

INSTYTUT SPRAW SPOŁECZNYCH

STUDIA I MATERIAŁY

Zeszyt 2.

Sprawy ubezpieczeń społecznych

W A R S Z A W A - 1 9 3 8

STUDIA I MATERIAŁY

Zeszyt 2.

102

SELECTED STUDIES OF THE INSTITUTE FOR SOCIAL PROBLEMS

Fascicule 2

Edited by Zbigniew Łomnicki

Social Insurance Problems

CONTENTS STUDIES:

Mieczysław Presburger: Social Pension Insurance from the Standpoint of an Individual Insured (German Summary p. 127)

Henryk Greniewski and Egon Vielrose: A preliminary Research on the Influence of Economic Business Cycles on Pension Insurance (French Summary p. 189).

STUDIA I MATERIAŁY

Zeszyt 2

pod redakcją Zbigniewa Łomnickiego

Sprawy ubezpieczeń społecznych

ZAWIERA PRACE:

Mieczysław Presburger: Społeczne ubezpieczenie emerytalne z punktu widzenia ubezpieczenia jednostki

Henryk Greniewski i Egon Vielrose: Próba badania wpływu koniunktury gospodarczej na urzędzenia emerytalne

Studia Instytutu Spraw Społecznych w dziale ubezpieczeń społecznych (1932–1937)

Biblioteka Jagiellońska



1002445598

8183

" or 50p.

1938, 2



Alc. Nr. 3773 38/39
A.

TREŚĆ

PRZEDMOWA VII

MIECZYSLAW PRESBURGER — Społeczne ubezpieczenie emerytalne z punktu widzenia ubezpieczenia jednostki

A. Część ogólna

Wstęp	5
§ 1. Badane systemy świadczeń. Podstawy techniczne	5
Rozdział I. Ubezpieczenie ze składką indywidualną	7
§ 2. Składka indywidualna	7
§ 3. Ubezpieczenie jako gra losowa	10
§ 4. Zasada równoważności składek i świadczeń	14
§ 5. Rezerwa indywidualna retrospektywna. Kapitał pod ryzykiem. Składki za ryzyko i składka oszczędnościowa	16
§ 6. Ryzyko i oszczędność przy różnych systemach świadczeń	20
§ 7. Rezerwa indywidualna prospektywna. Bilans techniczny	24
§ 8. Przedwczesne opuszczanie ubezpieczenia	30
§ 9. Zasada równoważności strat i zysków	34
Rozdział II. Ubezpieczenie ze składką przeciętną	37
§ 10. Składka przeciętna	37
§ 11. Jednostkowa rezerwa retrospektywna i prospektywna	44
§ 12. Bilans techniczny przy składce przeciętnej	50
§ 13. Rezerwa prospektywna grupy aktywnych i zagadnienie jej repartycji	53
§ 14. Przedwczesne opuszczanie ubezpieczenia przy składce przeciętnej	60
§ 15. Zyski i straty ubezpieczonego przy składce przeciętnej	67

VI

Tablice	70
Wykresy	102

B. Część techniczno-matematyczna

§ 16. Ogólne ubezpieczenie na wypadek inwalidztwa, śmierci i starości. Twierdzenie o tanioci ubezpieczenia ze składką przeciętną	108
§ 17. Rezerwy jednostkowe. Kwota oszczędnościowa przy składce przeciętnej	115
§ 18. Rezerwa perspektywna grupy aktywnych	120
§ 19. Zasada równoważności strat i zysków	123

Zusammenfassung	127
Literatura	134

HENRYK GRENIEWSKI i EGON VIELROSE — Próba badania wpływu koniunktury gospodarczej na urządzenia emerytalne

Rozdział I. Zadanie, metoda i założenia podstawowe	137
1. Uwagi wstępne	137
2. Zadanie	139
3. Metoda	139
4. Założenia, dotyczące koniunktury	143
5. Założenia, dotyczące urządzenia emerytalnego	148

Rozdział II. Wpływ stopy oprocentowania	149
1. Założenia	149
2. Opis rezultatów	151

Rozdział III. Wpływ stopy oprocentowania, stanu zatrudnienia i zarobków	163
1. Założenia, dotyczące koniunktury	163
2. Normy świadczeniowe	166
3. Podstawy biometryczne	167
4. Zbiorowość ubezpieczonych	170
5. Wydatki na świadczenia	173
6. Opis rezultatów	176

Wykresy	183
Resumé	189
Literatura	190

STUDIA Instytutu Spraw Społecznych w dziale ubezpieczeń społecznych (1932—1937)	191
---	-----

P R Z E D M O W A

W przedmowie do pierwszego zeszytu „Studiów i Materiałów” Instytut Spraw Społecznych starał się omówić momenty, które go skłoniły do podjęcia tego rodzaju periodycznego wydawania prac, posiadających charakter badań specjalnych i z konieczności obliczonych na węższy zakres czytelników.

Zeszyt drugi tego wydawnictwa pod redakcją p. Z b i g n i e w a Ł o m n i c k i e g o, Kierownika Działu Zagadnień Aktuarialnych i Statystycznych w Instytucie, poświęcony jest zagadnieniom z zakresu ubezpieczeń społecznych. Obie prace umieszczone w tym zeszycie zawierają wyniki badań ubezpieczeniowo-technicznych. Mimo iż dla ich uzyskania posługiwano się metodami matematyki ubezpieczeniowej, to jednak dążeniem autorów było, aby rezultaty badań zainteresowały ogół czytelników zajmujących się zagadnieniami ubezpieczeń społecznych. W związku z tym w obu pracach ominięto lub usunięto z głównego trzonu pracy formalno-matematyczną stronę rozważań; postarano się natomiast zilustrować przeprowadzone rozumowanie szeregami przykładów liczbowych.

Praca p. M. P r e s b u r g e r a stanowi próbę potraktowania schematu matematycznego społecznych ubezpieczeń emerytalnych z punktu widzenia poszczególnych jednostek ubezpieczonych. Jakkolwiek wiadomo, że z samą naturą ubezpieczeń społecznych związane jest jednolite traktowanie całej masy osób ubezpieczonych, to jednak wyjaśnienie mechanizmu emerytalnego ubezpieczenia społecznego na tle takich właśnie rozważań wydawało się bardzo pouczające. Praca ta może oddać poważne usługi w rozstrzygnięciu stale aktualnego sporu co do roli, jaką odgrywa i odgrywać winno emerytalne ubezpieczenie społeczne dla poszczególnych indywidualów ubezpieczonych i między innymi tłumaczy, jak nieracjonalne jest przeciwstawianie indywidualnej oszczędności urządzeniom ubezpieczeniowym.

VIII

Sposób zredagowania pracy pozwala traktować ją jako podręcznik zasad aktuarialnych emerytalnego ubezpieczenia społecznego, wolny od formuł matematycznych. Popularyzując w tym znaczeniu pojęcia aktuarialne, autor wymaga uważnego śledzenia przebiegu rozważań, co nie powinno jednak czytelnika zrażać.

Praca pp. H. Greniewskiego i E. Wielrośego stanowi próbę uchwycenia wpływu koniunkturalnych wahań oprocentowania lokat, stanu zatrudnienia oraz poziomu płac na stronę finansową urzędzeń emerytalnych. W szczególności autorowie starali się wyjaśnić, w jakim stopniu jest dopuszczalne upraszczanie schematów matematycznych w drodze abstrahowania od owych wahań w uzasadnieniach technicznych i bilansach aktuarialnych.

Przy końcu niniejszego zeszytu, poświęconego zagadnieniom ubezpieczeń społecznych podano zwięzłe sprawozdanie, dotyczące dokonanych oraz planowanych prac Instytutu z tego zakresu.

INSTYTUT SPRAW SPOŁECZNYCH

M. PRESBURGER

Spółeczne ubezpieczenie emerytalne z punktu widzenia ubezpieczenia jednostki

W pracy niniejszej przeprowadzone są badania techniczne nad emerytalnym ubezpieczeniem społecznym ze specjalnego punktu widzenia, mianowicie z punktu widzenia wartości, jakie to ubezpieczenie przynosi p o s z c z e g ó l n e m u ubezpieczonemu. Takie podejście do zasad technicznych emerytalnego ubezpieczenia społecznego nie jest najbardziej naturalne, gdyż zrozumienie kalkulacji ubezpieczenia jest najdostępniejsze przy rozpatrywaniu grupy ubezpieczonych jako całości i rozważaniu z jednej strony składek, wpłacanych przez całą grupę, z drugiej strony — świadczeń na rzecz całej grupy. Wtedy bowiem dopiero uwidoczniiona zostaje wyraźnie istotna rola, jaką spełnia w ubezpieczeniu zakład ubezpieczeń: jest on tylko pośrednikiem, który fundusze zebrane w postaci składek rozdziela między ubezpieczonych w postaci świadczeń.

Jednakże celem niniejszej pracy nie jest wyłożenie zasad techniki ubezpieczeniowej czytelnikowi, który po raz pierwszy zapoznaje się ze społecznym ubezpieczeniem emerytalnym. Przy czytaniu niniejszej pracy raczej pożądana jest, chociaż nie niezbędna, znajomość ogólna zasad kalkulacji technicznej emerytalnego ubezpieczenia społecznego. Natomiast zadaniem niniejszej pracy jest uwydatnienie, jak się odbija stosowanie składki przeciętnej i określonego systemu świadczeń na wartości świadczeń, jakie otrzymuje albo mógłby otrzymywać poszczególny ubezpieczony, w porównaniu z wartością wpłaconych przezeń składek. Jeżeli mówimy o świadczeniach, jakie mógłby otrzymywać ubezpieczony, to mamy tu na

myśli również zagadnienie świadczeń dla ubezpieczonego przy przedwczesnym opuszczaniu ubezpieczenia, tj. zagadnienie wykupów i kwestie pokrewne.

Realizacja nakreślonego zadania uzyskana została w pracy niniejszej przez podejście do emerytalnego ubezpieczenia społecznego jako zbioru u b e z p i e c z e ń j e d n o s t k o w y c h. Przeciwno takiemu podejściu przytaczany bywa argument, że emerytalne ubezpieczenie społeczne może mieć sens tylko jako całość. Taki zarzut oparty jest na nieporozumieniu. Istotnie, emerytalne ubezpieczenie społeczne może f u n k c j o n o w a ć tylko jako całość; wyodrębnione z niego ubezpieczenie jednostkowe traci sens w tym znaczeniu, że nie może samodzielnie funkcjonować. Nie znaczy to jednak wcale, aby a n a l i z a ubezpieczenia grupowego przez rozłożenie go na ubezpieczenia jednostkowe była niedopuszczalna.

Dla uwydatnienia roli składki przeciętnej zostało w pracy niniejszej szeroko potraktowane ubezpieczenie ze składką indywidualną. Wprowadzając najprzód wszystkie pojęcia w zastosowaniu do składki indywidualnej, kierowaliśmy się nie tylko zasadą stopniowania trudności, ale również pragnęliśmy dać czytelnikowi wyczerpującą odpowiedź na pytanie: czym jest i czym nie jest składka przeciętna.

Dla zbadania roli systemu świadczeń obliczono wszystkie przykłady liczbowe dla czterech różnych systemów świadczeń, które są interesujące bądź ze względów teoretycznych, bądź z uwagi na obowiązujące w Polsce ustawodawstwo ubezpieczeniowo-społeczne.

Rozwiązanie zagadnienia świadczeń wykupowych poprzedzone zostało w pracy niniejszej dość obszernymi badaniami na temat roli r y z y k a i o s z c z ę d n o ś c i w emerytalnym ubezpieczeniu społecznym. Te ostatnie badania, jak również analiza wartości świadczeń ubezpieczeniowych, płatnych z chwilą nastąpienia ubezpieczeniowego wypadku losowego, wydają nam się ważne również i z tego względu, że były już podejmowane w Polsce próby podobnej analizy w sposób jednostronny dla uzasadnienia z góry powziętych tez¹.

Nie chodzi nam jednak w pracy niniejszej tylko o zwalczanie pewnych błędnych poglądów na istotę zasad technicznych ubezpieczenia. Sądzimy, że osiągnięte tu wyniki będą mogły oddać usługi jako materiał obiektywny przy badaniach nad zagadnieniami socjal-

¹ Por. odnośniki na str. 24 i na końcu części ogólnej.

nymi i gospodarczymi z dziedziny ubezpieczeń społecznych, a rozwinięte w pracy niniejszej metody, zastosowane do konkretnego systemu emerytalnego ubezpieczenia społecznego, pozwolą poznać go od nowej strony i będą pomocne w poczynaniach, które leżą na linii rozwojowej ubezpieczeń społecznych.

Wymienione wyżej cele i zadania niniejszej pracy nałożyły na autora obowiązek takiego przedstawienia swych badań, które będzie dostępne nie tylko dla szerszego grona techników-matematyków, ale również dla szerszego ogółu ubezpieczeniowców. Pod tym kątem widzenia została napisana część ogólna *A* niniejszej pracy. Dla uniknięcia jednak nieporozumień musimy słów parę poświęcić stosowanej przez nas metodzie popularyzacji. Popularyzację jakiejś dziedziny wiedzy można rozumieć w ten sposób, że autor stara się udostępnić czytelnikowi wyniki badań, dając ogólny pogląd na dziedzinę popularyzowaną. Przy tak pojętej popularyzacji autor zmuszony jest często prześlizgiwać się po istotnych, ale trudniejszych częściach i dając w rezultacie obraz wprawdzie wykończony, ale nie zupełnie ściśle oddający prawdziwy stan rzeczy. W pracy niniejszej jednak rozumiemy popularyzację tylko w ten sposób, że usunęliśmy przed czytelnikiem trudności formalne, wynikające z nieznamomości matematyki ubezpieczeniowej, nie rezygnując ze ścisłości naukowej. Niech to usprawiedliwi autora przed czytelnikiem przy trudniejszych ustępach niniejszej pracy, które nawet od technika-matematyka wymagać będą oswojenia się ze stosowaną w pracy niniejszej metodą podejścia do pewnych zagadnień. Usunięcie bowiem symbolów i wzorów matematycznych, które w ścisły i zwięzły sposób ujmują jakąś dziedzinę wiedzy, jest dla matematyka raczej utrudnieniem niż ułatwieniem czytania.

Rolę zastępczą wzorów matematycznych spełniają w niniejszej pracy tablice i zestawienia, obok swej zwykłej roli przykładu liczbowego. Dlatego czytelnik nie powinien przy czytaniu tekstu odkładać studiowania tablic na później. Wyodrębnienie tablic nastąpiło tylko ze względów technicznych.

W części techniczno-matematycznej *B* niniejszej pracy ujęte są w ogólną formę matematyczną rozważania z części *A*. Zamieszczenie części *B* było pożądané choćby z tego względu, że dla czytelnika-matematyka forma matematyczna jest ułatwieniem ujęcia całości rozważań. Było ono jednak również konieczne, ponieważ przedstawione w pracy niniejszej wyniki należą tylko w części do znanych już w matematycznej literaturze ubezpieczeniowej, częściowo zaś są

rezultatami badań własnych autora. Te ostatnie, publikowane tu często po raz pierwszy, wymagały ścisłego uzasadnienia matematycznego dla umożliwienia kontroli ze strony czytelnika.

Przy opracowaniu całego materiału przykładów liczbowych korzystałem z wydatnej współpracy mgra D. K i r s z b r a u n a, który nie tylko wykonał sam większość rachunków, ale współdziałał również przy ustalaniu metod rachunkowych i przy kontroli logicznej uzyskiwanych rezultatów.

Na zakończenie pragnę podziękować I n s t y t u t o w i S p r a w S p o ł e c z n y c h za umożliwienie mi wykonania niniejszej pracy. W szczególności dziękuję p. Zb. Ł o m n i c k i e m u, członkowi Rady Naukowej Instytutu, za pełne wnikliwości uwagi natury merytorycznej, metodologicznej i terminologicznej, które w wielu punktach wpłynęły na ostateczną formę przedstawionych tu rozważań.

A. CZĘŚĆ OGÓLNA

Wstęp

§ 1. BADANE SYSTEMY ŚWIADCZEŃ. PODSTAWY TECHNICZNE

W pracy niniejszej będziemy badali emerytalne ubezpieczenie społeczne na przykładzie ubezpieczenia renty inwalidzkiej, wdowiej i starczej. Świadczenie zakładu ubezpieczeń następuje mianowicie wtedy, gdy zajdzie jeden z trzech wypadków losowych: inwalidztwo aktywnego (czynnego) ubezpieczonego, śmierć w stanie aktywnym, dożycie wieku starczego, w naszym przykładzie 65 lat. W wypadku inwalidztwa lub starości ubezpieczony otrzymuje rentę, w wypadku śmierci ubezpieczonego w stanie aktywnym rentę otrzymuje pozostała po nim wdowa.

Rozpatrywane tu przez nas ubezpieczenie emerytalne jest uproszczonym modelem ubezpieczeń, stosowanych zwykle w ustawodawstwie społecznym; uproszczenie polega na tym, że w przykładzie naszym nie uwzględniamy świadczeń na renty sieroce, a renty wdowie przyznajemy jedynie wdowom po czynnych, nie uwzględniając rent wdowich po inwalidach i starcach. Ponadto jako ubezpieczonych uznajemy jedynie czynnych, nie uwzględniając tzw. zachowujących uprawnienia (np. bezrobotnych). Natomiast rozpatrywać będziemy w obrębie wyżej określonego ubezpieczenia cztery systemy świadczeń, w których renta wdowia wynosi zawsze połowę renty inwalidzkiej, jaką otrzymywałby ubezpieczony, gdyby zamiast śmierci nastąpił wypadek inwalidztwa:

- I. renta stała bez okresu wyczekiwania (karencji),
- II. renta stała z 5-letnią karencją,
- III. renta wzrastająca z 5-letnią karencją: wzrost renty rozpoczyna się po upływie 10 lat ubezpieczenia i trwa do 40 roku ubezpie-

czenia, przy czym wzrost roczny renty jest stały i wynosi 5% wartości zasadniczej renty,

IV. renta wzrastająca z 5-letnią karencją: wzrost renty rozpoczyna się po upływie 10 lat ubezpieczenia i trwa do 40 roku ubezpieczenia, przy czym od 11 do 20 roku ubezpieczenia renta wzrasta o 2,5% wartości zasadniczej rocznie, od 21 do 30 roku ubezpieczenia renta wzrasta o 5% wartości zasadniczej rocznie, od 31 do 40 roku ubezpieczenia renta wzrasta o 7,5% wartości zasadniczej rocznie.

Poniższe zestawienie daje porównanie systemów świadczeń III i IV przy rencie zasadniczej 100.

Zest. 1. Wysokość renty w późniejszych latach ubezpieczenia przy rencie zasadniczej 100

System świadczeń	W roku ubezpieczenia							
	5	10	15	20	25	30	35	40
III	—	100	125	150	175	200	225	250
IV	—	100	112,5	125	150	175	212,5	250

Wzrosty przy systemie III są takie same jak w Rozporządzeniu Prezydenta Rzeczypospolitej z 1927 roku o ubezpieczeniu pracowników umysłowych; obliczamy je tu jednak w stosunku do kwoty zasadniczej renty, a nie w stosunku do zarobku ubezpieczonego, gdyż w pracy niniejszej nie będziemy się zajmowali zależnością renty od zarobku ubezpieczonych. Takie uproszczenie sprowadza się do założenia, że wszyscy ubezpieczeni posiadają jednakowe i niezmiennie zarobki.

Wzrosty przy systemie świadczeń IV są tego samego typu co wzrosty, przyjęte dla ubezpieczenia emerytalnego robotników w Ustawie o ubezpieczeniu społecznym z r. 1933. Przy systemie IV renta wzrasta po 40 latach ubezpieczenia do 250% renty zasadniczej, tak jak przy systemie III. Jednakże w pierwszych latach ubezpieczenia przy systemie IV renta wzrasta wolniej niż przy systemie III (2,5% i 5%), ale za to w późniejszych latach ubezpieczenia sytuacja jest odwrócona (7,5% i 5%).

Wszystkie przykłady liczbowe, zestawienia i tablice podane w niniejszej pracy liczone są według 4,5% podstaw technicznych ubezpieczenia emerytalnego pracowników umysłowych, wydanych przez Zakład Ubezpieczeń Społecznych (Literatura, 12).

R o z d z i a ł I

Ubezpieczenie ze składką indywidualną

§ 2. SKŁADKA INDYWIDUALNA

Podstawą kalkulacji składki ubezpieczenia długoterminowego jest badanie t e o r e t y c z n e j g r u p y ubezpieczonych, możliwie dokładnie odpowiadającej warunkom rzeczywistej grupy, do której ubezpieczenie ma być stosowane; w tej teoretycznej grupie zakładamy przebieg zjawisk losowych, zgodny z obserwacjami, poczynionymi na materiale statystycznym. W wypadku ubezpieczenia renty inwalidzkiej, wdowiej i starczej, grupa składa się z ubezpieczonych aktywnych (czynnych), z pośród których co roku ubywa część wskutek zachodzenia wypadków inwalidztwa, śmierci w stanie aktywnym lub dożycia w stanie aktywnym wieku starczego 65 lat; w ten sposób obok zasadniczej grupy aktywnych istnieć będą dodatkowe trzy grupy rencistów: inwalidów, wdów i starców. Do składki, wystarczającej na świadczenia ubezpieczeniowe ustalone w systemie świadczeń, dochodzimy przez przyrównanie wpłat poczynionych we wszystkich latach ubezpieczenia przez teoretyczną grupę aktywnych w postaci składek, z wypłatami świadczeń na rzecz teoretycznych grup: inwalidów, wdów i starców również we wszystkich latach ubezpieczeniowych. To przyrównanie, będące wyrazem z a s a d y r ó w n o w a ż n o ś c i p r z y s z ł y c h s k ł a d e k i ś w i a d c z e ń ubezpieczenia, odbywa się z uwzględnieniem d y s k o n t a składek i świadczeń na jeden i ten sam moment, mianowicie na początek ubezpieczenia.

Szczególnym przypadkiem grupy aktywnych jest jedna g e n e r a c j a aktywnych; jest to grupa aktywnych, którzy jednocześnie przystąpili do ubezpieczenia. Teoretyczna grupa aktywnych posiada jednak zwykle w emerytalnym ubezpieczeniu społecznym strukturę bardziej skomplikowaną¹ składa się z generacji początkowej i z ciągu generacji, które przystępują do grupy co roku w późniejszych latach ubezpieczenia, przy czym zarówno generacja początkowa jak i generacje późniejsze składać się mogą z aktywnych różnego wieku. Ponadto z grupy ubywać mogą aktywni nie tylko przez inwalidztwo, śmierć lub dożycie wieku starczego, ale również przez

¹ Por. Presburger i Wanatowski (16).

przedwczesne wystąpienie z innych powodów. Taka ogólna grupa aktywnych może trwać wiecznie, ponieważ zapewniamy jej stały dopływ nowych generacyj aktywnych.

Zanim przejdziemy do rozpatrywania (w rozdziale II) ogólniejszej grupy teoretycznej aktywnych, zajmiemy się naprzód jedną generacją teoretyczną aktywnych, przy czym założymy dodatkowo, że ta generacja składa się z aktywnych jednakowego wieku. Do jednej generacji aktywnych nie przystępują nowi osobnicy w późniejszych latach ubezpieczenia; o naszej generacji założymy jeszcze, że ubywają z niej aktywni tylko przez inwalidztwo, śmierć lub dożycie wieku starczego. Oczywiście, jedna generacja ma żywot ograniczony i wymiera całkowicie wraz z grupą rencistów przed upływem 100 lat.

Rozpatrując jedną teoretyczną generację aktywnych jednakowego wieku, możemy przy pomocy zasady równoważności obliczyć roczną składkę przeciętną stałą, przypadającą na każdego aktywnego, należącego do generacji. Ta składka przeciętna wypadnie naogół różna w każdym wypadku, w którym rozpatrywać będziemy generacje o innym wieku jednakowym. Jest to wynik zupełnie zrozumiały; przy naszych systemach świadczeń składka przeciętna dla generacji osobników starszych musi być wyższa niż dla młodszych, gdyż starsi opłacają składki przez mniejszą liczbę lat niż młodszy. Ponadto liczba wypadków inwalidności i śmierci, jak również liczba wypadków dożycia wieku starczego 65 lat jest większa w generacji osobników starszych, a od liczby tych wypadków zależy przede wszystkim wysokość świadczeń ubezpieczeniowych, które ma pokryć składka przeciętna.

Składka przeciętna jednej teoretycznej generacji ubezpieczonych nazywa się składką indywidualną. Nazwa ta pochodzi stąd, że teoretyczną generację ubezpieczonych jednakowego wieku traktujemy jako grupę osobników, którzy pod względem ryzyka ubezpieczeniowego niczym się nie różnią i z tego punktu widzenia są to indywidua jednakowe. Składka przeciętna takiej grupy odpowiada zatem ryzyku indywidualnemu osobników, którzy wchodzi w skład tej grupy, w przeciwstawieniu do składki przeciętnej grupy, składającej się z osobników różnego wieku.

Poniżej podajemy w zestawieniu 2. roczne składki indywidualne dla różnych wieków aktywnego przy czterech systemach świadczeń, opisanych w § poprzednim.

Zest. 2. Składka indywidualna przy rencie zasadniczej 100

Wiek	System świadczeń			
	I	II	III	IV
25	13,58	12,81	23,81	22,20
30	17,74	16,24	27,61	25,02
35	23,11	20,47	31,82	28,11
40	30,28	26,03	36,75	32,55
45	40,74	33,51	42,71	38,11
50	57,31	43,58	49,79	46,68
55	86,89	59,69	59,69	59,69
60	166,97	99,90	99,90	99,90

W zestawieniu podane są składki roczne przy rencie stałej 100 dla systemów świadczeń I i II; dla systemów świadczeń III i IV podane są składki przy rencie, której kwota zasadnicza wynosi 100, a więc przy takiej rencie, która w późniejszych latach ubezpieczenia posiada wartości podane w zestawieniu 1.

Z zestawienia 2. widać zależność składki indywidualnej od wieku ubezpieczonego; zależność ta jest najsilniejsza przy systemie świadczeń I. Dla uwydatnienia różnic, jakie istnieją między poszczególnymi systemami świadczeń, podajemy poniżej zestawienie odwrotności składek indywidualnych. Zestawienie 3. podaje nam mianowicie wysokości renty, jakie można otrzymać przy różnych systemach świadczeń za jedną i tę samą składkę roczną 100.

Z przytoczonego zestawienia widać, że przy określonym wieku ubezpieczonego można dać za tę samą składkę przy systemie świadczeń II wyższą rentę niż przy systemie I. Jest to zupełnie zrozumiałe, gdyż wprowadzając karencję, nie przyznajemy ubezpieczonemu w pierwszych latach ubezpieczenia prawa do żadnej renty inwalidzkiej i wdowiej; dlatego możemy później dać prawo do renty wyższej. Porównywając systemy świadczeń II i III widzimy, że za tę samą składkę dajemy przy systemie III niższą rentę początkową niż przy II, by móc za to dać w późniejszych latach ubezpieczenia rentę wyższą. Porównywając systemy III i IV widzimy, że, przesuując wzrosty rent z pierwszych lat ubezpieczenia na lata późniejsze, możemy dać za to wyższą rentę zasadniczą.

Zest. 3. Wysokość renty zasadniczej przy składce indywidualnej 100

Wiek	System świadczeń			
	I	II	III	IV
25	736	781	420	450
30	564	616	362	400
35	433	489	314	356
40	330	384	272	307
45	245	298	234	262
50	174	229	201	214
55	115	168	168	168
60	60	100	100	100

Składki indywidualne nie są na ogół stosowane w ubezpieczeniach społecznych. Zajmujemy się tu nimi jako pojęciami pomocniczymi, które ułatwią nam badanie składek przeciętnych, stosowanych w ubezpieczeniach społecznych. Główne zastosowanie znajdują składki indywidualne w ubezpieczeniach prywatnych, gdzie obowiązuje zasada, że każdy ubezpieczony opłaca składki, odpowiadające jego indywidualnemu ryzyku. W ubezpieczeniach prywatnych, przy przyjmowaniu do ubezpieczenia pojedynczych osobników, pobiera się od nich składki indywidualne, a więc postępuje się tak, jak gdyby przystępujący do ubezpieczenia był członkiem całej generacji ubezpieczonych tego samego co on wieku.

§ 3. UBEZPIECZENIE JAKO GRA LOSOWA

Powiedzieliśmy, że podstawą kalkulacji składki ubezpieczeniowej jest teoretyczna grupa ubezpieczonych. Składka ubezpieczeniowa jest tak skalkulowana, aby w ubezpieczeniu traktowanym jako całość wystarczała na pokrycie wszystkich świadczeń. Jeżeli jednak spojrzymy na stosunek zakładu ubezpieczeń do poszczególnego ubezpieczonego, to zobaczymy, że działalność zakładu ubezpieczeń polega na masowym prowadzeniu pojedynczych gier losowych. Z punktu widzenia poszczególnego ubezpieczonego ubezpieczenie jego jest grą losową, w której wypłata świadczenia uwarunkowana jest zajęciem wypadku losowego, mianowicie wypadku inwalidztwa lub

śmierci; podobnie np. w grze w kostkę sześcienną wypłata wygranej uwarunkowana jest wyrzuceniem określonej liczby oczek na kostce.

Gra losowa nie musi być prowadzona masowo; grę w kostkę lub w ruletkę prowadzić możemy tylko z jednym graczem. Jednakże jednostkowa gra nie może być podstawą żadnego urządzenia finansowego opartego na kalkulacji. Dopiero gra masowa, jak np. gra w ruletkę w kasynie gry, jest urządzeniem finansowym opartym na kalkulacji, zapewniającej zarządowi kasyna zyski. Ubezpieczenie społeczne jest również grą masową opartą na kalkulacji, przy czym jest ono w zasadzie grą sprawiedliwą, a więc nie obliczoną na zyski.

Analizując w pracy niniejszej ubezpieczenie z punktu widzenia wartości, jakie ono przedstawia dla poszczególnego ubezpieczonego, musimy podejść do tego ubezpieczenia jako do gry losowej. W ubezpieczeniu, tak jak w każdej grze losowej, zajście wypadku ubezpieczeniowego związane jest z określonym prawdopodobieństwem. Tak jak w grze w kostkę sześcienną wyrzucenie określonej liczby oczek związane jest z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$, tak i w ubezpieczeniu zajście wypadku inwalidztwa lub śmierci związane jest z określonym prawdopodobieństwem. Jednakże podkreślić tu musimy zasadniczą różnicę, jaka istnieje między pojęciem prawdopodobieństwa przy grze w kostkę a pojęciem prawdopodobieństwa w ubezpieczeniu. Prawdopodobieństwo $\frac{1}{6}$ wyrzucenia określonej liczby oczek przy rzucie kostką sześcienną jest to tzw. *p r a w d o p o d o b i e ń s t w o m a t e m a t y c z n e*. Do prawdopodobieństwa tego dochodzimy drogą rozumowania przez obliczenie stosunku liczby przypadków sprzyjających wyrzuceniu wybranej liczby oczek (1) do liczby w ogóle możliwych przypadków (6). Natomiast prawdopodobieństwa, którymi posługujemy się w ubezpieczeniach są to tzw. *p r a w d o p o d o b i e ń s t w a s t a t y s t y c z n e* (empiryczne).

Prawdopodobieństwa statystyczne otrzymuje się z obserwacji materiału statystycznego, który powinien być dostatecznie wielki i jednorodny; musi przy tym być sprawdzone, czy zjawisko, którego prawdopodobieństwo badamy, istotnie wykazuje dostateczną stałość, by można mu było przypisać określone i stałe prawdopodobieństwo. Posługując się dalej prawdopodobieństwem statystycznym przy ocenie przyszłego przebiegu zjawisk w jakiejś masie statystycznej, musimy zawsze mieć pewność, że ta masa statystyczna jest dostatecznie *z b l i ż o n a* do materiału obserwacyjnego,

z którego prawdopodobieństwa statystyczne pochodzą. Tak więc możemy tylko wtedy posługiwać się prawdopodobieństwami inwalidztwa i śmierci, w odniesieniu do jakiejś grupy aktywnych, gdy ta grupa jest dostatecznie zbliżona pod względem warunków życia, pracy i w ogóle pod względem warunków socjalnych i struktury demograficznej do grupy aktywnych, z których pochodzą prawdopodobieństwa inwalidztwa i śmierci.

Jednakże całkowita stałość zjawiska, którego prawdopodobieństwo badamy, nigdy w praktyce nie ma miejsca, jak również nie jest osiągalne nigdy całkowite podobieństwo masy statystycznej badanej do materiału obserwacyjnego, z którego prawdopodobieństwa pochodzą. Dlatego, traktując w dalszych naszych rozważaniach ubezpieczenie jako grę losową i wyciągając odpowiednie wnioski, musimy zawsze pamiętać o tym, że w praktyce wnioski te czasami będą musiały ulegać pewnej korekturze, wynikającej z charakteru prawdopodobieństw statystycznych w odróżnieniu od prawdopodobieństw matematycznych.

W rozważanym przez nas ubezpieczeniu renty inwalidzkiej, wdowiej i starczej wchodzi w grę przede wszystkim trzy następujące rodzaje prawdopodobieństw: prawdopodobieństwo inwalidztwa, prawdopodobieństwo śmierci w stanie aktywnym, prawdopodobieństwo dożycia wieku starczego. Ubezpieczenie nasze daje się porównać z następującą grą w kostkę sześcienną.

Gra składa się z serii rzutów kostką, gdzie każdy rzut odpowiada jednemu rokowi ubezpieczenia. Liczba rzutów jest z góry ograniczona i wynosi n . Wypłata wygranej następuje wtedy, gdy wyrzucona zostanie jedna z dwóch z góry wybranych liczb oczek. Wyrzucenie jednej z tych dwóch liczb odpowiada w ubezpieczeniu zajściu jednego z dwóch wypadków: inwalidności lub śmierci w stanie aktywnym, wypłata wygranej odpowiada wypłacie renty inwalidzkiej lub wdowiej. Wypłata wygranej może nastąpić przy pierwszym, drugim lub jakimś późniejszym rzucie kostką i wtedy następuje koniec gry. Jeśli jednak po n rzutach kostką żadna z wybranych liczb oczek nie zostanie wyrzucona, następuje mimo to wypłata wygranej; odpowiada to dożyciu przez ubezpieczonego wieku starczego w stanie aktywnym i wypłacie renty starczej.

Różnica między opisaną przez nas grą w kostkę a ubezpieczeniem polega na tym, że przy ubezpieczeniu prawdopodobieństwa zajścia wypadku inwalidności i prawdopodobieństwa śmierci w stanie aktywnym są różne i zmieniają się z roku na rok wraz z wiekiem ubez-

pieczonego. Przy grze w kostkę prawdopodobieństwo wyrzucenia każdej z dwóch wybranych liczb oczek jest jednakowe i wynosi $\frac{1}{6}$; prawdopodobieństwa te są stałe i nie zmieniają się w następnych rzutach kostką.

Ponadto w ubezpieczeniu emerytalnym „wygrana“ nie jest wypłacana jednorazowo, lecz w postaci renty inwalidzkiej, wdowiej lub starczej. Możemy jednak te przyszłe renty skapitalizować i traktować świadczenia inwalidzkie, wdowie i starcze jako świadczenia jednorazowe. Właśnie w tablicy 1. podane są te wartości kapitałowe rent dla naszych czterech systemów świadczeń. Z tablicy widać, że przy systemach świadczeń I i II wartość kapitałowa renty inwalidzkiej, wdowiej i starczej zależy jedynie od wieku ubezpieczonego w chwili zapadnięcia renty, a nie zależy od tego, jak długo aktywny przebywał w ubezpieczeniu. Natomiast przy systemach świadczeń III i IV (ze wzrostami rent) wartość kapitałowa renty zależy od czasu przebywania w ubezpieczeniu. Na przykład przy systemie świadczeń III wartość kapitałowa renty inwalidzkiej w wysokości 100 dla ubezpieczonego 45 letniego wynosi 1 554,8, jeśli ten ubezpieczony wstąpił do ubezpieczenia w wieku lat 25, a więc przebył w ubezpieczeniu 20 lat. Natomiast dla ubezpieczonego 45-letniego, który wstąpił do ubezpieczenia w wieku lat 30, a więc przebył w nim tylko 15 lat, wartość kapitałowa renty inwalidzkiej wynosi 1 295,6.

Co do wartości kapitałowych renty wdowiej, podanych w tablicy 1., zaznaczamy, że nazwa ta jest o tyle nieściśła, że w tablicy 1. podane są wartości kapitałowe renty wdowiej już po pomnożeniu przez współczynnik żonatości. Na przykład podana dla systemu świadczeń I przy wieku 30 wielkość 445,7 jest to przeciętna wartość kapitałowa świadczenia, jakie wypłaca zakład ubezpieczeń w razie śmierci 30-letniego aktywnego. Faktycznie rzecz biorąc, zakład ubezpieczeń wypłaca świadczenie po śmierci ubezpieczonego tylko wtedy, gdy zmarły był żonaty; aby otrzymać przeciętną wartość kapitałową renty wdowiej, należy zatem wartość kapitałową renty pomnożyć przez współczynnik żonatości, tj. prawdopodobieństwo, że zmarły był żonaty w chwili śmierci.

Prawdopodobieństwa inwalidztwa i śmierci w stanie aktywnym dla wieku lat 40 i wieków wyższych podane są w kolumnach (3) i (6) tablicy 2.; warto przy tym zauważyć, że prawdopodobieństwa inwalidztwa rosną znacznie silniej niż prawdopodobieństwa śmierci. Jeśli pomnożymy prawdopodobieństwo inwalidności lub śmierci

w stanie aktywnym przez wartość świadczenia, związanego z tym prawdopodobieństwem, otrzymamy składkę naturalną, tj. składkę potrzebną na ubezpieczenie świadczenia ubezpieczeniowego w jednym roku ubezpieczeniowym. Iloczyn jakiegoś prawdopodobieństwa przez wypłatę, która jest związana z tym prawdopodobieństwem nosi nazwę wartości prawdopodobnej tej wypłaty. Składka naturalna jakiegoś roku ubezpieczeniowego jest to zatem wartość prawdopodobna świadczenia ubezpieczeniowego, płatnego w tym roku ubezpieczeniowym. W kol. (5) i (8) tablicy 2. podane są składki naturalne za rentę inwalidzką i wdowią. Podobnie jak to zauważyliśmy przy prawdopodobieństwach inwalidztwa i śmierci, również składka naturalna za rentę inwalidzką rośnie znacznie silniej wraz z wiekiem niż składka naturalna za rentę wdowią. W kol. (9) podana jest łączna składka naturalna¹.

Wracając do naszego przykładu gry w kostkę, zauważymy, że gdyby ewentualna wygrana przy każdym rzucie była równa 1, wartość prawdopodobna wygranej przed każdym rzutem, tj. składka naturalna byłaby równa $\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{3}$; składka naturalna byłaby zatem stała i równa $\frac{1}{3}$. W ubezpieczeniu jednak składka naturalna jest zmienna i na ogół wzrasta dość silnie, jak to widzimy z tablicy 2.

§ 4. ZASADA RÓWNOWAŻNOCI SKŁADEK I ŚWIADCZEŃ

Pobieranie w ubezpieczeniach składek naturalnych od ubezpieczonego, jakkolwiek zapewniałoby środki na wypłatę świadczeń, prowadziłoby do tego, że w młodszym wieku ubezpieczony opłacałby składkę stosunkowo niską, ale za to w starszym wieku musiałby opłacać składkę znacznie wyższą. Składka ta odpowiadałaby wprawdzie jego indywidualnemu ryzyku, ale stanowiłaby często zbyt silne obciążenie ubezpieczonego. Jak widać z tablicy 2., składka naturalna osoby 40-letniej przy systemie świadczeń I rośnie od 10.67 do 83.15. Najważniejsze jest jednak to, że po dożyciu wieku starczego 65 lat w stanie aktywnym, ubezpieczony musiałby dla zabezpieczenia sobie renty starczej wpłacić jednorazowo wartość kapitałową tej renty starczej. Ta wartość kapitałowa w naszym przykładzie podana jest u dołu tablicy 2. i wynosi 817,4.

¹ Przez składkę naturalną rozumie się również często obliczone przez nas wielkości, zdyskontowane na początek roku ubezpieczenia.

Zamiast zmiennych składek naturalnych i składki jednorazowej na rentę starczą, można jednak obliczyć stałą składkę roczną, która również będzie wystarczała na ubezpieczenie renty inwalidzkiej, wdowiej lub starczej. Ta składka stała będzie oczywiście wyższa od składek naturalnych w pierwszych latach ubezpieczenia, ale za to będzie niższa od składek naturalnych w ostatnich latach ubezpieczenia, oraz od składki jednorazowej za rentę starczą. Taką składką stałą jest właśnie składka indywidualna, o której mówiliśmy w § 2, obliczona jako składka przeciętna jednej generacji ubezpieczonych jednakowego wieku.

W ubezpieczeniu traktowanym jako gra losowa, składka indywidualna nie pokrywa, tak jak składka naturalna, w każdym roku ubezpieczenia tylko wartości prawdopodobnej świadczenia ubezpieczeniowego z tego roku ubezpieczeniowego. Jednakże składki indywidualne ze wszystkich lat ubezpieczenia łącznie, pokrywają dokładnie sumę wartości prawdopodobnych świadczeń ubezpieczonych ze wszystkich lat ubezpieczenia. Dla poszczególnego ubezpieczenia spełniona jest zasada równoważności składek i świadczeń, w sformułowaniu następującym: Na początku ubezpieczenia wartość prawdopodobna wszystkich przyszłych świadczeń równa jest wartości prawdopodobnej wszystkich przyszłych składek. Przez wartość prawdopodobną świadczenia lub składki na początku ubezpieczenia należy tu rozumieć iloczyn odpowiedniego prawdopodobieństwa przez zdyskontowaną na początek ubezpieczenia wartość tego świadczenia lub składki. Sformułowana tu zasada jest odpowiednikiem omawianej w § 2 zasady równoważności składek i świadczeń dla grupy i może również służyć do obliczenia składki indywidualnej.

W tabelicy 3. podana jest ilustracja zasady równoważności składek i świadczeń dla rozważanego już przez nas przykładu ubezpieczenia osoby 40-letniej przy systemie świadczeń I; składka indywidualna roczna wynosi w tym przypadku 30,28 przy rencie rocznej 100, jak to wiemy z zestawienia 2.

W kol. (2) tabelicy 3. podane są prawdopodobieństwa inwalidności osoby 40-letniej na początku ubezpieczenia. Liczby te różnią się tym od prawdopodobieństw podanych w kol. (3) tabelicy 2., że w tej ostatniej, np. w 11. wierszu, podane jest prawdopodobieństwo, że 50-letni aktywny zostanie inwalidą w ciągu najbliższego roku; wynosi ono 0,0138. Natomiast w kol. (2) tabelicy 3. odpowiednia liczba 0,0114

oznacza prawdopodobieństwo, że 40-letni aktywny zostanie inwalidą w jedenastym roku ubezpieczenia; jest to zatem prawdopodobieństwo złożone, że ubezpieczony dożyje w stanie aktywnym wieku 50 lat i że po tym w ciągu najbliższego roku zostanie inwalidą. W kol. (3) tejsze tablicy podane są zdyskontowane na początek ubezpieczenia wartości kapitałowe rent inwalidzkich z tablicy 2. A więc w odniesieniu do początku ubezpieczenia z prawdopodobieństwem podanym w kol. (2) zakład ubezpieczeń świadczy ubezpieczonemu wartość podaną w kol. (3). Przez pomnożenie liczb z kol. (2) przez odpowiednie liczby z kol. (3) otrzymujemy w kol. (4) wartości prawdopodobne na początku ubezpieczenia świadczeń inwalidzkich z poszczególnych lat ubezpieczenia. Wartość prawdopodobna na początku ubezpieczenia wszystkich wypłat inwalidzkich jest sumą wartości prawdopodobnych ze wszystkich lat i wynosi 180,13.

W kol. od (5) do (7) obliczona jest w zupełnie podobny sposób wartość prawdopodobna wszystkich świadczeń wdowich, która wynosi 111,64; u dołu zaś tablicy 3. obliczona jest wartość prawdopodobna renty starczej, wynosząca 82,77. Wartość prawdopodobna na początku ubezpieczenia wszystkich przyszłych świadczeń ubezpieczenia wynosi zatem: $180,13 + 111,64 + 82,77 = 374,54$.

Powyzsza wartość prawdopodobna świadczeń powinna w myśl zasady równoważności być równa wartości prawdopodobnej wszystkich przyszłych składek, która jest właśnie obliczona w kol. (8) do (10) tablicy 3. W kol. (8) podane są prawdopodobieństwa dożycia przez ubezpieczonego w stanie aktywnym poszczególnych lat ubezpieczenia. Z tymi prawdopodobieństwami związana jest wpłata składki indywidualnej 30,28 w każdym roku ubezpieczeniowym, gdyż ubezpieczony ma opłacać składki tak długo, dopóki pozostaje aktywny. Wartość prawdopodobna na początku ubezpieczenia wszystkich przyszłych składek wynosi 374,54 tj. tyle, ile obliczona wyżej wartość prawdopodobna wszystkich świadczeń.

§ 5. REZERWA INDYWIDUALNA RETROSPEKTYWNA. KAPITAŁ POD RYZYKIEM. SKŁADKI ZA RYZYKO I SKŁADKA OSZCZĘDNOŚCIOWA

Stosowanie w ubezpieczeniach składki stałej zamiast rosnących składek naturalnych i składki za rentę starczą wprowadza do ubezpieczenia element oszczędności obok elementu ryzyka. Składka stała jest pewnego rodzaju przeciętną składek naturalnych i kapitałowej wartości renty starczej. W naszym przy-

kładzie składka stała 30,28 jest pewnego rodzaju przeciętną składek naturalnych, które rosną od 10,67 do 83,15 oraz kapitałowej wartości renty starczej, która wynosi 817,4 (por. tablicę 2.). Składka stała jest wyższa od pierwszych trzynastu składek naturalnych, ale jest niższa od wszystkich następnych składek naturalnych. Opłacając w pierwszych latach ubezpieczenia więcej niż składki naturalne, ubezpieczony nie tylko korzysta z ubezpieczenia, ale również pozostawia w zakładzie ubezpieczeń pewne kwoty, które stanowią jego oszczędność. Te kwoty oszczędnościowe wzrastają z roku na rok i osiągają wreszcie wartość kapitałową renty starczej, gdy ubezpieczony dożyje w stanie aktywnym 65 roku. Aby zdać sobie sprawę z procesu oszczędzania w ubezpieczeniu, musimy umieć obliczać wysokość tych kwot oszczędnościowych w dowolnym momencie ubezpieczenia, zanim ubezpieczony dożyje wieku starczego.

* Ponieważ kwoty oszczędnościowe w pierwszych latach ubezpieczenia powstają z opłacania składek indywidualnych wyższych od składki naturalnej, zobaczymy najprzód jak analogiczna sytuacja wygląda w naszym przykładzie gry w kostkę. Powiedzieliśmy, że składka naturalna przy tej grze, tj. stawka za każdy rzut jest stała i wynosi $\frac{1}{3}$. Znaczy to, że grający, wpłacając przed każdym rzutem stawkę $\frac{1}{3}$, otrzymuje w wypadku wyrzucenia jednej z dwóch wybranych liczb oczek wygraną 1, jednocześnie jednak w p ł a c o n a s t a w k a $\frac{1}{3}$ p r z e p a d a.

Przypuśćmy teraz, że ktoś wpłaca za pierwszy rzut kostką jakąś kwotę większą niż $\frac{1}{3}$, chociaż ewentualna wygrana pozostaje równa 1; niech ta kwota wyniesie np. $\frac{1}{2}$. Jeżeli przy rzucie kostką żadna z wybranych liczb oczek nie zostanie wyrzucona i grający przegra, powinien on otrzymać resztę z kwoty $\frac{1}{2}$, która jest większa od stawki $\frac{1}{3}$. Wydawałoby się, że ta reszta powinna wynosić $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; byłoby tak istotnie, gdyby ta reszta była zwracana grającemu również w wypadku wygranej. Przypuśćmy jednak, że warunki gry są tego rodzaju, że w wypadku wygranej grający otrzymuje tylko wygraną 1, natomiast cała wpłacona kwota $\frac{1}{2}$ przepada. Jaką resztę powinien grający otrzymać w wypadku przegranej, aby gra była sprawiedliwa? Oznaczmy tę resztę przez V . Rozwiązać postawione zadanie możemy w ten sposób, że traktujemy całą kwotę $\frac{1}{2}$ jako stawkę gry, w której grający z prawdopodobień-

* Przy pierwszym czytaniu może czytelnik opuścić ustęp zaznaczony gwiazdkami, jako nieco trudniejszy.

stwem $\frac{1}{3}$ może wygrać kwotę 1, w wypadku zaś niewyrzucenia żadnej z dwóch wybranych liczb oczek, a więc z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$, grający również wygrywa, ale poszukiwaną przez nas resztę V . Wtedy wartość prawdopodobna wygranej dla grającego wynosi: $\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot V$; aby gra była sprawiedliwa musi być stawka $\frac{1}{2}$ równa wartości prawdopodobnej wygranej, mamy zatem równanie:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot V$$

skąd znajdujemy resztę V :

$$V = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4},$$

która jest większa od $\frac{1}{6}$.

Otrzymane przez nas równanie możemy napisać w postaci następującej:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} (1 - V) + V$$

Wtedy stawka $\frac{1}{2}$ jest sumą dwóch składników: pierwszy składnik jest to stawka za grę, w której wygrana równa jest kwocie $1 - V$, drugi składnik to reszta V . Opisaną wyżej grę za stawkę $\frac{1}{2}$ możemy zatem traktować jako *d w i e o p e r a c j e*. Jedna operacja jest to *g r a l o s o w a*, w której ewentualna wygrana wynosi $1 - V$; stawka za tę grę wynosi $\frac{1}{3}(1 - V)$. Druga operacja to zwykły *w k ł a d o s z c z ę d n o ś c i o w y* kwoty V , która ulega zwrotowi po grze, zarówno w wypadku wygranej jak i przegranej. Wpłacając zatem kwotę $\frac{1}{2}$, grający otrzymuje po pierwszym rzucie kostką w wypadku przegranej resztę V , w wypadku wygranej resztę V oraz wygraną $1 - V$, razem 1.

W wypadku przegranej po pierwszym rzucie, grający może nie podejmować reszty V , lecz łącznie z nową kwotą $\frac{1}{2}$ traktować ją jako stawkę przy drugim rzucie kostką; wtedy możemy obliczyć resztę po drugim rzucie kostką w zupełnie podobny sposób jak po pierwszym rzucie. Postępując tak dalej, możemy obliczyć resztę ze wszystkich wpłaconych kwot $\frac{1}{2}$ po dowolnej liczbie rzutów, o ile oczywiście w żadnym z tych rzutów nie padła wygrana.

Opłacanie składki indywidualnej stałej w ubezpieczeniach odbywa się na tych samych warunkach, co wyżej opisana gra ze stawką $\frac{1}{2}$. W wypadku inwalidztwa lub śmierci aktywnego zakład ubezpieczeń wypłaca rentę, lecz żadna część wpłaconych przez ubezpieczonego składek nie ulega zwrotowi. Dlatego reszta pozostała ze składki indywidualnej po upływie roku ubezpieczeniowego, jeśli wypadek

ubezpieczeniowy w tym roku nie nastąpił, oblicza się w podobny sposób jak wyżej opisana kwota V. W ubezpieczeniach ta reszta, stanowiąca oszczędność ubezpieczonego, obliczana jest jednak z uwzględnieniem oprocentowania*.

Wysokość oszczędności, jaka pozostaje ubezpieczonemu z opłacania składek indywidualnych, nosi nazwę *i n d y w i d u a l n e j r e z e r w y r e t r o s p e k t y w n e j*. Dla naszego przykładu składki indywidualnej 30,28 rezerwa indywidualna retrospektywna po 1. roku ubezpieczenia wynosi 21,34.

Tak jak opisana przez nas gra w kostkę, również i ubezpieczenie może być traktowane jako suma dwóch operacji: jednej czysto oszczędnościowej, drugiej czystej gry losowej. Wygraną w tej grze losowej nie jest kapitałowa wartość renty inwalidzkiej lub wdowiej, lecz te wartości, zmniejszone o indywidualną rezerwę retrospektywną. Różnicę między kapitałową wartością renty a rezerwą nazywać będziemy *k a p i t a ł e m p o d r y z y k i e m*. Dla naszego przykładu kapitał pod ryzykiem w pierwszym roku ubezpieczenia wynosi:

dla ryzyka inwalidztwa	$1\ 033,4 - 21,3 = 1\ 012,1$
dla ryzyka śmierci	$717,1 - 21,3 = 695,8$

W wypadku inwalidztwa lub śmierci w 1. roku ubezpieczenia, ubezpieczony „wygrywa” odpowiedni kapitał pod ryzykiem oraz otrzymuje zwrot swojej oszczędności, tj. indywidualnej rezerwy retrospektywnej; razem zakład ubezpieczeń świadczy zatem kapitałową wartość renty. Jeśli ani wypadek śmierci ani inwalidztwa w 1. roku ubezpieczenia nie nastąpi, ubezpieczony ma w zakładzie ubezpieczeń oszczędność w wysokości rezerwy indywidualnej retrospektywnej.

Składkę naturalną za kapitał pod ryzykiem, zdyskontowaną na początek roku ubezpieczeniowego, nazywać będziemy *s k ł a d k ą z a r y z y k o*; w naszym przykładzie w pierwszym roku ubezpieczenia składka za ryzyko inwalidztwa wynosi 3,68, składka za ryzyko śmierci — 6,26. Łatwo sprawdzić, że powyższe składki oprocentowane na 4,5% na jeden rok dają składkę naturalną za kapitał pod ryzykiem:

$$3,68 \cdot 1,045 = 3,85 = 1\ 012,1 \cdot 0,0038$$

$$6,26 \cdot 1,045 = 6,54 = 695,8 \cdot 0,0094$$

Łączna składka za ryzyko wynosi 9,94; jest to zatem odgrywająca rolę stawki za „grę“ ubezpieczeniową część składki indywidualnej 30,28. Reszta składki indywidualnej wynosząca 20,34 nosi nazwę s k ł a d k i o s z c z ę d n o ś c i o w e j. Składka oszczędnościowa po doliczeniu odsetek za jeden rok daje indywidualną rezerwę retrospektywną po pierwszym roku ubezpieczenia:

$$20,34 \times 1,045 = 21,3$$

To co przerachowaliśmy dla pierwszego roku ubezpieczenia, daje się powtórzyć dla drugiego roku. W drugim roku ubezpieczenia składka za ryzyko jest inna niż w pierwszym roku; wynosi ona 10,43. Składka oszczędnościowa wynosi zatem 30,28 — 10,43 = 19,85. Indywidualna rezerwa retrospektywna po 1. roku ubezpieczenia, powiększona o powyższą składkę oszczędnościową i oprocentowana na rok, daje indywidualną rezerwę retrospektywną po 2. roku ubezpieczenia:

indywidualna rezerwa retrosp. po 1 roku	21,34
składka oszczędnościowa w 2. roku	19,85
razem	41,19

indywidualna rezerwa retrosp. po 2. roku: $41,19 \times 1,045 = 43,04$

Ogólnie, indywidualna rezerwa retrospektywna po dowolnej liczbie lat ubezpieczenia równa jest oprocentowanej wartości składek oszczędnościowych z tych lat ubezpieczenia. Widzimy zatem, że oszczędzanie w ubezpieczeniu odbywa się w ten sposób, że z płaconych przez ubezpieczonego składek indywidualnych potrąca się składki za ryzyko, które stanowią koszt czystej „gry“ ubezpieczeniowej; resztę tj. składki oszczędnościowe kapitalizuje się i otrzymuje w ten sposób indywidualną rezerwę retrospektywną, tj. oszczędność ubezpieczonego.

§ 6. RYZYKO I OSZCZĘDNOŚĆ PRZY RÓŻNYCH SYSTEMACH ŚWIADCZEŃ

W tablicy 4. podane są indywidualne rezerwy retrospektywne dla naszych czterech systemów świadczeń. Łatwo sprawdzić przez porównanie z tablicą 1., że te rezerwy indywidualne wraz z 65. rokiem życia ubezpieczonego osiągają wartość kapitałową renty star-

czej. Przy systemach świadczeń I i II wartość końcowa rezerwy indywidualnej jest niezależna od wieku wstąpienia do ubezpieczenia i wynosi stale 817,44. Przy systemach świadczeń III i IV wartość końcowa rezerwy indywidualnej zależy od wieku wstąpienia do ubezpieczenia, tak jak wartość kapitałowa renty starczej z tablicy 1.

Przez odjęcie liczb tablicy 4. od liczb tablicy 1., znajdujemy w tablicy 5. wysokości kapitału pod ryzykiem. Już przy systemie świadczeń I znajdujemy osobliwość: ujemny kapitał pod ryzykiem. Cóż on oznacza? Dla ubezpieczonego, wstępującego do ubezpieczenia w wieku 25 lat, indywidualna rezerwa retrospektywna po 35 latach wynosi 594,40, wartość kapitałowa renty wdowiej 549,0. Wartość świadczenia wdowiego jest niższa od rezerwy; jeśli ubezpieczony umrze w 35. roku ubezpieczenia nie tylko nic nie „wygrywa“, ale „przegrywa“ kwotę 45,4.

Przy systemie świadczeń II ujemne kapitały pod ryzykiem występują już systematycznie w pierwszych pięciu latach ubezpieczenia. Jest to wpływ karencji; w okresie karencji wartość świadczenia równa jest zeru i kapitał pod ryzykiem równy jest rezerwie ze znakiem minus. Ponieważ przy naszych systemach świadczeń nie są w okresie karencji wypłacane żadne odprawy jednorazowe, to w wypadku inwalidztwa lub śmierci w okresie karencji ubezpieczony „przegrywa“ całą swoją rezerwę indywidualną.

Przy systemach świadczeń III i IV ujemne kapitały pod ryzykiem występują stale w pierwszych pięciu latach ubezpieczenia i w ostatnich latach ubezpieczenia przed zapadnięciem renty starczej.

W tych wypadkach, w których kapitał pod ryzykiem jest ujemny, jest również ujemna odpowiednia składka za ryzyko. Podział składki indywidualnej na składkę oszczędnościową i składki za ryzyko podany jest w tablicy 6. Z tablicy tej widać, że ta sama składka indywidualna w różnych latach ubezpieczenia inaczej się rozkłada na składkę oszczędnościową i na składkę za ryzyko. Na przykład przy systemie świadczeń I dla wieku 25 składka za ryzyko śmierci rośnie przez 20 lat ubezpieczenia, po czym maleje i staje się ujemna tam, gdzie odpowiedni kapitał pod ryzykiem z tablicy 5. był również ujemny. Ujemną składkę za ryzyko możemy traktować jako stawkę za „grę“ ubezpieczeniową, którą wpłaca nie ubezpieczony, lecz zakład ubezpieczeń. Ewentualną „wygraną“ wypłaca nie zakład ubezpieczeń, lecz ubezpieczony ze swojej indywidualnej rezerwy retrospektywnej.

W tym samym przykładzie składka za ryzyko inwalidztwa rośnie przez 35 lat ubezpieczenia, natomiast w ostatnim roku ubezpieczenia jest również ujemna, tak jak składka za ryzyko śmierci. Ponieważ składki za ryzyko rosną prawie przez cały czas ubezpieczenia, składka oszczędnościowa musi maleć, by suma tej składki oraz składek za ryzyko pozostawała równa składce indywidualnej 13,58. W 30-ym roku ubezpieczenia składka oszczędnościowa staje się ujemna; znaczy to, że w tym roku ubezpieczenia ubezpieczony nie oszczędza, lecz czerpie ze swych oszczędności dla pokrycia części składek za ryzyko, które łącznie przekraczają składkę indywidualną. W ostatnich latach ubezpieczenia składka oszczędnościowa rośnie gwałtownie. Taki sam jest mniej więcej przebieg składek za ryzyko i składki oszczędnościowej dla innych wieków przy systemie świadczeń I. Przy systemie tym oszczędzanie jest coraz słabsze wraz z upływem lat ubezpieczenia i dopiero w ostatnich latach ubezpieczenia wzma-ga się gwałtownie; nie dotyczy to jednak najstarszych wieków, gdzie składka oszczędnościowa rośnie od początku ubezpieczenia.

Przy systemach świadczeń II, III, IV, składki za ryzyko są wskutek karencji w ciągu pierwszych pięciu lat ubezpieczenia ujemne i dlatego składka oszczędnościowa przewyższa składkę indywidualną; w ciągu tych pięciu lat ubezpieczenia składka oszczędnościowa rośnie. Potem składka oszczędnościowa maleje jak przy systemie I, by w końcu ubezpieczenia wzrosnąć gwałtownie.

Póki składki za ryzyko pozostają dodatnie, a składka oszczędnościowa nie jest większa od składki indywidualnej, mechanizm narastania rezerwy indywidualnej nie budzi żadnych wątpliwości. Z chwilą jednak, gdy w jakimś roku ubezpieczeniowym mamy do czynienia z ujemnymi składkami za ryzyko i w związku z tym składka oszczędnościowa może być większa od składki indywidualnej, sytuacja zaczyna wydawać się paradoksalna. Budzą się wątpliwości, w jaki sposób przyrost roczny rezerwy indywidualnej może być większy od przyrostu, jaki uzyskałby ubezpieczony, wpłacając całą składkę indywidualną do banku na zwykły wkład procentowy. Jeżeli jednak pamiętać będziemy o tym, co już podkreślaliśmy, że ubezpieczenie jest grą masową, to zrozumiemy, że fundusze na nadwyżkę między składką oszczędnościową a składką indywidualną uzyskane są stąd, że ubezpieczonym, którzy w rozpatrywanym przez nas roku ubezpieczeniowym zmarli lub zostali inwalidami, przyznano świadczenia o wartości niższej niż ich rezerwa indywidualna.

Dla porównania między sobą rozważanych czterech systemów

świadczeń, podane są w tabelicy 7. wartości składek oszczędnościowych przy składce indywidualnej 100, jednakowej dla wszystkich czterech systemów świadczeń; wysokości rent przy składce 100 podane były w zestawieniu 3.

Z tabelicy 7. widać, że system świadczeń II w okresie karencji zawiera więcej elementu oszczędnościowego niż system świadczeń I, ale za to po okresie karencji więcej elementu oszczędnościowego zawiera system I.

Porównanie systemów świadczeń II i III wykazuje dobitnie, że system świadczeń III, tj. system świadczeń przyznający wzrosty rent, jest systemem o znacznie większym elemencie oszczędnościowym niż system świadczeń II z rentą stałą. Z wyjątkiem okresu karencji, gdzie obydwa systemy dają jednakowe składki oszczędnościowe, system III daje stale wyższe składki oszczędnościowe niż system II.

O systemie świadczeń IV, w porównaniu z systemem świadczeń II, daje się to samo powiedzieć, co o systemie III. Natomiast porównanie systemów świadczeń III i IV wykazuje, że przesunięcie wzrostów rent na późniejsze lata ubezpieczenia nie zawsze powiększa element oszczędnościowy. Z tabelicy 7. widać, że system świadczeń IV daje po okresie karencji dla wieku 25 wyższe składki oszczędnościowe niż system III; natomiast dla wieku 40 jest na ogół odwrotnie.

Dotychczasowe nasze rozważania wykazały, że ubezpieczenie ze składką indywidualną stanowi o r g a n i c z n e połączenie operacji oszczędnościowej z operacją czystej gry losowej; ta czysta gra losowa oparta jest o element ryzyka ubezpieczeniowego. Organiczność połączenia oszczędności z ryzykiem w ubezpieczeniu polega na tym, że kwota oszczędności, tj. rezerwa indywidualna retrospektywna, i „wygrana“ ubezpieczeniowa, tj. kapitał pod ryzykiem, są tak dobrane, że uzupełniają się nawzajem i w łącznym efekcie dają świadczenia ubezpieczeniowe z góry przewidziane w systemie świadczeń. Na przykładzie różnych systemów świadczeń widzieliśmy, że stosunek elementu oszczędności do elementu ryzyka może być różny; możemy pomyśleć takie systemy świadczeń, w których element oszczędności odgrywa dominującą rolę, a element ryzyka jest bardzo nieznaczny i na odwrót. Krańcowym przypadkiem ubezpieczenia byłoby z jednej strony ubezpieczenie pozbawione całkowicie elementu oszczędności; takim jest ubezpieczenie ze składką naturalną. Z drugiej strony, krańcowym przypadkiem ubezpieczenia, pozbawionego całkowicie elementu ryzyka, jest zwykły bankowy wkład oszczędnościowy. Nie chcemy tu rozstrzygać zagadnienia,

jakie ustosunkowanie elementu ryzyka do elementu oszczędności jest najwłaściwsze dla ubezpieczenia społecznego. Zresztą byłoby to przedwczesne, gdyż dopiero w rozdziale II zajmiemy się składką przeciętną, która jest stosowana w ubezpieczeniu społecznym; zaś zagadnienie ustosunkowania ryzyka do oszczędności przy składce przeciętnej jest bardziej skomplikowane niż w wypadku składki indywidualnej. Chcieliśmy tu jednak uwydatnić rolę ubezpieczenia ze składką indywidualną, jako metody organicznego połączenia oszczędności i ryzyka. Dzięki temu metoda kalkulacji ubezpieczeniowej jest najdoskonalszą, bo najprostszą metodą ujęcia rachunkowego zadań postawionych w zakresie ryzyka i oszczędności¹.

§ 7. REZERWA INDYWIDUALNA PROSPEKTYWNA. BILANS TECHNICZNY

Traktując ubezpieczenie jako grę losową, widzieliśmy, że przy składce indywidualnej spełniona jest na początku ubezpieczenia następująca zasada równoważności: wartość prawdopodobna przyszłych świadczeń równa jest wartości prawdopodobnej przyszłych składek. Ta równowaga ubezpieczenia będzie jednak naruszona w późniejszych latach ubezpieczenia, gdzie wartość prawdopodobna przyszłych świadczeń będzie większa od wartości prawdopodobnej przyszłych składek. Aby i w późniejszych latach była zachowana równowaga ubezpieczenia, musiałaby być zarachowana na dobro

¹ Warto w tym miejscu przypomnieć broszurę Brauna (5), która spotkała się już z krytyką (por. Sasorski, 17). Rezultaty p. Brauna mogły urzeć światło dzienne tylko dzięki temu, że opierały się na bardzo skomplikowanej technicznie próbie s z t u c z n e g o połączenia oszczędności z ryzykiem. Dzięki temu można było tak jednostronnie dobierać przykłady, żeby wytworzyć sugestię, jakoby czysto rachunkowy podział składki na część oszczędnościową i część służącą na pokrycie ryzyka, mógł powiększyć efekt finansowy ubezpieczenia.

Gdyby w ubezpieczeniu społecznym chodziło tylko o te cele, które widzi p. Braun, znacznie doskonalszą ich realizację mogłoby stanowić ubezpieczenie ze składką indywidualną, jako organiczne połączenie oszczędności z ryzykiem, w przeciwstawieniu do sztucznego połączenia w projekcie p. Brauna.

Ubezpieczenie ze składką indywidualną jest historycznie wcześniejsze od ubezpieczenia ze składką przeciętną. Emerytalne ubezpieczenie społeczne zostało ugruntowane jednak według tej drugiej formy technicznej (składka przeciętna), a wpłynęły na to istotne względy natury społecznej i gospodarczej, którymi zajmujemy się w § 10., a których zwolennicy tzw. przymusowej oszczędności i częściowego ubezpieczenia nie widzą albo też widzieć nie chcą.

ubezpieczonego pewna kwota, która dodana do wartości prawdopodobnej przyszłych składek, dawałaby w sumie wielkość równą wartości prawdopodobnej przyszłych świadczeń. Ta kwota, potrzebna do zachowania równowagi ubezpieczenia, nosi nazwę indywidualnej rezerwy prospektywnej. W zastosowaniu do późniejszych lat ubezpieczenia, zasada równoważności posiada zatem brzmienie następujące: w dowolnym momencie ubezpieczenia wartość prawdopodobna przyszłych świadczeń równa jest indywidualnej rezerwie prospektywnej, powiększonej o wartość prawdopodobną przyszłych składek.

Dla rozpatrywanego już przez nas przykładu ubezpieczenia osoby 40-letniej przy systemie świadczeń I wartość prawdopodobna przyszłych świadczeń po 1. roku trwania ubezpieczenia, obliczona w podobny sposób jak w tabelicy 3., wynosi 385,88; wartość prawdopodobna przyszłych składek w tym samym momencie wynosi 364,54; po 1. roku trwania ubezpieczenia indywidualna rezerwa prospektywna, jako różnica tych wielkości, wynosi zatem 21,34. Jak widzimy, ta rezerwa prospektywna równa jest omawianej w § 5. indywidualnej rezerwie retrospektywnej po 1. roku. Nie jest to rezultat przypadkowy. Indywidualna rezerwa retrospektywna jest zawsze równa indywidualnej rezerwie prospektywnej. Znaczy to, że przy ubezpieczeniu ze składką indywidualną reszta pozostała ze składek, po potrąceniu kosztów ryzyka, wystarcza dokładnie na to, by ubezpieczenie było zrównoważone.

Podane w tabelicy 4. rezerwy indywidualne są to zarazem rezerwy retrospektywne i prospektywne. W dalszym ciągu będziemy często mówili krótko o rezerwie indywidualnej, jeżeli nie będzie nam zależało na rozróżnieniu pojęć rezerwy retrospektywnej i prospektywnej. Należy jednak pamiętać o tym, że do pojęcia rezerwy prospektywnej doszliśmy niezależnie od pojęcia rezerwy retrospektywnej; ważne to będzie przy rozważaniu składki przeciętnej, gdzie rezerwa retrospektywna nie jest na ogół równa rezerwie prospektywnej.

Pojęcie indywidualnej rezerwy prospektywnej posiada znaczenie dla zagadnienia badania stanu finansowego zakładów ubezpieczeń. Narzędziem tego badania jest bilans ubezpieczeniowo-techniczny.¹ Zadaniem tego bilansu jest zbadanie, w ja-

¹ Koźniewski (8).

kim stopniu rezerwy posiadane przez zakład ubezpieczeń. wystarczą na pokrycie zobowiązań, jakie zakład posiada z tytułu ubezpieczeń przez siebie prowadzonych. Aby na to pytanie odpowiedzieć, postępuje się przy składce indywidualnej w sposób następujący.

Rozpatruje się teoretyczną grupę ubezpieczonych taką, o jakiej mówiliśmy w § 2. składającą się z jednej generacji aktywnych; obok tego rozpatruje się trzy grupy: inwalidów, wdów i starców, z których każda stanowi jedną generację osobników. Stan początkowy, tj. liczba i rozkład według wieku każdej z tych czterech generacji, powinien pokrywać się ze stanem aktywnych, inwalidów, wdów i starców, ubezpieczonych w zakładzie ubezpieczeń w chwili sporządzenia bilansu ubezpieczeniowo-technicznego. W szczególności zatem generacje te nie będą się składały z osobników jednakowego wieku, gdyż w zakładzie ubezpieczeń są zwykle ubezpieczeni osobnicy różnego wieku.

Dla każdej z czterech teoretycznych generacji ustala się przebieg wypadków losowych na przyszłość i wysokość świadczeń w każdym roku ubezpieczenia. Tak jak to opisaliśmy w § 2. przy kalkulacji składki indywidualnej, dyskontujemy teraz na moment sporządzania bilansu, z jednej strony wszystkie przyszłe świadczenia, z drugiej strony wszystkie przyszłe składki. Schemat bilansu ubezpieczeniowo-technicznego jest wtedy następujący:

A k t y w a

1. Zdyskontowana wartość przyszłych składek generacji aktywnych.
2. Rezerwy majątkowe zakładu ubezpieczeń.

P a s y w a

1. Zdyskontowana wartość przyszłych świadczeń dla generacji inwalidów.
2. Zdyskontowana wartość przyszłych świadczeń dla generacji wdów.
3. Zdyskontowana wartość przyszłych świadczeń dla generacji starców.
4. Zdyskontowana wartość przyszłych świadczeń dla generacji aktywnych.

ew. 3. Niedobór techniczny.

ew. 5. Nadwyżka techniczna.

Pozycje 1., 2., 3. pasywów bilansu można również otrzymać nie przez rachunek bezpośredni, lecz w sposób następujący. Biorąc pod

uwagę stan początkowy (tj. w dniu bilansowym) generacji inwalidów, wdów i starców, obliczamy wartość prawdopodobną przyszłych świadczeń na rzecz każdego inwalidy, wdowy i starca z tego stanu początkowego; ta wartość prawdopodobna przyszłych świadczeń jest to nic innego jak wartość kapitałowa renty inwalidzkiej, wdowiej i starczej. Otóż suma tych wartości kapitałowych renty inwalidzkiej, obliczonych dla wszystkich inwalidów ze stanu początkowego generacji inwalidów, równa jest dokładnie zdyskontowanej wartości przyszłych świadczeń dla całej generacji inwalidów. To samo dotyczy generacji wdów i starców. Dzięki temu możemy pozycje 1., 2., 3. pasywów bilansu zastąpić przez odpowiednie sumy wartości kapitałowych rent.

Co się tyczy generacji aktywnych, to występujące w schemacie bilansu zdyskontowane wartości przyszłych składek i świadczeń całej generacji możemy również zastąpić przez sumy odpowiednich wartości prawdopodobnych poszczególnych aktywnych. W ten sposób dla każdego aktywnego, ubezpieczonego w zakładzie ubezpieczeń w chwili sporządzania bilansu, będzie figurowała w pasywach wartość prawdopodobna przyszłych świadczeń, a w aktywach wartość prawdopodobna przyszłych składek. Zamiast jednak tych dwóch pozycji możemy wstawić w pasywach bilansu jedną pozycję, różnicę powyższych wartości prawdopodobnych: wartość prawdopodobną świadczeń zmniejszoną o wartość prawdopodobną składek. Ta różnica jest jednak niczym innym jak indywidualną rezerwą prospektywną. W ten sposób pozycja 1. w aktywach i pozycja 4. w pasywach zostaną zastąpione przez jedną pozycję w pasywach: sumę indywidualnych rezerw prospektywnych generacji aktywnych.

Podany wyżej schemat bilansu ubezpieczeniowo-technicznego przyjmie ostatecznie postać następującą:

A k t y w a

1. Rezerwy majątkowe zakładu ubezpieczeń.

P a s y w a

1. Suma wartości kapitałowych rent inwalidzkich.
2. Suma wartości kapitałowych rent wdowich.
3. Suma wartości kapitałowych rent starczych.
4. Suma indywidualnych rezerw prospektywnych generacji aktywnych.

ew. 2. Niedobór techniczny.

ew. 5. Nadwyżka techniczna.

Występujące w pasywach pod 1., 2., 3. pozycje są to wartości zobowiązań zakładu ubezpieczeń z tytułu świadczeń ubezpieczeniowych już zapadłych przed momentem sporządzania bilansu. Ponieważ świadczenia te nie były wypłacone jednorazowo, lecz w postaci rent, w chwili sporządzania bilansu pozostają jeszcze nie wypłacone, ale już przyznane kwoty, które należy skapitalizować na moment sporządzania bilansu. Występująca pod 4. kwota jest to- r e z e r w a p r o s p e k t y w n a g e n e r a c j i a k t y w n y c h, która jest równa sumie indywidualnych rezerw prospektywnych. Rezerwa prospektywna generacji aktywnych jest również wartością zobowiązań zakładu ubezpieczeń; rezerwa ta wraz z przyszłymi składkami pozwoli wywiązać się zakładowi ubezpieczeń z przyszłych zobowiązań na świadczenia dla generacji aktywnych, będącej w ubezpieczeniu w chwili sporządzania bilansu.

Ponieważ indywidualna rezerwa prospektywna równa jest indywidualnej rezerwie retrospektywnej, to i cała rezerwa prospektywna generacji aktywnych winna być równa reszcie, jaka pozostała ze składek indywidualnych, wpłaconych przez aktywnych, po potrąceniu składek za ryzyko. Te składki za ryzyko wraz z rezerwami indywidualnymi aktywnych, którzy stali się niezdolni do pracy, zmarli lub dożyli wieku starczego, służą na pokrycie wydatków na zapadłe świadczenia inwalidzkie, wdowie i starcze. Suma zaś pozycji 1., 2., 3., 4. występujących w pasywach bilansu, powinna być równa reszcie, jaka pozostała ze składek wpłaconych przez aktywnych, po potrąceniu wydatków na zapadłe i już wypłacone świadczenia inwalidzkie, wdowie i starcze; gdyż wydatki na zapadłe i niewypłacone jeszcze świadczenia zawarte są w pozycjach 1., 2., 3., bilansu.

Występujące pod pozycją 1. w aktywach bilansu rezerwy majątkowe są faktyczną resztą pozostałą zakładowi ubezpieczeń z otrzymanych od ubezpieczonych składek, po potrąceniu zapadłych i już wypłaconych świadczeń. Wobec tego rezerwy majątkowe powinny być równe sumie kwot z pozycji 1., 2., 3., 4. pasywów bilansu, gdyż w rozważaniach naszych nie uwzględniamy kosztów administracji; bilans byłby zrównoważony, nie dawałby ani nadwyżki technicznej ani niedoboru. Tak by istotnie było, gdyby przebieg zjawisk losowych, jak inwalidztwo, śmierć w stanie aktywnym, dożycie wieku starczego i inne oraz rzeczywiście uzyskiwane oprocentowanie lokat były najzupełniej zgodne z przewidywaniami teoretycznymi. Wtedy suma składek za ryzyko z każdego roku ubezpieczeniowego całej generacji aktywnych byłaby dokładnie równa wydatkom na kapitały

pod ryzykiem dla faktycznie zachodzących w tym roku ubezpieczeniowym wypadków inwalidztwa i śmierci w stanie aktywnym.

Wiemy jednak, że w przebiegu rzeczywistym ubezpieczenia zjawiska losowe nie muszą zachodzić dokładnie tak, jak zakładano przy kalkulacji składki. Przebieg zjawisk losowych wykazywać będzie zwykle odchylenia w jednym lub drugim kierunku i dlatego bilans techniczny może wykazywać nadwyżkę lub niedobór techniczny. W ubezpieczeniach prywatnych taki niedobór techniczny musi być pokrywany z funduszków gwarancyjnych zakładu ubezpieczeń, zaś nadwyżka techniczna włączana bywa do ogólnego zysku z działalności zakładu ubezpieczeń. W ubezpieczeniach społecznych bilans techniczny ma znaczenie sprawdzianu kalkulacji technicznej ubezpieczenia. Jeśli bilans techniczny w ciągu szeregu lat wykaże niedobór techniczny, można z tego wyciągnąć wniosek, że podstawy techniczne przyjęte do kalkulacji ubezpieczenia są nieodpowiednie. Wtedy musi nastąpić rewizja kalkulacji, która pociągnie za sobą bądź podwyższenie składek ubezpieczenia, bądź obniżkę świadczeń.

Widzieliśmy, że rezerwy indywidualne posiadają również znaczenie przy rachunkowym sporządzeniu bilansu technicznego ubezpieczenia; gdyż zamiast obliczać bezpośrednio rezerwę prospektywną całej generacji aktywnych, można obliczyć dla każdego aktywnego jego rezerwę indywidualną i zsumować te wszystkie rezerwy indywidualne. Z tego faktu, że rezerwa prospektywna całej generacji aktywnych jest sumą rezerw indywidualnych łatwo wyprowadzić wnioski, dotyczące wpływu poszczególnych wypadków inwalidztwa i śmierci na równowagę bilansu technicznego.

Przypuśćmy, że do pewnego momentu przebieg wypadków losowych w ubezpieczeniu oraz kształtowanie się stopy technicznej były najzupełniej zgodne z przewidywaniami teoretycznymi i wobec tego bilanse techniczne były do tego momentu zrównoważone. Przypuśćmy dalej, że i w następnym roku ubezpieczenia przebieg zjawisk losowych i stopy technicznej jest również zgodny z przewidywaniami teoretycznymi z tym jednym wyjątkiem, że tuż przed sporządzeniem bilansu technicznego na koniec rozważanego roku ubezpieczenia nastąpi dodatkowy wypadek inwalidztwa. Wobec tego pod pozycją 1. w pasywach bilansu technicznego trzeba będzie odłożyć dodatkowo wartość kapitałową renty inwalidzkiej; wpłynie to na powstanie niedoboru technicznego w wysokości tej wartości kapitałowej renty. Jednocześnie jednak w rezerwie prospektywnej generacji aktywnych, która jest sumą rezerw indywidualnych,

zabraknie rezerwy indywidualnej tego aktywnego, który został dodatkowo inwalidą; wpłynie to na zmniejszenie niedoboru technicznego o omawianą rezerwę indywidualną. W rezultacie niedobór techniczny równy będzie różnicy między wartością kapitałową renty inwalidzkiej a rezerwą indywidualną, a więc równy będzie kapitałowi pod ryzykiem. Łatwo zauważyć, że w ogóle każdy wypadek inwalidztwa lub śmierci wpływa na powiększenie pasywów bilansu technicznego o odpowiedni kapitał pod ryzykiem, a nie o pełną wartość kapitałową renty. Mówiliśmy w § 5., że kapitał pod ryzykiem jest wysokością „wygranej“ ubezpieczonego w wypadku inwalidztwa lub śmierci; widzimy teraz, że kapitał pod ryzykiem jest jednocześnie dla zakładu ubezpieczeń wysokością „straty bilansowej“ związanej z każdym wypadkiem inwalidztwa lub śmierci.

Warto jeszcze zauważyć, że ta „strata bilansowa“ może niekiedy przejść w „zysk bilansowy“, mianowicie w tych wypadkach, gdy kapitał pod ryzykiem jest ujemny. Wtedy bowiem wypadek inwalidztwa lub śmierci wpływa nie na powiększenie, lecz na zmniejszenie pasywów bilansu technicznego.

§ 8. PRZEDWCZESNE OPUSZCZANIE UBEZPIECZENIA

Możemy teraz przystąpić do omówienia zagadnień, związanych z przedwczesnym wystąpieniem aktywnego z grupy, a więc z innych przyczyn aniżeli inwalidztwo, śmierć lub dożycie wieku starczego. Mówiliśmy, że stosując do ubezpieczenia ze składką indywidualną schemat gry losowej, możemy przypisać ubezpieczonemu kwotę oszczędności równą indywidualnej rezerwie retrospektywnej. Czy opuszczając przedwcześnie i dobrowolnie ubezpieczenie aktywny ma prawo podjąć tę swoją oszczędność? Zobaczmy, jaki to będzie miało wpływ na równowagę całego ubezpieczenia, której wyrazem jest bilans techniczny. Ponieważ indywidualna rezerwa retrospektywna równa jest indywidualnej rezerwie prospektywnej, oszczędność poszczególnego aktywnego figuruje w bilansie technicznym jako składnik całej rezerwy prospektywnej generacji aktywnych. Tak jak w wypadku inwalidztwa, śmierci lub dożycia wieku starczego, tak i w wypadku wystąpienia aktywnego z ubezpieczenia z innych przyczyn, zwalnia się ta oszczędność i może być wypłacona aktywnemu bez naruszenia równowagi całego ubezpieczenia. Wypłacenie ustępującemu z grupy ubezpieczonemu rezerwy indywidualnej wpływa z jednej strony na zmniejszenie rezerwy prospektywnej generacji

aktywnych (pasywa bilansu) o tę kwotę, z drugiej strony zmniejszają się jednocześnie o taką kwotę rezerwy majątkowe zakładu ubezpieczeń (aktywa bilansu). W ten sposób wypłacenie rezerwy indywidualnej nie wpływa zupełnie na zmianę wysokości nadwyżki lub niedoboru technicznego, jaki istniał przed wystąpieniem ubezpieczonego z grupy.

Tu jednak musimy przypomnieć, że do pojęcia rezerwy indywidualnej (zarówno retrospektywnej jak i prospektywnej) doszliśmy traktując ubezpieczenie jako grę losową, zaś prawdopodobieństwa statystyczne przy tej grze losowej traktowaliśmy jako z góry określone i nie ulegające w ciągu ubezpieczenia zmianom. Wypowiedziana w § 3 uwaga, że przy takim traktowaniu ubezpieczenia pewne wnioski mogą wymagać korektury w praktycznych zastosowaniach, jest właśnie teraz aktualna. Chociaż wyłuszczone wyżej względy zezwalają na wypłacenie ubezpieczonemu jego rezerwy indywidualnej w pełnej wysokości, nie zawsze to jest dopuszczalne.

Rozpatrzmy przykład ubezpieczenia prywatnego z badaniem lekarskim. Przypisując ubezpieczonym jednakowego wieku w chwili wstąpienia do ubezpieczenia jednakowe prawdopodobieństwa inwalidztwa i śmierci, mamy uzasadnienie takiego postępowania w badaniu lekarskim kandydatów do ubezpieczenia. Przeprowadzona selekcja lekarska gwarantuje jednakowy mniej więcej stan zdrowia osób jednakowego wieku. Jednakże ta selekcja lekarska już po upływie paru lat trwania ubezpieczenia traci swój wpływ. Odmienne warunki życia poszczególnych ubezpieczonych i wszelkie wpływy zewnętrzne powodują różniczkowanie ubezpieczonych pod względem ryzyka: ubezpieczeni jednakowego wieku nie przedstawiają już ryzyk mniej więcej jednakowych. Mimo to kalkulacja techniczna dokonana na początku ubezpieczenia zachowuje swój walor, gdyż późniejsze ryzyka ubezpieczeniowe równoważone są ryzykami, jakie przedstawiają osobnicy o wyjątkowo dobrym stanie zdrowia.

Jeżeli jednak przejdziemy do zagadnienia wypłaty rezerwy indywidualnej ubezpieczonym, występującym z ubezpieczenia, to tu następuje komplikacja. Przedwczesne opuszczanie ubezpieczenia w ubezpieczeniach prywatnych zależy całkowicie od swobodnej woli ubezpieczonego. Gdybyśmy dopuścili wypłacenie dobrowolnie występującym ubezpieczonym rezerw indywidualnych w pełnej wysokości, mogliby skorzystać z tego prawa tylko ci spośród ubezpieczonych danego wieku, którzy przedstawiają lepsze ryzyko ubezpieczeniowe i w ubezpieczeniu pozostaliby osobnicy z ryzykiem pośled-

niejszym; mielibyśmy wtedy do czynienia ze zjawiskiem *antyselekcji*. Wyrównanie ryzyka, o którym wspomnieliśmy wyżej, nie miałyby już miejsca i przyjęte do kalkulacji ubezpieczenia prawdopodobieństwa inwalidności i śmierci przestałyby odpowiadać rzeczywistemu przebiegowi zjawisk.

Aby zrównoważyć wpływ opisanego wyżej zjawiska antyselekcji, można potrącać z wypłacanej rezerwy indywidualnej pewne kwoty, służące na pokrycie zwiększonego ryzyka osobników, pozostających w ubezpieczeniu. W ubezpieczeniach prywatnych wypłaca się ubezpieczonym, występującym dobrowolnie z ubezpieczenia, nie rezerwy indywidualne, lecz niższe od tych rezerw kwoty wykupu; uwzględnione tu jest obok innych również potrącenie na antyselekcję.

Opisane wyżej zróżniczkowanie ryzyk osób jednakowego wieku w ubezpieczeniach prywatnych zachodzi również w ubezpieczeniach społecznych. To zróżniczkowanie ryzyk istnieje zresztą od początku ubezpieczenia, gdyż w ubezpieczeniach społecznych nie ma badania lekarskiego. Niemniej w ubezpieczeniach społecznych mamy również do czynienia z wzajemnym równoważeniem się ryzyk dobrych z ryzykami poślednimi; to równoważenie ryzyk jest wynikiem istnienia *przymusu* ubezpieczenia w ubezpieczeniach społecznych.

Gdyby w ubezpieczeniach społecznych pobierane były składki indywidualne, to wykupy mogłyby być równe rezerwie indywidualnej w pełnej wysokości. Ze względu bowiem na istniejący w ubezpieczeniach społecznych przymus ubezpieczenia, przedwczesne opuszczenie ubezpieczenia jest w mniejszym lub większym stopniu niezależne od swobodnej woli ubezpieczonego. Opuszczenie ubezpieczenia w ubezpieczeniach społecznych zależy bowiem od takich zdarzeń jak wstąpienie w związek małżeński, usamodzielnienie się gospodarcze, przekroczenie granicy zarobku, podlegającego przymusowi ubezpieczenia lub emigracja. Wobec tego w ubezpieczeniach społecznych nie zachodzi obawa antyselekcji, jako zjawiska masowego. Jednakże w ubezpieczeniach społecznych przy zagadnieniu wykupów występują inne specyficzne trudności, wynikające ze stosowania składki przeciętnej. Zajmujemy się nimi w rozdziale II niniejszej pracy.

Konieczność ograniczenia w pewnych wypadkach prawa ubezpieczonego do jego indywidualnej rezerwy była powodem, że samo pojęcie indywidualnej rezerwy było kwestionowane. Höckner (7, str. 24) traktował rezerwę indywidualną jako pewną przeciętną liczbę

pomocniczą, która „nie istnieje samodzielnie“, wobec czego winna właściwie nosić miano rezerwy pseudoindywidualnej. Niesłuszność takiego stanowiska wynika stąd, że w naukach matematycznych pojęcia nie muszą koniecznie odpowiadać realnie istniejącym przedmiotom; wystarczy, że pojęcie jest użyteczne w danej niesprzecznej teorii. W naukach matematycznych posługujemy się często pojęciami, które powstają przez abstrahowanie od pewnych cech przedmiotów rzeczywistych; takimi pojęciami są punkty i proste geometryczne, takim pojęciem jest również rezerwa indywidualna, którą zdefiniowaliśmy, abstrahując od tego, że prawdopodobieństwa użyte przy definicji są to prawdopodobieństwa statystyczne. Trzeba jednak pamiętać przy tego rodzaju pojęciach, że nie wolno przypisywać im własności, które nie wynikają z ich definicji, a mogą nasuwać się z samej tylko nazwy. Rezerwa indywidualna stanowi indywidualną własność ubezpieczonego tylko w tym stopniu, w jakim wolno ubezpieczenie traktować jako grę losową; natomiast nie jest ona własnością indywidualną ubezpieczonego bez zastrzeżeń. Jeżeli o tym pamiętać będziemy, to nie będziemy musieli uciekać się do nazwy pseudoindywidualna rezerwa, zamiast — rezerwa indywidualna.

Z zagadnieniem przedwczesnego opuszczania ubezpieczenia związane jest zagadnienie odwrotne: przystąpienie do ubezpieczenia z zaliczeniem pewnej liczby lat ubezpieczenia wstecz. Oczywiście takie zaliczenie lat ubezpieczenia wstecz nie ma znaczenia przy systemie świadczeń ze stałą rentą i bez karencji, jak nasz system I; przy zaliczeniu lat ubezpieczenia wstecz chodzić może o skrócenie, względnie całkowite zniesienie okresu karencji, bądź o nabycie z miejsca praw do wzrostu rent.

Pragnąc zaliczyć sobie pewną liczbę lat ubezpieczenia wstecz, przystępujący do ubezpieczenia nie musi wpłacić jednorazowo pełnych składek indywidualnych za te wszystkie lata; nie musi mianowicie wpłacić składek za ryzyko za lata ubiegłe, gdyż zakład ubezpieczeń tego ryzyka nie ponosił. Wystarczy zatem wpłacenie skapitalizowanych składek oszczędnościowych, tj. indywidualnej rezerwy. Z drugiej strony ta indywidualna rezerwa musi być właśnie odłożona w pasywach bilansu technicznego, aby zaliczenie lat ubezpieczenia wstecz nie naruszyło równowagi całego ubezpieczenia.

§ 9. ZASADA RÓWNOWAŻNOŚCI STRAT I ZYSKÓW

W dotychczasowych rozważaniach zajmowaliśmy się ubezpieczonym aktywnym: wysokością oszczędności, jaką można mu przypisać, zanim nastąpił wypadek losowy przewidziany w ubezpieczeniu oraz zagadnieniem jego praw do tej oszczędności. Z kolei przejdziemy do zagadnienia, jak wygląda efekt oszczędnościowy ubezpieczenia z chwilą, gdy już nastąpił wypadek losowy przewidziany w ubezpieczeniu: inwalidztwo, śmierć lub dożycie wieku starczego. Dla zbadania tego efektu oszczędnościowego dogodnie jest podejść do ubezpieczenia nie od strony zasady równoważności składek i świadczeń, ale od jej zmodyfikowanej postaci, jaką jest *z a s a d a r ó w n o w a ż n o ś c i s t r a t i z y s k ó w*. Ilustrację tej zasady na przykładzie rozpatrywanego już ubezpieczenia osoby 40-letniej przy systemie świadczeń I podaje tablica 8. W kol. (2) tej tablicy podane są sumy wpłaconych składek rocznych 30,28 z uwzględnieniem oprocentowania. Jeżeli liczby te porównamy z kol. (4) tablicy 2., gdzie podane są wartości kapitałowe rent inwalidzkich, zobaczymy, że w pierwszych latach ubezpieczenia wartość świadczenia inwalidzkiego jest zawsze wyższa od wartości wpłaconych składek. Jeżeli wypadek inwalidztwa nastąpi w pierwszych latach ubezpieczenia, ubezpieczony osiąga zysk równy różnicy między wartością otrzymanego świadczenia a wartością wpłaconych składek; wysokość tych zysków podana jest w kol. (3) tablicy 8. Za to w późniejszych latach ubezpieczenia wartość wpłaconych składek przewyższa wartość świadczenia inwalidzkiego; jeżeli wypadek inwalidztwa nastąpi w tych latach ubezpieczenia, ubezpieczony ponosi stratę uwiódzoną również w kol. (3) naszej tablicy.

Moment, w którym wypadek losowy przestaje być związany z zyskiem ubezpieczonego i zaczyna być związany ze stratą nosi nazwę *p u n k t u k r y t y c z n e g o*. W naszym przykładzie punkt krytyczny dla ryzyka inwalidztwa następuje po 18 latach ubezpieczenia. W kol. (4) rozpatrywanej przez nas tablicy podane są zdyskontowane na początek ubezpieczenia wartości zysków i strat z kol. (3). Jeżeli liczby kol. (4) pomnożymy przez prawdopodobieństwa inwalidności, z którymi te zyski i straty są związane (te prawdopodobieństwa inwalidności podane są w kol. (2) tablicy 3.), otrzymamy w kol. (5) tablicy 8. wartości prawdopodobne zysków i strat, związanych z nastąpieniem wypadku inwalidztwa. W zupełnie podobny sposób obliczone są w kol. (6) — (8) tablicy 8. wartości prawdopodobne

zysków i strat, związanych z nastąpieniem wypadku śmierci w stanie aktywnym i wypłatą renty wdowiej. Punkt krytyczny dla ryzyka śmierci w stanie aktywnym znajduje się po 14 latach trwania ubezpieczenia.

Wypadek dożycia wieku starczego jest związany ze stratą ubezpieczonego; obliczona u dołu tablicy 8. wartość prawdopodobna tej straty równa jest 60,17. Jeżeli obliczymy sumę algebraiczną wartości prawdopodobnych wszystkich możliwych strat i zysków, otrzymamy zero:

$$37,73 + 22,44 - 60,17 = 0$$

Jest to właśnie wyraz zasady równoważności strat i zysków, która wymaga, by na początku ubezpieczenia wartość prawdopodobna strat była równa wartości prawdopodobnej zysków.

Zasada równoważności strat i zysków rzuca nowe światło na istotę ubezpieczenia. Ubezpieczenie jest to tego rodzaju gra losowa, w której do momentu krytycznego zajście wypadku losowego (inwalidztwo lub śmierć) związane jest z wypłatą świadczenia, którego wartość jest większa od wartości wpłaconych składek; jeżeli wypadek losowy nastąpi przed momentem krytycznym, ubezpieczenie opłaca się ubezpieczonemu lepiej, niż zwykły bankowy wkład oszczędnościowy. Jeżeli natomiast wypadek losowy nastąpi po momencie krytycznym bądź też ubezpieczony dożyje wieku starczego, otrzymuje on świadczenie o wartości niższej niż wpłacone i oprocentowane składki. Zyski ubezpieczonego w wypadku pierwszym lub straty w wypadku drugim są tak dobrane, by ubezpieczenie traktowane jako gra losowa było grą sprawiedliwą: suma algebraiczna wartości prawdopodobnych zysków i strat równa jest zeru.

Posługujemy się tu pojęciem zysku, który jest równy różnicy między wartością kapitałową renty a wartością wpłaconych i oprocentowanych składek. Dla uniknięcia nieporozumień musimy wyraźnie odróżniać to pojęcie od „wygranej“ ubezpieczonego, tj. od kapitału pod ryzykiem, który jest równy różnicy między wartością kapitałową renty i rezerwą. Zysk gracza w jakiejś grze losowej jest to różnica między wygraną i stawką gry. Pojęcie kapitału pod ryzykiem służyło nam przy rozpatrywaniu ubezpieczenia jako serii rocznych gier losowych, stawką każdej z tych gier była odpowiednia składka za ryzyko. Wysokością ewentualnego zysku, jaki osiągnąć może ubezpieczony przy takiej rocznej grze byłaby zatem

różnica między kapitałem pod ryzykiem i składką za ryzyko. W § niniejszym rozpatrujemy ubezpieczenie nie jako serię rocznych gier, lecz jako jedną grę; stąd pojęcie zysku i straty sformułowane wyżej.

W tablicy 9. podane są wysokości zysków i strat w pięcioletnich odstępach wieku ubezpieczonego dla naszych czterech systemów świadczeń. Ponadto przebieg zysków i strat przy różnych wiekach wstępu do ubezpieczenia uwidoczniony jest na wykresie 1., na przykładzie ryzyka inwalidztwa przy systemie świadczeń II. W wykresie na osi rzędnych odłożone są wysokości zysków (dodatnie) i strat (ujemne), na osi odciętych odłożony jest wiek ubezpieczonego w chwili nastąpienia wypadku losowego.

Z tablicy 9. widać, że przy każdym z rozważanych przez nas systemów świadczeń istnieje punkt krytyczny w ostatnich latach ubezpieczenia; mianowicie dla ryzyka inwalidztwa ten punkt krytyczny następuje powyżej 55. roku życia aktywnego, dla ryzyka śmierci powyżej 50. roku życia i to niezależnie od wieku wstępu do ubezpieczenia. Obrazem omawianych punktów krytycznych na wykresie 1. są punkty przecięcia krzywych z osią odciętych; z wykresu widać, że te punkty krytyczne dla różnych wieków wstępu do ubezpieczenia skupiają się blisko siebie.

Punkty krytyczne, których obrazem jest punkt przecięcia krzywej z osią odciętych, są to punkty ciągłości przebiegu strat i zysków; zysk stopniowo maleje, staje się zerem i przechodzi w coraz większą stratę. Obok tego rodzaju punktów krytycznych mamy przy systemach świadczeń II, III, IV punkty krytyczne w końcu 5. roku ubezpieczenia. Te punkty krytyczne wynikają z wprowadzenia karencji; jeśli wypadek losowy nastąpi w ciągu okresu karencji, ubezpieczony nie otrzymuje żadnego świadczenia, traci natomiast wpłacone składki. Punkt krytyczny w końcu 5. roku ubezpieczenia jest punktem nieciągłości przebiegu zysków i strat: w ciągu pierwszych pięciu lat trwania ubezpieczenia ubezpieczony narażony jest na stratę, po 5. roku możliwość straty przechodzi w możliwość najwyższego zysku.

Tablica 9. podawała przebieg zysków i strat przy rencie zasadniczej 100. Dla porównania rozpatrywanych przez nas czterech systemów świadczeń między sobą, podane są w tablicy 10. przebiegi zysków i strat przy składce indywidualnej 100 jednakowej dla wszystkich czterech systemów świadczeń. Tablica 10. charakteryzuje nasze cztery systemy świadczeń z punktu widzenia efektu oszczędnościowego, jaki przynoszą one ubezpieczonemu w chwili nastąpienia

wypadku losowego, tak jak tablica 7. charakteryzowała te systemy świadczeń w okresie przed nastąpieniem wypadku losowego.

Odpowiednikiem tablicy 10. dla wieku wstępu do ubezpieczenia 25 jest w zakresie ryzyka inwalidztwa wykres 2. Widać z niego, że ten sam ubezpieczony za tę samą składkę 100, przechodząc z systemu świadczeń I na system II jest narażony w ciągu pierwszych pięciu lat ubezpieczenia na możliwość strat zamiast zysków, ale w następnych latach ubezpieczenia ma możliwość większych zysków i mniejszych strat, niż przy systemie I. Krzywa II przebiega bowiem, z wyjątkiem pierwszych 5-ciu lat ubezpieczenia, stale nad krzywą I.

Krzywe, odpowiadające systemom świadczeń III i IV, pokrywają się z krzywą II w okresie karencji, po czym te systemy świadczeń ze wzrostami rent dają na ogół możliwość mniejszych zysków i mniejszych strat niż systemy I i II. O systemach świadczeń, które przy danej stałej składce prowadzą do mniejszych zysków i mniejszych strat mówimy, że są one związane z mniejszym ryzykiem ubezpieczeniowym. Z wykresu 2. wnioskujemy zatem, że system świadczeń III i IV przy wieku 25 są związane z mniejszym ryzykiem inwalidzkim, niż systemy świadczeń I i II. Znajduje to wyraz na wykresie 2. w tym, że krzywe III i IV są bardziej spłaszczone i zbliżone do osi odciętych niż krzywe I i II.

To co zaobserwowaliśmy na przykładzie wieku 25 przy ryzyku inwalidzkim zachodzi również przy ryzyku śmierci i przy wieku wstępu do ubezpieczenia 40 dla obu rodzajów ryzyka, jak to łatwo sprawdzić z tablicy 10. Możemy zatem powiedzieć ogólnie, że systemy świadczeń ze wzrostami rent są to systemy związane z mniejszym ryzykiem ubezpieczeniowym niż systemy świadczeń z rentą stałą. Uzupełnia to charakterystykę systemów świadczeń podaną w § 6, gdzie widzieliśmy, że systemy świadczeń ze wzrostami rent zawierają więcej elementu oszczędnościowego niż systemy świadczeń z rentą stałą.

Rozdział II

Ubezpieczenie ze składką przeciętną

§ 10. SKŁADKA PRZECIĘTNA

Zajmowaliśmy się dotychczas ubezpieczeniem ze składką indywidualną, która jak wiemy jest właściwie składką przeciętną jednej generacji ubezpieczonych jednakowego wieku. Mówiliśmy o tym, że

składki indywidualne nie są stosowane w ubezpieczeniach społecznych. Znajdują one zastosowanie w ubezpieczeniach prywatnych, gdyż każdego przystępującego do ubezpieczenia w ubezpieczeniach prywatnych traktuje się tak, jak gdyby przystępował on jednocześnie z całą generacją tego samego co on wieku. Dotychczasowe nasze rozważania miały tylko o tyle związek z ubezpieczeniem społecznym, że zajmowaliśmy się w nich ubezpieczeniem renty oraz ryzykiem inwalidztwa i śmierci w stanie aktywnym; te elementy są właśnie charakterystyczne dla ubezpieczenia społecznego w odróżnieniu od ubezpieczenia prywatnego, gdzie najczęściej ubezpiecza się jednorazowe i stałe wypłaty, a nie renty, w grę zaś wchodzi tylko ryzyko śmierci.

Przejdźmy jednak teraz od składki indywidualnej do składki przeciętnej ogólnej grupy aktywnych, takiej jaka bywa rozpatrywana w ubezpieczeniach społecznych. Taką składkę przeciętną nazywa się często składką ogólnie przeciętną. Rozpatrywać będziemy teoretyczną grupę, składającą się z początkowej generacji ubezpieczonych różnego wieku oraz z nieskończonego ciągu jednakoowych późniejszych generacji ubezpieczonych jednakowego wieku 23 lat. Przyjmijmy, że skład ubezpieczonych według wieku generacji początkowej jest następujący:

Zest. 4. Rozkład grupy aktywnych według wieku

Wiek	Liczba aktywnych
23 — 27	478 874
28 — 32	460 441
33 — 37	441 162
38 — 42	417 110
43 — 47	386 379
48 — 52	345 226
53 — 57	288 241
58 — 62	214 480

Corocznie przybywa do grupy nowa generacja 97 343 aktywnych w wieku 23 lat. Jednocześnie ubywa jednak corocznie z grupy 35 290

aktywnych z powodu wypadków inwalidztwa, 36 652 aktywnych z powodu śmierci w stanie aktywnym oraz 25 401 aktywnych z powodu dożycia wieku starczego (ci ostatni nie ubywają jedynie w pierwszych dwóch latach ubezpieczenia, dopóki 62-letni nie osiągną 65 roku życia). Łącznie ubywa w ciągu roku 97 343 aktywnych, tj. właśnie tylu, ilu przybywa z nowej generacji. W ten sposób liczba ubezpieczonych aktywnych nie ulega zmianie. Nie ulega również zmianie rozkład aktywnych według wieku, podany w zestawieniu 4. Rozkład ten bowiem jest w naszym przykładzie tak dobrany, że grupa każdego wieku, starzejąc się rokrocznie, jest zastępowana przez grupę o rok młodszych aktywnych, zaś grupa najmłodszych zostaje co roku zastąpiona przez nową generację 23-letnich aktywnych. W ten sposób mimo corocznych przesunięć do starszych grup wieku, rozkład całej grupy aktywnych pozostaje stale taki sam jak w zestawieniu.¹

W skonstruowanej przez nas grupie aktywnych założyliśmy występowanie jedynie przez inwalidztwo, śmierć w stanie aktywnym i dożycie wieku starczego; nie ma w niej natomiast wystąpień przedwczesnych z przyczyn innych, nielosowych. Jest to uproszczenie, które w kalkulacji emerytalnych ubezpieczeń społecznych nie jest na ogół stosowane. Przeciwnie, w ubezpieczeniach społecznych zwykle przyjmuje się pewne założenia o przedwczesnym opuszczaniu ubezpieczenia z przyczyn nielosowych. Takie założenie tkwi również najczęściej w kalkulacjach opartych na stałej liczbie i na stałym rozkładzie wieku w grupie aktywnych. Jeżeli w naszym przykładzie grupy aktywnych to założenie nie interweniuje, to wynika to stąd, że przyjęliśmy sztuczny, niespotykany w rzeczywistości rozkład generacji początkowej. W naszym przykładzie liczba najmłodszych aktywnych jest najliczniejsza i maleje wraz z wzrastającym wiekiem aktywnych. W rzeczywistości zaś najliczniej obsadzona jest zwykle grupa wieków średnich, a wieki najmłodsze i najstarsze są obsadzone najslabiej.

Dla obliczenia składek przeciętnej naszej grupy teoretycznej, należy obliczyć wysokość świadczeń ubezpieczeniowych na rzecz tej grupy w każdym roku ubezpieczenia; po czym te wysokości świadczeń ubezpieczeniowych dyskontuje się na początek ubezpieczenia. Składka przeciętna musi być tak dobrana, aby zdyskontowana na początek ubezpieczenia wartość składek przecięt-

¹ Por. Presburger i Wanatowski (16).

nych, wpłaconych przez całą grupę we wszystkich latach ubezpieczenia, spełniała zasadę równoważności, tj. była równa wymienionej wyżej zdyskontowanej wartości świadczeń ubezpieczeniowych.

Składki przeciętne i ich odwrotności, obliczone w wyżej opisanym sposobie dla naszej grupy teoretycznej, wynoszą jak następuje:

Zest. 5. Składka przeciętna i jej odwrotność

Wyszczególnienie	System świadczeń			
	I	II	III	IV
Składka przeciętna przy rencie zasadniczej 100	22,33	18,85	28,95	26,81
Renta zasadnicza przy składce przeciętnej 100	448	531	345	373

Jeśli porównamy składki przeciętne ze składkami indywidualnymi z zestawienia 2., widzimy, że składki przeciętne odpowiadają w każdym z czterech systemów świadczeń t e m u s a m e m u m n i e j w i ę c e j w i e k o w i p r z e c i ę t n e m u, który leży między wiekiem 30 a 35 lat. Ubezpieczonych, dla których składka indywidualna jest niższa od składki przeciętnej, nazywać będziemy w dalszych rozważaniach dla krótkości „młodymi“, w odróżnieniu od „starych“, dla których składka indywidualna jest wyższa od składki przeciętnej.

Porównywając składki przeciętne między sobą widzimy, że z trzech systemów świadczeń z karencją najniższą składkę daje system II, najwyższą system III; zachowane są tu zatem stosunki, jakie zachodziły na ogół przy składkach indywidualnych.

W ubezpieczeniach społecznych stosuje się składkę przeciętną zamiast składek indywidualnych z uwagi na dwie własności składki przeciętnej, z których jedna ma z n a c z e n i e s p o ł e c z n e, druga z n a c z e n i e o g ó l n o - g o s p o d a r c z e.

Własnością składki przeciętnej, mającą znaczenie społeczne, jest niezależność tej składki od wieku poszczególnych ubezpieczonych. Jeżeli wprowadzamy po raz pierwszy emerytalne ubezpieczenie społeczne dla jakiejś grupy społecznej, to starsi członkowie tej grupy, przystępujący do ubezpieczenia jednocześnie z młodymi, nie mają, tak jak i młodzi, żadnych uprzednio nabytych praw finansowych. Nie mniej jednak starsi mają poza sobą lata pracy w zawodzie; te lata pracy z punktu widzenia społecznego należy uważać za podstawę do przyznania pewnych ulg starym w porównaniu z młodymi.

Stosowanie składki przeciętnej zamiast składek indywidualnych, wyższych dla osobników starszych, jest właśnie pewną formą przyznania tych ulg. W ten sposób, wprowadzając ubezpieczenie społeczne, nie tylko organizujemy celowe urządzenie ubezpieczeniowe na przyszłość, ale jednocześnie wyrównujemy częściowo niesprawiedliwość społeczną, wynikającą dla starych stąd, że nie korzystali oni od młodości z opieki ubezpieczeniowej.

Powiedzieliśmy, że wyrównujemy tę niesprawiedliwość tylko częściowo, gdyż faworyzując starych pod względem wysokości składek, z góry ustalamy świadczenia w ten sposób, że nie przyznajemy starym żadnych nabytych uprawnień w wysokości tych świadczeń. Okres karencji i wzrosty rent uzależniamy w równym stopniu dla starych i młodych tylko od liczby lat przebytych w ubezpieczeniu a nie od wieku.

Warto zdać sobie sprawę z tego, w jakim stopniu upośledzeni są młodzi przy opłacaniu składki przeciętnej, w porównaniu z ubezpieczeniem ze składką indywidualną. Oczywiście nie wchodzi tu w grę konkurencja składki indywidualnej w prywatnych zakładach ubezpieczeń, gdyż w zakładach tych nie ubezpiecza się na ogół ryzyk właściwych ubezpieczeniom społecznym, przynajmniej w tym zakresie i przy tych systemach świadczeń, jakie są stosowane w ubezpieczeniach społecznych. Ponadto w ubezpieczeniach społecznych ubezpieczony nie opłaca całej składki przeciętnej, lecz część jej opłaca również pracodawca, tak że nawet dla młodych część składki opłacana przez ubezpieczonego nie jest na ogół wyższa od odpowiedniej składki indywidualnej.

Zagadnienie odciążenia starych w ubezpieczeniu społecznym istnieje tylko przy generacji początkowej ubezpieczonych. Generacje późniejsze składają się na ogół z osobników młodych, jak w naszym przykładzie tylko 23-letnich. Otóż dla składki przeciętnej w ubezpieczeniu społecznym istotne jest to, że różnica składek, wynikająca ze stosowania dla starych składki przeciętnej zamiast składki indywidualnej nie jest całkowicie przerzucona na młodych z generacji początkowej, ale również na wszystkie późniejsze generacje ubezpieczonych, których jest nieskończenie wiele. Dzięki temu upośledzenie młodych przy składce przeciętnej jest stosunkowo mało dołkliwe.

Poruszona ostatnio sprawa łączy się z drugą własnością składki przeciętnej, mającą znaczenie ogólnie gospodarcze; mianowicie ubezpieczenie ze składką przeciętną, trak-

lowane jako całość, jest w pewnym sensie tańsze od ubezpieczenia ze składką indywidualną. Dzięki przerzuceniu w znacznej części ciężaru składek z generacji początkowej na generacje późniejsze, grupa ubezpieczonych, traktowana jako całość, wpłaca w ciągu pierwszych lat ubezpieczenia składkami przeciętnymi mniejsze kwoty, niż przy składkach indywidualnych.

Stosunki dla grupy aktywnych z zestawienia 4. podaje następujące zestawienie:

Zest. 6. Roczny wpływ składek indywidualnych i przeciętnych

Po latach ubezpieczenia	System świadczeń			
	I	II	III	IV
Roczny wpływ składek indywidualnych (w milionach)				
0	134	100	126	118
5	99	80	109	100
10	73	63	94	86
15	58	52	85	78
20	49	45	78	72
30	40	38	71	66
42 i więcej	37	36	69	64
Roczny wpływ składek przeciętnych (w milionach)				
	69	58	90	83

Ze względu na to, że liczba aktywnych w grupie jest stała, roczny wpływ składki przeciętnej jest stały i wynosi 69 milionów przy systemie świadczeń I. Gdyby zaś członkowie grupy opłacali składki indywidualne zamiast składki przeciętnej, roczny wpływ składki indywidualnej malałby z roku na rok. Wynosiłby on przy systemie świadczeń I — w pierwszym roku ubezpieczenia 134 miliony, tj. prawie dwa razy więcej niż wpływ składki przeciętnej. Natomiast po upływie 42 lat ubezpieczenia ($65 - 23 = 42$), kiedy cała generacja początkowa ubezpieczonych przestanie być aktywna, grupa będzie się składała wyłącznie z ubezpieczonych, którzy przystąpili do ubezpieczenia w wieku 23 lat; wtedy roczny wpływ składek indywidualnych stabilizuje się na poziomie 37 milionów, a więc wynosi już mniej niż roczny wpływ składki przeciętnej.

Zestawienie 6. nie usprawiedliwia jeszcze całkowicie wypowiedzianego przez nas twierdzenia o tanioci ubezpieczenia ze składką przeciętną. Z zestawienia tego wynika na razie tylko tyle, że ubezpieczenie ze składką przeciętną jest tańsze w pierwszych latach ubezpieczenia; natomiast począwszy od pewnego roku jest ono droższe od ubezpieczenia ze składką indywidualną. Dla tanioci ubezpieczenia ze składką przeciętną, traktowanego jako całość, istotne jest jednak to, że w każdym momencie ubezpieczenia wartość oprocentowana dotychczasowego wpływu składek przeciętnych jest zawsze mniejsza od wartości oprocentowanej składek indywidualnych, jakie wpłynęłyby, gdyby w ubezpieczeniu od początku pobierane były składki indywidualne. Po upływie 42 lat ubezpieczenia, w okresie stabilizacji, ta nadwyżka sumy oprocentowanych składek indywidualnych nad sumą oprocentowanych składek przeciętnych ustala się na poziomie podanym w zestawieniu 7.

Zest. 7 Nadwyżka wartości wpłaconych składek indywidualnych nad wartością wpłaconych składek przeciętnych w okresie stabilizacji (w milionach)

System świadczeń			
I	II	III	IV
734	522	488	435

Te nadwyżki wykazują zasadniczo tendencję do zmniejszania się, gdyż po upływie 42 lat ubezpieczenia np. przy systemie świadczeń I co roku wpłacana jest przy składce przeciętnej kwota składek o 32 miliony wyższa niż przy składkach indywidualnych (por. zest. 6. 69 — 37 = 32), jednakże na skutek oprocentowania nadwyżka powraca po roku do pierwotnej wysokości:

$$734 - 32 = 702; \quad 702 \times 1,045 = 734$$

Ubezpieczenie społeczne ze składką przeciętną jest zatem takim urządzeniem finansowym, że dla zabezpieczenia danych świadczeń z użyciem z gospodarki społecznej mniejsze kwoty niż ubezpieczenie ze składką indywidualną. Ta własność składki przeciętnej wydaje nam się szczególnie godna uwagi, z punktu widzenia ekonomiki ubezpieczeń.

§ 11. JEDNOSTKOWA REZERWA RETROSPEKTYWNA I PROSPEKTYWNA

Rozważane w § poprzednim składki przeciętne różnią się tym od składek indywidualnych, że te ostatnie otrzymane zostały z grupy, która składała się z indywidualuów jednakowych pod względem ryzyka. Składki przeciętne otrzymane zostały z grupy różnorodnej, która składa się z indywidualuów o różnym ryzyku. Dlatego też chociaż przy składkach przeciętnych spełniona jest zasada równoważności w odniesieniu do całej grupy, nie będzie ona spełniona w odniesieniu do poszczególnego ubezpieczonego. Mianowicie dla ubezpieczonych młodych, dla których składka przeciętna jest wyższa od składki indywidualnej, na początku ubezpieczenia wartość prawdopodobna przyszłych świadczeń będzie mniejsza od wartości prawdopodobnej przyszłych składek przeciętnych. Dla ubezpieczonych starych będzie odwrotnie: na początku ubezpieczenia wartość prawdopodobna przyszłych świadczeń będzie większa od wartości prawdopodobnej przyszłych składek przeciętnych; wynika to stąd, że dla starych składki przeciętne są niższe od składek indywidualnych. W odniesieniu do poszczególnych ubezpieczonych ubezpieczenie ze składką przeciętną, traktowane jako odosobniona gra losowa, przestaje być grą sprawiedliwą.

W ubezpieczeniu ze składką przeciętną zachowują jednak walor wprowadzone przez nas przy składce indywidualnej definicje rezerwy retrospektywnej i prospektywnej. Definicje tych pojęć wprowadziliśmy zupełnie ogólnie, nie korzystając z własności składki indywidualnej. Rezerwę retrospektywną przy składce przeciętnej będziemy nazywali jednostkową rezerwą retrospektywną dla odróżnienia od indywidualnej rezerwy retrospektywnej, obliczonej przy pomocy składki indywidualnej. Jednostkowa rezerwa retrospektywna jest to zatem obliczona z uwzględnieniem oprocentowania reszta ze składek przeciętnych, jaka przysługiwałaby ubezpieczonemu, gdyby jego ubezpieczenie traktować jako jednostkową grę losową.

Traktując również ubezpieczenie danego osobnika jako jednostkową grę losową, nazywać będziemy jednostkową rezerwą prospektywną różnicę między wartością prawdopodobną przyszłych świadczeń a wartością prawdopodobną przyszłych składek przeciętnych.

Definicja rezerwy jednostkowej (retrospektywnej i prospektywnej) różni się zatem od definicji rezerwy indywidualnej (retrospektywnej i prospektywnej) tym tylko, że tam gdzie przy rezerwie indywidualnej występowała składka indywidualna, występuje przy rezerwie jednostkowej składka przeciętna.

Ponieważ dla poszczególnego ubezpieczenia ze składką przeciętną nie jest spełniona zasada równoważności, jednostkowa rezerwa retrospektywna nie będzie na ogół w żadnym momencie ubezpieczenia równa jednostkowej rezerwie prospektywnej, tzn., że przy traktowaniu ubezpieczenia jako odosobnionej gry losowej, oszczędność pozostała ubezpieczonemu z wpłaconych przez niego składek nie będzie równa dokładnie kwocie potrzebnej dla zachowania równowagi ubezpieczenia.

Zajmiemy się przede wszystkim jednostkową rezerwą retrospektywną. Tak jak to obliczaliśmy dla rezerwy indywidualnej, obliczymy również dla jednostkowej rezerwy retrospektywnej kapitał pod ryzykiem, jako różnicę między wartością kapitałową świadczenia a tą rezerwą. Składką za ryzyko będzie zdyskontowana na początek roku ubezpieczeniowego składka naturalna od kapitału pod ryzykiem. Składką oszczędnościową będzie reszta, jaka zostaje ze składki przeciętnej po potrąceniu składek za ryzyko. W tablicach 11., 12. i 13. mamy kolejno obliczone dla naszych czterech systemów świadczeń jednostkowe rezerwy retrospektywne, obliczone z tych rezerw kapitały pod ryzykiem oraz rozkłady składki przeciętnej na składkę oszczędnościową i składki za ryzyko.

Jeżeli porównamy tablicę 11. z tablicą 4. rezerw indywidualnych, zobaczymy, że zasadniczo inaczej wypada to porównanie dla wieków młodych, dla których składka przeciętna jest wyższa od składki indywidualnej, inaczej dla wieków starszych, dla których składka przeciętna jest niższa od składki indywidualnej.

Rozpatrzmy dla przykładu system świadczeń I. Przebieg rezerw dla wieku wstępu 25 przy tym systemie świadczeń podany jest na wykresie 3. Widać z niego, że jednostkowa rezerwa retrospektywna jest stale wyższa od odpowiedniej rezerwy indywidualnej; jest to zupełnie zrozumiałe, gdyż jednostkowa rezerwa retrospektywna powstaje ze składki wyższej. Jednakże różnica między tymi rezerwami powiększa się coraz bardziej. Aby zrozumieć przyczynę tego zauważmy, że kapitał pod ryzykiem przy składce przeciętnej (tablica 12.) jest niższy od kapitału pod ryzykiem przy składce indywidual-

nej (tablica 5.); wobec tego składki za ryzyko są również niższe przy składce przeciętnej (tablica 13.) niż przy składce indywidualnej (tablica 6.). Jednostkowa rezerwa retrospektywna dla wieku 25 powstaje zatem ze składek przeciętnych w y ż s z y c h od składek indywidualnych, przy czym ze składki przeciętnej potrącają się n i ż s z e składki za ryzyko niż przy składce indywidualnej. Dlatego jednostkowa rezerwa retrospektywna wzrasta znacznie szybciej niż rezerwa indywidualna. Ten wzrost jest tak silny, że wreszcie kapitał pod ryzykiem staje się ujemny, tzn., że zajście wypadku losowego (inwalidztwa lub śmierci w stanie aktywnym) połączone jest z „przegraną“ ubezpieczonego. Składki za ryzyko (por. tablica 13.) stają się ujemne i dzięki temu składka oszczędnościowa przekracza składkę przeciętną. Nagromadzona z takich składek oszczędnościowych jednostkowa rezerwa retrospektywna osiąga po 40 latach ubezpieczenia kwotę 3 934,60, która znacznie przekracza wartość kapitałową renty starczej 817,44.

Zupełnie odwrotną sytuację mamy dla wieków starszych, np. dla wieku 45; przebieg rezerw przy tym wieku podany jest na wykresie 4. Tu jednostkowa rezerwa retrospektywna jest stale mniejsza od odpowiedniej rezerwy indywidualnej. Składka przeciętna jest tu bowiem mniejsza od składki indywidualnej i jednocześnie kapitał pod ryzykiem jest stale większy niż przy składce indywidualnej. Składki za ryzyko przy składce przeciętnej są tu zatem stale większe niż przy składce indywidualnej, rezerwa szybko się wyczerpuje i wreszcie staje się ujemna. Ujemność rezerwy retrospektywnej oznacza tu, że traktując ubezpieczenie jako odosobnioną grę losową, ubezpieczony nie tylko nie ma prawa do żadnej oszczędności, ale jest winien pewną kwotę z tytułu ponoszonego przez zakład ubezpieczeń ryzyka. Jeżeli w wypadku ujemnej rezerwy nastąpi wypadek losowy, zakład ubezpieczeń świadczy rentę w normalnej wysokości i oprócz tego umarza się dług ubezpieczonego. W wypadku ujemnej rezerwy „wygrana“ ubezpieczonego, tj. kapitał pod ryzykiem, jest zatem wyższy od wartości kapitałowej renty; np. po 15 latach ubezpieczenia wartość kapitałowa renty inwalidzkiej wynosi 880,6, jednostkowa rezerwa retrospektywna —119,9, kapitał pod ryzykiem wynosi zatem: $880,6 - (-119,9) = 1\,000,5$. Wzrost kapitału pod ryzykiem wpływa na to, że składki za ryzyko stają się wyższe od składki przeciętnej (por. tablica 13.), a składka oszczędnościowa jest ujemna. Wartość końcowa jednostkowej rezerwy retrospektywnej po 20 latach ubezpieczenia wynosi —619,31, tzn., że gdyby ubez-

pieczenie 45-letniego aktywnego ze składką przeciętną traktować jako odosobnioną grę losową, to ten aktywny po dożyciu wieku starczego 65 lat nie tylko nie posiadałby oszczędności na wartość kapitałową renty starczej w kwocie 817,44, ale posiadałby jeszcze dług w wysokości 619,31.

To, cośmy wyżej opisali dla systemu świadczeń I daje się zaobserwować również przy pozostałych systemach świadczeń. Wartość końcowa jednostkowej rezerwy retrospektywnej jest zawsze wyższa od wartości kapitałowej renty starczej przy młodszych wiekach wstępu do ubezpieczenia. Przy wiekach starszych jest na odwrót: wartość końcowa jednostkowej rezerwy retrospektywnej jest zawsze niższa od wartości kapitałowej renty starczej; przy systemach świadczeń I i II wartość końcowa jednostkowej rezerwy retrospektywnej jest nawet najczęściej ujemna.

Przejdziemy teraz do jednostkowych rezerw prospektywnych, których przebieg podany jest w tablicy 14. Pierwszą rzeczą, która rzuca się w oczy w tej tablicy jest wartość tych rezerw po zero latach, tzn. na początku ubezpieczenia. Jednostkowe rezerwy prospektywne na początku ubezpieczenia nie są równe zero, jak to było przy rezerwach indywidualnych i jednostkowych retrospektywnych. Wynika to stąd, że jak już o tym wspominaliśmy, przy składkach przeciętnych nie jest spełniona na początku ubezpieczenia zasada równoważności w odniesieniu do poszczególnego ubezpieczonego. Widać z tablicy, że dla wieków młodszych jednostkowa rezerwa prospektywna na początku ubezpieczenia jest ujemna, gdyż wartość prawdopodobna przyszłych świadczeń jest mniejsza od wartości prawdopodobnej przyszłych składek przeciętnych. Odwrotnie jest dla wieków starszych, gdzie jednostkowa rezerwa prospektywna jest dodatnia na początku ubezpieczenia.

Łatwo sprawdzić przez porównanie z tablicami 1. lub 4., że jednostkowe rezerwy prospektywne osiągają, tak jak rezerwy indywidualne wartość kapitałową renty starczej wraz z ukończeniem przez aktywnego 65 roku życia. Dzięki temu, że jednostkowe rezerwy prospektywne nie zaczynają się na początku ubezpieczenia od zera, lecz od wielkości dodatnich lub ujemnych, nie ma przy końcu ubezpieczenia rozbieżności między wysokością rezerwy a wartością kapitałową renty starczej, jak przy jednostkowych rezerwach retrospektywnych. Wartość początkowa jednostkowej rezerwy prospektywnej może być uważana za jednorazową składkę wyrównawczą (dodatnią lub ujemną), która wpłacona na początku ubezpie-

czenia zamienia poszczególne ubezpieczenie na grę sprawiedliwą. Istotnie dla młodszych ubezpieczonych wartość początkowa jednostkowej rezerwy prospektywnej jest ujemna; jest to zatem kwota, którą powinienby o t r z y m a ć ubezpieczony jednorazowo na początku ubezpieczenia, by jego ubezpieczenie ze składką przeciętną było grą sprawiedliwą. Ta kwota jest niczym innym jak wartością kapitałową tej części przyszłych składek, którą młody opłaca na rzecz starych.

Dla starszych ubezpieczonych wartość początkowa jednostkowej rezerwy prospektywnej jest dodatnia; jest to kwota, którą powinien by w p ł a c i ć ubezpieczony, aby jego ubezpieczenie było grą sprawiedliwą. Ta kwota jest wartością kapitałową wszystkich przyszłych dotacyj, jakie każdy starszy ubezpieczony otrzymuje od młodych.

Podkreślona wyżej rola wartości początkowej jednostkowej rezerwy prospektywnej jako jednorazowej składki wyrównawczej wpływa na to, że również jednostkowa rezerwa prospektywna, tak jak jednostkowa rezerwa retrospektywna, może być traktowana jako kwota oszczędności; będzie to jednak kwota oszczędności powstała nie tylko ze składek przeciętnych, ale również i ze składki wstępnej wyrównawczej.

Dzięki takiemu postawieniu sprawy można również dla jednostkowej rezerwy prospektywnej wprowadzić pojęcie kapitału pod ryzykiem, składki za ryzyko i składki oszczędnościowej. Jednostkowa rezerwa prospektywna będzie wartością oprocentowaną takich składek oszczędnościowych oraz jednorazowej składki wyrównawczej. W tablicy 15. podane są kapitały pod ryzykiem, obliczone z jednostkowej rezerwy prospektywnej, w tablicy zaś 16. — odpowiedni podział składek przeciętnych na składkę oszczędnościową i składki za ryzyko.

Porównywając wartości rezerw z tablicy 4., 11., 14. między sobą łątwo sprawdzić, że rezerwa indywidualna znajduje się zawsze między rezerwą jednostkową prospektywną i retrospektywną; dla wieków 25 i 40 widać to z wykresów 3. i 4. Dla młodszych wieków mamy zawsze:

jedn. rez. prosp. < rez. indywid. < jedn. rez. retrosp.

natomiast dla starszych wieków zachodzą nierówności:

jedn. rez. prosp. > rez. indywid. > jedn. rez. retrosp.

Ponieważ kapitał pod ryzykiem powstaje przez odjęcie od tej samej wartości kapitałowej renty odpowiednich rezerw, dla kapitałów pod ryzykiem zachodzą przeciwne nierówności niż wyżej podane, co łatwo sprawdzić przez porównanie tablic 5., 12., 15. Tak samo będzie ze składkami za ryzyko, które powstają przez pomnożenie odpowiednich kapitałów pod ryzykiem przez to samo prawdopodobieństwo inwalidztwa lub śmierci i przez zdyskontowanie tych wartości na jeden rok. Istotnie, z porównania tablic 6., 13., 16. widać, że dla młodszych wieków składki za ryzyko obliczone z jednostkowej rezerwy retrospektywnej są niższe od składek za ryzyko przy składce indywidualnej, te ostatnie zaś są niższe od składek za ryzyko obliczonych z jednostkowej rezerwy prospektywnej. Dla wieków starszych jest odwrotnie: najniższe są składki za ryzyko obliczone z jednostkowej rezerwy prospektywnej, najwyższe są składki za ryzyko obliczone z jednostkowej rezerwy retrospektywnej.

Zanim przejdziemy do dalszych wywodów pragniemy tu zaznaczyć, że pojęcia jednostkowej rezerwy retrospektywnej i prospektywnej są obecnie często krytykowane, tak jak dawniej pojęcie rezerwy indywidualnej, o czym wspominaliśmy w § 8. Mówi się więc, że nazwa „rezerwa jednostkowa“ jest nieusprawiedliwiona, zaś wybitny matematyk ubezpieczeniowy L o e w y (9, str. 201) uważa, że rezerwa jednostkowa „n i e m a s e n s u d l a p o s z c z e g ó l n e g o o s o b n i k a“. Przeciwno tym zarzutom powtórzyć należy uwagi wypowiedziane przez nas w § 8 odnośnie rezerwy indywidualnej. Co się tyczy specjalnie zarzutu bezsensowności, to z rozważań niniejszego § widać jak pełne treści są pojęcia zarówno rezerwy jednostkowej retrospektywnej jak i prospektywnej; usprawiedliwia to dostatecznie zajmowanie się tymi pojęciami. Przekonamy się zresztą jeszcze później, że szczególnie jednostkowa rezerwa prospektywna jest niezwykle użytecznym narzędziem badania, które dotąd nie było dostatecznie wyzyskane. Posługiwanie się tym narzędziem ułatwia poznanie mechanizmu zjawisk, które przed tym nie były należycie zbadane.

Jest rzeczą ciekawą, że wśród przeciwników pojęcia rezerwy jednostkowej przeważają tacy, którzy już nie mają żadnych zastrzeżeń wobec rezerwy indywidualnej. Nasuwa się tu analogia z faktem znanym z historii matematyki, kiedy liczby ujemne jeszcze budziły zastrzeżenia wśród tych, którzy nie mieli żadnych zastrzeżeń wobec liczb dodatnich.

§ 12. BILANS TECHNICZNY PRZY SKŁADCE PRZECIĘTNEJ

Tak jak indywidualna rezerwa prospektywna ma znaczenie dla bilansu technicznego ubezpieczenia ze składką indywidualną, tak jednostkowa rezerwa prospektywna ma znaczenie dla bilansu technicznego ubezpieczenia ze składką przeciętną. Przy tym bilansie pozycje 1., 2., 3. pasywów schematu drugiego z § 7. pozostają bez zmiany. Natomiast rezerwę prospektywną grupy aktywnych otrzymuje się nie z rozważania jednej generacji, lecz z rozważania grupy, składającej się z ciągu generacji. Stan początkowy tej grupy pokrywa się ze stanem aktywnych, ubezpieczonych w zakładzie ubezpieczeń w dniu bilansowym; przyszłe generacje tej grupy przyjmuje się takie, jakie były przyjęte przy kalkulacji składki przeciętnej.

Dla opisanej grupy obliczamy z jednej strony zdyskontowaną na dzień bilansowy wartość przyszłych składek, z drugiej strony zdyskontowaną na dzień bilansowy wartość przyszłych świadczeń. Grupę możemy rozbić na dwie części: na generację z dnia bilansowego i na generacje przyszłe. Obliczając dla każdej z tych części zdyskontowaną wartość przyszłych składek i świadczeń i przedstawiając te wartości jako sumy wartości prawdopodobnych przyszłych składek i świadczeń, jak to czyniliśmy w § 7., dojdziemy wreszcie do następującego schematu bilansowego:

A k t y w a

1. Rezerwy majątkowe zakładu ubezpieczeń.

P a s y w a

1. Suma wartości kapitałowych rent inwalidzkich.
2. Suma wartości kapitałowych rent wdowich.
3. Suma wartości kapitałowych rent starczych.
4. Suma rezerw jednostkowych prospektywnych generacji aktywnych z dnia bilansowego.
5. Suma zdyskontowanych na dzień bilansowy wartości początkowych jednostkowych rezerw prospektywnych przyszłych generacji aktywnych.
- ew. 6. Nadwyżka techniczna.

ew. 2. Niedobór techniczny.

Zamiast sumy rezerw indywidualnych prospektywnych generacji aktywnych z dnia bilansowego, jak to było w schemacie drugim z § 7., otrzymujemy teraz sumę rezerw jednostkowych prospektywnych generacji aktywnych z dnia bilansowego (pozycja 4.), a ponadto sumę zdyskontowanych na dzień bilansowy wartości początkowych jednostkowych rezerw prospektywnych przyszłych generacji aktywnych (poz. 5.). Ta ostatnia suma nie jest na ogół równa zeru, gdyż wartość początkowa jednostkowej rezerwy prospektywnej nie jest na ogół równa zeru (por. tablicę 14.). Pozycje 4. i 5. stanowią razem rezerwę prospektywną grupy aktywnych.

Na początku ubezpieczenia rezerwa prospektywna grupy aktywnych równa jest sumie zdyskontowanych na początek ubezpieczenia wartości początkowych jednostkowych rezerw prospektywnych wszystkich generacji (początkowej i przyszłych). Ta rezerwa prospektywna jest zatem sumą algebraiczną wielkości dodatnich i ujemnych a więc różnych od zera; sama jednak jest równa zeru, gdyż na początku ubezpieczenia spełniona jest dla całej grupy zasada równoważności. Możemy zatem powiedzieć, że chociaż na początku ubezpieczenia rezerwa prospektywna grupy aktywnych równa jest zeru, mamy odłożoną dla każdego aktywnego początkowej lub przyszłych generacji wartość początkową jednostkowej rezerwy prospektywnej. Z wpływających co roku składek przeciętnych, część równa składkom za ryzyko (obliczonym z jednostkowej rezerwy prospektywnej, por. tablica 16.) wraz ze zwolnionymi jednostkowymi rezerwami aktywnych, którzy stali się niezdolni do pracy, zmarli lub dożyli wieku starczego, służy na pokrycie zapadłych świadczeń; z reszty, tj. ze składek oszczędnościowych narasta rezerwa prospektywna grupy aktywnych.

Tak jak to opisywaliśmy w § 7., bilans techniczny będzie zrównoważony, tzn. nie wykaże ani niedoboru technicznego ani nadwyżki tak długo, póki przebieg rzeczywisty ryzyk losowych i stopy procentowej będzie zgodny z założeniami teoretycznymi, przyjętymi do kalkulacji składki przeciętnej. Jednakże w ubezpieczeniu ze składką przeciętną obok ryzyka inwalidztwa, śmierci w stanie aktywnym i inn., które wchodzi w grę również w ubezpieczeniu ze składką indywidualną, mamy do czynienia z nowym rodzajem ryzyka, z ryzykiem ruchu ubezpieczonych. Kalkulując składkę przeciętną, przyjmujemy określone założenia o liczebności i składzie według wieku przyszłych generacji ubezpieczonych. Te założe-

nia, tak jak założenia o przyszłym przebiegu ryzyk inwalidztwa i śmierci, stanowią nową podstawę techniczną ubezpieczenia ze składką przeciętną. Na to, by bilans techniczny ubezpieczenia ze składką przeciętną był zrównoważony, musiałby być zgodny z założeniami, przyjętymi do kalkulacji składki przeciętnej, nie tylko przebieg rzeczywisty stopy procentowej, powstawanie inwalidów, śmiertelność aktywnych, ale również i rzeczywista liczebność oraz skład według wieku generacji aktywnych, późniejszych od generacji początkowej.

Wystarczy jednak, by w przebiegu rzeczywistym jednej z podstaw technicznych ubezpieczenia, a więc również w składzie według wieku przystępujących do ubezpieczenia późniejszych generacji nastąpiły odchylenia w porównaniu z przewidywaniami teoretycznymi, a równowaga ubezpieczenia zostanie naruszona i otrzymany w bilansie nadwyżkę lub niedobór techniczny. Jeśli np. w jakimś roku ubezpieczenia oprócz przewidywanej teoretycznie generacji przystąpi dodatkowo do ubezpieczenia jakiś aktywny, to musi być dla niego odłożona w poz. 4. bilansu technicznego wartość początkowa jednostkowej rezerwy prospektywnej. Jeśli tym dodatkowo przystępującym jest osobnik starszy, to omawiana jednostkowa rezerwa jest dodatnia i powstanie w ten sposób w bilansie niedobór techniczny. Jeśli przystępującym jest osobnik młody, odpowiednia rezerwa jednostkowa jest ujemna i dodatkowe przystąpienie związane jest z powstaniem nadwyżki technicznej w bilansie.

Ogólnie powiedzieć możemy, że każdy wypadek przystąpienia nowego aktywnego do grupy w czasie trwania ubezpieczenia wpływa na powiększenie, wzgl. zmniejszenie pasywów bilansu technicznego, zależnie od tego czy przystępującym jest osobnik stary czy młody. Jednakże dopóki te przystąpienia pozostają w granicach założeń teoretycznych, powiększenie względnie zmniejszenie pasywów bilansu technicznego jest zrównoważone przez rezerwy majątkowe, występujące w aktywach bilansu i bilans pozostaje zrównoważony.

Jeśli chodzi o wpływ przebiegu innych ryzyk, a więc ryzyka inwalidztwa lub śmierci na powstanie nadwyżki lub niedoboru technicznego, to tu sprawa przedstawia się zupełnie podobnie, jak przy ubezpieczeniu ze składką indywidualną: każdy wypadek inwalidztwa lub śmierci wpływa na powiększenie pasywów bilansu o kapitał pod ryzykiem, obliczony z jednostkowej rezerwy prospektywnej (por. tablica 5.). Jednakże w ubezpieczeniu ze składką indywidualną kapitał pod ryzykiem jest zawsze mniejszy od wartości kapitałowej ren-

ty. Natomiast przy składce przeciętnej kapitał pod ryzykiem obliczony z jednostkowej rezerwy prospektywnej może być również większy od wartości kapitałowej renty; w tych mianowicie wypadkach, gdy jednostkowa rezerwa prospektywna jest ujemna, tzn. w pierwszych latach ubezpieczenia. Przy ubezpieczeniu ze składką przeciętną „strata bilansowa“ związana z wypadkiem inwalidztwa lub śmierci może być zatem **w i ę k s z a** od wartości kapitałowej renty.

Nawiązując do uwag naszych z końca § poprzedniego, widzimy teraz jak użytecznym narzędziem badania jest jednostkowa rezerwa prospektywna. Użyteczność tego pojęcia wychodzi na jaw przy bilansie technicznym ubezpieczenia, którego przebieg nie był zgodny z przewidywaniami teoretycznymi. Dopóki ubezpieczenie miało przebieg teoretyczny, rezerwa prospektywna grupy równa była po prostu oprocentowanej reszcie, jaka pozostaje ze składek przeciętnych całej grupy po potrąceniu wypłat na wartości kapitałowe zapadłych rent.¹ Jednakże przy nie teoretycznym przebiegu ubezpieczenia narastanie rezerwy prospektywnej grupy aktywnych daje się najprościej przedstawić tak, jak to opisaliśmy wyżej, przy pomocy rezerw jednostkowych prospektywnych.

Również przedstawienie rezerwy prospektywnej grupy aktywnych w każdym momencie, przy pomocy jednostkowych rezerw prospektywnych, jak to zrobiliśmy przy schemacie bilansowym, oddaje duże usługi przy nie teoretycznym przebiegu ubezpieczenia. Składnik pierwszy tej rezerwy, poz. 4. bilansu, zależy od faktycznego stanu grupy aktywnych w dniu bilansowym; stan ten zaś jest wynikiem dotychczasowego ruchu ubezpieczonych, związanego ze śmiertelnością aktywnych, powstawaniem inwalidów i przystępowaniem nowych aktywnych do grupy. Każdy brakujący lub dodatkowy członek grupy w dniu bilansowym wpływa na zmniejszenie lub zwiększenie całej rezerwy o odpowiednią jednostkową rezerwę prospektywną. Drugi składnik rezerwy prospektywnej grupy aktywnych jest niezależny od dotychczasowego przebiegu ubezpieczenia.

§ 13. REZERWA PROSPEKTYWNA GRUPY AKTYWNYCH I ZAGADNIENIE JEJ REPARTYCJI

Występujące pod poz. 1., 2., 3. w bilansie technicznym ubezpieczenia wartości kapitałowe rent płynnych są to wysokości rezerw teo-

¹ Por. Presburger i Wanatowski (16).

retycznych, jakie powinny być odłożone dla inwalidów, wdów i starców na to, by ubezpieczenie było zrównoważone. Gdyby ubezpieczenie w pewnym momencie zostało zlikwidowane, możnaby dokonać repartycji tych rezerw między wszystkich rencistów, którzy przebywają w ubezpieczeniu w momencie likwidacji; przy tej repartycji każdy rencista mógłby otrzymać odpowiadającą jego wiekowi wartość kapitałową renty.

Natomiast rezerwa prospektywna grupy aktywnych (poz. 4. oraz 5. bilansu technicznego) jest to kwota, jaka w wypadku likwidacji ubezpieczenia pozostałaby dla aktywnych, którzy są ubezpieczeni w chwili likwidacji. Mówiliśmy w § poprzednim o tym, że w wypadku teoretycznego przebiegu ryzyk przyjętych do kalkulacji składki i stopy procentowej, rezerwa prospektywna grupy aktywnych jest po prostu oprocentowaną resztą, jaka pozostaje z wpłaconych przez grupę składek przeciętnych, po uskutecznieniu wypłat na kapitałowe wartości zapadłych rent. W zestawieniu 8. podany jest taki teoretyczny przebieg rezerw prospektywnych grupy aktywnych z zestawienia 4. dla naszych czterech systemów świadczeń przy rencie zasadniczej 100.

Zest. 8. Rezerwa prospektywna grupy aktywnych (w milionach)

Po latach ubezpieczenia	System świadczeń			
	I	II	III	IV
0	—	—	—	—
5	—	273	452	414
10	—	273	676	590
15	—	273	898	781
20	—	273	1 081	973
30	—	273	1 320	1 279
42 i więcej	—	273	1 385	1 378

Z zestawienia widać, że przy systemie świadczeń I rezerwa prospektywna grupy aktywnych jest stale równa zeru, tzn., że w wypadku przebiegu teoretycznego, każdoroczny wpływ składek przeciętnych zostaje całkowicie zużyty na wartości kapitałowe zapadłych rent. Musimy jednak zauważyć, że ta własność systemu świadczeń

z rentą stałą bez karencji jest ściśle związana z przyjętą przez nas grupą o stałej liczbie aktywnych i stałym ich rozkładzie według wieku. Przy innej teoretycznej grupie aktywnych system świadczeń I mógłby prowadzić do rezerwy prospektywnej grupy różnej od zera.¹

Przy pozostałych trzech systemach świadczeń rezerwa prospektywna grupy aktywnych jest równa zeru tylko na początku ubezpieczenia. Przy systemie świadczeń II wzrost tej rezerwy trwa tylko 5 lat, tj. tyle ile wynosi okres karencji. Po 5 latach rezerwa stabilizuje się na poziomie 273 milionów; od tego momentu każdoroczny wpływ składek wraz z odsetkami od rezerwy zostaje całkowicie zużyty na wartości kapitałowe zapadłych rent; sama rezerwa nie ulega zmianie.

Przy systemach świadczeń III i IV rezerwa prospektywna grupy aktywnych wzrasta przez 42 lata ubezpieczenia (65 lat — 23 lata), tj. tak długo, póki cała generacja początkowa ubezpieczonych nie przestanie być aktywna, po czym rezerwa stabilizuje się na dość wysokim poziomie.

Mówiliśmy o tym, że rezerwy na płynne renty w bilansie technicznym ubezpieczenia stanowią tak obliczoną kwotę, że w wypadku likwidacji ubezpieczenia każdy rencista mógłby otrzymać wartość kapitałową renty, odpowiadającą jego wiekowi; ta kwota umożliwiłaby renciście zakupienie w innym zakładzie ubezpieczeń takiej samej renty, jaką pobierał w poprzednim zakładzie ubezpieczeń. Czy o rezerwie prospektywnej grupy aktywnych można coś analogicznego powiedzieć?

Rozpowszechniony jest pogląd, że w wypadku likwidacji ubezpieczenia ze składką przeciętną również każdy aktywny „ma pewien kapitał, który przeniesiony do innej instytucji, opartej na analogicznych zasadach, pozwala tej ostatniej kontynuować działalność instytucji zlikwidowanej” (Ł a z o w s k i, 10; str. 99). Pogląd ten jest tylko o tyle słuszny, że istotnie cała rezerwa prospektywna grupy aktywnych przeniesiona do innego zakładu ubezpieczeń pozwoli kontynuować ubezpieczenie na tych samych warunkach. Natomiast nie należy przypuszczać, że da się dokonać repartycja całej rezerwy prospektyw-

¹ Ściśle biorąc już przy naszej grupie aktywnych otrzymujemy niewielkie dodatnie rezerwy, które pominęliśmy, a które powstają z powodu braku 63 — i 64-letnich aktywnych w generacji początkowej.

nej między aktywnych, ubezpieczonych w chwili likwidacji ubezpieczenia, w ten sposób, że każdy z tych aktywnych otrzyma kapitał, pozwalający mu o d d z i e l n i e kontynuować ubezpieczenie w innym zakładzie ubezpieczeń. Takim kapitałem mogłaby być tylko jednostkowa rezerwa prospektywna.

Wiemy, że rezerwa prospektywna grupy aktywnych jest sumą nie tylko jednostkowych rezerw prospektywnych generacji bilansowej, lecz również zdyskontowanych wartości początkowych jednostkowych rezerw prospektywnych przyszłych generacyj. Otóż przyszłe generacje aktywnych składają się zwykle z ubezpieczonych młodych, w naszym przykładzie z ubezpieczonych 23-letnich. Dla ubezpieczonych młodych wartość początkowa jednostkowej rezerwy prospektywnej jest ujemna, wobec czego również i sumy zdyskontowanych wartości początkowych jednostkowych rezerw prospektywnych przyszłych generacyj, tj. poz. 5. schematu bilansowego z § 12., jest również wielkością ujemną. Cała rezerwa prospektywna grupy aktywnych jest zatem mniejsza od sumy rezerw jednostkowych prospektywnych generacji aktywnych z dnia bilansowego, czyli jest mniejsza od poz. 4. schematu bilansowego. W zestawieniu 9. podany jest przebieg tej ostatniej kwoty dla porównania z zestawieniem 8.

Zest. 9. Suma jednostkowych rezerw prospektywnych generacji aktywnych z dnia bilansowego (w millionach)

Po latach ubezpieczenia	System świadczeń			
	I	II	III	IV
0	367	259	244	217
5	367	532	695	632
10	367	532	920	808
15	367	532	1 141	998
20	367	532	1 324	1 191
30	367	532	1 564	1 496
42 i więcej	367	532	1 628	1 595

Podane w powyższym zestawieniu wysokości poz. 4. schematu bilansowego są stale wyższe od rezerw z zestawienia 8. Dopiero przez dodanie algebraiczne do powyższych liczb wielkości ujemnej z poz.

5. schematu bilansowego otrzymuje się rezerwy prospektywne grupy aktywnych. Widzimy zatem, że rezerwa prospektywna grupy aktywnych nie wystarcza na to, by można było przydzielić każdemu aktywnemu generacji z dnia bilansowego jego jednostkową rezerwę prospektywną.

Skoro zdaliśmy sobie sprawę ze stosunku rezerwy prospektywnej grupy aktywnych do jednostkowych rezerw prospektywnych, warto zbadać w jakim stosunku pozostaje omawiana rezerwa grupy do jednostkowych rezerw retrospektywnych, a więc do kwot oszczędności, jakie przysługiwałyby ubezpieczonemu, gdyby jego ubezpieczenie traktować jako odosobnioną grę losową.

Zestawienie 10. podaje sumy jednostkowych rezerw retrospektywnych generacji aktywnych z dnia bilansowego.

Zest. 10. Suma jednostkowych rezerw retrospektywnych generacji aktywnych z dnia bilansowego (w milionach)

Po latach ubezpieczenia	System świadczeń			
	I	II	III	IV
0	—	—	—	—
5	133	322	496	459
10	342	447	818	740
15	633	637	1 193	1 084
20	990	887	1 593	1 478
30	1 794	1 481	2 396	2 265
42 i więcej	2 366	1 916	2 921	2 752

Przez porównanie powyższego zestawienia z zestawieniem 8. widzimy, że przy teoretycznym przebiegu ubezpieczenia suma jednostkowych rezerw retrospektywnych generacji aktywnych z dnia bilansowego jest również stale wyższa od rezerwy prospektywnej grupy aktywnych, a więc rezerwa ta nie pokrywa kwot oszczędności, jakie przysługiwałyby poszczególnym ubezpieczonym, gdyby ich ubezpieczenie traktować jako pojedyncze gry losowe. Jest to rezultat zupełnie zrozumiały, będący wy-

nikami tego, że w wypadku dożycia wieku starczego przyznaje się ubezpieczonemu wartość kapitałową renty starczej, a nie różną od niej wartość końcową jednostkowej rezerwy retrospektywnej. Wartość końcowa jednostkowej rezerwy retrospektywnej tj. nagromadzona kwota oszczędnościowa ubezpieczonego jest większa lub mniejsza od wartości kapitałowej przyznawanej renty starczej, zależnie od tego czy ubezpieczony wstąpił do ubezpieczenia w wieku młodym czy starszym. Ponieważ w grupie wcześniej osiągają wiek starczy ubezpieczeni, którzy wstąpili do ubezpieczenia w wieku starszym, w pierwszych latach ubezpieczenia przyznawane są poszczególnym ubezpieczonym jako świadczenia starcze kwoty większe niż nagromadzone dla tych ubezpieczonych kwoty oszczędnościowe. W ten sposób powstaje brak w pokryciu kwot oszczędnościowych dla wszystkich pozostałych członków grupy i dlatego rezerwa prospektywna grupy aktywnych jest niższa niż suma jednostkowych rezerw retrospektywnych.

Ponieważ repartycja rezerwy prospektywnej grupy aktywnych nie może doprowadzić do przydzielenia każdemu aktywnemu jego jednostkowej rezerwy retrospektywnej, ani też do przydzielenia każdemu aktywnemu jego jednostkowej rezerwy prospektywnej możemy podejść do zagadnienia z innej strony i zastanowić się nad metodami repartycji posiadanej przez zakład rezerwy prospektywnej grupy między poszczególnych aktywnych. Repartycji tej można dokonać różnymi sposobami, zależnie od przesłanek, z których się wyjdzie.

Można więc stanąć na stanowisku, że podstawą podziału winna być w dalszym ciągu jednostkowa rezerwa retrospektywna i rozdzielić całą rezerwę grupy aktywnych proporcjonalnie do jednostkowych rezerw retrospektywnych. W ten sposób żaden aktywny nie otrzyma wprawdzie swej jednostkowej rezerwy retrospektywnej, ale młodszy otrzyma więcej niż starszy i to w tym stosunku, w jakim jednostkowa rezerwa retrospektywna młodszego jest większa od jednostkowej rezerwy retrospektywnej starszego. Taki podział uwzględniałby zatem ryzyko indywidualne aktywnego, chociaż składka przeciętna tego ryzyka nie uwzględnia.

Możnaby również jako podstawę repartycji przyjąć jednostkową rezerwę prospektywną; wtedy młodszy aktywny otrzymywałby przy podziale mniejszą kwotę niż starszy. Taka metoda repartycji obciążałaby młodszego aktywnego wartością wszystkich jego przyszłych

dotacyj na rzecz starych; zaś starszy aktywny miałby uwzględnioną wartość wszystkich dotacyj, jakie zyskałby, gdyby ubezpieczenie było kontynuowane do końca.

Obie opisane wyżej metody repartycji mogą prowadzić do kwot repartycyjnych ujemnych w tych mianowicie wypadkach, gdy odpowiednia rezerwa jednostkowa jest ujemna. Nie będziemy tu rozważali szeregu innych spotykanych w literaturze metod repartycji; rozpatrzmy jedynie bliżej dla przykładu metodę proponowaną przez Pietscha (11), prowadzącą do nieujemnych kwot repartycyjnych, a przyjmującą jako podstawę podziału liczbę wpłaconych przez ubezpieczonego składek. Ta metoda podziału przydziela każdemu aktywnemu kwotę niezależną od jego wieku, a zależną jedynie od liczby wpłaconych przez niego składek. W tym celu należy rezerwę prospektywną grupy aktywnych w danym momencie podzielić przez liczbę składek przeciętnych wpłaconych przez grupę do tego momentu. Kwoty repartycyjne obliczone w ten sposób podane są w zestawieniu 11.; dla systemu świadczeń I te kwoty repartycyjne są równe zero, gdyż cała rezerwa grupy pozostaje równa zero.

Zest. 11. Kwota repartycyjna przypadająca na jedną składkę przeciętną

System świadczeń	Po latach ubezpieczenia					
	5	10	15	20	30	42
II	19,45	10,61	7,76	6,42	5,32	5,05
III	32,19	26,28	26,52	25,44	25,73	25,63
IV	29,53	22,95	22,20	22,91	24,92	25,50

Z zestawienia widać, że przy systemie świadczeń II kwota repartycyjna stale maleje; albowiem rezerwa prospektywna grupy aktywnych pozostaje od 5. roku ubezpieczenia stała, zaś liczba wpłaconych składek rośnie z roku na rok. Natomiast przy systemach świadczeń III i IV kwota repartycyjna wprawdzie nie pozostaje stała, ale ulega stosunkowo małym wahaniom. Przy systemie świadczeń III repartycja po dwudziestu latach ubezpieczenia pozwala przydzielić każdemu aktywnemu kwotę 25,44 za każdą wpłaconą przez niego składkę przeciętną 28,95; kwota repartycyjna wynosi więc 88% składki przeciętnej. W innych latach ubezpieczenia ten stosunek

procentowy będzie jeszcze wyższy. Przy systemie świadczeń IV najniższa kwota repartycyjna (po 15 latach ubezpieczenia) wynosi 22,20; w stosunku do składki przeciętnej 26,81 kwota repartycyjna wynosi 83%. Z kwot repartycyjnych podanych w zestawieniu 11. skorzystamy w § następnym przy konstruowaniu metody wykupów dla systemów świadczeń III i IV.

§ 14. PRZEDWCZESNE OPUSZCZANIE UBEZPIECZENIA PRZY SKŁADCE PRZECIĘTNEJ

Przy kalkulacji składki przeciętnej wchodzi w grę ryzyko przyszłego ruchu ubezpieczonych, gdyż przyjmuje się założenia o liczebności i składzie według wieku przyszłych generacji ubezpieczonych. Wspominaliśmy już o tym, że można w tych założeniach uwzględnić również opuszczanie ubezpieczenia bez żadnego świadczenia przez ubezpieczonych przed nastąpieniem wypadku inwalidztwa, śmierci lub starości.¹ Jeśli takie przedwczesne opuszczanie ubezpieczenia zostało w kalkulacji składki uwzględnione, to oczywiście opuszczający ubezpieczenie nie mogą rościć żadnych pretensji do otrzymania sumy wykupu. Jeżeli jednak przy kalkulacji składki nie uwzględniono przedwczesnych wystąpień, jak to zrobiono również w naszym przykładzie grupy teoretycznej, to tak jak przy ubezpieczeniu indywidualnym powstaje zagadnienie, jaką kwotę należy wypłacać ubezpieczonemu jako wykup ubezpieczenia.

Zauważmy, że w ubezpieczeniu ze składką indywidualną w wypadku wypłacania wykupu w wysokości rezerwy indywidualnej spełnione są następujące trzy warunki:

1. Wypłata sumy wykupu nie narusza równowagi ubezpieczenia.
2. Suma wykupu równa jest kwocie oszczędnościowej występującego z ubezpieczenia.
3. Rezerwa prospektywna generacji aktywnych wystarcza dołącznie na wypłacenie wszystkim aktywnym sumy wykupu.

Z dotychczasowych naszych rozważań widać odrazu, że w ubezpieczeniu ze składką przeciętną żadne dwa z przytoczonych wyżej warunków nie mogą być jednocześnie spełnione. Istotnie, kwotą spełniającą warunek 1. mogłaby być tylko jednostkowa rezerwa pros-

¹ Takie założenie tkwi w kalkulacji technicznej składki ubezpieczenia emerytalnego pracowników umysłowych z r. 1927 i ubezpieczenia emerytalnego robotników z r. 1933.

pektywną, zaś za kwotę spełniającą warunek 2. uważamy jednostkową rezerwę retrospektywną. Wiemy zaś, że te dwie rezerwy nie są sobie na ogół równe.

Co się tyczy warunku 3. to jak wiemy z § 13., ani jednostka rezerwa prospektywna ani jednostkowa rezerwa retrospektywna tego warunku nie spełnia.

Formułując wyżej przytoczone trzy warunki, jakie powinna spełniać suma wykupu, zakładaliśmy, że równa jest ona indywidualnej rezerwie; jak wspominaliśmy w § 8., istotnie w ubezpieczeniu społecznym ze składką indywidualną takie wykupy byłyby dopuszczalne. Jednakże w ubezpieczeniach prywatnych mamy przykład, gdzie ze względu na antyselekcję i z szeregu innych powodów, mających zresztą znacznie większy wpływ niż antyselekcja, wykupy są o wiele niższe niż rezerwa indywidualna. Przy obecnie obowiązujących w Polsce przepisach wykup może być równy 60% rezerwy indywidualnej.

Wobec powyższego możnaby nasze trzy warunki tak osłabić, żeby wynikające z tych warunków kwoty były tylko g ó r n y m i g r a n i c a m i na wykup. Możliwość mianowicie w ubezpieczeniach społecznych przyjąć następujące t r z y w a r u n k i j e d n o c z e s n e, j a k i e s p e ł n i a ć m u s i s u m a w y k u p u:

1. Wyplata sumy wykupu nie powinna prowadzić do niedoboru technicznego.
2. Suma wykupu nie powinna być wyższa od kwoty oszczędnościowej występującego z ubezpieczenia.
3. Rezerwa prospektywna grupy aktywnych powinna wystarczać na wypłacenie wszystkim aktywnym sumy wykupu.

Z warunku 1. wynika, że wykup nie powinien być wyższy od jednostkowej rezerwy prospektywnej, w myśl warunku 2. wykup nie powinien przekraczać jednostkowej rezerwy retrospektywnej.

Jednostkowa rezerwa retrospektywna rośnie, jak wiemy, bardzo gwałtownie dla młodszych wieków wstępu do ubezpieczenia, jednakże dla starszych wieków maleje ona równie gwałtownie. Gdyby wykup nie miał przekraczać jednostkowej rezerwy retrospektywnej, to dla starszych wieków musiałby on być znikomy lub zgoła ujemny w ostatnich latach ubezpieczenia. Czy jednak przez kwotę oszczędnościową ubezpieczonego przy składce przeciętnej rozumieć można tylko jednostkową rezerwę retrospektywną?

Jednostkowa rezerwa retrospektywna jest to oszczędność ubezpieczonego, jeśli traktujemy jego ubezpieczenie jako odosobnioną grę losową. Możemy jednak oszczędność ubezpieczonego przy składce przeciętnej obliczać w inny sposób, przez **s p r o w a d z e n i e s k ł a d k i p r z e c i ę t n e j d o s k ł a d k i i n d y w i d u a l n e j**¹. Jeżeli rozpatrujemy ubezpieczenie osobnika młodego, który opłaca składkę przeciętną wyższą od składki indywidualnej, to możemy to ubezpieczenie traktować jako ubezpieczenie ze składką indywidualną, do którego dopłacany jest dodatek, równy różnicy między składką przeciętną a indywidualną. Np. składkę przeciętną 28,95 przy systemie świadczeń III dla 25-letniego aktywnego traktować możemy jako sumę składki indywidualnej 23,81 (por. zestawienie 2.) i dodatku rocznego w kwocie 5,14. Ze składki indywidualnej pozostaje ubezpieczonemu oszczędność równa rezerwie indywidualnej; jeśli do tej rezerwy indywidualnej dodamy wartość oprocentowaną dodatków rocznych w wysokości 5,14, otrzymamy kwotę oszczędności 25-letniego aktywnego, pozostałą ze składki przeciętnej. Przy ubezpieczeniu osobnika starszego składkę przeciętną możemy przedstawić jako różnicę między składką indywidualną a pewnym brakiem rocznym. Wyżej omawiana składka przeciętna 28,95 jest dla 40-letniego równa różnicy między składką indywidualną 36,75 (por. zest. 2.) a brakiem rocznym w wysokości 7,80. W tym wypadku zatem jako oszczędność pozostałą ze składki przeciętnej możemy traktować rezerwę indywidualną 40-letniego zmniejszoną o wartość oprocentowaną braków rocznych w wysokości 7,80. Tak obliczone kwoty oszczędnościowe powstałe ze składek przeciętnych podane zostały w tablicy 17. Przez porównanie tej tablicy z tablicą 11. widzimy, że kwoty oszczędnościowe z tablicy 17. zmieniają się mniej gwałtownie niż jednostkowe rezerwy retrospektywne: dla wieków młodszych te kwoty oszczędnościowe rosną wolniej, dla wieków starszych nie maleją one w późniejszych latach ubezpieczenia, tak jak jednostkowe rezerwy retrospektywne. Podkreślamy raz jeszcze, że kwoty oszczędnościowe z tablicy 17. powstały z traktowania poszczególnego ubezpieczenia ze składką przeciętną nie jako jednej całości, stanowiącej grę losową, lecz jako połączenia ubezpieczenia ze składką indywidualną z operacją oszczędnościową.

W powyższych naszych rozważaniach zyskaliśmy nową interpre-

¹ Ta metoda posłużyła nam do rozwiązania zagadnienia ubezpieczenia grupowego ze składką przeciętną. Por. Presburger (14).

tację pojęcia kwoty oszczędnościowej przy składce przeciętnej; zastosujemy ją niżej do warunku 2. na sumę wykupu.

Przejdziemy teraz do warunku 3., jaki spełniać powinna suma wykupu. Dla stosowania tego warunku należy przyjąć jakąś metodę repartycji rezerwy prospektywnej grupy aktywnych. Z rozważań § poprzedniego widzieliśmy, że metoda repartycji według liczby wpłaconych składek może być praktycznie dogodna dla systemów świadczeń III i IV. Z zestawienia 11. przyjmujemy najniższe kwoty repartycyjne przypadające na jedną składkę przeciętną; kwoty te wynoszą 25,44 przy systemie świadczeń III i 22,20 przy systemie świadczeń IV. Wtedy otrzymamy następujące granice górne na sumę wykupu, będące wielokrotnością powyższych kwot.

Zest. 12. Granica górna na sumę wykupu

System świadczeń	Po latach ubezpieczenia					
	5	10	15	20	30	42
III	127,20	254,40	381,60	508,80	763,20	1 068,48
IV	111,00	222,00	333,00	444,00	666,00	932,40

Jeżeli porównamy przytoczone zestawienie z tablicą 11., jednostkowych rezerw retrospektywnych, zobaczymy, że powyższe granice górne na wykup są na ogół niższe od jednostkowych rezerw retrospektywnych. Jedyne w ostatnich latach ubezpieczenia (5 do 10 lat przed płatnością renty starczej) przy starszych wiekach wstępu jednostkowa rezerwa retrospektywna jest niższa od liczb z zestawienia 12. Jeżeli jednak jednostkowe rezerwy retrospektywne zastąpimy przez kwoty oszczędnościowe z tablicy 17. to zobaczymy, że granice górne na wykup z zestawienia 12. pozostają już stale niższe od tych kwot oszczędnościowych. Wobec tego można przyjąć, że granice górne na wykup z zestawienia 12. spełniają warunek 2. na sumę wykupu.

Porównanie zestawienia 12. z tablicą 14. jednostkowych rezerw prospektywnych wykazuje, że również i w tym wypadku nasze granice górne na wykup pozostają niższe, z wyjątkiem pierwszych lat ubezpieczenia przy młodszych wiekach wstępu do ubezpieczenia. Możemy zatem podane w zestawieniu 12. granice górne na wykup przyjąć wprost jako sumy wykupu,

spełniające nasze trzy warunki. Należy jedynie, przynajmniej dla młodszych ubezpieczonych, wprowadzić okres karencji (wyczekiwania) na wypłatę sumy wykupu; okres ten będzie mógł być krótszy niż 10 lat. Zgodnie z naszymi obliczeniami z § 13., ustalone wyżej sumy wykupu będą stanowiły stały % sumy wpłaconych składek przeciętnych; przy systemie świadczeń III suma wykupu wynosić będzie stale 88% sumy wpłaconych składek przeciętnych, przy systemie IV — 83% sumy wpłaconych składek przeciętnych.

Podany tu wyżej przykład konkretny metody wykupów został dostosowany do systemów świadczeń III i IV. Nie należy zatem tej metody uważać za uniwersalną. Z przykładu naszego wynikają jedynie wytyczne, według których postępować należy przy ustalaniu metody wykupów dla konkretnego systemu świadczeń.

Jak to już wspominaliśmy przy ubezpieczeniu ze składką indywidualną, zagadnienie przedwczesnego opuszczania ubezpieczenia związane jest z zagadnieniem zaliczania pewnej liczby lat ubezpieczenia wstecz przy wstępowaniu do ubezpieczenia. Mówiliśmy już w § 8., że przy takim przystępowaniu do ubezpieczenia ze składką indywidualną ubezpieczony winien dla zachowania równowagi ubezpieczenia wpłacić odpowiednią rezerwę indywidualną. Przy ubezpieczeniu ze składką przeciętną należałoby zatem wpłacić jednostkową rezerwę prospektywną; żądając takiej wpłaty, czynimy założenie, że chodzi tu o dodatkowe przystąpienie do ubezpieczenia poza przystąpieniami, które były przewidywane przy kalkulacji ubezpieczenia. Gdybyśmy jednakże stanęli na stanowisku, że przystępujący do ubezpieczenia jest członkiem jednej z generacji, przewidywanych przy kalkulacji składki, to sytuacja uległaby zmianie.

Kalkulacja składki przeciętnej jest przeprowadzona w ten sposób, że przewiduje odkładanie wartości początkowej jednostkowej rezerwy prospektywnej dla każdego nowowstępującego do ubezpieczenia. Jeśli nowowstępującym jest młody (tak jest w naszym przykładzie teoretycznej grupy aktywnych), wartość początkowa jednostkowej rezerwy prospektywnej jest ujemna; kalkulacja składki przeciętnej przewiduje zatem „zysk“ z nowych wstąpień młodych ubezpieczonych.

Rozważmy ogólniejszy przypadek teoretycznej grupy, w której przyszłe generacje aktywnych mogą składać się z osobników różnego wieku. Dla nowowstępującego aktywnego w wieku 35 lat prze-

widywane jest przy systemie świadczeń III odłożenie wartości początkowej jednostkowej rezerwy prospektywnej 39,81 (por. tablica 14.). Jeśli tenże 35-letni pragnie zaliczyć sobie 5 lat ubezpieczenia wstecz, potrzebna jest dla niego jednostkowa rezerwa prospektywna po 5 latach obliczona dla aktywnego, który wstąpił do ubezpieczenia w wieku 30 lat; rezerwa ta wynosi 143,52. Zrozumiała jest rzeczą, że za zaliczenie 5 lat ubezpieczenia wstecz ubezpieczony nie musi wpłacić całej tej rezerwy, lecz tylko różnicę rezerw: $143,52 - 39,81 = 103,71$, tj. kwotę, o jaką wzrasta jednostkowa rezerwa prospektywna z powodu antydatowania ubezpieczenia. Dla ubezpieczonego młodszego, np. 30-letniego należy uwzględnić to, że wartość początkowa jednostkowej rezerwy prospektywnej jest ujemna. Przy zaliczeniu 5 lat ubezpieczenia wstecz wzrost rezerwy wyniesie zatem: $61,44 - (-20,38) = 81,82$. W tablicy 18. podane są obliczone w powyższy sposób¹ wpłaty jednorazowe za zaliczenie poprzednich lat ubezpieczenia. Dla systemu świadczeń I wpłaty te są równe zeru; jest to zgodne z uwagą naszą z § 8., że zaliczenie lat ubezpieczenia przy systemie świadczeń I nie ma żadnego wpływu na wysokość świadczeń, jakie otrzymuje ubezpieczony.

Połączenie zagadnień przedwczesnego opuszczania ubezpieczenia oraz zaliczenia lat ubezpieczenia wstecz mamy przy zagadnieniu przechodzenia ubezpieczonego z jednego zakładu ubezpieczeń do drugiego, (np. w wypadku zmiany rodzaju zatrudnienia lub emigracji). To zagadnienie dotyczy w ogólnym przypadku zakładów ubezpieczeń, w których obowiązują różne systemy świadczeń i chodzi w nim o dwie kwestie: (a) o ustalenie ile lat ubezpieczenia należy zaliczyć ubezpieczonemu przy nowym systemie świadczeń, jeśli przy poprzednim systemie ma zaliczoną określoną liczbę lat; (b) o ustalenie kwoty, jaką powinien z tego tytułu wpłacić do nowego zakładu ubezpieczeń stary zakład ubezpieczeń, z którego ubezpieczony się przenosi.

Pozostawmy na razie na uboczu kwestię (a) i rozważmy zagadnienie jaką kwotę stary zakład ubezpieczeń winien wpłacić do nowego, jeśli w obydwu zakładach obowiązuje ten sam system świadczeń. Przy przyjętym założeniu naturalny i zrozumiały jest postulat, że poszukiwana kwota przelewowa winna być tak dobrana, by ubezpieczony miał zali-

¹ Do opisanej wyżej metody sprowadza się metoda stosowana w pracy: Berliner (2).

czoną w nowym zakładzie taką samą liczbę lat ubezpieczenia, jaką przebył w zakładzie starym. W ubezpieczeniu ze składką indywidualną poszukiwaną kwotą byłaby rezerwa indywidualna. W ubezpieczeniu ze składką przeciętną poszukiwaną kwotą nie może być suma wykupu, spełniająca jednocześnie sformułowane przez nas wyżej trzy warunki; taka suma wykupu będzie bowiem na ogół niższa od jednostkowej rezerwy prospektywnej i wobec tego nie będzie mogła zapewnić ubezpieczonemu w nowym zakładzie tych praw, które nabył w zakładzie starym. Zauważmy jednak, że dla poszukiwanej kwoty przelewowej możemy zrezygnować z warunku 2., który ogranicza wykup wysokością kwoty oszczędnościowej ubezpieczonego. Ponieważ kwota przelewowa nie jest wpłacana do rąk ubezpieczonego, lecz do nowego zakładu ubezpieczeń na zasadach wzajemności, może ona przekraczać kwotę oszczędnościową ubezpieczonego; nie zachodzi bowiem obawa niesłusznego wzbogacenia się ubezpieczonego. Możemy również zrezygnować z warunku 3. jeśli przeniesienie się ubezpieczonego będzie regulowane przepisami, ograniczającymi masowość tego zjawiska i dzięki temu nie będzie zachodziła obawa, że wszyscy ubezpieczeni mogą jednocześnie opuścić ubezpieczenie, celem przeniesienia się do nowego zakładu.

W ten sposób dochodzimy do rezultatu, że stary zakład ubezpieczeń ma możliwość przelać do nowego zakładu ubezpieczeń jednostkową rezerwę prospektywną ubezpieczonego. Ta rezerwa umożliwi nowemu zakładowi przyznanie ubezpieczonemu tych samych praw, jakie nabył on w starym zakładzie; zgodnie jednak z poprzednimi naszymi rozważaniami o zaliczaniu lat ubezpieczenia wstecz, zakładamy tu, że przenoszenie się ubezpieczonego z jednego zakładu ubezpieczeń do drugiego odbywa się poza ruchem ubezpieczonych, przewidzianym w kalkulacji ubezpieczenia. Z powyższego widać również, że nie zachodzi obawa, aby w wypadku gdy jednostkowa rezerwa retrospektywna jest większa od jednostkowej rezerwy prospektywnej, ubezpieczony był pokrzywdzony, gdyż otrzymuje on te same prawa jakie nabył w starym zakładzie.

Rozważaliśmy dotychczas zagadnienie przenoszenia się ubezpieczonego w wypadku, gdy obydwa zakłady ubezpieczeń ubezpieczają według tego samego systemu świadczeń. Jeśli ubezpieczony przenosi się do zakładu stosującego inny system świadczeń, należy mu zaliczyć tyle lat ubezpieczenia wstecz, by jednostkowa rezerwa prospek-

tywna przy nowym systemie świadczeń była równa jednostkowej rezerwie prospektywnej, którą wypłaca stary zakład ubezpieczeń.

Mówiliśmy o takim rozwiązaniu zagadnienia przechodzenia ubezpieczonego z jednego zakładu ubezpieczeń do drugiego, gdzie stary zakład ubezpieczeń **l i k w i d u j e j e d n o r a z o w o s w o j e z o b o w i ą z a n i a** wobec ubezpieczonego. Można jednak próbować rozwiązać zagadnienie na innej drodze, tej mianowicie, że stary zakład ubezpieczeń nie wypłaca żadnej kwoty jednorazowej przy przenoszeniu się ubezpieczonego, lecz dopiero z chwilą zajścia wypadku losowego wypłaca świadczenia łącznie z nowym zakładem ubezpieczeń. Przy tej metodzie, która nosi nazwę **s y s t e m u ł ą c z e n i a u b e z p i e c z e ń**, należy ustalić zarówno wysokość łącznych świadczeń, jakie otrzymuje ubezpieczony, jak również udział w tych świadczeniach poszczególnego zakładu ubezpieczeń.

W stosowanej dotychczas formie system łączenia ubezpieczeń stara się ustalić wysokość świadczeń obu zakładów ubezpieczeń na drodze rozumowań nieaktuarialnych; dopiero w dalszym ciągu ma być badany sposób finansowego pokrycia znalezionej na tej płaszczyźnie rozwiązania.¹ Takie badanie finansowe systemu łączenia ubezpieczeń nie zostało jednak, o ile nam wiadomo, dotychczas przeprowadzone; wydaje nam się, że do czasu przeprowadzenia takiego badania system łączenia ubezpieczeń winien być stosowany z całą ostrożnością z uwagi na niebezpieczeństwo naruszenia równowagi finansowej ubezpieczenia.

§ 15. ZYSKI I STRATY UBEZPIECZONEGO PRZY SKŁADCE PRZECIĘTNEJ

Przejdziemy teraz do badania ubezpieczenia ze składką przeciętną z punktu widzenia efektu oszczędnościowego, jaki przynosi ono ubezpieczonemu z chwilą nastąpienia wypadku losowego; będzie to zatem badanie analogiczne do tego, jakie przeprowadziliśmy w § 9 dla składki indywidualnej.

Oczywiście dla jednostkowego ubezpieczenia ze składką przeciętną nie będzie już spełniona zasada równoważności strat i zysków, którą ilustrowaliśmy w tablicy 8.; wartość prawdopodobna zysków poszczególnego ubezpieczonego nie będzie równa wartości prawdo-

¹ Por. Horowitz i Fischlowitz (6, str. 38—39).

podobnej jego strat. Dla młodego ubezpieczonego, który opłaca składkę przeciętną wyższą od odpowiadającej jego wiekowi składki indywidualnej, wartość prawdopodobna zysków będzie mniejsza od wartości prawdopodobnej strat. Dla starszego ubezpieczonego będzie odwrotnie: wartość prawdopodobna zysków będzie większa od wartości prawdopodobnej strat. Znajdzie to wyraz w położeniu punktu krytycznego (ciągłości) przebiegu zysków i strat; dla młodszego ubezpieczonego punkt krytyczny przy składce przeciętnej ulegnie przesunięciu na lewo, dla starszego ubezpieczonego punkt krytyczny zostanie przesunięty na prawo. Widać to na wykresie 5., gdzie podany jest przebieg zysków i strat dla ryzyka inwalidztwa przy systemie świadczeń II. W wykresie 5. na osi odciętych nie jest odłożony, jak w wykresach 1. i 2. wiek ubezpieczonego w chwili nastąpienia wypadku losowego, lecz rok ubezpieczenia. Dlatego też punkty krytyczne (ciągłości) krzywych, odpowiadających składce indywidualnej, nie są teraz skupione blisko siebie: dla wieku wstępu 25 punkt krytyczny znajduje się na wykresie 5. powyżej 30 roku ubezpieczenia, dla wieku wstępu 40 znajduje się on powyżej 20 roku ubezpieczenia. Natomiast rzuca się w oczy fakt godny uwagi, że teraz punkty krytyczne, odpowiadające składce przeciętnej, znajdują się blisko siebie, mianowicie w pobliżu 25 roku ubezpieczenia. Z wykresu widać również, że przejście ze składki indywidualnej na składkę przeciętną wpływa na przesunięcie punktów krytycznych o okres nie przekraczający 5 lat ubezpieczenia. Opłacając składkę przeciętną zamiast składki indywidualnej, młody aktywny zaczyna być narażony na straty o 5 lat wcześniej, natomiast starszy aktywny o tyleż prawie lat później.

To co widzieliśmy na wykresie 5. znajduje potwierdzenie w tablicy 19., która podaje przebieg zysków i strat ubezpieczonego przy składce przeciętnej, dla wszystkich czterech systemów świadczeń, przy ryzyku inwalidztwa i ryzyku śmierci. Tablica 19. jest więc odpowiednikiem tablicy 9, jednakże tak jak na wykresie 5. mamy w tablicy 19. uwidocznione zyski i straty w zależności od roku ubezpieczenia, a nie od wieku, w którym następuje wypadek losowy.

Obserwując przesunięcia punktów krytycznych przy składce przeciętnej dla młodszych ubezpieczonych na moment wcześniejszy, dla starszych — na późniejsze lata ubezpieczenia, musimy zdawać sobie sprawę z tego, że mamy tu do czynienia z tym samym zjawiskiem, które podkreśliliśmy już przed tym: **o d c i ą ż e n i e m p o c z ą t k o w e j g e n e r a c j i u b e z p i e c z o n y c h** (do

której należą również starsi ubezpieczeni) kosztem wszystkich generacji późniejszych (do których należą tylko młodzi). Wobec tego jasne jest, że przesunięcia punktów krytycznych dla różnych wieków wstępu do ubezpieczenia nie są od siebie niezależne. Te przesunięcia punktów krytycznych odbywają się z zachowaniem zasady równoważności dla całej grupy, chociaż ta zasada nie obowiązuje już dla poszczególnego ubezpieczonego.

Z tablicy 19. widać, że punkt krytyczny (ciągłości) dla ryzyka inwalidztwa znajduje się dla wszystkich czterech systemów świadczeń w pobliżu 25 roku ubezpieczenia, zaś punkt krytyczny dla ryzyka śmierci w pobliżu 20. roku ubezpieczenia. Na skutek tego dla aktywnych, którzy wstąpili do ubezpieczenia powyżej 40. roku życia ($40 + 25 = 65$) wypadek inwalidztwa po okresie karencji **n i e j e s t n i g d y z w i ą z a n y z e s t r a t ą t y l k o z z y s k i e m**, dla aktywnych zaś, którzy wstąpili do ubezpieczenia powyżej 45. roku życia ($45 + 20 = 65$) dotyczy to również ryzyka śmierci. Mamy tu zatem do czynienia ze zjawiskiem przesunięcia punktu krytycznego poza koniec ubezpieczenia. Ilustrację tego faktu mamy na wykresie 6., gdzie przedstawiony jest przebieg zysków i strat przy składce przeciętnej dla ryzyka inwalidztwa przy systemie świadczeń II; dla łatwiejszego porównania z wykresem I odłożyliśmy na osi odciętych wiek ubezpieczonego w chwili nastąpienia wypadku inwalidztwa.

Stwierdzamy zatem, że przy składce przeciętnej istnieje dla generacji początkowej taki **w i e k g r a n i c z n y**, że powyżej tego wieku ubezpieczenie jest (poza okresem karencji) **z a w s z e b a r d z i e j o p ł a c a l n e n i ż b a n k o w y w k ł a d o s z c z ę d n o ś c i o w y**¹. Tym granicznym wiekiem wstępu do ubezpieczenia jest w przypadku przyjętej przez nas teoretycznej grupy ubezpieczonych wiek 45 lat. Godny uwagi jest fakt, że ten wiek graniczny jest w dużym stopniu **n i e z a l e ż n y o d s y s t e m u ś w i a d c z e ń**, tak jak niezależny od systemu świadczeń jest wiek, odpowiadający składce przeciętnej (por. § 10.).

¹ Nawiązując do uwagi naszej w odnośniku na str. 24, dodajmy, że p. Braun porównywa w pracy swej wartości kapitałowe świadczeń z oprocentowanymi składkami przeciętnymi ubezpieczenia społecznego, czyniąc to jedynie dla najmłodszego wieku wstępu do ubezpieczenia. W ten sposób pominięty zostaje zupełnie tak istotny dla ubezpieczenia społecznego problem generacji początkowej ubezpieczonych i usunięta zostaje w cień cała grupa starszych aktywnych, którym ubezpieczenie stale przynosi zyski.

Tablica 2. Wartość składki naturalnej (system świadczeń I, wiek wstępu-40)

W roku ubezpieczenia	Wiek ubezpieczonego	Prawdopodobieństwo inwalidności	Wartość kapitałowa renty inwalidzkiej na koniec roku ubezpieczenia	Składka naturalna za rentę inwalidzką: (3) x (4)	Prawdopodobieństwo śmierci w stanie aktywnym	Wartość kapitałowa renty wdowiej na koniec roku ubezpieczenia	Składka naturalna za rentę wdowią: (6) x (7)	Składka naturalna za rentę inwalidzką i wdowią: (5) + (8)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	40	0,0038	1 033,4	3,93	0,0094	717,1	6,74	10,67
2	41	0,0044	1 035,6	4,56	0,0097	718,8	6,97	11,53
3	42	0,0049	1 036,8	5,08	0,0101	718,8	7,26	12,34
4	43	0,0055	1 037,2	5,70	0,0106	717,2	7,60	13,30
5	44	0,0063	1 036,5	6,53	0,0110	713,4	7,85	14,38
6	45	0,0070	1 034,7	7,24	0,0116	709,0	8,22	15,46
7	46	0,0077	1 031,7	7,94	0,0123	706,2	8,69	16,63
8	47	0,0089	1 027,6	9,15	0,0129	703,0	9,07	18,22
9	48	0,0103	1 022,4	10,53	0,0135	695,6	9,39	19,92
10	49	0,0118	1 016,2	11,99	0,0144	686,2	9,88	21,87
11	50	0,0138	1 008,8	13,92	0,0152	674,2	10,25	24,17
12	51	0,0161	1 000,1	16,10	0,0160	661,2	10,58	26,68
13	52	0,0184	990,2	18,22	0,0169	647,5	10,94	29,16
14	53	0,0208	978,8	20,36	0,0178	633,2	11,27	31,63
15	54	0,0237	965,9	22,89	0,0184	623,6	11,47	34,36
16	55	0,0269	951,5	25,60	0,0192	613,2	11,77	37,37
17	56	0,0306	935,6	28,63	0,0200	596,6	11,93	40,56
18	57	0,0351	918,4	32,24	0,0208	579,9	12,06	44,30
19	58	0,0407	900,0	36,63	0,0219	562,2	12,31	48,94
20	59	0,0470	880,6	41,39	0,0234	549,0	12,85	54,24
21	60	0,0543	860,4	46,72	0,0252	535,0	13,48	60,20
22	61	0,0618	839,2	51,86	0,0268	514,2	13,78	65,64
23	62	0,0704	817,4	57,54	0,0292	488,3	14,26	71,80
24	63	0,0791	794,9	62,88	0,0314	472,2	14,83	77,71
25	64	0,0881	771,8	68,00	0,0336	451,0	15,15	83,15

Tablica 3. Ilustracja zasady równoważności składek i świadczeń (system świadczeń I, wiek wstępu - 40)

Rok ubezpieczenia n	Prawdopodobieństwo na początku ubezpieczenia zostania inwalidą w roku n	Zdyskontowana na początek ubezpieczenia wartość kapitałowa renty inwalidzkiej zapadłej w roku n	Wartość prawdopodobna na początku ubezpieczenia renty inwalidzkiej, zapadłej w roku n: (2) x (3)	Prawdopodobieństwo na początku ubezpieczenia śmierci w stanie aktywnym w roku n	Zdyskontowana na początek ubezpieczenia wartość kapitałowa renty wdowiej zapadłej w roku n	Wartość prawdopodobna na początku ubezpieczenia renty wdowiej zapadłej w roku n: (5) x (6)	Prawdopodobieństwo dożycia w stanie aktywnym początku roku n	Zdyskontowana na początek ubezpieczenia składka roczna 30,28 płatna na początku roku n	Wartość prawdopodobna na początku ubezpieczenia składki z roku n: (8) x (9)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0038	988,9	3,76	0,0094	686,2	6,45	1,0000	30,28	30,28
2	0,0043	948,3	4,08	0,0095	658,2	6,25	0,9868	28,98	28,60
3	0,0048	908,5	4,32	0,0098	629,9	6,17	0,9730	27,73	26,98
4	0,0053	869,8	4,61	0,0101	601,4	6,07	0,9584	26,53	25,43
5	0,0059	831,7	4,91	0,0104	572,5	5,95	0,9430	25,39	23,94
6	0,0065	794,5	51,6	0,0107	544,4	5,83	0,9267	24,30	22,52
7	0,0070	758,1	5,31	0,0112	518,9	5,81	0,9095	23,25	21,15
8	0,0079	722,6	5,71	0,0115	494,3	5,68	0,8913	22,25	19,83
9	0,0090	688,0	6,16	0,0118	468,1	5,52	0,8719	21,29	18,56
10	0,0100	654,4	6,54	0,0123	441,9	5,44	0,8512	20,38	17,35
11	0,0114	621,6	7,09	0,0126	415,4	5,23	0,8289	19,50	16,16
12	0,0130	589,7	7,64	0,0129	389,9	5,03	0,8048	18,66	15,02
13	0,0143	558,7	7,99	0,0132	365,4	4,82	0,7790	17,85	13,91
14	0,0156	528,5	8,24	0,0134	341,9	4,58	0,7515	17,09	12,84
15	0,0172	499,1	8,58	0,0133	322,2	4,29	0,7225	16,35	11,81
16	0,0186	470,5	8,75	0,0133	303,2	4,03	0,6921	15,65	10,83
17	0,0202	442,7	8,94	0,0132	282,3	3,73	0,6602	14,97	9,88
18	0,0220	415,9	9,15	0,0130	262,6	3,41	0,6268	14,33	8,98
19	0,0241	390,0	9,40	0,0130	243,6	3,17	0,5917	13,71	8,11
20	0,0260	365,1	9,49	0,0130	227,6	2,96	0,5547	13,12	7,28
21	0,0280	341,4	9,56	0,0130	212,3	2,76	0,5157	12,56	6,48
22	0,0294	318,6	9,37	0,0127	195,2	2,48	0,4747	12,01	5,70
23	0,0304	297,0	9,03	0,0126	177,4	2,24	0,4326	11,50	4,97
24	0,0308	276,4	8,51	0,0122	164,2	2,00	0,3895	11,00	4,28
25	0,0305	256,8	7,83	0,0116	150,1	1,74	0,3465	10,53	3,65
			180,13			111,64			374,54

Prawdopodobieństwo dożycia w stanie aktywnym końca 25-go roku ubezpieczenia

0,3043

Zdyskontowana na początek ubezpieczenia wartość kapitałowa renty starczej

272,0

Wartość prawdopodobna na początku ubezpieczenia renty starczej

82,77

Wiek wstępu	Po latach ubezpieczenia								
	1	5	10	15	20	25	30	35	40

S y s t e m ś w i a d c z e ń I

25	12,34	63,27	132,30	206,61	288,67	378,64	475,10	594,40	817,44
30	14,45	74,55	155,15	244,45	342,63	448,14	578,28	817,44	
35	17,15	88,73	187,37	296,13	413,33	557,47	817,44		
40	21,34	111,16	234,06	366,93	529,68	817,44			
45	27,58	143,49	299,07	489,15	817,44				
50	36,88	191,68	424,94	817,44					
55	56,08	310,32	817,44						
60	124,35	817,44							

S y s t e m ś w i a d c z e ń II

25	13,45	74,97	142,99	216,13	296,85	385,31	480,09	597,38	817,44
30	17,11	95,37	173,71	260,40	355,61	457,86	584,09	817,44	
35	21,67	121,39	215,43	318,99	430,44	567,70	817,44		
40	27,56	156,34	270,85	394,41	546,15	817,44			
45	35,65	206,09	345,93	517,17	817,44				
50	46,91	280,67	478,15	817,44					
55	65,44	415,72	817,44						
60	113,47	817,44							

S y s t e m ś w i a d c z e ń III

25	25,16	139,54	291,53	469,70	675,54	910,69	1 175,21	1 497,74	2 043,59
30	29,06	162,12	329,06	526,90	753,74	1 009,80	1 321,25	1 839,24	
35	33,56	188,52	373,91	593,24	841,73	1 143,18	1 634,88		
40	38,94	220,75	426,51	669,00	962,32	1 430,51			
45	45,40	262,63	489,60	777,47	1 226,16				
50	53,60	320,66	588,27	1 021,80					
55	65,44	415,73	817,44						
60	113,47	817,44							

S y s t e m ś w i a d c z e ń IV

25	23,31	129,92	269,57	434,92	633,29	868,68	1 146,51	1 490,20	2 043,59
30	26,40	146,98	293,75	469,23	679,00	925,93	1 236,62	1 736,99	
35	29,73	166,75	322,46	507,02	724,88	995,73	1 430,51		
40	34,47	195,52	365,51	564,31	816,84	1 226,16			
46	40,52	234,35	417,77	647,32	1 021,80				
50	50,30	300,71	533,24	919,62					
55	65,44	415,73	817,44						
60	113,47	817,44							

Tablica 5. Kapitał pod ryzykiem
(i — kapitał pod ryzykiem inwalidztwa,

Wiek wstępu	W roku ubezpieczenia									
	1	5	10	15	20	25	30	35	40	
System świadczeń I										
25	i	903,3	902,1	873,1	824,0	747,8	637,6	490,8	286,2	—45,6
	ś	180,7	382,4	493,2	506,4	424,7	307,6	148,5	—45,4	—366,4
30	i	960,3	930,8	875,4	792,1	673,6	517,8	302,2	—45,4	
	ś	473,6	550,9	557,8	469,0	343,6	175,5	—29,3	—366,4	
35	i	994,6	941,9	849,1	720,1	552,6	323,1	—45,6		
	ś	627,0	624,3	526,0	390,1	210,3	—8,5	—366,4		
40	i	1 012,1	925,3	782,1	599,0	350,9	—45,6			
	ś	695,8	602,2	452,1	256,7	19,3	—366,4			
45	i	1 007,1	872,7	666,8	391,4	—45,6				
	ś	681,4	542,7	324,5	59,8	—366,4				
50	i	971,9	774,2	455,7	—45,6					
	ś	637,3	431,9	124,1	—366,4					
55	i	895,4	570,3	—45,6						
	ś	557,1	238,7	—366,4						
60	i	736,0	—45,6							
	ś	410,6	—366,4							
System świadczeń II										
25	i	—13,4	—75,0	862,4	814,5	739,7	630,9	485,8	283,2	—45,6
	ś	—13,4	—75,0	482,5	496,9	416,6	300,9	143,5	—48,4	—366,4
30	i	—17,1	—95,4	856,9	776,1	660,6	508,0	296,5	—45,6	
	ś	—17,1	—95,4	539,3	453,0	330,6	165,7	—35,1	—366,4	
35	i	—21,7	—121,4	821,1	697,2	535,5	312,9	—45,6		
	ś	—21,7	—121,4	498,0	367,2	193,2	—18,7	—366,4		
40	i	—27,6	—156,3	745,4	571,5	334,4	—45,6			
	ś	—27,6	—156,3	415,4	229,2	2,8	—366,4			
45	i	—35,6	—206,1	620,0	363,4	—45,6				
	ś	—35,6	—206,1	277,7	31,8	—366,4				
50	i	—46,9	—280,7	402,4	—45,6					
	ś	—46,9	—280,7	70,8	—366,4					
55	i	—65,4	—415,7	—45,6						
	ś	—65,4	—415,7	—366,4						
60	i	—113,5	—817,4							
	ś	—113,5	—817,4							

(o — składka oszczędnościowa, i — składka za ryzyko

Wiek wstępu	Składka indywidualna	W roku ubezpieczenia									
		1	5	10	15	20	25	30	35	40	
System świadczeń I											
25	13,58	o	11,83	10,34	8,52	6,54	4,62	2,15	-0,19	1,74	29,20
		i	0,47	0,73	1,56	2,69	4,48	7,19	11,15	12,86	-3,85
		ś	1,28	2,51	3,50	4,35	4,48	4,24	2,62	-1,02	-11,77
30	17,74	o	13,76	12,16	10,10	8,05	5,41	2,89	4,82	33,36	
		i	0,88	1,67	2,85	4,74	7,59	11,76	13,58	-3,85	
		ś	3,10	3,91	4,79	4,95	4,74	3,09	-0,66	-11,77	
35	23,11	o	16,41	14,68	12,47	9,61	6,85	8,78	38,73		
		i	2,10	3,07	5,09	8,12	12,55	14,52	-3,85		
		ś	4,60	5,36	5,55	5,38	3,71	-0,19	-11,77		
40	30,28	o	20,34	18,38	15,24	12,15	14,08	45,90			
		i	3,68	5,54	8,81	13,60	15,77	-3,85			
		ś	6,26	6,36	6,23	4,53	0,43	-11,77			
45	40,74	o	26,47	23,42	19,88	21,81	56,36				
		i	6,73	9,84	15,14	17,59	-3,85				
		ś	7,54	7,48	5,72	1,34	-11,77				
50	57,31	o	35,23	32,12	34,06	72,93					
		i	12,79	17,58	20,47	-3,85					
		ś	9,29	7,61	2,78	-11,77					
55	86,89	o	53,66	55,93	102,51						
		i	23,02	25,62	-3,85						
		ś	10,21	5,34	-11,77						
60	166,97	o	118,85	182,59							
		i	38,22	-3,85							
		ś	9,90	-11,77							

(o — składka oszczędnościowa, i — składka za ryzyko

Wiek wstępu	Składka indywidualna	W roku ubezpieczenia									
		1	5	10	15	20	25	30	35	40	
System świadczeń III											
25	23,81	o	24,00	24,84	20,16	17,52	14,37	10,03	5,36	7,95	62,86
		i	-0,01	-0,11	1,28	2,67	5,27	9,78	17,18	21,73	-9,62
		ś	-0,18	-0,92	2,37	3,62	4,17	4,00	1,27	-5,87	-29,43
30	27,61	o	27,83	29,05	22,02	19,16	15,13	10,72	12,84	62,74	
		i	-0,03	-0,29	2,29	4,60	8,68	15,45	19,17	-8,65	
		ś	-0,19	-1,15	3,30	3,85	3,80	1,44	-5,00	-26,48	
35	31,82	o	32,14	34,05	24,26	20,54	16,38	18,03	63,06		
		i	-0,07	-0,61	3,97	7,63	13,79	17,87	-7,70		
		ś	-0,25	-1,62	3,59	3,65	1,65	-4,08	-23,54		
40	36,75	o	37,24	40,40	26,52	22,57	23,75	64,09			
		i	-0,14	-1,32	6,65	12,23	16,11	-6,74			
		ś	-0,35	-2,33	3,58	1,95	-3,11	-20,60			
45	42,71	o	43,51	49,29	29,53	30,22	66,15				
		i	-0,30	-2,96	10,82	14,53	-5,78				
		ś	-0,50	-3,62	2,36	-2,04	-17,66				
50	49,79	o	51,28	62,72	37,54	69,31					
		i	-0,71	-7,28	13,13	-4,81					
		ś	-0,78	-5,65	-0,88	-14,71					
55	59,69	o	62,57	87,67	75,31						
		i	-1,68	-18,68	-3,85						
		ś	-1,20	-9,30	-11,77						
60	99,90	o	108,53	195,09							
		i	-5,89	-68,94							
		ś	-2,74	-26,25							

Tablica 7. Podział składki indywidualnej 100 na składkę oszczędnościową i składki za ryzyko

(o — składka oszczędnościowa, r — składki za ryzyko)

System świadczeń	W roku ubezpieczenia									
	1	5	10	15	20	25	30	35	40	
Wiek wstępu 25										
I	o	87	76	63	48	34	16	—1	13	215
	r	13	24	37	52	66	84	101	87	—115
II	o	101	104	61	46	31	12	—6	9	222
	r	—1	—4	39	54	69	88	106	91	—122
III	o	101	104	85	74	60	42	23	33	264
	r	—1	—4	15	26	40	58	77	67	—164
IV	o	101	104	83	75	70	57	49	55	276
	r	—1	—4	17	25	30	43	51	45	—176
Wiek wstępu 40										
I	o	67	61	50	40	47	151			
	r	33	39	50	60	53	—51			
II	o	101	110	46	35	42	160			
	r	—1	—10	54	65	58	—60			
III	o	101	110	72	61	65	174			
	r	—1	—10	28	39	35	—74			
IV	o	101	110	64	56	70	172			
	r	—1	—10	36	44	30	—72			

Tablica 8. Ilustracja zasady równoważności zysków i strat
(system świadczeń I, wiek wstępu 40)

Rok ubezpieczenia "	Skapitalizowana na koniec roku " suma wpłaconych składek indywidualnych 30,28	Wartość zysku wzgl. straty ubezpieczonego z wypadku inwalidztwa w roku "		Wartość prawdopodobna na początku ubezpieczenia zysku wzgl. straty ubezpieczonego z wypadku inwalidztwa w roku "	Wartość zysku wzgl. straty ubezpieczonego z wypadku śmierci w stanie aktywnym w roku "		Wartość prawdopodobna na początku ubezpieczenia zysku względnie straty ubezpieczonego z wypadku śmierci w stanie aktywnym w roku "
		obliczona na koniec roku "	zdyskontowana na początek ubezpieczenia		obliczona na koniec roku "	zdyskontowana na początek ubezpieczenia	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	31,6	1 001,8	958,7	3,64	685,5	656,0	6,17
2	64,7	970,9	889,1	3,82	654,1	599,0	5,69
3	99,3	937,5	821,5	3,94	619,5	542,9	5,32
4	135,4	901,8	756,2	4,01	581,8	487,9	4,93
5	173,1	863,4	692,8	4,09	540,3	433,6	4,51
6	212,5	822,2	631,4	4,10	496,5	381,3	4,08
7	253,7	778,0	571,7	4,00	452,5	332,5	3,72
8	296,8	730,8	513,9	4,06	406,2	285,6	3,28
9	341,8	680,6	458,0	4,12	353,8	238,1	2,81
10	388,8	627,4	404,0	4,04	297,4	191,5	2,36
11	438,0	570,8	351,7	4,01	236,2	145,5	1,83
12	489,3	510,8	301,2	3,92	171,9	101,4	1,30
13	543,0	447,2	252,3	3,61	104,5	59,0	0,78
14	599,1	379,7	205,0	3,20	34,1	18,4	0,25
15	657,7	308,2	159,3	2,74	—33,9	—17,5	—0,23
16	718,9	232,6	115,0	2,14	—105,7	—52,3	—0,70
17	782,9	152,7	72,3	1,46	—186,3	—88,2	—1,16
18	849,8	68,6	31,1	0,68	—269,9	—122,2	—1,59
19	919,6	—19,6	—8,5	—0,20	—357,4	—154,9	—2,01
20	992,7	—112,1	—46,5	—1,21	—443,7	—184,0	—2,39
21	1 069,0	—208,6	—82,8	—2,32	—534,0	—211,9	—2,75
22	1 148,7	—309,9	—117,5	—3,45	—634,5	—240,9	—3,06
23	1 232,1	—414,7	—150,7	—4,58	—743,8	—270,3	—3,41
24	1 319,2	—524,3	—182,3	—5,61	—847,0	—294,5	—3,59
25	1 410,2	—638,4	—212,4	—6,48	—959,2	—319,2	—3,70
				37,73			22,44

Strata w razie dożycia wieku starczego na koniec 25-go roku ubez. —592,8
 Strata w razie dożycia wieku starczego zdyskontowana na początek ubezpieczenia —197,7
 Wartość prawdopodobna — na początku ubezpieczenia -- straty z wypadku dożycia wieku starczego —60,17

ś — ryzyko śmierci)

Wiek zapadnięcia renty								Wiek wstępu
30	35	40	45	50	55	60	65	
System świadczeń III								
-136,1	699,7	771,1	774,2	669,6	413,9	-46,4	-733,6	i 25
-136,1	319,8	374,1	289,5	92,0	-270,7	-792,6	-1 535,6	ś
	-157,8	676,1	696,9	619,2	404,5	1,0	-614,8	i 30
	-157,8	358,5	292,1	124,2	-194,5	-662,2	-1 336,6	ś
		-181,9	627,9	579,1	405,7	59,1	-485,0	i 35
		-181,9	304,8	166,7	-107,8	-521,1	-1 126,6	ś
			-210,1	544,3	409,2	116,1	-360,9	i 40
			-210,1	214,3	-18,7	-381,3	-922,3	ś
				-244,2	417,5	173,2	-242,5	i 45
				-244,2	75,2	-241,4	-723,7	ś
					-284,6	241,2	-116,6	i 50
					-284,6	-90,4	-517,6	ś
						-341,2	5,3	i 55
						-341,2	-315,5	ś
							-571,1	i 60
							-571,1	ś
System świadczeń IV								
-126,9	720,3	677,2	567,8	490,4	275,0	-19,3	-553,5	i 25
-126,9	340,4	319,9	164,0	-4,6	-324,0	-724,0	-1 355,5	ś
	-143,0	709,3	622,7	450,0	283,6	-54,1	-490,7	i 30
	-143,0	391,7	259,2	37,6	-229,8	-634,3	-1 172,4	ś
		-160,8	675,3	532,2	285,2	10,9	-442,8	i 35
		-160,8	352,2	161,0	-142,7	-486,5	-1 004,2	ś
			-186,1	598,2	379,6	33,7	-362,2	i 40
			-186,1	268,2	-5,4	-380,9	-843,4	ś
				-217,9	476,5	163,0	-284,6	i 45
				-217,9	134,2	-210,1	-685,6	ś
					-266,9	281,2	-145,6	i 50
					-266,9	-50,4	-506,5	ś
						-341,2	5,3	i 55
						-341,2	-315,5	ś
							-571,1	i 60
							-571,1	ś

(i — ryzyko inwalidztwa, ś — ryzyko śmierci)

System świadczeń	Rok ubezpieczenia							
	5	10	15	20	25	30	35	40
W i e k w s t ę p u 2 5								
I	i 6 534	6 116	5 414	4 352	2 825	737	—2 031	—5 499
	ś 2 709	3 320	3 076	1 974	396	—1 783	—4 471	—7 860
II	i —572	6 567	5 876	4 815	3 277	1 165	—1 643	—5 162
	ś —572	3 600	3 396	2 291	700	—1 508	—4 233	—7 668
III	i —572	2 939	3 239	3 252	2 812	1 738	—195	—3 081
	ś —572	1 343	1 571	1 216	386	—1 137	—3 329	—6 450
IV	i —572	3 241	3 047	2 555	2 207	1 238	—87	—2 491
	ś —572	1 532	1 440	738	—21	—1 458	—3 258	—6 100
W i e k w s t ę p u 4 0								
I	i 2 849	2 070	1 017	—370	—2 107			
	ś 1 783	981	—113	—1 464	—3 165			
II	i —572	2 618	1 538	105	—1 691			
	ś —572	1 351	223	—1 169	—2 923			
III	i —572	1 480	1 113	316	—982			
	ś —572	583	—51	—1 037	—2 509			
IV	i —572	1 836	1 165	103	—1 112			
	ś —572	823	—17	—1 169	—2 589			

Wiek wstępu	Po latach ubezpieczenia								
	1	5	10	15	20	25	30	35	40
System świadczeń I									
25	21,58	114,53	250,33	414,01	620,11	894,27	1 301,02	2 036,64	3 934,60
30	19,23	101,43	217,79	356,21	526,63	752,31	1 118,96	1 996,76	
35	16,33	84,12	176,48	276,17	378,52	493,80	676,62		
40	12,87	63,34	118,56	143,27	100,38	-154,18			
45	8,03	30,31	11,57	-119,89	-619,31				
50	-0,83	-33,67	-195,56	-779,09					
55	-14,64	-139,24	-660,17						
60	-39,99	-366,14							
System świadczeń II									
25	19,85	110,39	224,51	359,35	525,75	741,35	1 050,37	1 593,21	2 969,72
30	19,85	110,70	209,37	324,03	460,33	630,95	891,76	1 488,48	
35	19,89	111,69	192,67	277,32	357,80	434,94	523,83		
40	19,97	113,22	166,64	192,61	158,67	-59,56			
45	20,05	115,93	116,94	32,10	-326,84				
50	20,29	121,40	39,56	-311,08					
55	20,66	131,29	-117,39						
60	21,41	154,24							
System świadczeń III									
25	30,48	169,54	360,71	591,34	870,00	1 213,21	1 659,82	2 344,01	3 872,71
30	30,49	170,02	347,41	559,62	807,56	1 098,76	1 479,36	2 184,07	
35	30,57	171,56	333,85	519,79	713,63	908,94	1 116,76		
40	30,66	173,89	313,25	449,73	541,28	477,56			
45	30,79	178,03	274,71	322,26	152,30				
50	31,18	186,47	218,71	70,86					
55	31,71	201,60	113,72						
60	32,89	236,91							
System świadczeń IV									
25	28,22	157,00	331,84	544,30	808,10	1 140,57	1 581,97	2 250,58	3 687,02
30	28,23	157,44	318,15	512,79	750,69	1 044,44	1 447,30	2 196,53	
35	28,29	158,87	303,93	473,10	665,73	887,62	1 191,43		
40	28,38	161,04	282,19	402,96	507,02	524,95			
45	28,60	164,87	241,26	273,44	139,82				
50	28,86	172,67	180,72	12,64					
55	29,38	186,71	64,77						
60	30,46	219,40							

(i — kapitał pod ryzykiem inwalidztwa,

Wiek wstępu	W roku ubezpieczenia									
	1	5	10	15	20	25	30	35	40	
System świadczeń I										
25	i	894,0	850,9	755,1	616,6	416,4	121,9	—335,1	—1 156,0	—3 162,8
	ś	171,4	331,2	375,2	299,0	93,3	—208,1	—677,4	—1 487,6	—3 483,6
30	i	955,5	904,0	812,8	680,3	489,6	213,6	—238,4	—1 225,0	
	ś	468,8	524,1	495,2	357,2	159,6	—128,7	—570,0	—1 545,8	
35	i	995,5	946,5	860,0	740,0	587,4	386,8	95,2		
	ś	627,9	628,9	536,9	410,0	245,1	55,2	—225,6		
40	i	1 020,5	973,2	897,6	822,6	780,2	926,0			
	ś	704,2	650,1	567,6	480,3	448,6	605,2			
45	i	1 026,7	985,9	954,3	1 000,5	1 391,1				
	ś	701,0	655,9	612,0	668,9	1 070,3				
50	i	1 009,6	999,7	1 076,2	1 550,9					
	ś	675,0	657,3	744,6	1 230,1					
55	i	966,1	1 019,8	1 432,0						
	ś	627,8	688,2	1 111,2						
60	i	900,4	1 137,9							
	ś	575,0	817,1							
System świadczeń II										
25	i	—19,8	—110,4	780,9	671,2	510,7	274,8	—84,5	—712,6	—2 197,9
	ś	—19,8	—110,4	401,0	353,6	187,6	—55,2	—426,8	—1 044,2	—2 518,7
30	i	—19,8	—110,7	821,2	712,5	555,9	334,9	—11,2	—716,7	
	ś	—19,8	—110,7	503,6	389,4	225,9	—7,4	—342,8	—1 037,5	
35	i	—19,9	—111,7	843,8	738,9	608,1	445,7	248,0		
	ś	—19,9	—111,7	520,7	408,9	265,8	114,1	—72,8		
40	i	—20,0	—113,2	849,6	773,3	721,9	831,4			
	ś	—20,0	—113,2	519,6	431,0	390,3	510,6			
45	i	—20,0	—115,9	849,0	848,5	1 098,6				
	ś	—20,0	—115,9	506,7	516,9	777,8				
50	i	—20,3	—121,4	841,0	1 082,9					
	ś	—20,3	—121,4	509,4	762,1					
55	i	—20,7	—131,3	889,2						
	ś	—20,7	—131,3	568,4						
60	i	—21,4	—154,2							
	ś	—21,4	—154,2							

Tablica 13. Podział składki przeciętnej na
(obliczone z jednostkowej

(o — składka oszczędnościowa, i — składka za ryzyko

Wiek wstępu	W roku ubezpieczenia								
	1	5	10	15	20	25	30	35	40
System świadczeń I, składka przeciętna 22,33									
o	20,66	19,47	18,32	17,75	18,85	28,83	41,88	107,56	400,97
25 i	0,46	0,69	1,35	2,01	2,49	1,37	—7,61	—51,94	—266,75
ś	1,21	2,17	2,66	2,57	0,99	—2,87	—11,94	—33,29	—111,89
o	18,38	16,99	15,43	14,49	14,61	19,75	45,80	175,30	
30 i	0,88	1,62	2,65	4,07	5,52	4,85	—10,71	—103,32	
ś	3,07	3,72	4,25	3,77	2,20	—2,27	—12,76	—49,65	
o	15,63	13,84	11,51	8,34	4,67	3,71	21,55		
35 i	2,10	3,09	5,15	8,34	13,34	17,38	8,03		
ś	4,60	5,40	5,67	5,65	4,32	1,24	—7,25		
o	12,28	9,63	4,38	—4,82	—22,76	—75,21			
40 i	3,74	5,83	10,12	18,68	35,05	78,10			
ś	6,31	6,87	7,83	8,47	10,04	19,44			
o	7,71	2,18	—10,13	—37,59	—129,38				
45 i	6,86	11,11	21,67	44,95	117,33				
ś	7,76	9,04	10,79	14,97	34,38				
o	—0,78	—11,96	—42,68	—147,98					
50 i	13,28	22,70	48,35	130,80					
ś	9,83	11,59	16,66	39,51					
o	—14,02	—38,89	—134,03						
55 i	24,84	45,82	120,77						
ś	11,51	15,40	35,69						
o	—38,29	—99,89							
60 i	46,76	95,97							
ś	13,86	26,25							

(o — składka oszczędnościowa, i — składka za ryzyko

Wiek wstępu	W roku ubezpieczenia								
	1	5	10	15	20	25	30	35	40
System świadczeń III, składka przeciętna 28,95									
o	29,19	30,20	25,92	24,10	22,74	22,75	30,04	70,05	281,02
25 i	-0,02	-0,14	1,15	2,27	4,10	6,37	6,18	-16,29	-163,89
ś	-0,22	-1,11	1,88	2,58	2,11	-0,17	-7,27	-24,81	-88,18
o	29,18	30,46	23,58	21,03	17,81	15,65	24,83	104,25	
30 i	-0,03	-0,30	2,23	4,41	8,08	13,43	12,66	-37,74	
ś	-0,20	-1,21	3,14	3,51	3,06	-0,13	-8,54	-37,56	
o	29,23	30,98	20,73	15,83	8,34	-0,61	-0,15		
35 i	-0,06	-0,56	4,21	8,46	16,70	28,40	36,00		
ś	-0,22	-1,47	4,01	4,66	3,91	1,16	-6,90		
o	29,34	31,83	15,89	5,93	-12,40	-54,69			
40 i	-0,11	-1,04	7,92	17,21	35,03	73,63			
ś	-0,28	-1,84	5,14	5,81	6,32	10,01			
o	29,50	33,41	7,10	-14,17	-72,69				
45 i	-0,21	-2,01	15,70	34,98	84,80				
ś	-0,34	-2,45	6,15	8,14	16,84				
o	29,81	36,48	-8,18	-62,27					
50 i	-0,41	-4,24	29,74	75,39					
ś	-0,45	-3,29	7,39	15,83					
o	30,35	42,52	-37,38						
55 i	-0,82	-9,06	55,50						
ś	-0,58	-4,51	10,83						
o	31,45	56,54							
60 i	-1,71	-19,98							
ś	-0,79	-7,61							

Wiek wstępu	Po latach ubezpieczenia								
	0	5	10	15	20	25	30	35	40
System świadczeń I									
25	142,18	69,70	10,82	98,38	195,66	302,89	418,39	560,49	817,44
30	69,70	10,82	98,38	195,66	302,89	418,39	560,49	817,44	
35	10,82	98,38	195,66	302,89	418,39	560,49	817,44		
40	98,38	195,66	302,89	418,39	560,49	817,44			
45	195,66	302,89	418,39	560,49	817,44				
50	302,89	418,39	560,49	817,44					
55	418,39	560,49	817,44						
60	560,49	817,44							
System świadczeń II									
25	98,17	16,81	59,14	141,42	232,65	333,02	440,94	573,98	817,44
30	39,66	59,14	141,42	232,65	333,02	440,94	573,98	817,44	
35	22,56	141,42	232,65	333,02	440,94	573,98	817,44		
40	88,80	232,65	333,02	440,94	573,98	817,44			
45	155,83	333,02	440,94	573,98	817,44				
50	214,10	440,94	573,98	817,44					
55	264,70	573,98	817,44						
60	314,06	817,44							
System świadczeń III									
25	83,43	61,44	220,17	406,13	620,91	866,19	1 141,90	1 477,82	2 043,59
30	20,38	143,52	312,49	512,66	742,14	1 001,12	1 316,06	1 839,24	
35	39,81	224,02	404,41	618,09	860,34	1 154,30	1 634,88		
40	96,49	303,66	494,04	719,56	992,55	1 430,51			
45	146,24	381,76	578,78	830,79	1 226,16				
50	180,41	455,73	669,03	1 021,80					
55	199,26	534,85	817,44						
60	274,92	817,44							
System świadczeń IV									
25	74,96	59,87	205,57	377,90	584,29	828,78	1 116,63	1 472,33	2 043,59
30	27,16	122,13	271,62	450,21	663,51	914,32	1 229,68	1 736,99	
35	18,37	183,08	336,49	518,46	733,43	1 000,84	1 430,51		
40	71,00	256,53	415,22	601,51	839,08	1 226,16			
45	120,11	332,20	491,00	691,11	1 021,80				
50	172,06	429,48	610,23	919,62					
55	213,12	543,14	817,44						
60	283,21	817,44							

(i — kapitał pod ryzykiem inwalidztwa, ś — kapitał pod ryzykiem śmierci)

Wiek wstępu	W roku ubezpieczenia									
	1	5	10	15	20	25	30	35	40	
S y s t e m ś w i a d c z e ń I										
25	i	1 043,8	1 035,1	994,6	932,2	840,8	713,3	547,5	320,1	—45,6
	ś	321,2	515,4	614,7	614,6	517,7	383,3	205,2	—11,5	—366,4
30	i	1 028,9	994,6	932,2	840,8	713,3	547,5	320,1	—45,6	
	ś	542,2	614,7	614,6	517,7	383,3	205,2	—11,5	—366,4	
35	i	984,0	932,2	840,8	713,3	547,5	320,1	—45,6		
	ś	616,4	614,6	517,7	383,3	205,2	—11,5	—366,4		
40	i	916,4	840,8	713,3	547,5	320,1	—45,6			
	ś	600,1	517,7	383,3	205,2	—11,5	—366,4			
45	i	818,3	713,3	547,5	320,1	—45,6				
	ś	492,6	383,3	205,2	—11,5	—366,4				
50	i	683,6	547,5	320,1	—45,6					
	ś	349,0	205,2	—11,5	—366,4					
55	i	507,8	320,1	—45,6						
	ś	169,5	—11,5	—366,4						
60	i	264,1	—45,6							
	ś	—61,3	—366,4							
S y s t e m ś w i a d c z e ń II										
25	i	83,6	16,8	946,3	889,2	803,9	683,2	525,0	306,6	—45,6
	ś	83,6	16,8	566,4	571,6	480,8	353,2	182,7	—25,0	—366,4
30	i	21,9	—59,1	889,2	803,9	683,2	525,0	306,6	—45,6	
	ś	21,9	—59,1	571,6	480,8	353,2	182,7	—25,0	—366,4	
35	i	—43,7	—141,4	803,9	683,2	525,0	306,6	—45,6		
	ś	—43,7	—141,4	480,8	353,2	182,7	—25,0	—366,4		
40	i	—114,0	—232,6	683,2	525,0	306,6	—45,6			
	ś	—114,0	—232,6	353,2	182,7	—25,0	—366,4			
45	i	—186,0	—333,0	525,0	306,6	—45,6				
	ś	—186,0	—333,0	182,7	—25,0	—366,4				
50	i	—250,7	—440,9	306,6	—45,6					
	ś	—250,7	—440,9	—25,0	—366,4					
55	i	—310,6	—574,0	—45,6						
	ś	—310,6	—574,0	—366,4						
60	i	—377,9	—817,4							
	ś	—377,9	—817,4							

(i — kapitał pod ryzykiem inwalidztwa, ś — kapitał pod ryzykiem śmierci)

Wiek wstępu	W roku ubezpieczenia									
	1	5	10	15	20	25	30	35	40	
System świadczeń III										
25	i	57,4	-61,4	405,3	485,1	449,2	334,6	105,3	-242,6	-916,1
	ś	57,4	-61,4	785,2	882,1	933,9	912,2	789,9	503,6	-114,1
30	i	-9,0	-143,5	718,1	782,9	782,2	689,2	445,1	-102,6	
	ś	-9,0	-143,5	400,5	379,1	287,2	90,2	-218,1	-824,1	
35	i	-72,6	-224,0	632,1	652,1	588,6	386,7	-91,3		
	ś	-72,6	-224,0	309,0	239,7	75,1	-193,5	-732,9		
40	i	-132,8	-303,7	522,2	487,8	328,3	-79,9			
	ś	-132,8	-303,7	192,2	59,9	-169,1	-641,3			
45	i	-186,5	-381,8	387,1	270,0	-68,5				
	ś	-186,5	-381,8	44,8	-144,6	-549,7				
50	i	-225,3	-455,7	211,6	-57,0					
	ś	-225,3	-455,7	-120,0	-458,0					
55	i	-250,0	-534,8	-45,6						
	ś	-250,0	-534,8	-366,4						
60	i	-345,0	-817,4							
	ś	-345,0	-817,4							
System świadczeń IV										
25	i	50,7	-59,9	799,8	781,5	711,3	695,5	573,7	399,0	-114,1
	ś	50,7	-59,9	419,9	424,2	307,5	200,5	-25,3	-305,7	-916,1
30	i	0,4	-122,1	759,0	715,9	606,7	534,5	311,3	-96,9	
	ś	0,4	-122,1	441,4	352,4	194,3	21,1	-268,9	-778,6	
35	i	-47,7	-183,1	700,0	624,7	474,0	320,1	-79,9		
	ś	-47,7	-183,1	376,9	253,5	46,1	-177,3	-641,3		
40	i	-103,6	-256,5	601,0	485,1	261,7	-68,5			
	ś	-103,6	-256,5	271,0	100,1	-152,9	-549,7			
45	i	-156,5	-332,2	474,9	299,6	-57,0				
	ś	-156,5	-332,2	132,6	-73,5	-458,0				
50	i	-214,0	-429,5	270,4	-51,3					
	ś	-214,0	-429,5	-61,2	-412,2					
55	i	-262,8	-543,1	-45,6						
	ś	-262,8	-543,1	-366,4						
60	i	-352,0	-817,4							
	ś	-352,0	-817,4							

Tablica 16. Podział składki przeciętnej na składkę oszczędnościową i składki za ryzyko (obliczone z jednostkowej rezerwy prospektywnej)

(o — składka oszczędnościowa, i — składka za ryzyko inwalidztwa, ś — składka za ryzyko śmierci)

Wiek wstępu	W roku ubezpieczenia									
	1	5	10	15	20	25	30	35	40	
System świadczeń I składka przeciętna 22, 33.										
25	o	19,52	18,11	16,19	14,01	11,82	9,00	6,28	8,21	37,95
	i	0,54	0,84	1,78	3,04	5,04	8,04	12,43	14,38	—3,85
	ś	2,27	3,38	4,36	5,28	5,47	5,29	3,62	—0,26	—11,77
30	o	17,83	16,19	14,01	11,82	9,00	6,28	8,21	37,95	
	i	0,95	1,78	3,04	5,04	8,04	12,43	14,38	—3,85	
	ś	3,55	4,36	5,28	5,47	5,29	3,62	—0,26	—11,77	
35	o	15,73	14,01	11,82	9,00	6,28	8,21	37,95		
	i	2,08	3,04	5,04	8,04	12,43	14,38	—3,85		
	ś	4,52	5,28	5,47	5,29	3,62	—0,26	—11,77		
40	o	13,60	11,82	9,00	6,28	8,21	37,95			
	i	3,35	5,04	8,04	12,43	14,38	—3,85			
	ś	5,38	5,47	5,29	3,62	—0,26	—11,77			
45	o	11,41	9,00	6,28	8,21	37,95				
	i	5,47	8,04	12,43	14,38	—3,85				
	ś	5,45	5,29	3,62	—0,26	—11,77				
50	o	8,24	6,28	8,21	37,95					
	i	9,00	12,43	14,38	—3,85					
	ś	5,09	3,62	—0,26	—11,77					
55	o	6,16	8,21	37,95						
	i	13,06	14,38	—3,85						
	ś	3,11	—0,26	—11,77						
60	o	10,10	37,95							
	i	13,71	—3,85							
	ś	—1,48	—11,77							

(o — składka oszczędnościowa, i — składka za ryzyko

Wiek wstępu	W roku ubezpieczenia									
	1	5	10	15	20	25	30	35	40	
System świadczeń II, składka przeciętna 18,85										
25	o	18,22	18,73	13,14	11,04	8,95	6,28	3,71	5,63	34,47
	i	0,04	0,01	1,69	2,90	4,82	7,70	11,92	13,78	—3,85
	ś	0,59	0,11	4,02	4,91	5,08	4,87	3,22	—0,56	—11,77
30	o	18,69	19,38	11,04	8,95	6,28	3,71	5,63	34,47	
	i	0,02	—0,11	2,90	4,82	7,70	11,92	13,78	—3,85	
	ś	0,14	—0,42	4,91	5,08	4,87	3,22	—0,56	—11,77	
35	o	19,26	20,52	8,95	6,28	3,71	5,63	34,47		
	i	—0,09	—0,46	4,82	7,70	11,92	13,78	—3,85		
	ś	—0,32	—1,21	5,08	4,87	3,22	—0,56	—11,77		
40	o	20,29	22,70	6,28	3,71	5,63	34,47			
	i	—0,42	—1,39	7,70	11,92	13,78	—3,85			
	ś	—1,02	—2,46	4,87	3,22	—0,56	—11,77			
45	o	22,15	27,19	3,71	5,63	34,47				
	i	—1,24	—3,75	11,92	13,78	—3,85				
	ś	—2,06	—4,59	3,22	—0,56	—11,77				
50	o	25,81	36,63	5,63	34,47					
	i	—3,30	—10,01	13,78	—3,85					
	ś	—3,66	—7,77	—0,56	—11,77					
55	o	32,53	57,49	34,47						
	i	—7,99	—25,79	—3,85						
	ś	—5,69	—12,85	—11,77						
60	o	47,59	114,05							
	i	—19,63	—68,94							
	ś	—9,11	—26,26							

inwalidztwa, ś — składka za ryzyko śmierci)

W roku ubezpieczenia									Wiek wstę- pu
1	5	10	15	20	25	30	35	40	
System świadczeń III, składka przeciętna 28,95									
28,51	29,40	24,67	21,90	18,62	14,06	9,15	11,76	68,00	o
0,03	-0,05	1,41	2,88	5,59	10,28	17,94	22,63	-9,62	i 25
0,41	-0,40	2,87	4,17	4,74	4,61	1,86	-5,43	-29,43	ś
29,02	30,23	23,17	20,26	16,17	11,71	13,83	64,08		o
-0,01	-0,26	2,34	4,69	8,82	15,65	20,00	-8,65		i 30
-0,06	-1,02	3,44	4,00	3,96	1,59	-4,88	-26,48		ś
29,63	31,60	21,90	18,29	14,26	15,91	60,19			o
-0,15	-0,73	3,79	7,35	13,37	17,37	-7,70			i 35
-0,53	-1,92	3,26	3,31	1,32	-4,33	-23,54			ś
30,63	33,98	20,41	16,81	17,98	56,29				o
-0,49	-1,82	5,89	11,08	14,75	-6,74				i 40
-1,19	-3,21	2,65	1,06	-3,78	-20,60				ś
32,26	38,52	19,37	20,06	52,39					o
-1,25	-4,30	8,79	12,13	-5,78					i 45
-2,06	-5,27	0,79	-3,24	-17,66					ś
35,19	47,33	22,13	48,47						o
-2,96	-10,35	9,51	-4,81						i 50
-3,28	-8,03	-2,69	-14,71						ś
39,96	64,95	44,57							o
-6,43	-24,03	-3,85							i 55
-4,58	-11,97	-11,77							ś
55,18	124,15								o
-17,91	-68,94								i 60
-8,32	-26,26								ś

Tablica 16 (ciąg dalszy). Podział składki przeciętnej na składkę oszczędnościową i składki za ryzyko (obliczone z jednostkowej rezerwy prospektywnej)

(o — składka oszczędnościowa, i — składka za ryzyko inwalidztwa, ś — składka za ryzyko śmierci)

Wiek wstępu	W roku ubezpieczenia								
	1	5	10	15	20	25	30	35	40
System świadczeń IV, składka przeciętna 26,81									
o	26,42	27,25	22,40	20,62	19,30	16,21	14,23	15,72	65,86
25 i	0,03	—0,05	1,43	2,55	4,26	7,84	13,03	17,93	—9,62
ś	0,36	—0,39	2,98	3,64	3,25	2,76	—0,45	—6,84	—29,43
o	26,81	27,90	20,55	18,80	17,29	14,30	18,84	59,99	
30 i	0,00	—0,22	2,47	4,29	6,84	12,14	13,99	—8,17	
ś	0,00	—0,87	3,79	3,72	2,68	0,37	—6,02	—25,01	
o	27,26	28,98	18,64	16,27	15,24	16,40	54,15		
35 i	—0,10	—0,60	4,19	7,04	10,76	14,38	—6,74		
ś	—0,35	—1,57	3,98	3,50	0,81	—3,97	—20,60		
o	28,12	31,06	16,30	14,03	18,47	50,25			
40 i	—0,38	—1,54	6,77	11,02	11,76	—5,78			
ś	—0,93	—2,71	3,74	1,76	—3,42	—17,66			
o	29,59	35,13	13,69	15,04	46,33				
45 i	—1,05	—3,74	10,78	13,46	—4,81				
ś	—1,73	—4,58	2,34	—1,69	—14,71				
o	32,75	44,13	16,03	44,38					
50 i	—2,82	—9,75	12,15	—4,33					
ś	—3,12	—7,57	—1,37	—13,24					
o	38,39	63,36	42,43						
55 i	—6,76	—24,40	—3,85						
ś	—4,82	—12,15	—11,77						
o	53,58	122,01							
60 i	—18,28	—68,94							
ś	—8,49	—26,26							

Tablica 17. Kwoty oszczędnościowe otrzymane ze sprowadzenia składki przeciętnej do składki indywidualnej

Wiek wstępu	Po latach ubezpieczenia							
	5	10	15	20	25	30	35	40
System świadczeń I								
25	113,3	244,7	396,6	575,6	786,1	1 032,9	1 339,6	1 796,1
40	65,8	132,0	194,2	269,1	447,2			
50	—8,3	—24,3	57,7					
System świadczeń II								
25	109,5	220,6	347,3	494,8	666,6	865,2	1 111,8	1 493,0
40	115,3	178,6	238,5	310,8	483,0			
50	139,3	160,6	280,3					
System świadczeń III								
25	168,9	357,5	581,3	844,0	1 150,1	1 502,9	1 935,4	2 618,5
40	176,2	326,3	499,6	706,6	1 067,2			
50	201,6	320,7	569,2					
System świadczeń IV								
25	156,3	328,8	535,0	784,4	1 083,4	1 440,4	1 882,8	2 559,2
40	162,7	291,8	439,6	628,6	958,9			
50	187,1	278,0	488,0					

Tablica 18. Wpłaty jednorazowe za zaliczenie lat ubezpieczenia wstecz

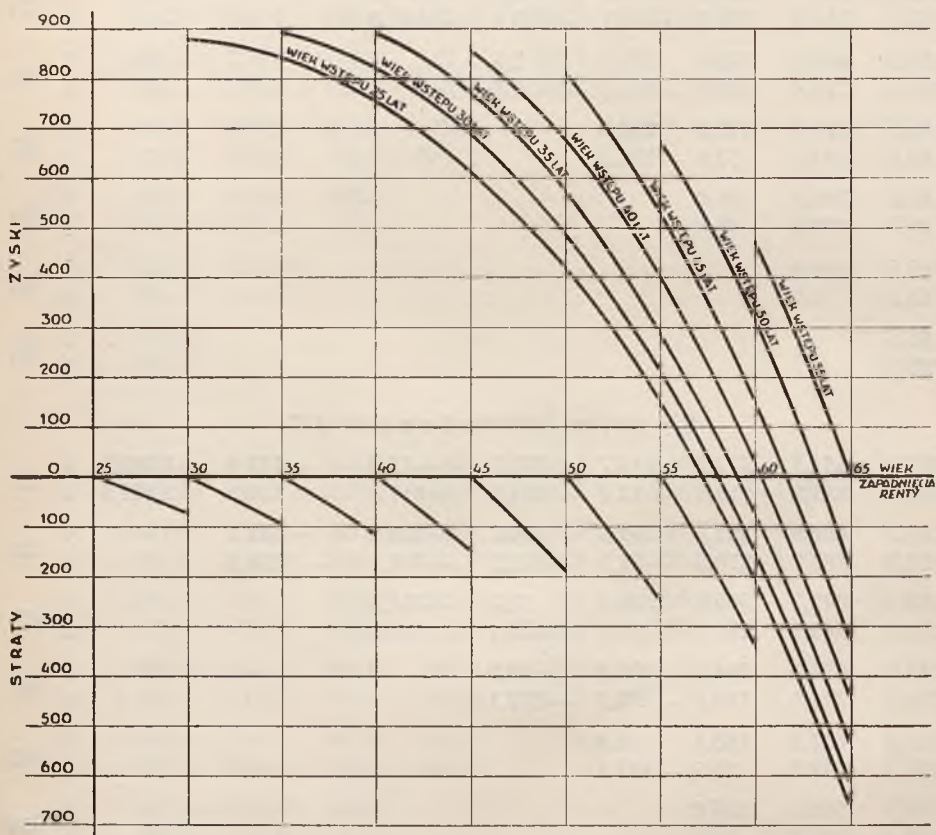
Rachunkowy wiek wstępu	Liczba zaliczonych lat						
	5	10	15	20	25	30	35
System świadczeń II							
25	22,85	36,58	52,62	76,82	118,92	176,24	259,92
30	36,58	52,62	76,82	118,92	176,24	259,92	
35	52,62	76,82	118,92	176,24	259,92		
40	76,82	118,92	176,24	259,92			
45	118,92	176,24	259,92				
50	176,24	259,92					
55	259,92						
System świadczeń III							
25	81,82	180,36	309,64	474,67	685,78	942,64	1 202,90
30	103,71	216,00	366,42	561,73	801,86	1 041,14	
35	127,53	258,17	437,68	661,08	879,38		
40	157,42	313,63	520,30	717,63			
45	201,35	379,52	555,87				
50	256,47	394,11					
55	259,93						
System świadczeń IV							
25	87,03	187,20	306,90	464,18	656,72	903,51	1 189,12
30	103,76	200,62	330,10	491,45	701,20	946,47	
35	112,08	216,38	346,40	520,31	717,63		
40	136,42	243,16	388,39	555,87			
45	160,14	278,88	407,90				
50	216,36	327,02					
55	259,93						

Wiek wstępu	W roku ubezpieczenia								
	5	10	15	20	25	30	35	40	
System świadczeń I									
25	i	837,7	718,7	545,6	304,5	—23,7	—457,7	—1 021,1	1 725,7
	ś	318,0	338,8	228,0	—18,6	—353,7	—800,0	—1 352,7	—2 046,5
30	i	877,7	743,9	551,5	284,2	—74,0	—543,0	—1 129,9	
	ś	497,8	426,3	228,4	—45,8	—416,3	—874,6	—1 450,7	
35	i	902,9	749,8	531,2	233,9	—159,3	—651,8		
	ś	585,3	426,7	201,2	—108,4	—490,9	—972,6		
40	i	908,8	729,5	480,9	148,6	—268,1			
	ś	585,7	399,5	138,6	—183,0	—588,9			
45	i	888,5	679,2	395,6	39,8				
	ś	558,5	336,9	64,0	—281,0				
50	i	838,2	593,9	286,8					
	ś	495,9	262,3	—34,0					
55	i	752,9	485,1						
	ś	421,3	164,3						
60	i	644,1							
	ś	323,3							
System świadczeń II									
25	i	—107,8	763,3	621,2	418,5	138,3	—235,8	—724,7	—1 336,5
	ś	—107,8	383,4	303,6	95,4	—191,7	—578,1	—1 056,3	—1 657,3
30	i	—107,8	788,5	627,1	398,2	88,0	—321,1	—833,5	
	ś	—107,8	470,9	304,0	68,2	—254,3	—652,7	—1 154,3	
35	i	—107,8	794,4	606,8	347,9	2,7	—429,9		
	ś	—107,8	471,3	276,8	5,6	—328,9	—750,7		
40	i	—107,8	774,1	556,5	262,6	—106,1			
	ś	—107,8	444,1	214,2	—69,0	—426,9			
45	i	—107,8	723,9	471,2	153,8				
	ś	—107,8	381,5	139,6	—167,0				
50	i	—107,8	638,5	362,4					
	ś	—107,8	306,9	41,6					
55	i	—107,8	529,7						
	ś	—107,8	208,9						
60	i	—107,8							
	ś	—107,8							

W y k r e s 1.

Zyski i straty przy składce indywidualnej
(do tablicy 9)

System świadczeń II. Ryzyko inwalidztwa.

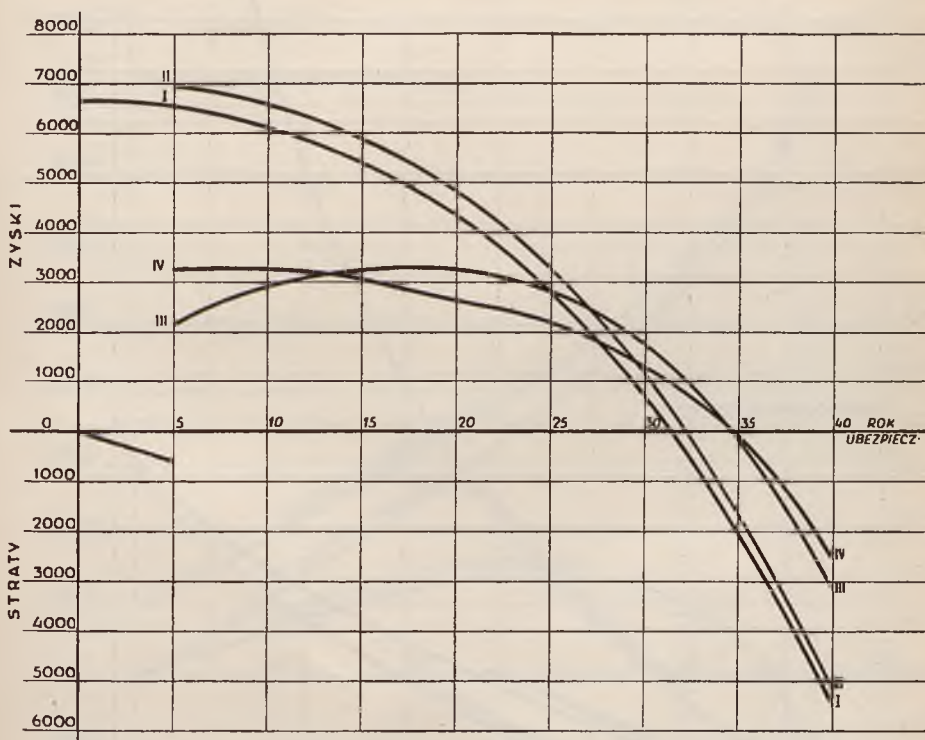


W y k r e s 2.

Zyski i straty przy składce indywidualnej 100

(do tablicy 10)

Ryzyko inwalidztwa. Wiek wstępu 25.

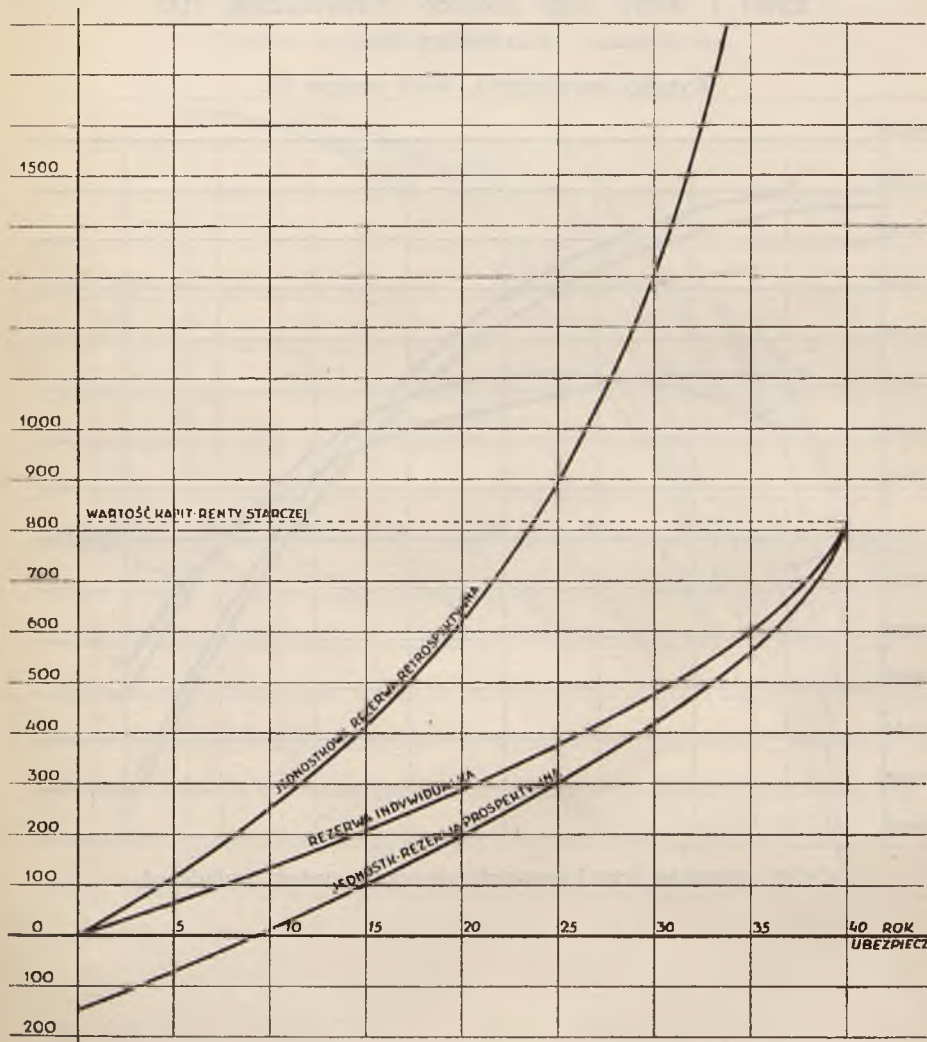


Cyfry rzymskie przy krzywych oznaczają system świadczeń.

W y k r e s 3.

Rezerwa indywidualna i rezerwy jednostkowe (retrospektywna i prospektywna)
(do tablic 4, 11, 14)

System świadczeń I, wiek wstępu 25.

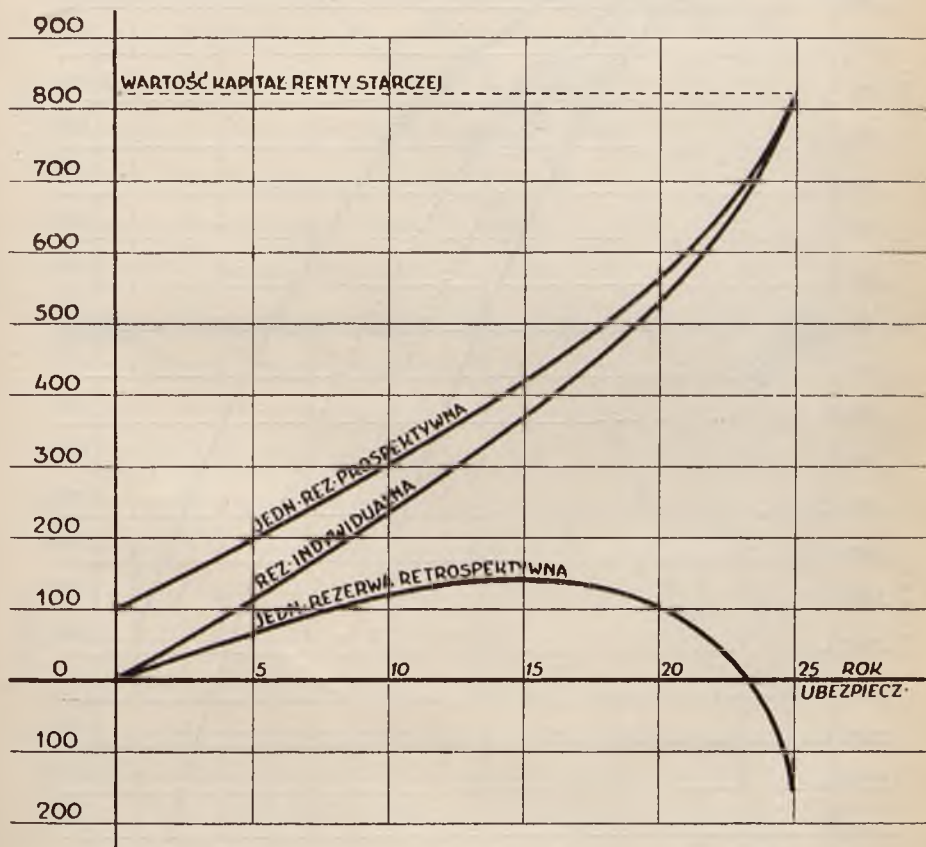


W y k r e s 4.

Rezerwa indywidualna i rezerwy jednostkowe (retrospektywna i prospektywna)

(do tablic 4, 11, 14)

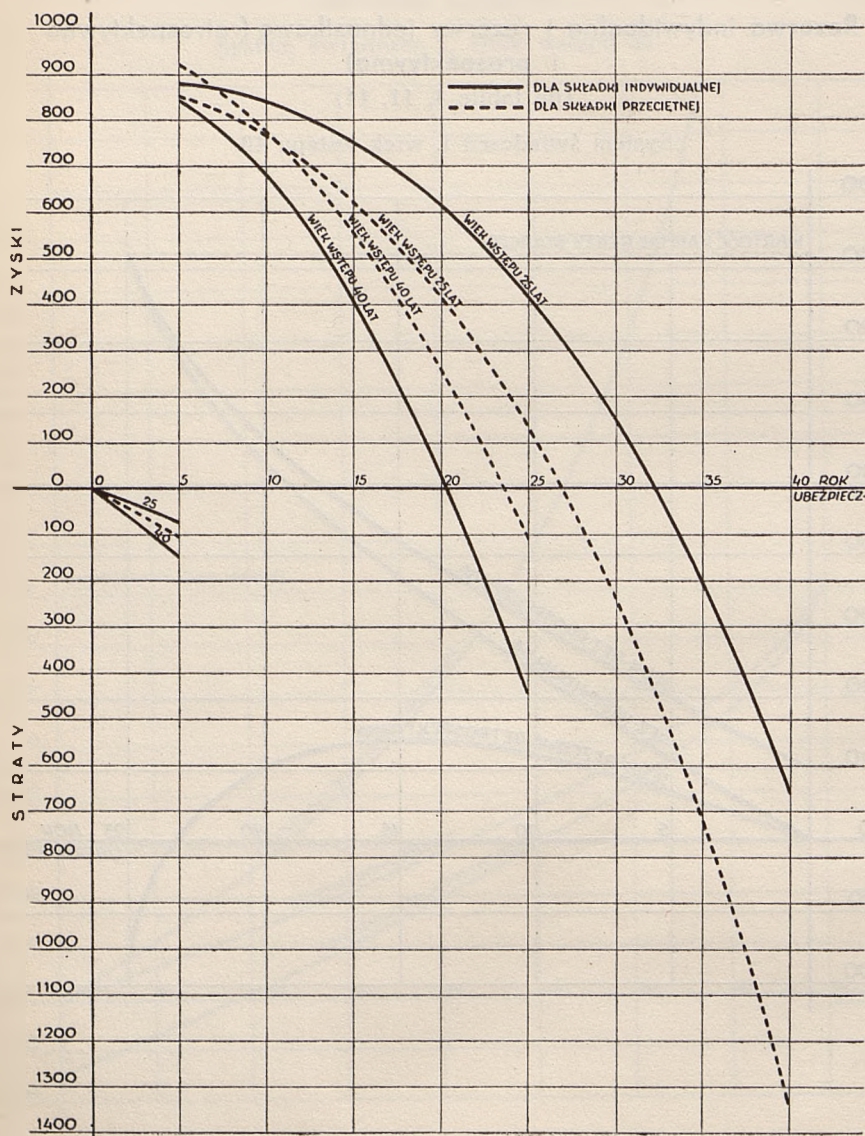
System świadczeń I, wiek wstępu 40.



Wykres 5.

Zyski i straty przy składkach: indywidualnej i przeciętnej
(do tablic 9 i 19)

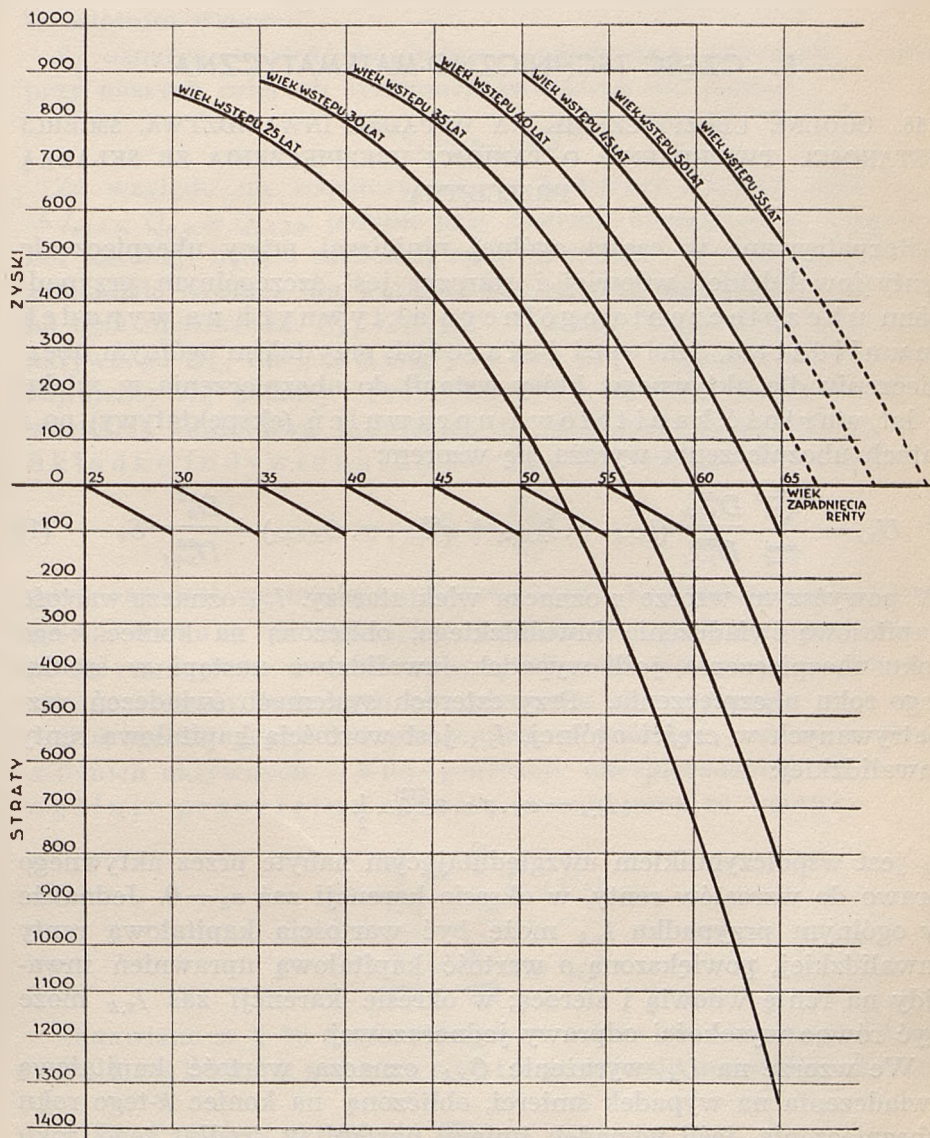
System świadczeń II. Ryzyko inwalidztwa.



W y k r e s 6.

Zyski i straty przy składce przeciętnej
(do tablicy 19)

System świadczeń II. Ryzyko inwalidztwa.



B. CZĘŚĆ TECHNICZNO-MATEMATYCZNA

§ 16. OGÓLNE UBEZPIECZENIE NA WYPADEK INWALIDZTWA, ŚMIERCI I STAROŚCI. TWIERDZENIE O TANIŃSI UBEZPIECZENIA ZE SKŁADKĄ PRZECIĘTNĄ

Rozpatrywane w części ogólnej niniejszej pracy ubezpieczenie renty inwalidzkiej, wdowiej i starczej jest szczególnym przypadkiem ubezpieczenia ogólnego aktywnych na wypadek inwalidztwa, śmierci i starości; przy takim ogólnym ubezpieczeniu dla aktywnego, który wstąpił do ubezpieczenia w wieku x lat, wartość kapitałowa uprawnień (ekspektywy) po t latach ubezpieczenia wyraża się wzorem:

$$U_{x,t} = \sum_{k=t}^{n-1-x} \frac{D_{x+k}^{aa}}{D_{x+t}^{aa}} (i_{x+k} \cdot v \cdot I_{x,k+1} + q_{x+k}^{aa} \cdot v \cdot Q_{x,k+1}) + \frac{D_n^{aa}}{D_{x+t}^{aa}} S_x \quad (1)$$

W powyższym wzorze n oznacza wiek starczy. $I_{x,k}$ oznacza wartość kapitałową świadczenia inwalidzkiego, obliczoną na koniec k -ego roku ubezpieczenia, jeśli wypadek inwalidztwa nastąpi w środku tego roku ubezpieczenia. Przy czterech systemach świadczeń, rozpatrywanych w części ogólnej, $I_{x,k}$ jest wartością kapitałową renty inwalidzkiej:

$$I_{x,k} = a_k \cdot r^{1/2} \cdot a_{x+k}^{(12)} - \frac{1}{2}$$

a_k jest współczynnikiem uwzględniającym nabyte przez aktywnego prawo do wzrostów renty, w okresie karencji zaś $a_k = 0$. Jednakże w ogólnym przypadku $I_{x,k}$ może być wartością kapitałową renty inwalidzkiej, powiększoną o wartość kapitałową uprawnień inwalidy na rentę wdowią i sierocą; w okresie karencji zaś $I_{x,k}$ może być równe wysokości odprawy jednorazowej.

We wzorze na $U_{x,t}$ wyrażenie $Q_{x,k}$ oznacza wartość kapitałową świadczenia na wypadek śmierci, obliczoną na koniec k -tego roku ubezpieczenia, jeśli wypadek śmierci nastąpi w środku tego roku

ubezpieczenia. Przy naszych czterech systemach świadczeń z części ogólnej $Q_{x,k}$ jest wartością kapitałową 50% renty wdowiej:

$$Q_{x,k} = 0,5 \cdot a_k \cdot r^{1/2} \cdot h_{x+k-1} \cdot a_y^{(12)}(x+k-\frac{1}{2})$$

gdzie h_x jest prawdopodobieństwem żonatości x -letniego aktywnego. Również $Q_{x,k}$ może jednak mieć znaczenie ogólniejsze niż podane w ostatnim wzorze.

S_x oznacza wartość kapitałową świadczenia starczego, a więc przy naszych czterech systemach świadczeń ma postać:

$$S_x = a_{n-x} u_{65}^{s(12)}$$

Ze względu na współczynnik a_k będziemy mieli na ogół $I_{x,k} \neq I_{x+k,0}$, $Q_{x,k} \neq Q_{x+k,0}$; jedynie przy systemie świadczeń ze stałą rentą bez karencji będzie zachodził znak równości. Wobec tego będzie zachodziła również dla wartości kapitałowej uprawnień aktywnego na ogół nierówność: $U_{x,t} \neq U_{x+t,0}$. Wartość kapitałowa uprawnień aktywnego $U_{x,t}$ dla $t > 0$ odgrywa rolę przy pojęciu rezerwy, czym zajmiemy się później. Przy obliczaniu składek posługujemy się wartością kapitałową uprawnień na początku ubezpieczenia $U_{x,0}$. Składkę indywidualną roczną otrzymujemy ze wzoru:

$$P_x = \frac{U_{x,0}}{n a_x^{aa}} \quad (2)$$

gdzie $n a_x^{aa}$ jest wartością kapitałową renty aktywnego, płatnej rocznie do wieku n . W dalszych rozważaniach będziemy przyjmowali, że P_x rośnie wraz z wiekiem x ; tę własność posiadają zwykle spotykane systemy świadczeń ubezpieczenia emerytalnego.

Dla ogólnej grupy ubezpieczonych, w której $L_{x,k}$ oznacza liczbę x -letnich aktywnych z k -tej generacji ubezpieczonych, składkę ogólnie przeciętną roczną otrzymujemy ze wzoru¹:

$$P = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} v^k \sum_{x=0}^n L_{x,k} U_{x,0}}{\sum_{k=0}^{\infty} v^k \sum_{x=0}^n L_{x,k} n a_x^{aa}} \quad (3)$$

Omawiane w § 10 twierdzenie o tanioci ubezpieczenia ze składką przeciętną daje się udowodnić dla ogólnie

¹ Por. Presburger (13, str. 260).

nej grupy ubezpieczonych, dla której napisaliśmy powyższy wzór na składkę przeciętną, byleby tylko żadna generacja ubezpieczonych nie posiadała stosunkowo więcej starszych aktywnych, niż jakakolwiek generacja wcześniejsza. Ten ostatni warunek napiszemy w postaci następującej:

$$\text{jeśli } x < y \text{ oraz } k < l, \text{ to } \frac{L_{y,k}}{L_{x,k}} \geq \frac{L_{y,l}}{L_{x,l}}; \quad (4)$$

stosunek liczby starszych aktywnych (w wieku y) do liczby aktywnych młodszych (w wieku x) jest dla generacji wcześniejszej nie mniejszy niż odpowiedni stosunek dla generacji późniejszej.

Przy dowodzie twierdzenia o tanioci ubezpieczenia ze składką przeciętną, posługiwać się będziemy dwoma lematami.

Lemat 1. Jeśli dla $i < j$ zachodzą nierówności $r_i \leq r_j$ oraz $\frac{M_i}{m_i} \geq \frac{M_j}{m_j}$ to spełniona jest również nierówność:

$$\frac{\sum_{i=0}^n r_i M_i}{\sum_{i=0}^n M_i} \leq \frac{\sum_{i=0}^n r_i m_i}{\sum_{i=0}^n m_i}$$

Dla dowodu powyższego lematu zauważmy, że ostatnia nierówność jest równoważna nierównościom następującym:

$$\left(\sum_{j=0}^n m_j \right) \left(\sum_{i=0}^n r_i M_i \right) \leq \left(\sum_{j=0}^n M_j \right) \left(\sum_{i=0}^n r_i m_i \right)$$

lub

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n r_i M_i m_j \leq \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n r_i M_j m_i$$

Każdą z sum występujących po obu stronach ostatniej nierówności możemy rozbić na trzy składniki, z których pierwszy jest sumą tych wyrażeń, znajdujących się pod znakiem podwójnej sumy, dla których $i=j$, drugi składnik jest sumą wyrażeń dla których $i < j$, trzeci składnik jest sumą wyrażeń, dla których $i > j$:

$$\sum_{i=0}^n r_i M_i m_i + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n r_i M_i m_j + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n r_i M_i m_j \leq$$

$$\sum_{i=0}^n r_i M_i m_i + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n r_i M_j m_i + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n r_i M_j m_i$$

Zamieniając w trzech składnikach po obu stronach ostatniej nierówności zmienną i przez j i na odwrót, otrzymujemy:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (r_i M_i m_j + r_j M_j m_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (r_i M_j m_i + r_j M_i m_j)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n [M_i m_j (r_i - r_j) - M_j m_i (r_i - r_j)] \leq 0$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (r_i - r_j) (M_i m_j - M_j m_i) \leq 0$$

Dla występujących w ostatniej nierówności wskaźników i, j jest stale $i < j$; wobec tego w myśl założenia lematu 1 spełnione są nierówności: $r_i - r_j \leq 0$, $M_i m_j - M_j m_i \geq 0$. Iloczynny stojące pod znakiem podwójnej sumy są to zatem wielkości niedodatnie, wobec tego ostatnia nasza nierówność jest prawdziwa i tym samym lemat 1 jest udowodniony. Łatwo zauważyć z przebiegu przeprowadzonego dowodu, że lemat 1 pozostaje prawdziwy jeśli sumowanie wskaźnika i rozciągnąć nie do skończonej granicy n , lecz do nieskończoności.

Lemat 2. Stosunek wartości kapitałowej renty odroczonej do wartości kapitałowej renty zwykłej jest wielkością malejącą wraz z wiekiem ubezpieczonego, t. zn. że dla $x < y$ zachodzi nierówność:

$$\frac{{}_n a_{i/x}^{aa}}{{}_n a_x^{aa}} > \frac{{}_n a_{i/y}^{aa}}{{}_n a_y^{aa}}$$

Dla dowodu¹ powyższego lematu wystarczy uzasadnić omawianą nierówność dla $y = x + 1$:

$$\frac{{}_n a_{i/x}^{aa}}{{}_n a_x^{aa}} > \frac{{}_n a_{i/x+1}^{aa}}{{}_n a_{x+1}^{aa}}$$

¹ Przytoczony prosty dowód lematu 2. pochodzi od mgra D. Kirszbrauna.

Przez równoważnościowe przekształcenie otrzymujemy:

$$\frac{N_{x+i}^{aa} - N_n^{aa}}{N_x^{aa} - N_n^{aa}} > \frac{N_{x+i+1}^{aa} - N_n^{aa}}{N_{x+1}^{aa} - N_n^{aa}}, \quad \frac{N_{x+1}^{aa} - N_n^{aa}}{N_x^{aa} - N_n^{aa}} > \frac{N_{x+i+1}^{aa} - N_n^{aa}}{N_{x+i}^{aa} - N_n^{aa}}$$

Odejmując obie strony ostatniej nierówności od 1 otrzymujemy:

$$\frac{D_x^{aa}}{N_x^{aa} - N_n^{aa}} < \frac{D_{x+i}^{aa}}{N_{x+i}^{aa} - N_n^{aa}}$$

i ostatecznie

$$n_{x+i}^{aa} < n_x^{aa},$$

co jak wiemy jest zawsze spełnione.

Przechodząc do dowodu twierdzenia o tanioci ubezpieczenia ze składką przeciętną oznaczmy:

$$s_{x,k} = \frac{n_{x-k}^{aa}}{n_x^{aa}} \text{ jeśli } k < t, \text{ oraz } s_{x,k} = 1 \text{ jeśli } k \geq t$$

gdzie t jest określoną liczbą naturalną, zaś w wypadku $x + t - k > n$ przyjmujemy $n_{x-k}^{aa} = 0$. Wobec tego mamy

$$s_{x,k} \leq s_{x,l} \text{ jeśli } k < l \quad (5)$$

oraz w myśl lematu 2:

$$s_{y,k} \leq s_{x,k} \text{ jeśli } x < y \quad (6)$$

Rozważajmy grupę ubezpieczonych najzupełniej ogólną, która spełnia jeden tylko warunek sformułowany pod (4). Zastosujmy lemat 1, podstawiając w nim przy założeniu $x < y$: $r_k = s_{x,k}$; $M_k = v^k L_{y,k}$; $m_k = v^k L_{x,k}$ i rozciągając górną granicę sumowania do nieskończoności. Łatwo sprawdzić, że w myśl (5) oraz (4) spełnione jest założenie lematu 1 i wobec tego mamy:

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} s_{x,k} \cdot v^k \cdot L_{y,k}}{\sum_{k=0}^{\infty} v^k L_{y,k}} \leq \frac{\sum_{k=0}^{\infty} s_{x,k} \cdot v^k L_{x,k}}{\sum_{k=0}^{\infty} v^k L_{x,k}}$$

Z uwagi na (6) możemy w lewej stronie powyższej nierówności zastąpić $s_{x,k}$ przez $s_{y,k}$ i otrzymujemy:

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} s_{y,k} \cdot v^k \cdot L_{y,k}}{\sum_{k=0}^{\infty} v^k L_{y,k}} \leq \frac{\sum_{k=0}^{\infty} s_{x,k} \cdot v^k L_{x,k}}{\sum_{k=0}^{\infty} v^k L_{x,k}}$$

Z uwagi na znaczenie symbolów $s_{y,k}$ oraz $s_{x,k}$ otrzymujemy dalej:

$$\frac{\sum_{k=0}^{t-1} \frac{n a_{y}^{aa}}{n a_{y}^{aa}} \cdot v^k L_{y,k} + \sum_{k=t}^{\infty} v^k L_{y,k}}{\sum_{k=0}^{\infty} v^k L_{y,k}} \leq \frac{\sum_{k=0}^{t-1} \frac{n a_{x}^{aa}}{n a_{x}^{aa}} \cdot v^k L_{x,k} + \sum_{k=t}^{\infty} v^k L_{x,k}}{\sum_{k=0}^{\infty} v^k L_{x,k}}$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{t-1} v^k L_{y,k} \frac{n a_{y}^{aa}}{n a_{y}^{aa}} + \sum_{k=t}^{\infty} v^k L_{y,k} n a_{y}^{aa}}{\sum_{k=0}^{\infty} v^k L_{y,k} n a_{y}^{aa}} \leq \frac{\sum_{k=0}^{t-1} v^k L_{x,k} \frac{n a_{x}^{aa}}{n a_{x}^{aa}} + \sum_{k=t}^{\infty} v^k L_{x,k} n a_{x}^{aa}}{\sum_{k=0}^{\infty} v^k L_{x,k} n a_{x}^{aa}} \quad (7)$$

Ostatnią udowodnioną nierówność wykorzystamy stosując po raz drugi lemat 1 przy podstawieniu:

$$r_x = P_x$$

$$M_x = \sum_{k=0}^{t-1} v^k L_{x,k} \frac{n a_{x}^{aa}}{n a_{x}^{aa}} + \sum_{k=t}^{\infty} v^k L_{x,k} n a_{x}^{aa}$$

$$m_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k L_{x,k} n a_{x}^{aa}$$

Łatwo sprawdzić, że założenia lematu 1 są spełnione, z uwagi na nierówność (7) oraz na to, że $P_x < P_y$. Mamy zatem:

$$\frac{\sum_{x=0}^n P_x \left\{ \sum_{k=0}^{t-1} v^k L_{x,k} \frac{n a_{x}^{aa}}{n a_{x}^{aa}} + \sum_{k=t}^{\infty} v^k L_{x,k} n a_{x}^{aa} \right\}}{\sum_{x=0}^n \left\{ \sum_{k=0}^{t-1} v^k L_{x,k} \frac{n a_{x}^{aa}}{n a_{x}^{aa}} + \sum_{k=t}^{\infty} v^k L_{x,k} n a_{x}^{aa} \right\}} \leq \frac{\sum_{x=0}^n P_x \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} v^k L_{x,k} n a_{x}^{aa} \right\}}{\sum_{x=0}^n \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} v^k L_{x,k} n a_{x}^{aa} \right\}}$$

Prawa strona otrzymanej nierówności jest z uwagi na (2) i (3) wartością składki przeciętnej P . Otrzymujemy zatem:

$$\frac{\sum_{k=0}^{t-1} \sum_{x=0}^n P_x v^k L_{x,k} \cdot \frac{n a_x^{aa}}{t-k} + \sum_{k=t}^{\infty} \sum_{x=0}^n P_x v^k L_{x,k} n a_x^{aa}}{\sum_{k=0}^{t-1} \sum_{x=0}^n v^k L_{x,k} \cdot \frac{n a_x^{aa}}{t-k} + \sum_{k=t}^{\infty} \sum_{x=0}^n v^k L_{x,k} n a_x^{aa}} \leq P$$

Zauważymy teraz, że $v^k L_{x,k} \cdot \frac{n a_x^{aa}}{t-k} = v^k L_{x,k} \cdot v^{t-k} \cdot \frac{n a_x^{aa}}{t-k} \cdot v^{k-t} = v^t L_{x,k}^{(t-k)} \cdot \frac{n a_x^{aa}}{x+t-k}$ jeśli przez $L_{x,k}^{(i)}$ oznaczymy teoretyczną liczbę aktywnych, która pozostaje z liczby aktywnych $L_{x,k}$ po i latach ubezpieczenia: $L_{x,k}^{(i)} = L_{x,k} \cdot i p_x^{aa}$. Pamiętając o tym, że przyjęliśmy $\frac{n a_x^{aa}}{t-k} = 0$ dla $x > n - t + k$, napiszemy ostatnią naszą nierówność w postaci następującej:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{t-1} \sum_{x=0}^{n-t+k} P_x L_{x,k}^{(t-k)} \cdot \frac{n a_x^{aa}}{x+t-k} + \sum_{k=t}^{\infty} v^{k-t} \sum_{x=0}^n P_x L_{x,k} n a_x^{aa} \leq \\ & \leq \sum_{k=0}^{t-1} \sum_{x=0}^{n-t+k} P \cdot L_{x,k}^{(t-k)} \cdot \frac{n a_x^{aa}}{x+t-k} + \sum_{k=t}^{\infty} v^{k-t} \sum_{x=0}^n P L_{x,k} n a_x^{aa} \end{aligned} \quad (8)$$

Otrzymana nierówność charakteryzuje naszą grupę ubezpieczonych w końcu t -ego roku ubezpieczenia: w tym bowiem momencie należą do grupy aktywni w liczbie

$\sum_{k=0}^{t-1} \sum_{x=0}^{n-t+k} L_{x,k}^{(t-k)}$, którzy dożyli w stanie

aktywnym końca t -ego roku ubezpieczenia spośród aktywnych $L_{x,k}$ dla $k < t$. Każda ze stron nierówności oznacza wartość kapitałową przyszłych składek, jakie wpłaci grupa od momentu t . Lewa strona nierówności dotyczy składek indywidualnych, prawa strona — składek przeciętnych. Udowodniliśmy zatem, że w każdym momencie ubezpieczenia t wartość kapitałowa przyszłych składek indywidualnych nie jest większa od wartości kapitałowej przyszłych składek przeciętnych. Stąd, z uwagi na zasadę równoważności, która obowiązuje dla grupy jako całości, wynika, że wartość oprocentowana wpłaconych do momentu t składek indywidualnych nie jest mniejsza od wartości oprocentowanej składek przeciętnych.

Z przebiegu przeprowadzonego przez nas dowodu łatwo zauważyć, że jeśli warunek (4) będzie spełniony z tym, że choćby

w jednym przypadku znak równości występujący w tym warunku będzie wyłączony, to możemy również odrzucić znak równości występujący w (8). Mamy zatem udowodnione następujące

Twierdzenie. Dla dowolnej grupy ubezpieczonych, spełniającej warunek (4) z tym, że przy pewnych x, y, k, l spełniona jest nierówność właściwa

$$\frac{L_{y,k}}{L_{x,k}} > \frac{L_{y,l}}{L_{x,l}}$$

wartość oprowadzona wpłaconych składek przeciętnych do dowolnego momentu t jest przy teoretycznym przebiegu ubezpieczenia mniejsza od wartości oprowadzonej składek, jakie wpłaciłaby grupa do momentu t , gdyby od początku ubezpieczenia pobierane były od ubezpieczonych składki indywidualne.

Twierdzenie powyższe nazwaliśmy twierdzeniem o tanioci ubezpieczenia ze składką przeciętną, gdyż przy spotykanych zwykle teoretycznych grupach ubezpieczonych różnica między oprowadowaną wartością wpłaconych składek indywidualnych i przeciętnych nie maleje wraz z upływem lat ubezpieczenia, lecz pozostaje stała, jak to widzieliśmy w § 10 przy rozpatrywanej tam grupie ubezpieczonych o stałym rozkładzie według wieku.

§ 17. REZERWY JEDNOSTKOWE: KWOTA OSZCZĘDNOŚCIOWA PRZY SKŁADCE PRZECIĘTNEJ

W § 5 wskazywaliśmy na to, że pojęcie rezerwy retrospektywnej możemy również wprowadzić przy grze losowej, która poza tym nie ma nic wspólnego z ubezpieczeniem. Przykładem takiej gry losowej jest opisana w § 3 gra w kostkę, składająca się z serji rzutów kostką. Uogólniając rozważania z § 5, założmy, że prawdopodobieństwo wygranej 1 przy każdym rzucie kostką wynosi q . Stawka naturalna za pojedynczy rzut kostką wynosi zatem $q \cdot 1$. Grający wpłaca jednak przed każdym rzutem kostką stawkę P , różną od $q \cdot 1$ z tym, że w wypadku wygranej otrzymuje on kwotę 1, nie otrzymując żadnej reszty z wpłaconych stawek P . Aby taka gra mogła być grą sprawiedliwą, muszą jej warunki przewidywać

zwrot pewnej reszty z wpłaconych stawek w kwocie kP po dowolnej liczbie k rzutów, jeśli w ciągu tych k rzutów wygrana nie nastąpiła. Tę resztę nazwiemy rezerwą retrospektywną po k rzutach i oznaczymy symbolem ${}_k V^r$. Rezerwę ${}_k V^r$ najłatwiej obliczyć z wzoru rekurencyjnego. Jasne jest, że ${}_0 V^r = 0$. Jeśli rezerwa retrospektywna po $k-1$ rzutach wynosi ${}_{k-1} V^r$, to grający wpłaca przed k -ym rzutem kostką łączną stawkę:

$${}_{k-1} V^r + P$$

Za powyższą stawkę ubezpieczony może wygrać z prawdopodobieństwem q wygraną 1, natomiast z prawdopodobieństwem $1-q$ otrzyma resztę ${}_k V^r$. Stąd równanie:

$${}_{k-1} V^r + P = q \cdot 1 + (1-q) {}_k V^r \quad (9)$$

lub

$$P = q(1 - {}_k V^r) + {}_k V^r - {}_{k-1} V^r$$

Z ostatniego równania mamy rozkład stawki P na część $q(1 - {}_k V^r)$ za czystą grę losową; jest to odpowiednik ubezpieczeniowej składki za ryzyko. Druga część ${}_k V^r - {}_{k-1} V^r$ jest to odpowiednik ubezpieczeniowej składki oszczędnościowej.

Analogicznie do równania (9), napiszemy dla naszego ubezpieczenia na wypadek inwalidztwa, śmierci i starości równanie następujące na jednostkową rezerwę retrospektywną:

$${}_{k-1} V_x^r + P = i_{x+k-1} \cdot v \cdot I_{x,k} + q_{x+k-1}^{aa} \cdot v \cdot Q_{x,k} + p_{x+k-1}^{aa} \cdot v \cdot {}_k V_x^r \quad (10)$$

przy czym spełniona jest zależność:

$$i_{x+k-1} + q_{x+k-1}^{aa} + p_{x+k-1}^{aa} = 1$$

Wpłacając na początku k -ego roku ubezpieczenia stawkę ${}_{k-1} V_x^r + P$, ubezpieczony może w końcu tego roku „wygrać“ z prawdopodobieństwem i_{x+k-1} kwotę $I_{x,k}$, z prawdopodobieństwem q_{x+k-1}^{aa} kwotę $Q_{x,k}$, a z prawdopodobieństwem p_{x+k-1}^{aa} otrzyma na resztę ze swojej stawki w wysokości ${}_k V_x^r$.

Z ostatniego równania otrzymujemy:

$$P = i_{x+k-1} \cdot v \cdot (I_{x,k} - {}_k V_x^r) + q_{x+k-1}^{aa} \cdot v \cdot (Q_{x,k} - {}_k V_x^r) + v \cdot {}_k V_x^r - {}_{k-1} V_x^r \quad (11)$$

Jest to rozkład składki przeciętnej P na sumę trzech składników: składnik pierwszy jest to składka za ryzyko inwalidztwa, składnik drugi — to składka za ryzyko śmierci, składnik

trzeci — to składka oszczędnościowa¹. Wyrażenie $I_{x,k} - {}_kV_x^r$ jest to kapitał pod ryzykiem inwalidztwa, $Q_{x,k} - {}_kV_x^r$ jest to kapitał pod ryzykiem śmierci.

Z równania (10) otrzymujemy wzór rekurencyjny na jednostkową rezerwę retrospektywną:

$${}_kV_x^r = \frac{({}_{k-1}V_x^r + P)r - i_{x+k-1} \cdot I_{x,k} - q_{x+k-1}^{aa} Q_{x,k}}{p_{x+k-1}^{aa}} \quad (12)$$

Z powyższego wzoru zakładając ${}_0V_x^r = 0$, możemy dojść do nierekurencyjnego wzoru na jednostkową rezerwę retrospektywną, który zresztą możemy otrzymać przez następujące bezpośrednie rozumowanie, analogiczne do tego, które nas doprowadziło do wzoru (10).

Wartość kapitałowa uprawnień $U_{x,k}$ jest to obliczona po k latach trwania ubezpieczenia wartość prawdopodobna przyszłych świadczeń ubezpieczenia, wyrażenie $\frac{D_{x+k}^{aa}}{D_x^{aa}} U_{x,k}$ jest to obliczona na początek ubezpieczenia wartość prawdopodobna przyszłych świadczeń,

które nastąpią po momencie k , zaś wyrażenie $U_{x,0} - \frac{D_{x+k}^{aa}}{D_x^{aa}} U_{x,k}$ jest obliczoną na początek ubezpieczenia wartością prawdopodobną świadczeń które nastąpią przed momentem k .

Jeśli „gra“ ubezpieczeniowa zostanie po k latach ubezpieczenia zakończona wypłatą „reszty“ na rzecz ubezpieczonego w wysokości ${}_kV_x^r$, to na to, by taka gra była sprawiedliwa musi być wartość prawdopodobna składek P równa wartości prawdopodobnej świadczeń, powiększonej o wartość prawdopodobną wypłaty kwoty ${}_kV_x^r$; stąd równość:

$$P \cdot {}_k a_x^{aa} = U_{x,0} - \frac{D_{x+k}^{aa}}{D_x^{aa}} \cdot U_{x,k} + \frac{D_{x+k}^{aa}}{D_x^{aa}} {}_kV_x^r,$$

która prowadzi do następującego wzoru na jednostkową rezerwę retrospektywną:

$${}_kV_x^r = (P \cdot {}_k a_x^{aa} - U_{x,0}) \frac{D_x^{aa}}{D_{x+k}^{aa}} + U_{x,k} \quad (13)$$

jest to wzór równoważny wzorowi rekurencyjnemu (12).

¹ O składkach za ryzyko i składce oszczędnościowej por: Bohlmann (3); rozważania ogólne przy większej liczbie ryzyk znajdują się w pracy Böhmner (4).

Przejdziemy teraz do definicji jednostkowej rezerwy prospektywnej, która nie nastęrcza żadnych trudności. Jednostkowa rezerwa prospektywna po k latach ubezpieczenia jest to obliczona w momencie k wartość prawdopodobna przyszłych świadczeń, zmniejszona o wartość prawdopodobną przyszłych składek:

$${}_k V_x^p = U_{x,k} - P \cdot {}^n a_{x+k}^{aa} \quad (14)$$

Na początku ubezpieczenia jednostkowa rezerwa prospektywna wynosi:

$${}_0 V_x^p = U_{x,0} - P \cdot {}^n a_x^{aa}$$

jest to wielkość na ogół różna od zera, dodatnia lub ujemna. W wypadku jednak gdy P jest składką indywidualną, mamy $U_{x,0} - P_x {}^n a_x^{aa} = 0$ (por. wzór (2)).

Wobec tego, że dla każdej składki przeciętnej P istnieje taki wiek przeciętny ξ , że

$$\text{jeśli } x < \xi, \quad \text{to } P_x < P$$

$$\text{jeśli } x \geq \xi, \quad \text{to } P_x \geq P$$

będziemy mieli również dla jednostkowej rezerwy prospektywnej:

$$\text{jeśli } x < \xi, \quad \text{to } {}_0 V_x^p < 0$$

$$\text{jeśli } x \geq \xi, \quad \text{to } {}_0 V_x^p \geq 0 \quad (15)$$

${}_0 V_x^p$ nazwaliśmy w § 11 składką wyrównawczą, zaś ubezpieczonych o wieku niższym niż ξ nazwaliśmy dla krótkości „młodymi“ w odróżnieniu od „starych“ o wieku wyższym niż ξ .

Wartość końcowa jednostkowej rezerwy prospektywnej wynosi:

$${}_{n-x} V_x^p = U_{x,n-x} = S_x$$

a więc równa jest wartości kapitałowej świadczenia starczego.

Wartość początkowa jednostkowej rezerwy retrospektywnej równa jest zeru:

$${}_0 V_x^r = 0$$

natomiast wartość końcowa różna jest na ogół od S_x :

$${}_{n-x} V_x^r = S_x - \frac{D_x^{aa}}{D_n^{aa}} {}_0 V_x^p$$

Jak to już obliczaliśmy gdzieindziej¹, między rezerwą jednostkową retrospektywną i prospektywną zachodzi następujący związek:

$${}_k V_x^r = {}_k V_x^p - {}_0 V_x^p \frac{D_x^{aa}}{D_{x+k}^{aa}}; \quad (16)$$

widać z niego, że jeżeli P jest składką indywidualną, to ponieważ wtedy ${}_0 V_x^p = 0$, jednostkowa rezerwa retrospektywna równa jest jednostkowej rezerwie prospektywnej; nazywamy ją wtedy rezerwą indywidualną.

Pojęcia składki za ryzyko i składki oszczędnościowej wprowadziliśmy dla jednostkowej rezerwy retrospektywnej. Jednakże analogiczne pojęcia dają się wprowadzić dla jednostkowej rezerwy prospektywnej, z uwagi na to, że tę rezerwę prospektywną można przedstawić jako jednostkową rezerwę retrospektywną specjalnego ubezpieczenia; w takim ubezpieczeniu obok składek rocznych P wpłaca się na początku ubezpieczenia ponadto składkę wyrównawczą ${}_0 V_x^p$. Istotnie z wzoru (14) na jednostkową rezerwę prospektywną otrzymujemy:

$$\begin{aligned} {}_k V_x^p &= U_{x,k} - P \frac{{}_n a_x^{aa} - {}_k a_x^{aa}}{D_{x+k}^{aa}} \cdot D_x^{aa} \\ &= (P \cdot {}_k a_x^{aa} - U_{x,0} + U_{x,0} - P {}_n a_x^{aa}) \frac{D_x^{aa}}{D_{x+k}^{aa}} + U_{x,k} \\ &= ({}_0 V_x^p + P {}_k a_x^{aa} - U_{x,0}) \frac{D_x^{aa}}{D_{x+k}^{aa}} + U_{x,k} \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy wzór na rezerwę retrospektywną, który tym się tylko różni od wzoru (13), że obok składek rocznych P występuje jeszcze składka wyrównawcza ${}_0 V_x^p$. Przy pomocy otrzymanego wzoru łatwo udowodnić dla jednostkowej rezerwy prospektywnej równanie identyczne z (10), wobec czego będziemy mogli również napisać dla jednostkowej rezerwy prospektywnej wzór analogiczny do wzoru (11):

$$P = i_{x+k-1} \cdot v \cdot (I_{x,k} - {}_k V_x^p) + q_{x+k-1}^{aa} \cdot v \cdot (Q_{x,k} - {}_k V_x^p) + v \cdot {}_k V_x^p - {}_{k-1} V_x^p$$

W ten sposób dla jednostkowej rezerwy prospektywnej możemy wprowadzić tak jak przy wzorze (11) pojęcie składki za ryzyko

¹ Por. Presburger (13, str. 262).

i składki oszczędnościowej, jak również pojęcie kapitału pod ryzykiem.

Jednostkowa rezerwa retrospektywna jest to kwota oszczędnościowa ubezpieczonego, powstała ze składek przeciętnych po potrąceniu kosztów ryzyka, jeśli ubezpieczenie traktujemy jako odosobnioną grę losową. Z tego punktu widzenia możemy również jednostkową rezerwę prospektywną traktować jako kwotę oszczędnościową, jeśli zaliczamy ubezpieczonemu na początku ubezpieczenia składkę wyrównawczą ${}_0V_x^p$. W § 14 obliczaliśmy kwotę oszczędnościową ubezpieczonego przez rozkład składki przeciętnej na składkę indywidualną i składkę dodatkową (dodatnią lub ujemną). Oznaczmy:

$$\Delta_x = P - P_x$$

wobec czego składka przeciętna jest sumą:

$$P = P_x + \Delta_x$$

Możemy kwotę oszczędnościową ze składki P obliczać w ten sposób, że część jej w wysokości P_x tworzy rezerwę indywidualną ${}_tV_x$, zaś reszta Δ_x (dodatnia lub ujemna) kapitalizuje się w sposób

bankowy do kwoty: $\sum_{k=0}^{t-1} r^{t-k} \cdot \Delta_x$. W ten sposób kwota oszczędnościowa powstała ze składki przeciętnej P wyniesie¹:

$${}_tV_x + \sum_{k=0}^{t-1} r^{t-k} \Delta_x$$

Powyższe wielkości podane zostały w tabl. 17, a zastosowaliśmy je przy ustalaniu metody wykupów w § 14.

§ 18. REZERWA PROSPEKTYWNA GRUPY AKTYWNYCH

Wróćmy teraz do ogólnej grupy aktywnych, rozpatrywanej w § 16, w której liczba x -letnich aktywnych przystępujących do grupy po k latach trwania ubezpieczenia wynosi $L_{x,k}$. Po t latach trwania ubezpieczenia należą do grupy aktywni w liczbie $\sum_{k=0}^{t-1} \sum_{x=0}^{n-t+k} L_{x,k}^{(t-k)}$, przy czym niekoniecznie zachodzić musi związek $L_{x,k}^{(i)} = L_{x,k} \cdot i p_x^{aa}$,

¹ Por. Presburger (14, str. 486 — 487).

jaki zakładaliśmy w § 16 przy dowodzie twierdzenia o taniości ubezpieczenia za składkę przeciętną. Rozpatrujemy bowiem grupę, w której przebieg ryzyk w ogólnym przypadku nie musi być zgodny z przewidywaniami teoretycznymi. Dla określenia rezerwy prospektywnej grupy aktywnych rozpatrujemy pomocniczą grupę aktywnych, której stan początkowy dany jest przez

$\sum_{k=0}^{t-1} \sum_{x=0}^{n-t+k} L_{x,k}^{(t-k)}$, zaś

generacje późniejsze scharakteryzowane są przez liczby $L_{x,k}$ ($k \geq t$), które zostały przyjęte do kalkulacji składki przeciętnej (3). Różnicę między wartością prawdopodobną przyszłych świadczeń na rzecz pomocniczej grupy aktywnych a wartością prawdopodobną przyszłych składek nazywać będziemy rezerwą prospektywną grupy aktywnych. Łatwo wykazać, że rezerwa ta wynosi ¹:

$${}_tV^p = \sum_{k=0}^{t-1} \sum_{x=0}^{n-t+k} L_{x,k}^{(t-k)} {}_{t-k}V_x^p + \sum_{k=t}^{\infty} v^{k-t} \sum_{x=0}^n L_{x,k} {}_0V_x^p \quad \text{jeśli } t < n \quad (17)$$

Warunek $t < n$ oznacza, że jeszcze mogą pozostawać w grupie w momencie t osobnicy z początkowej generacji ubezpieczonych. Dla $t \geq n$ należałoby sumowanie zmiennej k rozpocząć nie od $k=0$, lecz od $k=t-n$ gdyż wszyscy ubezpieczeni z generacji wcześniejszych niż $t-n$ dożyli już wieku starczego, jeśli wcześniej nie ubyli z grupy aktywnych przez śmierć lub inwalidztwo.

Z wzoru (17) widać, że rezerwa prospektywna grupy aktywnych równa jest sumie rezerw jednostkowych prospektywnych generacji aktywnych z dnia bilansowego oraz sumie zdyskontowanych wartości początkowych jednostkowych rezerw prospektywnych przyszłych generacji aktywnych. Kładąc $t=0$ otrzymujemy:

$${}_0V^p = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \sum_{x=0}^n L_{x,k} \cdot {}_0V_x^p = 0 \quad (18)$$

Rezerwa prospektywna grupy aktywnych jest na początku ubezpieczenia równa zero, co wynika z wzoru (3) na składkę przeciętną.

W § 13 mówiliśmy o tym, że rezerwa prospektywna grupy aktywnych przy teoretycznym przebiegu ubezpieczenia pozostaje zawsze niższa zarówno od sumy jednostkowych rezerw prospektywnych ge-

¹ Por. Presburger (13, str. 262).

neracji aktywnych z dnia bilansowego, jak również od sumy jednostkowych rezerw retrospektywnych. Rezerwa prospektywna grupy aktywnych zachowuje tę własność i przy ogólnej grupie ubezpieczonych, jeżeli tylko spełniony jest warunek

$$L_{x,k} = 0 \text{ jeśli } k > 0, x \geq \xi \quad (19)$$

gdzie ξ jest wiekiem przeciętnym, o którym mowa była w § poprzednim. Warunek (19) oznacza, że do generacji późniejszych od generacji początkowej należą jedynie osobnicy „młodzi”. Z warunku (19) oraz z (15) wynika od razu, że drugi składnik prawej strony równości (17) jest wielkością ujemną i wobec tego jest prawdziwe następujące

Twierdzenie. Jeżeli spełniony jest warunek (19), to zachodzi nierówność:

$${}_t V^p < \sum_{k=0}^{t-1} \sum_{x=0}^{n-t+k} L_{x,k}^{(t-k)} {}_{t-k} V_x^p$$

Przejdziemy teraz do dowodu analogicznego twierdzenia dla jednostkowych rezerw retrospektywnych. Mamy w myśl (17) oraz (16) przy założeniu $t < n$:

$${}_t V^p - \sum_{k=0}^{t-1} \sum_{x=0}^{n-t+k} L_{x,k}^{(t-k)} {}_{t-k} V_x^p = \sum_{k=0}^{t-1} \sum_{x=0}^{n-t+k} L_{x,k}^{(t-k)} {}_0 V_x^p \frac{D_{x,t-k}^{aa}}{D_{x,t-k}^{aa}} + \sum_{k=t}^{\infty} \mathcal{V}^{k-t} \sum_{x=0}^n L_{x,k} {}_0 V_x^p$$

Zakładając dalej, że mamy do czynienia z przebiegiem teoretycznym ubezpieczenia, t. zn. że $L_{x,k}^{(i)} = L_{x,k} i p_x^{aa}$, otrzymujemy:

$$\sum_{k=0}^{t-1} \mathcal{V}^{k-t} \sum_{x=0}^{n-t+k} L_{x,k} {}_0 V_x^p + \sum_{k=t}^{\infty} \mathcal{V}^{k-t} \sum_{x=0}^n L_{x,k} {}_0 V_x^p \quad (20)$$

Rozpatrzmy teraz dwa przypadki: a) $n-t < \xi$, b) $n-t \geq \xi$.

W przypadku a) mamy $t > n - \xi$. Przedstawiamy (20) w postaci:

$$r^t \left[\sum_{x=0}^{n-t} L_{x,0} {}_0 V_x^p + \sum_{k=1}^{t-1} \mathcal{V}^k \sum_{x=0}^{n-t+k} L_{x,k} {}_0 V_x^p + \sum_{k=t}^{\infty} \mathcal{V}^{k-t} \sum_{x=0}^n L_{x,k} {}_0 V_x^p \right]$$

Składnik pierwszy wyrażenia stojącego w nawiasie jest ujemny z uwagi (15). To samo powiedzieć możemy o pozostałych dwóch składnikach z uwagi na (15) oraz (19). Wobec tego wyrażenie (20) jest wielkością ujemną.

W przypadku b): $t \leq n - \xi$, przekształcamy (20) przy pomocy (18) w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
 & -r^t \left[\sum_{k=0}^{t-1} v^k \sum_{x=n-t+k+1}^n L_{x,k} V_x^p \right] = \\
 & = -r^t \left[\sum_{x=n-t+1}^n L_{x,0} V_x^p + \sum_{k=1}^{t-1} v^k \sum_{x=n-t+k+1}^n L_{x,k} V_x^p \right]
 \end{aligned}$$

W ostatnim wyrażeniu w nawiasie drugi składnik równy jest zeru z uwagi na (19). Pierwszy składnik natomiast jest wielkością dodatnią z uwagi na (15). Wobec tego i w przypadku b) wyrażenie (20) jest wielkością ujemną. Udowodniliśmy zatem

Twierdzenie. Jeśli spełniony jest warunek (19), to przy teoretycznym przebiegu ubezpieczenia zachodzi nierówność

$${}_t V^p < \sum_{k=0}^{t-1} \sum_{x=0}^{n-t+k} L_{x,k}^{(t-k)} {}_{t-k} V_x^r$$

§ 19. ZASADA RÓWNOWAŻNOŚCI STRAT I ZYSKÓW

Punktem wyjścia przeprowadzonego w §§ 9 i 15 badania efektu oszczędnościowego ubezpieczenia w chwili nastąpienia wypadku losowego była zasada równoważności strat i zysków. Zasadę tę można w ogólnej postaci zapisać w sposób następujący:

$$\sum_{k,l} \omega_{k,l} \cdot v^k (A_{k,l} - B_k) = 0 \tag{21}$$

gdzie $\omega_{k,l}$ oznacza prawdopodobieństwo nastąpienia wypadku ubezpieczeniowego w roku ubezpieczeniowym k ; takich prawdopodobieństw odnoszących się do jednego roku może być więcej niż jedno — stąd wskaźnik l . $A_{k,l}$ oznacza obliczoną na koniec roku k wartość kapitałową świadczenia ubezpieczeniowego, związanego z prawdopodobieństwem $\omega_{k,l}$, B_k oznacza obliczoną na koniec roku wartość oprocentowaną wpłaconych składek indywidualnych. Różnica $A_{k,l} - B_k$ oznacza zatem zysk, wzgl. stratę ubezpieczonego z chwilą nastąpienia wypadku losowego. W równości (21) ten zysk wzgl. strata są zdyskontowane na początek ubezpieczenia. Równość (21) wyraża zatem z a s a d ę r ó w n o w a ż

ności strat i zysków: na początku ubezpieczenia suma algebraiczna wartości prawdopodobnych zysków i strat równa jest zeru. W naszym ogólnym ubezpieczeniu na wypadek inwalidztwa, śmierci i starości prawdopodobieństwa $\omega_{k,1}$ mają dwa znaczenia; prawdopodobieństwo zostania inwalidą w roku k :

$$\omega_{k,1} = \frac{l_{aa}^{x+k-1}}{l_x^{aa}} \cdot i_{x+k-1}$$

oraz prawdopodobieństwo śmierci w stanie aktywnym w roku k :

$$\omega_{k,2} = \frac{l_{aa}^{x+k-1}}{l_x^{aa}} q_{x+k-1}^{aa}$$

W ostatnim roku ubezpieczenia ($k = n - x$) dochodzi jeszcze trzeci rodzaj prawdopodobieństwa; prawdopodobieństwo dożycia końca ubezpieczenia w stanie aktywnym:

$$\omega_{n-x,3} = \frac{l_n^{aa}}{l_x^{aa}}$$

Wartości kapitałowe świadczeń mają znaczenie następujące:

$$A_{k,1} = I_{x,k}$$

$$A_{k,2} = Q_{x,k}$$

$$A_{n-x,3} = S_x$$

zaś wartość oprocentowana składek indywidualnych wynosi:

$$B_k = P_x \frac{r^k - 1}{1 - v}$$

Wobec powyższego równość (21) przybierze postać następującą:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-x} \frac{l_{aa}^{x+k-1}}{l_x^{aa}} \cdot i_{x+k-1} \cdot v^k \cdot \left(I_{x,k} - P_x \frac{r^k - 1}{1 - v} \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{n-x} \frac{l_{aa}^{x+k-1}}{l_x^{aa}} \cdot q_{x+k-1}^{aa} \cdot v^k \cdot \left(Q_{x,k} - P_x \frac{r^k - 1}{1 - v} \right) + \\ & + \frac{l_n^{aa}}{l_x^{aa}} \cdot v^{n-x} \cdot \left(S_x - P_x \frac{r^{n-x} - 1}{1 - v} \right) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Ostatnia równość jest wyrazem zasady równoważności strat i zysków w zastosowaniu do naszego ogólnego ubezpieczenia na wypadek inwalidności, śmierci i starości. Zarówno zasada równoważności strat i zysków, jak i zasada równoważności składek i świadczeń są różnymi postaciami zasady sprawiedliwości gry losowej.

Zasada równoważności strat i zysków daje się zawsze sprowadzić do zasady równoważności składek i świadczeń i na odwrót. Pokażemy jak taka równoważność w zaje m n a z a s a d wygląda na przykładzie naszego ogólnego ubezpieczenia. Przez równoważnościowe przekształcenie równości (22) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-x} \frac{D_{x+k-1}^{aa}}{D_x^{aa}} (i_{x+k-1} \cdot v \cdot I_{x,k} + q_{x+k-1}^{aa} \cdot v \cdot Q_{x,k}) + \frac{D_n^{aa}}{D_x^{aa}} S_x = \\ & = P_x \sum_{k=1}^{n-x} \frac{l_{x+k-1}^{aa}}{l_x^{aa}} \cdot v^k \frac{v^k - 1}{1 - v} (i_{x+k-1} + q_{x+k-1}^{aa}) + P_x \frac{l_n^{aa} v^{n-x} - 1}{l_x^{aa} (1 - v)} \cdot v^{n-x} \end{aligned}$$

Z uwagi na (1) i na to, że $i_{x+k-1} + q_{x+k-1}^{aa} = 1 - p_{x+k-1}^{aa}$ mamy dalej

$$\begin{aligned} U_{x,0} &= \frac{P_x}{1 - v} \left[\sum_{k=1}^{n-x} \frac{l_{x+k-1}^{aa}}{l_x^{aa}} (1 - v^k) \left(1 - \frac{l_{x+k-1}^{aa}}{l_{x+k-1}^{aa}} \right) + \frac{l_n^{aa}}{l_x^{aa}} (1 - v^{n-x}) \right] \\ &= \frac{P_x}{d} \left[\sum_{k=1}^{n-x} \frac{l_{x+k-1}^{aa}}{l_x^{aa}} - \sum_{k=1}^{n-x} \frac{l_{x+k}^{aa}}{l_x^{aa}} - \sum_{k=1}^{n-x} v^k \frac{l_{x+k-1}^{aa}}{l_x^{aa}} + \sum_{k=1}^{n-x} v^k \frac{l_{x+k}^{aa}}{l_x^{aa}} - v^{n-x} \frac{l_n^{aa}}{l_x^{aa}} + \frac{l_n^{aa}}{l_x^{aa}} \right] \\ &= \frac{P_x}{d} \left[1 - \frac{l_n^{aa}}{l_x^{aa}} - v \cdot {}^n a_x^{aa} + ({}^n a_x^{aa} - 1) + \frac{l_n^{aa}}{l_x^{aa}} \right] \\ &= \frac{P_x}{d} {}^n a_x^{aa} (1 - v) \\ &= P_x \cdot {}^n a_x^{aa} \end{aligned}$$

Ostatnia równość jest wyrazem zasady równoważności składek i świadczeń (por. (2)).

Wróćmy do równości (21) i zauważmy, że w części ogólnej niniejszej pracy w tabl. 9 i 10 badaliśmy przebieg różnicy $A_{k,l} - B_k$, któ-

ra jest wielkością zysku względnie straty ubezpieczonego. Według przebiegu omawianej różnicy dla danego l klasyfikowaliśmy w szczególności różne systemy świadczeń pod względem wysokości ryzyka ubezpieczeniowego, z jakim te systemy świadczeń są związane. Jednakże, aby ocenić ryzyko ubezpieczeniowe nie jakościowo, lecz ilościowo, można posługiwać się pojęciem *ryzyka przeciętnego* R , które definiuje się w sposób następujący:

$$R = \sum_{k,l} \omega_{k,l} \cdot v^k (A_{k,l} - B_k), \text{ gdzie } A_{k,l} > B_k$$

Ryzyko przeciętne R jest sumą składników dodatnich równości (21), jest to zatem wartość prawdopodobna zysków ubezpieczonego. Posługiwanie się tym pojęciem w badaniach wymaga jednak opracowania metod obliczania wysokości ryzyka przeciętnego. Tego rodzaju metody w zakresie zwykłego ubezpieczenia z ryzykiem śmierci są już dość daleko rozwinięte¹. W zakresie jednak ryzyk właściwych ubezpieczeniu społecznemu czekają one jeszcze na opracowanie.

¹ Por. Berger (1).

DIE SOZIALE PENSIONSVERSICHERUNG VOM STANDPUNKTE DER VERSICHERUNG EINER EINZELPERSON

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden technische Untersuchungen über die soziale Pensionsversicherung für den Todesfall, Invalidität u. Alter vom speziellen Standpunkt angeführt und zwar vom Standpunkt des Wertes, welchen eine solche Versicherung für den *einzelnen* Versicherten darstellt. Der Verfasser hat sich zur Aufgabe gestellt zu zeigen, welchen Einfluss die Anwendung der Durchschnittsprämie und eines bestimmten Systems der Pensionsleistungen auf den Wert der Leistungen hat, welche der Versicherte bei vorzeitigem Verlassen der Versicherung erhalten könnte, sowie auf den Wert derjenigen Leistungen, welche die Versicherungs-Anstalt im Todesfall, Invalidität u. Alter im Vergleich mit dem Wert der eingezahlten Prämien trägt.

Mit Rücksicht darauf, dass die vorliegende Arbeit für einen weiteren Kreis von Versicherungs-Fachleuten und nicht nur für Versicherungs-Mathematiker bestimmt ist, wird im *allgemeinen Teil* dieser Arbeit kein Gebrauch von mathematischen Formeln gemacht; diese werden durch Tabellen, Zusammenstellungen und Diagramme ersetzt, die überdies ihre gewöhnliche Rolle des Zahlenbeispiels spielen. Dagegen wurden Betrachtungen des allgemeinen Teils in einem besonderen, *mathematisch-technischen Anhang* in einer allgemeinen mathematischen Form erfasst, worin auch Sätze, im allgemeinen Teil nur an Beispielen vorgeführt, bewiesen wurden.

Zwecks Untersuchung der Rolle des Leistungssystems wurden sämtliche Zahlenbeispiele für *4 diverse Leistungssysteme* berechnet und zwar: feste Rente mit und ohne Karenzzeit, und steigende Rente, gemäss zwei Systemen, des in Polen geltenden Sozialversi-

cherungs-Gesetzes (Pensionsversicherung der Angestellten v. J. 1927 und der Arbeiter v. J. 1933).

Als Einführung in den eigentlichen Inhalt wurde, mit Rücksicht auf Gemeinverständlichkeit der vorliegenden Arbeit, die *Pensionsversicherung gegen Individualprämie* ausführlich behandelt. Im Abschnitt über die Individualprämie wird die Versicherung einer Einzelperson als reines Glückspiel dargestellt und das Äquivalenzprinzip der Prämien und Leistungen als Ausdruck des Gerechtigkeitsprinzips im Glückspiel dargelegt. Die Zerlegung der Individualprämie auf *drei* Bestandteile: die Sparprämie, Invaliditäts-Risiko-prämie und Todes-Risikoprämie wurde zur Klassifizierung der Leistungssysteme auf Grund der in ihnen enthaltenen Quantität der Spar- und Risikoelementen ausgenutzt. Die gleiche Zerlegung wurde auch zur Hervorhebung des Charakters der Versicherung als *organischer* Verbindung der Sparoperation und der reinen Versicherungsoperation benutzt und der *künstlichen* Verbindung dieser Operationen, die man in den Projekten einer Reform der Sozialversicherung auf Grund s. g. Zwangsparsparnis und teilweisen Versicherung vorfindet, gegenübergestellt.

Der Begriff der Sparprämie wurde bei Einführung des Begriffs der *retrospectiven Individualreserve* benutzt, welche man als Rest aus den nach Abzug der Glückspielkosten zurück gebliebenen Individualprämien behandelt. Der Begriff der *prospectiven Individualreserve* wurde eingeführt durch Untersuchung des Betrages, welcher notwendig ist, um das Gleichgewicht einer als Glückspiel behandelten Versicherung der Einzelperson in der Zukunft zu erhalten. Auf diese Weise bleibt der *begriffliche Unterschied* zwischen der retrospectiven und prospectiven Reserve erhalten, welche in der Versicherung gegen Individualprämie zahlenmässig gleich sind.

Bei der technischen Bilanz einer Gruppe von Versicherten gegen Individualprämie wurde die Rolle der prospectiven Individualreserve und des Risikokapitals im Falle *nichttheoretischen* Verlaufs der Versicherungsrisiken unterstrichen. Schliesslich wurde das Problem der Rückkäufe in der Versicherung gegen Individualprämie dargestellt.

Zwecks Vergleichung des Wertes der eingezahlten Individualprämien mit demjenigen der im Todesfall, Invalidität und Alter fälligen Versicherungsleistungen wurde das *Äquivalenz-Prinzip der Gewinne und Verluste*, als anderer Ausdruck des Gerechtigkeitsprinzips im

Glückspiel formuliert. Der Begriff der Gewinne und Verluste ist hier der gleiche, welcher bei Bildung des Begriffes des durchschnittlichen Risikos in der Risikotheorie angewandt wird. Beim Verlauf der Gewinn- und Verlust-Kurve wird die Lage *des kritischen Punktes* beobachtet, der bei den untersuchten Leistungssystemen in der Versicherung gegen Individualprämie ungefähr in der Nähe *einer festen Altersklasse*, ungeachtet des Eintrittsalters, liegt.

Nach dieser ausführlichen Vorbereitung aus der Theorie der Pensionsversicherung gegen Individualprämie, geht der Verfasser im zweiten Abschnitt dieser Arbeit zum Begriff *der allgemeinen Durchschnittsprämie* über. Es wird ein Zahlenbeispiel einer offenen Gruppe mit fester Anzahl der Aktiven und einer festen Altersverteilung untersucht. Diese Gruppe entsteht aus einer Anfangsgeneration verschiedener Altersklassen und aus einer unendlichen Reihe gleicher späteren Generationen von Aktiven gleichen, jungen Alters. Austritte kommen nur infolge Invalidität, Todesfall oder Erleben des vorgeschriebenen Alters vor; es gibt also keine Austritte infolge anderer Ursachen (Storni). Die für die vorgenannte Gruppe errechnete Durchschnittsprämie entspricht annähernd einem *festen Durchschnittsalter* unabhängig davon, welcher von den vier untersuchten Leistungssystemen angenommen wird.

Weiter werden zwei Argumente untersucht; das eine sozialer, das andere wirtschaftlicher Natur, bezüglich der Anwendung der Durchschnittsprämie in der Sozialversicherung. Das *soziale Argument* besteht in der Unabhängigkeit der Durchschnittsprämie von dem Alter der Versicherten, deren Notwendigkeit der Verfasser näher darlegt¹. Das wirtschaftliche Argument geht aus dem vom Verfasser formulierten *Satz über die Billigkeit der Versicherung gegen Durchschnittsprämie* hervor. Dieser Satz wird ganz allgemein für offene Gruppen bewiesen, in welchen die späteren Generationen untereinander differieren können und so wie die Anfangsgeneration aus Aktiven verschiedenen Alters zusammengesetzt sein können².

Durch Verallgemeinerung der Begriffe der *retrospectiven* und *prospectiven* Reserve in Anwendung auf die Durchschnittsprämie, gelangt man zur Definition der *retrospectiven* und *prospectiven Einzelreserve*, die im allgemeinen nicht gleich sind. In diesem Zusam-

¹ Vergl. P r e s b u r g e r (15, S. 348.).

² Eine ebensolche allgemeine Gruppe wird auch in der Abhandlung: P r e s b u r g e r (14) betrachtet.

menhange verallgemeinert der Verfasser die Begriffe der Spar- und Risikoprämie in Anwendung auf die Durchschnittsprämie¹ und auf diese Weise erhält er eine zweifache Einteilung der Durchschnittsprämie; die eine Einteilung ist mit der retrospectiven, die andere mit der prospectiven Einzelreserve verbunden. Vermittels obiger Betrachtungen ist der Verfasser bestrebt nachzuweisen, dass die Begriffe der retrospectiven und prospectiven Einzelreserve, welche vielfach als unsinnig² betrachtet werden, mit einem ganz bestimmten Inhalt verbunden sind. Die retrospective Einzelreserve ist eben die Höhe der *Ersparnisse*, die man dem Versicherten verbuchen kann, sofern man seine Versicherung gegen Durchschnittsprämie als Einzelglückspiel behandelt. Die prospective Einzelreserve dagegen ist jene Summe, welche notwendig ist, um die Versicherung gegen Durchschnittsprämie einer Einzelperson für die Zukunft im *Gleichgewicht* zu halten. Der Wert der prospectiven Einzelreserve am Anfang der Versicherung — von Null verschieden — kann als einmalige *Ausgleichsprämie* behandelt werden.

Ihre Hauptanwendung hat die prospective Einzelreserve bei der technischen Bilanz der Versicherung gegen Durchschnittsprämie bei einer offenen Gruppe von Aktiven. Die *Reserve der ganzen Gruppe* lässt sich mit Hilfe der prospectiven Einzelreserven darstellen³, was bei einem nichttheoretischen Verlauf der Versicherungsrisiken von ganz besonderer Bedeutung ist. Das aus der prospectiven Einzelreserve errechnete *Risikokapital* spielt bei der technischen Bilanz einer Versicherung gegen Durchschnittsprämie dieselbe Rolle, wie das aus der Individualreserve errechnete *Risikokapital* bei der technischen Bilanz einer Versicherung gegen Individualprämie.

¹ Schon nach Niederschrift der vorliegenden Arbeit hat der Verfasser von der Arbeit *Wimmer* (18) Kenntnis genommen, worin auch die Begriffe der Spar- und Risikoprämien in Anwendung auf die Durchschnittsprämie verallgemeinert werden. Diese Verallgemeinerung jedoch geht in anderer Richtung, als diejenige in der vorliegenden Arbeit.

² Vergl. *L o e w y* (9, S. 201.).

³ Es muss hervorgehoben werden, dass im Allgemeinfalle die Gruppenreserve der Summe der prospectiven Einzelreserven der aktuell zu der Gruppe gehörenden Aktiven *nicht gleich* ist, wie es z. B. in der Arbeit *Wimmer* (18, S. 192.), aufgeführt ist. Dies gilt nur für Gruppen, in denen die späteren Generationen mit der Anfangsgeneration identisch sind. Für die Gruppenreserve einer allgemeinen offenen Gruppe vergl. auch *Presburger* (14, S. 471.).

Zum Problem der *Repartition* der Gruppenreserve unter die aktuell zu der Gruppe gehörenden Aktiven übergehend, beweist der Verfasser *zwei Sätze*, aus welchen hervorgeht, dass die Gruppenreserve in den gewöhnlich anzutreffenden Fällen stets kleiner ist, als die Summe der retrospektiven Einzelreserven, die für die aktuell zu der Gruppe gehörenden Aktiven errechnet wurde, sowie auch, dass die Gruppenreserve kleiner ist, als analoge Summe der prospectiven Einzelreserven. Diese zwei Sätze, ebenso wie der oben erwähnte Satz über die Billigkeit der Versicherung gegen Durchschnittsprämie, werden allgemein für Gruppen bewiesen, in denen spätere Generationen unter sich differieren und ebenso wie die Anfangsgeneration, aus Aktiven verschiedenen Alters zusammengesetzt sein können.

Die Untersuchung des Problems der *Repartition* diene als Einführung in das Problem der *Rückkäufe* in der Pensionsversicherung gegen Durchschnittsprämie. Der Verfasser macht aufmerksam, dass das letztere Problem nur für solche offene Gruppen aktuell sein kann, wo bei Festsetzung der Durchschnittsprämie keinen vorzeitigen Austritten (Storni) Rechnung getragen wird; das in der vorliegenden Arbeit untersuchte Zahlenbeispiel einer Gruppe besitzt eben diesen Charakter. Der Verfasser führt Betrachtungen an, laut welchen der Rückkaufswert die höchste Summe sein muss, die *gleichzeitig* nachstehende Bedingungen erfüllt:

1. Die Auszahlung des Rückkaufs darf keinen technischen Defizit nach sich ziehen;
2. Der Rückkaufswert darf die individuelle Sparsumme des aus der Versicherung Austretenden nicht übersteigen;
3. Die Gruppenreserve der Aktiven muss zur Deckung der Rückkaufswerte sämtlicher Aktiven ausreichen.

Als individuelle Sparsumme des gegen Durchschnittsprämie Versicherten (Bedingung 2) kann nicht nur die retrospektive Einzelreserve betrachtet werden, sondern auch eine auf einfache Weise durch Zurückführung der Durchschnittsprämie auf die Individualprämie entstandene Summe.¹

Es erweist sich, dass für die in dieser Arbeit untersuchten zwei Leistungssystemen mit steigenden Renten, die *Repartitions*methode nach der Summe der eingezahlten Durchschnittsprämien² zu einer

¹ Vergl. P r e s b u r g e r (14, S. 487.).

² Vergl. P i e t s c h (11).

Rückkaufsumme führt, welche die drei oben genannten gleichzeitigen Bedingungen erfüllt. Auf diese Weise gelangt man zur Methode der Rückkaufsberechnung, wo der *Rückkaufswert ein bestimmter und stabiler Prozentsatz der eingezahlten Durchschnittsprämien* ist.

Ausser dem Problem der Rückkäufe wird auch die Frage der rückwirkenden *Anrechnung* von Versicherungsjahren beim Eintritt in die Versicherung gegen Durchschnittsprämie untersucht, sowie die Frage des *Uebertritts* von Versicherten aus einer Versicherungsanstalt in eine andere.

Zum Schluss wird eine Untersuchung über den Wert der Leistungen angeführt, die der Versicherte nicht im Falle eines vorzeitigen Austritts aus der Versicherung, sondern bei Elimination aus der Gruppe der Aktiven infolge Invalidität, Tod oder Erleben des vorgeschriebenen Alters erhält. Obgleich für den einzelnen Versicherten bei Durchschnittsprämie das Äquivalenzprinzip der Gewinne und Verluste nicht mehr bindend ist, so lässt sich auch hier, wie es im Abschnitt über Individualprämie der Fall war, eine Untersuchung über den *Verlauf der Gewinne und Verluste* sowie die Lage des *kritischen Punktes* durchführen. Diese Untersuchung beweist, dass die Lage des kritischen Punktes sich in der Nähe eines *festen Versicherungsjahres* befindet, ungeachtet des Eintrittsalters; bei der Individualprämie betraf diese feste Lage das Alter des Versicherten. Ueberdies wird der Begriff des *Grenzeintrittsalters* eingeführt; für Versicherte, deren Eintrittsalter dieses Grenzalter überschreitet, wird der kritische Punkt hinter das Ende der Versicherung verschoben, d. h. die Versicherung ist stets mehr lohnend, als eine Bank-Spareinlage. Die Lage das Grenzalters ist im grossen Masse *unabhängig* von einem der in der vorliegenden Arbeit untersuchten vier Leistungssystemen.

Die vorliegende Arbeit stellt eine Fortsetzung und weitere Entwicklung der vom Verfasser bereits veröffentlichten Untersuchungen dar. Ebenso, wie der Verfasser früher die Methoden der Sozialversicherungsmathematik auf die Privatversicherung zu übertragen versuchte, versucht er in der vorliegenden Arbeit manche Methoden der Privatversicherungsmathematik auf das Gebiet der sozialen Pensionsversicherung anzuwenden. Eine solche gegenseitige *Durchdringung* zweier Versicherungsgebiete, die im allgemeinen gesondert behandelt werden, scheint eine Quelle zur *Bereicherung* der Untersuchungsmethoden in der Versicherungsmathematik überhaupt zu sein. Insbe-

sondere will der Verfasser hoffen, dass die in der vorliegenden Arbeit dargestellten Untersuchungen die soziale Pensionsversicherung von neuem Standpunkte beleuchten und dass sie bei Unternehmungen, die auf der Entwicklungslinie der Sozialversicherung liegen, behilflich sein werden.

LITERATURA

1. B e r g e r A. Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik. II Teil str. VII + 274, J. Springer, Berlin 1925.
2. B e r l i n e r H. O obliczeniu taryfy należności za nabycie lat poprzedniej służby przez ubezpieczonych pracowników umysłowych. *Wiadomości Aktuarialne*, t. I, str. 39 — 118 i 163 — 200, Polski Instytut Aktuariu-szy, Warszawa 1933.
3. B o h l m a n n G. Technique de l'assurance sur la vie. *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, t. I, vol. 4, fasc. 4, str. 491 — 590, Gauthier-Villars Paris, B. G. Teubner-Leipzig 1911.
4. B ö h m e r P. E. Sparprämie und Risikoprämien. *Zeitschrift für die ge-samte Versicherungs-Wissenschaft*, B. X, str. 71 — 77, Deutscher Verein für Versicherungs-Wissenschaft, Berlin 1910.
5. B r a u n J. Oszczędność przymusowa i częściowe ubezpieczenie. Str. 63, Izba Przemysłowo-Handlowa w Sosnowcu, Sosnowiec 1931.
6. H o r o w i t z H. i F i s c h l o w i t z S t. Ochrona emigrantów w zakresie ubezpieczeń społecznych. Str. VI + 191, Instytut Spraw Społecznych, Warszawa 1936.
7. H ö c k n e r G. Das Deckungskapital im Lebensversicherungsvertrag und die Abfindungswerte bei vorzeitiger Vertragslösung. *Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungs-Wissenschaft*. Heft XVI, str. 72, Berlin 1909.
8. K o ź n i e w s k i A. Czym jest bilans ubezpieczeniowo techniczny? *Przegląd Ubezpieczeń Społecznych* X, zesz. 9, str. 568 — 576, Warszawa 1935.
9. L o e w y A. Versicherungsmathematik. Str. V + 224, J. Springer, Ber-
lin 1924.
10. Ł a z o w s k i J. Wstęp do nauki o ubezpieczeniach. Str. 343 + 2 nlb. Powszechny Zakład Ubezpieczeń Wzajemnych, Warszawa 1934.
11. P i e t s c h G. Die Vermögensverteilung bei der Auflösung von Pen-sionskassen mit Durchschnittsbeiträgen. *Zeitschrift für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft*, B. IX, str. 723 — 736, Deutscher Verein für Versicherungs-Wissenschaft, Berlin 1909.
12. Podstawy techniczne ubezpieczenia emerytalnego pracowników umysłowych, 4,5%. Str. 106, Zakład Ubezpieczeń Społecznych, Warszawa 1935.

13. P r e s b u r g e r M. Zasada równoważności w ubezpieczeniu kolektywu. *Przegląd ubezpieczeniowy*, zes. 6, str. 260 — 283, Związek Prywatnych Zakładów Ubezpieczeń w Polsce, Warszawa 1935.
14. P r e s b u r g e r M. Gruppenversicherung gegen Durchschnittsprämie. *Das Versicherungsarchiv*, nr. 6, str. 468 — 488, Wien 1936.
15. P r e s b u r g e r M. Die Gruppenversicherung gegen Durchschnittsprämie als Ergänzung der Sozialversicherung. *Comptes Rendus du Onzième Congrès International d'Actuaires a Paris*, vol. II, str. 347 — 353, Paris 1937.
16. P r e s b u r g e r M. i W a n a t o w s k i A. O kalkulacji emerytalnych ubezpieczeń społecznych. *Przegląd Ubezpieczeń Społecznych*, VIII, zes. 8, str. 433 — 438, Warszawa 1933.
17. S a s o r s k i S t. Niedojrzałe projekty. *Przegląd Ubezpieczeń Społecznych* VI, zes. 6, str. 161 — 166, Warszawa 1931.
18. W i m m e r E. Das Einzeldeckungskapital in der Kollektivversicherung. *Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker*, 32 Heft, str. 135 — 210, Bern 1936.

H. GRENIEWSKI i E. VIELROSE

Próba badania wpływu koniunktury gospodarczej na urządzenia emerytalne

Rozdział I

Zadanie, metoda i założenia podstawowe

1. UWAGI WSTĘPNE

W literaturze ubezpieczeniowej wskazywano już na istnienie pewnego, względnie nowego kierunku, a mianowicie tendencji uwzględniania tzw. „krzywych gospodarczych” w rachunkach ubezpieczeniowych (patrz Greniewski, 6). Niektóre prace aktuarialne ogłoszone w okresie lat ostatnich, potwierdzają istnienie, a nawet dalszy rozwój tej tendencji. Wyrazem tego ma być również praca niniejsza.

Podajemy fragmentaryczne rezultaty badań wstępnych nad wpływem czynników koniunkturalnych na stronę finansową urządzeń emerytalnych. Postawione zadanie nie było, o ile nam wiadomo, opracowane w literaturze aktuarialnej. Praca niniejsza stanowi na tym terenie niemal „pierwszy krok”. Tą właśnie okolicznością chcielibyśmy usprawiedliwić prymitywność metody i skromność rezultatów.

Obliczenia, których rezultaty dalej omawiamy, oparto na wzorach, wprowadzonych w dwu rozprawach H. Greniewskiego (patrz literatura, 4 i 5). Obie te prace zostały (z konieczności) sformułowane w ten sposób, że do dokładnego ich zrozumienia potrzeba pewnego

zasobu wiadomości matematycznych i umiejętności abstrakcyjnego myślenia, natomiast praca niniejsza powinna być dostępna szerszemu kręgowi czytelników. Wydaje się więc wskazane zorientować czytelnika w kilku słowach w treści prac poprzednich bez odwoływania się do fachowych wiadomości. W pracach tych został udowodniony szereg twierdzeń, dotyczących oprocentowania i dyskontowania złożonego, kapitalizacji rent, rezerw technicznych i składek. Wszystkie te twierdzenia są spełnione nie tylko w wypadku stałej w czasie stopy oprocentowania (wypadek klasyczny zwykle rozważany), ale również i w przypadku zmiennej niemal dowolnie stopy oprocentowania. Mając do dyspozycji zapas wzorów tak ogólnych, można bez trudności i komplikacyj w samych rachunkach cyfrowych wykonywać prace aktuarialne nie tylko, jak to się zwykle czyni, dla stałej stopy technicznej oprocentowania ale również i dla stopy technicznej, podlegającej zmianom z biegiem czasu.

Dla uzupełnienia tych ogólnikowych informacji o systematycznym układzie, wyłożonym w pracach poprzednich, należałoby jeszcze wspomnieć o jego strukturze. Okazało się, że twierdzenia zasadnicze, dotyczące operacji finansowych (mianowicie zasadnicze tezy o składkach i o rezerwach operacji finansowych), dają się w całości oprzeć na twierdzeniach, dotyczących kapitalizacji rent. Ostatnio wymienione twierdzenia dają się z kolei w całości zredukować do praw oprocentowania i dyskontowania złożonego. Prawa te można oprzeć na niewielkiej liczbie bardzo elementarnych zasad, dotyczących mierzenia odcinków czasowych, lub (co w gruncie rzeczy na jedno wychodzi) mierzenia odcinków na linii prostej. Wspomniane zasady mierzenia są tak dalece intuicyjne, że o słuszności ich można się przekonać przy pomocy bardzo łatwych do wykonania rysunków. Można też potraktować zasady te w sposób bardziej formalny (w przeciwieństwie do sposobu intuicyjnego) i wyłożyć je aksjomatycznie; okazuje się wówczas, że wszystkie zasady mierzenia odcinków na prostej redukują się do jednego zupełnie elementarnego aksjomatu.

Poczuwamy się do miłego obowiązku podziękowania p. doktorowi W. W i l k o s z o w i, profesorowi Uniwersytetu Jagiellońskiego za cenne rady w sprawach metodologicznych, p. doktorowi H. H o r o w i t z o w i oraz p. profesorowi Zb. Ł o m n i c k i e m u, członkom Rady Naukowej Instytutu Spraw Społecznych, za wskazówki, których w związku z pracą niniejszą zechcieli nam łaskawie udzielić, i p. L. L a n d a u o w i za cenną pomoc przy ustalaniu sche-

matycznego przebiegu cyklu koniunkturalnego. Pan mgr H. Goldstern zechciał łaskawie wziąć na siebie niewdzięczny trud przeprowadzenia kontroli rachunków cyfrowych.

2. ZADANIA

Zadanie, które sobie postawiliśmy, polega na zbadaniu wpływu zmian koniunkturalnych zarobków, liczby ubezpieczonych i stopy oprocentowania lokat na wysokość składki i przebieg rezerw wieczystego urzędzenia emerytalnego z ogólną składką przeciętną. Jak już wspomnieliśmy w uwagach wstępnych, zadanie to zostało w ramach pracy niniejszej opracowane tylko przyczynkowo. Zamiast zbadać ogólny problem wpływu czynników koniunkturalnych na urzędzenia emerytalne, autorzy ograniczyli się do rozważenia problemu prostszego, mianowicie zagadnienia wpływu niektórych czynników koniunkturalnych na urzędzenia emerytalne o budowie bardzo uproszczonej.

3. METODA

Rozpowszechnione, niestety, mniemanie, że nauki społeczne badają bezpośrednio otaczającą nas rzeczywistość, należy zaliczyć do metodologii naiwnej. Rzeczywistość jest zbyt skomplikowana, aby można ją było dokładnie opisać i zbadać. Przedmiotem teorii naukowej jest zwykle twór sztuczny, fikcyjny, jakaś „rzeczywistość uproszczona” (= model, = schemat, przy pewnym rozumieniu tych wyrażen).

Np. w dalszych wywodach nie mamy do czynienia z efektywnym przebiegiem rezerw danego urzędzenia emerytalnego w przyszłości, gdyż przebieg ten jest z konieczności nieznanym, ale z pewnym sztucznie skonstruowanym przebiegiem, podlegającym dość krańcowo wyschematyzowanym wahaniom koniunkturalnym.

Zagadnienia tego rodzaju, jak badanie wpływu czynników koniunkturalnych na urzędzenia emerytalne, czy też na inne urzędzenia finansowe, można traktować w dwojaki sposób:

- (a) badając zagadnienie empirycznie, na podstawie danych statystycznych, dotyczących rzeczywistego przebiegu zjawiska w przeszłości (por. Podstawy techniczne ubezpieczenia pracowników umysłowych, literatura 12, str. 15 — 17 oraz U r e c h, literatura 14), przy czym za przedmiot badania empirycznego wybieramy jakieś urzędzenie typowe i zarazem konkretne (istniejące w rzeczywistości społecznej),

(b) badając zagadnienie dedukcyjnie, a więc przyjmując pewne założenia mniej lub więcej sztuczne, dotyczące przebiegu w czasie czynników koniunkturalnych, z których to założeń wnioskujejmy następnie o przebiegu (teoretycznym) zjawiska; przebieg ten będzie się na ogół różnił od rzeczywistego. Należy przy tym zauważyć, że układ założeń, stanowiących podstawę wywodów dedukcyjnych, może mieć bądź charakter ogólny, bądź też wyznaczać cyfrowo wartości pewnych zjawisk ilościowych.

Obie metody (tj. a i b) mogą być stosowane z pożytkiem obok siebie i niezależnie od siebie, ponieważ oświetlają one badane zagadnienie z różnych punktów widzenia. Badanie empiryczne nie może zastąpić badania dedukcyjnego i na odwrót.

Badanie empiryczne opiera się na rzeczywistym (zresztą zwykle wyschematyzowanym) przebiegu zjawiska w pewnym okresie czasu. Jednakże na przebieg tego zjawiska mogą wpływać — i z reguły wpływają — oprócz czynników koniunkturalnych jeszcze inne czynniki (strukturalne, przypadkowe itd.). Wpływ czynników koniunkturalnych będzie więc zakłócony wpływem innych czynników, których nie jesteśmy w stanie wyodrębnić.

Badanie dedukcyjne natomiast pozwala na skonstruowanie przebiegu zjawiska nie zakłóconego wpływem żadnych innych czynników poza czynnikami koniunkturalnymi, których przebieg w czasie został uprzednio z góry ustalony. Ponieważ jednak badanie ma na celu względy praktyczne, schematyzacja rzeczywistości nie powinna iść za daleko; założenia, przyjęte jako podstawa badania dedukcyjnego, nie powinny więc zbyt odstępować od rzeczywistości. Badania tego rodzaju pozwalają na czynienie założeń, dotyczących przebiegu danego zjawiska w przyszłości, co jest oczywiście niemożliwe przy badaniu empirycznym.

W niniejszej pracy będziemy stosowali wyłącznie badanie dedukcyjne. Założenia nasze nie będą miały jednak charakteru ogólnego, lecz będą wyznaczały cyfrowo przebieg odnośnych zjawisk. Przedstawione poniżej wywody dedukcyjne będą tylko przykładami liczbowymi i nie doprowadzą nas niestety do ogólnych, analitycznie wyrażalnych twierdzeń matematyki ubezpieczeniowej.

Zamiast przeprowadzić ogólne badania analityczne, dotyczące dowolnego urządzenia emerytalnego, spełniającego pewien układ warunków, ograniczyliśmy się do skonstruowania przykładów liczbowych. Metoda ta jest dość często stosowana przez aktuariuszy. Za-

letą jej jest naoczność i „konkretność” rezultatów, wadą zaś oparcie ich na zbyt wąskiej podstawie i niebezpieczeństwo pomieszania momentów przypadkowych z istotnymi.

Wyobraźmy sobie, że budujemy teorię, dotyczącą pewnej dziedziny zjawisk. Teorię tę opieramy na jakimś układzie założeń, które uważamy za niewątpliwe, czy też za dostatecznie mało wątpliwe dla naszych celów. Może się jednak zdarzyć, że pewne zagadnienie, dotyczące danej dziedziny zjawisk, nie da się rozwiązać w oparciu tylko o układ założeń, uznanych za „niewątpliwe”¹. Do rozwiązania zagadnienia potrzebne jest jeszcze pewne założenie wątpliwe — pewna hipoteza. Niekiedy nakazem rozsądku jest sformułowanie dodatkowej hipotezy w kilku (nierównoważnych między sobą) wariantach, a w konsekwencji dopuszczenie pewnego „rozwidlenia” schematu przez budowę kilku równoległych odgałęzień. Omawiany sposób postępowania znajduje nieraz zastosowanie w zakresie zagadnień matematyki stosowanej, co więcej, ten sposób postępowania wydaje się w matematyce stosowanej nieraz bardziej naturalny niż w matematyce czystej. Przypuśćmy, że mamy opracować bilans techniczny pewnej operacji finansowej np. pewnego urządzenia emerytalnego. Rachunki bilansowe opieramy na pewnym układzie założeń (zasady matematyki ubezpieczenia emerytalnego i podstawy techniczne), uznanych za dostatecznie pewne, lub wyrażając się ściślej — za dostatecznie mało wątpliwe dla celów praktyki ubezpieczeniowej. Zdarza się jednak nieraz, że dla zbudowania bilansu niezbędne jest przyjęcie w pewnej kwestii założenia, budzącego wątpliwość, np. w pewnych wypadkach wysokość stopy technicznej oprocentowania lub przebieg w czasie dopływu nowych ubezpieczonych jest specjalnie trudny do ustalenia. W tych wypadkach przyjmuje się równoległe założenie sformułowane w kilku niezgodnych między sobą wariantach i w związku z tym otrzymuje się również i bilans techniczny w różnych wariantach, a nie w brzmieniu, uznanym za jedynie słuszne (por. literatura, 3; str. 20, 33, 41 i 47, oraz literatura, 9).

W podobny sposób postępujemy w pracy niniejszej. Przyjmujemy za podstawę rozważań pewien układ założeń, dotyczących badanego urządzenia emerytalnego i cyklów koniunkturalnych, zachodzących w gospodarstwie narodowym, w skład którego wchodzi urzą-

¹ Nie będziemy tu rozważali, czy „niewątpliwość” tych postulatów ma charakter użyteczny, konwencjonalny, czy też intuicyjny.

dzenie emerytalne. Oprócz tych założeń potrzebne jest do wykonania rachunków jeszcze jedno — trzeba ustalić, w jakiej fazie cyklu koniunkturalnego zaczyna funkcjonować dane urządzenie emerytalne. W badaniu teoretycznym nie ma dostatecznej racji wybrania którejkolwiek z możliwych ewentualności, wobec czego w rozdziale II niniejszej pracy, poświęconym wpływowi stopy oprocentowania, omawiane założenie zostało sformułowane w czterech równorzędnych wariantach, odpowiadających czterem fazom cyklu koniunkturalnego. W związku z tym obliczenia zostały przeprowadzone równoległe dla wszystkich czterech wariantów (A, B, C i D).

Interesującą rzeczą bywa zestawienie ze sobą rezultatów otrzymanych w obrębie poszczególnych wariantów. W tym celu najlepiej jest wybrać jeden z wariantów za podstawę porównania. W celu uzyskania takiej podstawy konstruujemy w dalszych wywodach wariant bezkoniunkturalny urządzenia emerytalnego, gdyż przez porównanie poszczególnych wariantów koniunkturalnych z wariantem bezkoniunkturalnym najlepiej uwydatni się wpływ (interesujący nas przede wszystkim w pracy niniejszej) czynników koniunkturalnych na składkę i rezerwy ubezpieczeń emerytalnych.

Ciąg dalszy pracy niniejszej podzielony został na dwa rozdziały (II i III). W rozdziale II badamy wyłącznie wpływ wahań koniunkturalnych stopy oprocentowania lokat, zakładając, że jedynie ta stopa podlega wahaniom koniunkturalnym, gdy inne elementy urządzenia emerytalnego (liczby ubezpieczonych czynnych, oraz ich zarobki) zachowują bezkoniunkturalną sztywność. W rozdziale III badamy łączny wpływ wahań koniunkturalnych stopy oprocentowania, liczby ubezpieczonych czynnych (stanu zatrudnienia) i zarobków (płac i czasu zatrudnienia). Badania, zawarte w rozdziale II są szczegółowe o tyle, że rozważane są ewentualności rozpoczęcia działalności urządzenia emerytalnego w czterech fazach koniunktury (w każdej z nich osobno), gdy w rozdziale III (wariant koniunkturalny) zakładamy po prostu, że początek działalności urządzenia emerytalnego pokrywa się z początkiem jednej z faz cyklu koniunkturalnego. Z drugiej strony jednak badania, zawarte w rozdziale III, są pod pewnym względem bardziej szczegółowe niż rozważania rozdziału II. Mianowicie w rozdziale II poprzestajemy na przyjęciu a priori pewnego przebiegu wydatków urządzenia emerytalnego, natomiast w rozdziale III obliczamy ten przebieg, opierając się na szczegółowych podstawach technicznych.

Pewne założenia są wspólne dla obu rozdziałów. Te właśnie założenia zostaną sformułowane jeszcze w obrębie rozdziału niniejszego.

4. ZAŁOŻENIA, DOTYCZĄCE KONIUNKTURY

Fikcyjne urządzenie emerytalne, stanowiące przedmiot rozważań, będziemy nazywali krótko „urządzeniem E”.

Przyjmujemy (dla wszystkich wariantów koniunkturalnych), że w gospodarstwie narodowym, w którego skład wchodzi urządzenie E, cykle koniunktury gospodarczej przebiegają według następujących założeń:

- I₁. Każdy cykl koniunkturalny składa się z czterech faz: (a) poprawa, (b) ożywienie, (c) recesja, (d) depresja.
- I₂. Każda faza cyklu trwa dwa lata.
- I₃. Początek każdej fazy każdego cyklu przypada na połowę roku operacyjnego urządzenia E.
- I₄. Stopa bieżącego oprocentowania całości lokat urządzenia E wynosi stale w poszczególnych fazach:

Faza	Stopa p. a. postnumerando
poprawa	I rok $3\frac{1}{2}\%$
	II rok $5\frac{1}{2}\%$
ożywienie	$7\frac{1}{2}\%$
recesja	I rok $5\frac{1}{2}\%$
	II rok $3\frac{1}{2}\%$
depresja	$1\frac{1}{2}\%$

Z powyższych założeń wynika samo przez się, że:

1. każdy cykl koniunkturalny jest ośmioletni,
2. przeciętna stopa oprocentowania lokat (rozciągnięta na jeden cykl i ważona odcinkami czasu) wynosi $4\frac{1}{2}\%$ p. a. postnumerando,
3. amplituda stopy oprocentowania lokat jest stała i wynosi 6% p. a. postnumerando,
4. trend stopy oprocentowania jest poziomy.

Układ powyższych założeń wymaga szczegółowego wyjaśnienia. Należy przede wszystkim zauważyć, że przy formułowaniu założeń została zastosowana zupełnie krańcowa schematyzacja rzeczywistości. Dość obszerne materiały z zakresu statystyki gospodarczej zdają się wprawdzie wskazywać na istnienie cyklów koniunkturalnych, jednakże nigdy cykle te nie są tak stale regularne i wyraziste, jakby to wynikało z założeń wyżej przyjętych.

Podajemy tu opis przebiegu koniunkturalnego, zaczerpnięty z artykułu prof. E. L i p i ń s k i e g o (patrz literatura, 8).

Okres kumulacyjnie występującej, wzmożonej aktywności gospodarczej, nazywamy okresem ożywienia. Jest to okres spotęgowanej produkcji i rozszerzonych operacji gospodarczych na rynku. Ponieważ regulatorem aktywności przedsiębiorcy są szanse zdobycia zysku z ulokowanego kapitału, przeto samo ożywienie może się odbyć jedynie pod warunkiem zwiększenia się szans zysku.... Rozmiary zysku aktualne lub oczekiwane są regulatorem rozmiarów operacji gospodarczych. Stąd rzecz można, że ceny aktualne lub oczekiwane są czynnikiem rozstrzygającym o rozmiarach produkcji przedsiębiorcy na rynku. Szczególnie wielkie znaczenie posiadają oczekiwane, przewidywane wahania cen.

Wzrost cen jest więc zazwyczaj koniecznym warunkiem istnienia ożywienia Wzrost cen nie może być równomierny, ponieważ czynniki, wywołujące procesy wzrostu gospodarczego w ogóle, również nie działają równomiernie. Ważne znaczenie przypada tu tzw. „kreacji” kredytu. Istnieje w pewnej mierze możliwość kreowania przez kredyt dodatkowej sumy siły nabywczej, ponad miarę istniejących w społeczeństwie oszczędności pieniężnych. Poszczególne grupy przedsiębiorców w sposób nierównomierny korzystają z kredytów tego typu, ci zaś, którzy korzystać mogą, czynią na rynku dodatkowe zakupy, realizują dodatkowe operacje gospodarcze, zwiększają zapotrzebowanie na towar ponad miarę istniejącego zaofiarowania, co wywołuje na poszczególnych rynkach podniesienie cen.

Z braku przejrzystości rynku i niemożliwości racjonalnego przystosowania produkcji do zapotrzebowania ujawnia się w pewnej fazie nadprodukcja, czyli zerwanie nieprzerwanego dotychczas kołobieżu towarów, i nieprzerwanego łańcucha wpłat i wypłat. Dalsze ożywienie hamowane jest przez podnoszenie się kosztów poszczególnych składników produkcji: cena surowców rośnie, rosną płace. Magazyny są pełne, ponieważ poprzedni wzrost cen wywoływał tzw. zakupy antycypacyjne, tzn. zakupy, dokonywane w przewidywaniu dalszej wyżki cen. Nieprzerwany dotychczas łańcuch wymiany towarów ulega zerwaniu, tu i ówdzie ujawniać się zaczyna brak zbytu, wpływy ze sprzedaży towarów nie odbywają się z taką samą jak dawniej regularnością, stąd niemożność wywiązania się z zobowiązań płatniczych, konieczność wykorzystania wszystkich źródeł kredytowych, zmniejszająca się płynność banków, wzrost stopy dyskontowej, ograniczenie kredytów, zatrzymanie się procesu wzrostu cen, w końcu spadek cen, spadek kursów na giełdzie, konieczność likwidacji zapasów, ograni-

czenie produkcji, niewypłacalność, bankructwa itp.... Okres spadku nazywamy recesją.

Po fazie spadku (recesji) następuje pewien spokojniejszy okres stagnacji, tzw. depresja. W tej fazie życie gospodarcze przystosowuje się do przesunięć, przekształceń i zmian, które dokonały się w okresie ożywienia: ceny są niskie, działalność przemysłowa nieznaczna, rozmiary operacji gospodarczych małe, stąd duże zasoby nie wykorzystanych kredytów w bankach, niska stopa procentowa i dyskontowa. Sama depresja w pewnej fazie swego trwania, kiedy magazyny są wyczerpane, zaczyna się odczuwać pewien głód towarów, wytwarza podłoże do poprawy. Pomyślny układ warunków zewnętrznych na rynku krajowym albo zagranicznym: dopływ kredytów długoterminowych z zagranicy, spokój polityczny oraz t. p. korzystne warunki, dają bodziec wzmożonej działalności gospodarczej, depresja przekształca się na poprawę. Poprawa zamienić się może na ożywienie, jeżeli tempo operacji gospodarczych rośnie szczególnie szybko, powstają nowe gałęzie wytwórczości, rzucany jest na rynek towar, następuje zmiana we wzajemnym układzie sił wytwórczych. Rozpoczyna się nowy cykl.

Badając układ sił gospodarczych, działających w poszczególnych fazach cyklu, możemy wyodrębnić najbardziej charakterystyczne symptomy, których istnienie w pewnym wzajemnym stosunku konstytuuje właśnie daną fazę cyklu. Ponieważ zmiany w natężeniu działalności gospodarczej od rozmiarów której zależy charakter przebiegu cyklu gospodarczego, w dzisiejszym gospodarstwie pieniężno-kapitalistycznym ujawniają się przede wszystkim na rynku, przeto zmiany wartości rynkowych mogą być uważane za najbardziej typowe symptomy przebiegu koniunktury. Rozróżniamy trzy rynki: rynek akcji i obligacji, wyrażający się w kursach; rynek towarowy, wyrażający się w ruchu cen i rynek pieniężny (wahania stopy procentowej i dyskontowej).

Rozmiary operacji gospodarczych zależą od sumy siły nabywczej, którą ulokowano w transakcjach na tym lub innym rynku. Otóż, poczynając od końcowego okresu depresji, kiedy procesy produkcyjne są słabe i przedsiębiorstwa wytwórcze nie występują z większymi żądaniami w stosunku do rynku pieniężnego, natomiast ogólna sytuacja pozwala przypuszczać, iż w najbliższej przyszłości nastąpi okres lepszej koniunktury, podnosi się kurs akcji, ponieważ wolna gotówka i rozporządzalne kredyty są lokowane w transakcjach giełdowych. Inaczej jest w czasie ożywienia: procesy produkcyjne tutaj są bardziej intensywne, transakcje towarowe rozległe, kredyty i wolne zasoby pieniężne lokują się na rynku towarowym, wzrasta poziom cen, natomiast kursy akcji przestają ujawniać tendencję zwykłą. Ze względu na wielkie tempo wzrostu transakcyj towarowo-produkcyjnych, a więc i wielkie obciążenie siły kredytowej banków, w r a s t a s t o p a p r o c e n t o w a i d y s k o n t o w a. Stopa dyskontowa osiąga najwyższy punkt w fazie napięcia, kiedy żądania kredytów są największe a wypłacalność słabnie.

Nie będziemy się tu zastanawiali, czy opis powyższy, ogłoszony przez prof. Lipińskiego w 1928 r. jest nadal w pełni aktualny,

zwłaszcza w odniesieniu do państw o znacznym udziale czynników publicznych w życiu gospodarczym.

Dla celów niniejszej pracy sprawa mechanizmu koniunktury jest raczej obojętna; zaznaczamy tylko, że istnieje pokaźna liczba teorii koniunktury, przypisujących różnym czynnikom decydujące znaczenie przy powstawaniu cykli koniunkturalnych (por. Thorp and Mitchell, literatura 13; str. 37, 39 — 40 oraz Haberler, literatura 7; str. 3 — 4).

Cykle koniunkturalne różnią się między sobą pod względem długości całkowitej rozpiętości wahań. Zresztą efektywne wyznaczenie początku i końca cyklu na podstawie danych statystycznych natrafia na dość duże przeszkody tak, że nawet pod tym względem istnieją pewne rozbieżności. Wielu badaczy przyjmuje jednak jako przeciętny czas trwania cyklu 8 lat, wobec czego w pracy niniejszej przyjęto również cykle 8-letnie. Czas trwania poszczególnych faz cyklu koniunkturalnego także nie jest jednakowy; faza poprawy oraz faza recesji trwają przeciętnie stosunkowo krótko, natomiast faza ożywienia i faza depresji są przeciętnie znacznie dłuższe.

Obliczenia oparte na przebiegu koniunktury w 17 państwach w latach 1890 — 1925 wykazały, że na ożywienie przypada przeciętnie 39,3% czasu trwania cyklu, na recesję i poprawę łącznie 23,9%, na depresję 36,8%. Dokładniejsze badania wykazały, że przy tendencji długookresowej zniżkowej (trend opadający) okresy depresji są dłuższe niż okresy ożywienia, przy tendencji wyżkowej (trend rosnący) natomiast zachodzi zjawisko odwrotne. (Por. Thorp and Mitchell, literatura 13, str. 63 — 66).

Przejdźmy teraz do komentarzy i wyjaśnień szczegółowych, odnoszących się do poszczególnych założeń:

Ad I₁. Mamy tu do czynienia z klasycznym już niemal podziałem cyklu koniunkturalnego, wprowadzonym przez teorię koniunktury gospodarczej.

Ad I₂. Okresy trwania poszczególnych faz w danym cyklu, a także czasy trwania analogicznych faz w różnych cyklach, nie są w rzeczywistości nigdy stałe, jak już wspomnieliśmy wyżej.

Ad I₃. W rzeczywistości, jak już wspomnieliśmy, nie ma ostrych granic między sąsiednimi fazami w obrębie cyklu, ani też nie ma takich granic między sąsiednimi cyklami. Jeżeli jednak formułujemy założenia, które stanowić mają podstawę rachunków aktuarialnych, to przyjęcie takich ostrych, choć sztucznych granic wydaje się niezbędne.

Ad I₄. Należy starannie odróżniać od siebie co najmniej cztery różne stopy oprocentowania:

- (a) stopa na rynku kapitałów (ew. rynku pieniężnym),
- (b) rentowność nowych lokat, dokonywanych przez urządzenie E,
- (c) rentowność ogółu lokat urządzenia E,
- (d) stopa techniczna, stanowiąca podstawę obliczenia składek i rezerw.

Związek między poszczególnymi stopami jest dość luźny. Stopa (a) nie pokrywa się z zasady ze stopą (b), choćby dlatego, że wpływ czynników, kierujących polityką kredytową państwa, na urządzenia emerytalne jest zazwyczaj silniejszy od bezpośredniego wpływu sytuacji na rynku kapitałów. Stopa (c) nie pokrywa się z reguły ze stopą (b), ani zresztą ze stopą (a), ze względu na istnienie lokat o tzw. „stałym oprocentowaniu”. Wreszcie stopa (d) nie pokrywa się z zasady z żadną z trzech pozostałych; stopy (a), (b) i (c) podlegają bowiem niestannym niemal zmianom w czasie, gdy stopa (d) jest sztywną, hipotetyczną wielkością. W pracy niniejszej posuwamy schematyzację rzeczywistości aż tak daleko, że identyfikujemy ze sobą stopy (c) i (d), zakładając przy tym, że stopa (c) podlega regularnym wahaniom koniunkturalnym.

Można sobie jednak wyobrazić portfel lokat, który w przybliżeniu spełnia przyjęte przez nas założenia, dotyczące przebiegu stopy oprocentowania lokat. Zachodzi to mianowicie wtedy, gdy

1. cykl przebiega prawidłowo,
2. wszystkie fundusze ubezpieczeniowe zostały ulokowane w obligacjach o elastycznym oprocentowaniu.

Przykłady tego rodzaju papierów o elastycznym oprocentowaniu podaje M. O r ł o w s k i (patrz literatura, 10).

Emitowane są obligacje, które poza stałym oprocentowaniem, mają prawo do określonego dodatkowego dochodu w postaci udziału w zyskach spółki w zależności od wysokości obrotów spółki (np. obligacje Citroena z 1926 r.); a vice-versa istnieją akcje uprzywilejowane o stałej dywidendzie, w razie zaś braku odpowiednich dochodów, fundusze potrzebne na uzupełnienie dywidendy do wysokości określonej statutem, czerpane są z rezerw.

Wydaje się korzystne zestawienie sztucznie wyschematyzowanego przebiegu lokat z analogicznym przebiegiem efektywnym. W tym właśnie celu na wykresie I przedstawiono nasz schematyczny przebieg stopy oprocentowania, zaś na wykresie II rozwój rentowności lo-

kat czterech wybranych szwajcarskich towarzystw ubezpieczeń na życie w okresie 1858 — 1911 (patrz D u m a s, 2).

Nadmienimy jeszcze, że dla wariantów bezkonijunkturalnych urządzenia E przyjmujemy założenie następujące:

I. Stopa bieżącego oprocentowania całości lokat urządzenia E wynosi niezmiennie i wieczyście $4\frac{1}{2}\%$ p. a. postnumerando.

5. ZAŁOŻENIA, DOTYCZĄCE URZĄDZENIA EMERYTALNEGO

Zakładamy, że urządzenie E spełnia następujący układ warunków:

I₅. Wszelkie wpłaty i wypłaty dokonywane są tylko raz rocznie, a mianowicie w połowie roku operacyjnego,

I₆. Składka, wyrażona w procentach sumy rocznych zarobków, stanowiących podstawę jej wymiaru, jest wieczyście stała.

I₇. Składka jest wieczyście i całkowicie ściągalna.

I₈. Urządzenie E jest zrównoważoną operacją finansową.

Założenia powyższe wymagają również pewnych komentarzy.

Ad I₅. Mamy tu do czynienia z pewną schematyzacją terminów płatności, stosowaną bardzo często przez aktuariuszy w tej lub innej postaci. Upraszczamy rzeczywistość, zakładając, że wszystkie wpłaty i wypłaty odbywają się internumerando, w połowie jednostki czasu (w danym wypadku w połowie roku operacyjnego).

Ad I₆. Założyliśmy, że mamy do czynienia z systemem finansowym składki o stopie stałej dla wszystkich pokoleń. Nie będziemy tu dyskutowali zalet ani wad aktuarialnych i ekonomicznych tego systemu. Zaznaczymy tylko, że jest on konstrukcją poniekąd klasyczną i że znalazł w zasadzie zastosowanie w Polsce w ubezpieczeniu emerytalnym pracowników umysłowych i w ubezpieczeniu emerytalnym robotników.

Ad I₈. Każde urządzenie emerytalne, obejmujące nieograniczoną liczbę pokoleń (np. urządzenie E, jak to wynika z powyższych założeń), jest finansową operacją wieczystą, a więc jego efektywny przebieg nigdy nie jest w całości znany. Zawsze zresztą twierdząc, że dane urządzenie emerytalne tego rodzaju jest operacją finansową zrównoważoną lub nie zrównoważoną, opieramy się na założeniach, dotyczących od pewnej chwili czasu na przyszłość tylko przewidywanego (technicznego) przebiegu operacji, a nie jej przebiegu efektywnego.

Chwilę, w której zaczyna działać urządzenie E (np. początek doby, w której wchodzi w życie ustawa, normująca urządzenie E) będziemy nazywali „chwilą zerową”, lub krócej jeszcze „chwilą 0”.

Przełom pierwszego i drugiego roku działalności urządzenia E będziemy nazywali „chwilą 1”. W związku z założeniem I_5 wpłaty i wypłaty następują w chwilach:

$$\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, \dots$$

Bilanse techniczne mają być natomiast sporządzane zawsze na koniec roku operacyjnego, na chwile:

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

Dalsze założenia, stanowiące podstawę naszych rozważań liczbowych, będą już różne dla każdego z następujących rozdziałów.

Rozdział II

Wpływ stopy oprocentowania

1. ZAŁOŻENIA

Oprócz układów założeń I_1 — I_4 przyjmujemy jeszcze założenia następujące:

II₁. Roczna suma zarobków, stanowiących podstawę wymiaru składki na rzecz urządzenia E, jest wiecześnie stała.

II₂. W okresie pierwszych 62 lat działalności urządzenia E roczna suma wydatków rośnie (dane cyfrowe zawiera zestawienie 1.) i stabilizuje się następnie wiecześnie na poziomie 113,27‰ sumy rocznych zarobków, stanowiących podstawę wymiaru składki.

W związku z założeniem II₁ należy zauważyć, że wyklucza ono łączne wahania koniunkturalne liczby ubezpieczonych, czasu zatrudnienia i płac. Będziemy mieli zatem do czynienia w obrębie niniejszego rozdziału tylko z wahaniami koniunkturalnymi stopy oprocentowania. W związku z założeniem II₂ zaznaczyć trzeba, że, jak wiadać z zestawienia 1., mamy do czynienia z urządzeniem emerytalnym o bardzo skromnych początkowo wydatkach (ca 0,25% zarobków w pierwszym roku działalności), które jednak rosną dość szybko (ca 5% zarobków w 18-ym i 19-ym roku działalności) i osiągają stan nasycenia (stabilizację wydatków) po upływie 61 lat działalności na poziomie, wynoszącym ca 11,3% zarobków. Przy ustalaniu krzywej wydatków urządzenia E rolę pomocniczą odegrała praca P r e s s b u r g e r a i W a n a t o w s k i e g o (literatura, 11).

Zest. 1. Wydatki roczne urzędzenia E

w $\frac{0}{00}$ $\frac{0}{00}$ sumy rocznych zarobków

Rok	Wydatki	Rok	Wydatki
1	2,54	41	99,34
2	2,54	42	100,85
3	3,55	43	101,88
4	5,32	44	103,39
5	7,60	45	104,40
6	11,15	46	105,41
7	14,19	47	106,19
8	17,74	48	106,94
9	20,78	49	107,69
10	24,33	50	108,47
11	27,36	51	109,22
12	30,40	52	109,98
13	32,94	53	110,75
14	36,49	54	111,50
15	39,53	55	112,00
16	42,56	56	112,26
17	45,11	57	112,52
18	48,14	58	112,77
19	51,18	59	112,77
20	54,23	60	113,01
21	56,75	61	113,01
22	59,38	62	113,01
23	62,33	63	113,27
24	64,87	64	"
25	67,41	65	"
26	69,93	66	"
27	72,47	67	"
28	75,01	68	"
29	77,03	69	"
30	79,32	70	"
31	81,60	71	"
32	83,62	72	"
33	85,65	73	"
34	87,43	74	"
35	89,20	75	"
36	91,22	76	"
37	93,25	77	"
38	94,78	78	"
39	96,30	79	"
40	97,81	80	"

Rzut oka na układ założeń $I_1 - I_8, II_1 - II_2$ wystarcza, aby się przekonać, że układ ten nie przesądza, w której fazie koniunktury zaczyna funkcjonować urządzenie E. Potrzebne tu jest jeszcze założenie dodatkowe. Ze względów, wyłożonych w rozdziale I, założenie to formułujemy w czterech wariantach.

II₃. Pierwszy termin płatności w urządzeniu E pokrywa się z początkiem niżej wymienionej fazy cyklu koniunkturalnego:

wariant	faza
A	poprawa
B	ożywienie
C	recesja
D	depresja

Obliczenia składki i rezerw urządzenia E zostaną zatem przeprowadzone w czterech równoległych wariantach: A, B, C i D. Aby uzyskać podstawę porównania powyższych wariantów, zostanie jeszcze, zgodnie z wywodami poprzedniego rozdziału, skonstruowany wariant bezkoniunkturalny (zwany dalej krótko „wariantem O”), oparty na następującym układzie założeń

$$I, I_5 - I_8, II_1 - II_2,$$

będzie to wariant, przystosowany do tradycyjnych metod matematyki ubezpieczeń społecznych (stała stopa oprocentowania, stała podstawa wymiaru składki). Przebieg stopy oprocentowania dla poszczególnych pięciu wariantów podaje zestawienie 2.

2. OPIS REZULTATÓW

Składkę dla każdego z pięciu rozważanych wariantów obliczono, dzieląc skapitalizowaną na daną chwilę wartość wszystkich wydatków przez skapitalizowaną na tę samą chwilę wartość zarobków, stanowiących podstawę wymiaru składki. Metodę tę stosuje się powszechnie, gdy mamy do czynienia ze stałą w czasie stopą oprocentowania. Ta sama metoda mogła być jednak zastosowana i do wariantów koniunkturalnych dzięki rezultatom wymienionej już wyżej pracy Greniewskiego (literatura 5, porównać twierdzenie 105). Wyniki obliczeń podaje zestawienie 3.

W zestawieniu 3. zwraca uwagę przede wszystkim niemal identyczny rezultat obliczeń dla wszystkich pięciu wariantów. Z pośród czterech wariantów koniunkturalnych najniższą składkę daje wariant A (wskaźnik 100,1), najwyższą zaś wariant C (wskaźnik 100,6); rozpiętość ta jest jednak, praktycznie rzecz biorąc, zbyt drobna, aby była godna uwagi. Okazuje się więc, że faza koniunktury, w której zaczyna działać urządzenie E, nie ma praktycznie doniosłego wpływu na wysokość składki technicznie wystarczającej.

Z e s t. 3. Składka urządzenia E

Wariant	Składka w stosunku do zarobku (‰)	Wskaźnik składki (podstawa-wariant 0)	Faza, na której początek przypada pierwszy termin płatności
1	2	3	4
A	50,07	100,1	Poprawa
B	50,21	100,4	Ożywienie
C	50,28	100,6	Recesja
D	50,14	100,3	Depresja
O	50,00	100,0	.

Mając już obliczoną wysokość składki można przystąpić do obliczenia przebiegu rezerwy składek. Rezerwa składek została obliczona w promillach rocznej sumy zarobków, stanowiących podstawę wymiaru składki. Wartości cyfrowe rezerw, w odstępach rocznych dla pierwszych siedemdziesięciu lat działalności urządzenia E, podaje zestawienie 4. Po pięciu latach działalności rezerwa osiąga wysokość następującą:

O	A	B	C	D
256,14‰	269,36‰	258,06‰	245,25‰	256,06‰

Zest. 4. Rezerwa skladek
w $\frac{0}{100} \frac{0}{100}$ sumy rocznych zarobków

Data bilan-sowa	W a r i a n t														
	A				B				C				D		Data bilan-sowa
	Cykl	Faza	Re-zerwa	Cykl	Faza	Re-zerwa	Cykl	Faza	Re-zerwa	Cykl	Faza	Re-zerwa			
(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(1)	
1	48,52	I	Poprawa	48,35	I	Ożywienie	49,43	I	Recesja	49,04	I	Depresja	47,95	1	
2	99,22	"	"	99,34	"	"	102,57	"	"	99,81	"	"	96,62	2	
3	151,17	"	Ożywienie	154,02	"	Recesja	157,16	"	Depresja	149,38	II	Poprawa	146,42	3	
4	203,64	"	"	211,97	"	"	209,89	II	Poprawa	196,92	"	"	199,03	4	
5	256,14	"	Recesja	269,36	"	Depresja	258,06	"	"	245,25	"	Ożywienie	256,06	5	
6	307,38	"	"	321,09	"	"	301,31	"	"	296,48	"	"	315,69	6	
7	357,82	"	Depresja	365,25	II	Poprawa	345,48	"	Ożywienie	353,16	"	Recesja	373,11	7	
8	406,90	"	"	403,30	"	"	394,36	"	"	413,39	"	"	422,85	8	
9	455,08	II	Poprawa	443,16	"	Ożywienie	450,49	"	Recesja	470,54	"	Depresja	462,98	9	
10	501,80	"	"	489,52	"	"	511,12	"	"	518,09	"	"	495,93	10	
11	547,52	"	Ożywienie	544,86	"	Recesja	567,79	"	Depresja	554,11	III	Poprawa	531,48	11	
12	592,20	"	"	606,12	"	"	613,47	"	"	582,45	"	"	575,64	12	
13	636,29	"	Recesja	663,08	"	Depresja	646,18	III	Poprawa	614,62	"	Ożywienie	630,86	13	
14	678,73	"	"	706,71	"	"	669,70	"	"	656,41	"	"	692,33	14	

15	719,97	"	734,96	III	697,28	"	Ożywienie	710,19	"	748,19	15
16	759,97		753,55		736,48			771,45		789,53	16
17	799,17	III	777,40	"	789,60	"	Recesja	826,87	"	814,30	17
18	837,03		814,32		850,97			866,22		828,53	18
19	873,49	"	866,06	"	905,25	"	Depresja	886,92	IV	848,15	19
20	908,48		926,70		941,85			896,24		882,08	20
21	942,46	"	980,03	"	958,76	IV	Poprawa	912,02	"	932,52	21
22	975,28		1 014,61		963,91			943,67		992,88	22
23	1 006,57	"	1 026,57	IV	975,63	"	Ożywienie	992,47	"	1 044,85	23
24	1 036,67		1 028,07		1 004,43			1 051,78		1 076,83	24
25	1 065,52	IV	1 036,08	"	1 051,84	"	Recesja	1 102,50	"	1 086,29	25
26	1 093,10		1 062,25		1 110,29			1 132,07		1 082,64	26
27	1 119,32	"	1 108,02	"	1 159,54	"	Depresja	1 137,96	V	1 086,93	27
28	1 144,12		1 165,26		1 186,44			1 130,12		1 110,23	28
29	1 167,98	"	1 213,25	"	1 189,02	V	Poprawa	1 131,11	"	1 154,46	29
30	1 190,57		1 238,03		1 177,54			1 152,12		1 210,78	30
31	1 211,85	"	1 237,15	V	1 174,99	"	Ożywienie	1 194,48	"	1 257,11	31
32	1 232,11		1 222,01		1 193,61			1 249,61		1 279,66	32
33	1 251,11	V	1 216,30	"	1 234,39	"	Recesja	1 294,44	"	1 275,81	33
34	1 269,15		1 232,60		1 288,39			1 314,83		1 257,36	34
35	1 286,19	"	1 272,09	"	1 332,04	"	Depresja	1 308,42	VI	1 248,99	35
36	1 301,93		1 324,84		1 350,19			1 286,80		1 262,94	36

Zest. 4. Rezerwa skladek (ciąg dalszy)
w $\frac{\text{‰}}{100}$ sumy rocznych zarobków

Data bilan-sowa	W a r i a n t													Data bilan-sowa
	A			B			C			D				
	Cykl	Faza	Re-zerwa	Cykl	Faza	Re-zerwa	Cykl	Faza	Re-zerwa	Cykl	Faza	Re-zerwa		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
37	1 316,31	V	Recesja	1 366,54	V	Depresja	1 340,52	VI	Poprawa	1 275,18	VI	Ożywienie	1 300,27	37
38	1 329,76	"	"	1 382,49	"	"	1 315,73	"	"	1 286,79	"	"	1 351,50	38
39	1 342,27	"	Depresja	1 370,41	VI	Poprawa	1 301,60	"	Ożywienie	1 322,65	"	Recesja	1 391,87	39
40	1 353,80	"	"	1 342,88	"	"	1 311,31	"	"	1 372,55	"	"	1 405,93	40
41	1 364,28	VI	Poprawa	1 326,26	"	Ożywienie	1 345,56	"	Recesja	1 411,30	"	Depresja	1 391,44	41
42	1 373,69	"	"	1 333,72	"	"	1 393,98	"	"	1 423,28	"	"	1 361,22	42
43	1 382,48	"	Ożywienie	1 366,63	"	Recesja	1 431,45	"	Depresja	1 406,80	VII	Poprawa	1 342,54	43
44	1 390,11	"	"	1 413,84	"	"	1 441,70	"	"	1 374,39	"	"	1 348,19	44
45	1 397,05	"	Recesja	1 449,87	"	Depresja	1 423,08	VII	Poprawa	1 353,62	"	Ożywienie	1 379,49	45
46	1 403,28	"	"	1 458,74	"	"	1 388,82	"	"	1 357,83	"	"	1 425,64	46
47	1 408,99	"	Depresja	1 438,59	VII	Poprawa	1 366,52	"	Ożywienie	1 388,06	"	Recesja	1 460,67	47
48	1 414,18	"	"	1 402,88	"	"	1 369,69	"	"	1 433,41	"	"	1 468,54	48
49	1 418,85	VII	Poprawa	1 379,27	"	Ożywienie	1 399,06	"	Recesja	1 467,54	"	Depresja	1 447,20	49
50	1 422,93	"	"	1 381,29	"	"	1 443,59	"	"	1 474,30	"	"	1 410,14	50

51	1 426,42	"	Ożywienie	1 409,68	"	Recesja	1 476,75	"	Depresja	1 451,71	VIII	Poprawa	1 385,21	51
52	1 429,30	"		1 453,29	"		1 482,33	"		1 413,34	VIII		1 386,01	52
53	1 431,52	"	Recesja	1 485,36	"	Depresja	1 458,33	VIII	Poprawa	1 387,09	"	Ożywienie	1 413,19	53
54	1 433,07	"		1 489,63	"		1 418,47	"		1 386,56	"		1 455,56	54
55	1 434,18	"	Depresja	1 464,40	VIII	Poprawa	1 391,01	"	Ożywienie	1 412,62	"	Recesja	1 486,56	55
56	1 435,07	"		1 423,73	"		1 389,82	"		1 454,31	"		1 490,18	56
57	1 435,74	VIII	Poprawa	1 395,73	"	Ożywienie	1 415,50	"	Recesja	1 484,84	"	Depresja	1 464,51	57
58	1 436,18	"		1 394,09	"		1 456,82	"		1 488,02	"		1 423,38	58
59	1 436,64	"	Ożywienie	1 419,63	"	Recesja	1 487,21	"	Depresja	1 462,18	IX	Poprawa	1 395,17	59
60	1 436,88	"		1 460,85	"		1 490,19	"		1 420,92	"		1 393,50	60
61	1 437,13	"	Recesja	1 491,09	"	Depresja	1 464,12	IX	Poprawa	1 392,55	"	Ożywienie	1 418,61	61
62	1 437,39	"		1 494,08	"		1 422,84	"		1 390,72	"		1 459,82	62
63	1 437,39	"	Depresja	1 467,69	IX	Poprawa	1 394,19	"	Ożywienie	1 415,74	"	Recesja	1 489,80	63
64	1 437,39	"		1 426,04	"		1 392,10	"		1 456,61	"		1 492,54	64
65	1 437,39	IX	Poprawa	1 397,33	"	Ożywienie	1 417,14	"	Recesja	1 486,52	"	Depresja	1 466,18	65
66	1 437,39	"		1 395,23	"		1 458,05	"		1 489,26	"		1 424,57	66
67	1 437,39	"	Ożywienie	1 420,33	"	Recesja	1 487,99	"	Depresja	1 462,96	X	Poprawa	1 395,88	67
68	1 437,39	"		1 461,33	"		1 490,73	"		1 421,44	"		1 393,79	68
69	1 437,39	"	Recesja	1 491,33	"	Depresja	1 464,40	X	Poprawa	1 392,82	"	Ożywienie	1 418,86	69
70	1 437,39	"		1 494,08	"		1 422,84	"		1 390,72	"		1 459,82	70

a po latach dziesięciu:

501,80⁰/₀₀ 489,52⁰/₀₀ 511,12⁰/₀₀ 518,09⁰/₀₀ 495,93⁰/₀₀

czyli równa się już w przybliżeniu połowie sumy rocznych zarobków osób ubezpieczonych. Po dwudziestu latach działalności rezerwa osiąga już niemal poziom pełnej sumy rocznych zarobków:

O	A	B	C	D
908,48 ⁰ / ₀₀	926,70 ⁰ / ₀₀	941,85 ⁰ / ₀₀	896,24 ⁰ / ₀₀	882,08 ⁰ / ₀₀

Po pierwszym roku stabilizacji wydatków, tj. po 63 latach działalności urzędnika E rezerwa wynosi:

O	A	B	C	D
1 437,39 ⁰ / ₀₀	1 467,69 ⁰ / ₀₀	1 394,19 ⁰ / ₀₀	1 415,74 ⁰ / ₀₀	1 489,80 ⁰ / ₀₀

a więc ca 140% sumy rocznych zarobków.

Wydaje się pożyteczne przeliczyć niektóre z tych rezultatów na jednostki pieniężne. Załóżmy, że

1. liczba ubezpieczonych wynosi 2 000 000 osób,

2. roczny zarobek ubezpieczonego wynosi 1 200 zł,

wówczas suma rocznych zarobków wynosi 2 400 000 000 zł. A zatem rezerwa po pięciu latach wynosi w milionach zł:

O	A	B	C	D
614,7	646,5	619,3	588,6	614,5

po dwudziestu latach:

2 180,4 2 224,1 2 260,4 2 151,0 2 117,0

a po 63 latach:

3 450,0 3 522,5 3 346,1 3 398,0 3 575,5

W okresie stabilizacji wydatków rezerwa składek

(a) w wariancie O jest wieczyście stała,

(b) w wariantach koniunkturalnych oscyluje dookoła poziomego trendu.

W celu uzyskania lepszej porównywalności rezerw poszczególnych wariantów zostały obliczone jeszcze wskaźniki porównawcze, a to w sposób następujący:

(a) za podstawę wskaźnika (= 100) przyjęto każdoczesną rezerwę składek urządzenia E według wariantu O,

(b) wskaźnik rezerwy wg. danego wariantu oblicza się, dzieląc wysokość tej rezerwy, obliczonej na dany termin bilansowy, przez wysokość równoczesnej rezerwy składek wg. wariantu O oraz mnożąc otrzymany w ten sposób iloraz przez liczbę 100.

Wartości cyfrowe tak skonstruowanych wskaźników podaje zestawienie 5.; przebieg wskaźników jest przedstawiony ponadto na wykresie 3. Jak widać z zestawienia 5. i wykresu 3., rezerwa w wariantach: A, B, C, D oscyluje dookoła rezerwy wariantu O, ze stałym okresem (pokrywającym się z czasem trwania cyklu) i stałą amplitudą. Należy podkreślić, że wspomniana oscylacja (zarówno przed chwilą osiągnięcia stabilizacji wydatków, jak i po tej chwili) jest bardzo słaba; praktycznie rzecz biorąc, nie odgrywa ona żadnej roli. Jak wynika ze wspomnianego zestawienia o d c h y l e n i a p r o c e n t o w e od wariantu bezkoniunkturalnego wynoszą, po niżej podanej liczbie lat działalności urządzenia E:

	A	B	C	D
po 5 latach	+5,2	+0,7	-4,3	0,0
po 10 latach	-2,4	+1,9	+3,2	-1,2
po 20 latach	+2,0	+3,7	-1,3	-2,9
po 40 latach	-0,8	-3,1	+1,4	+3,9
po 60 latach	+1,7	+3,7	-1,1	-3,0

W celu zbadania wpływu fazy koniunkturalnej, w której rozpoczyna się działalność urządzenia E, oraz wpływu fazy bieżącej na oscylację rezerwy, należy porównać ze sobą wskaźniki koniunkturalne rezerw nie w sposób synchroniczny (jak w zestawieniu 5.), ale tak, aby porównywane ze sobą wskaźniki odnosiły się do tych samych faz cyklu koniunkturalnego. Takie porównanie wskaźników koniunkturalnych (w okresie stabilizacji wydatków) podaje zestawienie 6. Jak widać z tego zestawienia, wpływ fazy, w której zaczyna funkcjonować system E, na oscylowanie rezerw, jest pozbawiony wszelkiej praktycznej doniosłości.

Data bilan-sowa	W a r i a n t				
	<i>O</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	100,0	99,6	101,9	101,1	98,8
2	100,0	100,1	103,4	100,6	97,4
3	100,0	101,9	104,0	98,8	96,9
4	100,0	104,1	103,1	96,7	97,7
5	100,0	105,2	100,7	95,7	100,0
6	100,0	104,5	98,0	96,5	102,7
7	100,0	102,1	96,6	98,7	104,3
8	100,0	99,1	96,9	101,6	103,9
9	100,0	97,4	99,0	103,4	101,7
10	100,0	97,6	101,9	103,2	98,8
11	100,0	99,5	103,7	101,2	97,1
12	100,0	102,4	103,6	98,4	97,2
13	100,0	104,2	101,6	96,6	99,1
14	100,0	104,1	98,7	96,7	102,0
15	100,0	102,1	96,8	98,6	103,9
16	100,0	99,2	96,9	101,5	103,9
17	100,0	97,3	98,8	103,5	101,9
18	100,0	97,3	101,7	103,5	99,0
19	100,0	99,1	103,6	101,5	97,1
20	100,0	102,0	103,7	98,7	97,1
21	100,0	104,0	101,7	96,8	98,9
22	100,0	104,0	98,8	96,8	101,8
23	100,0	102,0	96,9	98,6	103,8
24	100,0	99,2	96,9	101,5	103,9
25	100,0	97,2	98,7	103,5	101,9
26	100,0	97,2	101,6	103,6	99,0
27	100,0	99,0	103,6	101,7	97,1
28	100,0	101,8	103,7	98,8	97,0
29	100,0	103,9	101,8	96,8	98,8
30	100,0	104,0	98,9	96,8	101,7
31	100,0	102,1	97,0	98,6	103,7
32	100,0	99,2	96,9	101,4	103,9
33	100,0	97,2	98,7	103,5	102,0
34	100,0	97,1	101,5	103,6	99,1
35	100,0	98,9	103,6	101,7	97,1

koniunkturalne

Data bilan- sowa	W a r i a n t				
	<i>O</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
36	100,0	101,8	103,7	98,8	97,0
37	100,0	103,8	101,8	96,9	98,8
38	100,0	104,0	98,9	96,8	101,6
39	100,0	102,1	97,0	98,5	103,7
40	100,0	99,2	96,9	101,4	103,9
41	100,0	97,2	98,6	103,4	102,0
42	100,0	97,1	101,5	103,6	99,1
43	100,0	98,9	103,5	101,8	97,1
44	100,0	101,7	103,7	98,9	97,0
45	100,0	103,8	101,9	96,9	98,7
46	100,0	104,0	99,0	96,8	101,6
47	100,0	102,1	97,0	98,5	103,7
48	100,0	99,2	96,9	101,4	103,8
49	100,0	97,2	98,6	103,4	102,0
50	100,0	97,1	101,5	103,6	99,1
51	100,0	98,8	103,5	101,8	97,1
52	100,0	101,7	103,7	98,9	97,0
53	100,0	103,8	101,9	96,9	98,7
54	100,0	103,9	99,0	96,8	101,6
55	100,0	102,1	97,0	98,5	103,7
56	100,0	99,2	96,8	101,3	103,8
57	100,0	97,2	98,6	103,4	102,0
58	100,0	97,1	101,4	103,6	99,1
59	100,0	98,8	103,5	101,8	97,1
60	100,0	101,7	103,7	98,9	97,0
61	100,0	103,8	101,9	96,9	98,7
62	100,0	103,9	99,0	96,8	101,6
63	100,0	102,1	97,0	98,5	103,6
64	100,0	99,2	96,8	101,3	103,8
65	100,0	97,2	98,6	103,4	102,0
66	100,0	97,1	101,4	103,6	99,1
67	100,0	98,8	103,5	101,8	97,1
68	100,0	101,7	103,7	98,9	97,0
69	100,0	103,8	101,9	96,9	98,7
70	100,0	103,9	99,0	96,8	101,6

Z e s t . 6. Przesunięte wskaźniki koniunkturalne rezerw

Wariant	Faza, w której zaczyna się działalność urzędnika E	Wskaźniki rezerwy w okresie stabilizacji wydatków							
		Poprawa		Ożywienie		Recesja		Depresja	
		I rok	II rok	I rok	II rok	I rok	II rok	I rok	II rok
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	Poprawa	97,2	97,1	98,8	101,7	103,8	103,9	102,1	99,2
B	Ożywienie	97,0	96,8	98,6	101,4	103,5	103,7	101,9	99,0
C	Recesja	96,9	96,8	98,5	101,3	103,4	103,6	101,8	98,9
D	Depresja	97,1	97,0	98,7	101,6	103,6	103,8	102,0	99,1
O		100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Decydujący natomiast wpływ na wskaźnik koniunkturalny rezerwy posiada bieżąca faza koniunktury. Minimum wskaźnika (we wszystkich czterech wariantach w okresie stabilizacji wydatków) przypada, jak widać z zestawienia 6. na drugi rok poprawy. Minimum to wynosi:

A	B	C	D
97,1	96,8	96,8	97,0

W okresie ożywienia i recesji wskaźnik wzrasta, osiągając w drugim roku recesji maximum wynoszące:

A	B	C	D
103,9	103,7	103,6	103,8

po czym wskaźnik spada aż do minimum, które — jak już wspomnieliśmy — osiąga w drugim roku poprawy.

Kończąc nasze przyczynkowe badanie, dotyczące wpływu wahań koniunkturalnych stopy oprocentowania, musimy raz jeszcze podkreślić, że mieliśmy do czynienia tylko z przykładem liczbowym. Indukcyjne uogólnianie tych skromnych rezultatów wydaje się niedopuszczalne, nie mniej jednak przykład rozpatrywany może posiadać

pewną wartość heurystyczną. Po tym zastrzeżeniu możemy sformułować krótko wniosek ostateczny, wynikający z przeprowadzonych rachunków: — jeżeli w urzędzeniu E tylko stopa oprocentowania podlega wyżej założonym wahaniom koniunkturalnym, to wpływ tych wahań na wysokość wystarczającej technicznie składki i na wysokość rezerwy składek jest pozbawiony doniosłości praktycznej.

Rozdział III

Wpływ stopy oprocentowania, stanu zatrudnienia i zarobków

1. ZAŁOŻENIA, DOTYCZĄCE KONIUNKTURY

W rozdziale niniejszym omówimy dwa nowe warianty urzędzenia E, a mianowicie

(a) wariant bezkoniunkturalny, który nazwiemy krótko wariantem O',

(b) wariant koniunkturalny, który nazwiemy krótko wariantem B'.

Dla wariantu B' przyjmujemy następujące założenia, dotyczące przebiegu koniunktury (oprócz odpowiednich założeń rozdziału I):

III₁. Liczba ubezpieczonych, płacących składki na rzecz urzędzenia E, wynosi stale w poszczególnych fazach:

Faza		Liczba osób w milionach
poprawa	I rok	1,8
	II rok	2,2
ożywienie		2,6
recesja	I rok	2,2
	II rok	1,8
depresja		1,4

III₂. Zarobek roczny, ubezpieczonego, płacącego składkę na rzecz urzędnika E, wynosi stale w poszczególnych fazach:

Faza		Zarobek w tysiącach zł
poprawa	I rok	1,08
	II rok	1,32
ożywienie		1,56
recesja	I rok	1,32
	II rok	1,08
depresja		0,84

III₃. Pierwszy termin płatności w urzędzeniu E pokrywa się z początkiem ożywienia tj. drugiej fazy cyklu.

Natomiast dla wariantu O' przyjmujemy następujące, analogiczne do powyższych, założenia:

III₁*. Liczba ubezpieczonych, płacących składki na rzecz urzędnika E, wynosi stale 2,0 miliony osób.

III₂*. Zarobek roczny ubezpieczonego, płacącego składkę wynosi stale 1,2 tysiąca zł.

Przebieg stopy oprocentowania, stanu zatrudnienia (= liczby ubezpieczonych płacących) i zarobków dla obu rozpatrywanych wariantów podaje zestawienie 7. W obrębie wariantu B' mamy do czynienia z trzema wyschematyzowanymi krzywymi gospodarczymi:

- (a) z krzywą stopy oprocentowania,
- (b) „ „ stanu zatrudnienia,
- (c) „ „ zarobku

Krzywe te zostały w ten sposób skonstruowane, że przeciętne z całego cyklu:

- (1) pokrywają się ze stałymi wartościami wariantu O',
- (2) przedstawione w jednostkach odchylenia średniego pokrywają się wzajemnie.

W związku z punktem (2) krzywa na wykresie 4. przedstawia zarówno przebieg stopy oprocentowania, jak i stanu zatrudnienia oraz zarobku.

Zest. 7. Przebieg koniunktury

Rok		Faza cyklu (wariant A')	Stopa oprocentowania %		Stan zatrudnienia (w milionach osób)		Zarobek roczny ubezpieczonego (w tysiącach zł)		Łączny zarobek roczny ogółu ubezpieczonych (w milionach zł)	
od	do (t + 1)		O'	B'	O'	B'	O'	B'	O'	B'
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	Poprawa	$4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	2,0	1,8	1,20	1,08	2 400	1 944
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$		$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	2,0	2,2	1,20	1,32	2 400	2 904
$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	Ożywienie	$4\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	2,0	2,6	1,20	1,56	2 400	4 056
$3\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$		$4\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	2,0	2,6	1,20	1,56	2 400	4 056
$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	Recesja	$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	2,0	2,2	1,20	1,32	2 400	2 904
$5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$		$4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	2,0	1,8	1,20	1,08	2 400	1 944
$6\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	Depresja	$4\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	2,0	1,4	1,20	0,84	2 400	1 176
$7\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$		$4\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	2,0	1,4	1,20	0,84	2 400	1 176
Przebieg			$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	2,0	2,0	1,20	1,20	2 400	2 520

Przyjęta przez nas amplituda stanu zatrudnienia odpowiada rozpiętości stanów zatrudnienia robotników w Polsce w latach 1929 i 1933, przyjęta zaś przez nas amplituda zarobków odpowiada rozpiętości wskaźnika płac nominalnych w Polsce w latach: 1926 i 1930. Nie będziemy się tu zastanawiali nad tym, czy wahania koniunkturalne w Polsce w okresie 1926—1930, ew. 1929—1933 należy uznać za „normalne”, czy też „wyjątkowe”. Istotne jest dla nas tylko, aby wyschematyzowane wahania koniunkturalne, stanowiące podstawę naszych rachunków, były dość wyraźne i aby rezultaty rachunków ujawniły kierunek zmian, którym podlega wysokość wystarczającej składki i wysokość rezerw pod wpływem czynników koniunkturalnych. Należy jeszcze zauważyć, że w rzeczywistości istnieje pewna różnica faz między wahaniami koniunkturalnymi stopy oprocentowania, stanu zatrudnienia i płac. W naszym schemacie nie uwzględniliśmy tej różnicy, zmierzając do uproszczenia założeń i uwydatnienia wpływu wahań koniunkturalnych na urządzenie emerytalne.

2. NORMY ŚWIADCZENIOWE

Dla wariantów B' oraz O' przyjmujemy następujący wspólny układ założeń, dotyczących świadczeń emerytalnych, wypłacanych przez urządzenie E:

- III₄. Urządzenie E wypłaca świadczenia tylko dwu rodzajów:
 - (a) renty inwalidzkie,
 - (b) zaopatrzenia inwalidzkie.
- III₅. Okres wyczekiwania na rentę inwalidzką wynosi 5 lat.
- III₆. Renta inwalidzka jest przyznawana w razie niezdolności do pracy lub ukończenia przez ubezpieczonego 65 lat.
- III₇. Wysokość renty inwalidzkiej w stosunku do zarobku podstawowego jest unormowana następująco:
 - (a) wysokość początkowa wynosi 20%,
 - (b) wzrost wynosi 1% za każdy pełny rok przebyty w ubezpieczeniu po okresie wyczekiwania,
 - (c) maksymalna wysokość renty wynosi 50%.
- III₈. Osoby, które przystąpiły do ubezpieczenia w pierwszym roku działalności urządzenia E, mając od 60 do 64 lat, otrzymują po dojściu do 65 lat zaopatrzenie inwalidzkie.

III₉. Zaopatrzenie inwalidzkie wynosi 20% zarobku podstawowego.

III₁₀. Zarobek podstawowy, równy dla wszystkich ubezpieczonych, wynosi 1 200 zł rocznie.

Jasne jest, że w stosunku do norm świadczeniowych, obowiązujących w rzeczywistych urządzeniach emerytalnych, układ założeń III₄ — III₁₀ stanowi skrajne uproszczenie.

3. PODSTAWY BIOMETRYCZNE

Dla obu rozpatrywanych wariantów przyjmujemy następujący układ założeń:

III₁₁. Stosuje się prawdopodobieństwa inwalidztwa podane w zestawieniu 8.

III₁₂. Stosuje się prawdopodobieństwa śmierci w stanie czynnym, podane w zestawieniu 8.

III₁₃. Stosuje się prawdopodobieństwa przeżycia w stanie inwalidztwa, podane w zestawieniu 9.:

(a) prawdopodobieństwa półroczne dla pierwszego półrocza po nastaniu inwalidztwa (${}^{1/2}p^i_{[x+1/2]}$),

(b) prawdopodobieństwa roczne dla dalszych okresów inwalidztwa (p^i_x),

III₁₄. Urodzenia uczestników urządzenia E oraz wstęp do tego urządzenia następują w połowie roku kalendarzowego, natomiast ryzyko inwalidztwa realizuje się zawsze na przełomie dwu lat kalendarzowych.

W związku z założeniami III₁₁ i III₁₂ należy zaznaczyć, że odpowiednie prawdopodobieństwa zostały zaczerpnięte (podobnie jak dla powszechnego ubezpieczenia emerytalnego robotników w Polsce) ze źródeł niemieckich (patrz literatura, 1; przy czym prawdopodobieństwa inwalidztwa do 49 roku życia zaczerpnięto z *Übersicht 12*, począwszy od 50 roku życia w górę — z *Übersicht 9*, prawdopodobieństwa zaś śmierci — z *Übersicht 15b*). W związku z założeniem III₁₃ zaznaczamy, że zastosowana przez nas tablica prawdopodobieństw stanowi uproszczenie tablicy Urzędu Ubezpieczeń Rzeszy Niemieckiej z lat 1891 — 1899.

Zest. 8. Prawdopodobieństwa inwalidztwa oraz śmierci w stanie czynnym

x	i_x	q_x^{aa}	x	i_x	q_x^{aa}
20	0,00085	0,00258	45	0,00640	0,00741
1	00096	00262	6	00742	00792
2	00107	00261	7	00860	00849
3	00119	00257	8	00994	00914
4	00131	00253	9	01144	00987
25	0,00143	0,00251	50	0,01318	0,01065
6	00155	00251	1	01513	01150
7	00168	00258	2	01735	01238
8	00181	00267	3	02027	01323
9	00194	00279	4	02367	01408
30	0,00207	0,00292	55	0,02769	0,01493
1	00220	00307	6	03251	01578
2	00233	00322	7	03836	01663
3	00246	00339	8	04552	01756
4	00259	00359	9	05433	01860
35	0,00272	0,00380	60	0,06424	0,01979
6	00285	00403	1	07580	02120
7	00298	00430	2	08910	02289
8	00314	00459	3	10403	02489
9	00333	00491	4	12104	02717
40	0,00358	0,00525			
1	00386	00564			
2	00428	00605			
3	00484	00648			
4	00554	00693			

Zest. 9. Prawdopodobieństwa przeżycia w stanie inwalidztwa

x	$\frac{1}{2} p_{[x+1/2]}^i$	p_{x+1}^i	x	p_{x+1}^i
25	0,7345	0,9350	65	0,9215
6	7405	9460	6	9175
7	7464	9530	7	9130
8	7521	9586	8	9085
9	7577	9620	9	9040
30	0,7632	0,9632	70	0,8990
1	7687	9630	1	8940
2	7742	9627	2	8885
3	7797	9624	3	8825
4	7852	9621	4	8760
35	0,7907	0,9617	75	0,8690
6	7962	9613	6	8615
7	8017	9609	7	8535
8	8072	9605	8	8450
9	8126	9601	9	8360
40	0,8179	0,9597	80	0,8260
1	8231	9592	1	8150
2	8284	9586	2	8030
3	8336	9580	3	7900
4	8389	9573	4	7760
45	0,8441	0,9566	85	0,7610
6	8491	9559	6	7450
7	8545	9551	7	7280
8	8595	9543	8	7100
9	8645	9534	9	6910
50	0,8695	0,9525	90	0,6710
1	8745	9515	1	6500
2	8795	9505	2	6280
3	8845	9495	3	6050
4	8894	9483	4	5810
55	0,8941	0,9468	95	0,5560
6	8987	9450	6	5300
7	9032	9430	7	5030
8	9077	9410	8	4750
9	9120	9390	9	4460
60	0,9157	0,9370		
1	9191	9345		
2	9223	9320		
3	9250	9290		
4	9274	9255		

4. ZBIOROWOŚĆ UBEZPIECZONYCH

Potrzebne nam są jeszcze założenia, dotyczące rozkładu zbiorowości ubezpieczonych wg. wieku, liczebności tej zbiorowości i gęstości zatrudnienia osób, korzystających ze świadczeń. Jeśli chodzi o liczbę ubezpieczonych, to wprowadzie przyjęliśmy już pewne założenia w tej sprawie (założenie III₁, ewentualnie III₁^{*}), dotyczyły one jednak liczby uczestników urzędnika E, p ł a c ą c y c h s k ł a d k ę, obecnie zaś chodzi o liczebność zbiorowości osób, nabywających i utrzymujących uprawnienia do świadczeń.

- III₁₅. Obowiązkowi ubezpieczenia podlegają osoby w wieku od 20 do 64 lat włącznie.
- III₁₆. W pierwszym roku działalności urzędnika E wstępują do ubezpieczenia osoby w wieku od 20 do 64 lat włącznie, w dalszych latach wstępują tylko osoby 20-letnie.
- III₁₇. Rozkład względny zbiorowości ubezpieczonych jest wieczyste stały i pokrywa się z porządkiem ubywania wskutek inwalidztwa i śmierci w stanie czynnym.
- III₁₈. Liczba lat ubezpieczenia, na podstawie której wymierza się rentę inwalidzką, jest równa zaokrąglonemu do lat całkowitych w dół odstępowi między chwilą powstania prawa do renty, a chwilą wstąpienia do ubezpieczenia.
- III₁₉. Wydatki globalne na świadczenia oblicza się, biorąc za podstawę zbiorowość ubezpieczenia o stałej wieczyście liczebności 2 miliony osób.

Układ założeń III₁₅ — III₁₉ obowiązuje dla obu wariantów rozważanych w rozdziale niniejszym. Założenie III₁₈ ustala, że gęstość ubezpieczenia osób, które nabywają i realizują prawo do świadczeń, jest 100%-owa. Interesujące są konsekwencje założenia III₁₉ w obrębie wariantu koniunkturalnego B'. Jak wiemy z założenia III₁, liczba ubezpieczonych płacących składkę jest zmienna, natomiast na mocy założenia III₁₉ liczba ubezpieczonych, służąca za podstawę obliczania wydatków na świadczenia jest stała. W związku z przyjęciem obu wymienionych założeń powstają następujące różnice liczebności w poszczególnych fazach cyklu koniunkturalnego:

Faza	Rok	Liczba osób w milionach- wg założenia:		Różnica liczebności
		III ₁	III ₁₉	
poprawa	I	1,8	2,0	— 0,2
	II	2,2	2,0	+ 0,2
ożywienie	I i II	2,6	2,0	+ 0,6
recesja	I	2,2	2,0	+ 0,2
	II	1,8	2,0	— 0,2
depresja	I i II	1,4	2,0	— 0,6

Różnice te można dość łatwo objaśnić. Co więcej założenia III₁ i III₁₉ są tak ogólnikowe, że można dać kilka różnych wyjaśnień. Najprostsza byłaby, jak się zdaje, interpretacja następująca: W okresach, gdy stan zatrudnienia przekracza przeciętną (drugi rok poprawy, oba lata ożywienia i pierwszy rok recesji) powstaje wiele nie-trwałych stosunków ubezpieczenia, zjawiają się mianowicie ubezpieczeni, którzy wprowadzie płacą składkę, lecz zatrudnieni są (w obrębie danego cyklu koniunkturalnego i cykli dalszych łącznie) zbyt krótko na to, aby kiedykolwiek uzyskać prawo do świadczeń. Natomiast w okresach, gdy stan zatrudnienia spada poniżej przeciętnej (drugi rok recesji, oba lata depresji i pierwszy rok poprawy), pewna liczba ubezpieczonych zachowuje uprawnienia nabyte, pomimo, że ubezpieczeni ci jako bezrobotni nie opłacają składek (tego typu przepisy obowiązują w powszechnym ubezpieczeniu emerytalnym robotników na Górnym Śląsku). Możliwe byłoby pokusić się również o trudniejszą, lecz może bardziej interesującą interpretację, zakładając, że ryzyko inwalidztwa podlega wahaniom koniunkturalnym (co zgodne jest zresztą z rzeczywistością), mianowicie maleje w okresie polepszającej się koniunktury, a rośnie w okresie koniunktury pogarszającej się. Wprowadzie stosować mamy w naszych obliczeniach bezkoniunkturalną tablicę inwalidztwa, ale stosujemy ją do stałej liczby ubezpieczonych (zgodnie z założeniem III₁₉) pomimo, że stan zatrudnienia (w myśl założenia III₁) podlega wahaniom koniunkturalnym. Możliwe więc powiedzieć, że stosując stałą tablicę inwalidztwa do przeciętnego stanu zatrudnienia, postępujemy tak, jak gdybyśmy zmniejszali ryzyko inwalidztwa w okresach koniunktury wzrastającej i wysokiej, a podnosili je w okresach koniunktury opadającej i niskiej. Interpretacja taka nasuwa jednak pewne trudności, których nie będziemy tu omawiali.

Zest. 10. Układy założeń i warianty

Układy założeń		Rozdział II					Rozdział III	
		W a r i a n t y						
liczby porządkowe	charakterystyka	O	A	B	C	D	O'	B'
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
I ₁ — I ₄	Podział i czas trwania cyklu, przebieg stopy oprocentowania	—	+	+	+	+	—	+
I		+	—	—	—	—	+	—
I ₅ — I ₈	Terminy płatności i system finansowy	+	+	+	+	+	+	+
II ₁ — II ₂	Zarobki ubezpieczonych i wydatki globalne	+	+	+	+	+	—	—
II ₃	Początek działalności	—	+	+	+	+	—	—
III ₁ — III ₃	Zatrudnienie, zarobki i początek działal- ności	—	—	—	—	—	—	+
III ₁ * — III ₂ * ₂		—	—	—	—	—	+	—
III ₄ — III ₁₀	Normy świadcze- niowe	—	—	—	—	—	+	+
III ₁₁ — III ₁₄	Podstawy biome- tryczne	—	—	—	—	—	+	+
III ₁₅ — III ₁₉	Zbiorowość ubezpie- czonych	—	—	—	—	—	+	+

„+“ znaczy, że dany układ założeń obowiązuje dla danego wariantu,
 „—“ znaczy, że dany układ założeń nie obowiązuje dla danego wariantu.

Na tym kończymy formułowanie i omawianie założeń rozdziału III. Ze względu na stosunkowo znaczną liczebność założeń i wariantów, sformułowanych w pracy niniejszej, wydaje się wskazane zwiąże przedstawienie ich w całości. Celowi temu służy zestawienie 10.

5. WYDATKI NA ŚWIADCZENIA

Przebieg wydatków na świadczenia dla obu rozpatrywanych w rozdziale niniejszym wariantów jest identyczny. Jest on wyznaczony przez układy założeń:

$$\text{III}_4 - \text{III}_{10}, \quad \text{III}_{11} - \text{III}_{14}, \quad \text{III}_{15} - \text{III}_{19}.$$

Przy obliczaniu przebiegu globalnych wydatków na świadczenia przeprowadzono niżej opisany podział pełnej zbiorowości ubezpieczonych na dwie podzbiorowości. Jak wiadomo z założenia III_{16} , w pierwszym roku działalności urządzenia E mamy do czynienia z ubezpieczonymi o wieku wstępu od 20 do 64 lat życia włącznie. Począwszy od drugiego roku działalności mamy do czynienia z dalszymi pokoleniami ubezpieczonych z jednolitym wiekiem wstępu 20 lat. Zamiast dzielić zbiorowość pełną ubezpieczonych w sposób tradycyjny na pokolenia, zastosujmy inny podział, bardziej jak się zdaje interesujący, mianowicie podział na:

- (1) podzbiorowość ubezpieczonych z anormalnym wiekiem wstępu,
- (2) podzbiorowość ubezpieczonych z normalnym wiekiem wstępu.

Do podzbiorowości (1) zaliczamy wszystkich i tylko tych ubezpieczonych, których wiek wstępu wynosi ponad 20 lat, natomiast do podzbiorowości (2) zaliczamy wszystkich i wyłącznie tych ubezpieczonych, których wiek wstępu wynosi 20 lat. Z powyższej definicji wynika, że do podzbiorowości (1) zaliczamy niemal całe pierwsze pokolenie ubezpieczonych, wyjąwszy tych, których wiek wstępu wynosi 20 lat, natomiast w skład populacji (2) wchodzi, obok wymienionych ostatnio najmłodszych ubezpieczonych pierwszego pokolenia, nieskończony ciąg pokoleń nowowstępujących w drugim, trzecim, czwartym itd. roku działalności urządzenia E. Zestawienie 11. podaje przebieg wydatków na świadczenia dla podzbiorowości (1) i (2) osobno oraz dla pełnej zbiorowości ubezpieczonych łącznie.

Zest. 11. Wydatki na

(Wariant

Termin płatności	Zbiorowość z normalnym wiekiem wstępu	Zbiorowość z anormalnym wiekiem wstępu	Pełna zbiorowość ubezpieczonych
	(1)	(2)	(3)
1 ½		3 590 160	3 590 160
2 ½		6 912 853	6 912 853
3 ½		9 974 715	9 974 715
4 ½		12 783 973	12 783 973
5 ½		15 348 826	15 348 826
6 ½	13 680	23 163 943	23 177 623
7 ½	41 843	30 862 797	30 904 640
8 ½	85 909	38 432 331	38 518 240
9 ½	147 776	45 863 893	45 831 669
10 ½	229 258	53 137 537	53 366 795
11 ½	332 544	60 266 281	60 598 825
12 ½	459 485	67 237 463	67 696 948
13 ½	612 185	74 087 961	74 700 146
14 ½	792 453	80 567 702	81 360 155
15 ½	1 002 135	87 105 890	88 108 025
16 ½	1 243 470	93 375 241	94 618 711
17 ½	1 518 342	99 471 472	100 989 814
18 ½	1 828 656	105 389 201	107 217 857
19 ½	2 177 219	111 131 054	113 308 273
20 ½	2 566 686	116 698 725	119 265 411
21 ½	3 001 093	122 092 668	125 093 761
22 ½	3 484 953	127 308 033	130 792 986
23 ½	4 024 996	132 375 978	136 400 974
24 ½	4 630 689	137 228 458	141 859 147
25 ½	5 313 903	141 918 153	147 232 056
26 ½	6 070 904	146 381 883	152 452 787
27 ½	6 937 731	150 697 283	157 635 014
28 ½	7 934 163	154 773 863	162 708 026
29 ½	9 082 451	158 613 799	167 696 250
30 ½	10 406 358	162 193 528	172 599 886
31 ½	11 933 171	165 490 817	177 423 988
32 ½	13 692 716	168 465 759	182 158 475
33 ½	15 717 167	171 106 968	186 824 135
34 ½	18 049 216	173 360 898	191 410 114
35 ½	20 735 661	175 177 765	195 913 426
36 ½	23 828 017	176 323 932	200 151 949
37 ½	27 371 460	176 593 557	203 965 017
38 ½	31 415 414	175 968 193	207 383 607
39 ½	36 012 463	174 424 640	210 437 103
40 ½	41 218 486	171 935 349	213 153 835

świadczenia w złotych

O' i B')

Termin płatności	Zbiorowość z normalnym wiekiem wstępu	Zbiorowość z anormalnym wiekiem wstępu	Pełna zbiorowość ubezpieczonych
	(1)	(2)	
41½	47 075 342	168 485 642	215 560 984
42½	53 614 416	164 070 099	217 684 515
43½	60 844 781	158 704 374	219 549 155
44½	68 747 481	152 430 981	221 178 462
45½	86 247 689	136 347 020	222 594 709
46½	102 444 132	121 374 845	223 818 977
47½	117 369 149	107 501 975	224 871 124
48½	131 062 852	94 706 955	225 769 807
49½	143 565 211	82 967 246	226 532 457
50½	154 923 599	72 251 655	227 175 254
51½	165 191 584	62 521 569	227 713 153
52½	174 422 506	53 737 354	228 159 860
53½	182 674 957	45 852 918	228 527 875
54½	190 007 264	38 821 238	228 828 502
55½	196 478 018	32 593 879	229 071 897
56½	202 146 405	27 120 727	229 267 132
57½	207 072 241	22 349 980	229 422 221
58½	211 315 849	18 228 305	229 544 154
59½	214 937 760	14 701 233	229 638 993
60½	217 998 282	11 513 657	229 511 939
61½	220 556 881	9 210 502	229 767 383
62½	222 670 293	7 138 708	229 809 001
63½	224 392 715	5 447 094	229 839 809
64½	225 775 826	4 086 473	229 862 299
65½	226 868 486	3 009 978	229 878 464
66½	227 716 388	2 173 502	229 889 890
67½	228 361 638	1 536 179	229 897 817
68½	228 842 351	1 060 862	229 903 213
69½	229 192 302	714 411	229 906 713
70½	229 440 770	468 368	229 909 138
71½	229 612 464	298 165	229 910 629
72½	229 727 668	183 819	229 911 487
73½	229 802 551	109 500	229 912 051
74½	229 849 575	62 801	229 912 376
75½	229 878 030	34 534	229 912 564
76½	229 894 568	18 102	229 912 670
77½	229 903 756	8 962	229 912 718
78½	229 908 621	4 116	229 912 737
79½	229 911 071	1 677	229 912 748
80½	229 912 235	518	229 912 753
81½	229 912 755		229 912 755
82½	229 912 755		

Odpowiednie krzywe przedstawia wykres 6. Jak widać z zestawienia 11. i wykresu 6., przebieg wydatków kształtuje się następująco: krzywa wydatków na świadczenia dla osób, należących do zbiorowości z anormalnym wiekiem wstępu, wznosi się ponad zero już w drugim roku działalności urządzenia E (zaopatrzenia inwalidzkie), przy czym wydatek w tym roku wynosi ca 3½ miliona zł; następnie krzywa ta wzrasta, osiągając maksimum, wynoszące ca 176½ miliona zł w 38. roku działalności, po czym spada stopniowo aż do zera (82. rok działalności). Inaczej kształtują się wydatki na świadczenia zbiorowości ubezpieczonych z normalnym wiekiem wstępu. Odpowiednia krzywa wznosi się ponad zero dopiero w siódmym roku działalności (wydatek roczny ca 14 tysięcy złotych); krzywa ta osiąga maksimum, wynoszące ca 230 milionów zł rocznie, dopiero w 82. roku działalności i stabilizuje się na tym maksymalnym poziomie. W rezultacie krzywa sumaryczna (odpowiadająca pełnej zbiorowości ubezpieczonych) wznosi się przez 82 lata, po czym następuje okres stabilizacji wydatków.

6. OPIS REZULTATÓW

Składkę dla obu wariantów obliczono wg tej samej metody, którą zastosowano w rozdziale II. Wyniki obliczeń są następujące:

Wariant	Składka w stosunku do zarobku	Wskaźnik składki
O'	42,86 ⁰ / ₀₀	100,0
B'	39,69 ⁰ / ₀₀	92,6

Składka dla wariantu koniunkturalnego jest więc o 7,4% niższa od składki wariantu bezkoniunkturalnego. Jest to różnica bardzo znaczna w porównaniu do różnic, które stwierdziliśmy w rozdziale poprzednim. Z drugiej jednak strony, jeżeli weźmiemy pod uwagę, że dla wariantu B' przyjęliśmy sztuczny, „spiętrzony” jak gdyby, tj. pozbawiony różnicy faz, przebieg koniunkturalny, oraz że zmiana podstaw biometrycznych (których wybór nigdy nie jest w pełni obiektywny) może łatwo zmniejszyć, czy powiększyć składkę o 7% czy więcej, to stwierdzić musimy, że wpływ wahań koniunkturalnych na wysokość składki nie okazał się szczególnie silny. Trzeba przy tym zestawić jeszcze ze sobą nie tylko s t o p y składek, ale i b e z w z g l ę d n ą ich w y s o k o ś ć, co jest z tego wzglę-

du istotne, że przeciętna wysokość sumy zarobków, stanowiących podstawę wymiaru składki, nie jest w obu wariantach jednakowa (porównać zestawienie 7.). Przebieg przypisu składki w obrębie cyklu przedstawia się w wariancie B' następująco:

Faza	Rok	Zbiór składki w milionach zł
Poprawa	{ I	$1\,944 \times 39,69^0/_{00} = 77,157$
	{ II	$2\,904 \times 39,69^0/_{00} = 115,260$
Ożywienie	{ I	$4\,056 \times 39,69^0/_{00} = 160,983$
	{ II	$4\,056 \times 39,69^0/_{00} = 160,983$
Recesja	{ I	$2\,904 \times 39,69^0/_{00} = 115,260$
	{ II	$1\,944 \times 39,69^0/_{00} = 77,157$
Depresja	{ I	$1\,176 \times 39,69^0/_{00} = 46,675$
	{ II	$1\,176 \times 39,69^0/_{00} = 46,675$
		Razem 800,150
		<i>Przeciętna</i> 100,019

Natomiast roczny przypis składek w wariancie O' wynosi

$$2\,400 \times 42,86\% = 102,864$$

Zestawmy teraz ze sobą oba powyższe wyniki:

Wariant	Przypis składek w milionach zł	Wskaźnik przypisu
O'	102,864	100,0
B'	100,019	97,2

otrzymujemy różnicę wynoszącą już nie 7,4% lecz tylko 2,8%. Tym niemniej stwierdzamy tym razem silniejszy wpływ czynników koniunkturalnych na przypis składki niż wówczas, gdy uwzględnialiśmy tylko wahania koniunkturalne stopy oprocentowania (porównać zestawienie 3.).

Mając już obliczoną składkę można przystąpić do obliczenia rezerwy składek. Wartości cyfrowe rezerw podaje — dla każdego z obu wariantów — zestawienie 12. Podaje ono wysokość rezerwy w odstępach rocznych na przestrzeni 80 pierwszych lat działalności urzędzenia E w milionach złotych.

Zest. 12. Rezerwa skladek

Data bilansowa	Przebieg koniunktury		Rezerwa skladek (w milionach zł)		Wskaźnik $100 \cdot \frac{(5)}{(4)}$		Data bilansowa	Przebieg koniunktury		Rezerwa skladek (w milionach zł)		Wskaźnik $100 \cdot \frac{(5)}{(4)}$	
	cykl	faza *	wariant <i>O'</i>	wariant <i>B'</i>	(1)	(2)		(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
·	I	P	·	·	·	·	39	VI	P	2 788	2 692	96,6	
·	I	P	·	·	·	·	40	VI	P	2 803	2 715	96,9	
1	I	O	105	167	159,0	159,0	41	I	O	2 817	2 838	100,7	
2	I	O	211	343	162,6	162,6	42	I	O	2 828	2 994	105,9	
3	I	R	319	476	149,2	149,2	43	I	R	2 838	3 083	108,6	
4	I	R	428	566	132,2	132,2	44	I	R	2 847	3 077	108,1	
5	I	D	540	614	113,7	113,7	45	I	D	2 854	2 978	104,3	
6	I	D	653	655	100,3	100,3	46	I	D	2 860	2 845	99,5	
7	II	P	764	726	95,0	95,0	47	II	P	2 865	2 767	96,6	
8	II	P	872	845	96,9	96,9	48	II	P	2 869	2 779	96,9	
9	II	O	977	1 027	105,1	105,1	49	II	O	2 873	2 892	100,7	
10	II	O	1 079	1 224	113,4	113,4	50	II	O	2 875	3 041	105,8	
11	II	R	1 179	1 367	115,9	115,9	51	II	R	2 878	3 124	108,5	
12	II	R	1 275	1 445	113,3	113,3	52	II	R	2 880	3 111	108,0	
13	II	D	1 368	1 460	106,7	106,7	53	II	D	2 881	3 006	104,3	
14	II	D	1 458	1 454	99,7	99,7	54	II	D	2 882	2 868	99,5	
15	III	P	1 546	1 486	96,1	96,1	55	III	P	2 883	2 785	96,6	
16	III	P	1 631	1 580	96,9	96,9	56	III	P	2 884	2 793	96,8	

17	O	1 712	1 752	102,3	57	O	2 885	2 904	100,7
18		1 791	1 945	108,6	58		2 885	3 051	105,8
19	R	1 868	2 080	111,3	59	R	2 885	3 131	108,5
20		1 941	2 137	110,1	60		2 886	3 117	108,0
21	D	2 012	2 117	105,2	61	D	2 886	3 011	104,3
22		2 079	2 070	99,6	62		2 886	2 871	99,5
23					63	IX	2 886	2 788	96,6
24	P	2 144	2 067	96,4	64		2 886	2 795	96,8
25					65	O	2 886	2 906	100,7
26	O	2 266	2 297	101,4	66		2 886	3 052	105,8
27					67	R	2 886	3 132	108,5
28	R	2 376	2 606	109,7	68		2 886	3 118	108,0
29					69	D	2 886	3 011	104,3
30	D	2 475	2 591	104,7	70		2 886	2 872	99,5
31					71	X	2 886	2 788	96,6
32	P	2 563	2 473	96,5	72		2 886	2 795	96,8
33					73	O	2 886	2 906	100,7
34	O	2 638	2 662	100,9	74		2 886	3 052	105,8
35					75	R	2 886	3 133	108,6
36	R	2 700	2 941	108,9	76		2 886	3 118	108,0
37					77	D	2 886	3 011	104,3
38	D	2 750	2 871	104,4	78		2 886	2 872	99,5
					79	XI	2 886	2 788	96,6
					80		2 886	2 795	96,8

* P — poprawa, O — ożywienie, R — recesja, D — depresja

Rezerwa w milionach zł po upływie niżej podanych lat działalności, wynosi:

	O'	B'
po 1 roku	105	167
po 10 latach	1 079	1 224
po 20 latach	1 941	2 137
po 40 latach	2 803	2 715
po 80 latach	2 886	2 795

Jak widać już z powyższego, mamy do czynienia w okresie stabilizacji z rezerwami tego rzędu, co kwota 3 miliardów złotych.

W celu uwydatnienia wpływu czynników koniunkturalnych na wysokość rezerwy obliczono jeszcze ciąg wskaźników (zestawienie 12.) zbudowanych w sposób następujący:

(a) za podstawę wskaźnika (= 100) przyjęto każdorazową rezerwę składek urzędnika E wg wariantu O',

(b) wskaźnik rezerwy wg wariantu B' oblicza się dzieląc wysokość tej rezerwy, obliczonej na dany termin bilansowy, przez wysokość rezerwy wg wariantu O', obliczonej na ten sam termin i mnożąc otrzymany iloraz przez liczbę 100.

Zestawienie 13. podaje wskaźniki koniunkturalne rezerw wariantu B'. Jak widać z tego zestawienia wskaźnik koniunkturalny podlega w obrębie drugiego cyklu silnym wahaniom (od 95,0 do 115,9), które jednak stopniowo maleją (w trzecim cyklu już tylko 96,1 do 111,3, w czwartym — od 96,4 do 109,7) i ustalają się ostatecznie w granicach od 96,6 do 108,6; czyli po upływie pięciu pełnych cykli bezwzględna wysokość rezerwy wariantu koniunkturalnego może być najwyżej o 3,4% niższa i najwyżej o 8,6% wyższa od odpowiedniej rezerwy wariantu bezkoniunkturalnego. Takie odchylenia mają już wprawdzie pewne znaczenie praktyczne dla działalności lokacyjnej, jest ono jednak nieznaczące.

Należy jeszcze zwrócić uwagę na to, że wahania obu wskaźników w obrębie poszczególnych cykli stają się w krótkim czasie niemal okresowe; okoliczność tę uwydatnia wyraźnie zestawienie 13.

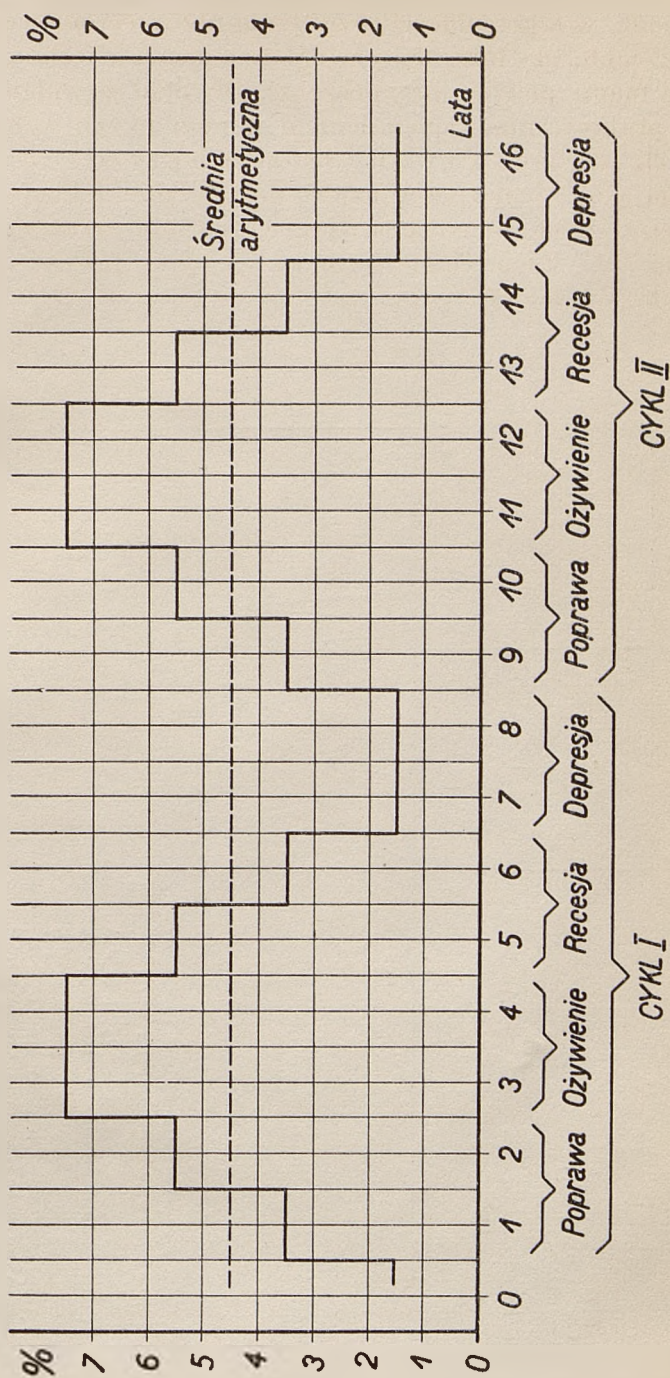
Zest. 13. Wskaźniki koniunkturalne wariantu B'

Cykl	F a z a							
	Poprawa		Ożywienie		Recesja		Depresja	
	R o k f a z y							
	I	II	I	II	I	II	I	II
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
I	.	.	159,0	162,6	149,2	132,2	113,7	100,3
II	95,0	96,9	105,1	113,4	115,9	113,3	106,7	99,7
III	96,1	96,9	102,3	108,6	111,3	110,1	105,2	99,6
IV	96,4	96,9	101,4	106,9	109,7	108,9	104,7	99,5
V	96,5	96,8	100,9	106,1	108,9	108,3	104,4	99,5
VI	96,9	96,9	100,7	105,9	108,6	108,1	104,3	99,5
VII	96,6	96,9	100,7	105,8	108,5	108,0	104,3	99,5
VIII	96,6	96,8	100,7	105,8	108,5	108,0	104,3	99,5
IX	96,6	96,8	100,7	105,8	108,5	108,0	104,3	99,5
X	96,6	96,8	100,7	105,8	108,6	108,0	104,3	99,5
XI	96,6	96,8

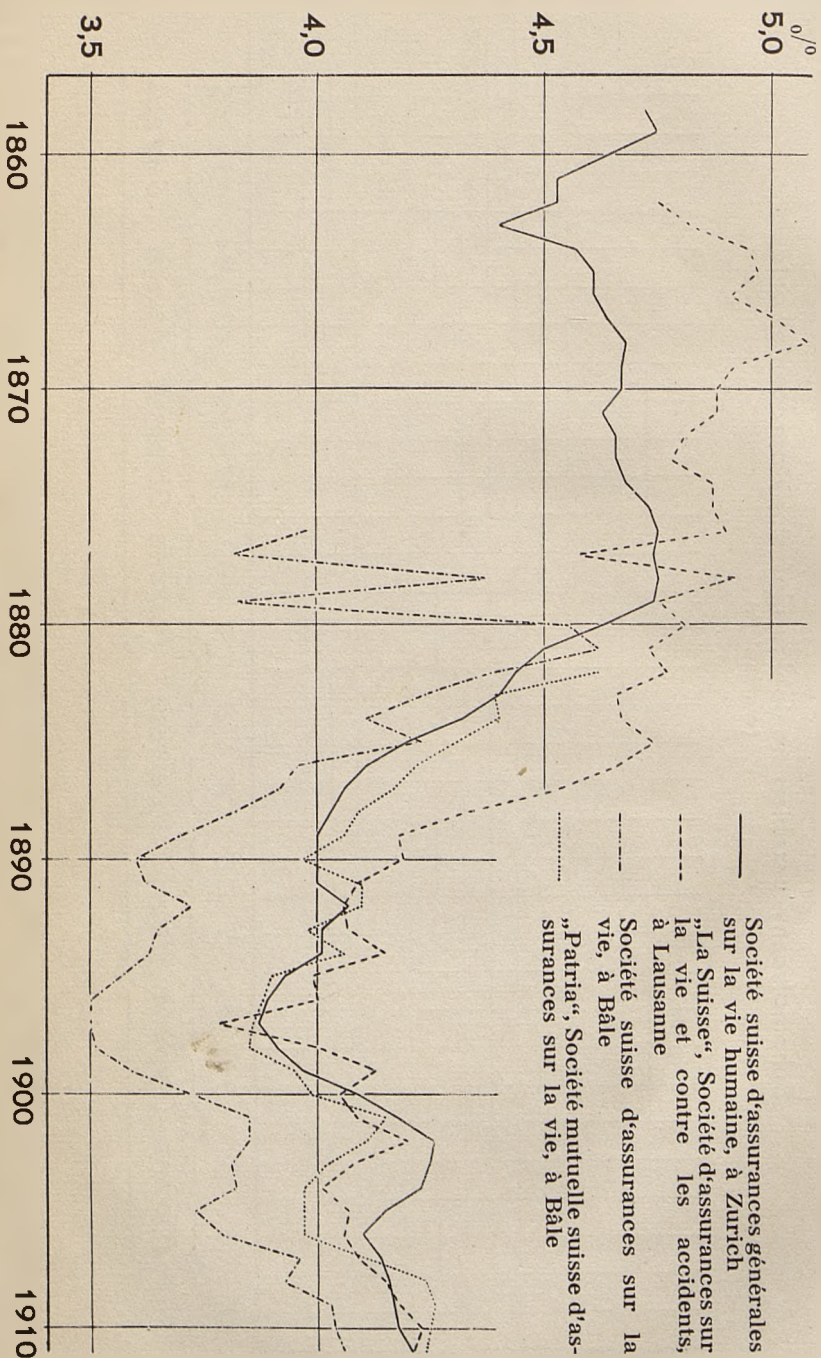
Kończąc omówienie naszych fragmentarycznych i skromnych rezultatów, chcielibyśmy podkreślić, że uzyskane przez nas wyniki zdają się nasuwać p r z y p u s z c z e n i e, że wpływ wahań koniunkturalnych na wysokość ogólnej składki przeciętnej i wysokość rezerw urządzenia emerytalnego w systemie ogólnej składki przeciętnej jest stosunkowo nieznaczny. Pomijanie tych wahań w praktycznych obliczeniach aktuarialnych, mających na celu obliczenie wysokości wystarczającej technicznie składki, czy przyszłego przebiegu rezerw (konieczne — jak się zdaje — w obecnym, zaczątkowym jednak stanie nauki o koniunkturze) nie powinno zatem grozić poważnymi błędami. Obliczenia aktuarialne są z natury rzeczy tylko przybliżone. Aktuariusz jest zawsze narażony na to, że gdy planuje konstrukcję lub kontroluje sytuację finansową jakiegoś urzą-

dzenia, w szczególności urządzenia ubezpieczeniowego, będzie popełniał takie, czy inne błędy w doborze podstaw technicznych. Chwilowo nie mamy powodu przypuszczać, aby błąd wywołany nieuniknionym w praktyce nieuwzględnieniem w rachunkach wahań koniunkturalnych p r z y s z ł y c h, był groźniejszy od tych błędów, które polegają na niemożności doboru dostatecznie dokładnych podstaw biometrycznych, niemożności przewidywania przyszłego kierunku trendów itd. Zagadnienie wymaga jednak jeszcze przeprowadzenia głębszych badań.

W y k r e s 1.
Schematyczny przebieg koniunkturalny stopy oprocentowania
(wariant A)

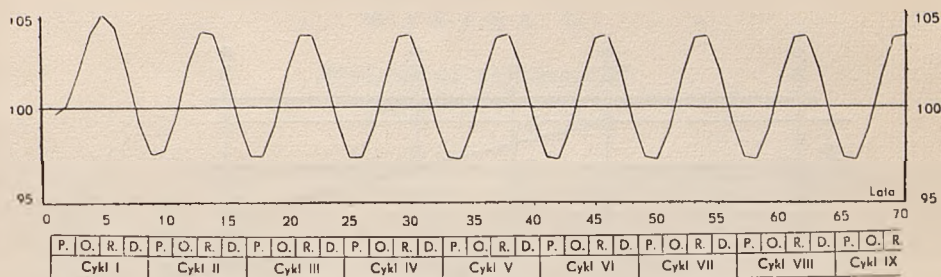


W y k r e s 2.
 Rentowność lokat czterech wybranych szwajcarskich towarzystw ubezpieczeń na życie
 w okresie 1858–1911

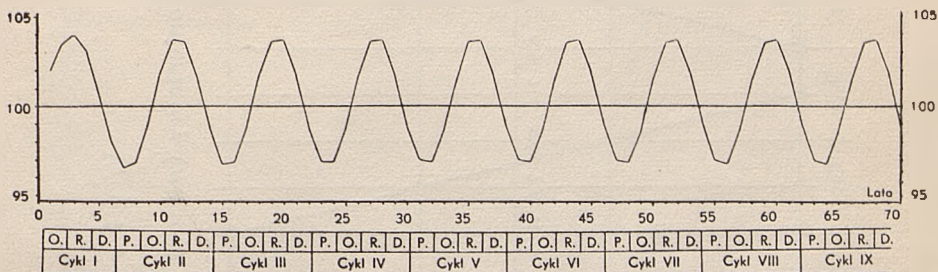


Wskaźniki koniunkturalne przebiegu rezerwy
(Podstawa wskaźnika — każdoroczna rezerwa wg wariantu O)

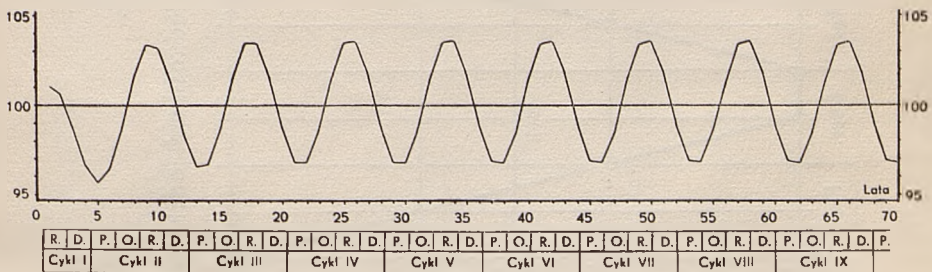
Wariant A



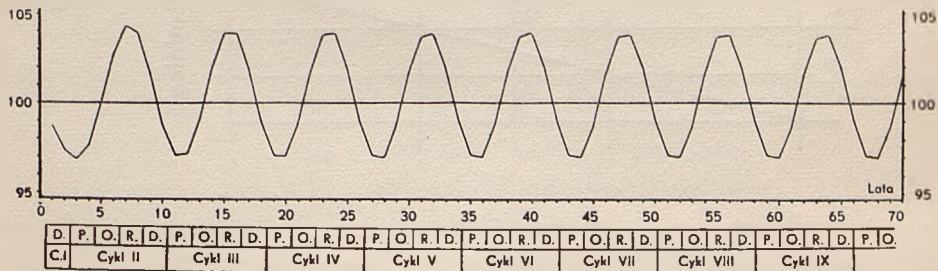
Wariant B



Wariant C

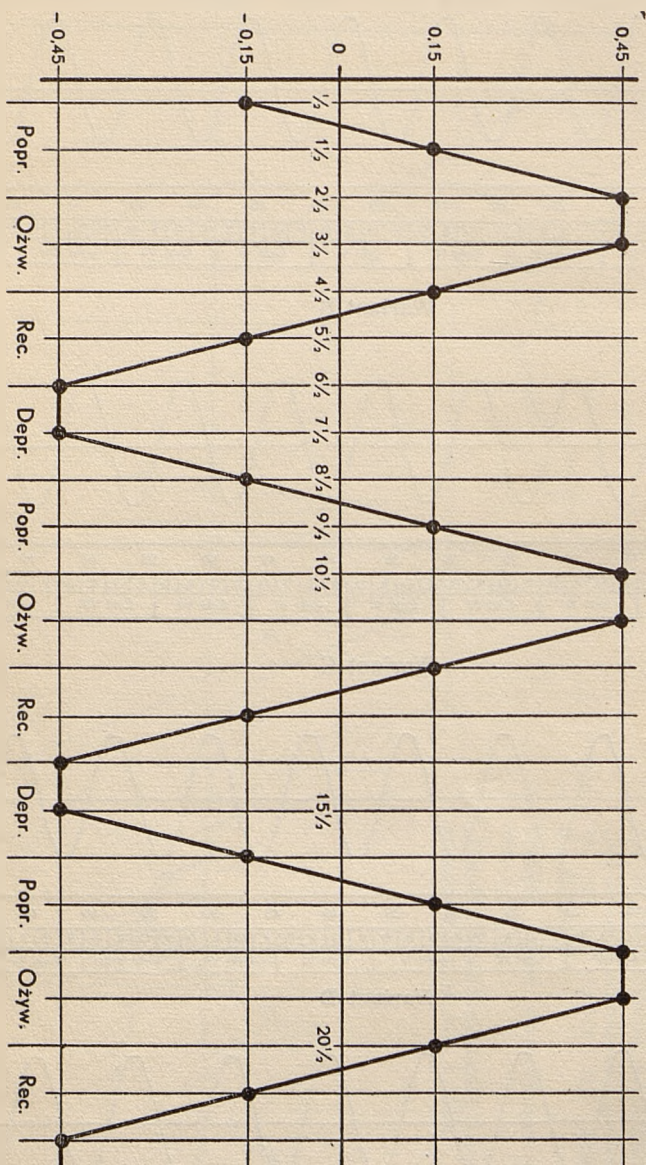


Wariant D

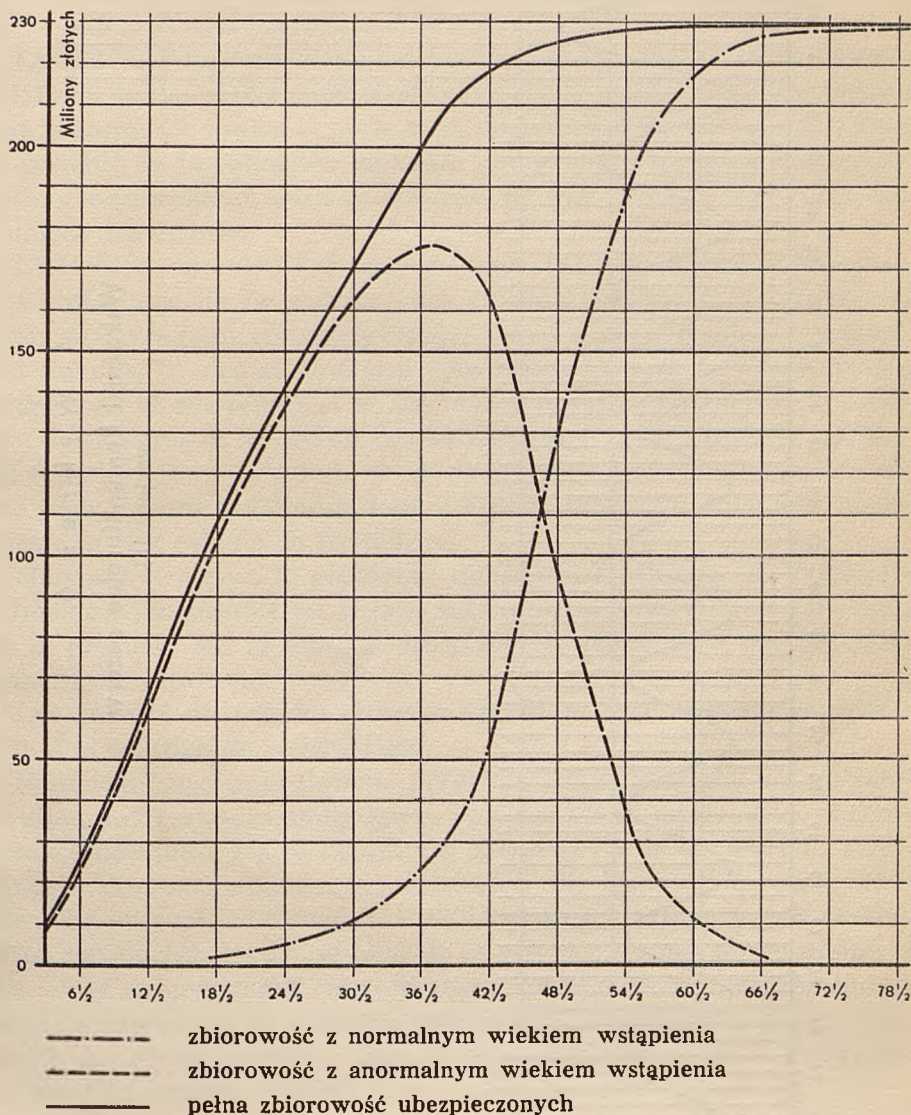


Wykres 4.

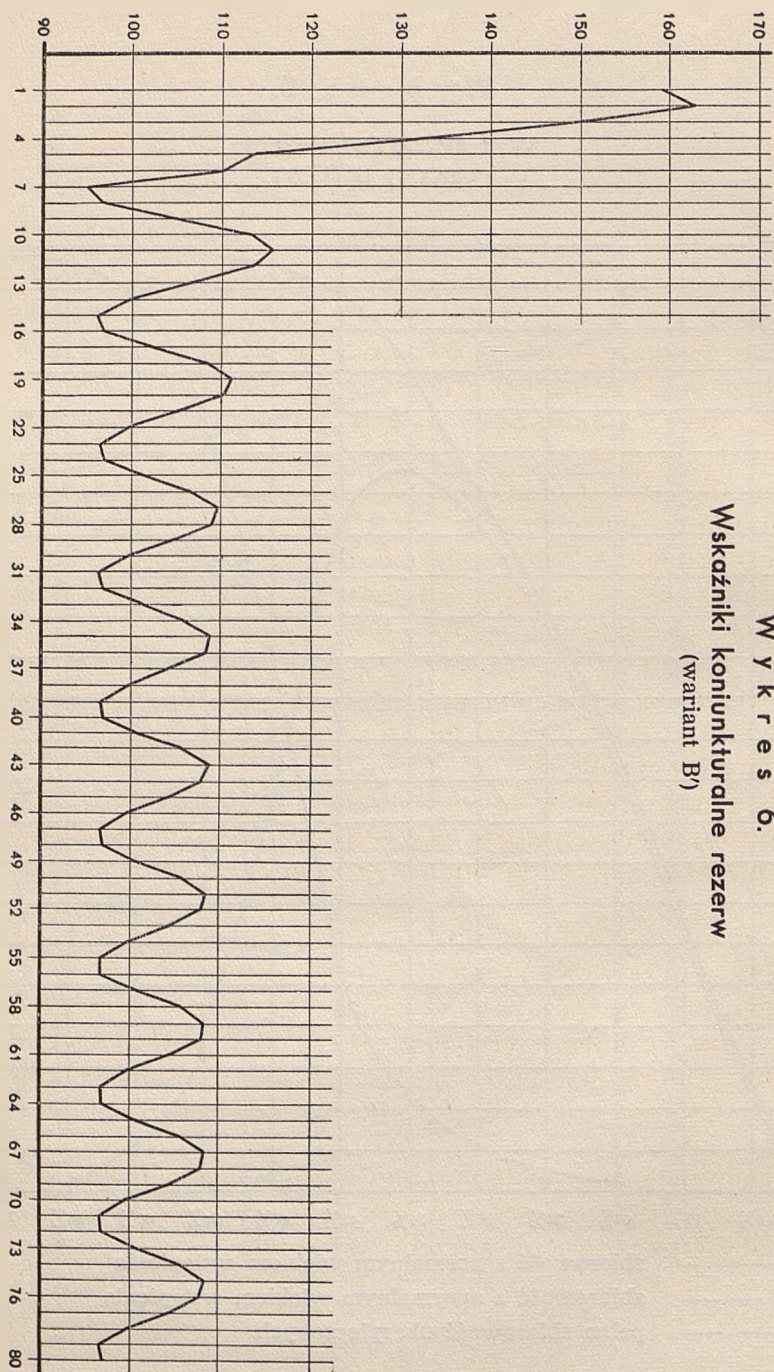
Przebieg koniunktury (wariant B) w jednostkach odchylenia średniego



Wykres 5.
Wydatki na świadczenia
(warianty O' i B')



Wykres 6.
Wskaźniki koniunkturalne rezerw
(wariant B)



ESSAI SUR L'INFLUENCE DE LA CONJONCTURE ÉCONOMIQUE SUR LES ÉTABLISSEMENTS DE RETRAITES.

Resumé

Les auteurs traitent d'établissements qui ont un caractère universel, mais de type assez spécial: de ceux notamment, où les prestations ont la forme de rentes et où le taux de la prime est invariable (d'est le système de la cotisation générale moyenne); les rentes et les cotisations représentent, dans ce système, un pourcentage déterminé des salaires des assurés.

L'actuaire, en calculant pour ce type d'établissement, le montant des cotisations ou la marche des futures réserves mathématiques, pose généralement comme principe la stabilité a) du nombre des assurés, b) des salaires qui constituent la base de l'assiette des cotisations et des rentes et c) du taux d'intérêts. En réalité, le nombre des assurés et le niveau des salaires et le taux d'intérêts varient en fonction des oscillations de la conjoncture; ces oscillations, comme nous l'avons mentionné tout à l'heure, sont généralement négligées dans les calculs de l'actuaire.

Mais alors se pose le problème, quelle est l'influence de ces oscillations conjoncturales sur le taux suffisant, au point de vue actuariel, de la prime et sur la marche des réserves, accumulées par l'établissement de retraites.

Les auteurs du présent ouvrage apportent leur modeste contribution à la solution de ce problème.

Renonçant aux spéculations mathématiques générales et, en particulier, aux formules analytiques, ils considèrent un nombre d'exemples numériques des systèmes de retraites et de la marche schématisée des oscillations conjoncturales. Se basant sur ces exemples, les auteurs sont enclins à affirmer que l'influence des oscillations conjoncturales sur le taux de la prime n'est pas très remarquable, et qu'en négligeant ces oscillations dans les bilans mathématiques des établissements de retraites (ce qui est inévitable, vu notre ignorance du développement futur de la conjoncture), l'on ne commet pas de trop grandes erreurs.

LITERATURA

1. Denkschrift über die Vermögenslage der Invaliden- und Hinterbliebenenversicherung am 1 Januar 1914.
2. D u m a s S. Le taux de l'intérêt dans l'assurance sur la vie en Suisse. *Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker*. Heft 8. str. 155 — 182. Bern 1913.
3. Gesetz zur Erhaltung der Leistungsfähigkeit der Invaliden-, der Angestellten- und der Knappschaftlichen Versicherung vom 7 Dezember 1933 (Reichsgesetzblatt I S. 1039) mit der amtlichen Begründung nebst der versicherungsmathematischen Denkschrift über die finanzielle Lage und die künftige Entwicklung der Invalidenversicherung und die geldlichen Auswirkungen des Gesetzes. Berlin 1933.
4. G r e n i e w s k i H. Zmienna stopa procentowania. *Przegląd Ubezpieczeń Społecznych*, zeszyt 3 i 4, str. 160 — 168 i 213 — 223. Warszawa 1935.
5. G r e n i e w s k i H. Renty i operacje finansowe. *Przegląd Ubezpieczeń Społecznych*, zeszyt 10, 11 i 12 z 1935 r., str. 653 — 665, 776 — 787 i 907 — 911 oraz zeszyt 1 z 1936 r., str. 25 — 29. Warszawa.
6. G r e n i e w s k i H. Z techniki ubezpieczeń społecznych. *Praca i Opieka Społeczna*. Str. 283 — 289. Warszawa 1930.
7. H a b e r l e r G. Systematyczna analiza teoryj cyklu gospodarczego. *Ekonomista*, tom IV, str. 3 — 41, Towarzystwo Ekonomistów i Statystyków Polskich. Warszawa 1935.
8. L i p i ń s k i E. O rozwoju koniunkturalnym. *Koniunktura Gospodarcza*. Instytut Badania Koniunktur Gospodarczych i Cen. Warszawa 1928.
9. M o r o z P. i Ł o m n i c k i Z. Memoriał aktuarialny o stanie finansowym Kasy Pensyjnej Spółki Brackiej w Tarnowskich Górach. Str. 98. Warszawa 1937.
10. O r ł o w s k i M. Spółki lokacyjne. Str. 202. Nakładem Funduszu Naukowego Zrzeszenia Pracowników Banku Polskiego. Warszawa 1935.
11. P r e s b u r g e r M. i W a n a t o w s k i A. O kalkulacji emerytalnych ubezpieczeń społecznych. *Przegląd Ubezpieczeń Społecznych*, zeszyt 8, str. 433 — 438, Warszawa 1933.
12. Podstawy techniczne ubezpieczenia emerytalnego pracowników umysłowych, str. 106. Zakład Ubezpieczeń Społecznych. Warszawa 1935.
13. T h o r p a n d M i t c h e l l. *Business Annals*. National Bureau of Economic Research, New York 1926.
14. U r e c h A. Sur les bases techniques de l'assurance collective. *Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker*, Heft 25, s. 31 — 106, Bern 1930.

Studia Instytutu Spraw Społecznych w dziale ubezpieczeń społecznych (1932 — 1937)

U podstaw wszelkich badań podejmowanych przez Instytut w dziale ubezpieczeń społecznych leży przeświadczenie, że problemy ubezpieczeniowe muszą być rozpatrywane na szerszym tle zagadnień gospodarczych i spraw rynku pracy. Wpływ przemian gospodarczych, zarówno o charakterze koniunkturalnym jak i strukturalnym, zaznacza się wyraźnie we wszystkich przejawach działalności ubezpieczeń społecznych.

Jedną z dziedzin bezpośrednio poddanych wahaniom gospodarczym jest akcja lokacyjna ubezpieczeń, której przebieg oraz wyniki są ściśle uzależnione od ogólnej sytuacji ekonomicznej kraju. Zagadnieniu temu Instytut poświęcił publikację L. Landau'a, zawierającą przegląd działalności lokacyjnej poszczególnych zakładów ubezpieczeń w latach 1924 — 1933 oraz wskazującą na rolę tej działalności w życiu gospodarczym Polski. Uzupełnieniem tej pracy będzie inna publikacja znajdująca się obecnie w przygotowaniu, poświęcona przedstawieniu teoretycznych podstaw i założeń działalności kapitalizacyjnej ubezpieczeń społecznych. Do grupy prac z tej dziedziny należy również opublikowane w niniejszym zeszycie studium Greniewskiego i Vielrosego mające za przedmiot zbadanie wpływu koniunktury gospodarczej na działalność finansową urzędów emerytalnych.

Niezależnie od wpływu na akcję lokacyjną instytucji ubezpieczeniowych, przemiany gospodarcze oddziałują przede wszystkim na kształtowanie się rynku pracy, co — wobec ścisłego związku sto-

sunku ubezpieczeniowego z faktem pozostawania w zatrudnieniu, — odbija się wszechstronnie na działalności ubezpieczeń. Struktura rynku pracy stanowi niejako naturalną podstawę, na której działają urządzenia ubezpieczeniowe. Znajomość poszczególnych elementów tej struktury, takich jak stan zatrudnienia, poziom zarobków, obrót pracowników, a także ich stan rodzinny, jest niezbędna, aby działalność tych instytucji mogła rozwijać się planowo i aby nie była zawieszona w próżni. Do tej dziedziny zagadnień zaliczyć należy przeprowadzone przez Instytut w r. 1932 badanie składu ludności robotniczej w Polsce, przystosowane do potrzeb tworzącego się wówczas powszechnego ubezpieczenia emerytalnego robotników. Badanie to zostało oparte na surowych materiałach spisu powszechnego z r. 1931. Objęło ono strukturę ludności robotniczej pod względem wieku, płci, stanu cywilnego, stosunków rodzinnych osób czynnych zawodowo i udziału w pracy zarobkowej żon i dzieci z podziałem według głównych grup produkcji. Wyniki tego badania zostały opracowane przez *Piekalkiewicza* i ukazały się w formie publikacji pt. „Sprawozdanie z badań składu ludności robotniczej w Polsce”.

Fakt ścisłego powiązania stosunku ubezpieczeniowego z pozostawaniem w zatrudnieniu sprawia, że wszelkie zmiany ilościowe na rynku pracy odbijają się bezpośrednio na stanie ubezpieczonych. Wahania liczby zatrudnionych powodują automatycznie rozszerzanie się lub zwężanie ram działalności ubezpieczenia oraz pociągają za sobą stały proces wstępowania i wychodzenia z ubezpieczenia poszczególnych osobników. Niektórzy z nich, po przebyciu pewnego okresu w ubezpieczeniu, opuszczają je na czas dłuższy, tracąc nabyte uprawnienia. Zjawisko to ma duże znaczenie finansowe dla instytucji ubezpieczeniowych, ponieważ u podstaw społecznego ubezpieczenia emerytalnego leży założenie zużytkowania pochodzących stąd nadwyżek na rzecz ogółu ubezpieczonych. Uwzględnienie tego faktu w obliczeniach aktuarialnych natrafia jednak na poważne przeszkody, wobec ewentualności odzyskiwania utraconych uprawnień w razie powrotu do ubezpieczenia i przebycia w nim pewnego okresu. Ze społecznego punktu widzenia zasada przepadalności uprawnień może budzić obawy pozbawienia prawa do świadczeń tych osobników, którzy, poniosłszy już pewne ciężary na rzecz ubezpieczenia, mogą tych świadczeń bardzo potrzebować.

Poza tym zbadanie, kim są osoby opuszczające ubezpieczenie na czas dłuższy, w jakiej liczbie składają się na nie bezrobotni a w ja-

kiej usamodzielniający się gospodarczo lub inne kategorie osób, może mieć duże znaczenie jako środek ujawnienia przesunięć na rynku pracy oraz rozmiarów nierejestrowanego bezrobocia.

Mając na uwadze wszystkie powyższe względy, Instytut przystąpił do zbadania grupy osób opuszczających ubezpieczenie, opierając się na razie na materiałach ubezpieczenia emerytalnego pracowników umysłowych w oddziale Zakładu Ubezpieczeń Społecznych w Chorzowie. Zbieranie odpowiednich materiałów metodą reprezentacyjną zostało już rozpoczęte. Po wstępnym opracowaniu otrzymanych tą drogą wyników, Instytut zamierza zebrać bliższe informacje o osobach, które opuściły ubezpieczenie, w drodze bezpośredniego wywiadu.

Sprawa zachowywania nabytych uprawnień, mająca — jak widzieliśmy — doniosłe znaczenie w stosunkach wewnątrzno-krajowych, nabiera specjalnego charakteru wobec emigrantów, którzy przenosząc się z kraju do kraju tym bardziej narażeni są na utratę praw ubezpieczeniowych, pomimo stałego opłacania składek. Zagadnieniu temu poświęcił Instytut publikację H. Horowitza i St. Fischlowitza pt. „Ochrona emigrantów w zakresie ubezpieczeń społecznych”. Praca ta wskazuje przede wszystkim na doniosłe znaczenie społeczne zagadnienia oraz na jego nieprzemijającą aktualność pomimo poważnego skurczenia się rozmiarów migracji międzypaństwowych. Następnie autorowie omawiają trzy systemy ochrony praw emigrantów w ubezpieczeniu emerytalnym, wysunięte na gruncie teoretycznych opracowań i mające w mniejszym lub większym stopniu zastosowanie praktyczne. Są to systemy: przekazywania składek, przekazywania kapitału technicznego oraz najbardziej rozpowszechniony w umowach międzynarodowych system łączenia ubezpieczeń. Dalsze rozdziały pracy Horowitza i Fischlowitza zostały poświęcone omówieniu rozwoju historycznego akcji ochrony praw emigrantów oraz konwencji z r. 1935 o zachowaniu praw rentowych emigrantów.

Następny ważny problem, leżący u podstaw programu Instytutu w dziale ubezpieczeń, można by określić jako zagadnienie granic i form zaspokajania potrzeb ubezpieczeniowych ludności. Pomimo na pozór powszechnego charakteru ubezpieczenia społeczne nie objęły bynajmniej ogółu ludności, narażonej na ryzyka zawodowe i potrzebującej zorganizowanej pomocy. Znaczna grupa pracowników pozostała poza ich zakresem, przy czym część z nich korzysta z innych urządzeń o charakterze ubezpiecze-

niowym, których struktura i podstawy gospodarki finansowej budzą niejednokrotnie poważne zastrzeżenia. Inna część pracowników nie jest objęta przez żadną instytucję ubezpieczeń; dotyczy to zwłaszcza pracowników samodzielnych, którzy jednak gospodarzo są w znacznym stopniu uzależnieni i których potrzeby ubezpieczeniowe nie mogą ulegać żadnej wątpliwości. W tych warunkach nasa się sama przez się konieczność zbadania z jednej strony podstaw działalności różnych zastępczych i dodatkowych urzędzeń ubezpieczeniowych i ich racji istnienia, z drugiej strony możliwości zaspokojenia potrzeb ubezpieczeniowych tych osób, które nie korzystają z żadnego systemu ubezpieczeń. Pierwszemu z tych zagadnień zostanie poświęcona specjalna publikacja zbiorowa pod redakcją dra W e r y h y, znajdująca się obecnie w przygotowaniu. W ramach tej publikacji zostanie przeprowadzona analiza zastępczych i dodatkowych systemów ubezpieczenia emerytalnego, takich jak emerytury urzędników państwowych, systemy emerytur, obowiązujące w monopolach, przedsiębiorstwach i bankach państwowych oraz w instytucjach prawa publicznego, urzędzenia ubezpieczeniowe samorządu terytorialnego, dodatkowe ubezpieczenie emerytalne górników i kolejarzy oraz dodatkowe ubezpieczenia w kasach pracowniczych. Na tle powyższej analizy będzie podjęta próba sformułowania konstruktywnych wniosków. W zakresie potrzeb ubezpieczeniowych osób samodzielnie zarobkujących Instytut podjął wstępne prace nad zagadnieniem ubezpieczenia rzemieślników. Równocześnie Instytut zajął się problemem ubezpieczenia chałupników, którzy są wprawdzie teoretycznie objęci zakresem ubezpieczeń, w praktyce jednak nie korzystają z nich niemal zupełnie, wobec uchylania się nakładców od zgłaszania ich do ubezpieczenia. Obie wyżej wzmiankowane grupy charakteryzują się zupełnie odmienną strukturą i warunkami pracy od masy pracowników najemnych oraz mają odrębne potrzeby ubezpieczeniowe; wobec tego ogólnie obowiązujący system ubezpieczeń nie zawsze jest dla nich odpowiedni.

Program prac Instytutu uwzględnia również w znacznym stopniu zagadnienie struktury i form świadczeń ubezpieczeniowych ze szczególnym uwzględnieniem kwestii dostosowania tych świadczeń do potrzeb ubezpieczonych. Głównym zamierzeniem jest tutaj zbadanie, w jakiej mierze ubezpieczenia społeczne spełniają swoje zadania i jaka jest skuteczność prowadzonej przez nie akcji świadczeniowej. Badanie tego typu zostało prze-

prowadzone przez prof. J. Neymana na odcinku działalności b. kas chorych. Stanowi ono interesującą próbę zestawienia potrzeb, w imię których zostało utworzone ubezpieczenie na wypadek choroby, ze stopniem zaspokajania tych potrzeb przez dawne kasy chorych. Badanie to odnosi się wprawdzie do działalności jednej tylko kasy chorych w Częstochowie i to w dość odległym okresie czasu (1925 — 1928), niemniej jednak ze względu na oryginalność ujęcia i wypracowanie metod, mogących mieć szersze zastosowanie, nie straciło bynajmniej swej aktualności. Wyniki badania zostały przedstawione w pracy prof. Neymana, która ukaże się w następnym zeszycie ubezpieczeniowym „Studiów i Materiałów”.

Inne badanie skuteczności akcji świadczeniowej ubezpieczeń społecznych zostało podjęte na odcinku świadczeń rentowych. Metodą reprezentacyjną zebrano materiał, odnoszący się do rent płynnych w dn. 1 stycznia 1936 r., z podziałem według grup społecznych i rodzajów renty, według grup województw, według wieku i płci rencistów oraz według wysokości wypłacanych rent. Materiał ten obejmuje zarówno ubezpieczenie wypadkowe jak i emerytalne robotników i pracowników umysłowych, a częściowo także dodatkowe ubezpieczenie górników na Śląsku. Materiał powyższy został już całkowicie opracowany i będzie stanowił podstawę publikacji, poświęconej zobrazowaniu liczebności i rozmieszczenia terytorialnego rencistów, ich struktury według płci i wieku oraz wysokości otrzymywanych przez nich rent. Publikacja ta będzie nosiła do pewnego stopnia charakter podręcznika z zakresu świadczeń ubezpieczeń długoterminowych.

Niezależnie od wysokości i zagęszczenia świadczeń może budzić zainteresowanie również ich *k o n s t r u k c j a*, która powinna być dostosowana do struktury rynku pracy i do potrzeb ubezpieczonych. Studia z tej dziedziny zamierza Instytut prowadzić na odcinku ubezpieczenia emerytalnego robotników.

W pewnym związku z zagadnieniami konstrukcji świadczeń pozostaje zamieszczona w niniejszym zeszycie praca *P r e s b u r g e r a* pt.: „Społeczne ubezpieczenie emerytalne z punktu widzenia ubezpieczenia jednostki”. W pracy tej autor stawia sobie za zadanie wydatnienie wpływu stosowania określonego systemu świadczeń na wartość świadczeń, jakie otrzymuje albo mógłby otrzymywać poszczególne ubezpieczone, w porównaniu z wartością wpłaconych przezeń

składek. Realizacja nakreślonego zadania została uzyskana w tej pracy przez potraktowanie emerytalnego ubezpieczenia społecznego jako zbioru ubezpieczeń jednostkowych. Dzięki tak oryginalnemu podejściu, praca Presburgera pozwala poznać ubezpieczenie emerytalne od nowej strony i rzuca interesujące światło na metody aktuarialne, stosowane dotychczas w ubezpieczeniach społecznych.

Z badaniami z dziedziny świadczeń ubezpieczeniowych wiąże się analiza przebiegu zjawisk losowych, stanowiących przedmiot ubezpieczenia, takich jak wypadkowość, inwalidztwo i chorobowość ubezpieczonych. Kształtowanie się tych zjawisk wywiera bezpośredni wpływ na działalność świadczeniową ubezpieczeń, toteż musi być uwzględniane stale w pracach aktuarialnych, mających na celu bądź to ustalenie przyszłego przebiegu ubezpieczeń, bądź też właściwą ocenę istniejących już zobowiązań. Do prac tego typu należy studium Łomnickiego i Wanatowskiego pt.: „Badania nad inwalidztwem, śmiertelnością i stanem rodzinnym górników polskich”, które zostanie zamieszczone w następnym zeszycie „Studiów i Materiałów”.

W pracach Instytutu z dziedziny ubezpieczeń społecznych doniosłą rolę odgrywają badania statystyczne. Zmierzając do pogłębienia tych badań oraz do wypracowania najwłaściwszych metod ich prowadzenia, Instytut opublikował pracę J. Neymana pt. „Zarys teorii i praktyki badania struktury ludności metodą reprezentacyjną”. Książka ta stanowi teoretyczną podstawę prac Instytutu, prowadzonych metodą reprezentacyjną, we wszystkich działach. Zajmuje się ona matematycznym ustaleniem stopnia dokładności wyników takich badań w zależności od schematu losowania oraz techniką praktycznego zastosowania metody reprezentacyjnej. Praca prof. Neymana oddała specjalne usługi przy wspomnianych wyżej badaniach Piekalkiewicza nad składem ludności robotniczej w Polsce. Niezależnie od tego ma ona jednak niewątpliwie znaczenie szersze jako podręcznik stosowania metody reprezentacyjnej w badaniach z różnych dziedzin.

Badania w zakresie statystyki ubezpieczeniowej Instytut podjął przede wszystkim na odcinku ubezpieczenia chorobowego. Cykl prac z tej dziedziny został zapoczątkowany przez Neymana publikacją pt. „Statystyka ubezpieczalni chorobowych w Anglii, w Niemczech i w Polsce”. Studia porównawcze, przeprowadzone w powyższych krajach, doprowadziły autora do wniosku, że statystyka chorobowa w Niemczech i w Polsce zajmuje się wyłącznie propa-

gandową ilustracją działalności instytucji ubezpieczeniowych, natomiast statystyka angielska jest wykładnikiem na wskroś praktycznych zagadnień, związanych z gospodarką tych instytucji. Wskazując na wielkie zalety statystyki angielskiej autor uzasadnia tezę, iż statystyka nie powinna być funkcją samoistną, luźno związaną z daną instytucją, lecz narzędziem pomocnym przy planowym jej gospodarowaniu.

Do wyników tej pracy nawiązuje następna publikacja Neymana i Iwaszkiewicza w pt. „Sprawozdanie tymczasowe z badań nad chorobowością techniczną robotników w niektórych przemysłach”. Wychodzi ona z założenia, że niezbędnym warunkiem oparcia gospodarki ubezpieczenia chorobowego na racjonalnych podstawach jest opracowanie tablic chorobowości analogicznie do tablic prawdopodobieństw zajęcia inwalidztwa, dożycia wieku starczego itp., używanych w ubezpieczeniach długoterminowych. Rola Instytutu w tym zakresie polega — zdaniem autorów — na zbadaniu możliwości sporządzenia tablic chorobowości w naszych warunkach, na opracowaniu metod, według których powinny one być ułożone, oraz na wykazaniu konsekwencji, jakie fakt opracowania tych tablic miałby dla gospodarki ubezpieczenia chorobowego. Analizując materiał statystyczny b. Kas Chorych w Częstochowie i w Chorzowie oraz Kasy Chorych Spółki Brackiej w Tarnowskich Górach, autorzy dochodzą do wniosku, że opracowanie tablic chorobowości na podstawie tego materiału jest możliwe. Przy okazji tych badań zostało stwierdzone, że pośród ubezpieczonych istnieją grupy o wyraźnie różnej chorobowości (specjalnie silne natężenie chorobowości pośród hutników w okręgu częstochowskim). W nawiązaniu do scharakteryzowanych powyżej badań prowadzone są przez Instytut dalsze prace nad statystyką chorobową. W następnym zeszycie „Studiów i Materiałów” ukaże się wspomniana już wyżej nowa publikacja prof. Neymana, poświęcona temu zagadnieniu.

Inną dziedzinę statystyki ubezpieczeniowej stanowi statystyka wypadków przy pracy, której zostały poświęcone dwie publikacje Instytutu. Pierwszą z nich stanowi praca Mazurkiewicza i Grubevskiego pt. „Zagadnienie statystyki wypadkowej ze stanowiska akcji zapobiegawczej”, należąca do serii wydawnictw Instytutu z działu bezpieczeństwa i higieny pracy. Publikacja ta zajmuje się tym działem statystyki wypadkowej, który nastawiony jest na potrzeby akcji bezpieczeństwa i ma na celu przede wszystkim analizę przyczyn wypadków w celu uzyskania podstawy do walki

z wypadkami. Omawia ona szczegółowo zakres danych statystycznych, niezbędnych do powyższego celu, oraz zawiera uwagi o organizacji statystyki wypadkowej, zakończone sformułowaniem konstruktywnych wniosków.

Drugą publikacją, poświęconą zagadnieniom statystyki wypadkowej jest praca W. A d a m i e c k i e g o pt. „Rola instytucji ubezpieczeń społecznych w akcji zapobiegania wypadkom przy pracy”. Książka ta wskazuje metody, według których należy prowadzić statystykę wypadków, aby mogła ona stanowić możliwie obiektywne kryterium oceny przedsiębiorstw pod względem bezpieczeństwa pracy. Uzyskanie ścisłych informacji w tym zakresie miałyby duże znaczenie praktyczne przy wymiarze składek wypadkowych, których wysokość uzależniona jest — jak wiemy — od stanu bezpieczeństwa pracy, panującego w danym warsztacie.

Specjalne miejsce zajmują w pracach Instytutu z a g a d n i e n i a o r z e c z n i c t w a l e k a r s k i e g o w ubezpieczeniach społecznych. Funkcje orzecznicze należą do najodpowiedzialniejszych zadań lekarzy ubezpieczeniowych. Od opinii lekarza zależy bowiem z jednej strony prawidłowe dysponowanie funduszami ogółu ubezpieczonych, a z drugiej — niejednokrotnie los ubezpieczonego i jego rodziny. To odpowiedzialne zadanie lekarzy orzekających jest bardzo trudne, nie ma bowiem miarodajnego sprawdzianu do oceny stopnia obniżenia się zdolności zarobkowej organizmu ludzkiego, którego sprawność zależy od wielu często niezbadanych lub niewymiernych czynników. Przy wydawaniu tej oceny nie wystarcza wiedza fachowa lekarska, konieczna jest również znajomość poszczególnych zawodów oraz sytuacji, panującej na rynku pracy. Ten sam brak fizyczny może bowiem w niejednakowym stopniu zmniejszać zdolność do zarobkowania w różnych zawodach lub też w różnej mierze zagrażać drogę do uzyskania pracy zależnie od panującej koniunktury. Pragnąc dopomóc lekarzom orzekającym w spełnieniu ich trudnych funkcji, Instytut wydał podręcznik orzecznictwa lekarskiego inwalidzkiego w ubezpieczeniach społecznych. Podręcznik ten stanowi dzieło zbiorowe pod redakcją d r a S t. R u d z i ń s k i e g o, opracowane przy udziale szeregu wybitnych lekarzy klinycystów. Są w nim rozpatrzone choroby poszczególnych układów i narządów w zakresie, zależnym od znaczenia tych schorzeń dla orzecznictwa inwalidzkiego. W rozdziałach specjalnych podane są: analiza pojęć prawnoubezpieczeniowych oraz charakterystyka ważniejszych zawodów.

Analogiczny podręcznik z zakresu orzecznictwa wypadkowego, ograniczający się jednak do wyłożenia głównych zasad tego orzecznictwa, znajduje się w przygotowaniu.

Po wydaniu serii podręczników, zaspokajających bezpośrednio potrzeby lekarzy orzekających, Instytut zamierza przystąpić do głębszej analizy samych zasad orzecznictwa lekarskiego na tle porównawczym.

Ważną dziedzinę prac Instytutu stanowią sprawy leczenia ubezpieczenia. W zakresie tych spraw szczególnie silnie wystąpiła tendencja Instytutu wiązania ze sobą zagadnień, należących do różnych rodzajów ubezpieczeń, ale dotyczących jednego, tegoż samego człowieka, korzystającego ze świadczeń. Powiązanie to zachodzi między ubezpieczeniem emerytalnym a organizacją świadczeń ubezpieczeń krótkoterminowych. Z tego pogranicza Instytut opublikował pracę dra St. Rudzińskiego o współdziałaniu instytucji ubezpieczeń społecznych w stosowaniu leczenia zapobiegawczego. Istnieje również potrzeba powiązania świadczeń leczniczych ubezpieczenia chorobowego i wypadkowego. Jako problem styczny występuje tutaj przede wszystkim sprawa właściwej organizacji pierwszej pomocy dla ofiar wypadków w zatrudnieniu. Sprawie tej została poświęcona publikacja dra B. Nowakowskiego pt. „Organizacja pierwszej pomocy w zakładach pracy”, należąca do serii wydawnictw Instytutu z działu bezpieczeństwa i higieny pracy. W związku z tym pozostaje zagadnienie właściwej organizacji leczenia ofiar wypadków poza zakładami pracy. W celu głębszego zanalizowania tego problemu Instytut przeprowadził badanie materiału statystycznego, dotyczącego z jednej strony wypadków śmiertelnych i ciężkich (ponad 50% utraty zdolności do pracy), z drugiej strony — wypadków ocznych. Wybór tej drugiej grupy wypadków został dokonany w celu wnikięcia w zagadnienie pomocy specjalistycznej, która nasuwa swoiste trudności i problemy. Zbadany materiał obejmuje wypadki, zaszłe na obszarze całego kraju w latach 1933 i 1934 (jeśli chodzi o wypadki oczne — 1932 - 1934). Na podstawie tego materiału przygotowywane są prace dra W. Dzułyńskiego (wypadki śmiertelne i ciężkie) oraz dra M. Zacherta (wypadki oczne). Celem tych prac jest stwierdzenie, w jakiej mierze brak należytej i szybkiej pomocy lekarskiej jest przyczyną śmierci lub też wpływa na trwałą utratę zdolności do pracy. Mają one również wykazać, jakie braki istnieją w obecnej organizacji leczenia ofiar wypadków i w jaki sposób nale-

żałoby dążyć do ich usunięcia. Prace dra Dżułyńskiego i dra Zacherta zostaną wydane w jednym z dalszych zeszytów „Studiów i Materiałów”, łącznie z referatem, omawiającym stan prawno-organizacyjny leczenia wypadkowego za granicą.

Podobne badanie do omówionego powyżej zamierza Instytut przeprowadzić na odcinku pomocy chirurgicznej dla ofiar wypadków. W tym celu został opracowany w Instytucie schemat klasyfikacji wypadków według rodzaju i miejsca uszkodzenia, który ma być zastosowany w zestawieniach statystycznych Zakładu Ubezpieczeń Społecznych. Zestawienia te pozwolą zorientować się w nasileniu liczbowym poszczególnych rodzajów wypadków, co będzie stanowiło podstawę do dalszych badań.

Zamierzeniem Instytutu jest również przeprowadzenie głębszych badań nad organizacją opieki lekarskiej w ubezpieczeniu chorobowym. Jako pierwszy krok w tym kierunku planowana jest ankieta, skierowana do szeregu lekarzy ubezpieczeniowych i osób, mających bezpośrednią styczność z zagadnieniami organizacji leczenia.

Specjalną wagę przywiązuje Instytut do prac o charakterze podręcznikowym. Prace te, których brak daje się dotkliwie odczuć w naszej literaturze ubezpieczeniowej, mają za zadanie z jednej strony przyczynienie się do podniesienia poziomu pracowników instytucji ubezpieczeń społecznych, z drugiej strony — spopularyzowanie zagadnień ubezpieczeniowych wśród osób, które nie mają z nimi bezpośredniej styczności. Dotychczas ukazała się jedna praca z tego cyklu: p r o f. K. K r z e c z k o w s k i e g o p t. „Idee przewodnie ubezpieczeń społecznych”. W przygotowaniu znajduje się praca p r o f. J. Ł a z o w s k i e g o o ogólnych zasadach ubezpieczeń społecznych. Na dalszym planie projektowane jest wydanie prac o podstawach matematycznych ubezpieczeń społecznych oraz o zasadach ubezpieczenia wypadkowego.



INSTYTUT SPRAW SPOŁECZNYCH

FUNDACJA NAUKOWA UBEZPIECZEŃ SPOŁECZNYCH

Celem Instytutu jest prowadzenie działalności naukowej, instrukcyjnej i propagandowej w zakresie ochrony pracy, ubezpieczeń społecznych, rynku pracy, opieki społecznej i zdrowia publicznego, a do szczególnych zadań Instytutu należy opracowywanie planów w zakresie akcji zapobiegawczej na różnych odcinkach życia społecznego.

Sprawy ubezpieczeniowe i statystyczne

Neyman J. Zarys teorii i praktyki badania struktury ludności metodą reprezentacyjną. str. 125	5.00
Piekalkiewicz J. Sprawozdanie z badań składu ludności robotniczej w Polsce metodą reprezentacyjną. (Na podstawie materiału spisu powszechnego w dniu 9.XII. 1931). str. 248	5.00
Neyman J. Statystyka ubezpieczalni chorobowych w Anglii, w Niemczech i w Polsce str. 116	3.00
Adamiecki W. Rola instytucji ubezpieczeniowych w akcji zapobiegania wypadkom przy pracy. str. 76 + VII wykresów	3.00
Landau L. Działalność lokacyjna ubezpieczeń społecznych i jej rola w życiu gospodarczym Polski w latach 1924 — 1932. str. XIII + 112	4.00
Iwaskiewicz K. i Neyman J. Sprawozdanie tymczasowe z badań nad chorobowością techniczną robotników w niektórych przemysłach str. XI + 58	1.00
Rudziński S. Współdziałanie instytucji ubezpieczeń społecznych w stosowaniu lecznictwa zapobiegawczego. str. 80	2.50
Fischlowitz S. i Horowitz H. Ochrona emigrantów w zakresie ubezpieczeń społecznych. str. VI + 191	4.50
Krzczkowski K. Idee przewodnie ubezpieczeń społecznych. str. 210	4.50
Orzecznictwo lekarskie inwalidzkie w ubezpieczeniu społecznym. Praca zbiorowa pod redakcją dra St. Rudzińskiego. str. VII + 436	

Pełny wykaz wydawnictw ze wszystkich działów Instytut wysyła na żądanie

ADRES INSTYTUTU: WARSZAWA, ul. Wilcza 1, tel. 7-07-41.

Wejście do dyrekcji i biblioteki Instytutu: Al. Ujazdowska 41, II p., m. 5.

