

wiek tegoż przecięcia. Kąt zawarty między dwiema temi proſtopadłemi, iednakowy zawſze będzie, chociaż coraz inny na ſpolnym przecięciu punkt wybierać będziemy, do wyprowadzenia z niego tych proſtopadłych.

Defin: Jeſt przeto taki kąt zdatnym do wymierzenia pochyłości tych dwóch płaſzczyzn iedney względem drugiey. Gdy zatym kąt zawarty między temi dwiema proſtopadłemi, ieſt proſty, mówi ſię, że w takim razie *płaſzczyzna iedna ieſt proſtopadłą do drugiey.* Gdyby zaś kąt między temi dwiema proſtopadłemi zawarty, miał: 10°, 20°, 30° i t. d. w tym razie i dwie płaſzyzny zawierałyby kąty: 10°, 20° 30°, it. d.

Można ieſzcze i w inny ſpoſob, przeświadczyć ſię iako pochyłość dwóch proſtopadłych, wyciągnionych na dwóch płaſzczyznach, od iednego punktu linii przecięcia ſpolnego tych płaſzczyzn, odpowiada zawſze pochyłości tychże dwóch płaſzczyn. Wyſtawmy albowiem ſobie te dwie płaſzczyzny przyſtaiące do ſiebie, i leżące iedna na drugiey. Niech potym ſpodnia płaſzczyzna zoſtanie na ſwoim mieyſcu, a wy-a wyższa niech się podnosi, i obraca około spólnego przecięcia. Spolne przecięcie, podczas tego obrotu będzie zawsze prostopadłe, do dwóch liniy prostopadłych wyciągnionych na obydwóch płaszczyznach, od iednego punktu; a zatym te dwie prostopadłe zostaiące zawsze każda na swoiey płaszczyznie, odpowiadać będą podczas tego obrotu, pochyłości dwóch płaszczyzn. Gdy naprz: płaszczyzna ruchoma, obieży połowę drogi, którą iey obeyść trzeba, aby się znalazła na drugiey stronie, w równi z płaszyzną ruchom, w ten czas i prostopadła do spolnego przecięcia, znayduiąca się na płaszczyznie ruchomey obieży połowę tey drogi, którą ma obeyść, aby się w iedney równi stykała końcem swoim z drugą liniią prostopadłą, do spólnego przecięcia wyciągnioną na płaszczyznie nieruchomey. Toż mówić i o innych częściach tego obrotu.

16. *Twierdz:* 10. Gdy iaka prosta liniia prostopadłą iest do płaszyzny, do teyże płaszczyzny prostopadłą będzie każda inna płaszczyzna przez tę liniią przechodząca.

Niech

Tab: I. Fig: 6. Niech będzie liniia GP, proſtopadłą do iakiey płaſzczyzny, i niech przez tę liniią GP, przechodzi inna iakakolwiek płaſzczyzna; ta proſtopadłą będzie do pierwſzey płaſzczyzny.

Niech liniia AB, będzie ſpolnym tych dwóch płaſzczyzn przecięciem; od punktu P, przez pierwſzą płaſzczyznę wyciągniymy PC, proſtopadłą do tego ſpolnego przecięcia.

Ponieważ liniią GP, wzieliśmy za proſtopadłą do pierwſzey płaſzczyzny, więc GP proſtopadłą będzie tak do linii, AB, iako i do linii PC; bo te dwie liniie przechodzą przez pierwſzą płaſzczyznę; a zatym od punktu któregokolwiek nap: P, znayduiącego ſię na ſpolnym przecięciu dwóch tych płaſzczyzn, wyciągnowſzy, proſtopadłe PG, PC, do tegoż ſpolnego przecięcia, te liniie będą proſtopadłe iedna do drugiey; a ztąd proſtopadłe będą do ſiebie i te dwie płaſzczyzny.

17. *Wnioſek.* Gdy liniia iaka proſtopadłą ieſt do płaſzczyzny, a na teyże płaſzczyznie pociągniemy iakąkolwiek inną liniią, i do tey ſpuściemy drugą pro-

ſtopadłą

ſtopadłą od ſpodku pierwſzey proſtopadłey; poprowadziwſzy potym od któregokolwiek punktu pierwſzey proſtopadłey, liniią do punktu, w którym druga proſt opadła ſpotyka liniią pociągnioną na płaſzczyznie; ta oſtatnia liniia poprowadzona, proſtopadłą będzie do linii na płaſzczyznie pociągnioney.

Niech będzie SP, proſtopadła do płaſzczyzny; pociągnyimy na teyże płaſzczyznie liniią AB, i ſpuśćmy do niey proſtopadłą PD od ſpodku P, linii SP. Poprowadziwſzy z punktu któregokolwiek, naprz: S, linii proſtopadłey SP, liniią SD, do punktu D, w którym proſtopadła PD ſpotyka liniią AB, ta liniia SD, będzie proſtopadłą do AB. *Tab: I. Fig: 3.*

Przez punkt P, przeciągniymy EF równoodległą od AB.

Ponieważ liniia SP proſtopadłą ieſt do płaſzczyzny, daney, będzie też proſtopadłą i do EF znayduiącey ſię na tey płaſzczyznie; a wzaiemnie i EF będzie proſtopadłą do SP. Taż liniia EF, iako równoodległa od AB, ieſt też proſtopadłą do PD; a zatym będąc proſtopadłą tak do PD, iako i do PS, będzie także pro-

 ſtopa-

ſtopadłą i do płaſzczyzny SPD przechodzącey przez te dwie linie; więc i AB równoodległa od EF będzie też proſtopadłą do płaſzczyzny SPD, a wſzczególności będzie proſtopadłą do linii SD, znayduiącey ſię na tey płaſzczyznie.

18. *Twierdz:* 11. Gdy płaſzczyzna iedna proſtopadłą ieſt do drugiey, a przez którykolwiek punkt iedney z tych płaſzczyzny pociągniemy proſtopadłą do drugiey, ta proſtopadła, padnie na ſpolne przecięcie tych dwóch płaſzczyzn.

Dowodz: Gdyby liniia SP nie padała na ſpolne przecięcie dwóch płaſzczyzn, tedy ſpuściwſzy z tegoż ſamego punktu S, proſtopadłą, do ſpolnego przecięcia, ta byłaby oraz proſtopadłą i do drugiey płaſzczyzny, a zatym dwie proſtopadłe z iednego punktu ſpuſzczone byłyby, na iednę płaſzczyznę, co być nie może.

19. *Twierdz:* 12. Gdy dwie płaſzczyzny proſtopadłe ſą do trzeciey, ſpolne przecięcie tychże dwóch płaſzczyzn, proſtopadłe też będzie do teyże trzeciey płaſzczyzny.

Dowodz: Od punktu, w którym liniia przecięcia dwóch pierwſzych płazczyzn,

ſpotyka

ſpotyka trzecią płaſzczyznę; pociągnąwſzy tak na iedney iak i na drugiey z dwóch pierwſzych płaſzczyzn proſtopadłe do dwóch liniy ſpolnego ich przecięcia z trzecią płaſzczyzną, te dwie proſtopadłe, proſtopadłemi też będą do trzeciey płaſzczyzny; a zatym gdyby te dwie proſtopadłe nie zeſzły ſię w iednę, i nie były w rzeczy ſamey iedną liniią, która ieſt ſpolnym przecięciem dwóch pierwſzych płaſzczyzn, tedy od iednego punktu możnaby do iedney płaſzczyzny dwie proſtopadłe wyprowadzić; to zaś być nie może.

20. *Twierdz:* 13. Ggdy iedna liniia proſtopadłą ieſt do dwóch płaſzczyzn, te dwie płaſzczyzny, nigdzie ſię z ſobą nie zeydą, choćby naydaley były przedłużone.

Dowodz: Gdyby te dwie płaſzczyzny mogły ſię ſpotkać z ſobą, tedy Tróykąt zrobiony z tey proſtopadłey i z dwóch liniy poprowadzonych od punktu iakiegokolwiek na ſpolnym przecięciu dwoch tych płaſzczyzn, do punktów w których proſtopadła ſpotyka też płaſzczyzny, miałby dwa kąty proſte, co być nie może.

Defin: Dwie płaszczyzny, które nawet przedłużone spotkać się z sobą nie mogą, nazywaią się *równoodległemi.*

21. *Twierdz:* 14. Gdy dwie liniie są równoodległe względem dwóch drugich, płaszczyzna przechodząca przez dwie pierwsze liniie, będzie równoodległa od płaszczyzny przechodzącey przez dwie drugie liniie.

Tab. I. Fig. 7. Niech będą dwie liniie AB, AC równoodległe względem dwóch drugich DE, DF; płaszczyzna przechodząca przez liniie AB, AC, równoodległa będzie od płaszczyzny przechodzącey przez liniie DE, DF.

Z wierzchołku A, kąta zawartego między dwiema pierwszemi liniiami spuśćmy prostopadłą AG do płaszczyzny przechodzącey przez drugie dwie liniie, i od spodku G, tey prostopadłey poprowadźmy na teyże samey płaszczyznie liniie GH, GI, równoodległe względem liniy DE, DF.

Liniia AG, prostopadła do drugiey płaszczyzny, iest też prostopadłą, i do liniy GH, GI; a że liniie AC, GI, są obiedwie

biedwie równoodległe od linii DF, więc i od siebie są równoodległemi; a zatym liniia AG, iest także prostopadłą do linii AC. Tymże sposobem pokazać można, że liniia AG, iest też prostopałą i do linii AB. Więc ta liniia AG, iest prostopadłą do płaszczyzny przechodzącey, przez liniie AB, AC; a zatym i dwie płaszczyzny przechodzące iedna przez liniie AB, AC, druga przez liniie DE, DF, są obiedwie prostopadłe do teyże samey linii AG, a przeto są od siebie równoodległe.

22. *Twierdz:* 15, Gdy dwie płaszczyzny równoodległe od siebie przecina trzecia płaszczyzna, ich spólne przecięcia z trzecią płaszczyzną, będą też od siebie równoodległe.

Dowodz: Gdyby te spolne przecięcia, z trzecią płaszczyzną spotkały się gdzie z sobą, tedy punkt przecięcia tych dwóch przecięć, należąc tak do iednego iak i do drugiego spolnego przecięcia, dwóch płaszczyzn z trzecią, należałby też tak do iedney, iak i do drugiey z dwóch płaszczyzn przecinaiących trzecią; a zatym dwie płaszczyzny spotkałyby się gdzie z sobą, to iest nie byłyby, iak są, równoodległe.

23. *Twierdz:* 16. Gdy dwie płaszczyzny są od siebie równoodległe; liniia któ-

ra

ra ieſt proſtopadłą do iedney, z tych płaſzczyzn, będzie proſtopadłą i do drugiey.

Tab. I. Fig. 7. Niech będą dwie płaſzczyzny równoodległe: BAC, EDF; i liniia AG proſtopadła, do iedney z tych płazczyzn nap: do pierwſzey; taż liniia proſtopadłą będzie i do drugiey płaſzczyzny.

Jeżeli liniia AG, nie ieſt proſtopadłą do któreykolwiek linii, takiey iak GH, przeciągnioney przez ſpodek G, teyże linii AG, który ieſt na płaſzczyznie EDF; tedy przeciągnąwſzy przez linie GH, AG, płaſzczyznę, któraby przecieła płaſzczyznę BAC, w linii AB; liniia AG będzie proſtopadłą do linii AB; więc liniie AB, GH, z których iedna ieſt, a druga nie ieſt proſtopadłą do linii AG, leżącey na teyże ſamey, co one, płaſzczyznie, ſpotkać ſię mogą z ſobą; a przeto i płaſzczyzny, na których leżą ſpotkać ſię też z ſobą mogą, i nie będą równoodległe; co ieſt przeciwko warunkowi,

24, *Twie:* 17. Gdy dwie liniie leżące albo nie leżące na iedney płaſzczyznie, przecięte ſą przez trzy równoodległe od ſiebie pła-

płaszczyzny, te liniie będą od tych płaszczyzn przecięte proporcyonalnie.

Niech będą dwie liniie AB, CD, leżące, albo nie, na iedney płaszczyznie; niech trzy płaszczyzny rownoodległe przecinaią pierwszą liniią w punktach, B, F, A, a drugą w punktach, C,G,D; będzie, BF : AF = CG : DG. *Tab. I. Fig. 8.*

Poprowadźmy liniią BD, spotykaiącą płaszczyznę średnią w punkcie E.

Liniie EF, AD, są spolnemi przecięciami płaszczyzny BAD, z dwiema płaszczyznami równoodległemi; więc te dwie liniie są od siebie równoodległe; a zatym podobne są Tróykąty: BFE, BAD; przeto, BF : AF = BE : ED.

Dla teyże przyczyny podobne będą Tróykąty; BDC, EDG, a zatym BE: ED = CG : GD. Więc też będzie, BF: AF = CG : GD.

Uwaga W tym razie tylko liniie BC, AD są równoodległe, i oraz liniie FE, EG, iednę czynią liniią, gdy liniie AB, CD na teyże samey płaszczyznie znayduią się.

ROZDZIAŁ.

ROZDZIAŁ II.

O Kątach Bryłowych,

Defin: Wykreślmy iakikolwiek Wielokąt na płaszczyznie ; od każdego wierzchołka kąta w tym Wielokącie wyciągniymy linie do iednego punktu, nie na tey płaszczyznie będącego. Przy tym punkcie tyle się zrobi kątów znayduiących się na odmiennych płaszczyznach, ile Wielokąt nayprzod wykreślony, miał boków. Summa tych wszystkich *kątów płaskich*, nazywa się *kątem Bryłowym* (angulus solidus). Punkt, który iest spólnym wierzchołkiem wszystkich kątów płaskich, nazywa się: *wierzchołkiem* tego kąta bryłowego. Płaszczyzny na których się znayduią kąty płaskie, które ten wierzchołek czynią, nazwać można, *ścianami* (paries albo facies:) a zaś spolne tych płaszczyzn przecięcia *krawędziami* (po Francuzku *Arrêtes.*)

Przestroga. W tym wszystkim, co się tu o kątach bryłowych powie, wystawiać sobie trzeba nie inne Wielokąty, iak tylko te, których krawędzie scho-

dząc

dząe się w ich wierzchołkach, same kąty wyskakuiące tam czynią (b).

Trzy rzeczy uważać można w kącie bryłowym: ściany albo kąty płaskie, które go tworzą, pochyłości wzaiemne tych ścian, i stosunek placu zawartego między temi ścianami, do placu całego, około wierzchołka kąta bryłowego; w podobny prawie sposob, iak też uważaliśmy wielkość kąta płaskiego, względem całego placu, około wierzchołka tegoż kąta, na iedney z tym placem płaszczyznie znayduiącego się. *Obacz niżey, co służy do ostatniey tey uwagi, w Rozdziale o kuli* (*Sphæra.*) Jako Wielokąt, w którego wierzchołkach kończą się krawędzie kąta bryłowego, może być na Tróykąty podzielony przez przekątne ciągnione od iednego z wierzchołków iego; tak też i kąt bryłowy iakikolwiek, podzielić można na inne kąty bryłowe, złożone z trzech tylko kątów płaskich. Przeto i Geometrowie nay więcey się bawią około kątów bryłowych

(b) *Obacz o innych kątach bryłowych, Rozprawę P: Bermanna, pod tytułem* De angulis solidis Dissertatio Vittembergæ 1764.

wych, trzema kątami płaſkiemi okreſlonych, aby doſzli pochyłości ścian, lub ich wielkości; a potym wiadome maiąc doſtatecznie te pochyłości i wielkości ścian, wyznaczaią kąt bryłowy, który ſię z tych ścian układa. Część ta Geometryi, w ktòrey o kątach bryłowych rzecz ieſt, pod tą, pod którą ie wyſtawuiemy poſtacią nazywa ſię Trygonometryą *kulną*, albo sferyczną. (Trigonometria ſpherica). Damy przyczynę tego nazwiſka, gdy ſię o kuli mówić będzie. Jeſt ta część koniecznie potrzebna Aſtronomom. Na daniu pierwſzych o niey początków, tu przeſtaniemy, i nie więcey mowić będziemy o kątach bryłowych, tylko tyle, ile wiedzieć potrzeba będzie dla zrozumienia podań ściągaiących ſię do ſamychże brył.

25, *Twierdz:* I. W kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów płaſkich, ſumma dwóch z tych trzech kątów, większa ieſt od kąta trzeciego.

Tab. II. Fig. I. *Dowodz:* Niech będzie kąt bryłowy w A zrobiony z trzech kątów płaſkich: BAC, BAD, CAD; którykolwiek z tych trzech kątów wzięty, mnieyſzy ieſt od ſummy dwóch innych.

Jeżeli

Jeżeli te trzy kąty ſą wſzyſtkie równe, iuż oczywiście dwa, większe ſą od iednego.

Jeżeli zaś kąt ieden nap: BAC, większy ieſt tak od kąta BAD, iak i od kąta CAD, tedy wſzelako mnieyſzy będzie od ſummy obydwóch.

Zróbmy albowiem na płaſzczyznie BAC, kąt BAE równy kątowi nap: BAD; i weźmy dwie długości równe AD, AE; na linii także AB, weźmy punkt którykolwiek, nap: B; Przez trzy punkta: B, D, E, niech przechodzi płaſzczyzna przecinaiąca krawędź AC w punkcie C.

Dwa Tróykąty: BAD, BAE, maią bok ſpolny AB, boki: AD, AE, równe, i kąty między temi bokami zawarte, równe; więc te Tróykąty mogą przyſtać do ſiebie, a wſzczególności, liniie: BD, BE, ſą równe. Aże w Tróykącie, BDC, ſumma boków: BD, CD większa ieſt od trzeciego boku: BC, więc bok DC, większy ieſt od linii CE; a zatym Tróykąty: CAD, CAE maią bok ſpolny AC, boki: AD, AE, równe; podſtawa zaś DC, iednego większa ieſt od podſtawy CE, drugiego; więc kąt: CAD, w wierzchołku

pier-

pierwszego Tróykąta, większy iest od kąta: CAE, w wierzchołku drugiego; więc i summa kątów: BAD, CAD, większa iest od summy kątów: BAE, CAE, to iest: większa od kąta BAC.

26. *Twierdz:* 2. W kącie bryłowym, summa wszystkich kątów płaskich, mnieysza iest od summy czterech kątów prostych. (c)

Dowodz: Wierzchołki Wielokąta, na których wspieraią się wszystkie krawędzie kąta bryłowego, są oraz wierzchołkami tylu innych kątów bryłowych zrobionych

---

(c) *Trzeba mieć na pamięci, że się tu nie mówi, tylko o kątach bryłowych, których krawędzie wspieraią się na wierzchołkach Wielokąta, maiącego same tylko kąty wyskakuiące. W przypadku od tego odmiennym, mogą być kąty bryłowe takie, w których summa kątów płaskich, będzie większa od 4. kątów prostych tyle, ile zechcemy. P. Le Sage Genewenczyk pierwszy tę prawdę odkrył, która też pierwsza i sama iedna zdaie się uchybienie zadawać Euklidesowi. Obacz Historyą Akademii Nauk Paryskiey na Rok 1756.*

bionych przez kąty trzy płaskie, ile ten Wielokąt ma wierzchołków; gdyż każde dwa z tych kątów płaskich wchodzących w kąt ieden bryłowy, znayduią się przy podstawach ścian tego kąta bryłowego, a trzeci takowy kąt należy do podstawy kąta bryłowego w wierzchołku, to iest: do Wielokąta na którym się wszystkie krawędzie kąta bryłowego w wierzchołku, wspieraią.

Na każdey z tych ścian summa trzech kątów, iednego w wierzchołku, a dwóch przy podstawie ściany, równa się summie dwoch kątów prostych; a za tym summa wszystkich kątów w wierzchołku i wszystkich kątów przy podstawach ścian, równać się będzie, dwom kątom prostym tyle razy wziętym, ile ma ścian kąt bryłowy.

Summa dwóch kątów przy podstawach ścian, większa iest od kąta trzeciego przy podstawie kąta bryłowego, który kąt trzeci, z dwoma tamtemi robi kąt ieden bryłowy przy tey podstawie; a zatym summa wszystkich kątów przy podstwach ścian wszystkich, większa iest od summy wszystkich kątów przy podstawie kąta bryłowego.

Więc

Więc ſummie wſzyſtkich kątów, przy podſtawach ścian, mniey nie doſtaie do ſummy dwa razy tylu kątów proſtych, ile Wielokąt, czyli podſtawa kąta bryłowego, ma boków; niżeli ſummie wſzyſtkich kątów Wielokąta tego nie doſtaie do teyże ſummy dwa razy tylu kątów proſtych, ile ten Wielokąt ma boków.

A że ſummie kątów wſzyſtkich Wielokąta do przerzeczoney ſummy, brakuie 4. kątów proſtych, więc ſummie kątów wſzyſtkich przy podſtawach ścian, brakować będzie do teyże ſummy mniey niż 4. kąty proſte. Że zaś ſumma wſzyſtkich kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, ſpełnia ten niedoſtatek mnieyſzy od 4. kątów proſtych, więc ſumma wſzyſtkich kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, mnieyſza ieſt od 4. kątów proſtych.

To Twierdzenie obiaśnić trzeba przez wiele przykładów ſzczegulnych, biorąc różne liczby ścian kąta bryłowego nap: 3, 4, 5, 6, i t. d. w których to razach, takoważ liczba 3, 4, 5, 6, i t. d. będzie wyrażać boki Wielokąta ſłużącego kątowi bryłowemu za podſtawę; ſumma zaś ką-

tow

tów Wielokąta będzie ważyć: 2, 4, 6, 8, i t. d. kątów prostych, a zatym summa kątów przy podstawach ścian będzie ważyć więcey niż 2, 4, 6, 8, i t. d. kątów prostych. Ze zaś summa tych ostatnich kątów wraz z summą kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, waży w tychże razach, kątów prostych 6, 8, 10, 12, więc summa kątów samych przy tym wierzchołku mnieysza iest, niż *nadmiar* (excessus) liczb.

6, 8, 10, 12, i t. d.

nad liczby - - 2, 4, 6, 8, i t. d.

To iest: ta summa kątów przy wierzchołku mnieysza iest od 4. kątów prostych.

Można prawdę tego Twierdzenia okazać i w sposób następuiący:

Obierzmy punkt iakikolwiek, wpośród Wielokąta, i pociągniymy od niego liniie do wszystkich wierzchołków tego Wielokąta. Summa wszystkich kątów, około tego punktu, zrówna summę 4. kątów prostych. Wynieśmy teraz myślą ten punkt nad płaszczyznę Wielokąta, podług

podług ciągu linii proſtopadłey do tey płaſzczyzny. Jm bardziey ten punkt oddalony będzie od wierzchołków Wielokąta, tym bardziey zmnieyſzy ſię każdy kąt przy tym punkcie, zawarty między liniiami, od niego poprowadzonemi do wierzchołków Wielokąta; a zatym tym mnieyſza będzie ſumma wſzytkich kątów przy tym punkcie, od ſummy pierwſzey 4. kątów proſtych.

27. *Przyſtoſowanie.* Pięć tylko ieſt gatunków kątów należących do Wielokątów foremnych, z których może ſię złożyć kąt bryłowy.

1. W kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów Tróykąta równobocznego, każdy taki kąt ważyłby $\frac{2}{3}$ kąta proſtego, a zatym ſumma ich ważyłaby 2. kąty proſte.

2. W kącie bryłowym, złożonym z czterech kątów Tróykąta równobocznego, ſumma takich kątów, ważyłaby $2\frac{2}{3}$ kąty proſte.

3. W kącie bryłowym, złożonym z pięciu kątów Tróykąta równobocznego, ſumma takich kątów ważyłaby $3\frac{1}{3}$ kąty proſte. Sześć

Sześć kątów Tròykąta równobocznego, waży kątów proſtych cztery. Są one zdatne do napełnienia placu, około punktu jakiego na płaſzczyznie, nie zaś do zrobienia kąta bryłowego. Summa więcey niż ſześciu takowych kątów, ważyłaby też więcey niż cztery kąty proſte.

4. W kącie bryłowym złożonym z trzech kątów kwadratu, każdy takowy kąt, byłby kątem proſtym, a zatym ſumma takowych kątów równałaby ſię ſummie 3 kątów proſtych; ſumma 4 kątów kwadratu, byłaby ſummą 4 kątów proſtych; a przeto z 4 takowych kątów ſkładać ſię nie może kąt bryłowy, daleko zaś bardziey ſkładać ſie nie może z większey liczby takich kątów.

5. W kącie bryłowym, złożonym z trzech kątów, Pięciokąta foremnego, każdy takowy kąt ważyłby $1\frac{1}{5}$ kąt proſty; a zatym ſumma ich ważyłaby $3\frac{3}{5}$ kąty proſte.

Summa czterech takowych kątów, a tym bardziey więcey niż czterech ważyłaby więcey, niż cztery kąty proſte.

Summa trzech kątów Sześciokąta foremnego waży cztery kąty proste, a zatym żaden kąt bryłowy nie złoży się z samych kątów Sześciokąta foremnego; tym bardziey zaś żaden kąt bryłowy składać się nie może z samych kątów należących do Wielokątów foremnych, które więcey niż sześć boków maią.

Jeżeli tedy znayduią się bryły iakie, których ścianami są Wielokąty iednakowego tylko gatunku, takich brył gatunków, więcey iak pięć być nie może.

Bryła, którey każdy kąt bryłowy złożony iest z trzech kątów Tróykąta równobocznego, ma 4. ściany, z których każda iest Tróykątem równobocznym, i 4 kąty bryłowe. Nazywa się *Czworościanem* (Tetraëdrum).

Bryła, którey każdy kąt złożony iest z 4. kątów Tróykąta równobocznego, ma ścian 8, z których każda iest Tróykątem równobocznym, i 6. kątów bryłowych. Nazywa się *Ośmiościanem* (Octoëdrum.)

Bryła, którey każdy kąt złożony iest z 5 kątów Tróykąta równobocznego, ma ma 20. ścian, z których każda ieſt Tróykątem równobocznym, i 12, kątów bryłowych. Nazywa ſię *Dwudzieſtościanem* (Icosàédrum.)

Bryła, której każdy kąt złożony ieſt z 3 kątów kwadratu, ma 6 ścian, z których każda ieſt kwadratem, i 8 kątów bryłowych. Nazywa ſię *Sześcianem* (Hexàédrum,) a zwyczayniey (*Cubus*.)

Bryła, której każdy kąt złożony ieſt z 3 kątów Pięciokąta foremnego, ma 12 ścian, z których każda ieſt Pięciokątem foremnym, i 20 katów bryłowych. Nazywa ſię *Dwunaſtościanem* (Dodecàédrum.)

Doſyć będzie pokazać uczniom takie bryły, nie wchodząc w obſzerne w tey mierze rozwodzenia ſię, które więcey ſamey ciekawości dogadzaią, niż pożytek przynoſzą. Te bryły, gdy wſzyſtkie kąty maią równe, i wſzyſtkie ściany foremne, i mogące przyſtać iedne do drugich, nazywaią ſię bryłami *foremnemi*.

Gdyby w kącie bryłowym pomieſzać chcieliśmy różne kąty Wielokątów foremnych, końcem złożenia tegoż kąta

 bryło-

bryłowego, liczba takich kątów płaskich, mogłaby być do upodobania powiększona.

28. *Twierdz:* 3. Gdy dwa kąty bryłowe złożone są z trzech kątów płaskich, równych iednych, względem drugich; pochyłości ścian, tychże kątów bryłowych równe też są iedne względem drugich.

Tab. II Fig. 2. Niech będą dwa kąty bryłowe: ABCD, abcd złożone z równych kątów względem siebie: BAD, bad, BAC, bac, DAC, dac; pochyłości płaszczyzn równe też będą iedne względem drugich; nap: pochyłość płaszczyzny BAD do BAC, równa iest pochyłości płaszczyzny bad, do bac.

Wykreśl: Weźmy równe liniie AB, ab, na płaszczyznach: BAD, bad; wynieśmy do AB prostopadłą BD, a do ab, prostopadłą bd. Na płaszczyznach także BAC, bac, wyprowadzmy do tychze linii AB, ab, prostopadłe: BC, bc. Kąty CBD, cbd, będą kątami pochyłości płaszczyzn BAD, BAC, i bad, bac; a zatym dowieść należy, że te kąty: CBD, cbd, są równe.

Dowodz:

Dowodz: Dwa Tróykąty DBA, dba ſą proſtokątne w B i b; maią równe kąty BAD, bad, i boki: AB, ab, równe; więc mogą przyſtać do ſiebie; a wſzczegulności, linie: BD, bd ſą równe, iako też i liniie AD, ad.

Dla teyże przyczyny i Tróykąty BAC, bac przyſtać do ſiebie mogą, a wſzczegulności liniie BC, bc, ſą równe, iako też i liniie AC, ac.

Więc Tróykąty CAD, cad, maią boki AC, ac równe; i boki AD, ad także równe, a maiąc oprocz tego i kąty między temi bokami zawarte, równe, przyſtać do ſiebie mogą; wſzczegulności zaś liniie CD, cd, ſą równe.

Więc Tróykąty: CBD, cbd, maią wſzyſtkie boki równe, iedne względem drugich, a zatym do ſiebie przyſtać mogą; a wſzczegulności kąty: CBD, cbd, ſą równe.

29. *Twierdz:* 4. Gdy dwa kąty bryłowe, ſkładaią ſię z trzech kątów płaſkich, które równe ſą iedne względem drugich, takie kąty bryłowe, mogą przyſtać do ſiebie,

Niech

Niech będzie kąt bryłowy w A. złożony z trzech kątów płaskich: BAD, BAC, DAC, równych względem kątów płaskich: bad, bac, dac, z których się składa kąt drugi bryłowy w *a*.; te dwa kąty bryłowe, mogą przystać do siebie.

Wystawmy sobie w myśli drugi z tych kątów, jakoby przeniesiony, tak; aby wierzchołek a, przypadł na wierzchołek A; liniia zaś ab aby leżała na linii AB. Ponieważ kąty: BAD, bad, wzięte są za równe, liniia więc ad, będzie też leżeć na linii AD.

Aże trzy kąty płaskie w *a*, równe są trzem kątom w A; równe więc będą pochyłości płaszczyzn BAD, BAC, i płaszczyzn bad, bac; a zatym płaszczyzna bac, leżeć będzie na płaszczyznie BAC. Dla równości zaś kątów bac, BAC, liniia ac leżeć będzie na linii AC; więc tak liniia ad, leży na linii AD, jak i ac na AC; a zatym płaszczyzna cad przystanie do płaszczyzny CAD; przystaną tedy do siebie te dwa kąty bryłowe.

3o. *Wniosek.* Kąt bryłowy, określony trzema kątami płaskiemi, już tym samym jest wyznaczony, gdy mamy wiadome te trzy kąty płaskie.

Możnaby

Możnaby też pokazać, że z trzech kątów płaſkich czyniących kąt bryłowy maiąc wiadome dwa z tych kąty, i pochyłość ich ścian, wyznacza ſię także kąt bryłowy; iako też z wiadomey tylko pochyłości wſzyſtkich trzech ścian tego kąta.

Te iednak oſtatnie podania, iż nieſłużą do naſzego zamierzenia, przeto dosyć ieſt tu o nich tylko namienić.

31. *Zagadn:* 1. Zrobić kąt bryłowy, maiąc dane trzy kąty płaſkie, z których ma być złożony tenże kąt bryłowy.

Do ſkładu tego kąta bryłowego z 3, kątów płaſkich; naſtępuiący ſpoſob, zdaie ſię być naywygodnieyſzym.

Niech będą dane trzy kąty płaſkie: BAD, BAC, DAC, do zrobienia kąta bryłowego. Wyſtawmy ſobie myślą, iż ten kąt iuż ieſt zrobiony. Weźmy którykolwiek punkt C, na krawędzi nap: AC; i od tego punktu, ſpuśćmy na inne krawędzie, AB, AD, liniie proſtopadłe: CB, CD; a znowu od punktów B, i D, na płaſzczyznie BAD, poprowadźmy do teyże krawędzi, proſtopadłe: BE, DE, *Tab: II. Fig: 3.*

które

które ſię przetną, w punkcie E. Pociągniymy nakoniec liniie: CE, AE.

Ponieważ liniie CB, EB ſą proſtopadłe do linii AB, liniia więc AB ieſt proſtopadłą do płaszczyzny: CBE; a zatym płaszczyzna BAD, która przechodzi przez liniią AB, ieſt też proſtopadłą do płaszczyzny: CBE; a wzaiemnie, i ta płaszczyzna ieſt do tamtey proſtopadłą. Dla teyże przyczyny, płaſzczyzna, CDE, proſtopadłą ieſt do płaszczyzny BAD; więc obiedwie płaszczyzny: CBE, CDE, proſtopadłe ſą do płeszczyzny: BAD; a zatym ſpolne ich przecięcie CE, ieſt także proſtopadłym do płaszczyzny BAD; i płaszczyzna CAE, ieſt także proſtopadłą do teyże płaszczyzny BAD. Zkąd wypada takowe wykreślenie.

Po obydwóch ſtronach linii ac, przy punkcie *a*, nakreślmy kąty: cab, cad, równe względem kątów danych CAB, CAD. Od punktu któregokolwiek teyże linii ac, nap: od *c* ſpuśćmy na dwa drugie ramiona, ab, ad, liniie proſtopadłe: cb, cd; a na ramionach trzeciego kąta weźmy, zacząwſzy od wierzchołka A, liniie AB, AD, równe względem liniy ab, ad. Od punktów B, i D wy-

pro-

prowadźmy prostopadłe do liniy AB, AD, przecinaiące się w punkcie E, a od tego punktu wynieśmy znowu prostopadłą EC, do płaszczyzny BAD. Niech przez linie EC, i AE przechodzi inna płaszyzna, na którey z punktu A, iak ze środka, promieniem równym odległości ac, nakreślmy łuk koła, który przetnie prostopadłą EC, punkcie C; Naostatek przez punkt C, i liniie AB, AD, niech przechodzą dwie płaszczyzny te, wraz z płaszyzną BAD, zrobią kąt bryłowy, którego szukamy.

Jnaczey ieszcze punkt C, będzie wyznaczony na prostopadłey EC; gdy tylą liniią, EC, weźmiemy, aby kwadrat iey równał się różnicy kwadratów: linii ac, i AE, albo różnicy kwadratów: cd, i DE, albo nakoniec różnicy kwadratów: be i BE.

32. *Uwaga.* Używaiąc tego wykreślenia, można łatwo dowieść następuiące Twierdzenie, na którym się zasadza Trygonometrya kulna; to iest, że:

W każdym kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów płaskich, wstawa iednego kąta płaskiego, iest do wstawy

drugie-

drugiego, iak wſtawa kąta pochyłości przeciwnego pierwſzemu kątowi, do wſtawy kąta pochyłości przeciwnego drugiemu kątowi; to ieſt, iak wſtawa kąta pochyłosci płaszczyzn dwóch ścian pod pierwſzym kątem będących, do wſtawy kąta pochyłości dwóch także ścian pod drugim kątem będących.

Jakoż liniie: CD, CB, ſą wſtawami, pierwſza kąta CAD, drugą, kąta CAB, wziąwſzy za promień liniią AC; a zatym te dwie liniie tak ſię do ſiebie maią, iak wſtawy tych dwóch kątów.

Aże w Tróykącie ECD proſtokątnym w E; CD : CE = Pr: Wſt. CDE

A w Tróyk. EBC; CE: CB = Wſt:CBE.Pr:

Więc złożywſzy te ſtoſunki, będzie; CD:CB = Wſt: CBE: Wſt. CDE.

To ieſt: Wſtawa kąta CAD, tak ſię ma do wſtawy kąta CAB, iak wſtawa kąta pochyłości dwóch płaszczyzn BAD, BAC, do wſtawy kąta pochyłości dwóch płaſzczyzn BAD, CAD.

32. *Zagadn:*

33. *Zagadn:* 2. Maiąc dane trzy kąty płaſkie, z ktòrych ſię ma ſkładać kąt bryłowy, wyrachować, iaka ma być pochyłość płaſzczyzn, aby ten kąt zrobiły.

Spoſob 1. W Czworokącie ABED, kąty przeciwne B, i D ſą proſte: więc Czworokąt ten może być w koło wpiſanym, a zatym kąty (w tymże ſamym odcinku) ADB, AEB będą równe. Wyrachowawſzy tedy w Tróykącie BAD kąt ADB, iuż tym ſamym znaydziemy i kąt AEB, równy tamtemu.

Stoſunek boku BC do BE, to ieſt ſtoſunek wſtawy całey, czyli promienia, do Doſtawy kąta pochyłości CBE, ſkłada ſię z ſtoſunków boków: BC do AB i AB do BE.

Ażeieſt; BC: AB=Stycz. BAC:Wſt. całey,

i - AB: BE=Wſt.cała: Doſtycz. AEB

więc; BC: BE=Sſtycz. BAC: Doſt. AEB
A zatym; - - - -
Stycz.—BAC: Doſt: AEB=Pr:Doſt:CBE.

Spoſob 2. Wyciągnowſzy od punktu iednego nap: B znayduiącego ſię na któreykolreykolwiek krawędzi kąta bryłowego, proſtopadłe: BD, BC, do tey krawędzi, a na dwóch płaſzczyznach, których ſpolnym przecięciem ieſt ta krawędź, niech te dwie proſtopadłe ſpotykaią dwie drugie krawędzie w punktach: C, i D: Liniie BC, BD będą ſtycznemi, a liniie AC, AD będą ſiecznemi względem kątów, BAC, BAD, biorąc za promień liniią AB. Więc te liniie, mogą być wyrachowane na miarę linii ſtałey AB, czyli promienia. W Tróykącie CAD wiedząc dwa boki AC, AD i kąt CAD, między niemi zawarty możemy wyznaczyć bok trzeci CD. W Tróykącie zatym CBD wiedzieć będziemy trzy boki, a ztąd możemy wyznaczyć kąt CBD, który ieſt kątem pochyłości dwóch płaſzczyzn: BAD. BAC. Jnne też kąty pochyłości łatwo wyznaczemy podług uwagi poprzedzaiącey.

PRZYGOTOWANIE DO ROZDZIAŁOW NASTĘPUIĄCYCH.

O podnieſieniu liczby do iey Sześcianu albo Kubusa, *i o wyciągnieniu Pierwiaſtku Sześciennego, albo Kubicznego.*

Przed naſtępuiącemi Rozdziałami, kładzie ſię nauka o podnieſieniu liczby do Sześcianu, i o wyciąganiu Pierwiaſtku ſześcien-

ſześciennego; bo właśnie w tych rozdziałach, można będzie naukę tę do praktyki zaraz przyſtoſować.

34. Sześcian liczby iakiey robi ſię, gdy tę liczbę przez nią ſamą raz mnożemy, i tak rozmnożoną, ieſzcze raz przez nią mnożemy albo, co na iedno wychodzi, gdy tę liczbę mnożemy przez iey kwadrat. I tak Sześciany dziewięciu liczb pierwſzych.

1, 2, 3, 4, 5, 6. 7, 8, 9.

ſą: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Sześciany liczb:

10. 20. 30, 40, - - - 90.

są; 1000, 8000, 27000, 64000, - - - 729000.

Sześciany liczb:

100, 200, 300, - - 900.

ſą: 1000000, 8000000, 27000000, 729000000.

35. Sześciany więc liczb maiących iednę tylko cyfrę, a reſztę zerów, ſą te ſame,

ſame, co i ſześciany tychże cyfr ſamych przez ſię, przydawſzy im trzy razy tyle zerów, ile ich było w liczbie z którey ſię Sześcian robi.

Wyraz ten *Sześcian*, wzięty ieſt z Geometryi, w którey, aby mieć bryłowatość iakiego Sześcianu, rozmnaża ſię liczba wyrażaiąca wielkość boku iego, raz i drugi przez ſiebie.

Sześcian każdey liczby znaleść można, mnożąc iey kwadrat przez nią ſamę; podamy tu iednak inny ſpoſob zrobienia Sześcianu z liczby daney, a ten ſposób pomoże nam do przeciwnego działania, to ieſt do wyciągania Pierwiaſtku Sześciennego z liczby iakieykolwiek.

36. Sześcian liczby złożony z dwóch części, może być rozłożony na cztery części naſtępuiące.

1. Na Sześcian pierwſzey części.

2. Na Kwadrat pierwſzey części trzy razy wzięty i rozmnożony przez część drugą.

3. Na Kwadrat drugiey części trzy razy wzięty, i rozmnożony przez część pierwſzą.

4. Na

4. Na Sześcian drugiey części.

I tak liczbę 5. rozłożywszy na dwie części naprzyk: 1, i 4; można uważać iey Sześcian, iakoby złożony z czterech części: 1, 12, 48, 64, których Summa iest: 125. Gdybyśmy zaś tę samę liczbę 5, uważali iako złożoną z dwóch części 2, i 3; iey Sześcian mogłby się był rozłożyć na cztery części: 8. 36, 54, 27.

Niechby potrzeba znaleść Sześcian liczby nap: 47; Ponieważ iey kwadrat (podług reguły iuż nam wiadomey) składa się z kwadratu pierwszey części 40, z teyże części 40, dwa razy wziętey, przez drugą, 7. rozmnożoney, i z kwadratu drugiey części 7; mnożąc cały ten kwadrat ieszcze raz przez 40, i przez 7, albo przez 47, Sześcian z 47 składać się będzie:

Z Kwadratu liczby 40, rozmnożonego przez 7, z 40, rozmnożonych przez kwadrat liczby 7, dwa razy wzięty, i z Sześcianu teyże liczby 7; (biorąc 7 za liczbę mnożącą;) biorąc znowu 40, za liczbę mnożącą; Sześcian z 47, składać się ieszcze będzie z Sześcianu liczby 40; z 7, rozmnożonych przez kwadrat

liczby

liczby 40, dwa razy wzięty; i z 40 rozmnożonych przez Kwadrat liczby 7, raz wzięty; a razem to wszystko zebrawszy, składać się będzie z Sześcianu liczby 40, z kwadratu teyże liczby trzy razy wziętego, a rozmnożonego przez 7, z kwadratu liczby 7, trzy razy wziętego, a rozmnożonego przez 40, i z Sześcianu liczby 7. Co uczyni Summę: 103823, która iest Sześcianem liczby 47.

Ponieważ zaś niemożna ieszcze dowieść tego Algebraicznie, trzeba przynaymniey będzie z Geometryi zaciągnąć obiaśnienia, pokazuiąc; że Sześcian linii złożoney z dwóch części, może być w rzeczy samey rozłożony na Sześciany każdey, z tych dwóch części, i na 6. Równoległościanow, z których trzy mieć będą za podstawę kwadrat iedney części; a za wysokość część drugą; trzy zaś inne, mieć będą za podstawę kwadrat drugiey części, a za wysokość część pierwszą.

Wykonać to w skutku będzie można na Sześcianie z drewna lub z papieru tak zrobionym, aby te części od siebie się oddzielały.

38. Nay-

38. Naywygodniey ieſt, rozłożyć liczbę na iedności, dzieſiątki, ſta, i t. d. które w ſobie zawiera.

Niech będzie liczba nap: 12. Podzielmy ią na dwie części, 10, i 2. Sześcian iey ſkładać ſię będzie z części naſtępiących:

1000. Sześcan dzieſiątku

600. Kwadrat dzieſiątku trzy razy wzięty przez iedności rozmnożony.

120. Kwadrat iedności trzy razy wzięty przez dzieſiątek rozmnożony

8. Sześcian dwóch iedności.

1728 Sześcian z 12.

Niech będzie liczba 84, rozebrana na dwie części 80, i 4; Sześcian iey mieć będzie części naſtępuiące:

512000. Sześcian dzieſiątków,
76800. Kwadrat dzieſiątków trzy razy wzięty, przez iedności romnożony.
3840. Kwadrat tychże iedności trzy razy wzięty przez dzieſiątki rozmnożony.
64. Sześcian z iedności.

592704. Sześcian z 84.

Niech będzie liczba 324, rozebrana na dwie części 320 i 4; aby zaś mieć Sześcian pierwſzey części, rozłożmy ią na części 300, i 20,

27000000. Sześcian ſtów
5400000. Kwadrat ſtów potróyny przez dzieſiątki rozmnożony.
360000. Kwadrat dzieſiątków potróyny przez ſtą rozmnożony.

8000. Sześcian dzieſiątków.

1228800. Kwadrat z 320 potróyny rozmnożony przez iedności

15360. Kwadrat z iedności potróyny, rozmnożony przez 320.
64. Sześcian iedności.

34012224. Sześcian z 324.

Niechby

Niechby trzeba zrobić Sześcian z 8421.

512000000000	Sześcian z 8000.
76800000000	Kwadrat z 8000 potróyny, roz: przez 400.
3840000000.	Kwadrat z 400 potróyny roz: przez 8000.
64000000.	Sześcian z 400.
4233600000.	Kwadrat z 8400 potròyny rozm: przez 20.
10080000.	Kwadrat z 20. potróyny rozmn: przez 8400.
8000.	Sześcian z 20.
212689200.	Kwadrat z 8420 potróyny rozmn: przez 1.
25260.	Kwadrat z 1. potróyny rozmn: przez 8420.
1.	Sześcian z 1.

597160402461. Sześcian z 8421.

39. Widziemy na poprzedzaiących przykładach, iż przez takowy rozbior, każda część następuiąca Sześcianu mniey ma iednym zerem, od części, ktora ią poprzedziła; i że iako pierwsza część Sześcianu iest zawsze Sześcianem, a po nim następuią dwie części, każda złożona z potróynego kwadratu iedney części rozmnożonego przez część drugą; tak i daley, tymże porządkiem idą, i dalsze wyrazy części składaiących Sześcian.

40. Można było opuścić zera kładąc tylko same cyfry znaczące, a w każdey części następuiącey występuiąc z ostatnią cyfrą w prawą. I tak części Sześcianu mogły być w ten sposób wypisane.

27
54
36
8
12288
1536
64.
34012224.

41. Ten

41. Ten ſposob poſtępowania, pokazuie nam, że liczba wyrażaiąca Sześcian iedności, kończy ſię na oſtatniey po prawey ręce cyfrze, że Sześcian dzieſiątków kończy ſię na czwartey od prawey ręki cyfrze; liczba Sześcianu ſtów, kończy ſię na ſiodmey cyfrze od teyże ſtrony rachuiąc, i t, d.

Zeby więc wiedzieć liczbę cyfr wyrażaiących Pierwiaſtek Sześcianu danego, trzeba od prąwey ſtrony zaczynaiąc, oddziały co trzy cyfry kreſkami poczynić; a ile będzie tych oddziałów, tyle też cyfr będzie ſię znaydowało w Pierwiaſtku. Oddział pierwſzy po lewey ſtronie może mieć trzy, dwie, a czaſem i iednę tylko cyfrę, iako to przykłady poprzedzaiące okazuią. I tak Pierwiaſtki ſześcienne liczb 1,331; 32,767; 226,981; maią dwie cyfry.

42. Niechby trzeba z liczby 1331, wyciągnąć pierwiaſtek ſześcienny:

Ta liczba ma dwie cyfry w ſwoim Pierwiaſtku, bo dwa w niey uczynić można oddziały, tym ſpoſobem: 1,331. Naywiękſza liczba dzieſiątków tego Pierwiaſtku taka być powinna, aby iey

Sześcian

Sześcian nie był większy od 1; a zatym będzie tylko ieden dziesiątek w Pierwiastku. Sześcian z 10, iest: 1000; który Sześcian odiąwszy od 1331, zostanie 331. Ta reszta powinna zamykać w sobie potróyny kwadrat dziesiątka rozmnożony przez iedności; potróyny kwadrat tych iedności, rozmnożony przez dziesiątek, i Sześcian tychże iedności. Aże wszczególności ta reszta, ma w sobie zamykać kwadrat potróyny dziesiatka rozmnożony przez iedności; wystawmy więc sobie tę resztę 331, iak gdyby zamykała tylko sam potròyny kwadrat z 10, to iest 300. Wieloraz z 331, przez 300 podzielonych, iest: 1, więc iedna iedność będzie w Pierwiastku. Rozmnożywszy 300 przez 1, będzie 300, a te, od 331, odiąwszy, zostanie 31. Ta reszta ma ieszcze w sobie zamykać potróyny kwadrat iedności przez dziesiątek rozmnożony, to iest: 30; i Sześcian iedności, to iest: 1, a zewszystkim 31, ktòre odiąwszy od ostatniey reszty nic nie zostanie; a zatym Pierwiastek sześcienny liczby 1331, iest: 11.

Wyciągniymy Pierwiastek sześcienny z liczby 68,921. Pierwiastek tey liczby ma dwie cyfry. Liczba dziesiątków ta-

ka

ka być powinna, aby Sześcian iey odiąć można od pierwszego podziału: 68. Aże z Tablicy dziewiąciu pierwszych sześcianów (34) którą uczniowie umieć na pamięć powinni, Sześcian naybliższy 68; iest 64. a tego Pierwiastek iest: 4; więc w Pierwiastku będą 4 dziesiątki. Sześcian z 40, iest: 64000; odiąwszy go od 68921, zostanie 4921. Ta reszta ma wszczegulności zawierać w sobie potróyny kwadrat dziesiątków, rozmnożony przez iedności, to iest ma w sobie zawierać 4800 rozmnożone przez iedności. Dzieląc 4921. przez 4800, wypada 1, na wieloraz, więc będzie w Pierwiastku iedna iedność. Odiąwszy od 4921, kwadrat potróyny 4800. rozmnozony przez 1, zostanie 121. Ta reszta ma ieszcze w sobie zawierać kwadrat potróyny iedności, rozmnożony przez 4 dziesiątki; to iest 120, i Sześcian iedności, to iest 1, a ze wszystkim, 121; które odiąwszy od ostatniey reszty, nic nie zostanie; a zatym Pierwiastek zupełny będzie: 41.

Wyciągniymy Pierwiastek sześcienny z liczby 884,636. Tateż liczba ma dwie cyfry w swoim Pierwiastku. Sześcian naybliższy liczby 884. iest: 729, którego

rego Pierwiaſtkiem ieſt: 9, więc Pierwiaſtek będzie miał 9 dzieſiątków. Sześcian z 90, ieſt 729000; który odiąwszy od 884736, zoſtanie 155736. Kwadrat z 90, ieſt 8100, potròyny będzie: 24300. Dzieląc przez 24300, reſztę 155736, na wieloraz wypada 6, więc Pierwiaſtek mieć będzie 6. iedności. Rozmnożywſzy 24300 przez 6, będzie 145800, które odiąwſzy od 155736, zoſtanie 9936. Kwadrat potróyny 6 iedności, rozmnożony przez 9 dzieſiątków, będzie 9720, odiąwſzy go od 9936, zoſtanie 216, nakoniec Sześcian z 6, ieſt 216; a zatym Pierwiaſtek zupełny będzie 96. Jakoż Sześcian z 96, ieſt: 884,736.

Wyciągniymy Pierwiaſtek ſześcienny z liczby 590,589,719. Ten powinien mieć trzy cyfry.

Liczba ſtów w Pierwiaſtku taka być powinna, aby iey Sześcian, nieprzechodził 590. Z dziewięciu pierwſzych Sześcianów, naybliżſzy liczby 590 ieſt Sześcian: 512, którego Pierwiaſtek; ieſt 8; a zatym 8 ſtów będzie w Pierwiaſtku. Odiąwſzy 512000000, od Sześcianu danego, zoſtanie 78589719. Kwadrat

drat potróyny ſtów 8, albo 800, to ieſt 1920000 znayduie ſię razy 40 w tey reſzcie; mogłoby więc zdawać ſię, iż 4 dzieſiątki Pierwiaſtek mieć powinien; aleby nie można od 78589719 odiąć dwóch innych części, to ieſt kwadratu potróynego dzieſiątków rozmnożonego przez ſta, i Sześcianu dzieſiątków; nie można przeto więcey dać Pierwiaſtkowi, iak 3 dzieſiątki. Liczbę 1920000, rozmnożoną przez 30, to ieſt 57600000, odiąwſzy od 78589719, zoſtanie 20989719; od tey reſzty odiąwſzy znowu kwadrat potróyny 3 dzieſiątków, przez ſta rozmnożonych, to ieſt 2160000, zoſtaie 18829719 a po odięciu Sześcianu dzieſiątków, to ieſt 27000, będzie wreście, 18802719, Kwadrat potróyny części Pierwiaſtku znalezioney, to ieſt liczby 830, ieſt 2066700; przez ten dzieląc reſztę 18802719, wypadnie 9 iedności na wieloraz. Odiąwſzy od tey reſzty, liczbę 2066700, rozmnożoną przez 9, to ieſt: 18600300, zoſtanie 202419; zkąd znowu odiąwſzy kwadrat potróyny iedności 9, rozmnożony przez 830, to ieſt 201690, zoſtaie 729. Naoſtatek Sześcian z 9 ieſt: 729, a zatym Pierwiaſtek którego ſzukaliśmy będzie 839.

Wzor

Wzor działań w przykładach poprzedzaiących.

Przykład 1.	*Przykład 2.*
1,331.|10.	68,921|40
1 000|	64 000|
300| 331|1.	4800| 4 921|1.
| 300|	| 4800|
31.	121.
30	120
1.	1
1	1
0	0

Przykład

Przykład 3.

```
        884,736.|90.
        729000  |
        ---------
24300| 155736|6.
     | 145800|
        ---------
          9936.
          9720.
          -----
           216.
           216.
          -----
            0.
```

Przykład 4.

```
         590,589,719,|800
         512 000 000 |
         -------------
        |78589719|30.
 1920000|57600000|
         -------------
          20989719.
           2160000
         -------------
          18829719.
             27000
         -------------
        |18802719|9
 2066700|18600300|
         -------------
            202419
            201690
           --------
               729
               729
           --------
                0.
```

Więcey takowych przykładów należy podać Uczniom, nie używaiąc ieszcze żadnego skrócenia.

45. Pierwſze ſkrócenie, na tym zawiſło, aby opuſzczać zera, w liczbach dzielących, podzielnych, i w wielorazach; maiąc iednak zawſze uwagę na mieyſca, które zaſtępować przypada cyfrom znaczącym. W ſzczegulności zaś co do wielorazow, będzie ten z opuſzczania zerów pożytek, że zaraz przy ſobie kłaść będzie można cyfry wyrażaiące Pierwiaſtek, którego ſzukamy.

Drugie ſkrócenie, związane z pierwſzym na tym ſię zaſadza, aby do każdego naſtępuiącego dzielenia, tyle tylko cyfr z Sześcianu przyłączać do reſzty pozoſtałey, ile ich wyciągać będzie przypadaiące odeymowanie; darcmna albowiem byłaby praca, przy każdym odeymowaniu, wſzyſtkie pozoſtałe Sześcianu cyfry na nowo wypisywać, ponieważ oſtatnie zwłaſzcza cyfry przez większą część działania nie naruſzone zoſtaią.

Trzecie ſkrócenie na tym zawiſło, aby za iednym razem odiąć kwadrat potróyny części znalezioney, rozmnożony przez część naſtępuiącą; kwadrat potróyny teyże części drugiey, rozmnożony przez część pierwſzą znalezioną, i Sześcian tey

tey części drugiey. To zaś wykona ſię, dodaiąc razem te trzy liczby odeymować ſię maiące, i tak dodane odeymuiąc od Sześcianu, z którego Pierwiaſtek wyciągamy. Zawſze iednak mieć trzeba na to uwagę, aby w liczbach, które pierwey dodawać, a potym ich ſummę odeymować mamy, zachowane było mieyſce każdey cyfrze właściwe; iako też wzgląd mieć należy na położenie cyfrów tych, od których inne odeymować przypada.

Przyſtoſowanie. Niechby z liczby 257,259,456, trzeba wyciągać Pierwiaſtek Sześcienny. Ten będzie miał cyfr trzy, Naywiękſzy Sześcian zawarty w 257, ieſt 216, którego Pierwiaſtek ieſt: 6, odiąwſzy ten Sześcian od 257, zoſtanie 41. Do tey reſzty przyłączmy naſtępuiący oddział 259, będzie 41259. Niemaiąc tym czaſem względu na oſtątnie dwie cyfry: 59, dzielmy 412 przez potróyny kwadrat z 6, to ieſt przez 108, wieloraz będzie 3. Weźmy teraz ſummę trzech liczb: 324. 162. to ieſt kwadratu potróynego z 6. 27 ſtów rozmnożonego przez 3 dzieſiątki, kwadratu potróynego z 3 dzieſiątków rozmnożonego przez 6. ſtów, i Sześcianu z 3 dzieſiątków. Sum-

mę

mę 34047 odeymiymy od 41259, zoſtanie 7212; przy których przypiſawſzy oſtatni oddział 456, będzie 7212456. Nie uważaiąc tym czaſem na oſtatnie dwie cyfry, dzielmy 72124 przez kwadrat potróyny z części Pierwiaſtku znalezioney, to ieſt przez 11907, wypadnie 6, na wieloraz. Weźmy ſummę trzech liczb: $\begin{matrix}71442\\ 6804\\ 216\end{matrix}$ to ieſt kwadrat potroyny części pierwey znalezioney, rozmnożony przez 6 iedności, kwadrat potróyny z 6. iedności rozmnożony przez część pierwey znalezioną, i Sześcian z 6. iedności. Summa 7212456 równa ſię reſzcie oſtatniey; co znakiem ieſt że Pierwiaſtek, którego ſzukaliśmy, ani mnieyſzy ani większy ieſt, iak 636.

To działanie bardziey długie, niż trudne, wyciąga od uczniów częſtego w nim ćwiczenia ſię.

44. Aby wyciągnąć Pierwiaſtek Sześcienny z ułomku, którego tak licznik. iako i mianownik ieſt Sześcianem; trzeba go oſobno wyciągać z każdego z tych wyrazów. I tak Pierwiaſtek ſześcienny z $\frac{125}{216}$, ieſt: $\frac{5}{6}$. Pierwiaſtek z $\frac{64}{343}$. ieſt: $\frac{4}{7}$. Aby zaś wyciągnąć Pierwiaſtek Sześcienny z liczby mieſzaney,

trzeba

trzeba ią pierwey zamienić na ułomek. I tak Pierwiaſtki ſześcienne liczb mieſzanych $3\frac{3}{8}$, $37\frac{1}{27}$, ſą te ſame co i ułomków $\frac{27}{8}$, $\frac{1000}{27}$. to ieſt: $\frac{3}{2}$. $\frac{10}{3}$, albo $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$.

45. Co ſię o Pierwiaſtku kwadratowym powiedziało (w Części 1. Geom: § 128) ściąga ſię i do Pierwiaſtku ſześciennego; to ieſt; że ieżeli nie można mieć Pierwiaſtku Sześciennego liczby całkowitey, w liczbach całkowitych, tedy go i w ułomkach nie znaydziemy. Dowodzi ſię to ogulnie tymże ſamym, iak względem Pierwiaſtku kwadratowego ſpoſobem. (d)

46. Pierwiaſtek Sześcienny liczby iakiey, można tak do prawdziwego przybliżyć, iak tylko zechcemy. Spoſob nayogulnieyſzy ieſt, używaiąc do tego ułomków dzieſiątnych. Niechby naprzykład trzeba z 2 wyciągnąć Pierwiaſtek

---

(d) *Otoż i drugi rodzay ilości nie ſpółmiernych. Pierwſzego rodzaiu ilości nieſpółmierne można Geometrycznie wyrazić: lecz wyrażenie tych drugich, wyżſzey nad początkową nauki potrzebuie.*

ſtek zeşcienny, przybliżaiąc go do prawdziwego w cząſtkach tyſiącznych. Wyciągaymy ten Pierwiaſtek, ſposobem dopiero podanym, z liczby 2000000,000, a oſtatnie trzy tego Pierwiaſtku cyfry połozmy za dzieſiątne. Pierwiaſtek Sześcienny liczby: 2000000000 w liczbach całkowitych naybliżſzych wyrażony, ieſt: 1259; a zatym Pierwiaſtek Sześcienny liczby 2, przybliżony aż do części tyſiącznych iedności będzie 1,259. Jakoż Sześcian z 1,259, ieſt: 1,995616979 mnieyſzy od 2, a Sześcian 1,26, ieſt: 2,259576, większy od 2.

47. Chcąc Pierwiaſtek ſześcienny liczby nap: 2, przybliżyć do prawdziwego, w ułomkach zwyczaynych, podwoiwszy pierwſze dziewięć Sześcianów liczb *naturalnych*, 1,2,3,4. i t. d. uważać należy (podobnie iako ſię o przybliżeniu Pierwiaſtku kwadratowego w Części I. powiedziało:) ieżeli między temi Sześcianami podwoionemi, nieznayduie ſię taki, któryby bliſki bardzo był Sześcianu zupełnego. Znaydziemy nap: że 64. podwoione, to ieſt 128, mało ſię co różni od 125, to ieſt od Sześcianu liczby 5; a zatym 2, które równa ſię cale $\frac{128}{64}$; będzie też prawie równe $\frac{125}{64}$;

przeto

przeto i Pierwiaſtek Sześcienny liczby 2, będzie prawie równy $\frac{5}{4}$. Aby zaś poprawić ten pierwszy mniey dokładny Pierwiaſtek Sześcienny, podzielemy rożnicę między $\frac{128}{64}$ i $\frac{125}{64}$, to ieſt, $\frac{3}{64}$., przez kwadrat potróyny tego pierwſzego Pierwiaſtku to ieſt przez $\frac{75}{16}$, i wieloraz $\frac{1}{100}$, dodamy do Pierwiaſtku $\frac{5}{4}$; Summa $\frac{126}{100}$, będzie Pierwiaſtkiem bardziey przybliżonym. Jakoż Sześcian z $\frac{126}{100}$ ieſt. $2\frac{326}{1000000}$; a i to uchybienie możnaby ieſzcze zmnieyszyć podobnym iak wyżey ſpoſobem.

Niechby z liczby 3, trzeba wyciągnąć Pierwiaſtek ſześcienny przez przybliżenie.

Liczba 3, równa ſię zupełnie $\frac{1029}{343}$, a niewiele ſię różni od $\frac{1000}{343}$; a zatym Pierwiaſtek Sześcienny liczby 3, będzie prawie równy $\frac{10}{7}$, a poprawuiąc to pierwſze uchybienie, Pierwiaſtek bardziey do prawdziwego przybliżony będzie $\frac{3029}{2100}$.

48, Gdy ani licznik ani mianownik iakiego ułomku, nie ieſt Sześcianem; trzeba obadwa te wyrazy rozmnożyć przez taką liczbę, aby po rozmnożeniu, mianownik stał się Sześcianem; potym dopiero wyciąga się Pierwiastek z licznika, przez przybliżenie, a wyciągniony, dzieli się przez Pierwiastek zupełny mianownika. I tak chcąc wyciągnąć Pierwiastek sześcienny z $\frac{1}{4}$; zamieniam ten ułomek na $\frac{2}{8}$; a wyciągnąwszy z 2, przez przybliżenie Pierwiastek sześcienny: 1,259 -- biorę iego połowę 0,629 - - -; to iest: dzielę go przez Pierwiastek sześcienny mianownika 8; Podobnie Pierwiastek Sześcienny z $\frac{1}{12}$, ten sam iest, co i Pierwiastek Sześcienny z $\frac{90}{216}$; to iest $\frac{1}{6}$. Pierwiastku sześciennego z 90.

ROZDZIAŁ III.

O Równoległościanach prostokątnych (e).

49. *DEfin:* Gdy Bryła iaka zakończona iest sześcią ścianami prostokątnemi, taka Bryła nazywa się, *Rownoległo-*

(*e*) *Częste używanie Równoległościanów prostokątnych iest nam pobudką do mówienia o nich w szczegulności: tym bardziey, że przez to przysposobią się Uczniowie do zamieniania z większą łatwością innych nie prostokątnych Rownoległoścanów na prostokątne.*

ległościanem prostokątnym (Parallelopipedum Rectangulum).

50. *Twierdz.* 1. W każdym Równoległościanie prostokątnym, Sciany na przeciwko siebie stoiące, są równe i równoodległe; a każda z tych ścian w szczególności prostopadłą iest, do każdey z czterech innych ścian, które z nią spolny maią bok ieden.

Niech będzie ABCDEFGH, Równoległościan prostokątny; spolne dwóch ścian: GBCF, GBAH przecięcie GB, prostopadłym iest do dwóch innych boków: BC, BA należących do tychże Scian, więc to przecięcie iest też prostopadłym i do płaszczyzny przechodzącey przez linie AB, BC, to iest do ściany ABCD. Płaszczyzny zatym ABGH, BCFG, które przechodzą przez to spolne przecięcie GB, są do ściany ABCD, prostopadłe. Toż mówić i o dwóch drugich ścianach, których spolnym przecięciem iest liniia ED; a zatym cztery ściany Równoległościanu prostokątnego, są prostopadłe do tey ściany, z którą maią po iednym boku spolnym. *Tab. II. Fig. 4.*

Dowiedliśmy że liniia GB, prostopadłą iest do ściany ABCD. Podobnie do-

 wieść-

wieśćby można, że taż liniia ieſt proſtopadłą i do ściany GFEH; więc te obie ściany ſą proſtopadłe do iedney linii GB, a zatym ſą od ſiebie równoodległe.

Na oſtatek w Proſtokącie ABGH liniie przeciwne AB, GH ſą równe; iako też i liniie BC, FG, a zatym dwie przeciwne ściany ABCD, EFGH, mogą przyſtać do ſiebie.

51. *Uwaga.* Ponieważ w Równoległościanie proſtokątnym z czterech ścian otaczaiących ten Równoległościan, każda ma ieden bok ſpolny z bokiem iedney ściany z dwóch pozoſtałych; przeto można wyſtawić ſobie *rodzenie ſię* (generatio albo formatio) Równoległościanu proſtokątnego, w ſposób naſtępuiący.

Niech będzie Proſtokąt iakikolwiek, na którego wierzchołkach wszyſtkich wyſtawione ſą proſtopadłe do iego płaſzczyzny wſzyſtkie równe. Niech ten Proſtokąt poſuwa ſię równoodległe od pierwſzego ſwego położenia, i tak, aby wierzchołki kątów iego wzdłuż liniy proſtopadłych wznoſiły ſię. Mieyſce to, które takowym poſuwaniem ſię

przey-

przeydzie Proſtokąt, będzie Równoległościanem proſtokątnym.

52. *Defin:* Równoległościan proſtokątny, którego wſzyſtkie sciany ſą kwadratami, nazywamy *Sześcianem*, albo z Łacińſkiego, *Kubusem*.

Sześcian więc, ieſt to Bryła zakończona ſześcią kwadratami. Wypływa zaś z Twierdzenia poprzedzaiącego, że te 6. kwadratów, ſą równe, żę każde z nich dwa, na przeciwko ſiebie ſtoiące, ſą równoodległe, i że cztery z tych kwadratów wspieraiące ſię na czterech bokach kwadratu iednego z dwóch kwadratów pozoſtałych, ſą do tego kwadratu proſtopadłe.

Wyſtawiwszy ſobie Równoległościan proſtokątny, iako zbudowany na iedney z ścian ſwoich, proſtopadła ſpuszczona na tę ścianę, od punktu któregokolwiek ściany przeciwney, nazywa ſię *wysokością* tego Równoległościanu. Ta zaś wysokość równa ieſt ſpolnemu przecięciu dwóch ścian zbudowanych na dwóch przyległych ſobie bokach podſtawy.

53. *Twier:*

53. *Twierdz.* 2. Gdy podſtawy dwóch Równoległościanów mogą przyſtać do ſiebie, a ich wysokości ſą równe, te dwa Równoległościany, mogą też przyſtać do ſiebie, to ieſt nie różnią ſię od ſiebie tylko mieyſcem.

Dowodz: Wſzyſtkie ściany tych dwóch Równoległościanów, podobnie położone, mogą przyſtać do ſiebie; wſzyſtkie też tych Równoległościanów kąty bryłowe, ſkładaią ſię z trzech kątów proſtych, a zatym wszyſtkie te kąty bryłowe mogą przyſtać do ſiebie. Przenioſzy tedy myślą ieden z tych Równoległościanów, tak, aby ieden z kątów iego bryłowych, przyſtał do iednego z kątów bryłowych Równoległościanu drugiego, i aby ściany pierwſzego kąta, które mogą przyſtać do ścian drugiego, w ſamey rzeczy do niego przyſtały, wſzytkie końce krawędzi pierwſzego kąta, przyſtaną do końców krawędzi odpowiadaiących przy drugim kącie; a przeto i wierzchołki kątów bryłowych pierwſzego Równoległościanu, które ſą przy końcach tych krawędzi, przypadną na wierzchołki kątów bryłowych drugiego Równoległościanu, będące przy końcakch tychże ścian odpowiadaiących

54.

pierwszym; zatym i te kąty bryłowe przyſtaną iedne do drugich.

54. *Wniosek.* Podzieliwszy wyſokość iakiego Równoległościanu proſtokątnego na pewną liczbę części równych, a przez te wszyſtkie punkta podziału przeciągnąwſzy płaszczyzny równoodległe od podſtawy; Równoległościan podzielony będzie na tyle Równoległościanów mnieyszych, które przyſtać do ſiebie mogą, na ile części była podzielona wysokość; będą albowiem miały te wszyſtkie Równoległościany mnieysze, iednakową wyſokość, a takie podſtawy, z których każda przyſtać może do podſtawy wielkiego Równoległościanu.

55. *Twierdz;* 3. Dwa Równoległościany proſtokątne, wyſtawione na teyże ſamey podſtawie, lub na podſtawach mogących przyſtać do ſiebie, tak ſię maią ieden do drugiego, iak ich wysokości.

Dowodz: 1. Gdyby wyſokość iednego, Równoległościanu, była dwa, trzy, cztery i t. d. razy większa od wysokości drugiego, pierwszy Równoległościan, mógłby ſię podzielić na 2, 3, 4, i t. d.

i t. d. Równoległościany mogące przystać do drugiego; a zatym ten pierwszy Równoległościan byłby też większy od drugiego, 2, 3, 4, i t. d. razy, Co przystosować można, i w innych przypadkach, gdzieby tylko wysokość iednego Równoległościanu zawierała w sobie zupełnie wysokość drugiego.

2. Gdyby zaś wysokość iednego Równoległościanu zawierała nap. 3. takich części; iakich 5 zawiera wysokośc drugiego; w takim razie, podzieliwszy pierwszą wysokość na trzy, a drugą na pięć równych części, a przez punkta podziału przeciągnąwszy płaszczyzny równoodległe od podstaw, podzielilibyśmy pierwszy Równoległościan na 3, a drugi na 5. Równoległościanów iednakowey wysokości, i których podstawy przystaćby mogły do siebie; a zatym pierwszy Równoległościan takby się miał do drugiego iak 3, do 5, to iest iak wysokość pierwszego do wysokości drugiego. Rozumowanie to służy i do innego iakiegokolwiek stosunku.

Na koniec, to, co się powiedziało w przypadkach spółmiernych, przystosować można i do przypadków nie spółmier-

mier-

miernych, tak iakośmy uczynili mówiąc o figurach płaskich, w Części I.

Jakoż niech będą AB, CD wysokości dwóch Równoległościanów prostokątnych, zbudowanych na teyże samey podstawie, albo na podstawach mogących do siebie przystać; i niech te wysokości będą niespołmierne; wszelako dwa takie Równoległościany mieć się do siebie będą, iak ich wysokości. *Tab. II. Fig: 5.*

Gdyby albowiem stosunek tych dwóch Równoległościanów nie był równy stosunkowi ich wysokości, tedy iedna z tych wysokości, byłaby nadto mała do uczynienia tey równości stosunków. Niechże więc ieżeli to być może, stosunek pierwszego Równoległościanu, do drugiego, będzie równy stosunkowi linii AE, (większey od AB) do CD.

Podzielmy liniią CD na pewną liczbę części równych mnieyszych iednak od różnicy BE, i przenieśmy iednę z tych części na liniią AB; tyle razy, ile można; ostatni punkt podziału padnie między A i B, a przeniozłszy daley ku E, iednę ieszcze taką część, punkt podziału padnie między B i E, nap. w F.

Ro-

Rownoległościany maiące iednakowe podſtawy, a wysokości ſpółmierne CD, i AF, będą do ſiebie iak te wysokości CD i AF.

Aże (przez przypuszczenie) Równoległościan, którego wysokością ieſt AB, tak ſię ma do Równoległościanu, którego wysokością ieſt CD, iak ſię ma liniia AE do linii CD.

Więc (przez złożenie ſtoſunków) Rownoległościany, których wyſokościami ſą AB, i AF, miałyby ſię do ſiebie, iak liniie AE, i AF, Że zaś pierwszy poprzednik mnieyszy ieſt od ſwego naſtępnika, a drugi poprzednik większy od ſwego naſtępnika, więc proporcya ta niema mieysca, a zatym ſtoſunek Równoległościanów, których AB, i CD, ſą wysokościami, nie ieſt różnym od ſtoſunku tychże wysokości.

To ſamo w krótkości tak ſię wyraża: Niech będą oznaczone przez R.AB, R.AF, R.CD, Równoległościany maiące iednakowe podſtawy, wysokości zaś: AB AF, CD.

Gdyby można uczynić tę proporcyą:

R. AB: R. CD=AE: CD.

tedy ponieważ ieſt; - - R. CD: R. AF=CD: AF.

byćby powinno - - R. AB: R. AF=AE: AF.

Ta zaś ostatnia proporcya utrzymać się nie może, więc ani pierwsza.

56. *Twierdz.* 4. Dwa Równoległościany, maiące iednakowe wysokości, są do siebie, iak ich podstawy.

Przenieśmy ieden z tych Równoległościanów, tak, aby podstawa iego stykała się w wierzchołku spolnym, z drugą podstawą. Niech ABCD będzie iedną z tych podstaw; a drugą: EBGF. Dopełniymy Prostokąta, CBGH przedłużywszy boki, DC, FG, aż do ich spolnego przecięcia, w punkcie H; i wystawmy sobie wmyśli Równoległościan trzeci stoiący na podstawie CBGH, dawszy mu wysokość równą wysokości, iednakowey dwóch danych Równoległościanów. Równoległościan, którego podstawa iest: ABCD, i ten, którego podstawa iest: CBGH, wystawuiąc ie sobie iak gdyby miały za podstawę prostokąt, którego iednym bokiem byłaby linia CB, a drugim, wysokość spolna obydwóch danych Równoległościanów; te mowię Równoległościany są do siebie iak ich wysokości AB, i BG, albo iak Prostokąty ABCD i CBGH. *Tab: II. Fig. 6.*

Podobnie Równoległościany, których, CBGH, i BEFG. są podstawami, uważane, ne, iak gdyby miały za podstawę Prostokąt, którego iednym bokiem byłaby liniia BG, a drugim spolna wysokość dwóch danych Równoległościanów są także do siebie, iak ich wysokości, BC, BE, albo iak Prostokąt, CBGH, do Prostokąta BEFG.

Więc (przez złożenie stosunków) Równoległościan, którego podstawą iest ABCD, tak się ma do Równoległościanu, którego podstawą iest BEFG, iak się ma pierwsza podstawa do drugiey.

Krócey to samo.

Niech Równoległościany, których podstawami są Prostokąty: ABCD, CBGH, BEFG, będą oznaczone wyrazami następuiącemi: R. ABCD, R. CBGH, R. BEFG.

1. proporcya,

R. ABCD : R. CBGH = ABCD : CBGH.

2. proporcya;

R. CBGH : R. BEFG = CBGH : BEFG.

więc - - - - - -

R. ABCD : R. BEFG = ABCD : BEFG.

57. Wnio-

Wniosek 1. Dwa Równoległościany prostokątne, ieżeli maią równe tak wysokości, iak i podstawy, są równe; także, ieżeli równe dwa Równoległościany prostokątne, maią równe podstawy, równe będą i ich wysokości; albo ieżeli równe maią wysokości, równe będą i ich podstawy.

58. *Wniosek* 2. Można zawsze zamienić, albo w myśli zamienionym sobie wystawić Równoległościan ieden prostokątny, na drugi, iednakową z nim wysokość maiący, a któryby za podstawę miał Prostokąt, z iednym bokiem danym; to się zaś stanie, zamieniaiąc podstawę Równoległościanu danego, na Prostokąt, w któryby wchodził ten bok dany.

59. *Twierdz.* 5. Dwa Równoległościany prostokątne, ieżeli maią podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości, są równe; i wzaiemnie, ieżeli dwa Równoległościany są równe, będą podstawy ich, w stosunku odwrótnym ich wysokości.

Niech będzie ABCD podstawa, a BI wysokość Równoległościanu iednego Prosto- *Tab. II. Fig. 6.*

proſtokątnego; drugiego zaś Równoległościanu niech będzie podſtawa BEFG, a wysokość BL.

1. Niech zachodzi ta między podſtawami y wysokościami proporcya:

ABCD : BEFG = BL : BI, tedy te Równoległościany będą równe.

Wyſtawmy ſobie drugi Równoległościan, iakoby zamieniony na inny teyże ſamey wysokości BL, a maiący za ieden bok ſwoiey podſtawy, bok nap: BC, należący do podſtawy pierwſzego Równoległościanu, i niech będzie tego nowego Równoległościanu podſtawa CBMN.

Będzie zatym podſtawa ABCD do podſtawy BEFG. iak AB do BM; a żeśmy też przypuścili ABCD : BEFG = BL: BI, więc będzie AB: BM = BL: BI, a zatym Proſtokąt maiący za boki, AB, BI. równy będzie Proſtokątowi maiącemu za boki: BM, BL: Że zaś pierwszy i trzeci Równoległościan maią za podſtawy te dwa rowne Proſtokąty, i ſpolną przytym maią wysokość BC, więc ſą ſobie równe. Aże trzeci Równoległościan rowny ieſt drugiemu, więc i pierwszy równy także będzie drugiemu.

2. Niech

2. Niech Równoległościan, którego ABCD iest podstawą, a BI wysokością, będzie równy Równoległościanowi, którego podstawą iest BEFG: a wysokością BL; idzie zatym że, - - ABCD: BEFG = BL : BI.

Zróbmy to samo co wyżey wykreślenie.

Uważaiąc pierwszy i trzeci Równoległościan, iako maiące za wysokość spolną, BC, będzie pierwszy do trzeciego iak Prostokąt AB × BI do Prost: BM × BL. A że te dwa Równoległościany są (przez przypuszczenie, albo wykreślenie) równe drugiemu, więc i sobie są równe, więc AB × BI = BM × BL; a zatym AB: BM = BL : BI. Ze zaś AB: BM = ABCD : CBMN = ABCD : BEFG; więc ABCD: BEFG = BL : BI.

60. *Wniosek.* Z tego wszystkiego co się powiedziało, wynika sposob znalezienia dwóch liniy, któreby były do siebie w stosunku dwóch Równoległościanów zawieraiących boki dane.

Przykład. Maiąc dany Sześcian i Równoległościan prostokątny, znaleść liniią taką, aby stosunek Sześcianu do Równolewnoległościanu równy był ſtosunkowi boku Sześcianu do tey linii.

Niech będzie S bok Sześcianu, P,Q;R, boki trzy Równoległościanu. Zamieńmy nayprzod Próſtokąt, którego bokami ſą P, i Q na inny, któryby miał za bok ieden, bok Sześcianu; to ieſt ſzukaymy czwartey proporcyonalney do S, P, i Q; Niech będzie L, tą czwartą proporcyonalną. Równoległościan dany, równy będzie innemu, któryby miał za boki: S,L,R; a zatym ſtosunek Sześcianu do Równoległościanu danego, równać ſię będzie ſtosunkowi kwadratu S^2 do Proſtokąta $L \times R$. Zamieńmy znowu ten drugi Równoległościan równy danemu, na inny, któryby znowu miał S za bok ieden, to ieſt ſzukaymy czwartey proporcyonalney do S, L, i R. Niech będzie M, tą czwartą proporcyonalną: Równoległościan drugi, a zatym i pierwszy dany, iemu równy, równać ſię będzie trzeciemu, któryby miał za boki: S, S, M; więc ſtosunek Sześcianu do Równoległościanu danego, równać ſię będzie ſtoſunkowi kwadratu S^2 do proſtokąta $S \times M$, to ieſt ſtosunkowi S, do M.

Aby tedy znaleść w liniiach, ſtosunek Sześcianu do Równoległościanu, proſtokątnekątnego, trzeba 1°. do boku Sześcianu, i do dwóch boków Równoległościanu szukać czwartey proporcyonalney; 2°. trzeba znowu do tegoż boku trzeciego, Równoległościanu, i do czwartey proporcyonalney dopiero znalezioney, szukać inney czwartey proporcyonalney; a stosunek boku Sześcianu, do tey ostatniey linii, równy będzie stosunkowi Sześcianu do Równoległościanu.

Jdzie zatym, że ieżeli mamy dwa Równoległościany prostokątne, będziemy mogli wyrazić w liniiach ich stosunek, szukaiąc w liniach stosunku tychże Równoległościanów do iakiego Sześcianu; wziąwszy albowiem bok tego Sześcianu, za poprzednika, każdego z tych stosunków; stosunek ich następników, wyrażać będzie stosunek w liniiach, tych dwóch Równoległościanów.

61. *Uwaga.* Wszystko to, co się powiedziało o przyrównywaniu, albo mierze Geometryczney Równoległościanów prostokątnych, zgadza się zupełnie z nauką podaną w Arytmetyce o przyrównywaniu liczebnym Równoległościanów.

Przykł. Niech iedność wyraża bok Sześcianu wziętego za miarę do przyrównywania; a niech boki Równoległościanu, który chcemy do Sześcianu przyrównywać, zawieraią ten bok Sześcianu kilka razy oznaczonemi przez liczby nap. 5, 7, i 9. Czwarta proporcyonalna do boku Sześcianu, i do dwóch pierwszych boków Równoległościanu wyrazi się przez liczbę 35, to iest zawierać będzie bok Sześcianu, razy 35; czwartą zaś drugą proporcyonalną, do tegoż boku Sześcianu, do trzeciego boku Równoległościanu i do pierwszey czwartey proporcyonalney, wyrazi liczba 315; to iest zawierać ta będzie bok sześcianu, razy 315. A zatym Równoległościan, zawierać będzie w sobie Sześcian razy 315; to iest, wziąwszy Sześcian za iedność albo spolną miarę; ten Równoległościan wyrazi się przez liczbę 315, która podług wykreślenia pochodzi z rozmnożenia liczb 5. 7, i 9.

62. *Defin.* Gdy cztery takie mamy linie, że stosunki, pierwszey do drugiey, drugiey do trzeciey, trzeciey do czwartey są równe, o takich liniiach mowi się, że są *ciągło* (continuè) proporcyonalne.

Przykłady

Przykłady liczebne: Cztery liczby: 1,2,4,8, nazywaią się ciągło proporcyonalnemi, a cztery linie, któreby tak się do siebie miały, iak te cztery liczby nazywałyby się też ciągło proporcyonalnemi. Toż mowić i o liczbach, 8,12,18,27, z których każda zawiera w sobie, poprzedzaiącą ieden raz i pół, i t d.

Stosunek pierwszey z tych linii, do czwartey, składa się z stosunku, pierwszey do drugiey, drugiey do trzeciey, i trzeciey do czwartey (a to przez definicyą stosunku składanego). Że zaś wszystkie te szczególne stosunki są równe, więc stosunek pierwszey tey linii do czwartey, składa się z 3 stosunków równych, ma zaś nazwisko stosunku *troymnożnego* (ratio triplicata) i pierwsza ta liniia do czwartey, będzie w stosunku tróymnożnym.

63. *Przystosowanie*. Niechby Równoległościan, który wymierzać mamy przez Sześcian wzięty za iedność, był i on sam Sześcianem.

Niech będzie AB bok Sześcianu maiącego służyć za miarę: AC bok Sześcianu który wymierzyć mamy. Szukaymy do AB, i AC, trzeciey proporcyonalney AE Tab. II. Fig. 7.

 (kreśląc

(kreśląc Tróykąt proſtokątny ABC, maiący, AB za iedno ramie kąta proſtego, a AC za przeciwproſtkątną; i wyſtawuiąc do linii AC, w punkcie C, proſtopadłą CE, aż do iey ſpotkania ſię w E, z liniią AB przedłużoną) Szukaymy daley do AB, AC, AE, czwartey proporcyonalney, AF) wyprowadzaiąc od punktu E linii AE, proſtopadłą EF, aż do iey ſpotkania ſię w punkcie F z linią AC przedłużoną) Pierwſzy Sześcian, wzięty za miarę, tak ſię będzie miał do Sześcianu, który wymierzać przypada, iak liniia AB, do linii AF; to ieſt: iak liniia pierwſza do czwartey z liniy ciągło proporcyonalnych; z których pierwſzych dwòch iedna ieſt bokiem Sześcianu wziętego za miarę, a druga bokiem Sześcianu wziętego do wymierzenia; a zatym ſtoſunek pierwſzego Sześcianu do drugiego ieſt tróymnożnym ſtoſunku ich boków.

I tak, ieżeli bok Sześcianu iakiego trzy razy zawiera w ſobie bok Sześcianu wziętego za miarę, Sześcian pierwſzy będzie do drugięgo, iak $3 \times 3 \times 3$ do 1. albo iak 27, do 1; to ieſt ieżeli liniia AC zawiera w ſobie razy trzy liniią AB; liniia też AE zawierać będzie trzy razy liniią AB; liniia też AE zawierać będzie razy 3

liniią

liniią AC, a zatym 9 razy liniią AB, a liniia AF zawierać będzie 3 razy liniią AE, a tym ſamym 27 razy liniią AB.

64. *Wzaiemnie.* Gdy trzeba znaleść Sześcian, któryby do drugiego był w ſtoſunku danym, i takim, któryby ſię rόwnał ſtoſunkowi boku Sześcianu tego drugiego, do linii daney; bok Sześcianu, którego ſzukamy, ma być drugą liniią z czterech ciągło proporcyonalnych, między któremi pierwſza z czwartą, ſą w danym ſtoſunku; to ieſt: bok ten ſzukany, ma być liniią pierwſzą z dwóch średnich ciągło proporcyonalnych między pierwſzą i czwartą.

Zagadnienie to, nie może być rozwiązane przez Geometryą początkową, chyba treſunkiem przez doświadczanie i ſzukanie nie pewne; do dokładnego i pewnego rozwiązania, potrzeba iedney przynaymniey z liniy krzywych, nazwanych *przecięciami konicznemi* (ſectiones conicæ) o których ſię potym namieni. I toć to zagadnienie o znalezieniu dwóch średnich proporcyonalnych, pierwſzym powodem być muſiało Geometrom, do uważania, tych liniy krzywych dopiero wſpomnionych, i do uczynienia pierwſzego go kroku w wyższey Geometryi. Gdy się w *Delos* radzono Wyroczni, coby za sposób był ziednania Bogów zagniewanych, i odwrócenia zarazy powietrza niszczącego Państwo Attyckie; miał się dać głos słyszeć: aby *dwumnożono ołtarze* (duplicentur Altaria) Po wielu niepożytecznych zawodach, postrzeżono nakoniec, iż trzeba było znaleść bok Sześcianu dwa razy tak wielkiego, iak drugi wzięty za spolną miarę; to iest: iż trzeba było wynaleść pierwszą z dwóch średnich Geometrycznych, między dwiema liniiami, z których iedna dwa razy w sobie zamykałaby drugą.

65. W Arytmetyce; gdy stosunek dany, iest stosunkiem liczby iedney Sześcienney, do drugiey także Sześcienney, rozwiązać można dokładnie to zagadnienie. Tak nap: gdyby dwa Sześciany miały być do siebie, iak 1. do 8; albo iak 1 do 27, albo iak 8 do 27. i t. d. boki ich byłyby ieden do drugiego, iak 1. do 2, albo iak 1. do 3, albo iak 2, do 3. i t.d.

Ale gdy stosunek dany nie iest stosunkiem dwóch liczb Sześiennych, rozwiązanie będzie tylko do prawdziwego przybliżone. I tak, gdy Sześcian ieden, ma ma być dwa razy tak wielki, iak drugi, wziąwszy bok tego drugiego, za iedność, bok pierwszego powinienby być wyrażony przez liczbę taką, którey Sześcianem, iest 2; a zatym pierwiastek Sześcienny, liczby 2, wyrażałby ten bok; Pierwiastek zaś ten przybliżony, iest 1,26 to iest bok mnieyszego Sześcianu, tak by się miał do boku Sześcianu dwa razy tak wielkiego, iak 1, do 1,26, albo iak 100, do 126. albo ieszcze dokładniey iak 23, do 29.

66. *Uwaga.* Gdy stosunek dwóch liniy iest dany; dany iest tym samym i stosunek ich Sześcianów.

Tak albowiem mieć się będą do siebie te Sześciany, iak liniia pierwsza do czwartey ciągło proporcyonalney, wziąwszy za pierwsze dwa wyrazy tey proporcyi dwie liniie których stosunek iest dany.

Zkąd wypada wniosek następuiący:

67. Gdy cztery liniie są w proporcyi, ich Sześciany w proporcyi też będą; to iest; gdy stosunek dwóch pierwszych liniy równa się stosunkowi dwóch drugich; stosunek też Sześcianów z dwóch

pier-

pierwſzych liniy, równać ſię będzie ſtoſunkowi Sześcianów z dwóch drugich liniy.

W Arytmetyce: cztery licz: 2, 3, 8, 12 ſkładaią proporcyą
ich Sześciany: - - 8, 27, 512, 1728, ſkładaią także proporcyą.

68 *Uwaga*. Podanie zamknięte w tym wnioſku, ieſt tylko wyſzczegulnieniem podania naſtępuiącego:

Niech będą trzy iakiekolwiek proporcye, i cztery takie Równoległościany proſtokątne; aby krawędzie pierwſzego Równoległościanu, były trzema poprzednikami trzech pierwſzych ſtoſunków, krawędzie drugiego, trzema naſtępnikami tychże trzech pierwſzych ſtoſunków, krawędzie trzeciego, trzema poprzednikami, trzech drugich ſtoſunków, a krawędzie czwartego, trzema naſtępnikami tychże trzech drugich ſtoſunków; ſtoſunek pierwſzych dwóch Równoległościanów równy będzie ſtoſunkowi dwóch oſtatnich.

Trzeba nayprzod to podanie objaśnić na przykładach liczebnych.

W ogul

W ogulności zaś niech będą trzy iakiekolwiek proporcye: A : B = C : D.

a : b = c : d.

a : *b* = *c* : *d*.

Zamieńmy stosunek A do B na inny b do czwartey linii *E*: Zamieńmy podobnie i stosunek C do D na inny d, do czwartey linii *e*.

Będą podstawy drugiego i czwartego Równoległościanu równe prostokątom B × b, i, D × d; a zatym podstawy dwóch pierwszych Równoległościanów będą się miały, do siebie iak a do *E*, a podstawy zaś dwóch drugich Równoległościanów będą się miały do siebie iak c do *e*.

Aże przez przypuszczenie i wykreślenie stosunki; A do B, b do *E*, C do D, d do *e*, są wszystkie równe, - -

więc - - b : *E* = d : *e*.

Ze zaś - a : b = c : d

więc a : *E* = c : *e*.

A zatym stosunek podstaw Równoległościanów dwóch pierwszych, równy iest

ieſt ſtoſunkowi Równoległościanów dwóch drugich.

Jeſt też z przypuſzczenia; -

- - $a : b = c : d$

więc Proſtokąty aa, Eb, cc, ed ſkładą proporcyą; a zatym cztery Równoległosciany; ktoreby te Proſtokąty miały za podſtawy, i z których dwa pierwſze miałyby ſpolną wyſokość A, dwa zaś drugie wyſokość C, byłyby także z ſobą w proporcyi. Aże pierwſzy z tych Równoległościanów miałby za krawędzie trzy linije: A, a, a, drugi zaś równałby ſię temu, któryby miał za krawędzie trzy linije: B, b, b: a to dla tego, że ſą równe Proſtokąty: B × b i A × E) trzeci z tych Równoległościanów miałby za krawędzie, trzy linije: C, c, c, a czwarty równałby ſię temu, któryby miał za krawędzie, trzy linije: D, d, d; więc te cztery Równoległościany byłyby w proporcyi.

RO-

ROZDZIAŁ IV.

O Równoległościanach nie prostokątnych.

69. DEfin: Bryła zakończona 6 ścianami parzysto równoległemi, nazywa się *Równoległościanem* a zatym Równoległościany prostokątne, o których w Rozdziale poprzedzaiącym mowa była, są pewnym gatunkiem Równoległościanów.

70. *Twierdz.* 1. W Równoległościanie, wszystkie ściany są Równoległobokami; każde zaś dwie ściany przeciwne, mogą przystać do siebie.

Niech będzie Równoległościan ABCDEFGH; wszystkie iego ściany są Równoległobokami, a ściany przeciwne nap: ABCD, EFGH mogą do siebie przystać. *Tab. III Fig. 1*

Dowodz: Ponieważ płaszczyzny równoodległe ABCD, GHFE, są przecięte trzecią płaszczyzną BGFC, więc ich spólne przecięcia BC, FG z tą płaszczyzną, są równoodległe. Także pokazać można, że linije HE, GF są równoodległe, i linije: HG, EF równoodległe; a zatym

że

że ściana HGFE iest Równoległobokiem. Podobnie i wszystkie inne ściany są także Równoległobokami.

W szczególności zaś, liniie: BA, GH, i liniie BC, GE, są od siebie równoodległemi; więc równe są kąty ABC, HGF. Aże te liniie BA, GF, i BC, GF są równe, więc Równoległoboki, ABCD, HGFE, mogą przystać do siebie. Toż mowić o każdey inney parze ścian przeciwnych,

71. Ztąd też wystawić sobie można każdy Równoległościan, iakoby utworzył się następuiącym sposobem:

Niech będzie iakikolwiek Równoległobok; a od iednego z iego wierzchołków wyciągniymy liniią czyniącą z iego płaszczyzną, kąt iakikolwiek ;wyciągniymy potym i przez drugie wierzchołki, liniie równoodległe od pierwszey, i zrobmy wszystkie sobie równemi. Niech nakoniec ten Równoległobok posuwa się równoodległe od pierwszego swego położenia, i niech wierzchołki iego nie schodzą nigdy z liniy równoodległych, mieysce od Rownoległoboków, tym sposobem przebyte, będzie Równoległościanem.

72. *Twierdz.*

72. *Twierdz.* 2. Dwa Równoległościany mogą przyſtać do ſiebie, gdy i wſzyſtkie ich odpowiadaiące ſobie ściany przyſtać do ſiebie mogą, i gdy kąty ich bryłowe także ſobie odpowiadaiące, robią ſię z kątów równych należących do tychże ścian.

Niech będą dwa Równoległościany: AF, af, których wſzyſtkie ściany odpowiadaiące ſobie w iednym i w drugim Równoległościanie, mogą przyſtać do ſiebie, i których kąty bryłowe także ſobie odpowiadaiące nap: A, i a, robią ſię z równych kątów tychże ścian; te dwa Równoległościany przyſtać de ſiebie mogą. *Tab: III Fig: 18 i 22.*

Dowodz: Ponieważ kąty bryłowe, A, i a, robią ſię z równych względem ſiebie kątów płaſkich, więc przyſtać do ſiebie mogą. Przenioſłſzy tedy Równoległościan af, tak aby kąt bryłowy a, przyſtał w rzeczy ſamey do kąta bryłowego A; ponieważ i kąty płaſkie, z których ſię te bryłowe robią, przyſtaią iedne do drugich ſobie równych; a linie ab, ad, ah, ſą równe względem liniy AB, AD, AH; więc punkta: b, d, h przyſtaną do punktów: B,D,H, i ściany także że czyniące dwa kąty bryłowe a, i A, przystaną iedne do drugich; a zatym i punkta: c, g, e, przystaną do punktów odpowiadaiących sobie: C, G, E; a wszczególności linije: bc, bg, przystaną do liniy: BC, BG. Więc i płaszczyzna przechodząca przez liniie: bc, bg. leżeć będzie na płaszczyznie przechodzącey przez liniie BC, BG. Ze zaś przypuściliśmy iż ściana bcfg, przystać może do ściany BCFG, więc punkt f, przystanie do punktu F.

Tymże sposobem okazać można, że i wszystkie inne ściany, i kąty Równoległościanu af, przeniesionego, przystaną do innych ścian i kątów Równoległościanu AF, a zatym te dwa Równoległościany przystać do siebie mogą.

73. *Uwaga.* Tymże cale sposobem dowodzi się, że dwie iakiekolwiek Bryły, przystać mogą do siebie, gdy wszystkie kąty ich bryłowe odpowiadaiące sobie, przystać także do siebie mogą, i gdy ściany iedney Bryły przystać mogą do ścian odpowiadaiących w drugiey Bryle.

73. *Definicya.* Uważaiąc Równoległościan iakoby zbudowany na iedney z ścian swoich, ta ściana nazywa się, *podstawą* iego; a prostopadła od punktu ktoregokolwiek ściany przeciwney, do tey

spu-

ſpuſzczona, nazywa ſię *wyſokością* tego Równoległościanu.

Gdy ściany zbudowane na bokach podſtawy, ſą do niey proſtopadłemi, taki Rownoległościan nazywa ſię *proſtym* (Parallelopipedum rectum)Równoległościany proſtokątne, ſą gatunkiem Równoległościanów proſtych, w których podſtawa nawet ſama ieſt proſtokątem.

75. *Twierdz.* 3. Dwa Równoległościany równe ſą w *bryłowatości* (ſoliditas) gdy maią iednakową wyſokość, i na teyże ſamey ſą zbudowane podſtawie, a dwie ich ściany, na iedney płaſzczyznie znayduiące ſię, ſtoią na tymże ſamym boku podſtawy.

Niech będą dwa Równoległościany: ACGE. i ACLI. zbudowane na teyże ſamey podſtawie AC; i niech dwie ich ściany, AG, AL znayduią ſię na teyże ſamey płaſzczyznie; te dwa Równoległościany, ſą równe w bryłowatości. *Tab. III Fig. 3*

Dowodz. Dwie Bryły: A D I E H M, BCKFGL, maią takie wſzyſtkie ściany odpowiadaiące ſobie, iż iedne do drugich przyſtać mogą; wſzyſtkie podobnie kąty

ich

ich bryłowe przyſtać mogą do ſiebie. Jakoż Tróykąt HAM, może przyſtać do Tróykąta GBL, a wſzczegulności kąty HAM, GBL, ſą równe. Równoległobok HADE przyſtać może do Równoległoboku: GBCF ſobie przeciwnego, w pierwſzym Równoległościanie, a wſzczegulności kąty: HAD, GBC, ſą równe; Równoległoboki także: MADI, LBCK przeciwne ſobie, w drugim Równoległościanie, mogą do ſiebie przyſtać, a wſzczegulności kąty: MAD. LBC, ſą równe, więc kąty bryłowe A,B, i ściany tych kątów mogą przyſtać do ſiebie. Toż mowić i o wſzyſtkich innych kątach bryłowych, i o wſzyſtkich innych, tych dwóch Brył, ścianach. Zaczym te dwie Bryły przyſtać mogą do ſiebie. i ſą równe ſobie w bryłowatości. Aże od całey Bryły ACLE odiąwſzy pierwſzą z Brył wyżey wyrażonych, ADIEHM, zoſtaie ſię Równoległościan ACLI a odiąwſzy od teyże całey Bryły ACLE, drugą Bryłę BCKFGL, zoſtaie ſię Równoległościan ACGE; więc te dwa Równoległościany ſą równe. (f)

(f) *To dowodzenie ieſt ogulne, i rozciąga ſię do iakiegożkolwiek położenia linii MI; czyliby punkt M przypadał na punkt*

76. *Twierdz.* 4. Dwa Równoległościany są równe w bryłowatości, gdy iednaką maią wysokość, i na teyże samey są zbudowane podstawie, chociaż żadna z ich ścian stoiących na bokach podstawy, nie będzie na teyże samey płaszczyznie.

Niech będą dwa Równoległościany: ACGE, i ACLI, na teyże samey podstawie AC, z iednaką wysokością; i niech inne ich ściany na odmiennych znayduią się płaszczyznach; te dwa Równoległościany są równe. *Tab. III Fig. 4.*

Dowodz. Przedłużmy liniie KI, HE tak daleko, aż się znidą z sobą w punkcie O. Niech ieszcze i liniia LM, przedłużona, przecina HE, w N; a liniia GF także przedłużona niech przecina IK w P i niech Q będzie punktem przecięcia liniy GF, LM, albo ich przedłużeń.

Pociągniymy liniie AN, DO, BQ, CP.

Bryła ACQO, będzie Równoległościanem, czego bardzo łatwo dowieść można.

H Ró-

G, czyliby się znaydował między G i H, czyli nakoniec byłby na linii HG przedłużoney.

Równoległościan ACQO, ma tę ſamę co tamte dwa, podſtawę AC.

Ma ścianę AO na płaſzczyznie ściany AE, należącey do Równoległościanu, ACGE, więc temu Równoległościanowi będzie równy.

Ma zaś oprócz tego ścianę AQ na płaſzczyznie ściany AL, należącey do Równoległościanu ACLI, więc będzie równy i temu drugiemu Równoległościanowi.

Więc Równoległościan ACQO równy ieſt tak Równoległościanowi ACGE, iako i Równoległościanowi ACLI; a zatym i te dwa Równoległościany ſą też ſobie równe,

77 *Twierdz.* 5. Dwa Równoległościany ſą równe, gdy iednaką maią wyſokość i równe podſtawy, z iednym ſpolnym bokiem, i gdy ich ściany na tymże ſamym boku ſpolnym wyſtawione, znayduią ſię na teyże ſamey płaſzczyznie.

Tb. III Fig. 5. Niech będą dwa Równoległościany: ACGE, ICOQ iednakiey wyſokości; a podſtawy ich równe AC, IC, niech maią

bok

bok ſpolny CD, na którym wyſtawione ſą dwie ściany DF, DP na teyże ſamey płaſzczyznie znayduiące ſię, te dwa Równoległościany ſą równe.

Wykreśl. Przez punkta I, i L, poprowadźmy na płaſzczyznie AG, czyli AO, liniie JN, LM, równoodległe od AH, albo BG, i niech te równoodległe ſpotykaią w N i M. liniią HO. Pociągniymy i liniie EN, FM. Bryła JCME będzie też Równoległościanem.

Dowodz: Równoległościan: ICME, ma też ſamę podſtawę JC, i tę ſamę wyſokość, co i Równoległościan JCOQ, a zatym ſą ſobie równe.

Tenże Równoległościan JCME, i Równoległościan ACGE, uważaiąc w nich ścianę ſpolną DF, iak podſtawę, maią też iednaką wyſokość, a zatym ſą ſobie równe. Więc Równoległościan JCME, równy ieſt tak iednemu, iak i drugiemu Równoległościanowi: ACGE, i JCOQ, a zatym i te dwa Równoległościany ſą równe.

78. *Twierdz:* 6. Dwa Równoległościany ſą równe, gdy maią iednaką wyſokość, igdy *Tab. III Fig. 5*

gdy ich podſtawy maiące bok ieden ſpolny, ſą równe.

Niech we dwóch Równoległościanach iednakiey wyſokości będą dwie podſtawy: AC, i IC równe, i maiące ſpolny bok CD; te dwa Równoległościany będą równe.

Wykreśl. Na podſtawie IC, iednego z tych Równoległościanów, który nazwiemy pierwſzym, poſtawmy trzeci Równoległościan teyże ſamey wyſokości, tak, aby ściana iego ſtoiąca na boku CD, znaydowała ſię na płaſzczyznie ściany drugiego Równoległościanu, ſtoiącey na tymże boku;

Ten trzeci Równoległościan, iako maiący z pierwſzym ſpolną podſtawę i wyſokość, będzie mu równy. Tenże trzeci Równoległościan, będzie równy, i drugiemu; bo maią równe podſtawy: IC, AC, z ſpolnym bokiem CD, i ściany ich ſtoiące na boku CD, znayduią ſię na teyże ſamey płaſzczyznie.

Więc ten trzeci Równoległościan równy ieſt tak pierwſzemu iak i drugiemu, a zatym i one ſobie równe będą.

Wſzcze-

Wſzczególności. Równoległościan każdy równy ieſt Równoległościanowi proſtokątnemu, który ma tę ſamę, co i tamten wyſokość, podſtawę równą podſtawie iego, i bok ieden ſpolny obydwom podſtawom.

79. Zkąd wynika, że cokolwiek ſię powiedziało o Równoległościanach proſtokątnych, wſzyſtko to do iakichkolwiek innych można przyſtoſować; kładąc zamiaſt każdego z nich, Równoległościan proſtokątny, teyże ſamey wyſokości, i podſtawy równey, a maiącey bok ieden ſpolny z podſtawami Równoległościanów nie proſtokątnych. I tak.

1. Dwa Równoległościany, maiące równe podſtawy i wyſokości, ſą równe; bo Równoległościany proſtokątne iednakiey wyſokości, i maiące ztamtemi Równoległościanami równe podſtawy, a w nich ſpolny bok ieden, ſą równe.

2. Dwa Równoległościany ſą też równe, których podſtawy ſą w ſtoſunku odwrótnym, ich wysokości.

3. Dwa Równoległościany, których bryłowatości ſą równe, maią podſtawy w ſtoſunku odwrótnym ich wyſokości.

4.

4. Wszyftko to, co fię powiedziało o zamienianiu ftofunku dwoch Równoległościanów proftokątnych, na ftofunek dwóch liniy; i o mierze liczebney dwóch Równoległościanów proftokątnych, przyftofować można do miary Równoległościanów nie proftokątnych; używaiąc do tego, boku iednego podftawy, wyfokości iey względem tego boku, i wyfokości Równoległościanu.

80. *Przeftroga* Gdyby ściste i prawdziwe Geometryczne dowodzenie wyżey położone przytrudnym fię zdawało uczniom do poięcia, mimo wyftawionych im przed oczy figur, z drewna, lub papieru wyrobionych; można im to będzie łatwiey do poięcia podać w fpofob naftępuiący.

Niechay dwa Równoległościany z równemi podftawami i wyfokościami ftoią na teyże famey płafzczyznie. Niech inna iakakolwiek płafzczyzna równoodległa od pierwfzey, przecina te dwa Równoległościany. Przecięcia ich będą równe, i podobne ich podftawom, a zatym i fobie równe będą; i gdziekolwiek te dwa Równoległościany przetniemy przez płafzczyznę równoodległą od ich

pod-

podſtaw, równe zawſze będą te przecięcia. Zadney więc niemaſz przyczyny, dla ktoreyby ieden z tych Równoległościanow nie miał być równym drugiemu.

Trzeba tu iednak oſtrzedz zaraz uczniów, iż tym ſpoſobem, ſłabo ſię w rzeczy ſamey dowodzi równość dwóch Równoległościanow. Bo chociażby iak naywięcey było tych przecięć równoodległych od podſtaw Równoległościanow, to ieſt: chociażby iak naymnieyſza była odległość każdego z tych przecięcia, od drugiego naybliżſzego, wſzelako części Równoległościanów zawarte między takiemi dwoma przecięciami, ſą ieſzcze Równoległościanami, które tak ſię względem ſiebie maią, iak ſię maią całe Równoległościany, których tamte ſą częsciami. Aby więc wnieść można równość Równoległościanow, z równości ich części, trzebaby pierwey dowieść równości tych części.

Może ſię imaginacya naſza tak daleko zapuścić, że przez nię wyſtawiemy ſobie dwoch Równoległościanów przycięcia tak bliſkie iedne od drugich, iż części między niemi zawarte będą ſię zdawać

wać nie różnić od podſtaw tychże Równoległościanów; lecz prawdziwe rozumowanie uczynić tu róznicę potrafi i powinno. Wiemy albowiem że małość lub wielkość iakiey rzeczy, nie ieſt w ſobie małością lub wielkością ale ſię albo za małość bierze względem inney rzeczy większey, albo za wielkość, względem inney mnieyſzey; i nie można nigdy Bryły choć by też naycieńſzey za iedno brać z powierzchniami, które ią kończą. Prawda to ieſt, że im większa będzie liczba przecięciów, dwóch Równoległościanów przez płaſzczyzny równoodległe od ich podſtaw, tym mnieyſza będzie różnica małych dwóch ich części zawartych między dwiema nayblizſzemi płaſzczyznami, czyli przecięciami; ale znowu, ieżeli iakakolwiek ieſt choćby też naymnieyſza, ta różnica, tedy wielokroć powtorżona może uczynić różnicę wielką, w dwóch Równoległościanach, których równości chcemy dowodzić, z równości z ich cząſtek, czyli z małych Równoległościanów, z których ſię ſkładaią.

Ta ſama trudność do rozwiązania zoſtaie, gdyby kto równości dwóch Równoległościanów maiących iednaką podſtawę

ſtawę i wyſokość, a z których ieden byłby naprzykład proſty, a drugi nie, chciał dowodzić z podnoſzenia ſię w gorę ich podſtaw w rowney zawſze od pierwſzego położenia odległości; ponieważ pierwey dowieść trzebaby, że mieyſca od podſtaw przebyte, nie podług tey drogi brane być powinny, którą w ſamey rzeczy punkt każdy tych podſtaw przebył; (bo do iednakiey wyſokości poſtępuiąc, więcey mieyſca przeydzie punkt nap: ſkrayny Równoległościanu ukośnego, niż tego, który ieſt proſty) ale to mieyſce od podſtaw Równoległościanów przebyte, powinno ſię wymierzać wzdłuż linii proſtopadłey do teyże podſtawy, ponieważ ta tylko liniia mierzy odległość, w którey podſtawa podnoſzeniem ſię ſwoim oddaliła ſię od pierwſzego ſwego położenia.

Naſtępuiące porównywanie może iakożkolwiek ſłużyć do ułatwienia tych wątpliwości, lubo ich nie znoſi cale.

Gdy dwa Równoległoboki zrobione na teyże ſamey podſtawie, i z równą wyſokością, przetniemy liniią równoodległą od podſtawy, obadwa przecięcia równe będą podſtawie. Wſzyſtkie też inne ne takowe przecięcia tych dwóch Równoległoboków, byłyby równe, i tyleby ich było w iednym, co i w drugim Równoległoboku. Toż mówić i odwoch Tróykątach, których przecięcia równoodiegłe od podstawy spolney, byłyby także równe. Dla czegoż więc te dwa całe Równoległoboki, lub Tróykąty niemiałyby sobie być równe ? Ponieważ tedy tym sposobem dochodziemy względem powierzchni płaskich, tey samey prawdy, którey doszliśmy ścisłym pierwey dowodzeniem; iuż ten sam skutek, powinien nas wątpliwości pozbawić, którąbyśmy mieć mogli w używaniu tego sposobu. Można zatym przystosować go i do Brył dla teyże przyczyny.

Obiaśni się to iaśnie i potym, gdy mówić będziemy o sposobie *wyczerpania* (de methodo exhaustionis.)

81. *Twierdzenie 7.* W iakimkolwiek Równoległościanie, przez krawędź którąkolwiek, i przez przekątną iedney z ścian iego przeciągnąwszy płaszczyznę; przecięcie Równoległościanu przez tę płaszczyznę, będzie Równoległobokiem, i podzieli Równoległościan na dwie części, które przystać do siebie mogą.

Niech

Niech będzie Równoległościan: ACGE; przez krawędź AH, i przez przekątną HF niech przechodzi płaszczyzna; liniie AH, CF są równoodległe, a płaszczyzna, która przechodzi przez AH, HF, przechodzi też i przez CF. Że zaś liniie: AH, CF są równe, i równoodległe, więc Czworokąt ACFH, iest oraz i Równoległobokiem. Tab: III Fig. 1.

Dwie Bryły: ABCFGH, FEHACD, mogą przystać do siebie.

1. Wszystkie ich ściany, są równe iedne względem drugich, bo ściany ich *Rownoległoboczne* (Parallelogrammicæ) są ścianami przeciwnemi w Równoległościanie; ściany zaś ich Tróykątne iak nap: ADC, HEF, maią równe boki iedne względem drugich.

2: Wszystkie ich kąty bryłowe mogą przystać iedne do drugich; nap: kąt bryłowy w A iedney Bryły, robi się z trzech kątów płaskich: CAB, BAH, HAC, które równe są względem kątów EFH, EFC, HFC, z których się robi kąt bryłowy w F, drugiey Bryły.

Więc te dwie Bryły mogą przystać do siebie, a wszczegulności są sobie równe.

ROZD:

ROZDZIAŁ V.

O Graniastosłupach.

82. *TWierdz: przybrane.* Niech będą dwie prostokreślne Figury równe i podobne, wykreślone na dwóch równoodległych płaszczyznach; niech ieszcze i boki ich równe, będą równoodległe iedne względem drugich; Czworokąty, których bokami przeciwnemi, będą boki równe tych Figur, są Równoległobokami.

Dowodz: We wszystkich takowych Czworokątach, boki dwa przeciwne są równe, i równoodległe; a zatym i inne boki są też równe i równoodległe.

83. *Defin:* Niech będzie Bryła iaka zakończona dwiema Figurami prostokreślnemi, równemi, podobnemi i równoodległemi a maiącemi wszystkie boki, iedne względem drugich równoodległe, i tyłą Równoległobokami maiącemi za boki, boki przeciwne tamtych dwóch Figur, ile każda z tych Figur ma boków, ta Bryła nazywa się *Graniastosłupem* (Prisma). I tak Równoległościany, o których w poprzedzaiących Rozdziałach

mówi-

mówiliśmy, ſą pewnemi Graniaſtoſłupów gatunkami. Jedna z tych Figur równych i równoodległych, na którey wyſtawiamy ſobie, iakoby zbudowany Graniaſtoſłup nazywa ſię iego *podſtawą*, a proſtopadła ſpuſzczona na tę podſtawę, z punktu iakiegokolwiek ściany przeciwney nazywa ſię *wyſokością* tego Graniaſtoſłupa. Graniaſtoſłup albo ieſt *proſty*, albo *ukośny*; *proſty*, gdy ściany iego ſtoią do pionu względem podſtawy; *ukośny*, gdy też ściany ſą do podſtawy nachylone.

Różne także nazwiſka przybiera Graniaſtoſłup, podług rozmaitey liczby boków podſtawy ſwoiey, albo podług wielości ścian pobocznych. Nazywa ſię *tróykątnym*, *czworokątnym*, *pięciokątnym*, *ſześciokątnym*, gdy podſtawa iego ieſt Tróykątem, Czworokątem, Pięciokątem, Sześciokątem i t. d.

84. *Twierdz:* 1. Przeciąwſzy gdziekolwiek Graniaſtoſłup płaſzczyzną równoodległą od iego Podſtawy, przecięcie to będzie Figurą równą i podobną podſtawie.

Dowodz: Przecięcie iedney którey-kolwiek ściany poboczney, przez tę płaſzczyſzczyznę, równoodległym będzie od tego boku podſtawy, na którym ta ściana ſtoi; i te dwie linie będą bokami przeciwnemi Równoległoboku, który za dwa inne boki, ma części dwóch innych boków teyże ściany, zawarte między podſtawą i płaſzczyzną przecinaiącą; więc te dwie linie będą równe.

Przecięcia więc przez tę płaſzczyznę dwóch ścian przyległych, będą równoodległe względem boków ſobie przeciwnych, należących do podſtawy, a zatym kąt, który te ſpolne przecięcia zrobią, równy będzie kątowi zawartemu między temi bokami podſtawy.

Będzie tedy mieć przecięcie Graniaſtoſłupa przez tę płaſzczyznę, wſzyſtkie ſwoie boki i wſzyſtkie kąty równe względem boków i kątów podſtawy Graniaſtoſłupa, i dla tego przecięcie to przyſtać może do podſtawy.

85. Można ſobie wyſtawić Graniaſtoſłup, iakoby zrobiony przez poſuwanie ſię w gorę iego podſtawy, w ſpoſob naſtępuiący:

Niech będzie Figura iaka proſtokreślna, odryſowana na płaſzczyznie. Od wierz-

wierzchołku kąta ktoregokolwiek tey Figury, wyciągniymy linią prostą czyniącą iakikolwiek kąt z tą płaszczyzną. Niech się potym wznosi do gory ta Figura, w rowney zawsze od siebie odległości, a ten wierzchołek niech nigdy nieschodzi z linii od niego wyprowadzoney; Bryła która się takim ruchem utworzy, będzie Graniastosłupem.

§6. *Twierdz.* 2. Graniastosłup troykątny, iest połową Rownoległościanu takiego, ktoryby za podstawę miał Rownoległobok dwa razy większy od podstawy tego Graniastosłupa, zdwoma bokami rownaiącemi się bokom podstawy tegoż Graniastosłupa troykątnego.

Niech będzie Graniastosłup troykatny ABCDEF, ktorego podstawą iest Troykat ABC. Dokończmy Rownoległoboku ABCG, ktorego dwoma bokami są AB, BC; na tym Rownoległoboku dokończmy Rownoległościanu ACEH, ktoryby miał spolne dwie ściany AE, i BD z Graniastosłupem troykątnym. *Tab. IV. Fig. 1.*

Dwa Graniastosłupy Troykatne: ABCDEF, DHFAGC, mogą do siebie przystać, bo są dwiema częściami oddzielone-

mi

mi przez płaszczyznę przekątną ACDF; a zatym ieden z nich, nap: Graniastosłup ABCDEF, iest połową Równoległościanu ACEH,

87 *Wniosek.* Cokolwiek się powiedziało o Równoległościanach względem ich wielkości, wszystko to przystosować można do Graniastosłupów troykątnych, które tych Rownoległościanow są połowami.

1. Dwa Graniastosłupy troykątne, rowney wysokości i podstawy, równaią się i w bryłowatości.

2. Dwa Graniastosłupy troykątne, ktorych podstawy są rowne, maią się do siebie, iak ich wysokości.

3. Dwa Graniastosłupy troykątne iednakiey wysokości, maią się do siebie iak ich podstawy.

4. Dwa Graniastosłupy troykątne, których podstawy są w stosunku odwrotnym ich wysokości, równaią się sobie w bryłowatości.

5. Dwa Graniastosłupy troykątne, równe w bryłowatości, maią podstawy w stosunku odwrótnym ich wysokości.

6. Co

6. Co ſię powiedziało o porownywaniu liczebnym dwòch Ròwnoległościanòw, to twierdzić można i o porownywaniu dwòch Graniaſtosłupòw tròykątnych. Trzeba podobnie dla znalezienia ich bryłowatości przez rachunek, rozmnożyć liczbę, znaczącą wielkość podſtawy Graniaſtoſłupa tròykątnego, przez liczbę znaczącą wielkość iego wyſokości.

7. Maiąc wiadomą podſtawę Graniaſtosłupa tròykątnego, i kąty dwòch ścian iego, ktòre z kątem podſtawy czynią ieden kąt bryłowy, można wyznaczyć Graniaſtosłup tròykątny, i iego wyſokość, a zatym i bryłowatość tymże ſamym ſpoſobem, iak ſię czyniło względem Ròwnoległościanòw.

8. Graniaſtosłupy tròykątne, maiące ſpòlny kąt ieden bryłowy, ſą do ſiebie iak Ròwnoległościany proſtokątne, maiące te ſame trzy krawędzie; w rachunku zaś tak ſą do ſiebie, iak liczby trzy ciągło iedna przez drugą rozmnożone, wyrażaiące wielkość tych trzech krawędzi.

88. *Twierdz:* 3. Graniaſtosłup nie tròykątny może być rozłożony na Gra-

niaſtosłupy tròykątne teyże co on wyſokości; za podſtawy zaś maiące Tròykąty, na ktòre rozdzielona ieſt iego podſtawa przez tyle przekątnych ciągnionych od iednego tey podſtawy wierzchołka do innych, ile ich poprowadzić można.

Niech będzie ABCDE, podſtawa nap: pięciokątna Graniaſtosłupa ABCDE edcba. Od iey wierzchołka nap: A poprowadźmy przekątne: AD, AC, te rozdzielą Podſtawę na trzy Tròykąty: AED, ADC, ACB. Na ścianie przeciwney podſtawie, od punktu *a*, odpowiadaiącego punktowi A, poprowadźmy przekątne: ad, ac.

Tab. IV. Fig. 2

Liniie Aa, Dd, ſą obiedwie ròwnoodległe od linii Ee, i oney ròwne; więc i względem ſiebie będą ròwnoodległemi i ròwnemi; a przeto Czworokąt ADda, ieſt Ròwnoległobokiem, a zatym Bryła ADE eda, ieſt Graniaſtosłupem tròykątnym. Tymże ſpoſobem okazuie ſię, że i Bryły: ACDdca, ACBbca, ſą Graniaſtosłupami tròykątnemi.

89. *Twierdz: 4.* Dwa iakiekolwiek Graniaſtosłupy maiące ròwną wyſokość, tak ſię do ſiebie maią, iak ich podſtawy.

Jakoż

Jakoż Graniaſtosłupy ADE eda, ADC cda, ACB bca, i t. d. maią ſię do ſiebie iak ich podſtawy; ADE, ACD, ABC; więc ieden z nich, nap: Graniaſtosłup: ADE eda, tak ſię ma do ſummy wſzyſtkich, to ieſt, do Graniaſtosłupa pięciokątnego, iak podſtawa tròykątna pierwſzego, do ſummy podſtaw wſzyſtkich, to ieſt, do podſtawy Graniaſtosłupa pięciokątnego. Podobnie też i każdy inny Graniaſtosłup iednakiey wyſokości, takby ſię miał do Graniaſtosłupa tròykątnego: ADEeda, iak podſtawa iego do podſtawy tròykątney ADE.

Więc (złożywſzy ſtoſunki) będzie ſtoſunek iakiegokolwiek Graniaſtosłupa do Graniaſtosłupa ABCDE edcba, ròwny ſtoſunkowi podſtawy pierwſzego Graniaſtosłupa, do podſtawy ABCDE; (a to wtedy, gdy wyſokości tych dwòch Graniaſtosłupòw ſą ròwne.)

Wſzczegulności zaś, gdy Ròwnoległościan i Graniaſtosłup iakikolwiek ròwne mieć będą podſtawy i wyſokości; bryłowatość iednego, ròwna będzie bryłowatości drugiego.

A zatym cokolwiek ſię o Ròwnoległościanach powiedziało, można to i do

Graniaſtosłupòw iakichkolwiek przyſtoſować, co do wielkości ich, ile te zawiſły od ich podſtaw i wyſokości. Można przeto do iakichkolwiek Graniaſtosłupòw przyſtoſować wnioſki, co do Graniaſtosłupów tròykątnych wſzczegulności, ktòre po Twierdzeniu 2gim tego Rozdziału naſtępuią.

ROZDZIAŁ VI.

O Piramidach albo Ostroſłupach.

90. D*Efin*: Niech punkt iaki znayduie ſię nad płaſzczyzną Figury iakieykolwiek proſtokreślney; przez ten punkt i przez wſzyſtkie boki Figury, niechay przechodzą płaſzczyzny; zrobi ſię ztąd Bryła kończąca ſię z iedney ſtrony na tey Figurze, a z innych ſtron, na tylu Tròykątach maiących ſpolny wierzchołek w owym punkcie, ile ta Figura ma bokòw. Bryła ta nazywa ſię *Oſtroſłupem* (Pyramis.) Powierzchnią Oſtrosłupa można ſobie wyſtawić iakoby zrobioną ruchem nici przywiązaney iednym końcem do punktu znayduiącego ſię nadpłaſzczyzną Figury, a drugim końcem wyciągnionym obracaiącey ſię około obwodu teyże Figury. Figura proſtokreslna,

ſlna, ktòrey boki ſłużą za podſtawy Tròykątòw kończących Oſtroſłup, nazywa ſię *podſtawą* oſtroſłupa, te Tròykąty nazywaią ſię iego *ścianami*; punkt ktòry ieſt wierzchołkiem ſpolnym wſzyſtkich ścian Oſtrosłupa, nazywa ſię *wierzchołkiem* iego. Proſtopadła ſpuſzczona od tego wierzchołka, na płaſzczyznę podſtawy, zowie ſię *wyſokością* Oſtroſłupa.

Oſtrosłup rożne przybiera nazwiſka, podług wielkości bokòw podſtawy ſwoiey. Nazywa ſię tròykątnym, czworokątnym, pięciąkątnym, ſześciokątnym i t. d. gdy podſtawa iego ieſt Tròykątem, Czworokątem, Pięciokątem, Sześciokątem i t. d.

Ten Oſtroſłup nazywać będziemy *proſtym*, ktòrego podſtawą ieſt Figura proſtokreślna mogąca ſię na kole opiſać; i gdy proſtopadłey ſpuſzczoney od wierzchołka tego Oſtroſłupa, drugi koniec przypada na środek tego koła.

W takim Oſtroſłupie wyſokość wſzyſtkich ścian ieſt iednakowa, i tych ścian płaſzczyzny rówenie ſą nachylone do płaſzczyzny podſtawy.

W Oſtrosłupie, ktòrego podſtawą ieſt Figura proſtokreślna mogąca ſię wpiſać

w koło

w koło, a którego wysokość wychodzi od środka, tego koła, wszystkie krawędzie ścian są równe, a zatym wszystkie te ściany są Tròykątami równoramiennemi. Ale że środek koła opisanego na podstawie, może czasem za tę podstawę wychodzić, dla tego, takowego Ostrosłupa nie można nazywać prostym.

Zeby iednak nazwisko to Ostrosłupa prostego (zle do tych czas zwyczaynie określone) ogulnieyszym uczynić, przydamy następucący warunek.

Gdy w Figurze prostokreślney, znayduie się taki punkt, przez który ciągnione liniie a po obydwòch stronach na obwodzie Figury zakończone, dzielą się w tym punkcie na dwie ròwne części, ten punkt nazywa się środkiem Figury.

I tak punkt przecięcia przekątnych w Równoległoboku, iest tego Ròwnoległoboku środkiem. Jeżeli tedy Figura prostokreślna maiąca taki środek, służy za podstawę Ostrosłupowi, i ieżeli prostopadła od wierzchołku iego spuszczona przypada na ten środek Figury, taki Ostrosłup nazwiemy prostym.

Ostro-

Ostrosłup nazywa się *foremnym*, gdy za podstawę ma Figurę prostokreślną foremną.

91. *Twierdz:* 1. Przeciąwszy Ostrosłup płaszczyzną rownoodległą od podstawy. iego, przecięcie to będzie Figurą podobną do podstawy.

Niech będzie Ostrosłup SABCDE, mający wierzchołek w punkcie S, a którego podstawą iest Figura prostoskreślna ABCDE. Niech ten Ostrosłup przecina płaszczyzna rownoodległa od podstawy, przecięcie to abcde będzie podobne do podstawy. *Tab: IV Fig: 3*

Ponieważ płaszczyzna podstawy ròwnoodległa iest od płaszczyzny przecinaiącey; będą też i przecięcia ścian, spòlne z temi płaszczyznami, ròwnoodległe iedne względem drugich; więc wszystkie boki przecięcia nap. ab, bc rownoodległe będą względem bokòw AB, BC podstawy; a zatym i wszystkie kąty przecięcia, rowne będą względem kątów podstawy, nap: kąt abc, rowny będzie kątowi ABC. Iest tedy przecięcie rownokątne z podstawą.

Trỏykąty SAB, sab są podobne, więc Sb: SB = ab : AB.

Trỏy-

Tròykąty też, Sbc. SBC podobne; więc: Sb: SB=bc: BC; a zatym ab: AB=bc: BC.

Więc przecięcie, i podſtawa, maią około kątów względem ſiebie równych, boki proporcyonalne, a zatym przecięcie podobne ieſt do podſtawy.

W ſzczegulności zaś, przecięcie takie, i podſtawa, maią ſię do ſiebie w ſtoſunku dwumnożnym boków ich, odpowiadaiących ſobie; albo ſą do ſiebie w ſtoſunku dwumnożnym liniy nap: Sb, SB; albo nakoniec w ſtoſunku dwumnożnym ich odległości od wierzchołka S, Oſtroſłupa, maiącey ſię wymierzać przez proſtopadłą ſpuſzczoną od tego wierzchołka, do ich płaſzczyzn; tak dalece, że przeciąwſzy Oſtroſłup płaſzczyznami równoodległemi od podſtawy, a w takich od wierzchołka odległościach, aby te miały ſię do ſiebie, iak liczby 1,2,3,4,5, i t. d: powierzchnie tych przecięciów będą do ſiebie iak liczby 1,4,9,16,25, i t. d. (Obacz Geometryi Części I. Rozdz. IX.)

Uwaga. Tego Podania częſte ieſt w Fizyce używanie; i dla tego trzeba ie iak nayiaśniey uczniom wyłożyć, i o gruntownym iego zrozumieniu od nich być przeświadczonym.

92. *Wnio-*

92. *Wniosek* 1. Niech będą dwa Ostrosłupy ziednakową wysokością, i zrównemi podstawami znayduiącemi się na teyże samey płaszczyznie, (po iedney stronie tey płaszczyzny. Gdy te Ostrosłupy przetniemy płaszczyznami rownoodległemi od ich podstaw, przecięcia odpowiadaiące sobie, tak się mieć do siebie będą, iak podstawy tych Ostrosłupow; a wszczegulności, gdy te podstawy rowne będą, wszystkie też przecięcia iednego Ostrosłupa będą rowne przecięciom odpowiadaiącym drugiego.

93. *Wniosek* 2. Z tego co się powiedziało o rowności Graniastosłupow maiących iednaką wysokość i rowne podstawy, a stoiących na teyże samey płaszczyznie, iako też i o proporcyonalności tych Graniastosłupow z ich podstawami, gdy te przy rownych wysokościach, są nierowne; możnaby mniemać, że też i Ostrosłupy maiące rowne wysokości, i podstawy, są rowne, i że gdy rowne maią wysokości, będą do siebie iak ich podstawy.

Następuiące Twierdzenia zamienią to mniemanie w pewność, gdy ich dowody przytoczemy.

94. *Twierdzenie przybrane.* Niech będzie Ostrosłup Tròykątny przecięty płaszczyznami rownoodległemi od podstawy, i w iednakowey od siebie odległości zostaiącemi. Na podstawie, i na każdym przecięciu wystawmy ku wierzchołkowi Ostrosłupa, Graniastosłupy z ktòrych każdy miałby wysokość ròwną odległości dwòch płaszczyn nayblizszych. Na tychże przecięciach, wystawmy znowu inne Graniastosłupy ku podstawie, z tą samą, co pierwsze, wysokością. Niech każdy z tych Graniastosłupòw ma iednę krawędź spolną z Ostrosłupem, i dwie ściany na tychże płaszczyznach co i dwie krawędzie Ostrosłupa. Różnica summy wszystkich pierwszych Graniostosłupów (ktòre nazwę opisanemi) od summydrugich (ktòre nazwę wpisanemi) ròwna będzie pierwszemu Graniastosłupowi, ktòry iest wystawiony na podstawie Ostrosłupa.

Tab. I. V Fig: 4. Nich będzie Ostrosłup tròykątny SABC, ktòrego wiezchołek S, a podstawa ABC.

Podzielmy ten Ostrosłup na części nap: 5, płaszczyznami ròwnoodległemi od podstawy, i w iednakowey od siebie odległości zostaiącemi. Niech będą: $A^1B^1C^1$ $A^2B^2C^2$ $A^3B^3C^3$ $A^4B^4C^4$ przecięcia Ostrosłupa, przez

przez te płaszczyny. Na podstawie i na wszystkich przecięciach Ostrosłupa wystawmy ku iego wierzchołkowi Graniastosłupy, kończące się na przecięciu nayb bliższym; te będą opisanemi na Ostrosłupie, bo ich ściany występować będą za ściany Ostrosłupa. Wystawmy znowu na tychże przecięciach ku podstawie, inne Graniastosłupy teyże samey co pierwsze wysokości; te będą wpisanemi w Ostrosłup, bo za ściany ich, będą wychodzić ściany Ostrosłupa. Rożnica między summą pierwszych i drugich Graniastosłupòw, ròwnać się będzie Graniastosłupowi opisanemu, wystawionemu na podstawie Ostrosłupa.

Wykreśl: Podzielmy liniie AB, AC, na 5 ròwnych części. w punkach: b^1, b^2, b^3, b^4, c^1, c^2, c^3, c^4. i pociągniymy liniie; b^1c^1, b^2c^2, b^3c^3, b^4c^4.

Tròykąty: Ab^1c^1, Ab^2c^2, Ab^3c^3, Ab^4c^4, będą ròwne względem Ostrosłupa przecięciów: $A^1B^1C^1$, $A^2B^2C^2$, $A^3B^3C^3$, $A^4B^4C^4$.

Różnica między Graniastosłupem opisanym a stoiącym na podstawie ABC, i między Graniastosłupem wpisanym a stoiącym

iącym na podſtawie $A^1B^1C^1$ równa ſię Graniaſtosłupowi teyże ſamey co tamte wyſokości, maiącemu za podſtawę, różnicę tamtych dwóch podſtaw, to ieſt Czworokąt BCc^1b^1.

Podobnie i różnica między Graniaſtosłupem opiſanym, a ſtoiącym na przecięciu $A^1B^1C^1$, i między Graniaſtosłupem wpiſanym a ſtoiącym na przecięciu $A^2B^2C^2$ równa ſię Graniaſtosłupowi, teyże ſamey co one wyſokości, maiącemu za podſtawę, różnicę tamtych dwóch podſtaw, to ieſt Czworokąt $b^1c^1b^2c^2$.

Także różnice dwóch par Graniaſtosłupów naſtępuiących, równe ſą Graniaſtosłupom, teyże co one wyſokości maiącym za podſtawy Cworokąty $b^2c^2b^3c^3$ i $b^3c^3\, b^4c^4$.

Oſtantni zaś Graniaſtosłup opiſany, rowna ſię Graniaſtosłupowi, teyże co on wyſokosci, maiącemu za podſtawę Tróykąt Ab^4c^4.

Różnica tedy między ſummą wſzyſtkich Graniaſtosłupów opiſanych, a ſummą wſzyſtkich Graniſtosłupów wpiſanych, równa będzie ſummie wſyſtkich Graniaſtosłupów teyże co one wyſokości, któreby

ſtały

ſtały na Czworokątach BCc^1b^1, $b^1c^1c^2b^2$, $b^2c^2c^3b^3$, $b^3c^3c^4b^4$, i na Tròykącie Ab^4c^4, to ieſt: ròwna będzie Graniaſtoſłupowi tròykątnemu teyże co one wyſokości, a maiącemu za podſtawę Tròykąt ABC. Ta więc ròżnica ròwna ſię w ſamey rzeczy pierwſzemu Graniaſtoſłupowi opiſanemu.

95. *Wnioſek.* Pierwſzy ten Graniaſtoſłup opiſany na Oſtroſłupie SABC, ktòrego podſtawa ABC nie odmienia ſię, będzie tym mnieyſzy, im mnieyſzą damy mu wyſokość, to ieſt, im liczba przecięć Oſtroſłupa będzie większa. Można zaś uczynić ten Graniaſtoſłup mnieyſzym od iakiegokolwiek Graniaſtoſłupa naznaczonego, zamieniaiąc ten oſtatni Graniaſtoſłup na inny, ktòryby miał za podſtawę Tròykąt ABC, i dzieląc wyſokość iednoſtayną Oſtroſłupa, na tyle części, aby każda z nich była mnieyſza od wyſokości tego Graniaſtoſłupa tak przerobionego.

Maiąc więc dany Oſtroſłup, można weń wpiſać, i opiſać na nim ſpoſobem wyżey wyrażonym, tyle Graniaſtoſłupòw, aby ròżnica dwòch ſumm, mnieyſza była od iakiegokolwiek Graniaſtosłupa na-

znaczo-

znaczonego, a tym bardziey, aby rożnica Ostrosłupa od iedney z tych summ mnieysza była od iakiegokolwiek Graniastosłupa naznaczonego.

96. *Twierdz.* 2. Dwa Ostrosłupy maiące równe wysokości i podstawy, są równe.

Gdyby te dwa Ostrosłupy nie były równe, tedy daymy, że ieden z nich byłby większy od drugiego. Niechby więc ta mniemana ich różnica zamieniona była na Graniastosłup maiący równą z temi Ostrosłupami podstawę. Podzielmy wysokość iednego z tych Ostrosłupa na tyle części równych, aby każda z nich mnieysza była od wysokości tego Graniastosłupa. Wpiszmy w ten Ostrosłup i opiszmy na nim Graniastosłupy sposobem wyrażonym w poprzedzaiącym Twierdzeniu przybranym. Toż uczyńmy i na drugim Ostrosłupie; wszystkie Graniastosłupy wpisane, i opisane, na tych dwóch Ostrosłupach, bedą równe iedne względem drugich (87, 88) a zatym summa Graniastosłupów wpisanych nap: w ieden Ostrosłup będzie równa summie Graniastosłupów wpisanych w drugi Ostrosłup. Że zaś zrobiliśmy różnicę dwóch summ Gra-

Graniaſtoſłupòw wpiſanych i opiſanych na pierwſzym Oſtroſłupie, mnieyſzą od różnicy mniemaney dwòch Oſtroſłupów, więc tym bardziey różnica tego Oſtroſłupa od ſummy wſzyſtkich Graniaſtoſłupòw weń wpiſanych, mnieyſza będzie, od ròznicy mniemaney tych dwòch Oſtroſłupòw; a zatym i ròżnica pierwſzego Oſtroſłupa, od ſummy Graniaſtoſłupów wpiſanych w drugi Oſtroſłup, mnieyſza będzie, niż ròżnica pierwſzego Oſtroſłupa od drugiego. Summa tedy Graniaſtoſłupòw wpiſanych w ten drugi Oſtroſłup, byłaby większa od tego drugiego Oſtroſłupa, co być nie może; a przeto te dwa Oſtroſłupy nie mogą ſobie być nieròwne.

97. *Twierdz*: 3. Graniaſtoſłup tròykątny, może zawſze być rozłożony na trzy Oſtroſłupy tròykątne ròwne, z ktòrych dwa mieć będą tę ſamę podſtawę i wyſokość, co i Graniaſtoſłup.

Niech będzie Graniaſtoſłup tròykątny ABCEF, można go rozłożyć na trzy Oſtroſłupy tròykątne ròwne, z ktòrych dwa, tę ſamę, co on mieć będą podſtawę i wyſokość. *Tab. IV Fig.* 5

Przez bok AC, podſtawy ABC, Graniaſtoſłupa, i przez koniec F, krawędzi iego tego Graniastosłupa nie przechodzącey przez punkta: A i C, przeciągniymy płaszczyznę ACF; odetnie ona od Graniastosłupa, Ostrosłup tròykątny FABC. maiący za wierzchołek, punkt F, a za podstawę, Tròykąt: ABC; a zatym ten Ostrosłup, tę samę co i Graniastosłup mieć będzie podstawę i wysokość.

Podobnie i przez bok EF, ściany przeciwney podstawie, i przez punkt C przeciągniymy płaszczyznę ECF; odetnie ona od Graniastosłupa, Ostrosłup tròykątny: CEDF, maiący za wierzchołek, punkt C, a za podstawę Tròykąt DEF, ròwny Tròykątowi: ABC, a zatym i ten drugi Ostrosłup ma tę samę także co i Graniastosłup, podstawę i wysokość.

Więc dwa Ostrosłupy: FABC, CDEF równe maią wysokości, i podstawy, a zatym są ròwne (96). Zostanie ieszcze po tych dwòch przecięciach, Ostrosłup CFEA, zakończony cztерema Tròykątami: ACF, ACE, AEF, ECF.

Wystawmy sobie, ten ostatni Ostrosłup iako maiący za podstawę, Tròykąt: nap: ACE, a za wierzchołek, punkt F, Ostrosłup zaś CEDF, iakoby miał za podstawę,

Tròy-

Tròykąt: CDE, a za wierzchołek tenże punkt F. Przekątna CE, Równoległoboku ACDE, dzieli go na dwa Tróykąty, które przyſtać do ſiebie mogą; więc te dwa Oſtrosłupy maią podſtawy równe, ACE, DEC i na iedney płaſzczyznie znayduiące ſię; a oprocz tego, maią ſpólny wierzchołek w punkcie F, a zatym i wyſokość równą; więc ſą równe; wſzyſtkie tedy trzy Oſtrosłupy, na które Graniaſtosłup był podzielony, ſą równe.

Wzaiemnie Oſtrosłup tóykątny, można zawſze ſobie wyſtawić, iako trzecią część Graniaſtosłupa maiącego tę ſamę co i Oſtrosłup podſtawę, i wyſokość.

Niech będzie Oſtrosłup tróykątny: ABCF, którego podſtawa ABC, a wierzchołek F.

Na teyże podſtawie ABC, wyſtawmy ſobie iakoby zbudowany Graniaſtosłup, ABCDEF, którego dwie ściany ABFE, BCDF znaydowałyby ſię na tych ſamych płaſzczyznach, na których znayduią ſię dwie ściany Oſtrosłupa, i krawędź im ſpolna BF. Podług Twierdzenia poprzedzaiącego, ten Graniaſtosłup ieſt trzy razy tak wielki, iak Oſtrosłup; więc też i ten Oſtrosłup ieſt trzecią częścią tego Graniaſtoſłupa. A że wſzyſtkie Graniaſtoſłupy maiące równe podſtawy i wyſokości, ſą równe; więc Oſtroſłup tróykątny ieſt trzecią częścią Graniaſtoſłupa iakiegokolwiek, maiącego taką ſamę iak on podſtawę i wyſokość.

98. *Twierdz:* 4. Oſtrosłup iakikolwiek ieſt trzecią częścią Graniaſtoſłupa maiącego tę ſamę co on podſtawę, i wyſokość.

Dowodz. Jakażkolwiek będzie podſtawa Oſtrosłupa, poprowadźmy na niey przekątnych tyle do wſzyſtkich kątów, ile można. Przez te wſzyſtkie przekątne, i przez wierzchołek Oſtrosłupa niech przechodzą płaſzczyzny; Oſtroſłup będzie przez te płaſzczyzny podzielony na tyle Oſtroſłupów tróykątnych, na ile Tróykątów podſtawa była podzielona przez przekątne; każdy z tych Oſtrosłupów tróykątnych, będzie trzecią częścią Graniaſtosłupa maiącego taką ſamę iak on podſtawę, i wyſokość; a zatym ſumma wſzyſtkich tych Oſtrosłupów tróykątnych, to ieſt cały iakikolwiek Oſtrosłup z nich ſię ſkładaiący, równać ſię będzie trzeciey części, ſummy wſzyſtkich tych Graniaſtosłupów, alboco na iedno wychodzi, równać ſię będzie

dzie trzeciey części Graniastosłupa maiącego tę samę podstawę i wysokość, co i Ostrosłup.

99. *Wnioski.* Cokolwiek się o stosunku Graniastosłupów powiedziało, toż mówić można i o stosunku Ostrosłupów, które, maiąc takie same iak i te Graniastosłupy, podstawy, i wysokości, są trzeciemi względem nich częściami.

1. Dwa Ostrosłupy iakiekolwiek (proste, lub ukośne foremne, lub nie foremne) z równemi wysokościami, tak się do siebie maią, iak ich podstawy.

2. Dwa Ostrosłupy z równemi podstawami, tak się do siebie maią, iak ich wysokości,

3. Dwa Ostrosłupy są równe, gdy ich podstawy są w stosunku odwrotnym ich wysokości.

4. Dwa Ostrosłupy równe, maią podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości, i wyraz liczebny bryłowatości Ostrosłupa będzie znaleziony, gdy się weźmie trzecia część dwóch liczb rozmnożonych, z których iedna znaczyłaby

wielkość powierzchni podstawy tego Ostrosłupa, a druga, wielkość iego wysokości.

100. *Uwaga.* Maiąc dane w liczbach, sześć krawędzi iakiego Ostrosłupa tróykątnego, można wyznaczyć bryłowatość tego Ostrosłupa.

Jakoż złożywszy Tròykąt z trzech takowych krawędzi, i uważaiąc go iak podstawę Ostrosłupa; a na trzech bokach tey podstawy, zrobiwszy trzy Tròykąty, na teyże samey, co i podstawa płaszczyznie, dawszy każdemu z nich za boki, po dwie krawędzie z trzech pozostałych; te Tróykąty będą ścianami Ostrosłupa. Kąt każdy bryłowy przy podstawie, składać się będzie, z kąta Tròykąta wziętego za podstawę, i z dwòch kątòw ścian dwòch przy podstawie. Ponieważ zaś te kąty są wiadome, więc będzie można wyznaczyć pochyłość ścian do podstawy, a wszczegulności będzie można wyrachować stosunek wysokości Ostrosłupa, do spólnego przecięcia tych dwòch ścian. Aże to spòlne przecięcie iest dane co do wielkości, więc doydziemy i wysokości Ostrosłupa, a zatym i iego bryłowatości, ktora ktòra zawisła od wyſokości Oſtrosłupa, i powierzchni iego po ſtawy.

101. *Uwaga 2.* Można tę bryłowatość wyznaczyć i bez Trygonometryi, iako ſię to pokaże w Algebrze.

102. *Uwaga 3.* Gdy Oſtrosłup ieſt foremny, a zatym trzy ścian iego krawędzie ſą równe; Kwadrat wyſokości Oſtrosłupa, równa ſię rożnicy kwadratu iedney krawędzi, od kwadratu promienia koła na podſtawie opiſanego. A przeto ta wyſokość może być bardzo łatwo w liczbach wyznaczona, bez pomocy Trygonometryi. Ten zaś ſpoſob poſtępowania przyſtoſować można do wſzyſtkich Oſtrosłupów foremnych, iakażkolwiek byłaby liczba ich boków w podſtawie.

Przykł: 1. Wyznaczyć bryłowatość Bryły nazwaney *Czworościanem* (Tetraedrum.)

Bok ieden Troykąta rownobocznego wyznaczywſzy przez liczbę 2, kwadrat wyſokości tego Tróykąta wyrazi ſię przez liczbę 3. Promień koła opiſanego ieſt $\frac{2}{3}$ tey wyſokości, więc kwadrat tego

pro-

promienia, ieſt $\frac{4}{9}$, kwadratu wyſokości Tròykąta, a zatym kwadrat tego promienia ieſt $\frac{12}{9}$. Ze zaś kwadrat wyſokości tego Oſtrosłupa ieſt $4 - \frac{12}{9} = \frac{24}{9} = \frac{4 \times 6}{9}$ więc ſama wyſokość będzie $= \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Powierzchnia. Tròykąta ſłużącego za podſtawę wyrazi ſię przez $\sqrt{3}$, a zatym bryłowatość Oſtroſłupa będzie wyrażona przez $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; to ieſt bryłowatość Oſtrosłupa tak ſię ma do bryłowatości Sześcianu ròwnego co do bokow Oſtrosłupowi, iak $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ do 8, albo iak $\sqrt{2}$ do 12; albo iak 2 do $12\sqrt{2}$, albo iak 1 do $6\sqrt{2}$; albo nakoniec iak 1 do $\sqrt{72}$; ktòry to ſtoſunek bliſki ieſt ſtoſunku 2 do 17, albo 33 do 280, a bardzo mało ròżni ſię od ſtoſunku 68 do 577.

Przykł. 2. Wyznaczyć bryłowatość Ośmiościanu foremnego.

Można ſobie Ośmiościan wyſtawić w myśli, iakoby złożony z dwòch Oſtroſłupòw proſtych kwadratowych, ſtykaiących ſię z ſobą ròwnemi podſtawami.

Wyra-

Wyraziwszy bok ieden Ośmiościanu tego, przez 2, kwadrat promienia koła opisanego na podstawie iednego z tych dwóch Ostrosłupów, będzie wyrażony przez 2, a kwadrat wysokości tego Ostrosłupa wyrazi się przez różnicę między kwadratem z 2, to iest 4, i 2, to iest będzie $=4-2=2$. Wysokość zaś tego Ostrosłupa wyrazi się przez $\sqrt{2}$; więc bryłowatość iednego tego Ostrosłupa będzie oznaczona przez $\frac{4\sqrt{2}}{3}$, a zatym bryłowatość Ośmiościanu przez $\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

Jest tedy bryłowatość Ośmiościanu foremnego do bryłowatości Sześcianu równego co do wielkości boków, iak $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ do 8, albo iak $\sqrt{2}:3$, który to stosunek bliski iest stosunkowi 8 do 17. albo 17 do 36, a bardzo mało różni się od stosunku 33 do 70.

103. *Uwaga* 3. Ponieważ ściany Ostrosłupa są powierzchniami płaskiemi i to ieszcze tróykątnemi, wyznaczenie iego powierzchni, żadney nie podlega trudności. Gdy Ostrosłup iest foremny, powierzchnia iego (oprócz podstawy) ró-

wna

wna będzie Tróykątowi, któryby miał za podstawę, obwod podstawy Ostrosłupa; a wysokość równą wysokości ściany któreykolwiek (ponieważ wszystkie są równe.)

Wyboczenie (Digressio) *o sposobie wyczerpania nazwanego po Łacinie* Methodus exhaustionis; *maiące służyć za wstęp do Rozdziałów następuiących.*

104. Sposob, którego się użyło dla dowiedzenia równości dwóch Ostrosłupów, których podstawy i wysokości są równe, na to wypada, aby okazać, iż każdy z tych Ostrosłupów zawarty iest między dwiema ilościami, których różnica może być mnieysza od iakieykolwiek ilości naznaczoney; to iest: że każdy Ostrosłup iest zawarty między summą Graniastosłupów na nim opisanych i summą Graniastosłupów weń wpisanych; i że tych dwòch summ rùżnica może być mnieysza od iakieykolwiek ilości naznaczoney; a tym bardziey każdego z tych Ostrosłupa różnica, od iedney z tych summ, może być mnieysza, niż iakakolwiek ilość naznaczona. Zkąd można było Ostrosłupom porownywanym do siebie przystosować to wszystko, cokolwiek się powiedziało o stosunku iedney

dney z tych ſumm, nap: ſummy Graniaſtosłupów opiſanych na iednym Oſtrosłupie, do drugiey z tych ſumm, to ieſt do ſummy Graniaſtosłupów w iednakiey liczbie, opiſanych na drugim Oſtrosłupie. Ze zaś, gdy Oſtrosłupy miały równe podſtawy i wyſokości, te dwie ſummy Graniaſtosłupów były równe; więc też i Oſtrosłupy, których różnica od tych dwóch ſumm może być mnieyſza, niż iakakolwiek ilość naznaczona, będą równe.

105. Gdyby dwa Oſtrosłupy miały tylko wyſokości równe, a podſtawy nierówne; możnaby tymże ſamym prawie ſpoſobem okazać, że ſą do ſiebie, iak ich podſtawy; a to ztądby ſię wniosło, że wtymże ſamym ſtoſunku byłyby do ſiebie ſummy Graniaſtosłupów opiſanych na każdym z tych Oſtrosłupow; i że każdy z tych Oſtrosłupów może ſię różnić od każdey z tych ſumm, odpowiadaiących ſobie, ilością mnieyſzą, niżeli ieſt iakakolwiek ilość naznaczona.

106. Ponieważ ten ſpoſób wnoſzenia ſtoſunku dwóch ilości, które bezśrednie z ſobą porównywać ieſt trudno, będzie bardzo częſto używany w Rozdziałach naſtę-

następuiących, przeto niezawadzi okazać ieszcze pewność iego na kilku przykładach, aby iuż potym nie trzeba było za każdym razem powtarzać całego ciągu takowego działania, ktòry zawsze iest iednakowy,

Przykł. 1. Niechby dowiedziono było, że dwa Ròwnoległoboki maiące ròwne wysokości, są do siebie, iak ich podstawy. Trzeba ieszcze dowieść, że i dwa Troykąty, ktòrych ròwne są wysokości, maią się do siebie iak ich podstawy. (W tym zaś stawiamy się mniemaniu, iakoby nam nie wiadomo było, że Tròykąt iest połową Ròwnoległoboku, teyże co on podstawy i wysokości.)

Niech będą dwa Tróykąty: ABC,abc. *Tab. IV. Fig.* 6. ròwney wysokości, a z nieròwnemi podstawami; trzeba dowieść, że się tak maią do siebie, iak ich podstawy; a to ztąd, że i Ròwnoległoboki iednakiey wysokości są do siebie, iak ich podstawy.

Podzielmy bok ieden nap. AC, napewną liczbę części rownych. Przez wszystkie punkta podziału poprowadźmy ròwnoodległe od podstawy; a na każdey z tych ròwnoodległych wpiszmy i opiszmy

Tróy-

Tròykątowi ABC, Rownoległoboki, maiące za ſpolną wyſokość równe oddalenie dwoch naybliżſzych równoodległych.

Różnica Równoległoboków opiſanych, od Równoległoboków wpiſanych, równać ſię będzie naywiękſzemu z nich Równoległobokowi. Ta zaś różnica może być mnieyſzą zrobiona, niż iakikolwiek Równoległobok naznaczony, odmieniwſzy go na inny Równoległobok, któryby tę ſamę, co i Troykąt miał podſtawę, i kąt z nim przy podſtawie ſpolny, a potym podzieliwſzy drugi bok AC, Tróykąta na tyle części równych, aby każda z nich mnieyſza była od drugiego boku, Równoległoboku naznaczonego.

Gdyby to być mogło, abc dwa Tróykąty: ABC, abc. nie miały ſię do ſiebie, iak ich podſtawy; tędy ieden z tych Troykątow; nap: ABC, byłby do uczynienia tego ſtoſunku, nadto wielki, lub nadto mały.

Niechby więc, ieżeli to być może, trzeba powiękſzyć Tròykąt ABC, Równoległobokiem ABFE. aby ſię tak miał do Tròykąta abc, iak AB do ab.

Podziel-

Podzielmy bok AC. na tyle części równych, aby każda z nich mnieyſza była od linii AE; wpiſzmy potym i opiſzmy Tróykątowi Równoległoboki, w ſpoſób wyżey wyrażony. Niech będzie naywiękſzy z nich Równoległobok AGHB. Różnica ſummy Równoległoboków opiſanych od ſummy Równoległobokow wpiſanych, uczyniona ieſt mnieyſzą, niżeli Równoległobok ABFE; tym bardziey zaś Różnica ſummy Równoległoboków opiſanych, na Tróykącie ABC, od tegoż Tróykąta, ABC, mnieyſza będzie, niżeli Równoległobok ABFE; a zatym ſumma wſzyſtkich Równoległoboków opiſanych, mnieyſza ieſt od Równoległoboku ABFE, wraz z tego z Tróykątem ABC.

Podzielmy i bok ac, Tróykąta abc, na tyleż części równych, na ile ich był podzielony bok AC; opiſzmy natym Tróykącie Równoległoboki, tak iak wyżey.

Równoległoboki opiſane, na tych dwóch Tróykątach, a odpowiadaiące ſobie, tak ſię mieć będą do ſiebie, iak podſtawy AB, ab, tychże Tróykątow; więc też i ſumma wſzyſtkich Równoległoboków opiſanych na Tróykącie ABC, tak ſię

mieć

mieć będzie do ſummy Rownoległoboków opiſanych na Tróykącie abc, iak podſtawa AB, pierwſzego Tróykąta, do podſtawy ab, drugiego; to ieſt: przez przypuſzczenie, iak ſumma, z Tróykąta ABC, i z Równoległoboku ABFE, do Tróykąta abc. A że zrobiliśmy pierwſzy poprzednik mnieyſzym od drugiego, więc też i pierwſzy naſtępnik byćby powinien mnieyſzy od drugiego; to ieſt ſumma wſzyſtkich Równoległoboków opiſanych na Tróykącie abc, powinnaby być mnieyſza od Tróykąta abc, co iednak być nie może; a zatym ſtoſunek podſtaw tych dwóch Tróykątów, tenże ſam ieſt, co i ſamych Tróykątow.

Podobnym ſpoſobem możnaby okazać, że i drugi Tróykąt abc, nie powinien być powiękſzony, aby miał ten ſam do Tróykąta ABC, ſtoſunek, co i ich podſtawy.

Przykł: 2. Niech Tróykąty ABC, abc, wyſtawuią dwóch Oſtrosłupów przecięcia przechodzące przez wierzchołki C, c, i przez proſtopadłe ſpuſzczone od tych wierzchołków do podſtaw Oſtrosłupów. Niech te obadwa Oſtrosłupy, będą iednakiey wyſokości. Trzeba dowieść, że bryłowatości tych Oſtrosłupów, tak ſię maią ią do siebie, iak ich podstawy, a to z własności Graniastosłupów iednakowey wysokości, które także w takim iak ich podstawy stosunku są do siebie, czego się iuż wyżey dowiodło.

Okaże się, w podobny sposob, że opisawszy i wpisawszy iednemu z tych Ostrosłupowi, Graniastosłupy, równey wszystkie wysokości; różnica wpisanych od opisanych, równać się będzie naywiększemu Graniastosłupowi opisanemu, i że można w to potrafić, aby ta różnica mnieysza była niż iakikolwiek Graniastosłup naznaczony; a tym bardziey różnica Ostrosłupa od każdey z tych summ mnieysza będzie, niżeli ten Graniastosłup.

Wpisawszy i opisawszy drugiemu Ostrosłupowi, tyle co i pierwszemu Graniastosłupów; summa tych wszystkich Graniastosłupów opisanych na pierwszym Ostrosłupie, tak się mieć będzie do summy opisanych na drugim, iak podstawa pierwszego Ostrosłupa, do podstawy drugiego. Także i summy Graniastosłupów wpisanych, w tym samym stosunku będą, co i podstawy dwóch Ostrosłupów.

Gdyby to albowiem być mogło, aby stosunek dwóch tych Ostrosłupow, nierówny

wny był stosunkowi ich podstaw, tedy ieden z tych Ostrosłupów, byłby nap: nadto mały na ten stosunek. Przydaymy mu więc tę ilość, ktorą powiększony, zachowa ten stosunek, i zamieńmy też ilość na Graniastosłup równey z nim podstawy. Temu Ostrosłupowi wpiszmy i opiszmy Graniastosłupy iednakiey wysokości, tak iednak małey, aby różnica summ Graniastosłupów wpisanych od opisanych, mnieysza była od różnicy naznaczoney; będzie tym bardziey różnica summy Graniastosłupów opisanych na tym Ostrosłupie, od tegoż Ostrosłupa mnieysza, niżeli różnica naznaczona; a zatym summa tych Gtaniastosłupów mnieysza będzie niżeli summa z Ostrosłupa i z różnicy naznaczoney.

Na drugim Ostrosłupie opiszmy tyleż co i na pierwszym Graniastosłupów.

Summa wszystkich Graniastosłupów opisanych na pierwszym Ostrosłupie, tak się mieć będzie do summy Graniastosłupów opisanych na drugim Ostrosłupie, iak podstawa pierwszego Ostrosłupa, do podstawy drugiego; to iest: iak summa z pierwszego Ostrosłupa, i z różnicy iego mniemaney, do drugiego Ostrosłupa.

Aże

Aże się pokazało, iż pierwszy poprzednik mnieyszy iest od drugiego, więc i pierwszy następnik powinienby być mnieyszy od drugiego, co iednak być nie może.

Więc stosunek dwóch tych Ostrosłupow, nieróżni się od stosunku ich podstaw,

107. *Uwaga.* Użyliśmy iuż tego sposobu, mówiąc o kwadrowaniu koła, w Części I. Dowiodłszy albowiem, iż obwody dwóch Wielokątów foremnych, z iednaką liczbą boków, wpisanych, lub opisanych, dwóm kołom, tak się do siebie maią, iak tych kół promienie; pokazawszy oraz, iż różnica obwodu koła, od obwodu Wielokąta wpisanego, lub opisanego, mnieyszą być może od iakieykolwiek ilości naznaczoney, wywiedliśmy ztąd proporcyonalność okręgów kół, do ich promieni. Dowiedliśmy także równości koła z Tróykątem maiącym zawysokość promień iego, a za podstawę, okrąg; a to z podobney własności Wielokąta na kole opisanego,

W którymkolwiek z tych przykładów, nap: w ostatnim, koło iest granicą między Wielokątami wpisanemi, i opisanemi, do

którey

którey każdy z nich, tym bardziey się zbliża, im więceybokòw mu damy, tak dalece, że przyiść można do tego, iż ich obwody ròżnić się od siebie będą mnieyszą ilością, niż iakakolwiek ilość naznaczona, a tym mniey ieszcze różnić się będą ich obwody od okręgu koła. Wielokąty podobne na dwòch kołach opisane, zawsze tę maią własność, iż są proporcyonalnemi tychże koł promieniom. Łącząc te z sobą własności, wypadło z nich, że i granice tych Wielokątòw, to iest koła, tęż samę własność maią; lubo choćby ie na więcey coraz cząstek podzielić (byleby ich liczba była skończona) nieprzyidziemy nigdy do tego, abyśmy cale zgubili tę rożnicę która zachodzi między Wielokątem, i kołem, to iest, abyśmy Wielokąt cale na koło iemu ròwne zamienili.

Ten sposob postępowania, nazywa się *sposobem wyczerpania* (Methodus exhaustionis) używanym bardzo często u dawnych, ktòrym się to, i sprawiedliwie niezdawało, aby liniie krzywe uważać iak złożone z liczby bardzo wielkiey, maleńkich liniy prostych; powierzchnie zaś krzywe, aby uważać iak zbior bardzo wielu powierzchni płaskich, małości nadzwyczayney; bryły także krzywe, aby uważać iak *Wielościany* (Polyedra) bardzo wielką liczbę, boków maiące.

Po tych, które ſię tu dały obiaśnieniach, obeydzie ſię w naſtępuiących podaniach, bez powtarzania za każdym razem całego ciągu tego ſpoſobu *wyczerpania*. Dosyć będzie okazać, że powierzchnie krzywe i Bryły niemi zakończone, o których mamy mówić, zawa te zawſze ſą między powierzchniami lub Bryłami, o których iuż mowiliśmy, a które mogą ſię rożnić od ſiebie mnieyſzą ilością, niż iakako wiek ilość podana. Gdy zaś przyidzie mówić o ścianach Brył, o ich *warſtach* (laminæ) i t. d, tedy rozumiem, że przez poprzedzaiące obſzerne obiaśnienia, doſyć ſię wytłumaczyło, iak dalecy być powinniśmy od uważania powierzchni krzywych, iakoby złożonych z płaſzczyzn, i od uważania Brył, iakoby złożonych z powierzchni uſłanych iednych nad drugiemi.

ROZ-

ROZDZIAŁ VII.

O Walcach.

180. Niech będą dwa koła równe nakreślone na dwóch płaszczyznach równoodległych. Przez liniią łączącą ich środki, niech przechodzi iakakolwiek inna płaszczyzna. Niech będą złączone inną liniią końce dwóch promieni znayduiących się po iedney stronie linii łączącey środki, i służących za spolne przecięcia tey płaszczyzny z płaszczyznami dwóch kół; niechay ta liniia końce dwóch promieni łącząca obraca się równym wszystkich iey punktów ruchem, około okręgów tych dwóch kół. Powierzchnia krzywa obrotem tym linii naznaczona, nazywa się *powierzchnią Walcową*. Bryła zakończona temi dwoma kołami, i tą powierzchnią zowie się *Walcem*. (Cylinder.) Liniia prosta łącząca środki tych dwóch kół, nazywa się *Osiątego* Walca. (Axis.) Dwa koła na których się Walec kończy, nazywaią się iego *podstawami*. Prostopadła spuszczona od punktu którego kolwiek, iedney z tych podstaw do płaszczyzny podstawy drugiey, nazywa się *wysokością* Walca. Gdy oś

Walca, albo liniia łącząca środki dwòch podſtaw iego, proſtopadłą ieſt do płaſzczyzn podſtaw, Walec zowie ſię *proſtym*, gdy zaś ta oś ieſt pochyłą do tychże płaſzczyzn, wtedy Walec zowie ſię *ukośnym*.

109. *Wnioſek*. Liniia robiąca obrotem ſwoim powierzchnią walcową, ròwnoodległą ieſt w początkowym ſwoim położeniu, od oſi walca [bo ta liniia z oſią, czyni dwa boki przeciwne w Czworokącie tym, ktòrego dwoma innemi bokami, ſą dwa promienie koł ròwne i rôwnoodległe). Że zaś ta liniia zawſze ieſt od pierwſzego ſwego położenia ròwnoodległą, więc zawſze będzie ròwnoodległą od oſi. Wzaiemnie, gdy przez punkt ktòrykolwiek powierzchni walcowey pociągniemy liniią, równoodległą od oſi, ta liniia zmieſza ſię z linią ktòra obrotem ſwoim kreśli powierzchnią Walca, a przez tenże punkt przechodzi, i cała ta liniia znaydować ſię będzie na powierzchni walcowey. Liniia ròwnoodległa od oſi, a przechodząca przez punkt ktòrykolwiek powierzchni walcowey, nazywa ſię *bokiem* Walca; wſzyſtkie zatym boki Walca ſą równe, a wſzczegulności rownaią ſię oſi.

110.

110. *Twierdz.* 1. Przeciąwszy Walec płaszczyzną równoodległą od podstawy, przecięcie to będzie kołem.

Niech będzie CAac, połową przecięcia Walca, od płaszczyzny przechodzącey przez oś iego Cc, i niech BD będzie spolnym przecięciem tey płaszczyzny, i drugiey równoodległey od podstawy. *Tab. V. Fig. 1.*

Przecięcie Walca przez tę drugą płaszczyznę, będzie kołem.

Dowodz: Bok Aa, Walca iest od osi Cc równoodległym; przecięcia także BD, CA płaszczyzny przechodzącey przez oś, i dwóch płaszczyzn równoodległych, są równoodległem; więc Czworokąt: ACBD, iest Równoległobokiem, a zatym bok BD, równa się bokowi AC.

Tymże sposobem okazać można równość wszystkich liniy prowadzonych od punktu B, do każdego punktu przecięcia powierzchni Walcowey, przez płaszczyznę równoodległą od podstawy; a zatym to przecięcie iest kołem, którego środkiem, punkt B; i wszystkie takie przecięcia są sobie równe, a wszczególności, równe są podstawie.

111.

111. *Wniosek.* Ztąd wynika inny sposob. ktòrym wystawić sobie można *rodzenie się* (generatio) iakiegokolwiek Walca, to iest przez ruch koła taki, ktòrymby się to koło w ròwney zawsze od pierwszego swego położenia odległości posuwało, a ieden z punktòw iego nie schodził nigdy z linii prostey daney co do iey położenia.

W szczegulności zaś, Walec prosty, można uważać iakoby zrobiony obrotem Ròwnoległoboku prostokątnego, około iednego z bokòw iego.

112. *Twierdz:* 2. Powierzchnia krzywa (g) Walca prostego, ròwna się Prostokątowi, ktòryby miał za podstawę, okrąg podstawy Walca, a za wysokość, bok Walca.

Dowodz: Wpiszmy w podstawę Walca, i opiszmy na niey dwa Wielokąty foremne, z ròwną liczbą bokòw, i na tych Wielokątach, iak na podstawach, uważaymy iakoby zrobione Graniastosłupy proste,

(g) *Powierzchnią krzywą Walca nazywamy tę, w ktòrą nie wchodzą podstawy Walca.*

ſte, teyże co i Walec wyſokości; powierzchnie pobocznych ścian tych dwóch Graniaſtoſſupów równe będą względem Proſtokątów maiących w ſokość Walca; podſtawy zaś równe obwodom tych Wielokątów, a zatym te dwie powierzchnie pobocznych ścian Graniaſtoſſupów, tak ſię mieć do ſiebie będą, iak obwody tychże Wielokątów. Tym mniey więc różnić ſię od ſiebie będą te dwie powierzchnie, im mniey brakować będzie tym Wielokątom do rownośći, to ieſt, im więkſza liczba będzie ich boków; i różnica tych powierzchni mnieyſza być może, niż iakakolwiek ilość naznaczona; a tym bardziey powierzchnia krzywa, może ſię mniey ieſzcze różnie od iedney z tamtych powierzchni; więc [podług tego co ſię powiedziało o ſpoſobie wyczerpania, i w Rozdziale XIII. Części I.) powierzchnia krzywa Walca próſtego, równa ſię Proſtokątowi maiącemu wyſokość tego Walca, a podſtawę równą okręgowi podſtawy iego.

113, *Wnioſki* 1. Powierzchnie krzywe Walców proſtych, iednakiey wyſokości, tak ſię do ſiebie maią, iak promienie ich podſtaw.

2 Po-

2. Powierzchnie krzywe Walców prostych maiących równe podstawy, są do siebie, iak ich wysokości.

3. Powierzchnia cała Walca prostego, równa się Prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg podstawy Walca, a za wysokość summę z wysokości Walca, i z promienia podstawy iego, (ponieważ summa z powierzchni dwòch podstaw Walca, rowna iest Prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg, a za wysokość, promień iedney z tych podstaw). Jest zatym powierzchnia cała Walca prostego proporcyonalna Prostokątowi, któryby miał za boki, promień podstawy Walca, i summę z tegoż promienia i z wysokości walca; (gdyż stosunek okręgu do promienia, iest iednostaynym,)

114. *Uwaga*. Można okazać, iż wyznaczenie powierzchni krzywey Walca ukośnego, zawisło od wyznaczenia obwodu przecięcia Walca tego, przez płaszczyznę prostopadłą do iego osi; ale że wyznaczenie tego obwodu, większey niż początkowey Geometryi wiadomości wyciąga, przeto nie może być przez nię wyznaczona i powiezchnia krzywa Walca ukośnego.

115. *Twierdz:* 3. Dwa Walce równe ſą w bryłowatości, których tak podſtawy iako i wyſokości, ſą równe.

Dowódz: Wpiſawſzy, i opiſawſzy podſtawom tych dwóch Walców, Wielokąty foremne, o iednakowey liczbie boków, a zrobiwſzy na tych Wielokątach, Graniaſtoſłupy równey z Walcami wyſokości, maiące ściany równoodległe względem oſi tych Walców; rożnica Graniaſtoſłupa opiſanego na iednym z tych Walców, od Graniaſtoſłupa w tenże Walec wpiſanego, równać ſię będzie Graniaſtoſłupowi maiącemu tę ſamę, co tamte dwa wyſokość, a podſtawę równą różnicy dwoch ich podſtaw. A że różnica tych dwóch podſtaw, mnieyſza być może, niż iakakolwiek ilość naznaczona; więc też i różnicę dwoch Graniaſtoſłupow, wpiſanego i opiſanego, można uczynić mnieyſzą od iakieykolwiek ilości naznaczoney, a tym bardziey różnica iednego z tych Graniaſtoſłupa, od Walca może być mnieyſzą uczyniona, niż iakakolwiek ilość naznaczona.

Ze zaś dwa Graniaſtoſłupy podobne, nap: opiſane na tych dwoch Walcach ſą równe, więc też i te dwa Walce ſą równe

wne

wne, (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpania.)

116. *Twierdzenie* 4. Walce z równemi podstawami, maią się do siebie, iak ich wysokości.

117. *Twierd*, 5. Walce z równą wysokością maią się do siebie, iak ich podstawy.

Dowodzenie tych dwóch Twierdzeń to samo iest prawie, co i dowodzenie Twierzenia 3; położywszy stosunki nie równości podstaw, lub wysokości, na mieysce stosunków równości.

118. *Wniośki* Cokolwiek się powiedziało o porownywaniu Graniastosłupow maiących podstawy rożnego gatunku, wszystko to przystosować można do porownywania Walcow z Graniastosłupami. Walec równy naprzykład iest iakiemukolwiek Graniastosłupowi maiącemu rowną z nim podstawę i wysokość. Walec tak się ma Graniastosłupa teyże co on wysokości, iak podstawa tego Walca, do podstawy Graniastosłupa, a zatym Walec tak się ma do Graniastosłupa teyże co i on wysokości, a ktòrego podstawa

iest

ieſt Wielokątem opiſanym na podſtawie Walca, iak podſtawa Walca, do podſtawy Graniaſtoſłupa, to ieſt, iak obwod podſtawy Walca, do obwodu podſtawy Graniſtoſłupa; nap: Walec, ktòrego wyſokość ròwna ſię średnicy podſtawy iego, tak ſię ma do Sześcianu tey średnicy, iak okrąg koła, do teyże średnicy wziętey 4 razy.

Gdy Walec ròwny ieſt Graniaſtoſłupowi w bryłowatości, wyſokość ich będzie w ſtoſunku odwrotnym podſtaw, i znowu, ieżeli wyſokości ſą w ſtoſunku odwrotnym podſtaw, tedy Walec równa ſię Graniaſtoſłupowi.

Stoſunek dwòch Walców, może podobnie, iak i ſtoſunek Graniaſtoſłupow, wyłożonym być w liniiach ſpoſobem naſtępuiącym: Wyraźmy w liniiach ſtoſunek ich podſtaw; znalazſzy trzecią proporcyonalną do promienia Walca pierwſzego, i do promienia Walca drugiego. Do wyſokości Walca pierwſzego, do wyſokości drugiego, i do tey trzeciey proporcyonalney, ſzukaymy czwartey proporcyonalney; ſtoſunek promienia Walca pierwſzego, do tey czwartey proporcyonalney, ròwny będzie ſtoſunkowi

bryło-

bryłowatości pierwszego Walca, do bryłowatości drugiego.

Przykład liczebny. Niech będzie promień podstawy drugiego Walca, trzy razy tak wielki iak promień podstawy pierwszego; wysokość zaś drugiego Walca, niech będzie cztery razy tak wielka, iak wysokość pierwszego. Trzecia proporcyonalna do promienia Walca pierwszego i do promienia Walca drugiego, będzie 9. razy tak wielka, iak promień pierwszego Walca; a ponieważ wysokość drugiego Walca, 4 razy iest tak wielka iak wysokość pierwszego, będzie więc czwarta proporcyonalna do wysokości pierwszego Walca, do wysokości drugiego, i do tey trzeciey proporcyonalney, cztery razy tak wielka, iak ta trzecia proporcyonalna, to iest: 36 razy tak wielka iak pierwszy promień, a zatym drugi Walec zawiera w sobie pierwszy, razy 36. Jakoż gdyby podstawa drugiego Walca zawierała w sobie razy 9 podstawę pierwszego, a wysokość ich była równa, tedy drugi Walec byłby 9 razy tak wielki iak pierwszy; a że nadto wysokość drugiego Walca zawiera w sobie razy 4, wysokość pierwszego, będzie więc i z tey miary drugi Walec 4

razy

razy tak wielki, iak pierwſzy, a z oby-
dwóch razem tych miar będzie 36 ra-
zy tak wielki, iak pierwſzy.

Co ſię zaś tycze miary liczebney iakie-
go Walca, ta będzie znaleziona, wyrazi-
wſzy nayprzod w liczbach, powierzch-
nią iego podſtawy (podług tego co ſię
powiedziało o powierzchni koła,) a po-
tym rozmnożywſzy tę liczbę przez in-
ną, oznaczaiącą wyſokość Walca.

119. *Uwaga.* Wyznaczenie dokładne
tak powierzchni krzywey Walca proſte-
go, iakoteż i całey iego powierzchni;
to ieſt dokładne porównywanie tey po-
wierzchni z powierzchnią proſtą, nap: z
kwadratem, zawiſło od ſkwadrowania ko-
ła; a zatym od wyproſtowania iego okrę-
gu. Toż mowić i o bryłowatości Walca,
czyli o dokładnym porownywaniu tey
bryłowatości z bryłowatością nap: Sze-
ścianu.

Wyznaczenie wielkości kawałków
Walca, maiących za podſtawy, wycinki,
lub odcinki koła, zawiſło także od wy-
znaczenia Walca; ponieważ te kawałki
tak ſię maią do Walca całego, którego
ſą

ſą częściami, iak ich podſtawy do koła ſłużącego za podſtawę temu Walcowi. (h)

ROZDZIAŁ VIII.

O Oſtrokręgach.

120. DEfin: Niech będzie koło nakreślone na iakiey płaſzczyźnie i niech od punktu nad tą płaſzczyzną znayduiącego ſię, wyciągniona liniia lub nitka, obraca ſię około okręgu, tego koła. Powierzchnia krzywa, obrotem tym linii lub nitki naznaczona nazywa ſię *powierzchnią Oſtrokręgu*; Bryła zakończona przez tę powierzchnią i koło, około którego nitka ſię obracała, nazwiemy *Oſtrokręgiem* (Conus), koło, na którym Oſtrokrąg ſtoi, nazwiemy *podſtawą* iego; *wierz-*

(h) *Lubo niektóre części powierzchni Walcowey ſame przez ſię wyznaczyć można; nie można iednak wyznaczyć ich ſtoſunku do całey powierzchni Walca. Toż mówić i o częściach Walca, których bryłowatości mogą być wyznaczone. Ale ta rzecz bardziey ieſt ciekawa, niż użyteczna, dla tego też doſyć ieſt o tym namienić.*

wierzchołkiem zaś, punkt ten, od którego nitka była wyciągniona. Liniia od tego wierzchołku do środka podstawy prowadzona, nazywa się *Osią* Ostrokręgu, a prostopadła spuszczona od wierzchołku do płaszczyzny podstawy: nazywa się *wysokością*. Gdy oś iest prostopadłą do płaszczyzny podstawy, Ostrokręgu; Ostrokrąg nazywa się *prostym*; gdy zaś ta oś nie iest do płaszczyzny podstawy prostopadłą, Ostrokrąg nazywa się *ukośnym*.

121. *Wniosek*. Poprowadziwszy liniią od wierzchołku Ostrokręgu do któregokolwiek punktu Okręgu podstawy iego, ta liniia zmieszasię wtedy z nitką rodzącą obrotem swoim, powierzchnią Ostrokręgu, gdy ta nitka przechodzić będzie przez ten punkt okręgu podstawy; a zatym ta liniia cała będzie na powierzchni krzywey tego Ostrokręgu.

Liniia poprowadzona od wierzchołku Ostrokręgu powierzchni iego krzywey, aż do okręgu podstawy, nazywa się *bokiem* Ostrokręgu.

122. *Twierdz:* 1. Gdy płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek Ostrokręgu iakiegożkolwiek przecina go, przecięcie to iest zawsze Tróykątem.

Dowo-

Dowodz: Liniie poprowadzone na tey płaszczyznie od wierzchołku Ostrokręgu, do dwòch punktòw okręgu, w ktòrych go ta płaszczyzna przecina, będą bokami Ostrokręgu, i spolnemi powierzchni iego krżywey, z tą płaszczyzną przecięciami; a zatym przecięcie Ostrokręgu przez tę płaszczyznę, będzie Tròykątem maiącym za podstawę, spolne przecięcie tey płaszczyzny, z płaszczyzną podstawy Ostrokręgu, a za boki, dwie liniie poprowadzone od wierzchołku, do punktòw przecięcia okręgu, od płaszczyzny przechodzącey przez wierzchołek,

123. *Twierdz*: 2. Gdy Ostrokrąg przecięty iest przez płaszczyznę rownoodległą od iego podstawy, przeciecie to iest kołem.

Tab. V. Fig: 2. Niech Tròykąt ASB wyraża iakiekolwiek przecięcie Ostrokręgu od płaszczyzny przechodzącey przez iego Oś, SC; niech liniia DFE wyraża spolne przecięcie tey płaszczyzny i inney rownoodległey od podstawy.

Tròykąty SCB, SFE, są podobne; więc SC : CB = SF : FE. Aże płaszczyzna przecinaiąca Ostrokrąg rownoodległe od podstawy

podſtawy, przechodzi przez punkt nieruchomy F, a przeto trzy pierwſze wyrazy tey proporcyi ſą ſtałe iakiżkolwiek będzie promień podſtawy przez którą, a razem i przez oś przechodzi płaſzczyzna; więc też i czwarty wyraz ieſt ſtałym. Poprowadziwſzy tedy liniie od punktu F, do okręgu przecięcia, te liniie równe zawſze będą, a zatym to przecięcie ieſt kołem, którego punkt F, ieſt środkiem.

124. *Wnioſki.* Te kół powierzchnie tak ſię do ſiebie maią, iak kwadraty ich promieni, albo iak kwadraty odległości ich od wierzchołka. (To podanie ieſt wielce przydatne w Fizyce.)

Gdy Oſtrokrąg ieſt proſtym, wtedy wſzyſtkie płaſzczyzny, równoodległe od podſtawy, ſą do Oſi proſtopadłemi; a ztąd, można uważać Oſtrokrąg proſty, iakoby zrobiony obrotem Tróyką ta proſtokątnego, około iednego z ramion kąta iego proſtego. To ramie będzie Oſią Oſtrokręgu, drugie, naznaczy powierzchnią podſtawy, przeciwproſtokątna zaś, naznaczy powierzchnią krzywą Oſtrokręgu.

125. *Twierdz: przybrane* 1. Gdy linia poprowadzona na płaszczyznie podstawy Ostrokręgu, dotyka się tey podstawy; płaszczyzna przez tę liniią i przez bok Ostrokręgu do punktu dotknięcia, ciągniony, przechodząca, wszystkie inne punkta swoie mieć będzie za Ostrokręgiem; to iest: nic spolnego z Ostrokręgiem nie będzie miała, oprocz boku, przez który przechodzi,

Tab. V. Fig. 3. Niech będzie SCA, przecięcie Ostrokręgu od płaszczyzny przechodzącey przez Oś SC, i przez podstawy promień CA. Niech AT, będzie styczną z tą podstawą, w końcu A, promienia CA; Płaszczyzna przechodząca przez linie: SA, AT, będzie mieć za Ostrokręgiem, wszystkie punkta swoie, które nie są w linii SA.

Dowodz: Niech płaszczyzna iakakolwiek równoodległa od podstawy, Ostrokrąg przecina; niech *ca*, będzie spolnym przecięciem tey płaszczyzny, i drugiey przez oś przechodzącey; niech iesczce *at* będzie przecięciem teyże płaszczyzny, i drugiey przechodzącey przez linie: SA, AT. Liniie: *ca*, *at*, będą równoodległemi względem liniy: CA, AT;

a zatym

a zatym kąt *cat*, będzie równy kątowi CAT. Aże kąt CAT ieſt proſtym, więc proſtym także będzie i kąt *cat*; a zatym, oprocz punktu *a*, linii *at*, każdy inny punkt, teyże linii, będzie w większey od środka *c*, odległości, niżeli promień *ca*, to ieſt: niżeli odległość punktu na powierzchni Oſtrokręgu, i oraz na płaſzczyznie *cat*, znayduiącego się, od punktu Oſi, do teyże płaſzczyzny należącego. Każdy tedy inny punkt tey linii *at*, oprocz punktu *a*, ieſt za okręgiem.

126. *Defin:* O tey płaſzczyznie mowi ſię, iż ſię *dotyka Oſtrokręgu*, ktòra iednę tylko liniią ma ſpolną z powierzchnią krzywą Oſtrokręgu.

127. *Wnioſek.* Opiſawſzy Wielokąt na podſtawie Oſtrokręgu, a przez wierzchołek tego Oſtrokręgu, i przez boki Wielokąta przeciągnąwſzy płaſzczyzny; ponieważ te boki Wielokąta opiſanego, ſłużyć będą za podſtawy ścian Oſtrogranu, wierzchołek zaś iego, będzie ten ſam, co i wierzchołek Oſtrokręgu, więc ściany tego Oſtrogranu dotykać ſię będą powierzchni Oſtrokręgu. Oſtrogran ten nazywa ſię opiſanym na Oſtrokręgu inny zaś, któryby ſpolny z Oſtrokręgiem

miał wierzchołek, a za podſtawę Wielokąt wpiſany w podſtawę Oſtrokręgu, nazywałby ſię w Oſtrokrąg *wpiſanym.*

128. *Twierdz: przybrane 2.* Maiąc dany Oſtrokrąg proſty, można weń wpiſać, i opiſać na nim dwa Oſtrograny foremne, ktòrychby ſtoſunek powierzchni ściennych bardziey ſię zbliżał do ſtoſunku równości, niż iakikolwiek naznaczony ſtoſunek nieròwności.

Powierzchnie ścienne tych dwóch Oſtrogranòw, ròwnaią ſię Trόykątom, maiącym za podſtawy, obwody podſtaw Oſtrogranόw, a wyſokości zaś, ròwne wyſokościom iedney z ścian każdego Oſtrogranu; a zatym tak ſię do ſiebie maią te Oſtrograny, iak te dwa Tròykąty. Aże podſtawy tych dwòch Tròykątòw, tak ſię maią do ſiebie, iak proſtopadłe ſpuſzczone od środku, do dwόch ktòrychkolwiek bokòw podſtaw Oſtrogranu; więc te powierzchnie ścienne, tak ſię też do ſiebie mieć będą, iak Tròykąty ròwney z ścianami Oſtrogranów wyſokości, a maiące za podſtawy, te proſtopadłe; albo iak Proſtokąty, teyże z dwiema temi Trόykątami podſtawy i wyſokości. Że zaś ſtoſunek takich dwόch

Pro-

Prostokątów, może być bardziey przybliżonym do stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności, to się tak dowodzi.

Niech będzie SCA, przecięcie Ostrokręgu prostego, od płaszczyzny przechodzącey przez oś tego Ostrokręgu i przez wysokości SA, SB dwoch ścian Ostrogranów foremnych, i maiących za podstawy Wielokąty z równą liczbą boków; ieden z tych Ostrogranów niech będzie opisanym na Ostrokręgu, a drugi weń wpisanym. Tab. V. Fig. 4

Powierzchnia ścienna Ostrogranu opisanego proporcyonalna iest z Prostokątem CA przez SA, a powierzchnia ścienna Ostrogranu wpisanego, proporcyonalna iest Prostokątowi CB, przez SB. Poprowadźmy BD równoodległą od SA. Powierzchnia ścienna Ostrogranu, maiącego za podstawę, podstawę Ostrogranu wpisanego, a za wysokość liniią CD, takby się miała do powierzchni ścienney, Ostrogranu opisanego, iak Prostokąt: CB × BD do Prostokąta CA × AS; to iest (dla podobieństwa Tròykątów SAC, DBC) iak kwadrat z CB do kwadratu z CA; albo iak powierzchnie podstaw, dwóch

Ostro-

Ostrogranów. A że się dowiodło w Rozdziale o kwadrowaniu koła w Części I. że te dwie powierzchnie bardziey mogą być zbliżonemi do stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności, więc też i stosunek powierzchni ściennych, tych dwóch Ostrogranów, bliższy może być stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności. Ze zaś powierzchnia ścienna Ostrogranu, którego SCA iest przecięciem, mniey się różni od Ostrogranu, którego przecięciem iest: SCB, niżeli od Ostrogranu, którego przecięciem iest: DCB, więc tym bardziey stosunek powierzchni ściennych dwóch Ostrogranów, iednego wpisanego, drugiego opisanego, mniey się różnić może od stosunku równości, niżeli od tegoż stosunku różni się iakikolwiek dany stosunek nierówności.

129. *Twierdz. 3.* Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego, równa się Tróykątowi maiącemu za podstawę obwod podstawy Ostrokręgu, a za wysokość bok Ostrokręgu.

Dowodz. Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego iest Granicą między powierzwierzchniami ściennemi Ostrogranów prostych weń wpisanych i na nim opisanych. Aże stosunek takich dwóch powierzchni Ostrogranòw, może być do stosunku równości bardziey przybliżonym, niżeli iakikolwiek dany stosunek nie równości, więc tym bardziey stosunek powierzchni Ostrokręgu prostego, do powierzchni iednego z tych Ostrogranów, nap: opisanego, mniey się ròżnić może od stosunku równości, niżeli się od tegoż stosunku różni iakikolwiek dany stosunek nieròwności. Ze zaś powierzchnia ścienna Ostrogranu opisanego, równa się Tròykątowi maiącemu za wysokość, bok Ostrokręgu, a za podstawę obwod podstawy, tego Ostrogranu; więc (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpania, a wszczegulności w Rozdziale o kwadrowaniu koła, że powierzchnia koła, ròwna się Tròykątowi maiącemu za podstawę obwod koła, a za wysokość, promień iego): Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego, iest też ròwna Tròykątowi, któryby miał za podstawę obwod podstawy Ostrokręgu, a za wysokość bok iego.

130. *Wniosek.* Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego, ròwna się wycinko-

cinkowi koła, któreby miało za promień, bok Ostrokręgu, a którego łuk równyby był w długości okręgowi podstawy Ostrokręgu; a to dla tego, że powierzchnia tego wycinku, równa się także Tróykątowi, maiącemu za wysokość bok Ostrokręgu, a za podstawę łuk tego wycinku, albo okrąg podstawy Ostrokręgu.

131. Dla znalezienia ważności kątowey, tego wycinku, następuiąca czyni się proporcya: Jak się ma bok Ostrokręgu, do promienia podstawy iego, tak się ma 360° do ważności kątowey, którey szukamy.

Jakoż, gdyby bok Ostrokręgu, był dwa, trzy, i t.d. razy większy od promienia podstawy, tedy okrąg cały maiący za promień bok Ostrokręgu. byłby dwa, trzy i t.d. razy większy od okręgu podstawy; a zatym i łuk pierwszego koła, któryby się równał okręgowi podstawy, byłby połową, trzecią, częścią i t. d. okręgu, do którego należy.

132. *Defin:* Niech będzie Ostrokrąg przecięty płaszczyzną równoodległą od podstawy iego, Bryła zakończona z iedney strony, podstawą Ostrokręgu a z dru-

drugiey tym przecięciem, nazywa się *Ostrokręgiem ściętym* (Conus truncatus.)

133. *Twierdz:* 4. Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego ściętego, równa się Prostokątowi maiącemu za wysokość, bok tego Ostrokręgu ściętego, a za podstawę liniią równą takiemu Okręgowi, którego promieniem byłaby połowa summy promieni do dwóch podstaw Ostrokręgu tegoż ściętego należących; to iest średnia arytmetyczna między dwoma temi promieniami.

Niech Tròykąt SCA, wyraża połowę przecięcia Ostrokręgu prostego, od płaszczyzny przechodzącey prześ oś iego. Niech tenże Ostrokrąg będzie ieszcze przecięty płaszczyzną ròwnoodległą od podstawy, a spolnym tey płaszczczyzny z pierwszą przecięciem, niech będzie: *ca*. Przecięcie: CAac, oznaczy przecięcie Ostrokręgu ściętego. Pociągniymy liniią AB, prostopadłą do boku SA, i ròwną Okręgowi koła, którego promieniem iest: CA. Tròykąt SAB, będzie równy powierzchni krżywey Ostrokręgu całego: poprowadźmy ieszcze liniią *ab*, równoodległą od AB, i spotykaiącą w punkcie *b*, liniią SB. Ta liniia *Tab. V. Fig. 5.*

ab,

ab, będzie też równa okręgowi koła, którego, promieniem iest: *ca*, a Tróykąt Sab, równać się będzie powierzchni krzywey Ostrokręgu Sac; będzie zatym Czworokąt ABba, równy powierzchni krzywey Ostrokręgu ściętego caCA.

Podzielmy teraz liniią Aa, na dwie części równe w punkcie: E. i poprowadźmy EF, równoodległą od AB.

Ta liniia EF, będzie równa okręgowi koła, którego promień równałby się linii: ED, to iest średniey Arytmetyczney między promieniami, CA, i *ca*, dwóch podstaw Ostrokręgu ściętego; a przeto powierzchnia Czworokąta ABba, równa się Prostokątowi AHGa, maiącemu za wysokość, bok Aa, Ostrokręgu ściętego, a za podstawę liniią EF równą okręgowi średnie arytmetycznie proporcyonalnemu, między okręgami dwóch podstaw tegoż Ostrokręgu.

134. *Uwaga* 1. Wyrażenie następuiące powierzchni krzywey Ostrokręgu prostego, czyli to całego, czyli też ściętego, posłuży nam, gdy mówić będziemy o powierzchni *kuli* (Sphera.)

Od

Od środku E, linii Aa, wyciągniymy liniią EI prostopadłą do Aa, spotykaiącą oś SC, w punkcie I. Poprowadźmy i drugą liniią aL, rownoodległą od SC, a prostopadłą do AC.

Summa kątów IFD, DEa, rowna się kątowi prostemu; tak iako i summa kątów; AaL, DEa; więc te dwie summy są sobie rowne; a zatym kąt IED, rowna się kątowi AaL. Są tedy podobne, dwa Troykąty prostokątne: IED, AaL, a zatym boki ich będą proporcyonalne; więc, JE : ED = Aa : aL, (albo Cc) a ztąd i okręgi, maiące za promienie, linii: IE, ED, są też do siebie, iak linii: Aa, Cc; a zatym Prostokąt z linii Cc, przez okrąg, ktorego liniia IE, byłaby promieniem, rownałby się Prostokątowi z linii Aa, przez okrąg, ktoryby miał za promień, liniią ED. Aże ten drugi Prostokąt rowny iest powierzchni krzywey Ostrokręgu ściętego; więc też i pierwszy byłby rowny teyżeOstrokręgu ściętego powierzchni. Jest tedy powierzchnia krzywa Ostrokręgu ściętego, rowna Prostokątowi maiącemu wysokość rowną wysokości Ostroręgu ściętego, a podstawę rowną okręgowi takiego koła, ktorego promieniem byłaby prostopadła, od środku boku Ostrokręgu ściętego wyciągniona, aż do

iego

iego osi, ktòra to prostopadła iest czwartą geometrycznie proporcyonalną, do wysokości Ostrokręgu ściętego, do iego boku, i do średniey arytmetyczney między dwoma promieniami; co wszystko łatwo przystosować można i do Ostrokręgu ściętego.

135. *Uwaga* 2. Wyznaczenie więc dokładne powierzchni Ostrokręgu, lub iey części, zawisło od wyprostowania okręgu koła.

Co się tycze Ostrokręgu ukośnego, ieszcze cięższy iest wyznaczyć powierzchnią iego krzywą, niżeli Walca ukośnego; to zaś pochodzi z nierówności iego boków, a zatym z nierówności ścian Ostrogranów, z podstawami foremnemi, opisanych lub opisać się mogących na tym Ostrokręgu.

136. *Twierdz. przybrane* Bryłowatości dwòch Ostrogranów z podstawami foremnemi, iednego wpisanego w Ostrokrąg, a drugiego na nim opisanego, różnica może być mnieysza, niż iakakolwiek ilość naznaczona; to iest stosunek ich bryłowatości, może bardziey być przybliżonym do stosunku rowności, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności.

Dowodz:

Dowodz: Różnica tych dwóch Ostrogranów, równa się Ostrogranowi teyże co one wysokości, a którego podstawa byłaby równa różnicy ich podstaw. Aże stosunek tych podstaw, może być bardziey przybliżonym do stosunku równości, niż dany iakikolwiek inny stosunek nie równości, więc też i stosunek tych dwóch Ostrogranów, może się zbliżyć do stosunku równości bardziey niż inny dany iakikolwiek stosunek nie równości. Zamieniwszy różnicę dwóch Ostrogranów, na trzeci Ostrogran teyże co one wysokości, można będzie wpisać i opisać podstawie Ostrokręgu dwa Wielokąty, z równą liczbą boków, takie, którychby rożnica mnieysza była od podstawy tego trzeciego Ostrogranu, a tym bardziey ieden z Ostrogranów. wystawionych na tych Wielokątach, równey z Ostrokręgiem wysokości, mniey się różnić będzie od Ostrokręgu, niż iakąkolwiek ilością naznaczoną.

137. *Twierdz.* 5. Bryłowatość iakiegokolwiek Ostrokręgu, iest trzecią częścią bryłowatości Walca równey z Ostrokręgiem podstawy i wysokości.

Dowodz: Ostrograny i Graniastosłupy *iednoimienne* (eiusdem nominis) wpisane,

lub

lub opiſane, pierwſze na Oſtrokręgu,a drugie na Walcu, iednakiey z niemi wyſokości, ſą trzecią częścią pierwſze względem drugich. Aże te Oſtrograny i Graniaſtoſłupy mogą ſię różnić pierwſze od Oſtrokręgu, drugie od Walca, na którym ſą nap. opiſane, mniey niż iakąkolwiek daną ilością; więc (podług tego, co ſię powiedziało o ſpoſobie wyczerpania) Oſtrokrąg ieſt też trzecią częścią Walca.

138. *Wnioſek.* Cokolwiek mowiliśmy o porównywaniu Walców, zawiſłym od ich wyſokości, i podſtaw, można to wſzyſtko i do Oſtrokręgów przyſtoſować, które trzecią ich ſą częścią; podobnie iakośmy i to co ſię mówiło o porownywaniu Graniaſtoſłupów, do Oſtrogranów przyſtoſowali. J tak.

1. Oſtrokręgi, których podſtawy ſą równe, maią ſię do ſiebie, iak ich wyſokości.

2. Oſtrokręgi, których wyſokości ſą równe, maią ſię do ſiebie, iak ich podſtawy.

3. Oſtrokręgi, których bryłowatości ſą równe, maią podſtawy w ſtoſunku odwrotnym ich wyſokości.

4. Ostrokręgi, ktòrych podstawy maią się do siebie, w stosunku odwrotnym ich wysokości, są równe.

5. Stosunek dwóch Ostrokręgòw w liniiach wyrażony, tak się znayduie: zamienia się stosunek podstawy iednego, do podstawy drugiego na stosunek linii do linii; znayduiąc trzecią proporcyonalną do promienia podstawy pierwszego Ostrokręgu, i do promienia podstawy drugiego. Zamienia się także stosunek wysokości pierwszego Ostrokręgu, do wysokości drugiego, na stosunek trzeciey proporcyonalney znalezioney, do czwartey. Stosunek promienia podstawy pierwszego Ostrokręgu, do tey czwartey proporcyonalney, równy będzie stosunkowi pierwszego Ostrokręgu, do drugiego.

6. Wyrażenie liczebne bryłowatości Ostrokręgu, znayduiemy; mnożąc liczbę oznaczaiącą wielkość powierzchni podstawy iego, przez liczbę oznaczaiącą wielkość wysokości, a potym tey liczby rozmnożoney biorąc część trzecią.

Wyznaczenie tedy dokładne bryłowatości Ostrokręgu, zawisło od wyznaczenia

nia dokładnego, iego podſtawy, a zatym od wyproſtowania okręgu koła.

Bryłowatość Oſtrokręgu, rowna ſię bryłowatości iakiegokolwiek Oſtrogranu, równey z Oſtrokręgiem wyſokości i podſtawy.

139. *Twierdz:* 6. Bryłowatość Oſtrokręgu proſtego, równa ſię bryłowatości Oſtrokręgu innego, którego powierzchnia podſtawy byłaby równa, powierzchni całey Oſtrokręgu proſtego, a wyſokość, równa promieniowi koła wpiſanego w Tróykąt równoramienny wyrażaiący przecięcie Oſtrokręgu proſtego od płaſzczyzny przez oś iego przechodzącey.

Niech będzie ASB przecięcie Oſtrokręgu proſtego, od płaſzczyzny przez oś iego przechodzącey.

Tab. V. Fig: 6. Niech będzie SC proſtopadła do AB, wyſokością, czyli oſią tego Oſtrokręgu. Podzielmy ieden z kątów przy podſtawie AB, nap: kąt A, na dwie równe części, przez linią AD, i prowadźmy ią aż do punktu D, proſtopadłey SC; od tegoż punktu D, niech idzie proſtopadła

DE

DE do SA. Liniie równe DC, DE, będą promieniami, koła wpisanego w Tròykąt przechodzący przez oś Ostrokręgu.

Powierzchnia podstawy Ostrokręgu, tak się ma do iego powierzchni krzywey, iak AC, do AS; a zatym powierzchnia podstawy, tak się mieć będzie do całey powierzchni Ostrogręgu, iak AC do AC+AS, albo iak AC^2 do AC (AC+AS); więc powierzchnia cała Ostrokręgu równa się kołu maiącemu za promień średnią geometryczną między promieniem AC podstawy Ostrogręgu, i summą z tego promienia i z boku Ostrokręgu. Aże liniia AD, dzieli kąt CAS na dwie równe części więc AS : AC = SD : CD; i AS+AC : AC = SD+CD : CD; a nakoniec (AS+AC)AC : AC^2 = SC : CD.

Więc Ostrokrąg maiący za promień podstawy, średnią geometryczną między AC, i AC+AS, a za wysokość liniią CD, miałby powierzchnią swoię, do powierzchni Ostrokręgu podanego, w stosunku odwrotnym wysokości; a zatym te dwa Ostrokręgi byłyby równe. Że zaś pod-

 stawa

ſtawa pierwſzego Oſtrokręgu ieſt równa całey powierzchni Oſtrokręgu podanego; więc bryłowatość Oſtrokręgu proſtego, równa ſię bryłowatości Oſtrokręgu innego, maiącego podſtawę równą całey proſtego Oſtrokręgu powierzchni, a wyſokość równą promieniowi koła wpiſanego w Tróykąt, który ieſt przecięciem tego Oſtrokręgu od płaſzczyzny przechodzącey przez oś iego.

ROZDZIAŁ IX.

O Kuli.

140. DEfin: Niechby Połkole obracało ſię około ſwoiey średnicy. Okrąg iego przebiegnie, tym ſwoim obrotem powierzchnią krzywą, którą nazwiemy *Powierzchnią kuliſtą* (ſuperficies ſpherica); całe zaś połkole obiegnie mieyſce tą powierzchnią krzywą zakończone, które ſię nazywa *Kulą* (Sphera albo Globus).

Podczas tego obrotu, każdy punkt okręgu połkola, w iednakowey zawſze byłby od iego środka odległości; a zatym i każdy punkt powierzchni kuliſtey, w iednakowey też będzie odległości od tego środka.

Kula

Kula więc ieſt bryłą zakończoną przez powierzchnią krzywą, ktòrey wſzyſtkie punkta iednakowo ſą odległe od pewnego punktu nazwanego *środkiem.*

Odległość środka od punktu ktòregokolwiek powierzchni kuli, nazywa ſię *promieniem.* Liniia każda przechodząca przez środek kuli, a po obydwóch ſtronach kończąca ſię na iey powierzchni, nazywa ſię średnicą, i dwa razy ieſt większa od promienia. Ta zaś średnica, około którey obracaiąc ſię połkole, zrobiło kulę nazywa ſię *Oſią* kuli.

Gdybyśmy przecieli kulę płaſzczyzną przechodzącą przez iey środek, wſzyſtkie punkta przecięcia powierzchni kuliſtey, przez tę płaſzczyznę, byłyby iednakowo odległe od środka kuli, który na tymże ieſt przecięciu.

Więc takie przecięcie ieſt kołem maiącym za promień, promień kuli.

Przecięcie kuli od płaſzczyzny, która przez iey środek przechodzi, nazywa ſię *wielkim kołem kuli.*

Dwa takie koła przecinaią ſię, iedno z drugim na dwie części równe.

 Jakoż

Jakoż ſpolne ich przecięcie przechodzi, przez środek kuli, a zatym i przez środek tak iednego, iak i drugiego koła; więc ieſt średnicą obydwòch. Aże średnica przecina koło na dwie rówue części, więc i dwa koła wielkie kuli przecinaią ſię na dwie części ròwne.

Gdyby kula przecięta była płaſzczyzną nie przechodzącą przez iey środek, ale proſtopadłą do oſi iey obrotu, przecięcie to kuli byłoby kołem od ſpolnego przecięcia tey płaſzczyzny z płaſzczyzną połkóla, nakreślonym, pod czas obrotu tegoż połkola tworzącego kulę.

Ze zaś można ſobie wyſtawić w myśli, kulę daną, iakoby utworzoną przez obrot którego kolwiek połkola wielkiego, około iego średnicy, i kula z tego obrotu powſtała, iednakowey zawſze ieſt wielkości; więc gdziekolwiek przetniemy kulę płaſzczyzną, wſzędzie przecięcie iey, będzie kołem; ponieważ można wziąść za oś kuli, tę iey średnicę, która do tey płaſzczyzny ieſt proſtopadłą.

Przecięcie kuli od płaſzczyzny nie przechodzącey przez iey środek, nazywa ſię *małym kołem*.

Gdy

Gdy przez koniec promienia kuli, przechodzi płaſzczyzna proſtopadła do tego promienia, wſzyſtkie inne punkta tey płaſzczyzny będą za kulą.

Jakoż odległość któregokolwiek innego punktu tey płaſzczyzny, od środka kuli, ieſt przeciwproſtokątną Tróykąta proſtokątnego, który ma promień, za iedno ramie kąta proſtego, a za drugie, odległość tego punktu, od końca promienia. Wſzyſtkie tedy inne punkta tey płaſzczyzny ſą pośrodka odległe większą ilością, niżeli ieſt promień, a zatym ſą za kulą.

O płaſzczyznie, nie maiącey ani mieć mogącey więcey nad ieden punkt ſpolny z kulą, mówi ſię, iż ſię kuli *dotyka*. Ta zaś płaſzczyzna powinna być proſtopadłą do promienia, poprowadzonego do punktu dotknięcia.

Przez punkt dotknięcia pociągnąwſzy na tey płaſzyznie iakąkolwiek liniią proſtą, ta będzie proſtopadłą do tego promienia, który do punktu dotknięcia byłby poprowadzony; a zatym liniia ta, będzie ſtyczną z tym kołem, któreby było prze-

cięciem

cięciem kuli od płaszczyzny przechodzącey przez tę liniią, i przez ten promień.

Jakośmy się zatrudniali wyżey około Walcow, i Ostrokręgow prostych, tak teraz zatrudniać się będziemy około powierzchni i bryłowatości kuli, i iey części rożnych.

141. *Twierdz. przybrane.* Niech będzie łuk koła, przez ktorego punkt średni poprowadziliśmy styczną, aż do iey zeyścia się z obydwoch stron, z promieniami przez końce tego łuku przeciągnionemi.

Tak iednę, iak i drugą połowę tego łuku, podzielmy na dwie części rowne i przez punkta podziału, poprowadźmy znowu dwie styczne aż do ich zeyścia się z promieniami przeciągnionemi przez końce tych połow.

Część promienia przeciągnionego, zawarta między okręgiem, i pierwszą styczną, więcey niż dwa razy większa iest od części zawartey między okręgiem, i iedną z drugich dwoch stycznych.

Tab. VI. Fig. 1. Niech będzie ADB, łuk koła, przez ktorego punkt średni D, poprowadzona iest stycz-

na

na ſpotykaiąca w punktach E, i *e*; promienie CB, CA przedłużone. Przez średnie punkta F, i *f*, łukow: BD, AD, poprowadźmy ſtyczne: GH, Gh, ktòre ſpotykaią w punktach: G, H, h, promienie przechodzące przez końce łukòw: BD, AD.

Trzeba dowieść, iż liniia BE, więcey niż dwa razy ieſt większa od linii BH.

Niech liniia CF, ſpotyka w pukcie L, liniią Ee; Tròykąty: CDL, CFG, mogą przyſtać do ſiebie, więc linie: DG, albo BH, i FL, ſą rowne.

Poprowadźmy cieńciwę BD, ktòrą liniia CL ſpotyka w punkcie I, i BM ròwnoodległą od CL.

Tròykąty proſtokątne: BDM, JDL, ſą do ſiebie podobne; a że BD dwa razy ieſt większa od DI, więc też i BM, dwa razy większa będzie od JL; a zatym BM, więcey niż dwa razy większa ieſt od FL albo BH. Że zaś w Tròykącie EBM, kąt M, ieſt roztwarty, a przeto liniia BE, większa od linii BM; więc tym bardziey liniia BE, więcey niż dwa razy większa ieſt od linii BH.

142.

142. *Wniosek* 1. Niech będzie promień CN, prostopadły do promienia CA. Od punktów: E,H,B, spuśćmy prostopadłe: EO, HP, BQ do promienia CN; stosunek liniy: EB, HB, równy będzie stosunkowi liniy OQ, PQ. Aże EB więcey niż dwa razy iest większa od BH, więc i OQ więcey niż dwa razy większa też będzie od PQ.

143. *Wniosek* 2. Gdy daley dzielić będziemy łuk AB, na części równe; 4,8,16, 32, i t. d. i przez punkta średnie podziałow, pociągniemy styczne, aż do ich zeyścia się z promieniami przechodzącemi przez końce każdego w szczegulności podziału; gdy nadto, od punktu, w którym ostatnia styczna spotyka promień przedłużony CE, spuściemy prostopadłą EO, na promień CN; rożnica między odległością spodku O, tey prostopadłey, od środka C, i odległością od tegoż środka C, spodku Q, prostopadłey BQ, z końca B, łuku AB spuszczoney, ta mowię różnica zmnieysza się więcey niż połową za każdym następuiącym podziałem, a zatym może się na ostatek stać mnieyszą od iakieykolwiek ilości naznaczoney.

144, *Twierdz:*

144. *Twierdz.* 1. Niech będzie łuk koła, mnieyſzy od czwartey części okręgu iego, i niech ten łuk obraca ſię około promienia proſtopadłego do drugiego promienia, który przechodzi przez ieden koniec tego łuku. Z drugiego iego końca ſpuśćmy proſtopadłą na pierwſzy promień, to ieſt na oś obrotu łuku.

Część powierzchni kuli utworzona, tym około oſi obrotem łuku, równa ſię Proſtokątowi, maiącemu zapodſtawę liniią równą całemu okręgowi, którego ten łuk ieſt częścią; a za wyſokość, liniią równą odległości środka, od ſpodku proſtopadłey ſpuſzczoney na oś obrotu: powierzchnia zaś cała kuli cztery razy ieſt więkſza, niżeli powierzchnia wielkiego koła, teyże kuli.

Niech będzie łuk ADB; niech promień CN, będzie proſtopadłym do promienia CA, przechodzącego przez ieden koniec tego łuku. *Tab. VI Fig:* 1.

Poprowadźmy BQ, proſtopadłą do CN. Niech koła czwarta część ABN, obraca ſię około promienia CN, iak około oſi ſwoiey. Powierzchnia krzywa, obrotem łuku AB naznaczona, równa ſię Proſto-

kątowi

kątowi, któryby miał za wyſokość, liniią CQ, a za podſtawę, liniią równą okręgowi, którego CA ieſt promieniem.

Dowodz: Niech ſtyczna Ee, przechodzi przez średni punkt D. łuku AB, i niech ſpotyka w punktach E, i *e*, promienie przechodzące przez dwa końce tego łuku.

Dzielmy daley łuk AB, na części równe: 4,8,16 32, i t. d. a od punktu, w którym oſtatnia ſtyczna ſpotyka promień CB, przy każdym naſtępuiącym podziale, ſpuſzczaymy proſtopadłą na promień CN. Rożnica między odległością środka, od ſpodku tey proſtopadłey, a liniią CQ, zmnieyſzać ſię będzie więcey niż połową, za każdym naſtępnym podziałem; więc różnica ta, może ſię naoſtatek ſtać mnieyſzą, niż iakakolwiek ilość naznaczona.

Podczas obrotu łuku AB, około linii CN, każda ſtyczna kreśli powierzchnią krzywą Oſtrokręgu ściętego równaiącą ſię Proſtokątowi maiącemu za podſtawę, liniią równą okręgowi, którego promieniem, ieſt CN, a za wyſokość odległość dwóch proſtopadłych ſpuſzczonych

nych na oś, od końcow tey ftyczney; a zatym fumma powierzchni krzywych, zrobionych od wfzyftkich tych ftycznych, równa fię Proftokątowi, maiącemu tę famę podftawę a wyfokość równą fummie wfzyftkich tych wyfokości; to ieft równą odległości środka, od fpodku proftopadłey fpufzczoney na oś z punktu tego, gdzie oftatnia ftyczna fpotyką promień CB. Może tedy rożnica fummy powierzchni krzywych Oftrokręgu zrobionych obrotem wfzyftkich ftycznych, mnieyfza być od Proftokąta z taką iak fię wyżey powiedziało podftawą a z wyfokością CQ, niżeli iakakolwiek ilość naznaczona. Summa zaś tych wfzyftkich powierzchni krzywych, więkfza ieft zawfze od powierzchni utworzoney obrotem łuku AB; więc (podług tego, co fię powiedziało o fpofobie wyczerpania, i w Rozdziale o kwadrowaniu koła) powierzchnia krzywa utworzona obrotem łuku AB, równa fię Proftokątowi, maiącemu za podftawę, okrąg, ktorego promieniem ieft CA, a za wyfokość, odległość CQ, środka C, od fpodku Q, proftopadłey fpufzczoney na oś z końca B, tego łuku.

Mowiąc w fzczegulności; powierzchnia Połkuli (Hemispherium) utworzoney obrobrotem czwartey części koła, ABN, równa się Prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg, ktòrego, CA iest promieniem, a za wysokość, promień CN.

A zatym powierzchnia krzywa, utworzona obrotem łuku BN, ròwna się Prostokątowi maiącemu wysokość NQ, a podstawę ròwną okręgowi wielkiego koła kuli.

Powierzchnia także całey kuli, ròwna się Prostokątowi maiącemu za wysokość średnicę kuli, a za podstawę, okrąg wielkiego iey koła, Aże powierzchnia wielkiego koła ròwna się Prostokątowi maiącemu za wysokość połowę promienia, albo czwartą część średnicy, a okrąg tego koła, za podstawę.

Więc powierzchnia kuli cztery razy iest większa od powierzchni wielkiego iey koła, ktòrego promień ròwna się średnicy kuli.

145. Idzie zatym, że powierzchnia kuli, tak się ma do powierzchni kwadratu iey średnicy, iak powierzchnia koła iakiegokolwiek, cztery razy wzięta, do kwadratu średnicy tegoż koła: Aże powierz-

wierzchnia koła, ieſt do powierzchni kwadratu średnicy iego, iak okrąg koła do iey średnicy cztery razy wziętey iako ſię w Rozdziale XIII. Części I. dowiodło) więc powierzchnia kuli tak ſię ma do powierzchni kwadratu iey średnicy, iak cztery razy okrąg koła, do średnicy iego cztery też razy wziętey, to ieſt) iak okrąg koła, do ſwoiey średnicy. Więc wyznaczenie dokładne powierzchni kuli, zawiſło od ſkwadrowania koła, i od wyproſtowania okręgu iego.

146. Powierzchnia cała kuli, tak ſię ma do powierzchni nakreśloney obrotem łuku NB, iak ſię ma średnica kuli, do linii NQ, albo iak kwadrat tey średnicy, do Proſtokąta z linii NQ, i z średnicy; albo nakoniec, iak kwadrat średnicy, do kwadratu linii NB; a zatym, iak koło, ktòreby miało za promień tę średnicę, do koła, ktòreby miało za promień linią NB; aże powierzchnia kuli równa ſię powierzchni pierwſzego koła; więc powierzchnia nakreślona obrotem łuku NB, równa ſię powierzchni drugiego koła.

Niech będzie NBFA, połkole tworzące obrotem ſwoim kulę; niech będzie; NEDA *Tab. VI. Fig. 2.*

Pro-

Prostokąt, którego podstawą iest średnica tego połkola, a wysokością promień iego. Podczas obrotu połkola, ten Prostokąt utworzy Walec prosty, którego powierzchnia krzywa zrobiona przez obrot linii ED, równać się będzie Prostokątowi maiącemu za wysokość średnicę DE, albo AN, a za podstawę okrąg podstawy tego Walca, a zatym ta powierzchnia krzywa, równa się powierzchni kuli.

147. Podobnie się okaże, iż poprowadziwszy liniią QBP, prostopadłą do osi, powierzchnia krzywa należąca do Walca, a zrobiona przez obrot linii EP, rowna iest powierzchni należącey do kuli, a zrobioney przez obrot łuku NB.

148. Walec utworzony obrotem Prostokąta ADEN, miałby wysokość równą średnicy podstawy swoiey; dotykałyby się w punktach: A, i N, kuli utworzoney obrotem połkola AFBN; dotykałby się iey także w okręgu, którego promieniem byłby promień CF kuli.

O takim Walcu mówi się, iż iest na kuli opisanym. Nazywa się on także i Walcem Archimedesa, od nazwiska tego Matematyka, który pierwszy znalazł ró-

wność

wność powierzchni kuli z powierzchnią krzywą tego Walca, iako też i stosunek ich bryłowatości.

149. Powierzchnia iedney z dwóch podstaw tego Walca, równa się Prostokątowi z okręgu tey podstawy, i z połowy iey promienia; a zatym powierzchnia obydwóch razem tych podstaw, równa się Prostokątowi z okręgu iedney podstawy, i z iey promienia. Aże powierzchnia krzywa Walca, równa iest Prostokątowi z okręgu podstawy iego, i z średnicy teyże podstawy, albo z promienia dwa razy wziętego; więc powierzchnia cała Walca, równa iest Prostokątowi z okręgu iego podstawy, i z promienia trzy razy wziętego; a zatym powierzchnia krzywa tego Walca iest $\frac{2}{3}$ powierzchni iego całey; a przeto i powierzchnia kuli iest też $\frac{2}{3}$ powierzchni całey Walca na niey opisanego.

150. *Uwaga.* To, co się dotąd powiedziało, trzeba przystosować do niektórych przykładów liczebnych podobnych następuiącemu.

Przykł: Jakaż iest wielkość powierzchni Ziemi w milach kwadratowych Niemieckich, rachuiąc na stopień, mil 15?

Niech będą dwa koła wielkie Ziemi, iedno proſtopadłe do drugiego. Podzielmy okrąg iednego z tych kół, nap: co dzieſięć, albo co pięć ſtopniów, i przez punkta podziału niech przechodzą płaſzczyzny równoodległe od koła drugiego. Trzeba znaleść wielkość powierzchni zawartych między dwoma naybliżſzemi od ſiebie podſtawami.

Wſzczegulności zaś, ieżeli uczniowie maią wiadomość początkową Geografii, mogą wyrachować dwie powierzchnie zawarte między kołami, z których iedno odległe ieſt od *Równika* (æquator), na 23° $\frac{1}{2}$, a drugie od *Biegónu* (polus) także na 23° $\frac{1}{2}$.

Tob. VI Fig. 2 Niech będzie CF promieniem iednego koła wielkiego; niech NBF. wyraża czwartą część drugiego koła do niego proſtopadłego; niech BQ, bq, będą przecięciami tego koła proſtopadłego i dwóch płaſzczyzn równoodległych od koła, pierwſzego.

Powierzchnia krzywa połkuli, tak ſię ma do powierzchni części zawartey między płaſzczyznami CF i BQ, iak ſię ma promień kuli, do linii CQ, która ieſt

wſtawą

wſtawą łuku BF. Podobnie i powierzchnia krzywa połkuli, tak ſię ma do powierzchni części zawartey między płaſzczyznami: CF, i bq, iak wſtawa cała, czyli promień do wſtawy łuku bF, to ieſt do linii Cq. Można więc wyrachować te części powierzchni półkuli, a zatym i ich różnicę, to ieſt: część powierzchni zawartey między płaſzyznami: BQ, i *bq*.

151. *Twierdz.* 2. Bryłowatość kuli równa ſię $\frac{2}{3}$ bryłowatości Walca na tey kuli opiſanego.

Niech będzie ACBMA czwarta część koła, tworząca Połkulę obrotem ſwoim około promienia CB. Niech będzie CABD kwadrat opiſany na tey czwartey części koła. Ten kwadrat obracaiąc ſię około CB, utworzy Walec opiſany na połkuli, który będzie połową Walca opiſanego na całey kuli. Trzeba dowieść, iż Połkula utworzona obrotem czwartey części koła AMBC równa ſię $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem kwadratu ACBD. *Tab. VI. Fig. 3.*

Poprowadźmy przekątną CD; Tròykąt BCD utworzy Oſtrokrąg, którego podſtawa wykreślona będzie promieniem BD, a za wyſokość tego Oſtrokręgu będzie BC; to ieſt będzie ten Oſtrokrąg równey z Walcem podſtawy, i wyſokości.

Od dwóch ktòrychkolwiek punktów nap: P, i *p* Oſi CB wyciągniniymy proſtopadłe do niey linije: PQ, pq; te przetną okrąg w M, i *m*, a liniią CD w L, i *l*; nakreślmy nadto, linije: MN, *mn*, LO, *lo*, równoodległe od oſi. Kwadrat promienia CM, równa ſię ſummie kwadratów z PM, i CP; aże linija PQ równa ieſt promieniowi, (tak iako BD, CA i CB ſą równe) i CP równa PL; więc kwadrat z PQ, ròwna ſię ſummie kwadratòw z PM, i z PL.

Ze zaś Walce utworżone obrotem Proſtokątów Pq, PN, PO, maiących iednakie wyſokości, ſą do ſiebie, iak ich podſtawy, albo iak kwadraty promięniòw tychże podſtaw; więc pierwſzy z tych Walcow będzie równy ſummie dwoch innych. Podobnym ſpoſobem okazać można, że Walec Pq równa ſię ſummie Walców utworzonych obrotem Proſtokątów P*m*, i P*l*.

Tako·

Takowe dowodzenie ma mieyſce chociaż nie od punktów P, i p, ale od ktòrychkolwiek innych będą wywiedzione proſtopadłe do oſi CB; a zatym podzieliwſzy oś, na iakąkolwiek liczbę części równych, a od każdego punktu podziału wyciągnąwſzy proſtopadłe przecinaiące tak okrąg iako i liniią CD; Summa wſzyſtkich Walców ſkładaiących Walec ADB, równać ſię będzie ſummie wſzyſtkich Walcow wpiſanych w Półkulę, wraz z ſummą wſzyſtkich Walców opiſanych na Oſtrokręgu, albo ſummie wſzyſtkich Walców opiſanych na Półkuli, wraz z ſummą wſzyſtkich Walców w Oſtrokrąg wpiſanych. Aże ſumma wſzyſtkich Walcow wpiſanych lub opiſanych na Pòłkuli, może ſię mnieyſzą ilością różnić od teyże Pòłkuli, niż iakakolwiek ilość naznaczona; a wtedy i ſumma wſzyſtkich Walców wpiſanych, lub opiſanych Oſtrokręgowi, różnić ſię też od tego Oſtrokręgu będzie mnieyſzą ilością, niż ieſt ta ilość dana.

Więc (podług tego, co ſię powiedziało o ſpoſobie wyczerpania;) Walec utworzony obrotem kwadratu CABD równa ſię ſummie z Pòłkuli utworzoney obrotem czwartey części koła, i z Oſtrokręgu utworzonego obrotem Tróykąta BCD.

Aże Ostrokrąg utworzony obrotem Tróykąta BC, iest $\frac{1}{3}$ Walca; więc Pòłkula utworzona obrotem czwartey części koła AMBC, iest $\frac{2}{3}$ Walca.

A zatym kula, ktòraby utworzyła się obrotem Półkola, byłaby też $\frac{2}{3}$ Walca opisanego na tey kuli, a utworzonego obrotem Prostokąta opisanego na Półkolu tworzącym kulę.

152. *Wniosek* 1. Stosunek bryłowatości kuli do bryłowatości Walca opisanego, ten sam iest co, i stosunek powierzchni kuli, do powierzchni całey Walca opisanego; (149).

153. *Wniosek* 2. Bryłowatość kuli, rowna się bryłowatości Ostrokręgu, któryby miał za podstawę, koło równe powierzchni kuli, a za wysokość, promień teyże kuli. Jakoż ten Ostrokrąg maiąc podstawę cztery razy większą od podstawy Walca na kuli opisanego, byłby cztery razy większy od Ostrokręgu innego równey z nim wysokości, a maiącego podstawę rowną z Walcem. Aże ten drugi Ostrokrąg, gdyby miał połowę tylko wysokości Walca, byłby połową Ostrokręgu maiącego rowną z Walcem wyso-

wyſokość i podſtawę, a zatym byłby połową tego Oſtrokręgu, który ieſt $\frac{1}{3}$ Walca; więc Oſtrokrąg maiący rowną z Walcem podſtawę, a wyſokość rowną promieniowi kuli, ieſt $\frac{1}{6}$ tego Walca; a zatym Oſtrokrąg maiący za wyſokość promień kuli, a podſtawę cztery razy więkſzą od podſtawy Walca, byłby $\frac{4}{6}$ albo $\frac{2}{3}$ Walca. Że zaś i kula ieſt $\frac{2}{3}$ tegoż Walca, więc kula rowna ſię temu Oſtrokręgowi.

Można to ſamo ieſzcze i w ten ſpoſob okazać:

Niech będzie iakikolwiek *Wielościan* (Polyedrum) ktorego wſzyſtkie ściany dotykaią ſię kuli: uważaiąc każdą z tych ścian iak podſtawę Oſtrogranu maiącego ſwoy wierzchołek w środku Wielościanu; bryłowatość tego Wielościanu, rownać ſię będzie bryłowatości iednego takiego Oſtrogranu, ktoryby miał za wyſokość promień kuli, a za podſtawę ſummę podſtaw, Oſtrogranow, na ktore podzielony był ten Wielościan; to ieſt powierzchnią całą tego Wielościanu.

To podanie zawſze ieſt prawdziwe, iakażkolwiek będzie liczba ścian tego

Wielościanu więc (podług tego, co ſię mowiło o ſpoſobie wyczerpania,) możnaby łatwo dowieść, że też i do kuli wſzczegulności przyſtoſowane to podanie, ieſt prawdziwym, a zatym że kula, rowna ſię Oſtrokręgowi, ktoryby miał za wyſokość, iey promień, a za podſtawę, całą iey powierzchnią.

154. *Wnioſek* 3. Wycinek kuli utworzoney obrotem wycinka kołowego BCM, rowny ieſt Oſtrokręgowi maiącemu za wyſokość, promień tey kuli, a zapodſtawę, koło, rowne powierzchni kuliſtey, utworzoney obrotem łuku BM; to ieſt koło, ktorego promieniem byłaby cieńciwa BM; a zatym bryłowatość tego wycinka, tak ſię ma do bryłowatości kuli, iak powierzchnia tego wycinka, do powierzchni kuli; albo iak wyſokość BP, do średnicy kuli.

155. *Wnioſek* 4. Taż bryłowatość wycinka kuli, utworzonego obrotem wycinka koła BCM, ieſt $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem Proſtokąta BPQD. Jakoż powierzchnia tego wycinka, tak ſię ma do powierzchni kuli, iak BP, do średnicy kuli albo iak Walec utworzony obrotem Proſtokąta BPQD do Walca opiſanego

go na kuli. Aże kula iest $\frac{2}{3}$ Walca na niey opisanego, więc i wycinek kuli, utworzony obrotem wycinka koła BCM, iest też $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem Prostokąta BPQD.

156. *Wniosek* 5. Podobnie, i część kuli utworzona obrotem wycinka ACM iest $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem Prostokąta CAQP. Aże część kuli (którą to część nazwać można *klocem kulistym* (Truncus sphæricus) utworzony obrotem części kołowey ACPM, iest summą z wycinka kulistego utworzonego obrotem wycinką kołowego ACM. i z Ostrokręgu utworzonego obrotem Tròykąta CPM; więc bryłowatość tego kloca kulistego, równa się summie z $\frac{2}{3}$ Walca teyże z nim wysokości, któryby miał za podstawę, koło wielkie kuli, i z $\frac{1}{3}$ Walca iednakiey także wysokości, a którego podstawa byłaby ròwna drugiemu kołu kloc ten kończącemu; a zatym bryłowatość tego kloca tak się ma do bryłowatości Walca utworzonego obrotem Prostokąta CAQP, iak $\frac{2}{3}$ CA^2 + $\frac{1}{3}$ MP^2 do CA^2.

157. *Wniosek* 6. Aby znaleść odcinek kuli utworzoney obrotem odcinka kołowego BMP; uważaymy sobie ten odcinek

nek kulisty, iak różnicę między Połkulą utworzoną obrotem czwartey części kołowey ABC, a klocem kulistym utworzonym przez obrot odcinka CAMP; albo też iak rożnicę wycinka kulistego utworzonego obrotem wycinka BDM; od Ostrokręgu utworzonego obrotem Tròykąta CPM; albo nakoniec, iak rożnicę Walca utworzonego obrotem Prostokąta BPQD, od Ostrokręgu ściętego, utworzonego obrotem Czworokąta BDLP.

ROZDZIAŁ X.

O Bryłach podobnych.

158. DWie Bryły samemi tylko płaszczystemi powierzchniami zakończone, i ktòrych wszystkie kąty bryłowe odpowiadaiące sobie mogą przystać do siebie, a ściany ich także odpowiadaiące są podobne; te mowię dwie Bryły nie ròżnią się chyba samą tylko wielkością, i iedna wzorem iest drugiey. Tak nap: dwa Sześciany, z ktòrych ieden ma bok długi na poł stopy, a drugi, na cal ieden, rożnią się samą tylko wielkością. Takie Bryły nazywaią się podobnemi.

Przy-

Przykłady. Dwa Równoległościany prostokątne są podobne, gdy ich podstawy i ściany są podobne iedne względem drugich,

Dwa Graniastosłupy proste, są podobne, gdy podobne są ich podstawy, i gdy wysokość ich proporcyonalna iednemu z boków, tychże podstaw.

Dwa Ostrograny, maiące kąt bryłowaty spolny w wierzchołku podobne będą, gdy podstawy ich są równoodległe.

159. *Uwaga*. Gdy dwie Figury prostokreślne, są podobne; wziąwszy punkt iakikolwiek w iedney z tych figur, i poprowadziwszy od tego punktu linije do wszystkich wierzchołków tey figury; można będzie znaleść i w drugiey figurze punkt podobnie pierwszemu położony; od którego ciągnąc linije do każdego tey figury wierzchołka, podzielemy ią na Tróykąty podobne względem Tróykątów, na które podzielona była pierwsza figura. Podobnie też:

160. *Twierdz*: 1. Wziąwszy w Bryle zakończoney powierzchniami płaszczystemi, punkt iakikolwiek za wierzchołek tylu Ostrogranów, ile ta Bryła ma scian, biorąc też ściany za podstawy; można znaleść i w drugiey Bryle podobney, punkt podobnie pierwszemu położony, który wziąwszy także za wierzchołek, tyluż

tyluż co i w pierwſzey Bryle Oſtrogra, nów, wſzyſtkie te Oſtroſtrógrany będą podobne względem Oſtrogranów pierwſzey Bryły.

Przykład. Weźmy środek Sześcianu za wierzchołek ſześciu Oſtrogranów, maiących za podſtawy, ściany tego Sześcianu; gdy w innym iakimkolwiek Sześkianie, weźmiemy także środek za wierzchołek ſześciu Oſtogranów maiących za podſtawy, ściany tego drugiego Sześcianu; te drugie Oſtrograny, będą podobne względem pierwſzych.

Toż mówić i o innych Bryłach foremnych.

Natym podaniu zaſadza ſię cała Nauka o Bryłach podobnych; należy więc nad wyłuſzczeniem iey nieco zabawić ſię.

Wybrawſzy iakikolwiek punkt w Bryle za wierzchołek Oſtrogranów maiących ściany tey Bryły, za podſtawy, i na te Oſtrograny, Bryłę podzieliwſzy, ſpuśćmy od tego punktu proſtopadłą do iedney z ścian tey Bryły; a na ścianie odpowiadaiącey w drugiey Bryle, weźmy punkt podobnie na tey ścianie położony, iaki ſpodek proſtopadłey ſpuſzczoney na ścianę pierwſzey

Bryły

Bryły; od tego punktu, na ścianie drugiey Bryły położonego, wyprowadźmy prostopadłą do tey ściany, tak wysoką aby stosunek iey do pierwszey prostopadłey równał się stosunkowi dwóch krawędzi, odpowiadaiących sobie w obydwóch Bryłach. Wierzch tey drugiey prostopadłey weźmy za wierzchołek wszystkich Ostrogranów, na które, tę drugą Bryłę dzielić mamy. Ostrograny tey drugiey bryły, będą podobne względem Ostrogranów, na które podzielona pierwsza Bryła.

Dowodz: Odległości dwóch punktów służących za wierzchołki Ostrogranów, od wierzchołków odpowiadaiących sobie w ścianach, do których prostopadłe są ciągnione, te mowię odległości, są przeciwprostkątnemi Trójkątów prostokątnych podobnych, maiących za boki te prostopadłe, i odległości ich srodków od wierzchołków kątów ścian tychże. Więc wszystkie ściany tych dwóch Ostrogranów, odpowiadaiące sobie boki, maią proporcyonalne, to iest maią ie w stosunku dwóch krawędzi odpowadaiących sobie w dwóch Bryłach; a zatym wszystkie te ściany, są podobne, i wszystkie ich kąty są równe iedne względem drugich, a przeto i kąty bryłowe które się z nich składaią, mogą przystać do siebie; są więc te

dwa

dwa Oſtrograny podobne. Pochyłości też ścian Oſtrogranòw do płaſzczyzn podſtaw ſą ròwne iedne względem drugich; aże także ròwne ſą pochyłości, tych podſtaw do płaſzczyzn ścian tych odpowiadaiących ſobie w Bryłach, ktòre ściany ſpolną krawędź maią z podſtawami tych Oſtrogranów, więc i ściany odpowiadaiące ſobie w tych dwoch Oſtrogranach, będą podobnie nachylone do ścian tych odpowiadaiących ſobie w dwoch Bryłach, a które maią ſpolną krawędź z pierwſzemi dwiema ścianami; to ieſt z podſtawami dwóch tych Oſtrogranòw,

Na ścianach dwòch, odpowiadaiących ſobie w tych dwóch pierwſzych Oſtrogranach, ſpuśćmy od ich wierzchołków proſtopadłe do podſtaw tychże dwòch ścian; a od ſpodków tych proſtopadłych poprowadźmy na ścianach odpowiadaiących ſobie w dwòch Bryłach, inne dwie proſtopadłe do tychże dwóch podſtaw, ścian Oſtrogranów. Oprócz tego, na płaſzczyznie przechodzącey przez dwie w obydwòch bryłach ciągnione proſtopadłe, ſpuśćmy do drugich dwòch proſtopadłych, na płaſzczyznach ścian odpowiadaiących ſobie, w Bryłach, od tychże co i pierwſze wierzchołkòw, trzecie dwie proſtopadłe; te oſtatnie proſtopadłe, będą proſtopadłemi do płaſzczyzn

dwoch

dwòch tych ścian odpowiadaiących sobie, na których ciągnione były dwie drugie prostopadłe; Tròykąty zawarte trzema temi prostopadłemi, tak w iedney, iak i w drugiey Bryle, będą ròwnokątne, a zatym i podobne Ażepierwsze dwie prostopadłe ciągnione na płaszczyznach ścian, dwóch pierwszych Ostrogranòw, maiąsię do siebie, iak krawędzie odpowiadaiące sobie w dwòch Bryłach; więc też i odległości wierzchołkòw, tych dwòch Ostrogranòw od drugich dwóch ścian także sobie odpowiadaiących, w tych Bryłach, będą w tymże samym stosunku; i odległości spodków ich, od dwóch krawędzi należących do tych ścian, a odpowiadaiących sobie, w tymże też stosunku będą.

Spodki prostopadłych spuszczonych na dwie ściany odpowiadaiące sobie w pierwszych dwóch Ostrogranach, były podobnie położone na dwòch Brył krawędziach odpowiadaiących sobie, a zatym odległości tych spodkòw od końców odpowiadaiących sobie, tych krawędzi, są do siebie w tymże samym stosunku; a zatym odległości spodków liniy prostopadłych spuszczonych do płaszczyzn drugich dwóch ścian Brył, od końcòw tychże dwóch krawędzi, będą w tym samym stosunku. Więc na tych dwòch ścianach, spodki prostopadłych podobnie

są

ſą położone. Że zaś i wielkości tych proſtopadłych ſą proporcyonalne krawędziom tych dwóch Brył; więc wierzchołki pierwſzych dwóch Oſtrogranów, ſą też podobnie położone względem dwóch ścian drugich, odpowiadaiących ſobie w Bryłach; a zatym i drugie dwa Oſtrograny maiące ſpolny wierzchołek, a te dwie ściany Brył za podſtawy, będą do ſiebie podobne.

Toż mówić i o innych Oſtrogranach odpowiadaiących ſobie, z których ſię te dwie Bryły ſkładaią. (i)

161. *Twierd:* 2. Powierzchnie Brył podobnych, zakończonych ſamemi tylko płaſzczyſtemi powierzchniami, maią ſię

(*i*) *To Twierdzenie, ieſt bardziey długie niż trudne, i łatwo poiąć ie można, maiąc Figurę przed oczema z drewna, lub z papieru zrobioną. Jużby też nawet po tak wielu Geometrycznych ćwiczeniach powinni wprawieni bydź Uczniowie, aby w myśli ſamey umieli ſobie wyſtawić Figurę pomagaiącą do zrozumienia Twierdzenia podanego. a zdatnieyſzą do obiaśnienia iego, niżby była Figura odryſowana w perſpektywie, i przed oczy im ſtawiona.*

ſię do ſiebie, iak kwadraty boków ich odpowiadaiących ſobie, czyli, ſą w ſtoſunku dwumnożnym tychże boków.

Dowodz: Wſzyſtkie ściany dwòch Brył podobnych, po dwie brane ſą ſobie podobne; i tak brane, w iednakowym do ſiebie ſą ſtoſunku, to ieſt w ſtoſunku dwumnożnym, dwòch krawędzi odpowiadaiących ſobie; więc i ſumma wſzyſtkich ścian kończących iednę Bryłę, będzie do ſummy wſzyſtkich ścian kończących drugą Bryłę, w tymże ſamym ſtoſunku.

162. *Twierdz:* 3. Bryłowatości dwòch Brył podobnych, ſą do ſiebie w ſtoſunku ſześciennym dwóch ich krawędzi odpowiadaiących ſobie, czyli, ſą w ſtoſunku tròymnożnym tychże dwóch krawędzi.

1. Widzieliśmy iuż, że ſtoſunek iednego Sześcianu do drugiego, ten ſam ieſt, co i ſtoſunek boku pierwſzego Sześcianu, do czwartey linii ciągło proporcyonalney; która ſię znayduie, ſzukaiąc nayprzod trzeciey ciągło proporcyonalney, do boku Sześcianu pierwſzego, i do boku Sześcianu drugiego; a potym do tychże dwòch bokòw, i do trzeciey pro-

por-

porcyonalney znalezioney, ſzukaiąc czwartey.

Gdyby tedy bok drugiego Sześcianu był dwa razy nap: większy od boku Sześcianu pierwſzego, ta czwarta ciągło proporcyonalna, byłaby ośm razy więkſza od boku Sześcianu pierwſzego, a zatym i Sześcian drugi byłby ośm razy większy od Sześcianu pierwſzego.

2. Niech będą dwa Równoległościany proſtokątne podobne.

Gdy krawędź iedna, iednego z tych Równoległościanów, ieſt nap: dwa razy większa, od krawędzi iedney drugiego Równoległościanu; wſzyſtkie też inne krawędzie pierwſzego Równoległościanu, będą dwa razy większe od krawędzi drugiego. Powierzchnia więc podſtawy pierwſzego Równoległościanu, będzie cztery razy większa, niż powierzchnia podſtawy drugiego. Aże też i wyſokość pierwſzego, dwa razy ieſt większa od wyſokości drugiego; więc bryłowatość pierwſzego ieſt ośm razy większa od bryłowatości drugiego. To rozumowanie przyſtoſować można do wſzyſtkich innych liczebnych przykładów podobnych przytoczonemu.

W ogul-

W ogulności zaś mowiąc: niech będą trzy krawędzie: A,B,C, iednego Równoległościanu prostokątnego; a zaś: *a*,*b*,*c*, krawędzie drugiego Równoległościanu, pierwszemu podobnego; będą te trzy stosunki równe; A : a = C : b = C : c. Liniiom A,i *a*, znaydźmy dwie liniieL,i M, ciągło proporcyonalne; tak aby było A: a = a : L = L : M,

Będzie pierwszy Równoległościan do drugiego, iak A do M.

Jakoż uważaiąc liniie A i *a*, B, i *b*, iak boki podstaw, tych dwóch Równoległościanów, zamieńmy Prostokąt z linii a, i b, na inny, któryby miał za bok ieden, liniią B, a za bok drugi, tę liniią, która wypadnie z proporcyi B : b = a : *x*. Ze zaś stosunek linii B do b, wzięty iest za równy stosunkowi linii A do *a*, więc też będzie A : a = a : x; a zatym ta czwarta proporcyonalna, którey szukamy, będzie w samey rzeczy trzecią proporcyonalną do A, i *a*. Nazwiymy tę trzecią proporcyonalną ; L. Będzie podstawa drugiego Równoległościanu, równa Prostokątowi z B przez L; i ten drugi Równoległościan, będzie równy Równoległościanowi, którýby miał trzy linie B, *c*, L, za krawędzie ; a zatym stosunek iego do

P pier-

pierwszego Równoległościanu, będzie ten sam, co i stosunek Prostokąta z liniy c, i L, do Prostokąta z liniy A, i C.

Zamieńmy Prostokąt z liniy c i L, na inny, któryby miał za bok ieden liniią C, a za bok drugi liniią, która wypadnie z proporcyi $C : c = L : x$. Ze zaś stosunek linii C do c. wzięty iest za równy stosunkowi A do a, a stosunek A do a, zrobiliśmy równy stosunkowi a, do L, więc też będzie $a : L = L : = x$; a zatym ta czwarta proporcyonalna, którey szukamy będzie w samey rzeczy trzecią proporcyonalną do a, i L. Nazwiymy tę trzecią proporcyonalną: M; Prostokąty: $C \times, M$ i $c \times L$. będą równe, Aże się dowiodło iż pierwszy Równoległościan iest do drugiego w stosunku Prostokąta $A \times C$ do Prostokąta $c \times L$; więc też ten pierwszy Rownoległościan będzie do drugiego w stosunku Prostokąta $A \times C$ do Prostokąta $C \times M$, to iest w stosunku A do M.

Ze zaś iest $A : a = a : L = L : M$; więc stosunek pierwszego Równoległościanu do drugiego, równa się stosunkowi linii pierwszey do czwartey, ciągło proporcyonalney; która to pierwsza liniia

służą-

ſłużąca za pierwſzy wyraz proporcyi, powinna być krawędziem iednego z tych Równoległościanów, drugim zaś teyże proporcyi wyrazem, ma być krawędź drugiego Równoległościanu, pierwſzemu odpowiadaiący; tak iak ieſt nap: krawędź A, i *a*.

Ale że też i dwa Sześciany maiące krawędzie A, i *a*, w tymże ſamym byłyby ſtoſunku, więc dwa Równoległościany podobne, maią ſię do ſiebie w ſtoſunku ſześciennym ich krawędzi.

163. *Twierdz: przybrane.* Wyſokości Graniaſtoſłupów podobnych, lub Oſtrogranów podobnych, tak ſię maią do ſiebie, iak ich krawędzie odpowiadaiące ſobie.

Dowodz: Dwóch ścian odpowiadaiących ſobie w dwóch Graniaſtoſłupach podobnych, pochyłości do podſtaw ſą równe; tychże ścian wyſokości, tak ſię maią do ſiebie, iak boki, ſłużące im za podſtawy. Wyſokości tych Graniaſtoſłupów, równe ſą proſtopadłym ſpuſzczonym na ich podſtawy od punktów którychkolwiek na podſtawach przeciwnych, (nap: od punktów na bokach odpowiadaiących ſobie w tychże podſtawach; a zatym te wyſokości Graniaſtoſłupów, będą ſłużyć za iedno ramie kąta proſtego, w dwóch Tróykątach podobnych, które za przeciwproſtokątne, maią wyſokości dwóch ścian odpowiadaiących ſobie. Będą zatym te wyſokości dwóch Graniaſtoſłupów, tak ſię mieć do ſiebie, iak wyſokości dwóch ich ścian odpowiadaiących ſobie; to ieſt: iak krawędzie dwóch tychże Graniaſtoſłupów, odpowiadaiące ſobie. To ſamo rozumowanie przyſtoſować można i do Oſtrogranów,

3. Niech będą dwa iakiekolwiek Graniaſtoſłupy podobne, i te także ſą do ſiebie w ſtoſunku ſześciennym, ich krawędzi odpowiadaiących ſobie.

Rozumowanie Arytmetyczne, któreby mogło ſłużyć za wſtęp do ogulnego dowodzenia, to ſamo ieſt, co i poprzedzadzaiące.

Wyſtawuiąc ſobie podſtawy tych dwóch Graniaſtoſłupów, zamienione na dwa kwadraty równe im co do powierzchni; ponieważ powierzchnie tych dwóch podſtaw, maią ſię do ſiebie, iak kwadraty boków ich, odpowiadaiących ſobie; więc

też

też i powierzchnie kwadratów równych tym podſtawom; mieć ſię do ſiebie będą, iak kwadraty boków odpowiadaiących ſobie, w tychże podſtawach; a zatym i ſtoſunek boków, tych dwóch kwadratów, równy będzie ſtoſunkowi boków odpowiadaiących ſobie w podſtawach, dwóch Graniaſtoſłupów. Aże ten oſtatni ſtoſunek, równa ſię ſtoſunkowi wyſokości dwóch Graniaſtoſłupów; więc Rownoległościany maiące za podſtawy kwadraty, równe podſtawom Graniaſtoſłupów, i wyſokości równe wyſokościom Graniaſtoſłupów, byłyby do ſiebie podobne; a zatym te dwa Równoległościany, takby ſię do ſiebie miały, iak Sześciany ich krawędzi, albo iak Sześciany krawędzi odpowiadaiących ſobie w Graniaſtoſłupach. Ze zaś te Równoległościany, byłyby równe względem Graniaſtoſłupów, więc też i dwa Graniaſtoſłupy podobne, maią ſię do ſiebie, iak Sześciany krawędzi ich, odpowiadaiących ſobie.

4. Niech będą dwa iakiekolwiek Oſtrograny podobne, ſtoſunek ich równa ſię ſtoſunkowi Sześcianów krawędzi ich, odpowiadaiących ſobie.

Dwa

Dwa Graniaſtoſłupy nap: proſte, których podſtawy i wyſokości byłyby równe względem podſtawy i wyſokości, tych Oſtrogranów; te mówię Graniaſtoſłupy miałyby wyſokości proporcyonalne bokom podſtaw ſwoich; byłyby więc podobne; a zatym tak by ſię do ſiebie miały, iak Sześciany ich krawędzi. Aże byłyby trzy razy więkſze względem tych dwóch Oſtrogranów, więc i te Oſtrograny ſą do ſiebie w ſtoſunku Sześciennym ich krawędzi.

5. Wſzyſtkie Bryły podobne, zakończone powierzchniami płaſkiemi, maią ſię do ſiebie iak Sześciany, ich krawędzi.

Dwie Bryły podobne, można rozłożyć na takie Oſtrograny, z których każdy w ſzczegulności należący do iedney Bryły, podobny będzie drugiemu należącemu do drugiey Bryły. Te Oſtrograny iedne względem drugich poiedynczo brane, mieć ſię do ſiebie będą w ſtoſunku ſześciennym ich krawędzi, odpowiadaiących ſobie; więc i ſumma wſzyſtkich Oſtrogranów, z których ſię ſkłada iedna Bryła, będzie do ſummy wſzyſtkich Oſtrogranów, z których ſię ſkłada druga ga Bryła, w tymże samym stosunku, to iest w stosunku sześciennym, ich krawędzi, odpowiadaiących sobie.

164. *Defin:* Walce proste podobne do siebie są te, których stosunek wysokości, równa się stosunkowi promieni, ich podstaw; przecięcia zatym tych Walców przez osi przechodzące, są podobne, a ztąd podobne są i Prostokąty tworzące obrotem swoim te Walce.

Co zaś do Walców pochyłych, a do siebie podobnych; oprocz tego, że wysokości ich mieć się powinny do siebie, iak promienie ich podstaw, przecięcia też ich od płaszczyzny przechodzącey przez ich osi prostopadłe do podstawy, powinny być do siebie podobne, to iest ich osi powinny się mieć do siebie, iak promienie ich podstaw:

165. *Twierdz.* 4. Powierzchnie Walców prostych podobnych, maią się do siebie, iak kwadraty ich *Wymiarów* (Dimensio) odpowiadaiących sobie; to iest: iak kwadraty promieni, ich podstaw, albo iak kwadraty ich wysokości.

Powierzchnia każdego z tych Walców równa się Prostokątowi z okręgu podstawy wy iego, i z summy wysokości iego, i promienia podstawy; więc powierzchnie te, tak się mieć do siebie będą, iak Prostokąty z promieni ich podstaw, i z summy tychże promieni i wysokości Walców. Aże Promienie podstaw, są do siebie (dla podobieństwa Walców) iak ich wysokości, więc i summa z tych promieni iest do summy z tych wysokości, w tym stosunku, w którym są te promienie. Prostokąty więc, w których stosunku maią się do siebie powierzchnie te Walców, są podobne, a przeto tak się będą do siebie miały, iak kwadraty ich boków, odpowiadaiących sobie, nap: iak kwadraty promieni ich podstaw. Będą więc do siebie i powierzchnie Walców w tymże samym stosunku; to iest, iak kwadraty promieni, ich podstaw.

Toż mówić i o powierzchniach krzywych w Walcach; to iest, o takich, w których się nie zamykaią podstawy.

166. *Twierdz:* 5. Bryłowatości Walców podobnych, tak się maią do siebie, iak Sześciany ich wymiarów odpowiadaiących sobie; to iest, są do siebie w stosunku tróymnożnym tychże wymiarów, nap: w stosunku troymnożnym promieni, ich podstaw.

Dowodz:

Dowodz: Opiſzmy na podſtawach, tych Walców, iakiekolwiek Wielokąty foremne, podobne; niech te Wielokąty będą podſtawami Graniaſtosłupów, teyże z Walcami wyſokości. Te Graniaſtosłupy będą podobne, a zatym będą ſię miały do ſiebie w ſtoſunku tròymnóżnym, nap: promieni ich podſtaw.

Walce tak ſię do ſiebie maią, iak Graniaſtoſłupy na nich opiſane. Jakoż każdy Walec ieſt do Graniaſtosłupa na nim opiſanego, w ſtoſunku podſtawy tego Walca do podſtawy Graniaſtoſłupa. Aże podobne ſą dwa Wielokąty na podſtawach Walców opiſane, więc tenże ſam ſtoſunek będzie każdego Walca do Graniaſtosłupa na nim opiſanego; a zatym tak ſię mieć będzie ieden Walec, do Graniaſtoſłupa na nim opiſanego, iak i Walec drugi do Graniaſtosłupa na nim także opiſanego, tak więc pierwſzy Walec będzie ſię miał do drugiego, iak i pierwſzy Graniaſtosłup do drugiego.

Aże ſtoſunek tych Graniaſtosłupów równa ſię ſtoſunkowi tróymnożnemu promieni podſtaw Walców, na których ſą te Graniaſtosłupy opiſane; więc i ſtoſunek

ſunek tych Walców równać ſię także będzie ſtoſunkowi tróymnożnemu promieni tych że podſtaw.

167. Można obiaśnić przykładami liczebnemi to Twierdzenie; ma zaś być nayprzod przyſtoſowane do ſamych Walców proſtych, z kąd łatwo wnieść będzie można, że i w ukośnych Walcach, ten ſam ſtoſunek ma mieyſce; ponieważ Walce ukośne, równey podſtawy i wyſokości z Walcami proſtemi, byłyby im równe, a zatym byłyby też do ſiebie w ſtoſunku tróymnożnym promieni podſtaw ſwoich.

168. *Defin.* Oſtrokręgi proſte nazywaią ſię *podobnemi*, gdy tak ſię maią do ſiebie ich wyſokości, iak i promienie ich podſtaw. Przecięcia przechodzące przez oś tych Oſtrokręgów ſą podobne, a zatym podobne ſą Tróykąty, tworzące obrotem ſwoim te Oſtrokręgi.

Co zaś do Oſtrokręgów ukośnych: tych nie tylko wyſokości tak ſię mieć do ſiebie powinny, iak promienie ich podſtaw, ale nadto i oſi ich w tymże ſamym do ſiebie ſą ſtoſunku.

169. *Twierdz*: 6. Powierzchnie całe Ostrokręgów prostych, są do siebie w stosunku dwumnożnym promieni podstaw, albo w stosunku dwumnożnym boków tychże Ostrokręgów.

Dowodzenie tego, może być podobne do dowodzenia Twierdzenia 4. względem stosunku powierzchni Walców podobnych.

Może też być i w sposob następuiący, który także służyćby mogł równie i do Walców:

W iednym ktorymkolwiek Ostrokręgu, powierzchnia krzywa, tak się ma do powierzchni podstawy, iak bok Ostrokręgu, do premienia tey podstawy. Aże i w drugim Ostrokręgu podobnym, pierwszemu tenże sam stosunek ma mieysce; więc powierzchnia krzywa iednego Ostrokręgu, tak się ma do powierzchni podstawy iego, iak powierzchnia krzywa drugiego Ostrekręgu podobnego, do powierzchni iego podstawy: więc i summa z powierzchni krzywey i z powierzchni podstawy iednego Ostrokręgu, to iest cała iego powierzchnia tak się ma do powierzchni podstawy iego, iak cała powierzchnia drugiego Ostrokręgu, do powierzchni

iego

iego podſtawy; a zatym cała powierzchnia pierwſzego Oſtrokręgu, tak ſię ma do całey powierzchni drugiego, iak powierzchnia podſtawy pierwſzego Oſtrokręgu, do powierzchni drugiego; albo iak kwadrat promienia pierwſzey podſtawy, do kwadratu promienia drugiey.

Podobnie dowieść można, że i powierzchnie krzywe Oſtrokręgów podobnych, ſą w ſtoſunku dwumnożnym promieni podſtaw, tych Oſtrogręgów lub ich boków odpowiadaiących ſobie.

170. *Twierdz*, 7. Bryłowatości Oſtrokręgów podobnych, maią ſię do ſiebie, iak Sześciany ich wymiarów odpowiadaiących ſobie; to ieſt: iak Sześciany promieni ich podſtaw, albo iak Sześciany ich boków, i t. d.

Twierdzenie to podobnie ſię dowodzi, iak i poprzedzaiące, względem bryłowatości Walców; kładąc zamiaſt Graniaſtoſłupów na Walcach opiſanych, Oſtrograny opiſane na Oſtrokręgach.

171. *Uwaga.* Wſzyſtko to, cokolwiek ſię powiedziało o ſtoſunku bryłowatości

Równo-

Równoległościanów, Graniastosłupów, Ostrogranów, i Ostrokręgów podobnych, na to wypada, że:

W ogulności mówiąc, te Bryły są w stosunku złożonym z stosunku ich podstaw, i z stosunku ich wysokości.

Że zaś, gdy te Bryły są podobne, stosunek ich podstaw, iest dwumnożnym stosunku ich wysokości, więc stosunek złożony z stosunku ich podstaw, i z stosunku ich wysokości, składa się z stosunku dwumnożnego, i z stosunku poiedyńczego ich wysokości; będzie tedy taki stosunek tróymnożnym stosunku ich wysokości. Aże stosunek ich wysokości równa się stosunkowi ich boków którychkolwiek odpowiadaiących sobie, więc stosunek tych Brył, gdy do siebie są podobne, iest też stosunkiem tróymnożnym boków ich którychkolwiek odpowiadaiących sobie.

172. *Twierdz.* 8. Powierzchnie kul, są do siebie w stosunku dwumnożnym ich promieni, to iest: iak kwadraty ich promieni. Bryłowatości zaś kul, są do siebie w stosunku tróymnożnym ich promieni, to iest, iak Sześciany tychże promieni.

Dowodz.

Dowodz. Powierzchnie kul, ſą cztery razy większe, niżeli powierzchnie ich kół wielkich; a zatym, tak ſię do ſiebie maią, iak powiezchnie tychże kół, to *ieſt*: iak kwadraty ich promieni.

Bryłowatości kul, ſą $\frac{2}{3}$ względem Walców na nich opiſanych; więc tak ſię maią do ſiebie, iak bryłowatości tych Walców, to ieſt iak Sześciany ich promieni.

173. *Uwaga.* Widzieliśmy w ſzczególności, iż powierzchnia kuli, ieſt do powierzchni kwadratu iey średnicy, w ſtoſunku okręgu koła do iego średnicy, i ten ſtoſunek ieſt zawſze iednakowy. Widzieliśmy też, że bryłowatość kuli, ieſt do bryłowatości Sześcianu iey średnicy, iak okrąg koła do średnicy iego, 6 razy wziętey; który także ſtoſunek nigdy ſię nieodmienia.

Kule więc zachowuią własności Brył podobnych, tak w ſtoſunku ich powierzchni, iako i w ſtoſunku ich bryłowatości. Jakoż, ſą one w ſamey rzeczy Bryłami podobnemi; środek iedney kuli podobnie ieſt położony, iak i środek inney iakieykolwiek kuli; tak iedna iak i druga, tworzy ſię obrotem połkola, a te połkola ſą do ſiebie podobne.

Można-

Możnaby więc (z niewielką odmianą) to im przystosować, co się powiedziało o Bryłach podobnych, zakończonych powierzchniami płaskiemi, względem punktów podobnie położonych w tychże Bryłach.

174. *Defin:* Wycinki podobne kul, są te, których kąty w środku, są podobne, albo które obrotem podobnych wycinków kół tworzą się.

Odcinki kul, podobne, są te, których promienie podstaw, tak się do siebie maią, iak ich wysokości, albo iak promienie kul, do których należą; albo na koniec są te, które się tworzą podobnych poł odcinków kol obrotem.

175. *Twierdz:* 9. Powierzchnie kuliste, i powierzchnie całe, tak wycinków, iak i odcinków podobnych w kulach, są do siebie w stosunku dwumnożnym promieni kul, do których należą.

Dowodz: Niech będą: ACB, acb, dwa wycinki, kół podobne, które obrotem swoim, około promieni: AC, ac, tworzą podobne kul wycinki. *Tab. VI Fig. 4.*

Nayprzod

Nayprzod Powierzchnie kuliste utworzone przez łuki: AB: ab, równać się będą powierzchniom kół maiących za promienie, linije: AB, ab; więc tak się mieć będą do siebie, iak kwadraty tych liniy: AB, ab, albo iak kwadraty promieni: AC, ac.

Powtore. Powierzchnie Ostrokręgowe utworzone obrotem promieni: CB, bc, maią się też do siebie, iak kwadraty promieni: CB, cb, albo CA, ca; Więc i powierzchnie całe wycinków podobnych tak się do siebie maią, iak kwadraty promieni CA, ca.

Koła wykreślone promieniami BD, bd, i służące za podstawy odcinkom kul, utworzonym przez obrot połodcinków kół; ABD, abd, są także do siebie, iak kwadraty liniy BD, bd, a zatym iak kwadraty promieni: CB, cb, albo CA, ca.

176. *Twierdz:* 10. Bryłowatości tak wycinków, iak i odcinków podobnych, w kulach, są do siebie w stosunku tròymnożnym promieni kul, do ktòrych należą.

Dowodz. Nayprzod: Wycinek kuli, utworzony przez wycinek ACB, koła tak

tak ſię ma do ſwoiey kuli, iak kwadrat linii AB, do kwadratu średnicy AE, albo iak kwadrat linii ab, do kwadratu średnicy ae; to ieſt: iak wycinek kuli, utworzony przez wycinek: acb, koła, do kuli ſwoiey. Więc tenże ſam ieſt ſtoſunek iednego z tych wycinka do ſwoiey kuli, co i drugiego wycinka do ſwoiey także kuli; azatym te wycinki, tak ſię do ſiebie maią, iak i kule do ktòrych należą. Aże ſtoſunek tych kul, ieſt ſtoſunkiem tròymnożnym ich promieni, więc i ſtoſunek tych wycinków ieſt także ſtoſunkiem tròymnożnym tychże promieni.

Powtore. Oſtrokręgi podobne utworzone obrotem Tròykątòw, CBD, cbd, ſą do ſiebie w ſtoſunku tròymnożnym promieni CB, cb; więc tak też maią ſię do ſiebie, iak i wycinki kul utworzone obrotem wycinkòw ACB, acb, do kòł należących; a zatym i rożnice każdego wycinka kuli, od każdego Oſtrokręgu, to ieſt odcinki kul, utworzone przez pòłodcinki kòł, ABD, abd, ſą do ſiebie w ſtoſunku rownym ſtoſunkowi wycinków kul, to ieſt w ſtoſunku tròymnożnym promieni: CB, cb.

177. *Twierdz*: II. Gdy cztery iakie linie czynią proporcyą, i gdy dwa pierwſze wyrazy tey proporcyi, ſą liniiami odpowiadaiącemi ſobie, czyli podobnie położonemi, w dwóch Bryłach podobnych; a dwa oſtatnie wyrazy teyże proporcyi, ſą liniiami odpowiadaiącemi ſobie, w dwòch innych Bryłach podobnych; ſtoſunek dwòch pierwſzych Brył, będzie ròwny ſtoſunkowi dwòch brył drugich.

Dowodz. Gdyby te cztery liniie były bokami czterech Sześcianòw, te cztery Sześciany czyniłyby proporcyą; aże ſtoſunek dwòch pierwſzych Brył, równa ſię ſtoſunkowi dwóch pierwſzych Sześcianòw, a ſtoſunek dwòh drugich Brył, równa ſię ſtoſunkowi dwòch drugich Sześcianòw; więc i ſtoſunek dwòch pierwſzych Brył, ròwna ſię ſtoſunkowi dwòch Brył drugich.

178. *Uwaga*. Bryłowatości Brył podobnych, prędzey roſną, niż ich powierzchnie.

Przykład. Niech będą liniie odpowiadaiące ſobie w dwòch Bryłach podobnych, dwa razy więkſze iedne względem

dem drugich; powierzchnia iedney ztych Bryły, będzie cztery razy większa od powierzchni drugiey Bryły; a zaś Bryłowatość iedney Bryły, będzie ośm razy większa od bryłowatości, drugiey Bryły.

W ogulności zaś mówiąc, niech będą AB, AC, liniiami odpowiadaiącemi sobie, w dwóch Bryłach podobnych. Zróbmy Tròykąt prostokątny maiący liniią AB, za iedno ramie kąta prostego, a liniią AC, za przeciwprostkątną. Tab. VI. fig. 5.

Pociągniymy CD prostopadłą do AC, i natrafiaiącą na liniią AB przedłużoną, w punkcie D. Od tego punktu D, wyprowadźmy DE prostopadłą do AD, i natrafiaiącą na liniią AC przedłużoną w punkcie E.

Powierzchnie dwóch Brył, ktòreby miały AB, i AC za liniie odpowiadaiące sobie, maią się tak do siebie, iak liniie AB, i AD; a bryłowatości ich, są w tym samym stosunku, w ktòrym liniie AB, i AE.

Aże liniia AE, większa iest względem linii AB, niżeli liniia AD; więc też i bryłowatość drugiey Bryły większa ieſt względem bryłowatości pierwszey Bryły, niżeli powierzchnia tey drugiey Bryły, względem powierzchni pierwszey Bryły; to ieſt: bryłowatość drugiey Bryły prędzey ſię powiękſza, niżeli iey powierzchnia.

179. *Uwaga.* Na poprzedzaiących Twierdzeniach zaſadza ſię podział *Linii Brył* (Linea Solidorum) który znayduiemy na cerklu proporcyonalnym.

Ta liniia zawiera w ſobie zwyczaynie 64, podziałów, które ſię rachować zaczynaią od *środka* narzędzia (à centro).

Odległości tego środka od punktów naznaczonych liczbami: 1. 8, 27, 64, tak ſię maią do ſiebie, iak
liczby - - 1, 2, 3, 4;
co znaczy, że Bryły podobne, ktòrych boki ſą w ſtoſunku liczb: 1, 2, 3, 4, maią bryłowatości w ſtoſunku liczb: 1, 8, 27, 64.

Jnne podziały wyznaczone ſą przez wyciągnienie przybliżone pierwiaſtków ſześciennych. J tak, ponieważ boki dwòch Sześcianòw, z ktòrych ieden dwa razy ieſt więkſzy od drugiego, tak ſię bliſko maią do ſiebie, iak liczby 126 i 100; więc też i odległości środka, od punktów naznaczonych na tey linii liczbami: 1, 2, tak ſię maią do ſiebie, iak liczby: 100, i 126. Używanie dwòch takich liniy, znayduiących ſię na dwoch ramionach cerkla proporcyonalnego, podobne ieſt używaniu innych liniy tamże ſię znayduiących, ktòre w oſobnym na to Rozdziale iuż ſię wyłożyło. w Części I.

K O N I E C.

Tab. I.

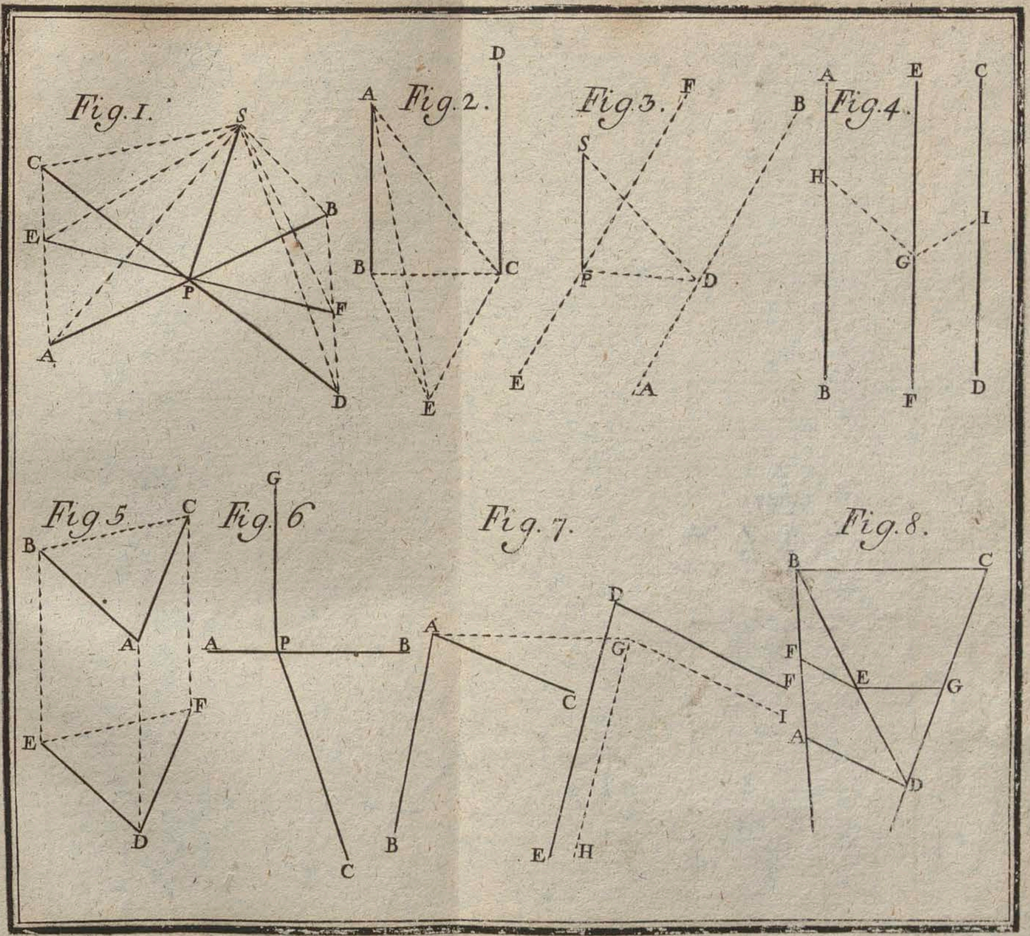
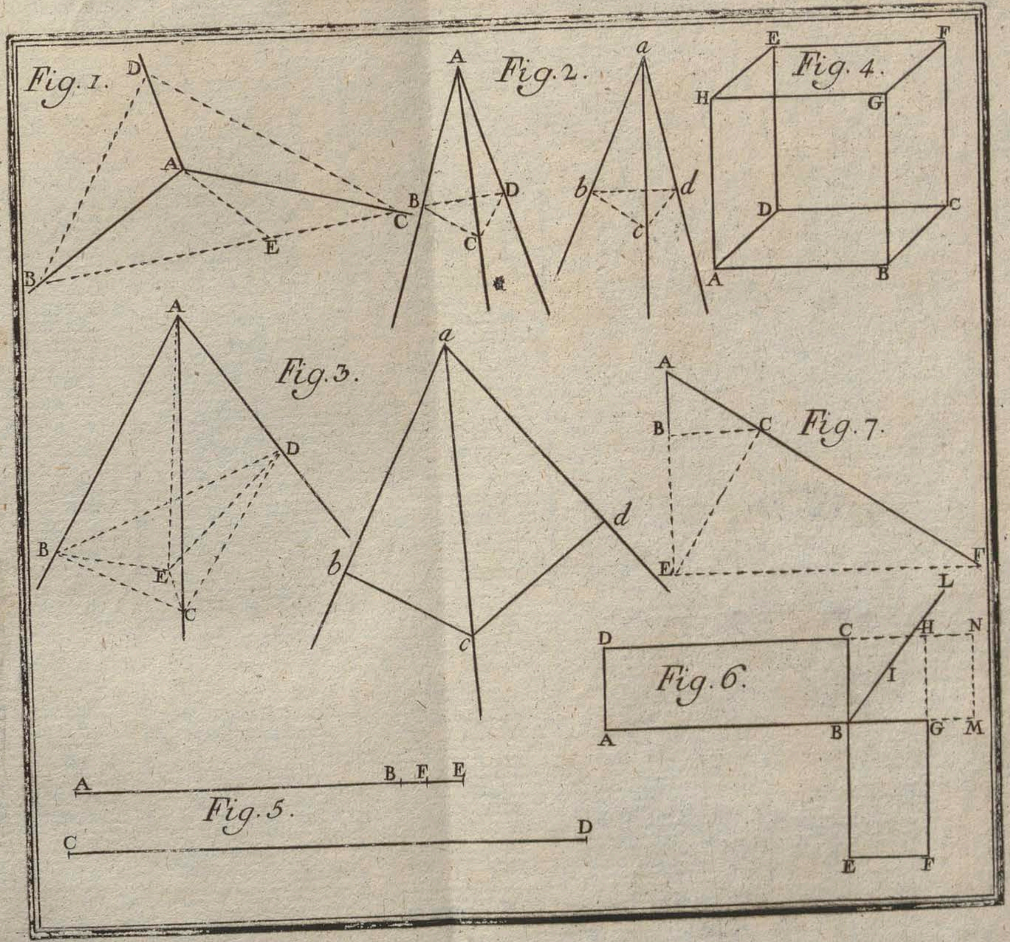
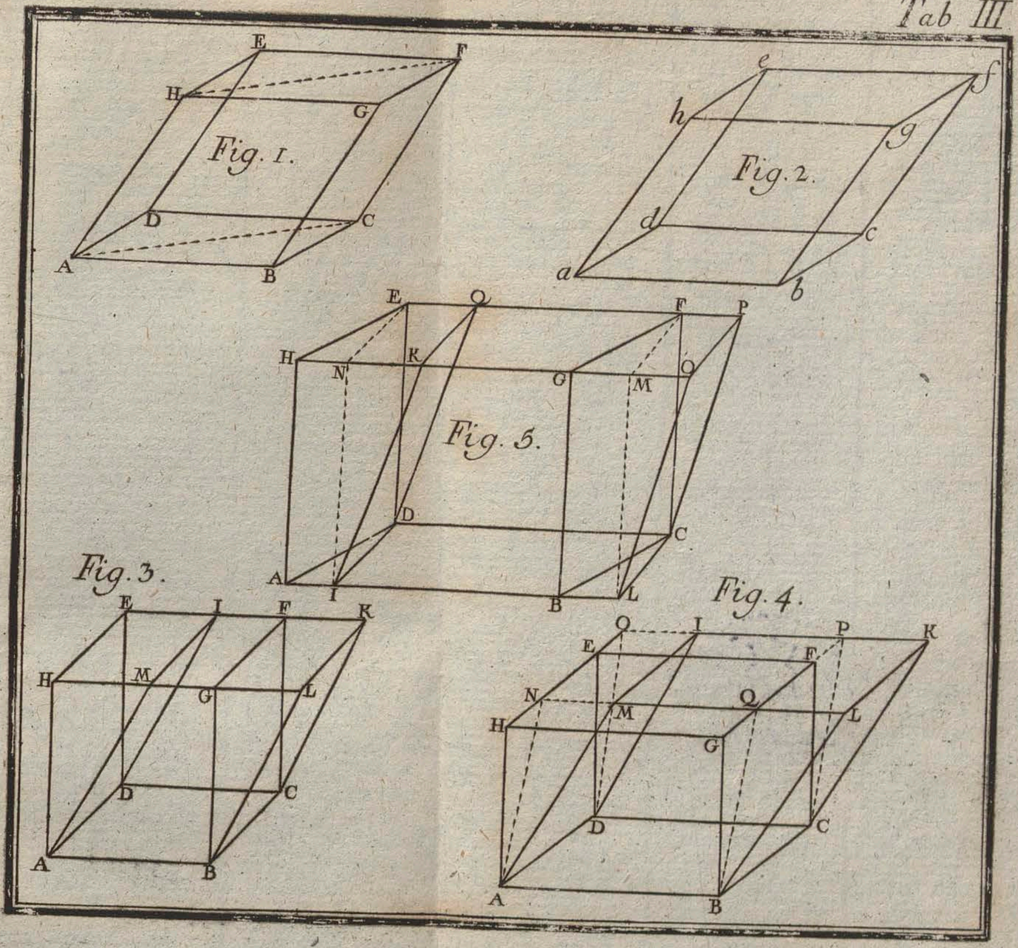


Fig. 1.
S
C
E
B
P
F
A
D
Fig. 2.
D
A
B
C
E
Fig. 3.
F
S
P
D
E
A
B
Fig. 4.
A
E
C
H
I
G
B
F
D
Fig. 5
C
B
A
F
E
D
Fig. 6
G
A
P
B
C
Fig. 7.
D
A
G
F
C
I
B
E
H
Fig. 8.
B
C
F
E
G
A
D

Tab. II.



Tab III



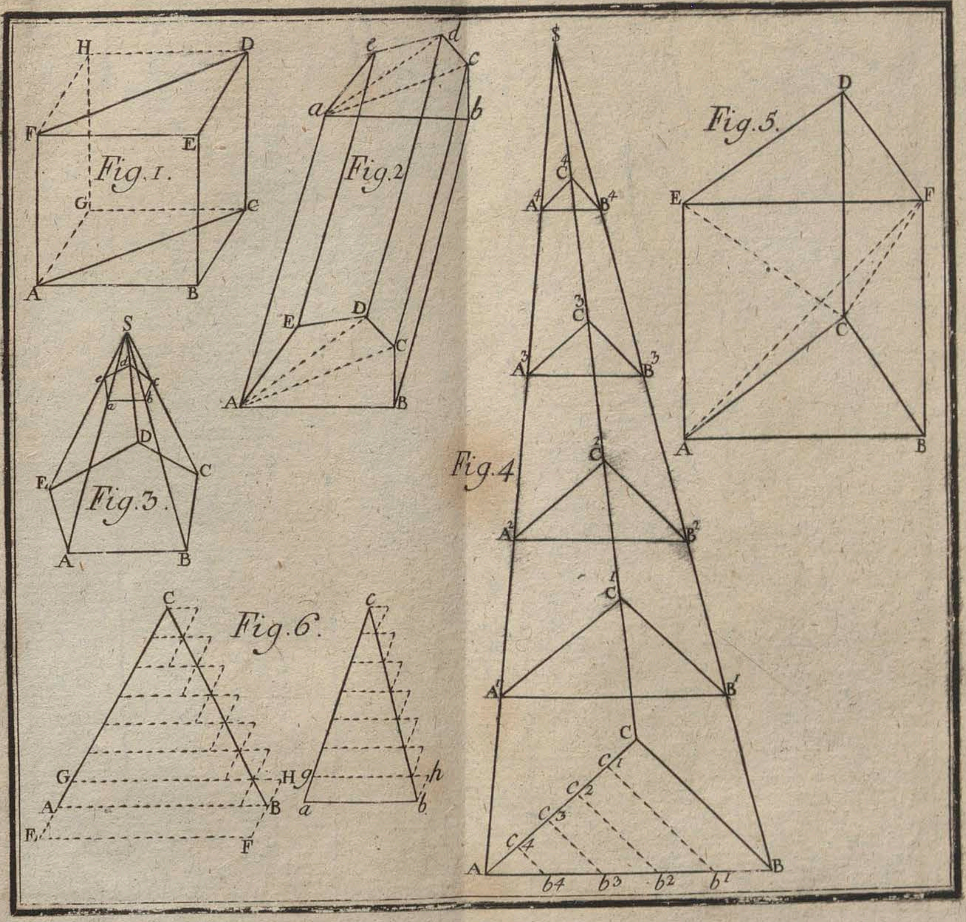


Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.

Tab. V.

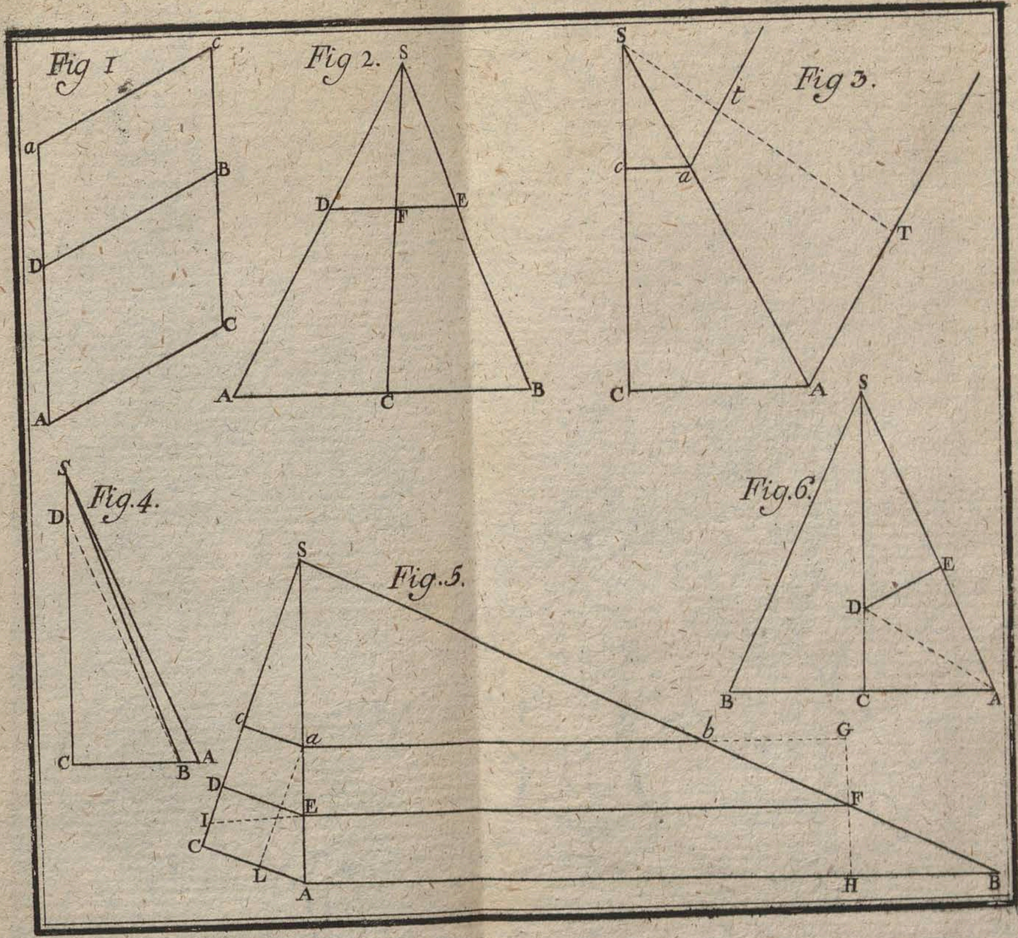
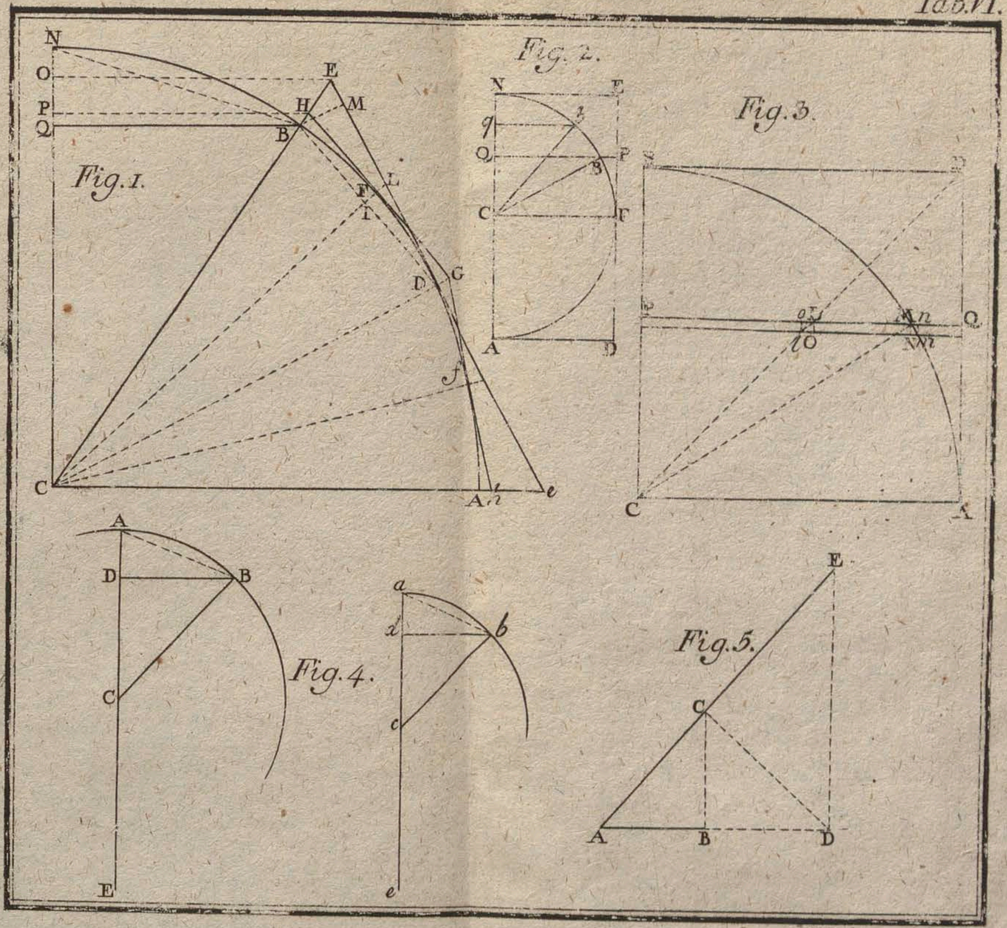


Fig I
a
c
B
D
C
A
Fig 2.
S
D
F
E
A
C
B
Fig 3.
S
t
c
a
T
C
A
Fig.4.
S
D
C
B
A
Fig.5.
S
c
a
b
G
D
E
F
I
C
L
A
H
B
Fig.6.
S
E
D
B
C
A

Tab. VI.



dząc o nim bez [illegible]
niania y dobrze ſens iego tłumacząc.

Jeżeli każdy (prawi) *człowiek w partykularności może wolność ſwą alienować, y poddać ſię* (należało położyć raczey *oddać ſię*) *w niewolnictwo Panu to ieſt*, in Dominium proprietatis. *Za cożby Narod cały nie mogł także ſwą wolność oddać*, (raczey *poddać* ſub Dominium Jurisdictionis) *y uczynić ſię poddanym* Królowi: jakby mowił: cięższa to rzecz bez porownania człowiekowi w partykularności oddać ſię w niewolą, y zoſtać własnością cudzą, niż całemu Narodowi poddać ſię pod rząd y Juryzdykcyą Króla. Jeżli bywa tam to prawnie: czemuż nie to? lecz Autor bez dyſtynkcyi między własnością y Juryzdykcyą rowno waży

wolności, więc ią może alienować przynaymniey w niedoſtatku innego ſpoſobu do życia, ktore droższe ieſt, iak wolność.

Rzeczeſz, iż *niewola ieſt przeciwna naturze ludzkiey*. Coż przez to rozumie ſię? Nie to: iakoby niewola ſprzeciwiła ſię prawu naturalnemu czyli światłu rozumu, ale tylko to: iż ſprzeciwi ſię temu ſtanowi w ktorym człowiek ſtworzony wolnym, y Panem wolności ſwoiey: tego ſtanu uſtępuie, gdy ſię w niewolą zaprzedaie, co mu wolno, iako wolno Panu rzecz ſwoię alienować. Chciawſzy dowieść, że człowiek nie może alienować wolności, należało wprzod dowieść, że nie ieſt Panem oney.