SPRAWOZDANIE DWUNASTE

DYREKCYI C. K. III. GIMNAZYUM

W KRAKOWIE

za rok szkolny 1895.

Ch-

TREŚĆ:

1. Rachunek wyrównania błędów spostrzeżeń na podstawie metody najmniejszych kwadratów. Przez Bronisława Gustawicza. Część I. (Die Ausgleichungsrechnung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadrate. Von Bronislaus Gustawicz. I. Theil).
2. Sprawozdanie Dyrektora Zakładu.

KRAKÓW.
Nakładem funduszu naukowego. — W drukarni A. Koziańskiego
1895.

RACHUNEK
WYRÓWNANIA BŁĘDÓW SPOSTRZEŻEŃ
na podstawie
metody najmniejszych kwadratów.

Przez
BRONISŁAWA GUSTAWICZA,
Profesora c. k. Gimnazyum III. w Krakowie.

WSTĘP.

1. Pierwszy, co zajął się teoretycznem badaniem błędów spostrzeżeń, był Józef Ludwik Lagrange w r. 1770[1]. Wszelako teorya jego, oparta na zasadach rachunku prawdopodobieństwa, stosująca je do błędów spostrzeżeń, poszła wkrótce w zapomnienie.

Odkrycie dzisiejszej metody najmniejszych kwadratów wyprzedza teorya wyrównania błędów, skreślona przez Piotra Szymona Laplace'a, który w celu wyznaczenia wymiarów ziemi obliczył z większej liczby niż 2 pomiarów ziemskich zapomocą równań kształtu:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots\dots + w_1 = 0,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots\dots + w_2 = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n x + b_n y + c_n z + \dots\dots + w_n = 0,$$

żądane niewiadome na podstawie dwóch warunków, tj.: 1) algebraiczna suma błędów jest równa zeru, 2) bezwzględna suma błędów ma być najmniejszością. Teoryę tę podał Laplace w dziele: „Traité de mécanique céleste".[2]

Rachunek wyrównania błędów zapomocą metody najmniejszych kwadratów, dzisiaj powszechnie przyjęty, ogłosił drukiem Adryan Marya

[1]) Encke. Berliner astronomischer Jahrbuch f. 1853. str. 310-351.
[2]) T. II. An VII. (1802). Première partie. Livre III. art. 40. P. 143.

Legendre w r. 1805 w dziele: „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes“ (Paris. 1806) w dodatku na str. 72—80 p. t.: „Sur la méthode des moindres carrés“. Powtórnie zaś ogłosił tę pracę w r. 1810 w „Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'institut de France“.[1]

Niezależnie od Legendre'a wynalazł metodę najmniejszych kwadratów Karol Fryderyk Gauss w r. 1795 jako słuchacz matematyki w uniwersytecie w Getyndze, którą ogłosił drukiem dopiero w r. 1809 w dziele: „Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium“. A chociaż Legendre'owi przynależy się pierwszeństwo ogłoszenia pracy swej, uważamy Gauss'a za wynalazcę i ojca metody najmniejszych kwadratów, gdyż jemu bezsprzecznie przypisać należy obok pierwszeństwa odkrycia, przedewszystkiem pierwszeństwo zastosowania, a głównie rozwinięcie większej części tej nauki, którą dziś zowiemy metodą najmniejszych kwadratów.[2] Dzieła Gauss'a, traktujące o tej metodzie, są następujące:

1809. *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium.* Hamburg 1809.[3]

1810. *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809, societati regiae tradita Nov. 25. 1810.*[4]

1816. *Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen.*[5]

1821. *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior, societati regiae exhibita Febr. 15. 1821.*[6]

1823. *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars posterior, societati regiae exhibita Febr. 2. 1823.*[7]

1826. *Supplementum theoriae combinationis erroribus minimis obnoxiae, societati regiae exhibita Sept. 16. 1826.*[8]

W zbiorowem wydaniu dzieł Gauss'a p. t.: „Carl Friedrich Gauss' Werke, herausgegeben von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen“ (1863—1874), „Theoria motus“ obejmuje tom VII., „Disquisitio de elementis ellipticis Palladis“ tworzy początek tomu VI., prace zaś o metodzie najmniejszych kwadratów znajdują się w tomie IV.

Powyższe teorye Gauss'a z cennymi dodatkami Bessel'a przerobił Encke i podał p. t. „Ueber die Methode der kleinsten Quadrate“ w dodatku do „Berliner astronomisches Jahrbuch“

---

1) Année 1810. Seconde partie. str. 149 i nast.

2) Por. Gauss' Werke. Bd. VI. str. 56—59.

3) Lib. II. sect. III.

4) W „Commentationes societatis regiae scientiarum Goettingensis recentiores“. Vol. I. 1808—1811.

5) W „Zeitschrift f. Astronomie und verwandte Wissenschaften herausgegeben von Lindenau und Bohnenberger“. Tübingen. 1816. T. I. str. 185—196.

6) W „Commentationes soc. reg. sc. Goett. rec“. Vol. V. 1819—1822 str. 33—62.

7) Ibidem. Vol. V. 1823. str. 63—90.

8) Ibidem. Vol. VI. 1823—1827. str. 57—98.

z lat 1834, 1835 i 1836. W wydaniu zbiorowem: „J. E. Encke's astronomische Abhandlungen zusammengestellt aus den Jahrgängen 1830—1862 des Berl. astr. Jahrb." tworzy powyższa rozprawa o metodzie najmniejszych kwadratów rozdziały XII., XIII. i XIV. pierwszego tomu (1866).

2. Wszystko to atoli odnosi się do teoretycznych prac Gauss'a o tejże metodzie. Na praktyczne zastosowanie tej teoryi Gauss'a do wyrównania tryangulacyjnego dopiero w najnowszych czasach zwrócono szczególniejszą uwagę; uczynił to mianowicie podpułkownik O. Schreiber w „Zeitschrift f. Vermessungskunde" (1879, str. 141) i major Gaede w artykule: „Beiträge zur Kenntnis von Gauss' praktisch-geodätischen Arbeiten" w powyższem czasopiśmie (1885, str. 113—225), również W. Jordan i K. Steppes w rozprawie: „Das deutsche Vermessungswesen, historisch-kritische Darstellung, auf Veranlassung des deutschen Geometer-Vereins unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgegeben" (2 Bde. Stuttgart. 1882).

Bessel rozwinął w rozprawie: „Untersuchungen über die Bahn des Olber'schen Kometen"[1], jakoteż w dziełku: Fundamenta astronomiae deducta ex observationibus J. Bradley"[2] teoryę rozdziału błędów na podstawie licznych spostrzeżeń.

Nadradca G. H. L. Hagen przedstawił w „Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung" (Berlin. 1837, drugie wyd. 1867) nader ciekawą teoryę błędów. Tę samą rzecz rozwinął także Bessel w rozprawie: „Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler"[3].

3. Do pierwszych podręczników, służących do nauki o metodzie najmniejszych kwadratów, zaliczamy powyżej wspomniane dzieło Hagen'a, następnie Krystyana Ludwika Gerlinga p. t.: Die Ausgleichungsrechnung der praktischen Geometrie oder die Methode der kleinsten Quadrate in ihren Anwendungen auf geodätische Aufgaben". (Hamburg und Gotha. 1843). Od tego czasu szereg prac o teoryi najmniejszych kwadratów, już to popularnych, już też ściśle naukowych wzrósł do okazałej liczby. Już w r. 1877 wylicza Merriman w „A list of writings relating to the method of least squares"[4] 408 tytułów rozpraw, dotyczących tego przedmiotu

Na końcu rozprawki podaję znaną mi literaturę tegoż przedmiotu; dzieła oznaczone gwiazdką służyły mi za podstawę w opracowaniu niniejszej pracy. Nie roszczę sobie bynajmniej praw do oryginalności, która w wykładzie elementarnym nauki jest tylko do pewnego stopnia możebna; wszelako starałem

---

[1]) W „Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften. Mathematische Klasse". 1812—1813. str. 119.

[2]) Koenigsberg 1818. str. 18—21.

[3]) Astronomische Nachrichten. XV. Bd. Nr. 358 i 359. Octob. 1838. str. 369 i nast.

[4]) Transact. of the Connecticut. Acad. Vol. IV. 1877. Por. Czuber. Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig. 1891.

się w wykładzie o jak największą jasność, by praca ta mogła wzniecić w czytelniku zamiłowanie do tej gałęzi nauk matematycznych, której bogata literatura dowodzi nadzwyczajnego zainteresowania się nią przez geometrów, fizyków, geodetów i astronomów, jakoteż by pobudziła chętnych do samodzielnych na tem polu poszukiwań. Również uważam za zbyteczne wymienianie szczegółowe, co z każdego z wspomnianych dzieł przeniosłem do mej pracy a co jest owocem moich studyów. Rozumny i światły czytelnik, dobrze obeznany z piśmiennictwem tego przedmiotu, sam to dostrzeże i pozna, że cokolwiek z nich wyjąłem, przerobiłem poprzednio na swój sposób, starając się na każdym kroku materyał tak wyzyskać, aby tej pracy zapewnić jak największą użyteczność.

Wkońcu wspomnę, że w literaturze polskiej znane są z tego zakresu tylko dwie mniejsze prace, tj. prof. Dominika Zbrożka i jego asystenta Augusta Witkowskiego, obecnie profesora fizyki w uniwersytecie Jagiellońskim w Krakowie. Praca pierwszego p. t. „Zastosowanie wyznaczników w teoryi najmniejszych kwadratów“ znajduje się w „Pamiętniku Akademii Umiejętności w Krakowie“ (Wydział matem. przyrodniczy. T. IX, 1884. Str. 199—218). Praca druga nosi tytuł: „Teorya najmniejszych kwadratów. Według wykładów prof. D. Zbrożka, napisał August Witkowski, asystent geodezyi w szkole politechnicznej we Lwowie“. (Autograf. Lwów. 1879. Str. 119).

Oprócz teoryi podaję jeszcze liczne, stosownie dobrane przykłady, wzięte z rzeczywistości, gdyż przykłady zmyślone nie miałyby tutaj żadnej racyi bytu i nie przyniosłyby uczącemu się najmniejszej korzyści. Przykłady te praktyczne, wprawdzie obliczone przez dotyczących spostrzegaczy, obliczyłem je powtórnie po największej części w odmienny sposób, stosownie do potrzeb książki. Posłużyć one mają za wzorce, podług których w obliczaniu postępować należy.

Pisałem w Krakowie, w kwietniu 1895.

Błędy spostrzeżeń. — Rodzaje błędów.

1. Wszelkie pomiary i spostrzeżenia, choćby z największą starannością i dokładnością wykonywane, nie prowadzą nigdy do poznania prawdziwej wartości ilości niewiadomej, ale dają wyniki, mniej lub więcej od tej wartości się różniące. Różnice pomiędzy wartością prawdziwą a spostrzeganą lub pomierzoną zowiemy **błędami spostrzeżeń**. Błędy te są wogóle mniejsze lub większe stosownie do tego, czy do pomiaru lub obserwacyi użyliśmy przyrządu dokładniejszego, czy też mniej dokładnego, jakoteż czy użyliśmy tego, czy też owego sposobu spostrzegania.

Błędy spostrzeżeń udzielają się wszystkim ilościom, jakie z wyników pomiaru lub spostrzegania dają się wyprowadzić lub obliczyć; stąd to pochodzi, że i te ilości wogóle nie są wolne od mniejszych lub większych błędów. Aby zaś ze spostrzeżeń i pomiarów uzyskane ilości zużytkować do pewnego, oznaczonego celu, trzeba się postarać, aby błędy nie przekraczały pewnej granicy, która wogóle może być rozmaitą, co znowu zależy od celu, w jakim dokonano pomiaru lub też spostrzeżenia.

Jeżeli np. mamy zużytkować plan sytuacyjny miejskiej parceli, wysoko cenionej, do sporządzenia planów zabudowania tej parceli a powierzchnię parceli do obliczenia kosztów kupna na podstawie ugodzonej ceny za jednostkę powierzchni, to jasną jest, że granice, wśród których błędy wszystkich pomiarów się znajdują, muszą być stanowczo mniejsze, niż w tym przypadku, gdy używamy planu sytuacyjnego parceli łąki i jej powierzchni do sporządzenia kosztorysu i planu nawodnienia tej parceli.

Dlatego też stosownie do celu, jaki osiągnąć zamierzamy przez pomiary lub spostrzeżenia, potrzeba określić ściśle wielkość błędów, którym mogą podlegać ilości mające się wyznaczyć, a więc odpowiednio do tego wielkość błędów spostrzeżeń, czyli krócej się wyrażając, potrzeba ściśle określić **stopień dokładności**, jaki mieć chcemy.

2. Od stopnia dokładności wykonywanych pomiarów lub spostrzeżeń zależy w dalszym ciągu potrzebny do osiągnięcia tegoż nakład pracy i kosztów. Im dokładniej roboty będziemy przeprowadzali, tem wogóle większy będzie nakład pracy i kosztów. Wszelako zawsze żądamy, aby ten nakład sprowadzić do najmniejszości, a więc w każdym razie należy rozwiązać następujące zadanie: „Do wykonać się mających spostrzeżeń lub pomiarów wybrać takie przyrządy i taki sposób postępowania, aby przy ile możności najmniejszym nakładzie pracy i kosztów osiągnąć taki stopień dokładności, jakiego cel pracy wymaga“.

Aby to zadanie rozwiązać, potrzeba zająć się szczegółowo błędami spostrzeżeń i uzyskać prawa, którym one podlegają. Jest to przedmiotem tak zwanej teoryi błędów spostrzeżeń. Zadaniem więc tej teoryi nie może być obliczenie prawdziwej wartości, co wogóle jest niemożebne, lecz ustawienie metodycznego postępowania, opartego na zasadach rachunku prawdopodobieństwa, podającego sposoby wyznaczenia wartości najbardziej ze spostrzeżeniami zgodnej, a co najważniejsza, dozwalającego każdej chwili ocenić ściśle stopień dokładności podjętej pracy.

3. Różnice pomiędzy wartością prawdziwą a spostrzeganą pochodzą z równoczesnego pojawiania się błędów trojakiego rodzaju, tj. a) błędów grubych, b) stałych, c) przypadkowych.

4. Błędy grube powstają wskutek grubego przeoczenia podczas pomiaru lub spostrzeżenia, np. przy pomiarach długości błędy takie wynosić mogą 1 m., 2 m., 5 m., 10 m. itd., których przyczyną jest błędne odczytanie, albo błędne liczenie liczby całkowitych łat, lub całkowitych długości łańcucha, lub taśmy mierniczej.

Pomiary należy tak przeprowadzać, aby pojawiające się błędy grube wpadały miernikowi zaraz w oko; wyniki pomiarów, takimi błędami obarczone, należy odrzucić i zastąpić je nowymi, powtórnym pomiarem uzyskanymi, a od grubych błędów wolnymi rezultatami. Jak należy najodpowiedniej urządzać pomiary i spostrzeżenia, by ustrzedz się grubych błędów, i jak wyszukać wyniki pomiarów, grubymi błędami obciążone, należy do zakresu miernictwa. O tego rodzaju błędach w dalszym ciągu tej pracy mówić nie będziemy.

5. Błędy występujące ustawicznie w jednym kierunku we wszystkich spostrzeżeniach bez wyjątku i odznaczające się tą wspólną cechą, że wszystkie spostrzeżenia powiększają albo pomniejszają o jednę i tę samę ilość, zowiemy błędami stałymi. Zródłem tych błędów bywa pospolicie wadliwe urządzenie przyrządu, służącego do wykonywania spostrzeżeń, następnie wła-

ściwość samej osoby spostrzegającej, albo też wreszcie działanie rozmaitych innych wpływów.

Jeżeli odmierzamy kąt zapomocą teodolitu, na którego kole uskuteczniono podziałkę niedokładnie, popełniamy zawsze błąd, wynikający z wadliwości podziałki. Jeżeli luneta teodolitu nie jest dokładnie centralnie ustawiona, odczytujemy również stale błędnie wielkość kąta, między dwoma kierunkami zawartego. Przy mierzeniu długości występują stałe błędy, jeżeli użyte do pomiaru łaty, taśmy lub łańcuchy miernicze nie posiadają dokładnych długości itd. Stosownie do tego, czy są za długie, czy też za krótkie, otrzymamy za mały, albo też za wielki wynik pomiaru. Niemniej popełniamy błąd stały w mierzeniu długości wskutek nienależytego przekładania lub przesuwania łaty lub łańcucha, zbaczając od wytkniętego kierunku w jednę lub drugą stronę. W tym przypadku wynik pomiaru jest za wielki.

Stałe błędy spostrzeżeń należy co do ich wielkości sprowadzić do najmniejszości przez możliwie dokładne zrektyfikowanie przyrządów. Następnie należy pomiary i spostrzeżenia, ile możności, w ten sposób wykonać, aby błędy stałe nie wpływały szkodliwie na wynik rachunku. Wogóle, jeżeli pojawiają się błędy stałe w pomiarach lub spostrzeżeniach, należy je albo naprzód wyznaczyć, albo też z rachunku wyrugować. Jak zaś to się uskutecznia, uczy nas o tem również nauka miernictwa.

6. B ł ę d y p r z y p a d k o w e są to nieuniknione, na wynik pomiaru tylko przypadkowo, czy to w dodatnim, czy też odjemnym kierunku wpływające, po usunięciu błędów grubych i stałych pozostałe błędy spostrzeżeń. Źródła tych błędów szukać również należy w niedokładności przyrządów i naszych zmysłów; wszelako dodać winniśmy, że przyczyny, które je wywołują, są bardzo liczne i bardzo zmienne do tego stopnia, że uchylają się w zupełności zpod kontroli naszych zmysłów. Dlatego też to powiadamy, że błędy przypadkowe składają się z bardzo wielu m a ł y c h b ł ę d ó w c z ą s t k o w y c h. Jeżeli np. zapomocą teodolitu mierzymy kąt, to błąd przypadkowy wytwarza się z szeregu nieznacznych błędów, które powstają przy ustawieniu przyrządu ponad wierzchołkiem kąta, przy celowaniu do sygnałów, przy poziomem ustawieniu koła, przy ustawieniu sygnałów między niteczkami krzyża nitkowego, przy odczytaniu koła podziałkowego i t. d.

Ponieważ przypadkowy błąd spostrzeżenia zawiera w sobie przypadkowe błędy cząstkowe, objawiające się czy to w dodatnim, czy też w odjemnym kierunku, to przyjąwszy, że wszystkie te bardzo małe błędy cząstkowe są zarówno wielkie, możemy wypowiedzieć następującą hipotezę:

„P r z y p a d k o w y b ł ą d s p o s t r z e ż e n i a j e s t r ó w n y a l g e b r a i c z n e j s u m i e w w i e l k i e j l i c z b i e w y s t ę p u j ą c y c h b a r d z o m a ł y c h, j e d n a k o w o w i e l k i c h, dodatnich i odjemnych przypadkowych błędów cząstkowych".

Tymi to błędami przypadkowymi zajmuje się rachunek wyrównania błędów.

7. Wszelkie spostrzeżenia ilości niewiadomej w celu wyznaczenia najprawdopodobniejszej wartości tej niewiadomej, tudzież jej ważności, względnie błędu średniego, a nadto w celu zdania sprawy z dokładności lub błędu średniego poszczególnych spostrzeżeń, mogą być albo bezpośrednie albo pośrednie. Jeżeli ilość niewiadomą, której najprawdopodobniejszą wartość wyznaczyć mamy, spostrzegamy bezpośrednio znaczną liczbę razy — np. pomiar długości podziałką, kątów teodolitem, ciśnienia powietrza barometrem i t. d., powiadamy, że spostrzeżenia są bezpośrednie.

Jeżeli zaś spostrzegamy bezpośrednio jednę lub kilka ilości, zapomocą których wyznaczamy dopiero szukaną ilość niewiadomą, powiadamy, że spostrzeżenia są pośrednie. Tak np. wymierzywszy długości boków trójkąta, wyznaczamy wartości kątów, albo wymierzywszy objętość i temperaturę pewnej ilości gazu, wyznaczamy jego ciśnienie, albo też spostrzegamy czas wahania wahadła, aby wyznaczyć przyspieszenie siły ciężkości ziemskiej i t. d.

8. Ponieważ podczas spostrzeżenia popełniamy zawsze błędy, choćbyśmy wykonywali je z największą skrupulatnością i starannością, nie dochodzimy przeto nigdy do wiadomości prawdziwej wartości spostrzeganej ilości niewiadomej albo też ilości niewiadomej ze spostrzeżeń obliczonej. Jeżeli spostrzegamy jakową ilość tylko raz, nie ma wcale mowy o popełnionym błędzie, gdyż nawet nie możemy się domyślać, czy to spostrzeżenie dostarczyło nam wartości za wielkiej, czy też za małej. Inaczej rzecz się ma, gdy spostrzegamy tę samą ilość znaczną liczbę razy i otrzymamy wyniki mniej lub więcej od siebie się różniące. W tym przypadku znowu niewiadomo, który z rzeczonych wyników jest prawdziwą wartością spostrzeganej ilości; pytamy się zatem, jaka jest najprawdopodobniejsza wartość ilości niewiadomej, którąśmy wymierzali. Odpowiedź na to daje nam metoda średniej arytmetycznej czyli też metoda najmniejszych kwadratów, metoda nader prosta, łatwa i w praktyce stosowana.

Wyrównanie spostrzeżeń bezpośrednich jednej ilości.

9. Ilość x wymierzono zarówno starannie n - razy i otrzymano długości a_1, a_2, a_3, . . , a_n. Pytamy się o najprawdopodobniejszą wartość niewiadomej x.

Oznaczywszy przez a_1, a_2, a_3, . . , a_n wyniki spostrzeżeń, podjętych w celu wyznaczenia wartości niewiadomej x, a wykonanych z jednakową starannością i pod jednakowymi warunkami, natenczas za wartość najprawdopodobniejszą a niewiadomej x musimy przyjąć średnią arytmetyczną ilości a_1, a_2, ... , a_n; a więc:

$$a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}. \tag{I}$$

Zasadę tę przyjmujemy jako twierdzenie nie potrzebujące dowodu, gdyż ilościom a musimy przyznać równorzędne prawdopodobieństwo i korzystamy z tego twierdzenia w celu wyznaczenia wartości najprawdopodobniejszej w przypadkach, które nie odznaczają się taką prostotą, jak obecny.

Z powyższego równania wynika bezpośrednio następujące:

$$(a_1 - a) + (a_2 - a) + (a_3 - a) + \ldots + (a_n - a) = 0.$$

10. Przez $f(\varepsilon)$ oznaczamy prawdopodobieństwo, że jakiś błąd ε leży między 0 i ε. Jeżeli w jest prawdopodobieństwem, że popełniony błąd leży między ε i $\varepsilon + \Delta\varepsilon$, przyczem $\Delta\varepsilon$ jest bardzo małe w porównaniu do ε, to podług twierdzenia o prawdopodobieństwie złożonem jest:

$$f(\varepsilon + \Delta\varepsilon) = f(\varepsilon) + w,$$

zatem:

$$w = f(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - f(\varepsilon).$$

Skoro $\Delta\varepsilon$ przejdzie w $d\varepsilon$ i położymy:

$$\lim_{\Delta\varepsilon = 0} \frac{f(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - f(\varepsilon)}{\Delta\varepsilon} = \varphi(\varepsilon),$$

otrzymamy:

$$w = \varphi(\varepsilon) . d\varepsilon \tag{1}$$

jako prawdopodobieństwo, że popełniony błąd leży między ε i $\varepsilon + d\varepsilon$, gdzie $d\varepsilon$ jest nieskończenie małe. Funkcya φ zowie się **prawem błędu**.

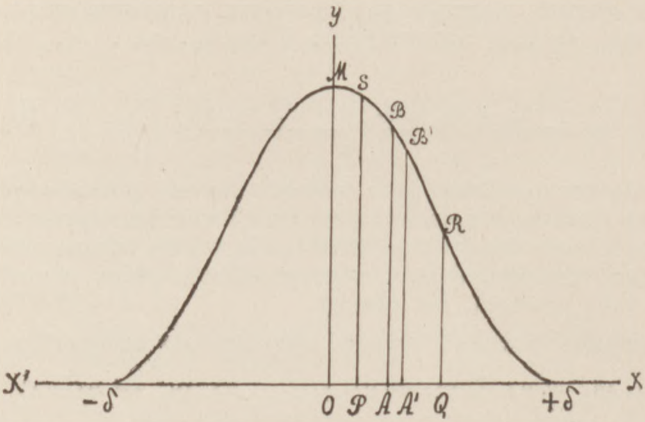
Zawsze istnieć będzie granica $\pm\delta$, której błąd nie będzie mógł przekroczyć; a zatem prawdopodobieństwo, że błąd jest równy δ albo większy od δ, jest równe zeru, czyli być musi:

$$\varphi(x) = o, \text{ gdy } x \geqq \delta. \tag{2}$$

Jeżeli x i y oznaczają spółrzędne prostokątne na płaszczyźnie, to

$$y = \varphi(x) \tag{3}$$

Fig. 1.



przedstawia krzywą, która oś X-ów przecina w $x = \pm\delta$. Jeżeli $OA = \varepsilon$ (fig. 1), to element powierzchni $AA\ BB'$ przedstawia prawdopodobieństwo w, że popełniony błąd leży między ε i $\varepsilon + d\varepsilon$. Jeżeli $OP = a$ i $OQ = b$, to powierzchnia $PQRS$ czyli

$$W = \int_a^b \varphi(\varepsilon)d\varepsilon \tag{4}$$

przedstawia prawdopodobieństwo, że popełniony błąd leży między a i b. A że błąd musi pewnie leżeć między $-\delta$ a $+\delta$, przeto otrzymamy:

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \varphi(\varepsilon)d\varepsilon = 1. \tag{5}$$

11. Oznaczmy prawo błędu na podstawie założenia, że średnia arytmetyczna spostrzeżeń jest najprawdopodobniejszą wartością ilości niewiadomej. Dla tego założenia do powyższych własności prawa błędu, równaniami (2) i (5) określonemi, przybywa jeszcze i ta, że

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon), \tag{6}$$

skoro prawdopodobieństwo popełnienia błędu $+\varepsilon$ jest zarówno tak wielkie, co prawdopodobieństwo popełnienia błędu $-\varepsilon$.

Jeżeli w n pomiarach ilości x popełniono błędy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_1 - x, \\ \varepsilon_2 &= a_2 - x, \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ \varepsilon_n &= a_n - x, \end{aligned}$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są wartości spostrzegane, w takim razie mamy:

$w_1 = \varphi(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1$ jako prawdopodobieństwo, że popełni się błąd ε_1,
$w_2 = \varphi(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2$ „ „ „ „ „ „ ε_2,
. . . .
. . . .
$w_n = \varphi(\varepsilon_n)\, d\varepsilon_n$ „ „ „ „ „ „ ε_n.

Podług twierdzenia o prawdopodobieństwie złożonem prawdopodobieństwo W, że w szeregu spostrzeżeń pojawią się właśnie błędy $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, dane jest równaniem:

$$\begin{aligned} W &= w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_n = \\ &= \varphi(\varepsilon_1) \cdot \varphi(\varepsilon_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(\varepsilon_n) \cdot d\varepsilon_1 \cdot d\varepsilon_2 \cdot \ldots \cdot d\varepsilon_n \end{aligned} \tag{7}$$

Przyczyną tych błędów jest nieznajomość wartości x. Wskutek tego wszystkie ε mogą niezależnie od siebie przyjąć wszelkie wartości od $+\delta$ do $-\delta$.

Podług założenia średnia arytmetyczna:

$$a = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \tag{8}$$

ma być najprawdopodobniejszą wartością ilości niewiadomej, t. j. dla $x = a$ ma W stać się największością; przeto być musi:

$$\left(\frac{dW}{dx}\right)_{x=a} = 0. \tag{9}$$

A że W dla $x = a$ nie jest ani 0, ani ∞, przeto możemy warunek największości napisać także w postaci:

$$\left(\frac{d\, l\, W}{dx}\right)_{x=a} = 0. \tag{10}$$

Z (7) wypływa zatem:

$$\frac{d\, l\, W}{dx} = -\left[\frac{\varphi'(\varepsilon_1)}{\varphi(\varepsilon_1)} + \frac{\varphi'(\varepsilon_2)}{\varphi(\varepsilon_2)} + \ldots\ldots + \frac{\varphi'(\varepsilon_n)}{\varphi(\varepsilon_n)}\right]$$

gdyż $d\xi_1 \,.\, d\xi_2 \,.\,.\,.\, d\xi_n$ nie zależą od x, a $\frac{d\xi_i}{dx} = -1$.

Skoro położymy:

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \psi(z), \tag{11}$$

to warunek (10) przyjmie postać następującą:

$$\psi(a_1 - a) + \psi(a_2 - a) + \,.\,.\,.\,.\, + \psi(a_n - a) = 0. \tag{12}$$

Równanie to musi spełnić nasza funkcya ψ dla zupełnie dowolnych wartości $a_1, a_2, \ldots, a_n$, gdy a posiada wartość, podaną równaniem (8). Możemy zatem różniczkować równanie (12) co do którejkolwiek z ilości $a_1, a_2, \ldots, a_n$, skoro tylko uwzględnimy równanie (8). Różniczkując przeto co do a_1, otrzymamy:

$$\psi'(a_1 - a)\frac{d(a_1 - a)}{da_1} + \psi'(a_2 - a)\frac{d(a_2 - a)}{da_1} + \,.\,.\,.\, + \psi'(a_n - a)\frac{d(a_n - a)}{da_1},$$

a że:

$$\frac{da}{da_1} = \frac{1}{n},$$

jakoteż:

$$\frac{da_1}{da_1} = 1, \quad \frac{da_2}{da_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{da_n}{da_1} = 0,$$

gdyż $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są od siebie niezależne, otrzymamy:

$$\psi'(a_1 - a) = \frac{1}{n}[\psi'(a_1 - a) + \psi'(a_2 - a) + \,.\,.\,.\, + \psi'(a_n - a)],$$

$$\psi'(a_2 - a) = \frac{1}{n}[\psi'(a_1 - a) + \psi'(a_2 - a) + \,.\,.\,.\, + \psi'(a_n - a)],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi'(a_n - a) = \frac{1}{n}[\psi'(a_1 - a) + \psi'(a_2 - a) + \,.\,.\,.\, + \psi'(a_n - a)],$$

czyli:

$$\psi'(a_1 - a) = \psi'(a_2 - a) = \,.\,.\,.\,.\,.\,. = \psi'(a_n - a) = c.$$

Przeto dla dowolnych wartości z argumentu

$$\psi'(z) = c,$$

więc:

$$\psi(z) = \int c\, dz + c_1$$

$$= cz + c_1,$$

więc podług (11):

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = cz + c_1$$

czyli:

$$\frac{dl\varphi(z)}{dz} = cz + c_1,$$

więc:

$$l\varphi(z) = c\int zdz + \int c_1 dz + \log c_2$$

$$= \frac{1}{2}cz^2 + c_1 z + \log c_2,$$

i

$$\varphi(z) = c_2 e^{1/2\, cz^2 + c_1 z}$$

Stałe c_2, c_1, c wyznaczają trzy warunkowe równania (5), (6) i (2).

Co się tyczy c_1, to z równania (6):

$$\varphi(z) = \varphi(-z),$$

wynika, że być musi:

$$\frac{1}{2}cz^2 + c_1 z = \frac{1}{2}cz^2 - c_1 z$$

czyli że:

$$c_1 = o.$$

Funkcya $\varphi(z)$ maleje z rosnącem z, w takim razie c musi być odjemne. Połóżmyż zatem:

$$\frac{1}{2}c = -h^2,$$

gdzie h oznacza ilość rzetelną. Wtedy będzie:

$$\varphi(z) = c_2 e^{-h^2 z^2},$$

a podług (2) będzie:

$$\delta = \infty,$$

gdy:

$$\varphi(\infty) = 0,$$

co jest możliwe, gdyż błędy znajdują się pewnie poniżej tej ilości.

Aby obliczyć ostatecznie c_2, połóżmy za $\varphi(z)$ wartość w równanie (5), w skutek czego przejdzie ono w następujące:

$$c_2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 z^2} dz = 1.$$

A że:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$ [1]

mieć będziemy:

$$c_2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}},$$

zatem:

$$\varphi(z) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2z^2} \qquad \text{(II)}$$

jako wzór na prawo błędu dla powyżej danego założenia.

12. Należałoby nareszcie okazać, że wartość *W* w równaniu (7) jest w istocie największością. Podstawiwszy weń wartość za , otrzymamy:

$$W = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + \ldots + \varepsilon_n{}^2)} d\varepsilon_1 \, d\varepsilon_2 \, . \, . \, d\varepsilon_n,$$

zatem:

$$\frac{dlW}{dx} = + 2h^2 [(a_1 - x) + (a_2 - x) + \ldots + (a_n - x)]$$

i

$$\frac{d^2lW}{dx^2} = - 2h^2,$$

więc istotnie odjemne, przeto *l W*, a więc *W* jest największością dla x = a.

Prawdopodobieństwo, że popełniony błąd leży między ε i $\varepsilon + d\varepsilon$, czyli jak się mówi, prawdopodobieństwo, że się popełni błąd ε, wyrazi się zatem równaniem:

$$w = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2z^2} d\varepsilon \qquad \text{(III)}$$

13. Krzywa, przedstawiona równaniem:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2z^2},$$

która uzmysławia prawo błędu w spółrzędnych prostokątnych x, y, jest symetryczną względem osi *Y*-ów i ma oś *X*-ów za

[1]) Obacz dodatek I. na końcu rozprawy.

asymptotę. Dla $x = \infty$ staje się $y = o$, a krzywa zbliża się szybko do osi X-ów, tak że dla cokolwiek większego x staje się y już bardzo małem, gdy przyjmiemy h równe tylko 1. Im większe będzie h, tem szybcej zbliżać się będzie ta krzywa do osi X-ów. Dla $h = 1$ i $h = 2$ otrzymujemy następujące wartości:

pr Mariwalter

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \qquad\qquad y_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-4x^2}$$

dla $x = 0{\cdot}0$	$y_1 = 0{\cdot}56419$,	$y_2 = 1{\cdot}12838$,
$x = 0{\cdot}2$	$y_1 = 0{\cdot}54206$,	$y_2 = 0{\cdot}96154$,
$x = 0{\cdot}4$	$y_1 = 0{\cdot}48077$,	$y_2 = 0{\cdot}59498$,
$x = 0{\cdot}5$	$y_1 = 0{\cdot}43939$,	$y_2 = 0{\cdot}41410$,
$x = 0{\cdot}6$	$y_1 = 0{\cdot}39362$,	$y_2 = 0{\cdot}26736$,
$x = 0{\cdot}8$	$y_1 = 0{\cdot}29749$,	$y_2 = 0{\cdot}08722$,
$x = 1{\cdot}0$	$y_1 = 0{\cdot}20755$,	$y_2 = 0{\cdot}02066$,
$x = 1{\cdot}5$	$y_1 = 0{\cdot}05947$,	$y_2 = 0{\cdot}00014$.

Z tego widzimy, o ile szybcej maleje y_2 od y_1.

Ilość h nazywa Gauss miarą dokładności. Im większe zatem h, tem mniejsze prawdopodobieństwo popełnienia znacznego błędu, tem dokładniejsze czyli ściślejsze jest spostrzeżenie.

14. Obliczmy prawdopodobieństwo, że błąd nie przekroczy pewnej danej ilości γ. Jeżeli błąd nie ma przekroczyć ilości γ, musi on się znajdować między $-\gamma$ a $+\gamma$ Prawdopodobieństwo to podług równania (4) jest:

$$W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\gamma}^{+\gamma} e^{-h^2x^2} . dx ,$$

$$\text{a że} \int_{-\gamma}^{+\gamma} e^{-h^2x^2} . dx = \int_{-\gamma}^{o} e^{-h^2x^2} . dx + \int_{o}^{+\gamma} e^{-h^2x^2} . dx$$

$$= \int_{o}^{\gamma} e^{-h^2x^2} . dx + \int_{o}^{\gamma} e^{-h^2x^2} . dx$$

$$= 2 \int_{o}^{\gamma} e^{-h^2x^2} . dx ,$$

przeto:

$$W = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\gamma} e^{-h^2x^2} . dx$$

jako prawdopodobieństwo, że błąd nie przekroczy ilości γ.

Podstawiwszy: $hx = z$,

mieć będziemy: dla $x = 0$, $z = 0$,

$x = \gamma$, $z = h\gamma$,

a że: $hdx = dz$,

wynika stąd:

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{h\gamma} e^{-z^2} . dz = \Theta(h\gamma). \qquad \text{(IV)}$$

Wartości $\Theta(h\gamma)$ dla każdego argumentu $h\gamma < 3$ podaje nam tablica I.[1] Ponieważ $\Theta(h\gamma)$, a więc W dla $h\gamma > 3$ mało się różni od 1, wystarcza ta tablica dla wszystkich w praktyce przychodzących przypadków.

15. Błąd oczekiwany. Wartość ρ, posiadająca tę własność, że prawdopodobieństwo pojawienia się błędu nie większego — bez względu na znak — jak ρ, wynosi $1/2$, zowie się błędem oczekiwanym.

Podług wzoru (IV) otrzymujemy wyrażenie:

$$1/2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{h\rho} e^{-z^2} dz = \Theta(h\rho),$$

z którego przy pomocy tablicy I. wypada:

$$h\rho = 0{\cdot}476936,$$

przeto otrzymujemy wzór:

$$\rho = \frac{0{\cdot}476936}{h}, \qquad \text{(V)}$$

dozwalający obliczyć ρ, jeżeli znamy h, jakoteż wzór drugi:

$$h = \frac{0{\cdot}476936}{\rho}, \qquad \text{(V')}$$

z którego znajdziemy h, jeżeli dany błąd oczekiwany.

---

[1]) Na końcu rozprawki.

Powiedzieliśmy, że prawdopodobieństwo nieprzekroczenia, w danem spostrzeżeniu, błędu oczekiwanego wynosi $^1/_2$; tedy prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego, t. j. przekroczenia tego błędu będzie $1-{}^1/_2$, przeto także $^1/_2$. Wnosimy stąd, że w szeregu spostrzeżeń, wykonanych z dokładnością h i błędem oczekiwanym ρ, zdarzy się prawdopodobnie tyleż błędów mniejszych od ρ, ile większych — bez względu na znak —. Wniosek powyższy może posłużyć niekiedy do znalezienia błędu oczekiwanego, a przeto i miary dokładności.

Jakoż jeżeli znane są błędy poszczególnych spostrzeżeń, wystarczy je uporządkować podług ich wielkości, nie uwzględniając znaku; błąd stojący w pośrodku będzie błędem oczekiwanym.

16. Błąd średni. Błędem średnim danego szeregu spostrzeżeń, wykonanych z tą samą dokładnością, zowiemy ilość μ, której kwadrat jest średnią arytmetyczną pomiędzy kwadratami prawdziwych błędów spostrzeżeń; jeżeli te błędy oznaczymy przez $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, będzie z określenia:

$$\mu^2 = \frac{\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + \ldots + \varepsilon_n{}^2}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n},$$

przeto:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} \qquad \text{(VI).}$$

Prawdopodobieństwo bowiem, że w danem spostrzeżeniu popełnimy błąd μ, t. j. że błąd leżeć będzie między μ a $\mu + d\mu$, jest podług (III):

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\mu^2} d\mu,$$

prawdopodobieństwo zaś, że ten sam błąd pojawi się w n po sobie następujących spostrzeżeniach, jest:

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n . \; e^{-nh^2\mu^2} (d\mu)^n.$$

Prawdopodobieństwa pojawienia się błędów $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ są:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} . \; e^{-h^2\varepsilon_1{}^2} . \; d\mu,$$

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} . \; e^{-h^2\varepsilon_2{}^2} . \; d\mu,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} . \; e^{-h^2\varepsilon_n{}^2} . \; d\mu,$$

przeto prawdopodobieństwo, że te błędy pojawiają się w n wykonanych spostrzeżeniach, będzie:

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(\varepsilon_1{}^2+\varepsilon_2{}^2+\ldots+\varepsilon_n{}^2)} \cdot (d\mu)^n$$

A zatem być musi:

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-nh^2\mu^2}(d\mu)^n = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(\varepsilon_1{}^2+\varepsilon_2{}^2+\ldots+\varepsilon_n{}^2)} \cdot (d\mu)^n$$

czyli:

$$n\mu^2 = \varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + \ldots + \varepsilon_n{}^2,$$

stąd:

$$\mu^2 = \frac{\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + \ldots + \varepsilon_n{}^2}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n},$$

czyli:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}. \qquad \text{C. b. d. o.}$$

17. Związek między błędem średnim μ a miarą dokładności h danego szeregu spostrzeżeń. Łatwo jest znaleźć drogą teoretyczną związek pomiędzy błędem średnim μ a miarą dokładności h, a przeto i błędem oczekiwanym ρ spostrzeżeń. Wszelako trzeba przypuścić, że liczba spostrzeżeń jest bardzo znaczną, tak iż błędy poszczególnych spostrzeżeń można uważać za postępujące po sobie sposobem ciągłym. Jeżeli w praktyce nie da się to żądanie ściśle urzeczywistnić, to wynika z tego, że liczebne rachunki będą się tylko mniej lub więcej zbliżały do wypadków teoryi.

Pomyślmy sobie błędy ε_1, ε_2, ε_3, ... , ε_ν uporządkowane co do ich wielkości bezwzględnej. Tedy między ε_1 a $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$ może z n błędów przypaść liczba s_1, t. zn. s_1 błędów ma się różnić od ε_1 co najwyżej o $d\varepsilon_1$ (bardzo małą ilość). Zatem prawdopodobieństwo, że którykolwiek z błędów szeregu spostrzeżeń leży między ε_1 a $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$, jest:

$$\frac{s_1}{n},$$

gdy wogóle n błędów się pojawia, z których atoli tylko s_1 zawartych jest w powyższych granicach.

Ponieważ podług ust. 2. równanie (1):

$$w_1 = \varphi(\varepsilon_1)d\varepsilon_1$$

oznacza prawdopodobieństwo, że błąd leży między ε_1 i $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$, przeto:

$$\varphi(\varepsilon_1)d\varepsilon_1 = \frac{s_1}{n}. \qquad (13)$$

Jeżeli $s_2, s_3, \ldots, s_\nu$ błędów przypada odpowiednio pomiędzy ε_2 i $\varepsilon_2 + d\varepsilon_2$, ε_3 i $\varepsilon_3 + d\varepsilon_3$, ..., ε_ν i $\varepsilon_\nu + d\varepsilon_\nu$, otrzymamy analogicznie:

$$\varphi(\varepsilon_2)d\varepsilon_2 = \frac{s_2}{n},$$

$$\varphi(\varepsilon_3)d\varepsilon_3 = \frac{s_3}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi(\varepsilon_\nu)d\varepsilon_\nu = \frac{s_\nu}{n}.$$

Z tych równań wypływa więc:

$$\sum_1^\nu \varepsilon_i^2\varphi(\varepsilon_i)d\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_1^2 s_1 + \varepsilon_2^2 s_2 + \varepsilon_3^2 s_3 + \ldots + \varepsilon_\nu^2 s_\nu}{n}.$$

W liczniku po prawej stronie znaku równości znajduje się suma kwadratów wszystkich błędów, czyli raczej ilość, która od tej sumy tylko nieskończenie mało się różni. Kwadrat bowiem każdego błędu pomnożony jest liczbą wskazującą, ile razy w szeregu n błędów jakiś błąd osiąga tę wielkość. Gdyby wszystkie $s = 1$, byłaby suma równą wprost $[\varepsilon^2]$. Możemy zatem napisać:

$$\sum_1^\nu \varepsilon_i^2\varphi(\varepsilon_i)d\varepsilon_i = \frac{[\varepsilon^2]}{n} = \mu^2.$$

Ten związek istnieje dla każdego szeregu spostrzeżeń, gdy n jest bardzo wielkie. Wtedy atoli suma po lewej stronie znaku równości przechodzi w określoną całkę, której granice w każdym razie nie przekraczają wielkości δ, poza którą nie leży żaden błąd.

Zatem mamy:

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \varepsilon^2\varphi(\varepsilon)d\varepsilon = \mu^2$$

Wprowadźmy prawo błędu z wzoru (II), a otrzymamy:

$$\mu^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon,$$

kładąc $\delta = \infty$.

Ponieważ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-h^2z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2h^3},\ [1]$$

przeto:

$$\mu^2 = \frac{1}{2h^2},$$

czyli otrzymamy wzór:

$$\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \qquad \text{(VII)}$$

wykazujący związek między błędem średnim μ a miarą dokładności h.

18. Wiążąc znaleziony właśnie wzór z równaniami (V) i (V'), dojdziemy z łatwością do następujących:

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{1}{\mu\sqrt{2}}, \\ \rho &= 0{\cdot}476936.\ \mu\sqrt{2} = 0{\cdot}6744897\mu. \\ \mu &= 1{\cdot}4826000\ \rho. \end{aligned}\right\} \text{(VIII)}$$

Równania powyższe ustanawiają tylko wzajemne zależności pomiędzy ilościami ρ, h, μ, ale nie dozwalają jeszcze obliczyć ich bezwzględnych wartości, gdyż nie znamy błędów prawdziwych ε.

19. Związek między błędem średnim μ a błędem średnim średniej arytmetycznej. Niech μ oznacza błąd średni szeregu spostrzeżeń a M błąd średni średniej arytmetycznej tegoż szeregu spostrzeżeń. Spostrzeżeń niech będzie n.

Jeżeli a jest średnią arytmetyczną, to podług (I) mamy:

$$a = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n),$$

jeżeli zaś x jest prawdziwą wartością ilości niewiadomej, to: $M_1 = a - x$ jest błędem tej średniej arytmetycznej. Jeżeli więc ε_1 jest którymkolwiek z popełnionych błędów, to:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= a_i - x \\ &= a_i - a + a - x \\ &= a_i - a + M_1. \end{aligned}$$

Utworzywszy więc sumę z wszystkich n błędów, mieć będziemy:

$$[\varepsilon] = [a_i - a] + nM_1,$$

[1]) Obacz Dodatek I. na końcu rozprawki.

a że:

$$[a_i - a] = a_1 - a + a_2 - a + a_3 - a + \dots + a_n - a$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) - na = o,$$

przeto:
$$[\varepsilon] = nM_1,$$

czyli potęgując obustronnie przez 2:
$$[\varepsilon^2] + [\varepsilon_i \varepsilon_k] = n^2 M_1{}^2,$$

czyli uwzględniając wzór (VI):
$$n\mu^2 + [\varepsilon_i \varepsilon_k] = n^2 M_1{}^2 \qquad (14)$$

W sumie iloczynów $\varepsilon_i \varepsilon_k$ przychodzą dodatnie i odjemne ilości, gdyż ε są dodatnie i odjemne. Wskutek tego $[\varepsilon_i \varepsilon_k]$ w porównaniu do $[\varepsilon\varepsilon]$, której to sumy składniki są dodatnie, są małe, przeto można $[\varepsilon_i \varepsilon_k]$ opuścić, tak że powyższe równanie przedzierżgnie się w następujące:

$$n\mu^2 = n^2 M^2,$$

skąd:
$$\mu = M\sqrt{n},$$

więc:
$$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}} \qquad (IX)$$

jako związek między błędem średnim μ a błędem M średniej arytmetycznej.

20. Obliczenie miary dokładności *H*, odpowiadającej średniej arytmetycznej. Ponieważ *M* jest błędem średniej arytmetycznej, a więc błędem średnim spostrzeżenia, któreby dało średnią arytmetyczną, przeto podług (VII) będzie:

$$M = \frac{1}{H\sqrt{2}},$$

skąd:
$$H = \frac{1}{M\sqrt{2}},$$

albo uwzględniając wzór (IX), otrzymamy:

$$H = \frac{\sqrt{n}}{\mu\sqrt{2}}, \qquad (X)$$

albo też w postaci:
$$H = h\sqrt{n}. \qquad (X')$$

21. Ważności. Liczby całkowite, proporcyonalne do kwadratów miar dokładności, zowią się ważnościami spo-

strzeżeń. Jeżeli przez p i p' oznaczymy ważności, przez h i h' miary dokładności dwu spostrzeżeń, to proporcya:

$$p : p' = h^2 : h'^2 \tag{XI}$$

zawiera w sobie powyższe określenie.

Jeżeli P jest ważnością średniej arytmetycznej, p ważnością danego spostrzeżenia, to według wzorów (X') i (XI) otrzymamy:

$$P : p = H^2 : h^2 = n : 1,$$

czyli:

$$P = np \tag{XII}$$

t. zn.: Ważność średniej arytmetycznej z n spostrzeżeń jest n-razy większą od ważności jednego z danych spostrzeżeń. Kładąc $p = 1$, otrzymamy:

$$P = n, \tag{XII'}$$

z czego czytamy: Ważność jakiegokolwiek wyniku jest to liczba spostrzeżeń jednakowej dobroci potrzebnych do uzyskania średniej, z tą samą dobrocią, jaką posiada wynik dany, przyczem za jednostkę ważności bierze się ważność wspólną tych spostrzeżeń".

Jest to twierdzenie w praktycznem zastosowaniu rachunku wyrównania niezmiernie ważne, gdyż często wskazuje nam jedyną drogę ocenienia dokładności różnych wyników.

22. Ponieważ:

$$p : p' = h^2 : h'^2,$$

przeto ze względu na wzór (VIII) otrzymamy:

$$p : p' = \mu'^2 : \mu^2,$$

gdzie μ i μ' oznaczają średnie błędy spostrzeżenia.

A że podług (IX):

$$\mu = M\sqrt{n},$$

przeto wiążąc z równaniem (XII), mieć będziemy:

$$\mu = M\sqrt{\frac{P}{p}}, \tag{XIII}$$

gdzie M uważamy za błąd średni spostrzeżenia o ważności P a μ za błąd średni spostrzeżenia o ważności p. Równanie powyższe powiada: Chcąc błąd średni M spostrzeżenia o ważności P zamienić na błąd średni spostrzeżenia o ważności p, należy M pomnożyć przez $\sqrt{\frac{P}{p}}$.

23. Obliczenie błędu oczekiwanego średniej arytmetycznej. Wzór (VIII) podaje związek między błędem

średnim a oczekiwanym danego spostrzeżenia. Ponieważ M jest błędem średnim średniej arytmetycznej, a oznaczywszy przez R błąd oczekiwany średniej arytmetycznej, napiszemy:

$$\begin{aligned} R &= 0{\cdot}6744897\ M, \\ M &= 1{\cdot}4826000\ R. \end{aligned} \qquad \text{(XIV)}$$

Wiążąc wzory (IX) i (XIV), mieć będziemy:

$$R = \frac{\rho}{\sqrt{n}}. \qquad \text{(XV)}$$

24. W y z n a c z e n i e b ł ę d u ś r e d n i e g o. Powyższe wzory wskazują, że wszelkie rodzaje błędów możemy obliczyć, gdy znamy jeden z nich. Atoli μ jest dane przez sumę kwadratów błędów, t. j.: $\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}$. Ponieważ $\varepsilon_i = a_i - x$, przeto ε_i jest niewiadome; a zatem chodzić będzie o to, aby wyrazić μ przez znane błędy $\alpha_i = a_i - a$. Obliczymy więc błąd średni jednego spostrzeżenia z błędów $\alpha_i = a_i - a$, gdzie a oznacza średnią arytmetyczną z spostrzeżeń $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Wiadomo, że:

$$\varepsilon_i = a_i - x = a_i - a + a - x = \alpha_i + M_1,$$

gdzie M_1 oznacza błąd średni średniej arytmetycznej. Potęgując przez 2, otrzymamy:

$$\varepsilon_i^2 = \alpha_i^2 + 2M_1\alpha_i + M_1^2,$$

a sumując, będziemy mieli:

$$[\varepsilon^2] = [\alpha^2] + 2M_1\,[\alpha] + nM_1^2.$$

Ponieważ:

$$[\alpha] = (a_1 - a) + (a_2 - a) + \ldots + (a_n - a) = 0,$$

przeto:

$$[\varepsilon^2] = [\alpha^2] + nM_1^2.$$

Zastępując M_1 przez błąd średni M, to uwzględniając wzory (VI) i (IX), otrzymamy:

$$n\mu^2 = [\alpha^2] + \mu^2,$$

więc:

$$(n - 1)\,\mu^2 = [\alpha^2],$$

czyli ostatecznie:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\alpha^2]}{n-1}} \qquad \text{(XVI)}$$

jako wyrażenie średniego błędu jednego spostrzeżenia przez błąd $\alpha_i = a_i - a$.

25. Weźmy pod uwagę ν szeregów spostrzeżeń jednakowej dokładności. Niech

a' będzie średnią arytmetyczną z n' spostrzeżeń ,
a'' „ „ „ „ n'' „
. . . .
$a^{(\nu)}$ „ „ „ „ $n^{(\nu)}$ „

Wyznaczmy najprawdopodobniejszą wartość szukanej ilości x, jakoteż średni błąd jednego spostrzeżenia, błąd znalezionej wartości i ważność tej wartości.

a) Przypuszczamy, że te ν szeregów spostrzeżeń tworzą jeden jedyny szereg spostrzeżeń z

$$n = n' + n'' + \ldots + n^{(\nu)}$$

zarówno dokładnych spostrzeżeń, a wtedy najprawdopodobniejsza wartość niewiadomej będzie średnią arytmetyczną z tych n wartości.

Jeżeli :

$$\begin{array}{l} a_1', a_2', \ldots\ldots, a_{n'}' \\ a_1'', a_2'', \ldots\ldots, a_{n''}'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)}, \ldots\ldots, a_{n^{(\nu)}}^{(\nu)} \end{array}$$

są ilościami spostrzeganemi, to

$$a' = \frac{1}{n'}\left(a_1' + a_2' + \ldots + a_{n'}'\right),$$

$$a'' = \frac{1}{n''}\left(a_1'' + a_2'' + \ldots + a_{n''}''\right),$$

. . . .

$$a^{(\nu)} = \frac{1}{n^{(\nu)}}\left(a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \ldots + a_{n^{(\nu)}}^{(\nu)}\right),$$

przeto najprawdopodobniejsza wartość ilości niewiadomej x będzie:

$$a = \frac{1}{n}\Big(a_1'+a_2'+\ldots+a_{n'}'+a_1''+a_2''+\ldots+a_{n''}''+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \ldots\ldots + a_{n^{(\nu)}}^{(\nu)}\Big),$$

czyli :

$$a = \frac{n'a' + n''a'' + \ldots + n^{(\nu)}a^{(\nu)}}{n' + n'' + \ldots + n^{(\nu)}}. \qquad \text{(XVII)}$$

Połóżmy ważność jednego spostrzeżenia $= p_0$, to dla ważności poszczególnych średnich arytmetycznych otrzymamy wyrażenia:

$$p' = n'p_0 ,$$
$$p'' = n''p_0 ,$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$p^{(\nu)} = n^{(\nu)}p_0 ,$$

skutkiem czego wzór (XVII) przyjmie następującą postać:

$$a = \frac{a'p' + a''p'' + \; . \; . \; . \; + a^{(\nu)}p^{(\nu)}}{p' + p'' + \; . \; . \; . \; + p^{(\nu)}}. \qquad \text{(XVII')}$$

Równanie to podaje nam zatem sposób szukania najprawdopodobniejszej wartości niewiadomej ilości ze spostrzeżeń o różnej dokładności, gdy znamy ważności tych spostrzeżeń.

b) Niech μ będzie błędem średnim jednego spostrzeżenia, który pozostaje niezmiennym dla wszystkich szeregów spostrzeżeń, gdyż poszczególne spostrzeżenia mają być zarówno dokładne, jakoteż niech M', M'', . . . , $M^{(\nu)}$ będą błędami średnimi średnich arytmetycznych poszczególnych szeregów, M zaś błędem średnim średniej arytmetycznej a z całych szeregów spostrzeżeń; natenczas podług (IX) będzie:

$$\mu = M'\sqrt{n'} = M''\sqrt{n''} = \; . \; . \; . = M^{(\nu)}\sqrt{n^{(\nu)}} = M\sqrt{n}, \quad (15)$$

a więc:

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}},$$

czyli:

$$M = \frac{\mu\sqrt{p_0}}{\sqrt{[p]}}. \qquad \text{(XVIII)}$$

c) Chodzi jeszcze o wyznaczenie μ z błędów:

$$\alpha' = a' - a ,$$
$$\alpha'' = a'' - a ,$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$\alpha^{(\nu)} = a^{(\nu)} - a ,$$

gdzie tylko a', a'', . . . , $a^{(\nu)}$ i a są wiadome. W tym celu piszemy:

$$M_1{}' = a' - x,$$

a więc także:

$$M_1{}' = a' - a + a - x = \alpha' + M_1,$$

przeto:

$$M_1'^2 = \alpha'^2 + M_1^2 + 2M_1\alpha'$$

i

$$n'M_1'^2 = n'\alpha'^2 + n'M_1^2 + 2M_1 n'\alpha'.$$

Zastąpiwszy M_1' i M_1 przez błędy średnie M' i M, to pomnąc, że:

$$n'M'^2 = \mu^2,$$

otrzymamy:

$$\mu^2 = n'\alpha'^2 + n'M^2 + 2Mn'\alpha',$$
$$\mu^2 = n''\alpha''^2 + n''M^2 + 2Mn''\alpha'',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mu^2 = n^{(\nu)}\alpha^{(\nu)^2} + n^{(\nu)}M^2 + 2Mn^{(\nu)}\alpha^{(\nu)}.$$

Dodawszy te ν równań, będziemy mieli:

$$\nu\mu^2 = \sum n^{(i)}\alpha^{(i)^2} + M^2 \sum n^{(i)} + 2M \sum n^{(i)}\alpha^{(i)},$$

a że podług wzoru (XVII) jest:

$$a\sum n^{(i)} = \sum n^{(i)}a^{(i)},$$

przeto:

$$\sum n^{(i)}a^{(i)} - a \sum n^{(i)} = 0,$$

czyli:

$$\sum n^{(i)}(a^{(i)} - a) = 0,$$

a kładąc:

$$\sum n^{(i)} = n,$$

będzie:

$$\nu\mu^2 = [n^{(i)}\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}] + M^2 n,$$

a podług równania (15):

$$\nu\mu^2 = [n^{(i)}\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}] + \mu^2,$$

z czego wynika, że:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[n\alpha\alpha]}{\nu - 1}}$$

jako wzór na obliczenie błędu średniego jednego spostrzeżenia.

d) Zastąpiwszy liczby $n^{(i)}$ przez ważności, przyczem p_0 jest ważnością jednego spostrzeżenia, otrzymamy:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\alpha\alpha]}{p_0\,(\nu-1)}} \tag{XIX}$$

jako średni błąd jednego spostrzeżenia o ważności p_0, gdy spostrzeżenia o ważnościach p', p'', . . . $p^{(\nu)}$ dały ilości a', a'', . . . , $a^{(\nu)}$.

26. U w a g a. Suma kwadratów błędów ma najmniejszą wartość dla średniej arytmetycznej.

Jest bowiem:

$$[\varepsilon^2] = (a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \ldots + (a_n - x)^2,$$

przeto dla x, dla którego $[\varepsilon^2]$ jest najmniejszością, musi być:

$$\frac{d[\varepsilon^2]}{dx} = -2[(a_1 - x) + (a_2 - x) + \ldots + (a_n - x)] = 0$$

t. zn. że:

$$x = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = a$$

jest ową wartością, dla której $[\varepsilon^2]$ staje się najmniejszością, gdyż

$$\frac{d^2[\varepsilon^2]}{dx^2} = +2.$$

Średnia zatem arytmetyczna sprowadza sumę kwadratów błędów do najmniejszości, co też dało powód, że rachunek wyrównania, wychodzący ze średniej arytmetycznej, zowie się m e t o d ą n a j m n i e j s z y c h k w a d r a t ó w.

---

27. Z a g a d n i e n i a. 1. Wymierzono kąt α 12 razy i znaleziono następujące wartości:

1)	24° 17' 36·2"	5)	24° 17' 36·1"	9)	24° 17' 38·2"
2)	32·8"	6)	39·2"	10)	36·9"
3)	37·8"	7)	41·9"	11)	35·8"
4)	42·2"	8)	33·1"	12)	34·6"

Wyznaczyć najprawdopodobniejszą wartość tego kąta, błąd średni jednego spostrzeżenia i błąd średni, jako też oczekiwany średniej arytmetycznej.

R o z w i ą z a n i e. a) W celu wyznaczenia najprawdopodobniejszej wartości kąta szukamy poprostu średniej arytmetycznej z 12 spostrzeżeń. A więc

$$\frac{36{\cdot}2+32{\cdot}8+37{\cdot}8+42{\cdot}2+36{\cdot}1+39{\cdot}2+41{\cdot}9+33{\cdot}1+38{\cdot}2+36{\cdot}9+35{\cdot}8+34{\cdot}6}{12}$$

$$= \frac{444{\cdot}8}{12} = 37{\cdot}07''$$

Zatem najprawdopodobniejsza wartość kąta jest a = 24° 17' 37·07".

b) Tworzymy następującą tabelką:

Lp.	$a_{(i)}$	α_i	α_i^2
1.	24° 17' 36·2"	— 0·87	0·7569
2.	32·8"	— 4·27	18·2329
3.	37·8"	+ 0·73	0·5329
4.	42·2"	+ 5·13	26·3169
5.	36·1"	— 0·97	0·9409
6.	39·2"	+ 2·13	4·5369
7.	41·9"	+ 4·83	23·3289
8.	33·1"	— 3·97	15·7609
9.	38·2"	+ 1·13	1·2769
10.	36·9"	— 0·17	0·0289
11.	35·8"	— 1·27	1·6129
12.	34·6"	— 2·47	6·1009
		+ 13·95	99·4268
		— 13·99	

W kolumnie pod α_i znajdują się błędy $\alpha_i = a_i - a$, w kolumnie zaś pod α_i^2 mamy kwadraty tychże błędów. Ostatni wiersz poziomy podaje sumy z tych kolumn.

Że kolumna „α_i" nie daje na sumę zera, tylko:

$$[\alpha_i] = + 13{\cdot}95 - 13{\cdot}99 = - 0{\cdot}04,$$

przyczyną tego jest niewymierne dzielenie, które dało średnią arytmetyczną.

c) Podług (XVI) znajdziemy średni błąd jednego spostrzeżenia.

Albowiem:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\alpha^2]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{99{\cdot}4268}{11}}$$

$$\mu = \pm\ 3{\cdot}01''.$$

d) Podług (IX) znajdziemy błąd średniej arytmetycznej:

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}} = \pm \frac{3{\cdot}01}{\sqrt{12}} \rightarrow +\ 0{\cdot}87''.$$

e) Przeto podług (XIV) błąd oczekiwany R średniej arytmetycznej będzie:

$$R = M \,.\, 0{\cdot}674 = \pm\, 0{\cdot}87 \,.\, 0{\cdot}674$$
$$= \pm\, 0{\cdot}58''.$$

Mamy zatem następujący wynik: Najprawdopodobniejsza wartość szukanego kąta jest $24^0\ 17'\ 37{\cdot}07''$ a prawdziwa wartość kąta leży bezsprzecznie między $24^0\ 17'\ 37{\cdot}07'' + 0{\cdot}58''$ a $24^0\ 17'\ 37{\cdot}07'' - 0{\cdot}58''$.

Błąd średni jednego spostrzeżenia jest: $\mu = \pm\, 3{\cdot}01''$ a błąd średni średniej arytmetycznej: $M = \pm\, 0{\cdot}87''$.

2. W r. 1798 ogłosił Cavendish wynik z 29 doświadczeń, z których oznaczył gęstość ziemi, a mianowicie przyjąwszy gęstość wody 1, otrzymał następujących 29 wypadków:

5·50	5·26	5·58	5·62	5·79	5·42	5·46
5·61	5·55	5·65	5·29	5·10	5·47	5·30
5·88	5·36	5·57	5·44	5·27	5·63	5·75
5·07	5·29	5·53	5·34	5·39	5·34	5·68
			5·85.			

Wyznaczyć najprawdopodobniejszą wartość gęstości ziemi, błąd średni i oczekiwany jednego spostrzeżenia, błąd średniej arytmetycznej i miarę dokładności.

R o z w i ą z a n i e.

$$[a_i] = 159{\cdot}01,\ [\alpha_i] = +\,2{\cdot}47 - 2{\cdot}40 = +\,0{\cdot}07,$$
$$[\alpha_i^2] = 1{\cdot}1967$$

a) $$d = \frac{[a]}{n} = \frac{159{\cdot}01}{29} = 5{\cdot}48$$

b) $$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\alpha^2]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{1{\cdot}1967}{28}} = \pm\, 0{\cdot}2067.$$

c) $$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}} = \frac{0{\cdot}2067}{\sqrt{28}} = 0{\cdot}0384.$$

d) $\rho = 0{\cdot}6744\mu = 0{\cdot}1397.$

e) $R = 0{\cdot}6744 M = 0{\cdot}0259.$

f) $$h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} = 3{\cdot}42.$$

g) $$H = \frac{1}{M\sqrt{2}} = 18{\cdot}42.$$

h) Do skontrolowania rzetelności rachunku użyć można wzoru:

$$H^2 : h^2 = n : 1$$

$$n = \frac{H^2}{h^2} = \frac{18{\cdot}42^2}{3{\cdot}42^2} = 29{\cdot}00,$$

jak być powinno.

Z powyższego rachunku wynika, że prawdziwa wartość gęstości ziemi leży między:

$$5{\cdot}48 + 0{\cdot}0259 \quad \text{i} \quad 5{\cdot}48 - 0{\cdot}0259.$$

Uwaga. Uporządkowawszy błędy α_i co do ich wielkości, otrzymamy następujący szereg:

$-$ 0·41, $-$ 0·38, $-$ 0·22, $-$ 0·21, $-$ 0·19, $-$ 0·19, $-$ 0·18, $-$ **0·14**, $-$ 0·14, $-$ 0·12, $-$ 0·09, $-$ 0·06, $-$ 0·04, $-$ 0·02, $-$ 0·01, + 0·02, + 0·05, + 0·07, + 0·09, + 0·10, + 0·13, + **0·14**, + 0·15, + 0·17, + 0·20, + 0·27, + 0·31, + 0·37, + 0·40.

Grubszem pismem oznaczone błędy stoją w pośrodku odjemnych, względnie dodatnich błędów. Zatem stosownie do ustępu 15. (str. 17) błąd oczekiwany musi wynosić 0·14, co też zgadza się zupełnie z wynikiem drogą rachunkową powyżej uzyskanym: $\rho = 0{\cdot}1397$. Tym sposobem drogą mechaniczną można wyznaczyć błąd oczekiwany wielkiego szeregu spostrzeżeń.

3. Odmierzono kilka razy kąt teodolitem T i okazał się jako błąd średniej arytmetycznej $M = 12''$. Drugi teodolit T_1 dla jednakowo wielkiej liczby pomiarów daje błąd średniej arytmetycznej $M_1 = 6''$. Jakie ważności przypiszemy pomiarom jednym i drugim teodolitem w celu porównania ich?

Rozwiązanie. Podług (XIII) mamy proporcyę:

$$p : p_1 = M_1 : M,$$

gdzie p jest ważnością dla spostrzeżenia teodolitem T, a p_1 ważnością dla T_1. Przeto będzie:

$$p : p_1 = 6^2 : 12^2$$

$$p : p_1 = 1 : 4.$$

Kładąc $p = 1$, otrzymamy $p_1 = 4$, co oznacza, że każde spostrzeżenie teodolitem T_1 wykonywane jest 4 razy dokładniejsze, niż jedno spostrzeżenie teodolitem T zrobione.

W ten sposób należy wyznaczyć ważności, które odpowiadają różnym przyrządom, jeżeli mamy porównywać ze sobą wyniki, zapomocą nich otrzymane.

4. Mierzono kąt teodolitem repetycyjnym i otrzymano następujących 14 wartości: 69^0 31' i sekundy: 1) 45·00, 2) 31·25, 3) 45·00, 4) 42·50, 5) 37·50, 6) 38·33, 7) 27·50, 8) 43·33, 9) 40·63, 10) 36·25, 11) 42·50, 12) 39·17, 13) 45·00, 14) 40·83. — Wartości te otrzymano jako wyniki powtarzań w liczbie: 1) 5, 2) 4, 3) 3, 4) 5, 5) 3, 6) 3, 7) 3, 8) 3, 9) 4, 10) 2, 11) 3, 12) 3, 13) 2, 14) 3.

Wyznaczyć najprawdopodobniejszą wartość kąta, błąd średni i oczekiwany jednego spostrzeżenia, jakoteż średniej arytmetycznej i odpowiednie miary dokładności.

R o z w i ą z a n i e. Wyniki pomiarów są różnie dokładne, i to tem dokładniejsze, im częściej je powtórzono. Liczby powtarzań przyjmujemy jako wprost równe ważnościom i ustawiamy następującą tabelę, gdzie p_i oznacza ważności, a_i sekundy, $p_i a_i$ iloczyny z dwu pierwszych kolumn. Z sumy wszystkich $p_i a_i$ otrzymujemy średnią wartość a podług wzoru (XVII). Kolumna α_i zawiera błędy $\alpha_i = a_i - a$, następująca iloczyny $p_i \alpha_i$; potem idą wartości α_i^2 i wreszcie iloczyny $p_i \alpha_i^2$, potrzebne do obliczenia błędu średniego. Kolumnę $p_i \alpha_i$ obliczono tylko dla próby, gdyż $[p\alpha] = 0$, albo prawie $= 0$.

L. p.	p_i	a_i	$p_i a_i$	α_i	$p_i \alpha_i$	α_i^2	$p_i \alpha_i^2$
1.	5	45·00	225·00	+ 5·22	+26·10	27·248	136·24
2.	4	31·25	125·00	− 8·53	−34·12	72·761	291·04
3.	3	45·00	135·00	+ 5·22	+15·66	27·248	81·74
4.	5	42·50	212·50	+ 2·72	+13·60	7·398	36·99
5.	3	37·50	112·50	− 2·28	− 6·84	5·198	15·59
6.	3	38·33	115·00	− 1·45	− 4·35	2·103	6·31
7.	3	27·50	82·50	−12·28	−36·84	150·798	452·39
8.	3	43·33	130·00	+ 3·55	+10·65	12·603	37·81
9.	4	40·63	162·52	+ 0·85	+ 3·40	0·723	2·89
10.	2	36·25	72·50	− 3·53	− 7·06	12·461	24·92
11.	3	42·50	127·50	+ 2·72	+ 8·16	7·398	22·19
12.	3	39·17	117·50	− 0·61	− 1·83	0·372	1·12
13.	2	45·00	90·00	+ 5·22	+10·44	27·248	54·49
14.	3	40·83	122·50	+ 1·05	+ 3·15	1·103	3·31
	46		1830·00		+91·16		1167·03
					−91·04		

a) Podług (XVII') mamy:

$$a = \frac{[pa]}{[p]} = \frac{1830}{46} = 39{\cdot}78'',$$

jako sekundy mierzonego kąta.

b) Dla błędu średniego jednego spostrzeżenia podług (XIX):

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p\alpha^2]}{\nu - 1}} = \pm \sqrt{\frac{1167{\cdot}03}{13}} = \pm\ 9{\cdot}475''.$$

c) Dla błędu średniego średniej arytmetycznej podług (XVIII):

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{\pm\ 9{\cdot}475}{\sqrt{46}} = \pm\ 1{\cdot}397''.$$

d) Dla błędu oczekiwanego szeregu spostrzeżeń podług (VIII):

$$\rho = 0{\cdot}6744\ \mu = 0{\cdot}6744 .\ \pm\ 9{\cdot}475 = \pm\ 6{\cdot}390''.$$

e) Dla błędu oczekiwanego średniej arytmetycznej podług (XIV):

$$R = 0{\cdot}6744\ M = 0{\cdot}6744 .\ \pm\ 1{\cdot}397 = \pm\ 0{\cdot}942''.$$

f) Dla miary dokładności błędu średniego μ podług (VII):

$$h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} = \frac{1}{9{\cdot}475\sqrt{2}} = 0{\cdot}0746.$$

g) Dla miary dokładności średniej arytmetycznej podług (VII):

$$H = \frac{1}{M\sqrt{2}} = \frac{1}{1{\cdot}397\sqrt{2}} = 0{\cdot}5062.$$

Wartością najprawdopodobniejszą kąta szukanego jest tedy:

$$69^0\ 31'\ 39''{\cdot}78$$

z błędem średnim $\pm\ 1{\cdot}397''$ a ważnością 46, a prawdziwa wartość kąta leży między:

$$69^0\ 31'\ 39{\cdot}''78 + 0{\cdot}942$$

i

$$69^0\ 31'\ 39{\cdot}''78 - 0{\cdot}942.$$

---

5. Dumas w celu wyznaczenia ciężaru atomowego wodoru, przyjąwszy ciężar atomowy tlenu = 100, otrzymał na podstawie 19 doświadczeń następujące wartości dla ciężaru atomowego wodoru: 12·472, 12·480, 12·480, 12·489, 12·490, 12·490, 12·490, 12·491, 12·496, 12·508, 12·522, 12·533, 12·546, 12·547, 12·550,

12·550, 12·551, 12·551, 12·562. Jakaż jest najprawdopodobniejsza wartość ciężaru atomowego wodoru, jakiż jest błąd średni i oczekiwany jednego spostrzeżenia, jakoteż średniej arytmetycznej i jakie są miary dokładności jednego spostrzeżenia i średniej arytmetycznej. Odp. a = 12·515, $\mu = \pm 0·31$, $\rho = \pm 0·0209$, M = ± 0·0071, R = ± 0·0048, h = 22·8, H = 99·6.

6. Wymierzono kąt trzema różnymi teodolitami T_1 z błędem średnim $\mu_1 = 6''$, T_2 z błędem średnim $\mu_2 = 10''$ i T_3 z błędem średnim $\mu_3 = 14''$ i otrzymano odpowiednio wartości $\alpha_1 = 25^0\ 16'\ 17·62''$, $\alpha_2 = 25^0\ 16'\ 13·32''$ i $\alpha_3 = 25^0\ 16'\ 10·23''$. Obliczyć najprawdopodobniejszą wartość kąta i błąd oczekiwany średniej arytmetycznej. Odp. a = 25^0 16' 11·96'', R = ± 1·15''.

7. Mierzono kąt o przybliżonej wartości 12^0 15' 36'' trzema różnymi teodolitami i otrzymano w 5 pomiarach teodolitem T_1 wartości: 12^0 15' 31·7'', — 39·8'', — 40·7'', — 28·6'', — 32·3'', w 7 pomiarach teodolitem T_2: 12^0 15' 32·8'', — 36·7'', — 38·2'', — 29·3'', — 41·6'', — 35·3'', — 36·2'', w 6 pomiarach teodolitem T_3: 12^0 15' 32·6'', — 38·2'', — 32·3'' — 39·5'', — 41·2'', — 34·3''. Obliczyć najprawdopodobniejszą wartość kąta, jeżeli poszczególnym teodolitom odpowiadają dokładności, wyrażone ważnościami $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $p_3 = 1$. Jaki jest błąd oczekiwany średniej arytmetycznej? Odp. a = 12^0 15' 35·41'', R = ± 0·68''.

8. W latach 1845—46 wyznaczono wysokość biegunową obserwatoryum astronomicznego w Moskwie na podstawie wielokrotnych spostrzeżeń i otrzymano następujące wypadki:

1)	55^0 45'	20·29''	z błędem średnim	$M_1 = 0·368$,
2)		19·39''	„ „	$M_2 = 0·400$,
3)		20·61''	„ „	$M_3 = 0·295$,
4)		20·27''	„ „	$M_4 = 0·341$,
5)		19·81''	„ „	$M_5 = 0·279$,
6)		19·61''	„ „	$M_6 = 0·590$,
7)		19·22''	„ „	$M_7 = 0·388$,
8)		19·08''	„ „	$M_8 = 0·265$,
9)		19·71''	„ „	$M_9 = 0·381$,

Jaka jest najprawdopodobniejsza wysokość biegunowa tegoż obserwatoryum i jaki jest błąd oczekiwany tegoż obliczenia? Odp. a = 55^0 45' 19·763'', R = ± 0·126''.

Wyrównanie spostrzeżeń pośrednich jednej ilości.

28. Ilości x nie możemy bezpośrednio spostrzegać, tylko ilości $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Wiadomo tedy, że

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_k x_k,$$

gdzie stałe c_1, c_2, ... , c_k są ilościami wiadomemi. Otóż chcemy obliczyć wartość najprawdopodobniejszą ilości x i odpowiadające jej błędy, znając błędy średniej arytmetycznej M_1, M_2, ... , M_k, popełnione przy spostrzeganiu ilości x_1, x_2, ... , x_k, przyczem a_1, a_2, ... , a_k oznaczają wartości najprawdopodobniejsze ilości x_1, x_2, ... , x_k.

Wartość najprawdopodobniejszą ilości szukanej x znajdziemy oczywiście, skoro za x_1, x_2, ... , x_k podstawimy wartości najprawdopodobniejsze tychże ilości.

Oznaczywszy tedy przez a wartość najprawdopodobniejszą ilości x, to, skoro:

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_kx_k,$$

mieć będziemy:

$$a = c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_ka_k \tag{XX}$$

jako wzór podający wartość najprawdopodobniejszą ilości x.

Oznaczywszy błąd, odpowiadający tej wartości a, przez M_a, tak że: $M_a = a - x$, to przez odjęcie powyższych obu równań, skoro zważymy, że błędy tak dodatnio, jak odjemnie wziąć można, otrzymamy:

$$\pm M_a = \pm c_1M_1 \pm c_2M_2 \pm \ldots \pm c_kM_k, \tag{1}$$

gdzie:

$$M_i = a_i - x_i.$$

Potęgując (1) przez 2, mieć będziemy:

$$M_a^2 = \sum_i c_i^2M_i^2 + 2\sum_{i,k} \pm c_ic_kM_iM_k.$$

Ponieważ w drugiej sumie występują dodatnie i odjemne wyrazy, to w porównaniu do pierwszej sumy jest ona bardzo małą; dlatego też możemy ją w obliczeniu średniego błędu M_a opuścić, tak że ostatecznie otrzymamy wzór:

$$M_a = \pm\sqrt{[c^2M^2]} \tag{XXI}$$

dostarczający nam sposobu obliczenia błędu średniego średniej wartości ilości x.

Podstawiając w wzorze (XXI) za M_i błędy oczekiwane R_i, to skoro R_a jest błędem oczekiwanym ilości a, mieć będziemy:

$$R_a = \pm\sqrt{[c^2R^2]}. \tag{XXII}$$

Ważności, odpowiadające poszczególnym spostrzeganym ilościom a_1, a_2, ... , a_k, a, oznaczmy przez P_1, P_2, ... , P_k, P_a, a wtedy, skoro $p_0 = 1$, otrzymamy podług (XVIII) następujące ważne równania:

$$P_1 = \frac{1}{M_1^2}, \; P_2 = \frac{1}{M_2^2}, \ldots, P_k = \frac{1}{M_k^2}. \tag{2}$$

Ponieważ

$$P_a = \frac{1}{M_a^2},$$

to podług (XXI) być musi:

$$\frac{1}{P_a} = M_a^2 = [c^2M^2],$$

a skoro w sumie po prawej stronie znaku równania zastąpimy M_i przez ważności, otrzymamy:

$$\frac{1}{P_a} = \left[\frac{c^2}{P}\right]. \qquad \text{(XXIII).}$$

29. Załóżmy, że ilość x, którą mamy spostrzegać, jest pewną znaną funkcyą ilości $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k$, które w rzeczywistości spostrzegamy, jakoteż załóżmy, żeśmy wyznaczyli $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k$ jako najprawdopodobniejsze wartości ilości $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k$ i ich błędy średnie $M_1, M_2, \ldots\ldots, M_k$; mamy wyznaczyć najprawdopodobniejszą wartość ilości x i odpowiadające jej błędy.

Zatem, skoro

$$x = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k),$$

to najprawdopodobniejszą wartością niewiadomej ilości x będzie ta, którą nam daje podstawienie najprawdopodobniejszych wartości ilości $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k$, a więc otrzymamy:

$$a = f(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k) \qquad \text{(XXIV)}$$

jako najprawdopodobniejszą wartość ilości x.

Przez odjęcie otrzymamy:

$$a - x = f(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k) - f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k),$$

stąd:

$$a - x = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 - x) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_2 - x) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_k - x),$$

czyli:

$$\pm M_f = \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} . M_1 \pm \frac{\partial f}{\partial x_2} . M_2 \pm \ldots\ldots \pm \frac{\partial f}{\partial x_k} . M_k,$$

a z porównania z równaniem (1) wypływa wzór następujący:

$$M = \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 M^2\right]} \qquad \text{(XXV)}$$

a dla ważności:

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{P}\right]. \qquad \text{(XXVI)}$$

Znając zatem błąd średni M i ważność P, można przy pomocy wzorów, powyżej wyprowadzonych, wyznaczyć wszystkie inne ilości.

---

30. Zagadnienia. 1. Zapomocą łaty mierniczej o długości l wymierzono przestrzeń, której długość okazała się równą k-razy długości łaty. Przy każdorazowem pokładaniu łaty oszacowano błąd $= \mu$. Jaki jest błąd średni wyniku i jaki błąd oczekiwany?

Rozwiązanie. Niech x oznacza nieznaną długość przestrzeni; tedy jest:

$$x = l + l + l + \ldots + l = k \cdot l,$$

zatem z porównania z (XXI) jest:

$$c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_k = 1,$$

więc na wartość najprawdopodobniejszą ilości x otrzymamy:

$$a = kl$$

z błędem średnim:

$$M = \mu\sqrt{k}$$

i ważnością:

$$P = \frac{p}{k},$$

gdzie p oznacza ważność pojedynczego pomiaru, więc:

$$p = \frac{1}{\mu^2},$$

Podług wzoru (XIV) otrzymamy dla błędu oczekiwanego:

$$R = 0{\cdot}6744897M.$$

Z wzoru:

$$M = \mu\sqrt{k} = \mu\sqrt{\frac{a}{l}}$$

widzimy, że błąd wyniku będzie tem większy, im dłuższą jest przestrzeń, którą wymierzamy, i im mniejszą jest łata miernicza, do pomiaru użyta.

2. Gerling używał przy pomiarze podstawy pod sieć geodezyjną 5 łat T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 o długości 1 toazy, 1 łaty t_1 o długości 3', wreszcie 1 łaty t_2 o długości 2'. Po dokładnem, kilkakrotnem porównaniu z łatą normalną okazały się następujące długości:

$T_1 = 1^t + 0{\cdot}0156''$ z błędem średnim: $M_1 = 0{\cdot}0008''$

$T_2 = 1^t + 0{\cdot}0302''$ „ „ „ $M_2 = 0{\cdot}0006''$

$$T_3 = 1^t + 0{\cdot}0075'' \text{ z błędem średnim } M_3 = 0{\cdot}0010''$$
$$T_4 = 1^t + 0{\cdot}0030'' \quad „ \quad „ \quad „ \quad M_4 = 0{\cdot}0006''$$
$$T_5 = 1^t + 0{\cdot}0205'' \quad „ \quad „ \quad „ \quad M_5 = 0{\cdot}0023''$$
$$t_1 = 3' - 0{\cdot}055'' \quad „ \quad „ \quad „ \quad M_1' = 0{\cdot}0003''$$
$$t_2 = 2' + 0{\cdot}002'' \quad „ \quad „ \quad „ \quad M_2' = 0{\cdot}0002''.$$

Podstawę tę wymierzano w ten sposób, że kładziono nasamprzód wszystkie łaty sążniowe, jednę po drugiej, a następnie po łacie T_5 następowała łata T_1 i t. d. Przybliżona długość wynosiła $12^t\ 5'$, tak że wkońcu położono jeszcze łatę t_1 i t_2. Jaka jest najprawdopodobniejsza długość podstawy, jaki jest błąd średni i oczekiwany pomiaru, jeżeli wskutek pokładania łat mierniczych pojawiający się błąd oszacowano na 0·01" a błąd przy końcu podstawy występujący na 0·15"?

R o z w i ą z a n i e. Ze sposobu, w jaki kładziono łaty po sobie podczas pomiaru podstawy, wynika, że długość:

$$x = 3T_1 + 3T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5 + t_1 + t_2.$$

Wstawiwszy za T_1, T_2 . . . . powyżej podane wartości, otrzymamy:

$$a = 12^t\ 5'\ 0{\cdot}1464''$$

jako najprawdopodobniejszą wartość długości podstawy.

Podług (XXI) błąd średni wyniku byłby:

$$\sqrt{9M_1^2 + 9M_2^2 + 4M_3^2 + 4M_4^2 + 4M_5^2 + M_1'^2 + M_2'^2}.$$

A uwzględniając jeszcze 13 razy objawiający się błąd o wielkości 0·01" podczas kładu łat i błąd 0·15" przy końcu podstawy, będziemy mieli ostatecznie:

$$M = \sqrt{9M_1^2 + 9M_2^2 + 4M_3^2 + 4M_4^2 + 4M_5^2 + M_1'^2 + M_2'^2 + 13(0{\cdot}01)^2 + (0{\cdot}15)^2}$$

a po podstawieniu wartości powyżej podanych, otrzymamy:

$$M = 0{\cdot}1543''.$$

Błąd oczekiwany wynosi zatem:

$$R = 0{\cdot}6744897M = 0{\cdot}6744897 \,.\, 0{\cdot}1543$$
$$R = 0{\cdot}1041.$$

Prawdziwa więc długość podstawy leży między:

$$12^t\ 5'\ 0{\cdot}1464'' - 0{\cdot}1041'' = 12^t\ 5'\ 0{\cdot}0423''$$
i $$12^t\ 5'\ 0{\cdot}1464'' + 0{\cdot}1041'' = 12^t\ 5'\ 0{\cdot}2505''.$$

3. Z trójkąta ABC wymierzono bok $b = 106$ m., przyczem błąd średni $M_1 = 0·06$ m. Następnie wymierzono kąty $\beta = 29^0$ $39'$ z błędem średnim $M_2 = 1'$, i $\gamma = 120^0\ 7'$ z błędem średnim $M_3 = 2'$. Obliczyć długość boku c i błędy mu odpowiadające.

Rozwiązanie. Na bok c mamy wyrażenie:

$$c = \frac{b \sin\gamma}{\sin\beta}, \tag{1}$$

zatem po podstawieniu wartości otrzymamy:

$$c = 233·34 \text{ m.}$$

Aby znaleźć błąd średni tej ilości, różniczkujmy równanie (1):

$$dc = \frac{\sin\gamma'}{\sin\beta'} db + b \frac{\cos\gamma'}{\sin\beta'} d\gamma' . \sin 1' - b \frac{\sin\gamma' \cos\beta'}{\sin^2\beta'} d\beta' \sin 1',$$

gdzie kąty wyrażono w minutach, również $d\beta'$ i $d\gamma'$, gdyż błędy M_2 i M_3, które oznaczają przyrosty $d\beta'$ i $d\gamma'$, podano także w minutach.

Ze względu na wzór (XXI) mamy:

$$db = M_1 = 0·06, \qquad c_1 = \frac{\sin\gamma'}{\sin\beta'},$$

$$d\beta' = M_2 = 1', \qquad c_2 = - b . \frac{\sin\gamma' \cos\beta'}{\sin^2\beta'} . \sin 1',$$

$$d\gamma' = M_3 = 2', \qquad c_3 = b . \frac{\cos\gamma'}{\sin\beta'} \sin 1',$$

skąd zatem wyznaczymy $c_1{}^2$, $c_2{}^2$, $c_3{}^2$. Przeprowadziwszy tedy rachunek, otrzymamy:

$$c_1{}^2 = 3·0574,$$
$$c_2{}^2 = 0·00897,$$
$$c_3{}^2 = 0·00098.$$

Przeto podług (XXI) mieć będziemy:

$$\begin{aligned} M^2 &= c_1{}^2 M_1{}^2 + c_2{}^2 M_2{}^2 + c_3{}^2 M_3{}^2 \\ &= 3·0574 . (0·06)^2 + 0·00897(1)^2 + 0·00098(2)^2 \\ &= 0·02390, \end{aligned}$$

czyli:

$$M = 0·1546$$

a błąd oczekiwany:

$$R = 0·6744. M = 0·6744 . 0·1546.$$

$$R = 0·1043.$$

Prawdziwa tedy długość boku c leży między 233·24 m. a 233·44 m.

Dla miary dokładności boku c otrzymujemy:

$$H = \frac{1}{M\sqrt{2}} = 4{\cdot}574.$$

Dla kąta α znajdziemy:

$$\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma) = 30^0\ 14',$$

a dla błędu średniego podług (XXI), skoro $c_1 = c_2 = -1$, mieć będziemy:

$$M'^2 = M_2{}^2 + M_3{}^2 = (1)^2 + (2)^2 = 5,$$

więc:

$$M' = \sqrt{5} = 2{\cdot}236',$$

a błąd oczekiwany będzie:

$$P' = 0{\cdot}6744\ .\ 2{\cdot}236 = 1{\cdot}508'.$$

Dla miary dokładności zaś:

$$H' = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = 0{\cdot}316.$$

Przyjąwszy ważność jednego spostrzeżenia = 1, to na ważność obliczonego kąta mieć będziemy:

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{4} + \frac{1}{1} = \frac{5}{4},$$

czyli:

$$P' = \frac{4}{5},$$

gdyż ważności kątów β i γ podług (XIII) są odpowiednio 1 i 4.

4. Z danego stanowiska obserwujemy zapomocą lunety dwa sygnały i oznaczamy kąt, pod którym je widzimy. Jeżeli błąd średni w ustawieniu lunety na sygnał wynosi 0·698'' a średni błąd odczytania na kole 2·5'', jak wielki błąd średni mamy w wyniku rachunku?

R o z w i ą z a n i e. Błąd spostrzegania w jednym kierunku składa się tutaj z błędu ustawienia lunety i odczytania podziałki; będzie on zatem:

$$\begin{aligned} M_s &= \pm\sqrt{M_1{}^2 + M_2{}^2} = \pm\sqrt{(0{\cdot}698)^2 + (2{\cdot}5)^2} \\ &= \pm\sqrt{6{\cdot}7372} \\ &= \pm\ 2{\cdot}5956. \end{aligned}$$

Błąd tedy dla kąta składa się z błędu spostrzeżeń dwóch kierunków, a więc:

$$M = \pm \sqrt{M_s^2 + M_s^2} = \pm M_s \sqrt{2}$$
$$= \pm 3{\cdot}6707''.$$

5. Łatą o długości 2·052 m. wymierzono pewną przestrzeń, przykładając ją 13 razy. Przy każdorazowym kładzie łaty oszacowano błąd na 0·5 cm. Jaki jest średni błąd wyniku i błąd oczekiwany? — Odp.: M = ± 1·802, R = ± 1·214.

6. Teodolitem T_1 wymierzono kąt 15 razy i znaleziono wartości: 65° 18·7', — 15·6', — 21·7', — 20·6', — 19·3', — 22·2', — 21·3', — 14·8', — 16·7', — 18·3', — 17·4', — 16·9', — 15·1', — 19·2', — 19·8', a teodolitem T_2 10 razy i otrzymano: 65° 20·4', — 22·6', — 16·3', — 23·8', — 15·4', — 17·8', — 19·3', — 21·5', — 20·9', — 19·8'. W jakim stosunku pozostają miary dokładności, które tym przyrządom przypisać można. — Odp.: $h_1 : h_2 = \sqrt{7{\cdot}3} : \sqrt{5{\cdot}9} = 27 : 24 = 9 : 8$.

7. Dwa kąty A i B trójkąta ABC wymierzono i to kąt A 5 razy teodolitem T_1, a kąt B 7 razy teodolitem T_2 i znaleziono dla A: 32° 15·6', — 19·7', — 21·8', — 17·3', — 18·9', a dla kąta B: 123° 45·6', — 49·3', — 42·6', — 48·9', — 47·6', — 44·9', — 46·7'. Obliczyć najprawdopodobniejszą wartość trzeciego kąta C i błąd oczekiwany tejże wartości. — Odp.: C = 23° 54·9', $R = \pm 3{\cdot}20'$.

Wyrównanie spostrzeżeń pośrednich.

31. Spostrzeżenie, w którem obserwujemy nie ilość niewiadomą, o której wyznaczenie nam chodzi, tylko pewną znaną funkcyę tej niewiadomej, nazwaliśmy p o ś r e d n i e m. Wiedząc np., że $y = f(x)$ i znając rodzaj tej funkcyi, to skoro spostrzegaliśmy ilość y, możemy wogóle wyznaczyć wartości na x. Dopóki mamy tylko jedno spostrzeżenie na y, nie ma mowy o wyrównaniu. Gdybyśmy jednak obserwowali y np. 5 razy, to z powodu błędów spostrzeżeń otrzymalibyśmy 5 różnych wartości na y, a wtedy zadaniem rachunku wyrównania jest wyznaczenie wartości na x takiej, która najlepiej odpowiada tym 5 wartościom spostrzeżeń.

Rozumie się samo przez się, że skoro obserwowaliśmy kilka funkcyj $y_1, y_2, \ldots, y_n$ kilku niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_k$, a temi funkcyami są:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

to sposób postępowania jest analogiczny. Pamiętać atoli należy, że jeżeli mamy x_k wyznaczyć, musi być $k \leqq n$, bo gdyby $k > n$, to zadanie byłoby nieokreślone.

32. Spostrzeżenia pośrednie wyrównywamy podług tych samych zasad. co bezpośrednie, a mianowicie na zasadzie twierdzenia, że średnia arytmetyczna z kilku spostrzeżeń jest wartością najprawdopodobniejszą ilości szukanej x, albo że suma kwadratów błędów jest najmniejszością.

33. W dalszem badaniu naszem rozróżnimy a) wyrównanie spostrzeżeń pośrednich bez równań warunkowych między szukanemi ilościami zachodzących, czyli krócej wyrównanie spostrzeżeń pośrednich, b) wyrównanie spostrzeżeń pośrednich z równaniami warunkowemi zachodzącemi między ilościami spostrzeganemi, czyli wyrównanie spostrzeżeń ilości zawarowanych i c) wyrównanie spostrzeżeń pośrednich z równaniami warunkowemi zachodzącemi między ilościami szukanemi czyli wyrównanie spostrzeżeń pośrednich ilości zawarowanych.

W każdym z tych przypadków rozróżnimy spostrzeżenia o jednakowej i niejednakowej dokładności.

A. Wyrównanie spostrzeżeń pośrednich
(bez równań warunkowych).

1. Wszystkie spostrzeżenia jednakowej dokładności.

a. Normalne równania Gauss'a.

34. Pomiędzy k niewiadomemi ilościami $x, y, z, \ldots, v$ istnieje n równań:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + k_1 v = L_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + k_2 v = L_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots + k_3 v = L_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots + k_n v = L_n, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

gdzie $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$ są ilości spostrzegane, $a, b, c, \ldots, k$ ilości wiadome. Chodzi zatem o wyznaczenie równań, któreby dały najlepsze wartości na $x, y, z, \ldots, v$, spełniające powyższy układ równań, gdy na miejsce $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$ wstawimy przez spostrzeżenie znalezione wartości $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$.

Gdybyśmy znali dokładnie $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$, to, ponieważ te n równania nie są sprzeczne, otrzymalibyśmy łatwo wartości na $x, y, z, \ldots, v$, gdyż potrzebaby było wyznaczyć je z k którychkolwiek n równań. Pozostałe zaś $(n-k)$ równania spełniłyby się same dla znalezionych wartości. Gdyby $n < k$, nie moglibyśmy wyznaczyć k ilości $x, y, z, \ldots, v$.

Kładąc więc na miejsce $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$ przez spostrzeżenie znalezione ilości $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$, natenczas otrzymamy układ n równań:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + k_1v = l_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + k_2v = l_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z + \ldots + k_3v = l_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + k_nx = l_n, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

które nie będą już z sobą zgodne, t. j. nie będzie wogóle takich wartości na $x, y, z, \ldots, v$, któreby spełniły wszystkie równania, a przyczyną tego są błędy, w spostrzeżeniach popełnione, dające się wyrazić równaniem:

$$\varepsilon_i = L_i - l_i, \qquad (3)$$

gdzie $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. W tym przypadku, gdyby wszystkie $\varepsilon_i = 0$, a więc wszystkie $L_i = l_i$, równania (2) byłyby niesprzeczne, a więc identyczne z układem (1).

Ponieważ nie można uskutecznić, aby wszystkie $\varepsilon_i = 0$, staramy się tedy spełnić inny warunek, a mianowicie ten, aby suma kwadratów błędów była najmniejszością, aby więc każdy z błędów stał się ile możności najmniejszym przez mające się wyznaczyć ilości $x, y, z, \ldots, v$. Mamy zatem ilości $x, y, z, \ldots, v$ wyznaczyć w ten sposób, aby

$$[\varepsilon\varepsilon] = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots + \varepsilon_n^2$$

było najmniejszością. W takim razie być musi:

$$\frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial z} = 0, \ldots, \frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial v} = 0. \qquad (4)$$

Przedstawiwszy sobie ε_i jako funkcye ilości $x, y, z, \ldots, v$, otrzymamy, po podstawieniu w równanie (3) za L_i wartości otrzymanej z równań (1), następujący układ równań:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + k_1v - l_1, \\ \varepsilon_2 = a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + k_2v - l_2, \\ \varepsilon_3 = a_3x + b_3y + c_3z + \ldots + k_3v - l_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_n = a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + k_nv - l_n. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

A że:

$$\frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial x} = 2\left(\varepsilon_1 \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial x} + \varepsilon_3 \frac{\partial\varepsilon_3}{\partial x} + \ldots + \varepsilon_n \frac{\partial\varepsilon_n}{\partial x}\right),$$

jakoteż, że:

$$\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x} = a_1, \quad \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial x} = a_2, \quad \frac{\partial\varepsilon_3}{\partial x} = a_3, \ldots, \frac{\partial\varepsilon_n}{\partial x} = a_n,$$

mieć będziemy:

$$\frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial x} = 2\,(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 + \ldots + a_n\varepsilon_n),$$

albo też:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial x} = {} & a_1\,(a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + k_1v - l_1) + \\ & + a_2\,(a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + k_2v - l_2) + \\ & + a_3\,(a_3x + b_3y + c_3z + \ldots + k_3v - l_3) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_n\,(a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + k_nv - l_n)\,,\end{aligned}$$

czyli:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial x} = [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \ldots + [ak]\,v - [al],$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned}[aa] &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2, \\ [ab] &= a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [ak] &= a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Analogicznie postępując, dojdziemy do następujących rezultatów:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial y} &= [ba]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + \ldots + [bk]\,v - [bl], \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial z} &= [ca]\,x + [cb]\,y + [cc]\,z + \ldots + [ck]\,v - [cl], \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial[\varepsilon\varepsilon]}{\partial v} &= [ka]\,x + [kb]\,y + [kc]\,z + \ldots + [kk]\,v - kl],\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

przyczem pamiętać należy, że:

$$[ab] = [ba],$$
$$[ac] = [ca],\ \text{i t. d.}$$

Wskutek równań (7) przejdą równania warunkowe (4) dla najmniejszości w następujące:

$$\left.\begin{aligned}[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \ldots + [ak]\,v &= [al], \\ [ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + \ldots + [bk]\,v &= [bl], \\ [ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + \ldots + [kk]\,v &= [cl], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ [ak]\,x + [bk]\,y + [ck]\,z + \ldots + [kk]\,v &= [kl],\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

który to układ k równań wystarcza do wyznaczenia k ilości $x, y, z, \ldots, v$. Ten to układ równań zowiemy normalnemi równaniami Gauss'a.

35. Chcąc okazać, że układ równań (8) dopuszcza tylko jedno rozwiązanie co do ilości $x, y, z, \ldots, v$, należałoby równania te istotnie rozwiązać. Aby uwidocznić należycie sposób postępowania, który przy rozwiązaniu okazuje się bardzo praktycznym, przyjmiemy, że mamy tylko cztery niewiadome x, y, z, t, a więc następujące cztery równania normalne:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,t &= [al], \\ [ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + [bd]\,t &= [bl]; \\ [ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + [cd]\,t &= [cl], \\ [ad]\,x + [bd]\,y + [cd]\,z + [dd]\,t &= [dl], \end{aligned}\right\} \qquad (8')$$

gdzie spółczynniki, na przekątnej leżące tj. $[aa]$, $[bb]$, $[cc]$, $[dd]$, jako sumy rzeczywistych kwadratów, są zawsze dodatnie i różne od zera. Z pierwszego równania układu (8′) wynika:

$$x = -\frac{[ab]}{[aa]}\,y - \frac{[ac]}{[aa]}\,z - \frac{[ad]}{[aa]}\,t + \frac{[al]}{[aa]}, \qquad (9)$$

Podobnie możnaby wyznaczyć y z drugiego, z z trzeciego i t z czwartego równania.

Podstawiwszy wartość przedstawioną równaniem (9) w pozostałe trzy równania układu (8′), otrzymamy następujący układ równań:

$$\left([bb] - \frac{[ab]}{[aa]}\,[ab]\right)y + \left([bc] - \frac{[ac]}{[aa]}\,[ab]\right)z + \\ + \left([bd] - \frac{[ad]}{[aa]}\,[ab]\right)t = \left([bl] - \frac{[al]}{[aa]}\,[ab]\right),$$

$$\left([bc] - \frac{[ab]}{[aa]}\,[ac]\right)y + \left([cc] - \frac{[ac]}{[aa]}\,[ac]\right)z + \\ + \left([cd] - \frac{[ad]}{[aa]}\,[ac]\right)t = \left([cl] - \frac{[al]}{[aa]}\,[ac]\right),$$

$$\left([bd] - \frac{[ab]}{[aa]}\,[ad]\right)y + \left([cd] - \frac{[ac]}{[aa]}\,[ad]\right)z + \\ + \left([dd] - \frac{[ad]}{[aa]}\,[ad]\right)t = \left([dl] - \frac{[al]}{[aa]}\,[ad]\right).$$

Kładąc dla krótkości pisania:

$$[bb\,.\,1] = [bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]},$$

$$[bc\,.\,1] = [bc] - \frac{[ac]\,[ab]}{[aa]}, \text{ i t. d.,}$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned}
[bb\,.\,1]\,y + [bc\,.\,1]\,z + [bd\,.\,1]\,t &= [bl\,.\,1],\\
[bc\,.\,1]\,y + [cc\,.\,1]\,z + [cd\,.\,1]\,t &= [cl\,.\,1], \qquad (10)\\
[bd\,.\,1]\,y + [cd\,.\,1]\,z + [dd\,.\,1]\,t &= [dl\,.\,1],
\end{aligned}$$

jako układ pierwszych równań eliminacyjnych. Układ ten ma analogiczne własności, co układ (8), a mianowicie spółczynniki wyrazów na przekątnej leżących, t. j. $[bb\,.\,1]$, $[cc\,.\,1]$, $[dd\,.\,1]$, są dodatnie i różne od zera.

Albowiem jest:

$$[bb\,.\,1] = [bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]} = \frac{[aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]}{[aa]},$$

a że podług (6) jest:

$$[aa] = \sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 \quad , \quad [bb] = \sum_{k=1}^{k=n} b_k^2 \;,$$

przeto:

$$[aa]\,.\,[bb] = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_i^2 b_k^2 = \sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 b_i^2 + \sum_{i,k} a_i^2 b_k^2 \;,$$

gdzie $\sum\limits_{i,k}$ oznacza, że należy wziąć wszelkie kombinacye z i i k, w których i jest różne od k.

Podobnież ponieważ jest:

$$[ab] = \sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i \quad , \quad [ab] = \sum_{k=1}^{k=n} a_k b_k \;,$$

przeto:

$$[ab]\,.\,[ab] = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_i a_k b_i b_k = \sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 b_i^2 + \sum_{i,k} a_i a_k b_i b_k.$$

Zatem otrzymamy:

$$\begin{aligned}
[aa]\,.\,[bb] - [ab]\,.\,[ab] &= \sum_{i,k} a_i^2 b_k^2 - \sum_{i,k} a_i a_k b_i b_k\\
&= \sum_{i,k} \left(a_i^2 b_k^2 - a_i a_k b_i b_k\right)\\
&= \sum_{i,k}{}' \left(a_i^2 b_k^2 - 2 a_i a_k b_i b_k + a_k^2 b_i^2\right),
\end{aligned}$$

gdzie Σ' oznaczać ma, że odtąd przy wyborze i i k należy wybierać tylko $i < k$. Tedy będzie:

$$[aa]\,[bb] - [ab]\,[ab] = \sum_{i,k}{}' (a_i b_k - a_k b_i)^2,$$

a więc:

$$\frac{[aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]}{[aa]} = \sum_{i,k}{}' \frac{(a_i b_k - a_k b_i)^2}{[aa]}$$

a że $[aa]$, jak powyżej widzieliśmy, jest dodatnie, przeto $\sqrt{[aa]}$ jest rzetelny, więc:

$$[bb\,.\,1] = [bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]} = \sum_{i,k}{}' \left(\frac{a_i b_k - a_k b_i}{\sqrt{[aa]}}\right)^2 \tag{11}$$

jest sumą samych kwadratów, przeto dodatnie. Zerem atoli $[bb\,.\,1]$ być nie może, gdyż dla wszystkich i i $k > i$ musiałoby się spełnić:

$$a_i b_k - a_k b_i = 0$$

czyli:

$$\frac{b_i}{a_i} = \frac{b_k}{a_k},$$

co być nie może.

Z pierwszego równania układu (10) można zawsze wyznaczyć y w postaci:

$$y = -\frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\,z - \frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\,t + \frac{[bl\,.\,1]}{[bb\,.\,1]} \tag{9'}$$

i podstawić tę wartość w pozostałe dwa równania, w skutek czego mieć będziemy:

$$\left([cc.1] - \frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\,[bc\,.\,1]\right) z + \left([cd\,.\,1] - \frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\,[bc\,.\,1]\right) t =$$
$$= \left([cl\,.\,1] - \frac{[bl\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\,[bc\,.\,1]\right),$$

$$\left([cd.1] - \frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\,[bd\,.\,1]\right) z + \left([dd\,.\,1] - \frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\,[bd\,.\,1]\right) t =$$
$$= \left([dl\,.\,1] - \frac{[bl\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\,[bd\,.\,1]\right),$$

albo też przyjąwszy schematyczne oznaczenie spółczynników, tj.:

$$[cc\,.\,2] = [cc\,.\,1] - \frac{[bc\,.\,1]\,[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]},$$

$$[cd\,.\,2] = [cd\,.\,1] - \frac{[bd\,.\,1]\,[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}, \text{ i t d.},$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} [cc\,.\,2]\,z + [cd\,.\,2]\,t &= [cl\,.\,2] \\ [cd\,.\,2]\,z + [dd\,.\,2]\,t &= [dl\,.\,2] \end{aligned} \tag{12}$$

jako układ drugich równań eliminacyjnych.

Ponieważ podług (11) spółczynnik [*bb* . *1*] jest sumą kwadratów i to samo w zupełności przypada dla [*cc* . *1*], to podobnym rachunkiem, co powyżej, wykazać można, że [*cc* . *2*] i [*dd* . *2*] są również sumami kwadratów, więc zawsze dodatnie i od zera rożne.

Z pierwszego równania układu (12) otrzymać można zawsze z:

$$z = -\frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}\,t + \frac{[cl\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}, \tag{9''}$$

a po podstawieniu w drugie równanie układu (12) będzie:

$$\left([dd\,.\,2] - \frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}[cd\,.\,2]\right) t = \left([dl\,.\,2] - \frac{[cl\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}[cd\,.\,2]\right)$$

albo też oznaczywszy schematycznie:

$$[dd\,.\,3] = [dd\,.\,2] - \frac{[cd\,.\,2]\,[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]},$$

$$[dl\,.\,3] = [dl\,.\,2] - \frac{[cl\,.\,2]\,[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]},$$

mieć będziemy:

$$[dd\,.\,3]\,t = [dl\,.\,3] \tag{13}$$

jako równanie przedstawiające układ trzecich równań eliminacyjnych.

I tutaj [*dd* . *3*] jest sumą kwadratów, więc zawsze dodatnie i od zera różne. Z (13) otrzymamy:

$$t = \frac{[dl\,.\,3]}{[dd\,.\,3]}. \tag{9'''}$$

W ten sposób wskazane jest rozwiązanie równań normalnych. Zapomocą (9‴) obliczamy wartość t ze spółczynników równań normalnych; wartość t podstawiona w (9″) da wartość na z, a skoro wartości t i z podstawimy w (9′) mieć będziemy y, a wkońcu podstawiwszy y, z, t, w (9), otrzymamy wartość na x.

Zatem za równania normalne otrzymujemy następujący układ równań:

$$\left.\begin{aligned}
x &= -\frac{[ab]}{[aa]}\,y - \frac{[ac]}{[aa]}\,z - \frac{[ad]}{[aa]}\,t + \frac{[al]}{[aa]},\\
y &= -\frac{[bc.1]}{[bb.1]}\,z - \frac{[bd.1]}{[bb.1]}\,t + \frac{[bl.1]}{[bb.1]},\\
z &= -\frac{[cd.2]}{[cc.2]}\,t + \frac{[cl.2]}{[cl.2]},\\
t &= \frac{[dl.3]}{[dd.3]},
\end{aligned}\right\} \tag{A}$$

który jest zupełnie równoważny układowi równań normalnych i dozwala obliczyć bezpośrednio wartości t, z, y, x, gdy spółczynniki równań eliminacyjnych są znane. Układ tych równań nazwiemy układem zredukowanych równań normalnych.

36. Z powyższego przeprowadzenia rachunku widoczny jest sposób postępowania w tym przypadku, gdy więcej jest niewiadomych niż cztery. Wskazana droga doprowadza zawsze do wyniku w postaci równań (A).

37. Okażemy w niniejszym ustępie, że wartości x, y, z, t, wysnuwające się z równań normalnych lub z układu im równoważnego, czynią sumę kwadratów błędów najmniejszością.

Za dowolne x. y, z, t, połóżmy:

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,t - [al] &= X,\\
[bb.1]\,y + [bc.1]\,z + [bd.1]\,t - [bl.1] &= Y_1,\\
[cc.2]\,z + [cd.2]\,t - [cl.2] &= Z_2,\\
[dd.3]\,t - [dl.3] &= T_3.
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Natenczas owe wartości na x, y, z, t, które spełnią $X = o$, $Y_1 = o$, $Z_2 = o$, $T_3 = o$, będą przedstawiały rozwiązania równań normalnych ($8'$).

Podług równań (5) mamy:

$$\varepsilon_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i t - l_i,$$

więc:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i\varepsilon_i = {} & a_i a_i x^2 + b_i b_i y^2 + c_i c_i z^2 + d_i d_i t^2 - l_i l_i + \\
& + 2\,(a_i b_i xy + a_i c_i xz + a_i d_i xt - a_i l_i x + b_i c_i yz + \\
& + b_i d_i yt - b_i l_i y + c_i d_i zt - c_i l_i z - d_i l_i t),
\end{aligned}$$

a przez sumowanie od $i = 1$ do $i = n$ otrzymamy:

$$\begin{aligned}
[\varepsilon\varepsilon] = {} & [aa]x^2 + [bb]y^2 + [cc]z^2 + [dd]t^2 - [ll] + \\
& + 2([ab]y + [ac]z + [ad]t - [al])\,x \\
& + 2([bc]z + [bd]t - [bl])\,y \\
& + 2([cd]t - [cl])\,z \\
& - 2[dl]\,t.
\end{aligned}$$

Zebrawszy wyrazy z x^2 i x i uzupełniwszy je do zupełnego kwadratu mieć będziemy:

$$\begin{aligned}
[\varepsilon\varepsilon] = {} & \frac{1}{[aa]}\Big([aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t - [al]\Big)^2 - \\
& - \frac{1}{[aa]}\Big([ab]y + [ac]z + [ad]t - [al]\Big)^2 + \\
& + [bb]y^2 + [cc]z^2 + [dd]t^2 - [ll] + \\
& + 2\,([bc]z + [bd]t - [bl])y + \\
& + 2([cd]t - [cl])z \\
& - 2[dl]t
\end{aligned}$$

czyli uwzględniając pierwsze równanie (14):

$$[\varepsilon\varepsilon] - \frac{X^2}{[aa]} = \left([bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]}\right)y^2 + \left([cc] - \frac{[ac]^2}{[aa]}\right)z^2 +$$

$$+\left([dd] - \frac{[ad]^2}{[aa]}\right)t^2 - \left([ll] - \frac{[al]^2}{[aa]}\right) + 2\left([bc] - \frac{[ac][ab]}{[aa]}\right)zy$$

$$+ 2\left([bd] - \frac{[ab][ad]}{[aa]}\right)ty - 2\left([bl] - \frac{[ab][al]}{[aa]}\right)y$$

$$+ 2\left([cd] - \frac{[ac][ad]}{[aa]}\right)tz - 2\left([cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]}\right)z$$

$$- 2\left([dl] - \frac{[ad][al]}{[aa]}\right)t$$

czyli:

$$[\varepsilon\varepsilon] - \frac{X^2}{[aa]} = [bb\,.\,1]y^2 + 2([bc\,.\,1]\,z + 2([bd\,.\,1]t - [bl\,.\,1])\,y$$
$$+ [cc\,.\,1]\,z^2 + [dd\,.\,1]\,t^2 + [ll\,.\,1]$$
$$+ 2([cd\,.\,1]\,t - [cl\,.\,1])z$$
$$- 2\,[dl\,.\,1]\,t.$$

Uzupełniwszy pierwszy wiersz do zupełnego kwadratu, będziemy mieli:

$$[\varepsilon\varepsilon] - \frac{X^2}{[aa]} = \frac{1}{[bb.1]}([bb.1]\,y + [bc.1]\,z + [bd.1]\,t + [bl.1])^2 -$$
$$- \frac{1}{[bb.1]}([bc.1]\,z + [bd.1]\,t - [bl.1])^2$$
$$+ [cc.1]\,z^2 + [dd.1]\,t^2 + [ll.1] +$$
$$+ 2\,([cd.1]\,t - [cl.1])\,z$$
$$- 2\,[dl.1]\,t,$$

czyli uwzględniając drugie równanie układu (14), otrzymamy:

$$[\varepsilon] - \frac{X^2}{[aa]} - \frac{Y_1^{\,2}}{[bb.1]} = \left([cc.1] - \frac{[bc.1]^2}{[bb.1]}\right)z^2 + \left([dd.1] -\right.$$
$$\left. - \frac{[bd.1]^2}{[bb.1]}\right)t^2 + \left([ll.1] - \frac{[bl.1]^2}{[bb.1]}\right)$$

$$+ 2\left([cd.1] - \frac{[bc.1]\,[bd.1]}{[bb.1]}\right) tz - 2\left([cl.1] - \frac{[bc.1]\,[bl.1]}{[bb.1]}\right) z$$

$$- 2\left([dl.1] - \frac{[bd.1]\,[bl.1]}{[bb.1]}\right) t$$

czyli:

$$\begin{aligned}[\varepsilon\varepsilon] - \frac{X^2}{[aa]} - \frac{Y_1^{\,2}}{[bb.1]} &= [cc.2]\,z^2 + 2([cd.2]\,t - [cl.2])\,z + \\ &\quad + [dd.2]\,t^2 - 2\,[dl.2]\,t + [ll.2] \\ &= \frac{1}{[cc.2]}([cc.2]\,z + [cd.2]\,t - [cl.2])^2 - \\ &\quad - \frac{1}{[cc.2]}([cd.2]\,t - [cl.2])^2 \\ &\quad + [dd.2]\,t^2 - 2\,[dl.2]\,t + [ll.2],\end{aligned}$$

a więc w uwzględnieniu trzeciego równania (14):

$$\begin{aligned}[\varepsilon\varepsilon] - \frac{X^2}{[aa]} - \frac{Y_1^{\,2}}{[bb.1]} - \frac{Z_2^{\,2}}{[cc.2]} &= \left([dd.2] - \frac{[cd.2]^2}{[cc.2]}\right) t^2 + \\ &\quad + \left([ll.2] - \frac{[cl.2]^2}{[cc.2]}\right) \\ &\quad - 2\left([dl.2] - \frac{[cl.2]\,[cd.2]}{[cc.2]}\right) t \\ &= [dd.3]\,t^2 - 2\,[dl.3]\,t + [ll.3].\end{aligned}$$

Uwzględniwszy ostatnie równanie grupy (14), będziemy mieli:

$$[\varepsilon\varepsilon] - \frac{X^2}{[aa]} - \frac{Y_1^{\,2}}{[bb.1]} - \frac{Z_2^{\,2}}{[cc.2]} - \frac{T_3^{\,2}}{[dd.3]} = [ll.3] - \frac{[dl.3]^2}{[dd.3]}.$$

Położywszy:

$$[ll.3] - \frac{[dl.3]\,[dl\ 3]}{[dd.3]} = [ll.4],$$

otrzymamy:

$$[\varepsilon\varepsilon] = \frac{X^2}{[aa]} + \frac{Y_1^{\,2}}{[bb.1]} + \frac{Z_2^{\,2}}{[cc.2]} + \frac{T_3^{\,2}}{[dd.3]} + [ll.4]. \qquad (15)$$

Ilości $[aa]$, $[bb \,.\, 1]$, $[cc \,.\, 2]$, $[dd \,.\, 3]$ są wszystkie dodatnie i od zera różne. Nadawszy tedy x, y, z, t jakiekolwiek wartości, będzie $[\varepsilon\varepsilon]$ zawsze większe, aniżeli dla wartości na x, y, z, t, które czynią równocześnie:

$$X = 0,\ Y_1 = 0,\ Z_2 = 0,\ T_3 = 0,$$

więc które są rozwiązaniami równań normalnych.

Podstawiwszy w równania błędów (5) za x, y, z, t wartości, które wypływają z równań normalnych, to ilości ε_i mogą przejść w α_i. Wtedy ε_i są prawdziwymi błędami, gdy zaś α_i błędami, które popełniono, gdy zamiast prawdziwych wartości za x, y, z, t podstawiono rozwiązania równań normalnych. Z równania (15) wynika zatem, że:

$$[\alpha\alpha] = [ll \,.\, 4]. \tag{16}$$

A więc i $[ll \,.\, 4]$ jest sumą kwadratów, co też z budowy tej ilości wypływa.

Jeżeli zaś mamy k niewiadomych ilości x, y, z, t, . . . , v, to analogicznie do powyższego przeprowadzenia znajdziemy:

$$[\varepsilon\varepsilon] = \frac{X^2}{[aa]} + \frac{Y_1^{\,2}}{[bb.1]} + \frac{Z_2^{\,2}}{[cc.2]} + \frac{T_3^{\,2}}{[dd.3]} + \ldots + \frac{V_{k-1}^{\,2}}{[kk.k-1]} + [ll.k],$$

jakoteż, że

$$[\alpha\alpha] = [ll \,.\, k].$$

Równania

$$X = 0,\ Y_1 = 0,\ Z_2 = 0,\ T_3 = 0, \ldots\ V_{k-1} = 0$$

zastępują równania normalne i dostarczają wartości na x, y, z, t, . . ., v, dla których suma kwadratów błędów jest minimum.

38. Niech L_1, L_2, ... , L_n będą ilościami mającemi się spostrzegać i niech będzie:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = f_1\ (x, y, z, \ldots, v), \\ L_2 = f_2\ (x, y, z, \ldots, v), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_n = f_n\ (x, y, z, \ldots, v), \end{array}\right\} \tag{17}$$

gdzie f_1, f_2, . . . , f_n są funkcyami znanemi. Jeżeli ze spostrzeżenia otrzymaliśmy wartości l_1, l_2, ... , l_n, tak że $\varepsilon_i = L_i - l_i$ są błędami pojawiającymi się podczas spostrzeżenia, to błędy te według założenia muszą być nieznaczne. Podstawiając tedy za L_1, L_2, . . . , L_n wartości l_1, l_2, ... , l_n, otrzymamy w jakikolwiekbądź sposób układ wartości na x_1 y_1, z_1, ... , v_1, który albo czyni zadosyć wszystkim n równaniom albo przynajmniej k z nich. Prawdziwe więc wartości x, y, z, . . . , v, które spełniają równania (17), różnić się będą nieznacznie od x_1, y_1, $z_1, \ldots, v_1$, tak że będziemy mogli podstawić:

$$x - x_1 = \xi, \quad y - y_1 = \eta, \quad z - z_1 = \zeta, \quad \ldots, \quad v_1 - v = \omega,$$

gdzie $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$ są ilościami małemi.

Podstawiwszy tedy $x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1$ w równania (17) otrzymamy:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1) = l_1 - \lambda_1 \\ f_2(x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1) = l_2 - \lambda_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1) = l_n - \lambda_n \end{array}\right\} \quad (18)$$

gdzie λ_i znikają dla k równań wziętych do wyznaczenia ilości $x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1$, podczas gdy pozostałe λ są nieskończenie małe, gdyż $x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1$ niewiele się różnią od wartości $x, y, z, \ldots, v$, jakoteż także mało się różnią $l_1, l_2, \ldots, l_n$ od $L_1, L_2, \ldots, L_n$.

Ze względu na równania (17) i (18) mieć będziemy:

$$\varepsilon_i = L_i - l_i = f_i(x, y, z, \ldots, v) - f_i(x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1) - \lambda_i$$

a opuszczając wyższe potęgi z $x - x_1 = \xi$, $y - y_1 = \eta, \ldots$, otrzymamy:

$$\varepsilon_i = -\lambda_i + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_1 \xi + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_1 \eta + \left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\right)_1 \zeta + \ldots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial v}\right)_1 \omega,$$

gdzie $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_1$ oznacza, że w cząstkowych pochodnych funkcyi f co do x za $x, y, z, \ldots, v$ podstawiono $x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1$. Przeto znane są wartości:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_1 = a_i, \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_1 = b_i, \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\right)_1 = c_i, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial v}\right)_1 = k_i,$$

skutkiem czego otrzymamy następujący układ równań:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 + \lambda_1 = a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + \ldots + k_1\omega \\ \varepsilon_2 + \lambda_2 = a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + \ldots + k_2\omega \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_n + \lambda_n = a_n\xi + b_n\eta + c_n\zeta + \ldots + k_n\omega. \end{array}\right\} \quad (19)$$

Z tym układem równań, zupełnie analogicznym do układu równań błędów, postępujemy co do wyznaczenia wartości na $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$, które $[(\varepsilon + \lambda)^2]$ czynią najmniejszością, zupełnie tak samo, co z układem równań błędów.

Znalazłszy takie wartości błędów, tedy mamy:

$$x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta, \quad z = z_1 + \zeta, \quad \ldots, \quad v = v_1 + \omega$$

jako wartości niewiadomych, które wprawdzie nie czynią ściśle zadość równaniom (17), gdy za $L_1, L_2, \ldots, L_n$ podstawimy

$l_1, l_2, \ldots, l_n$, ale zawsze lepiej je spełniają niż $x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1$.

Wielkiej wagi jest tutaj, aby wartości na $x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1$, obrano tak, aby poprawki $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$ wypadły jak najmniejsze. Gdyby dla otrzymanych wartości $x, y, z, \ldots, v$ suma kwadratów błędów była jeszcze dość znaczną, należy te wartości $x, y, z, \ldots, v$ podstawić za wartości $x_1, y_1, z_1, \ldots, v_1$ w cząstkowych pochodnych

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}, \frac{\partial f_i}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial v},$$

skutkiem czego otrzymamy nowe spółczynniki:

$$a_i', b_i', c_i', \ldots, k_i'$$

a zapomocą w ten sposób uzyskanego układu równań błędów znajdziemy nowe poprawki, jakie na wartościach $x, y, z, \ldots, v$ uczynić należy.

---

39. Zagadnienia. 1. Z punktu 0 wymierzono w płaszczyźnie ku czterem punktom A, B, C, D kąty i znaleziono następujące wartości: AOB = 48° 17′ 1·4″, AOC = 96° 52′ 16·8″, AOD = 152° 54′ 6·8″, BOC = 58° 35′ 14·3″, BOD = 104° 37″ 7·8″ i COD = 56° 1′ 48·9″. Wyznaczyć najprawdopodobniejsze wartości tychże kątów.

Rozwiązanie. Ponieważ te cztery kierunki tworzą między sobą 6 kątów, które pomierzono, a trzy z tych kątów, jak AOB, AOC i AOD wyznaczają już te kierunki, to mamy w takim razie 3 nadliczbowe pomiary a zadaniem naszem jest wyznaczenie takich wartości tych 6 kątów, dla których suma kwadratów błędów jest najmniejszością, czyli chodzi nam o wyznaczenie najprawdopodobniejszych wartości tych kątów.

W tym celu połóżmy:

$$\begin{aligned} AOB &= 48^\circ\ 17'\ \ 1'' + x; \\ AOC &= 96^\circ\ 52'\ 16'' + y, \\ AOD &= 152^\circ\ 54'\ \ 6'' + z, \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie x, y, z, oznaczają poprawki, które przeprowadzić należy na wartościach kątów, aby otrzymać wartości najprawdopodobniejsze.

Ponieważ podług pomiaru znaleziono:

$$\begin{aligned} AOB &= 48^\circ\ 17'\ \ 1{\cdot}4'' \\ AOC &= 95^\circ\ 52'\ 16{\cdot}8'' \\ AOD &= 152^\circ\ 54'\ \ 6{\cdot}8'' \end{aligned}$$

przeto wynika, że:

$$\begin{aligned} x &= 0{\cdot}4'', \\ y &= 0{\cdot}8'', \\ z &= 0{\cdot}8''. \end{aligned} \tag{2}$$

Ponieważ BOC = AOC — AOB, przeto podług (1) mamy:

$$
\begin{array}{lrl}
 & \text{BOC} = & 48^{0}\ 35'\ 15'' \quad + y - x \\
\text{a z pomiaru:} & \text{BOC} = & 48^{0}\ 35'\ 14{\cdot}3'' \\
\hline
\text{przeto:} & 0 = & \mathbf{0{\cdot}7''} + \mathbf{y} - \mathbf{x}
\end{array}
$$

tj. związek, który mają spełnić x i y.

Podobnież:

BOD = AOD — AOB, przeto podług (1):

$$
\begin{array}{lrl}
 & \text{BOD} = & 104^{0}\ 37'\ 5'' \quad + z - x, \\
\text{a z pomiaru:} & \text{BOD} = & 104^{0}\ 37'\ 7{\cdot}8'' \\
\hline
\text{więc:} & 0 = & - \mathbf{2{\cdot}8''} + \mathbf{z} - \mathbf{x}
\end{array}
$$

jako równanie warunkowe, któremu z i x mają uczynić zadość.

Wreszcie:

COD = AOD — AOC,

$$
\begin{array}{lrl}
\text{przeto podług (1):} & \text{COD} = & 56^{0}\ 1'\ 50'' \quad + z - y, \\
\text{z pomiaru:} & \text{COD} = & 56^{0}\ 1'\ 48{\cdot}9'' \\
\hline
\text{więc:} & 0 = & \mathbf{1{\cdot}1''} + \mathbf{z} - \mathbf{y}
\end{array}
$$

jako trzecie równanie warunkowe, wykazujące związek między z i y. Mamy zatem następujące równania błędów:

$$
\begin{aligned}
x + 0y + 0z &= 0{\cdot}4 \\
0x + y + 0z &= 0{\cdot}8 \\
0x + 0y + z &= 0{\cdot}8 \\
x - y + 0z &= 0{\cdot}7 \\
-x + 0y + z &= 2{\cdot}8 \\
0x + y - z &= 1{\cdot}1.
\end{aligned}
$$

Wypisawszy sobie spółczynniki w tabelkę, w celu wyznaczenia spółczynników równań normalnych podług powyżej wskazanej teoryi, otrzymamy:

L. p.	a	b	c	l
1.	1	0	0	0·4
2.	0	1	0	0·8
3.	0	0	1	0·8
4.	1	— 1	0	0·7
5.	— 1	0	1	2·8
6.	0	1	— 1	1·1

Z tej tabliczki układamy następującą:

L. p.	aa	ab	ac	al	bb	bc	bl	cc	cl
1.	1	0	0	0·4	0	0	0	0	0
2.	0	0	0	0	1	0	0·8	0	0
3.	0	0	0	0	0	0	0	1	0·8
4.	1	− 1	0	0·7	1	0	−0·7	0	0
5.	1	0	− 1	−2·8	0	0	0	1	2·8
6.	0	0	0	0	1	− 1	1·1	1	−1·1
	3	− 1	− 1	−1·7	3	− 1	1·2	3	2·5

Ostatni wiersz poziomy daje zatem:

$$[aa] = 3\,,\ [ab] = -\,1\,,\ [ac] = -\,1\,,\ [al] = -\,1{\cdot}7\,,$$
$$[bb] = 3\,,\ [bc] = -\,1\,,\ [bl] = 1{\cdot}2\,,$$
$$[cc] = 3\,,\ [cl] = 2{\cdot}5\,,$$

przeto równania normalne są:

$$\begin{aligned} 3x - y - z &= -\,1{\cdot}7 \\ -\,x + 3y - z &= 1{\cdot}2 \\ -\,x - y + 3z &= 2{\cdot}5. \end{aligned}$$

Z równań tych tworzymy podług teoryi układ pierwszych równań eliminacyjnych, których spółczynniki obliczamy ze spółczynników równań normalnych. Mamy bowiem:

$$[bb.1] = [bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]} = 3 - \frac{-1.\ -1}{3} = \frac{8}{3}\,,$$

$$[bc.1] = [bc] - \frac{[ac]\,[ab]}{[aa]} = -\,1 - \frac{-1.\ -1}{3} = -\,\frac{4}{3}\,,$$

$$[bl.1] = [bl] - \frac{[al]\,[ab]}{[aa]} = 1{\cdot}2 - \frac{-1{\cdot}7\ -1}{3} = \frac{1{\cdot}9}{3}\,,$$

$$[cc.1] = [cc] - \frac{[ac]\,[ac]}{[aa]} = 3 - \frac{-1.\ -1}{3} = \frac{8}{3}\,,$$

$$[cl.1] = [cl] - \frac{[al]\,[ac]}{[aa]} = 2{\cdot}5 - \frac{-1{\cdot}7.\ -1}{3} = \frac{5{\cdot}8}{3}\,.$$

Zatem otrzymujemy układ pierwszych równań eliminacyjnych:

$$\frac{8}{3}y - \frac{4}{3}z = \frac{1{\cdot}9}{3}$$
$$-\frac{4}{3}y + \frac{8}{3}z = \frac{5{\cdot}8}{3}$$

Spółczynniki drugich równań eliminacyjnych otrzymamy z poprzednich bardzo łatwo, a mianowicie:

$$\left[cc\,.\,2\right] = \left[cc\,.\,1\right] - \frac{[bc\,.\,1][bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]} = \frac{8}{3} - \frac{-\frac{4}{3}\cdot -\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}} = 2,$$

$$\left[cl\,.\,2\right] = \left[cl\,.\,1\right] - \frac{[bl\,.\,1][bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]} = \frac{5{\cdot}8}{3} - \frac{\frac{1{\cdot}9}{3}\cdot -\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{13{\cdot}5}{6},$$

tak że drugie równanie eliminacyjne jest:

$$2z = \frac{13{\cdot}5}{6}.$$

Zatem otrzymujemy następujący układ (A) równań, do rozwiązania prowadzących:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{1{\cdot}7}{3} \\ y &= \frac{1}{2}z + \frac{1{\cdot}9}{8} \\ z &= \frac{13{\cdot}5}{12} \end{aligned}\right\} \text{ skąd wypada: } \left\{\begin{aligned} z &= 1{\cdot}125 \\ y &= 0{\cdot}800 \\ x &= 0{\cdot}075 \end{aligned}\right.$$

Najprawdopodobniejsze tedy wartości kątów są:

AOB = 48° 17' 1·07",	BOC = 48° 35' 15·72",
AOC = 96° 52' 16·80",	BOD = 104° 37' 6·05",
AOD = 152° 54' 7·12",	COD = 56° 1' 50·32".

2. Z punktu *O* celowano do pięciu punktów *A*, *B*, *C*, *D*, *E* wymierzono następujące kąty: AOB = 15° 7' 16·4", AOC = 56° 18' 15·3", AOD = 105° 32' 7·8", AOE = 208° 48' 16·7", BOC = 41° 11' 6·6", BOD = 90° 24' 50·8", BOE = 193° 41' 1·2", COD = 49° 13' 53·4", COE = 152° 30' 2·3", DOE = 103° 16' 10·1". Wyznaczyć najprawdopodobniejsze wartości tychże kątów.

Rozwiązanie. Kąty AOB, AOC, AOD, AOE wskazują dokładnie pięć kierunków ze stanowiska *O* ku *A*, *B*, *C*, *D* i *E*.

Mamy zatem 6 nadliczbowych pomiarów; chodzi nam o najprawdopodobniejsze wartości tychże kątów.

Oznaczywszy przez x, y, z, t poprawki, jakie na tych kątach uskutecznić należy, otrzymamy:

$$\begin{aligned} AOB &= 15^\circ\ 7'\ 16'' + x,\\ AOC &= 56^\circ\ 18'\ 15'' + y,\\ AOD &= 105^\circ\ 32'\ 7'' + z,\\ AOE &= 208^\circ\ 48'\ 16'' + t. \end{aligned}$$

Z porównania z wartościami pomierzonemi a w temacie podanemi wypada:

$$x = 0{\cdot}4,\quad y = 0{\cdot}3,\quad z = 0{\cdot}8,\quad t = 0{\cdot}7.$$

W dalszym ciągu znajdziemy:

$$\begin{array}{lll} & \text{a)}\ BOC = AOC - AOB = 41^\circ\ 10'\ 59'' & +y-x \\ \text{a że:} & \phantom{\text{a)}\ } BOC = \qquad\qquad\quad\ 41^\circ\ 11'\ 0{\cdot}6'' & \\ \hline \text{przeto:} & \phantom{\text{a)}\ } 0 = \qquad\qquad\qquad\quad -\mathbf{1{\cdot}6} & \mathbf{+\,y-x} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & \text{b)}\ BOD = AOD - AOB = 90^\circ\ 24'\ 51'' & +z-x \\ \text{a że:} & \phantom{\text{b)}\ } BOD = \qquad\qquad\quad\ 90^\circ\ 24'\ 50{\cdot}8'' & \\ \hline \text{przeto:} & \phantom{\text{b)}\ } 0 = \qquad\qquad\qquad\quad \mathbf{0{\cdot}2} & \mathbf{+\,z-x} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & \text{c)}\ BOE = AOE - AOB = 193^\circ\ 41' & +t-x \\ \text{a że:} & \phantom{\text{c)}\ } BOE = \qquad\qquad\quad\ 193^\circ\ 41'\ 1{\cdot}2'' & \\ \hline \text{przeto:} & \phantom{\text{c)}\ } 0 = \qquad\qquad\qquad\quad -\mathbf{1{\cdot}2} & \mathbf{+\,t-x} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & \text{d)}\ COD = AOD - AOC = 49^\circ\ 13'\ 52'' & +z-y \\ \text{a że:} & \phantom{\text{d)}\ } COD = \qquad\qquad\quad\ 49^\circ\ 13'\ 53{\cdot}4'' & \\ \hline \text{przeto:} & \phantom{\text{d)}\ } 0 = \qquad\qquad\qquad\quad -\mathbf{1{\cdot}4} & \mathbf{+\,z-y} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & \text{e)}\ COE = AOE - AOC = 152^\circ\ 30'\ 1' & +t-y \\ \text{a że:} & \phantom{\text{e)}\ } COE = \qquad\qquad\quad\ 152^\circ\ 30'\ 2{\cdot}3'' & \\ \hline \text{przeto:} & \phantom{\text{e)}\ } 0 = \qquad\qquad\qquad\quad -\mathbf{1{\cdot}3} & \mathbf{+\,t-y} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & \text{f)}\ DOE = AOE - AOD = 103^\circ\ 16'\ 9'' & +t-z \\ & \phantom{\text{f)}\ } DOE = \qquad\qquad\quad\ 103^\circ\ 16'\ 10{\cdot}1'' & \\ \hline & \phantom{\text{f)}\ } 0 = \qquad\qquad\qquad\quad -\mathbf{1{\cdot}1} & \mathbf{+\,t-z} \end{array}$$

Mamy zatem następujące równania błędów:

$$\begin{array}{ccccccr} x & . & . & . & = & & 0{\cdot}4 \\ . & y & . & . & = & & 0{\cdot}3 \\ . & . & z & . & = & & 0{\cdot}8 \\ . & . & . & t & = & & 0{\cdot}7 \\ -x & +y & . & . & = & & 1{\cdot}6 \\ -x & . & +z & . & = & - & 0{\cdot}2 \\ -x & . & . & +t & = & & 1{\cdot}2 \\ . & -y & +z & . & = & & 1{\cdot}4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} . & -y & . & +t & = & 1{\cdot}3 \\ . & . & -z & +t & = & 1{\cdot}1. \end{array}$$

Tworzymy zatem następującą tabelkę:

a)

L. p.	a	b	c	d	l
1.	1	0	0	0	0.4
2.	0	1	0	0	0·3
3.	0	0	1	0	0·8
4.	0	0	0	1	0·7
5.	− 1	1	0	0	1·6
6.	− 1	0	1	0	− 0·2
7.	− 1	0	0	1	1·2
8.	0	− 1	1	0	1·4
9.	0	− 1	0	1	1·3
10.	0	0	− 1	1	1·1

Z tej tabelki otrzymujemy następującą:

b)

L. p.	aa	ab	ac	ad	al	bb	bc	bd	bl	cc	cd	cl	dd	dl
1.	1	0	0	0	0·4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.	0	0	0	0	0	1	0	0	0·3	0	0	0	0	0
3.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0·8	0	0
4.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0·7
5.	1	−1	0	0	−1·6	1	0	0	1·6	0	0	0	0	0
6.	1	0	−1	0	0·2	0	0	0	0	1	0	−0·2	0	0
7.	1	0	0	−1	−1·2	0	0	0	0	0	0	0	1	1·2
8.	0	0	0	0	0	1	−1	0	−1·4	1	0	1·4	0	0
9.	0	0	0	0	0	1	0	−1	−1·3	0	0	0	1	1·3
10.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	−1	−1·1	1	1·1
	4	−1	−1	−1	−2·2	4	−1	−1	−0·8	4	−1	0·9	4	4·3

Zatem mamy następujące równania normalne:

$$\left.\begin{array}{rrrrl} 4x & -\ y & -\ z & -\ t & = -\ 2{\cdot}2 \\ -\ x & +\ 4y & -\ z & -\ t & = -\ 0{\cdot}8 \\ -\ x & -\ y & +\ 4z & -\ t & = \ 0{\cdot}9 \\ -\ x & -\ y & -\ z & +\ 4t & = \ 4{\cdot}3 \end{array}\right\} \quad \text{które mamy rozwiązać co do } x,\ y,\ z,\ t.$$

Rozwiązanie tych równań można sprowadzić do zredukowanego układu równań (A); należy tylko obliczyć spółczynniki równań eliminacyjnych. Dla łatwiejszego przeglądu piszemy równania normalne schematycznie w ten sposób, że wpisujemy we wzorzec spółczynniki, jak to wykazuje wzorzec I. tak ogólny, jak szczególny.

Wzorzec I.

x	y	z	t	
[aa] 1	[ab] $\frac{[ab]}{[aa]}$	[ac] $\frac{[ac]}{[aa]}$	[ad] $\frac{[ad]}{[aa]}$	[al] $\frac{[al]}{[aa]}$
[ab] ×	[bb] $\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	[bc] $\frac{[ac]}{[aa]}[ab]$	[bd] $\frac{[ad]}{[aa]}[ab]$	[bl] $\frac{[al]}{[aa]}[ab]$
[ac] ×		[cc] $\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	[ad] $\frac{[ad]}{[aa]}[ac]$	[cl] $\frac{[al]}{[aa]}[ac]$
[ad] ×			[dd] $\frac{[ad]}{[aa]}[ad]$	[dl] $\frac{[al]}{[aa]}[ad]$

Wzorzec I.

x	y	z	t	
4 1	−1 −0·25	−1 −0·25	−1 −0·25	−2·2 −0·55
− 1 ×	4 0·25	−1 0·25	−1 0·25	−0·8 0·55
− 1 ×		4 0·25	−1 0·25	0·9 0·55
− 1 ×			4 0·25	4·3 0·55

Odejmując w drugim, trzecim i czwartym poziomym szeregu liczby dolne od górnych, otrzymamy spółczynniki pierwszych równań eliminacyjnych, które wpisujemy również schematycznie, jak wskazuje wzorzec II.

Wzorzec II.

y	z	t	
[bb.1]	[bc.1]	[bd.1]	[bl.1]
1	$\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$\frac{[bd.1]}{[bb.1]}$	$\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$
	[cc.1]	[cd.1]	[cl.1]
[bc.1] ×	$\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]$	$\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bc.1]$	$\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bc.1]$
		[dd.1]	[dl.1]
[bd.1] ×		$\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bd.1]$	$\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bd.1]$

Wzorzec II.

y	z	t	
3·75	−1·25	−1·25	−1·35
1	−0·333	−0·333	−0·36
	3·75	−1·25	0·75
− 1·25×	0·417	0·417	0·45
		3·75	3·75
− 1·25×		0·417	0·45

Odjąwszy znowu w drugiej i trzeciej kolumnie poziomej liczby dolne od górnych, otrzymamy spółczynniki drugich równań eliminacyjnych, które jak poprzednio wpisujemy w następujący wzorzec:

Wzorzec III.

z	t	
[cc.2]	[cd.2]	[cl.2]
1	$\frac{[cd.2]}{[cc.2]}$	$\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$
	[dd.2]	[dl.2]
[cd.2]×	$\frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cd.2]$	$\frac{[cl.2]}{[cc.2]}[cd.2]$

Wzorzec III.

z	t	
3·333	— 1·667	— 0·1
1	— 0·5	— 0·03
	3·333	3·3
— 1·667 ×	0·833	0·5

Odejmując wreszcie dolne liczby od górnych w drugiej kolumnie poziomej, otrzymamy trzecie i ostatnie równanie eliminacyjne, tj.:

$$2{\cdot}5\,t = 2{\cdot}8,$$

co daje:

$$t = 1{\cdot}12\ .$$

A więc otrzymujemy następuiący układ zredukowanych równań:

$$\begin{aligned} t &= 1{\cdot}12 \\ z - 0{\cdot}500\,t &= -\,0{\cdot}02 \\ y - 0{\cdot}333\,z - 0{\cdot}333\,t &= -\,0{\cdot}36 \\ x - 0{\cdot}25\,y - 0{\cdot}250\,z - 0{\cdot}250\,t &= -\,0{\cdot}55. \end{aligned}$$

Zatem po kolejnem podstawianiu otrzymamy:

$$t = 1{\cdot}12,\quad z = 0{\cdot}53,\quad y = 0{\cdot}19,\quad x = -\,0{\cdot}09.$$

Przeto najprawdopodobniejsze wartości tych 10 kątów są następujące:

1) AOB = 15° 7' 15·91"
2) AOC = 56° 18' 15·19"
3) AOD = 105° 32' 7·53"
4) AOE = 208° 48' 17·12"
5) BOC = 41° 10' 59·28"
6) BOD = 90° 24' 51·62"
7) BOE = 193° 41' 1·21"
8) COD = 49° 13' 52·34"
9) COE = 152° 30' 1·93"
10) DOE = 103° 16' 9·59"

3. Długość L wahadła sekundowego, zależną od szerokości geograficznej φ stanowiska, wyraża równanie $L = A + B \,.\, sin^2\varphi$. Ilości stałe A i B wyznacza się w ten sposób, że wymierzono długość wahadła sekundowego w różnych szerokościach geograficznych i otrzymano następujące wyniki spostrzeżeń:

	Stanowisko spostrzeżenia	Półn. szer. geogr. φ	Obserwowana długość L wahadła sek. w calach ang.
1.	Św. Tomasz . . .	— 0° 24' 41"	39·02074
2.	Maranham	— 2° 31' 43"	01214
3.	Ascension	— 7° 55' 48"	02410
4.	Sierra Leone . . .	+ 8° 29' 28"	01997
5.	Trinidad	+ 10° 38' 56"	01884
6.	Bahia	— 12° 59' 21"	02425
7.	Jamajka	+ 17° 56' 7"	03510
8.	Nowyjork	+ 40° 42' 43"	10168
9.	Londyn	+ 51° 31' 8"	13929
10.	Drontheim	+ 63° 25' 54"	17456
11.	Hammerfest . . .	+ 70° 40' 5"	19519
12.	Grenlandya	+ 74° 32' 19"	20335
13.	Spitzbergen	+ 79° 49' 58"	21469

Obliczyć na podstawie tych spostrzeżeń najprawdopodobniejsze wartości stałych A i B.

Rozwiązanie. Dla uniknienienia rachunku wielkiemi liczbami połóżmy:

$$A = 39 + x,$$
$$B = 0{\cdot}2 + y,$$

tak że długość wahadła sekundowego wyrazimy równaniem:

$$L = 39 + x + (0{\cdot}2 + y) \sin^2\varphi,$$

czyli:
$$L - 39 - 0{\cdot}2 \sin^2\varphi = x + y \sin^2\varphi.$$

Lewa strona równania jest wiadomą, gdyż L oznacza długość obserwowaną a φ szerokość geograficzną. Zatem wyrażenie:

$$L - 39 - 0{\cdot}2 \sin^2\varphi = l$$

przedstawia błąd, który należy poprawić. Obliczywszy wartości dla $\sin^2\varphi$ a następnie l, otrzymamy na x i y następujące równania błędów:

1) $x + 0{\cdot}00005y = 0{\cdot}02073$,
2) $x + 0{\cdot}00195y = 0{\cdot}01175$,
3) $x + 0{\cdot}01903y = 0{\cdot}02029$,
4) $x + 0{\cdot}02180y = 0{\cdot}01561$,
5) $x + 0{\cdot}03415y = 0{\cdot}01201$,
6) $x + 0{\cdot}05052y = 0{\cdot}01415$,
7) $x + 0{\cdot}09483y = 0{\cdot}01613$,
8) $x + 0{\cdot}42544y = 0{\cdot}01659$,
9) $x + 0{\cdot}61280y = 9{\cdot}01673$,
10) $x + 0{\cdot}79995y = 0{\cdot}01457$,
11) $x + 0{\cdot}89041y = 0{\cdot}01711$,
12) $x + 0{\cdot}92893y = 0{\cdot}01756$,
13) $x + 0{\cdot}96884y = 0{\cdot}02092$.

Otrzymujemy zatem tabelkę:

a)

Lp.	a	b	λ
1.	1	0·00005	0·02073
2.	1	00195	01175
3.	1	01903	02029
4.	1	02180	01561
5.	1	03415	01201
6.	1	05052	01415
7.	1	09483	01613
8.	1	42544	01659
9.	1	61280	01673
10.	1	79995	01457
11.	1	89041	01711
12.	1	92893	01756
13.	1	96884	02092

z której obliczamy tabelkę następującą:

b)

Lp.	aa	ab	al	bb	bl
1.	1	0·00005	0·02073	0·00000	0·00000
2.	1	00195	01175	00000	00002
3.	1	01903	02029	00036	00039
4.	1	02180	01561	00046	00034
5.	1	03415	01201	00116	00041
6.	1	05052	01415	00225	00071
7.	1	09483	01613	00899	00153
8.	1	42544	01659	18062	00706
9.	1	61280	01673	37577	01025
10.	1	79995	01457	81000	01166
11.	1	89041	01711	79210	01523
12.	1	92893	01756	86304	01630
13.	1	96884	02092	93896	02027
	13	4·84870	0·21415	3·97371	0·08417

Zatem równania normalne są kształtu:

$$13\,x + 4{\cdot}84870y = 0{\cdot}21415,$$

$$4{\cdot}84870\,x + 3{\cdot}97371y = 0{\cdot}08417,$$

co schematycznie napisawszy otrzymamy:

x	y	
13	4·84870	0·21415
1	0·37297	0·01647
	3·97371	0·08417
0·37297 ×	0·13911	0·00614

Z wzorca tego wyłaniają się następujące dwa równania zredukowane:

$$3{\cdot}83460y = 0{\cdot}07803,$$

$$x + 0{\cdot}37297y = 0{\cdot}01647,$$

czyli stąd:

$$y = 0{\cdot}02035,$$

$$x = 0{\cdot}00888,$$

przeto:

$$A = 39 + x - 39{\cdot}00888,$$

$$B = 0{\cdot}2 + y = 0{\cdot}22035$$

jako najprawdopodobniejsze wartości dla szukanych stałych, a więc mamy wzór:

$$L = 39{\cdot}00888 + 0{\cdot}22035 \sin^2\varphi,$$

podający długość wahadła sekundowego w calach angielskich.

---

b) Błędy niewiadomych w spostrzeżeniach pośrednich.

40. Wyznaczenie błędu średniego spostrzeżeń pośrednich. Podług wzoru (VI) błąd średni określa się równaniem:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}},$$

jeżeli w n spostrzeżeniach popełniono błędy $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$. Ponieważ te błędy ε_i pozostają niewiadomymi, gdyż nie możemy nigdy poznać prawdziwych wartości niewiadomych ilości x, y,

z, t, ..., v, a więc tem samem obliczyć wartości ilości L_1, L_2, . . . , L_n, przeto chodzić będzie o to, aby w miejsce ε_i wprowadzić błędy α_i, które otrzymamy, gdy w równania błędów (5) za prawdziwe wartości, które oznaczymy przez x_0, y_0, z_0, t_0, ..., v_0, podstawimy rozwiązania x, y, z, t, ..., v równań normalnych.

Będzie zatem:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_i &= a_i x_0 + b_i y_0 + c_i z_0 + \ldots + k_i v_0 - l_i\,, \\ \alpha_i &= a_i x + b_i y + c_i z + \ldots + k_i v - l_i\,, \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

więc także:

$$\varepsilon_i - \alpha_i = a_i (x_0 - x) + b_i (y_0 - y) + c_i (z_0 - z) + \ldots + k_i (v_0 - v). \quad (21)$$

Kładąc:

$$\begin{aligned} x_0 - x &= M_x\,, \\ y_0 - y &= M_y\,, \\ z_0 - z &= M_z\,, \\ v_0 - v &= M_v\,, \end{aligned}$$

gdzie M_x, M_y, M_z, . . . , M_v oznaczają błędy, które popełniamy, gdy za prawdziwe wartości x_0, y_0, z_0, . . . , v_0 podstawimy rozwiązania x, y, z, . . . , v równań normalnych, otrzymamy za równanie (21) następujące:

$$\varepsilon_i = \alpha_i + a_i M_x + b_i M_y + c_i M_z + \ldots + k_i M_v\,. \quad (22)$$

Spotęgowawszy równanie to przez 2 i zesumowawszy wszystkie analogiczne równania dla $i = 1$ do $i = n$, otrzymamy następujące:

$$\begin{aligned} [\varepsilon\varepsilon] = [\alpha\alpha] + 2[a\alpha]M_x + 2[b\alpha]M_y + 2[c\alpha]M_z + \ldots\ldots \\ \ldots + 2\,[k\alpha]\,M_v + [(aM_x + bM_y + cM_z + \ldots + kM_v)^2]\,. \quad (23) \end{aligned}$$

A że wiemy, że $[\alpha\alpha]$ jest najmniejszością, to także być musi:

$$\left[\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial x}\right] = 0, \left[\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right] = 0, \left[\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial z}\right] = 0, \ldots\ldots, \left[\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial v}\right] = 0,$$

a że:

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial x} = a_i\,,\quad \frac{\partial\alpha_i}{\partial y} = b_i\,,\quad \frac{\partial\alpha_i}{\partial z} = c_i\,, \ldots\ldots, \frac{\partial\alpha_i}{\partial v} = k_i\,,$$

przeto:

$$[\alpha a] = 0,\ [\alpha b] = 0,\ [\alpha c] = 0, \ldots\ldots [\alpha k] = 0.$$

A skoro przyjmiemy, że mamy tylko cztery niewiadome x, y, z, t, to równanie (23) przyjmie kształt następujący:

$$\left.\begin{aligned}[\varepsilon\varepsilon] - [\alpha\alpha] &= [(aM_x + bM_y + cM_z + dM_t)^2] \\ &= [aa] M_x^2 + [bb] M_y^2 + [cc] M_z^2 + [dd] M_t^2 + \\ &+ 2([ab] M_y + [ac] M_z + [ad] M_t) M_x + \\ &+ 2([bc] M_z + [bd] M_t) M_y + \\ &+ 2[cd] M_z M_t .\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Prawa strona tego równania ma zupełnie tę samą postać, co prawa strona przedostatniego równania na str. 48 (w ust. 37). Kładąc w owem równaniu $l_i = 0$ i za x, y, z, t ilości M_x, M_y, M_z, M_t, otrzymamy powyższe równanie (24). Tam uskutecznione przekształcenie stosujemy w zupełności i tutaj, w skutek czego na podstawie równania (15) otrzymamy:

$$[\varepsilon\varepsilon] - [\alpha\alpha] = \frac{M^2}{[aa]} + \frac{M_1^2}{[bb.1]} + \frac{M_2^2}{[cc.2]} + \frac{M_3^2}{[dd.3]}, \qquad (25)$$

gdzie podług równań (14) w ust. 37 jest:

$$\left.\begin{aligned} M &= [aa] M_x + [ab] M_y + [ac] M_z + [ad] M_t , \\ M_1 &= [bb.1] M_y + [bc.1] M_z + [bd.1] M_t , \\ M_2 &= [cc.2] M_z + [cd.2] M_t , \\ M_3 &= [dd.3] M_t ,\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

przyjąwszy w równaniach (14) wszystkie $l_i = 0$, skutkiem czego:

$$[al] = 0, [bl.1] = 0, [cl.2] = 0, [dl.3] = 0, [ll.4] = 0,$$

więc wogóle wszystkie spółczynniki, zawierające l, stają się $= 0$.

Zatem dla naszych czterech niewiadomych x, y, z, t przyjmie równanie (22) następującą postać:

$$\varepsilon_i = \alpha_i + a_i M_x + b_i M_y + c_i M_z + d_i M_t .$$

Pomnożywszy je przez a_i i dodawszy do siebie wszystkie analogiczne iloczyny dla $i = 1$ do $i = n$, otrzymamy:

$$[a\varepsilon] = [\alpha a] + [aa] M_x + [ab] M_y + [ac] M_z + [ad] M_t .$$

Mnożąc to samo równanie kolejno przez b_i, c_i i d_i, to po zsumowaniu bacząc, że $[\alpha a] = 0$, $[\alpha b] = 0$, $[\alpha c] = 0$ i $[\alpha d] = 0$, otrzymamy następujące cztery równania:

$$\left.\begin{aligned} [a\varepsilon] &= [aa] M_x + [ab] M_y + [ac] M_z + [ad] M_t , \\ [b\varepsilon] &= [ab] M_x + [bb] M_y + [bc] M_z + [bd] M_t , \\ [c\varepsilon] &= [ac] M_x + [bc] M_y + [cc] M_z + [cd] M_t , \\ [d\varepsilon] &= [ad] M_x + [bd] M_y + [cd] M_z + [dd] M_t .\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Powyższe równania mają ten sam kształt, co równania normalne (8'), które przedzierżgną się w równania (27), gdy w nich za x, y, z, t, l podstawimy ilości M_x, M_y, M_z, M_t, ε. A więc będzie można zupełnie tak samo sprowadzić równania (27) do kształtu równań normalnych (A); potrzeba bowiem w układzie

(A) za x, y, z, t, l wprowadzić M_x, M_y, M_z, M_t, ε. Tym sposobem otrzymamy następujący układowi (27) zupełnie równoważny układ równań:

$$\left.\begin{array}{l}[aa]\,M_x + [ab]\,M_y + [ac]\,M_z + [ad]\,M_t = [a\varepsilon], \\ [bb\,.\,1]\,M_y + [bc\,.\,1]\,M_z + [bd\,.\,1]\,M_t = [b\varepsilon\,.\,1], \\ [cc\,.\,2]\,M_z + [cd\,.\,2]\,M_t = [c\varepsilon\,.\,2], \\ [dd\,.\,3]\,M_t = [d\varepsilon\,.\,3].\end{array}\right\} \quad (28)$$

Z porównania tego układu (28) z równaniami (26) wypływa:

$$\left.\begin{array}{l}M = [a\varepsilon], \\ M_1 = [b\varepsilon\,.\,1], \\ M_2 = [c\varepsilon\,.\,2], \\ M_3 = [d\varepsilon\,.\,3].\end{array}\right\} \quad (29)$$

Ponieważ:

$$M = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 + \ldots . + a_n\varepsilon_n,$$

przeto:

$$M^2 = a_1{}^2\varepsilon_1{}^2 + a_2{}^2\varepsilon_2{}^2 + a_3{}^2\varepsilon_3{}^2 + \ldots + a_n{}^2\varepsilon_n{}^2 + 2\,(a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \ldots .).$$

Ponieważ suma w nawiasie przedstawiona w porównaniu do sumy kwadratów jest bardzo małą, gdyż ε_i są częścią dodatnie, częścią odjemne, przeto przy obliczeniu średniej wartości dla M można tę sumę opuścić, skutkiem czego otrzymamy:

$$M^2 = a_1{}^2\varepsilon_1{}^2 + a_2{}^2\varepsilon_2{}^2 + a_3{}^2\varepsilon_3{}^2 + \ldots + a_n{}^2\varepsilon_n{}^2.$$

Wszelako za $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$ można położyć średni błąd μ, zatem będzie:

$$M^2 = (a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \ldots + a_n{}^2)\,\mu^2$$
$$= [aa]\,\mu^2,$$

przeto:

$$M = \mu\sqrt{[aa]} \quad (30)$$

Dla M_1 otrzymamy:

$$M_1 = [b\varepsilon\,.\,1] = [b\varepsilon] - \frac{[ab][a\varepsilon]}{[aa]}$$

$$= (b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \ldots + b_n\varepsilon_n) - \frac{[ab]}{[aa]}(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_n\varepsilon_n)$$

$$= \left(b_1 - \frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)\varepsilon_1 + \left(b_2 - \frac{[ab]}{[aa]}a_2\right)\varepsilon_2 + \ldots,$$

przeto położywszy dla krótkości pisania:

$$b_i - \frac{[ab]}{[aa]}a_i = A_i,$$

otrzymamy:

$$M_1 = [A\varepsilon],$$

a postępując, jak powyżej przy obliczeniu *M*, otrzymamy:

$$M_1 = \mu \sqrt{[AA]}.$$

Wszelako:

$$A_i^2 = b_i^2 + \left(\frac{[ab]}{[aa]}\right)^2 a_i^2 - 2a_i b_i \frac{[ab]}{[aa]},$$

przeto:

$$[AA] = [bb] + \left(\frac{[ab]}{[aa]}\right)^2 [aa] - 2 \frac{[ab]}{[aa]} [ab]$$

$$= [bb] + \frac{[ab][ab]}{[aa]} - 2 \frac{[ab][ab]}{[aa]}$$

$$= [bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]}$$

$$= [bb\,.\,1].$$

A zatem:

$$M_1 = \mu \sqrt{[bb\,.\,1]} \tag{30'}$$

Podobnie postępując, znajdziemy:

$$\left.\begin{aligned} M_2 &= \mu \sqrt{[cc\,.\,2]} \\ M_3 &= \mu \sqrt{[dd\,.\,3]} \end{aligned}\right\} \tag{30''}$$

jako średnie wartości. Podstawiwszy (30), (30′) i (30″) w równanie (25), otrzymamy:

$$[\varepsilon\varepsilon] - [\alpha\alpha] = \mu^2 + \mu^2 + \mu^2 + \mu^2 = 4\,\mu^2,$$

a że podług (VI):

$$n\mu^2 = [\varepsilon\varepsilon],$$

wiec:

$$n\mu^2 = [\alpha\alpha] + 4\mu^2,$$

czyli:

$$\mu^2 (n^2 - 4) = [\alpha\alpha],$$

tedy:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\alpha\alpha]}{n-4}}.$$

Jeżeli nie *4*, tylko *k* niewiadomych mamy, tedy równanie (25) zawierać będzie po prawej stronie znaku równości *k* wyrazów, a zamiast 4 równań (30), (30′) i (30″) mieć ich będziemy *k*, w skutek czego po dokonanem w (25) podstawieniu otrzymamy:

$$[\varepsilon\varepsilon] - [\alpha\alpha] = k\mu^2,$$

skąd:

$$n\mu^2 = [\alpha\alpha] + k\mu^2,$$

więc:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\alpha\alpha]}{n - k}} \qquad \text{(XXVII)}$$

jako średni błąd μ, gdy dokonano n pośrednich spostrzeżeń dla k niewiadomych.

Ze względu na to, że $[\alpha\alpha] = [ll\,.\,k]$ (ob. str. 51. ust. 37), otrzymamy następujące wyrażenie na błąd średni spostrzeżeń pośrednich:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[ll\,.\,k]}{n - k}}\,. \qquad \text{(XXVIII)}$$

41. W y z n a c z e n i e b ł ę d ó w M_x, M_y, M_z, ... p o s z c z e g ó l n y c h n i e w i a d o m y c h z b ł ę d u ś r e d n i e g o μ. Dla łatwiejszego przeprowadzenia sposobu wyznaczenia błędów M_x, M_y, M_z, ..., przyjmiemy tylko cztery niewiadome. Ku temu celowi służą równania (28), które po uwzględnieniu równań (29) i (30). (30') (30'') przybiorą kształt:

$$\left.\begin{array}{r} [aa]M_x + [ab]M_y + [ac]M_z + [ad]M_t = \mu\sqrt{[aa]} \\ [bb\,.\,1]M_y + [bc\,.\,1]M_z + [bd\,.\,1]M_t = \mu\sqrt{[bb\,.\,1]} \\ [cc\,.\,2]M_z + [cd\,.\,2]M_t = \mu\sqrt{[cc\,.\,2]} \\ [dd\,.\,3]M_t = \mu\sqrt{[dd\,.\,3]} \end{array}\right\} (31)$$

Ostatnie równanie daje:

$$M_t = \frac{\mu}{\sqrt{[dd\,.\,3]}}.$$

Przyjąwszy dla poszczególnego spostrzeżenia ważność $= 1$, to, podług (XVIII) mamy:

$$M = \frac{\mu\sqrt{p_0}}{\sqrt{P}},$$

przeto ważność P_t ilości niewiadomej t będzie:

$$P_t = [dd\,.\,3], \qquad \text{(XXIX)}$$

pomnąc, że

$$M_t = \frac{\mu}{\sqrt{P_t}}.$$

Z równania (XXIX) czytamy: „R o z w i ą z a w s z y r ó w n a n i a n o r m a l n e s p o s o b e m e l i m i n a c y j n y m, o t r z y m a m y, ż e s p ó ł c z y n n i k n i e w i a d o m e j w o s t a t n i e m r ó w n a n i u e l i m i n a c y j n e m j e s t w a ż n o ś c i ą t e j ż e n i e w i a d o m e j.“

Gdybyśmy układ równań (8′) rozwiązali w ten sposób, że obliczamy nasamprzód t z ostatniego, potem z, następnie y, tak że ostatecznie otrzymamy:

$$[aa\,.\,3]x = [al\,.\,3],$$

to ważność P_x ilości x wyrazimy równaniem:

$$P_x = [aa\,.\,3],$$

a więc:

$$M_x = \frac{\mu}{\sqrt{P_x}} = \frac{\mu}{\sqrt{[aa\,.\,3]}}.$$

Jeżeli więc chcemy obliczyć wszystkie ważności, trzeba wyznaczyć także spółczynniki $[aa\,.\,3]$, $[bb\cdot 3]$, $[cc\,.\,3]$ i $[dd\,.\,3]$.

42. Ponieważ w obliczeniu ważności ilości l_i są nieznaczne, można je tedy dowolnie obierać. Obrawszy je zatem nasamprzód tak, aby było:

$$[al] = 0,\ [bl] = 0,\ [cl] = 0,\ [dl] = 1,$$

otrzymamy za równania normalne (8′) następujące cztery równania:

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,Q_1 + [ab]\,Q_2 + [ac]\,Q_3 + [ad]\,Q_4 &= 0,\\
[ab]\,Q_1 + [bb]\,Q_2 + [bc]\,Q_3 + [bd]\,Q_4 &= 0,\\
[ac]\,Q_1 + [bc]\,Q_2 + [cc]\,Q_3 + [cd]\,Q_4 &= 0,\\
[ad]\,Q_1 + [bd]\,Q_2 + [cd]\,Q_3 + [dd]\,Q_4 &= 1.
\end{aligned}\right\}\quad (I_4)$$

Rozwiązawszy powyższe równania podobnym sposobem, co równania normalne, otrzymamy jako ostateczne równanie:

$$[dd\,.\,3]\,Q_4 = 1,$$

skąd:

$$Q_4 = \frac{1}{[dd\,.\,3]} = \frac{1}{P_t},$$

t. zn.: rozwiązanie Q_4 układu równań (I_4) jest odwróconą ważnością niewiadomej t.

Zupełnie analogicznie otrzymamy, że rozwiązanie Q_1 układu równań:

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,Q_1 + [ab]\,Q_2 + [ac]\,Q_3 + [ad]\,Q_4 &= 1,\\
[ab]\,Q_1 + [bb]\,Q_2 + [bc]\,Q_3 + [bd]\,Q_4 &= 0,\\
[ac]\,Q_1 + [bc]\,Q_2 + [cc]\,Q_3 + [cd]\,Q_4 &= 0,\\
[ad]\,Q_1 + [bd]\,Q_2 + [cd]\,Q_3 + [dd]\,Q_4 &= 0,
\end{aligned}\right\}\quad (I_1)$$

jest odwróconą ważnością niewiadomej x; następnie że rozwiązanie Q_2 układu równań:

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,Q_1 + [ab]\,Q_2 + [ac]\,Q_3 + [ad]\,Q_4 &= 0,\\
[ab]\,Q_1 + [bb]\,Q_2 + [bc]\,Q_3 + [bd]\,Q_4 &= 1,\\
[ac]\,Q_1 + [bc]\,Q_2 + [cc]\,Q_3 + [cd]\,Q_4 &= 0,\\
[ad]\,Q_1 + [bd]\,Q_2 + [cd]\,Q_3 + [dd]\,Q_4 &= 0,
\end{aligned}\right\}\quad (I_2)$$

jest odwróconą ważnością niewiadomej y, i że wreszcie rozwiązanie Q_3 układu równań:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,Q_1 + [ab]\,Q_2 + [ac]\,Q_3 + [ad]\,Q_4 &= 0, \\ [ab]\,Q_1 + [bb]\,Q_2 + [bc]\,Q_3 + [bd]\,Q_4 &= 0, \\ [ac]\,Q_1 + [bc]\,Q_2 + [cc]\,Q_3 + [cd]\,Q_4 &= 1, \\ [ad]\,Q_1 + [bd]\,Q_2 + [cd]\,Q_3 + [dd]\,Q_4 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (I_3)$$

jest odwróconą ważnością niewiadomej z.

Z tego powodu zowiemy układy równań (I_1), (I_2), (I_3), (I_4) **równaniami ważności**. Ich spółczynniki dane są przez spółczynniki równań normalnych; w dodatku II. podamy sposób równoczesnego rozwiązywania równań normalnych i ważności.

---

43. **Zagadnienia.** 1. Obliczyć błędy oczekiwane kątów znalezionych w zagad. 1. ust. 39.

Rozwiązanie. a) Znajdziemy nasamprzód błąd średni szeregu spostrzeżeń podług wzoru (XXVII), t. j.:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\alpha\alpha]}{n-k}},$$

gdzie n = 6, k = 3, gdyż danych jest 6 równań warunkowych a niewiadomych jest 3. Zatem:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\alpha\alpha]}{3}}.$$

Aby obliczyć $[\alpha\alpha]$, pomnijmy, że:

$$\alpha_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i ,$$

gdzie x, y, z są rozwiązaniami równań normalnych Gauss'a, a l_i prawemi stronami równań błędów.

Jako rozwiązanie równań normalnych otrzymaliśmy poprzednio:

$$\begin{aligned} x &= 0{\cdot}075, \\ y &= 0{\cdot}800, \\ z &= 1{\cdot}125, \end{aligned}$$

a na równania błędów:

$$\begin{array}{l|l} x = 0{\cdot}4, & x - y = 0{\cdot}7, \\ y = 0{\cdot}8, & z - x = 2{\cdot}8, \\ z = 0{\cdot}8, & y - z = 1{\cdot}1. \end{array}$$

Zatem mamy:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= x \qquad\quad - 0{\cdot}4 = -\ 0{\cdot}325, & \alpha_1^2 &= 0{\cdot}106,\\
\alpha_2 &= y \qquad\quad - 0{\cdot}8 = \quad 0{\cdot}000, & \alpha_2^2 &= 0{\cdot}000,\\
\alpha_3 &= z \qquad\quad - 0{\cdot}8 = +\ 0{\cdot}325, & \alpha_3^2 &= 0{\cdot}106,\\
\alpha_4 &= x - y - 0{\cdot}7 = -\ 1{\cdot}425, & \alpha_4^2 &= 2{\cdot}017,\\
\alpha_5 &= z - x - 2{\cdot}8 = -\ 1{\cdot}725, & \alpha_5^2 &= 3{\cdot}062,\\
\alpha_6 &= y - z - 1{\cdot}1 = -\ 1{\cdot}425, & \alpha_6^2 &= 2{\cdot}017,\\
& & [\alpha\alpha] &= 7{\cdot}308,
\end{aligned}$$

przeto:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{7{,}308}{3}} = \pm\sqrt{2{\cdot}436}$$

$$\mu = \pm\ 1{\cdot}56.$$

b) Aby znaleźć błędy średnie ilości x, y, z, t, należy ustawić równania ważności i rozwiązać takowe.

Ponieważ równania normalne w danym przypadku są:

$$\begin{aligned}
3x - y - z &= -\ 1{\cdot}7,\\
-x + 3y - z &= \quad 1{\cdot}2,\\
-x - y + 3z &= \quad 2{\cdot}5,
\end{aligned}$$

przeto równania ważności będą:

$$\left.\begin{aligned}
3Q_1 - Q_2 - Q_3 &= 1\\
-Q_1 + 3Q_2 - Q_3 &= 0\\
-Q_1 - Q_2 + 3Q_3 &= 0
\end{aligned}\right\}\ \text{dla } x,$$

$$\left.\begin{aligned}
3Q_1 - Q_2 - Q_3 &= 0\\
-Q_1 + 3Q_2 - Q_3 &= 1\\
-Q_1 - Q_2 + 3Q_3 &= 0
\end{aligned}\right\}\ \text{dla } y,$$

$$\left.\begin{aligned}
3Q_1 - Q_2 - Q_3 &= 0\\
-Q_1 + 3Q_2 - Q_3 &= 0\\
-Q_1 - Q_2 + 3Q_3 &= 1
\end{aligned}\right\}\ \text{dla } z.$$

Co się tyczy równań ważności dla z, to są one już co do Q_3 rozwiązane przez równania normalne; otrzymaliśmy bowiem tam równanie:

$$2z = \frac{13{\cdot}5}{6},$$

tak że tutaj wypaść musi:

$$2Q_3 = 1, \text{ czyli } Q_3 = \frac{1}{2},$$

więc:

$$P_z = 2.$$

Ponieważ równania ważności są zupełnie symetryczne i przechodzą jedne w drugie przez zamianę wskaźników, przeto być musi:

$$P_z = P_y = P_x ,$$

a więc podług wzoru:

$$M_x = M_y = M_z = \frac{\mu}{\sqrt{2}} = \pm 1{\cdot}10.$$

Błąd więc oczekiwany wartości *x*, *y*, *z* podług wzoru (XIV) jest:

$$R_x = R_y = R_z = \pm 1{\cdot}10 \,.\, 0{\cdot}674 = \pm 0{\cdot}74.$$

Z tego okazuje się, że błędy oczekiwane kątów powyżej (str. 56) obliczonych są:

dla kąta AOB . . . . ± 0·74,
„ „ AOC . . . . ± 0·74,
„ „ AOD . . . . ± 0·74,

a podług wzoru (XXII) będzie:

dla kąta BOC . . . . $\sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \pm 0{\cdot}74 \sqrt{2} = \pm 1{\cdot}03$,
„ „ BOD . . . . $\sqrt{R_z^2 + R_x^2} = \pm 0{\cdot}74 \sqrt{2} = \pm 1{\cdot}03$,
„ „ COD . . . . $\sqrt{R_z^2 + R_y^2} = \pm 0{\cdot}74 \sqrt{2} = \pm 1{\cdot}03$.

Zatem prawdziwe wartości kątów mierzonych (str. 56) są:

AOB = 48° 17′ 1·07″ ± 0·74,	BOC = 48° 35′ 15·72″ ± 1·03,
AOC = 96° 52′ 16·80″ ± 0·74,	BOD = 104° 37′ 6·05″ ± 1·03,
AOD = 152° 54′ 7·12″ ± 0·74,	COD = 56° 1′ 50·32″ ± 1·03.

2. Obserwowano ilość piasku, wysypującą się otworem w jednej sekundzie. Jeżeli *r* oznacza promień otworu w calach reńskich, a *m* ilość piasku w sześć. calach reńskich, otrzymano następujące wypadki:

dla r = 0·05487	wysypało się piasku w jednej sekundzie	m = 0·00912
= 0·08052		0·02985
= 0·09869		0·05399
= 0·12017		0·09532
= 0·16784		0·23463.

Na podstawie powyższych danych wyprowadzić wzór, któryby wyrażał zależność wysypującej się ilości piasku od wielkości otworu[1].

---

[1] Ob. Hagen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin. 1867.

Rozwiązanie. W ogólności możnaby wyrazić żądane prawo równaniem:

$$m = f(r, a, b, c, \ldots),$$

gdzie f jest pewną określoną funkcyą, której stałe $a, b, c, \ldots$ wyznaczyć należy. Obliczywszy tedy błędy oczekiwane stałych $a, b, c, \ldots$ i znalazłszy je bardzo małymi w porównaniu do ilości $a, b, c, \ldots$, możemy powyższe równanie $m = f(a, b, c, \ldots)$ przyjąć jako wyrażenie żądanej zależności m od r. Jeżeli zaś błędy oczekiwane okażą się wielkimi w porównaniu do $a, b, c, \ldots$, to nie możemy prawa tego przyjąć w powyższej postaci. W takim razie przyjmujemy inne prawo i wyznaczamy znowu stałe. Liczba wprowadzonych stałych, rozumie się samo przez się, musi być mniejszą od liczby spostrzeżeń.

Niech będzie więc żądane prawo wyrażone równaniem:

$$m = Ar^2 + Br^3,$$

gdzie A i B oznaczają stałe, które mamy wyznaczyć.

Aby zaś wyznaczyć poszczególne wypadki w postaci o ile można zgodnej co do ich wielkości, przyjmijmy, że

$$l = 10m, \quad A = 10x, \quad B = 100y,$$

a otrzymamy:

$$l = x(10r)^2 + y(10r)^3,$$

$$l_i = a_i x + b_i y,$$

gdzie:

$$a_i = (10r_i)^2, \quad b_i = (10r_i)^3,$$

$$l_i = 10m_i .$$

Równania błędów są następujące:

$$1)\ 0{\cdot}0912 = 0{\cdot}301072x + 0{\cdot}165198y,$$

$$2)\ 0{\cdot}2985 = 0{\cdot}648347x + 0{\cdot}522049y,$$

$$3)\ 0{\cdot}5399 = 0{\cdot}973774x + 0{\cdot}960920y,$$

$$4)\ 0{\cdot}9532 = 1{\cdot}444083x + 1{\cdot}735355y,$$

$$5)\ 2{\cdot}3463 = 2{\cdot}817027x + 4{\cdot}728100y,$$

które dają następującą tabelkę:

a)

Lp.	a	b	c
1.	0·301072	0·165198	0·0912
2.	0·648347	0·522049	0·2985
3.	0·973774	0·960920	0·5399
4.	1·444083	1·735355	0·9532
5.	2·817027	4·728100	2·3463

Z tej tabelki otrzymamy przy użyciu tablic logarytmicznych następującą:

b)

Lp.	aa	ab	al	bb	bl	ll
1.	0·0906442	0·0497365	0·0274577	0·0272940	0·0150661	0·0083174
2.	0·4203540	0·3384691	0·1935316	0·2725353	0·1558316	0·0891022
3.	0·9482359	0·9357192	0·5257406	0·9233674	0·5188007	0·2914920
4.	2·0853760	2·5059960	1·3765000	3·0114560	1·6541400	0·9085900
5.	7·9356400	13·3191800	6·6095900	22·3549100	11·0935300	5·5051220
	11·4802501	17·1491008	8·7328199	26·5895627	13·4373684	6·8026236

Wskutek tego mamy:

Wzorzec I.

x	y	
11·4802501	17·1491008	8·7328199
1	**1·493791**	**0·762435**
	26·5895627	13·4373684
17·1491 ×	25·61717	13·04500
		6·8026236
8·73282 ×		6·64290

Przez odjęcie liczb petitem oznaczonych od liczb nad niemi stojących w drugim i trzecim szeregu poziomym mieć będziemy:

Wzorzec II.

y	
0·97239	0·39237
1	**0·403511**
	0·15972
	0·15833

Z wzorca II. i I. wysnuwają się tedy następujące równania:

$$y = 0{\cdot}403511\,,$$
$$x + 1{\cdot}49379\, y = 0{\cdot}760627\,,$$
$$[ll\,.\,2] = 0{\cdot}00139\,,$$

gdzie [ll . 2] otrzymaliśmy przez odjęcie drobnem pismem oznaczonej liczby ostatniego wiersza wzorca II. od liczby ponad nią stojącej, gdyż, jak wiadomo, jest;

$$[ll\,.\,2] = [ll\,.\,1] - \frac{[bl\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}[bl\,.\,1]\,.$$

Powyższe równania dają:

$$x = 0{\cdot}760627 - 1{\cdot}49379\,.\,0{\cdot}403511 = 0{\cdot}157867\,.$$

Zatem:

$$A = 10x = 1{\cdot}57867,$$
$$B = 100y = 40{\cdot}3511,$$

Sumę kwadratów błędów $[\alpha\alpha]$, odpowiadającą powyższym równaniom błędu, gdy za x i y podstawimy znalezione wartości, znajdziemy podług równania (16), na str. 51. podanego, a zwłaszcza:

$$[\alpha\alpha] = [ll\,.\,2] = 0{\cdot}00139\,.$$

A że jest danych pięć równań z dwiema niewiadomemi, to podług (XXVIII) otrzymamy średni błąd:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\alpha\alpha]}{n-k}} = \pm\sqrt{\frac{0{\cdot}00139}{3}}$$
$$= \pm\,0{\cdot}0215,$$

a błąd oczekiwany podług (VIII):

$$\rho = \pm\,0{\cdot}0215\,.\,0{\cdot}6744 = 0{\cdot}0145\,.$$

Z wzorca II. widać, że ważność ilości y odpowiadająca jest:

$$P_y = 0{\cdot}97239\,,$$

przeto podług wzoru (XVIII):

$$M_y = \frac{\mu}{\sqrt{P_y}} = \pm\frac{0{\cdot}0215}{\sqrt{0{\cdot}97235}} = \pm\,0{\cdot}0218$$

jest błędem średnim niewiadomej y.

Aby zaś obliczyć błąd średni niewiadomej x, wyznaczamy P_x zapomocą równań ważności, z wzorca I. wyprowadzonych, a mianowicie:

$$11{\cdot}48025\,Q_1 + 17{\cdot}14910\,Q_2 = 1,$$
$$17{\cdot}14910\,Q_1 + 26{\cdot}58956\,Q_2 = 0,$$

czyli:

$$\frac{11{\cdot}48025\,.\,26{\cdot}58956 - 17{\cdot}14910^2}{26{\cdot}58956}\,Q_1 = 1,$$

skąd:

$$\frac{1}{Q_1} = \frac{305{\cdot}2548 - 294{\cdot}0915}{26{\cdot}58956} = 0{\cdot}41934 = P_x\,,$$

zatem:

$$M_x = \frac{\mu}{\sqrt{P_x}} = \pm \frac{0{\cdot}0215}{\sqrt{0{\cdot}41984}} = \pm 0{\cdot}03318.$$

Błąd oczekiwany otrzymamy podług wzoru (XIV), t. j.:

$$R = 0{\cdot}6744\ M,$$

przeto:

$$R_x = \pm 0{\cdot}6744 \,.\, 0{\cdot}03318 = \pm 0{\cdot}02237,$$

$$R_y = \pm 0{\cdot}6744 \,.\, 0{\cdot}0215 = \pm 0{\cdot}01450.$$

Możemy tedy powiedzieć, że prawdziwe wartości ilości x i y leżą między:

$$x = 0{\cdot}157867 + 0{\cdot}02237 \text{ a } 0{\cdot}157867 - 0{\cdot}02237,$$
$$y = 0{\cdot}403511 + 0{\cdot}01450 \text{ a } 0{\cdot}403511 - 0{\cdot}01450,$$

więc wysnuwają się wartości:

$$A = 1{\cdot}57867 \pm 0{\cdot}2237$$
$$B = 40{\cdot}3511 \pm 1{\cdot}450$$

z prawdopodobieństwem $= \frac{1}{2}$, gdy przyjmiemy prawo pod postacią równania:

$$m = Ar^2 + Br^3.$$

Błędy oczekiwane tedy są w stosunku do ilości stałych dostatecznie małe; możemy przeto przyjąć równanie:

$$m = 1{\cdot}579\ r^2 + 40{\cdot}351\ r^3$$

na wyrażenie ilości piasku w jednej sekundzie wypływającego przez otwór o promieniu r.

---

c) *Sprawdzanie rachunku.*

44. Z zagadnień, w poprzednich ustępach podanych, jest widoczne, że rachunek wyrównania spostrzeżeń jest dosyć żmudny, a nader pożądaną rzeczą jest, aby być pewnym, że nie popełniło się żadnego błędu. Dlatego też należy sprawdzać otrzymane wypadki, nie dopiero na samym końcu rachunku, ale już w ciągu tegoż; należy zatem być pewnym na każdym kroku, że błędu rachunkowego się nie popełniło. Jak zaś kontroluje się czyli sprawdza rachunek podczas wyrównywania spostrzeżeń pośrednich, wyłuszczają następujące ustępy.

45. Jeżeli równania:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = l_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = l_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nx + b_ny + c_ny + d_nt = l_n \end{array}\right\} \quad (1)$$

są równaniami błędów czterech niewiadomych (gdy jest więcej niewiadomych niż 4, sposób postępowania jest analogiczny), to połóżmy:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + l_1 = s_1, \\ a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + l_2 = s_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n + b_n + c_n + d_n + l_n = s_n. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Dodawszy te równania kolumnami, to spełnić się tedy musi równanie:

$$[a] + [b] + [c] + [d] + [l] = [s], \qquad (3)$$

jeżeli ilości s_i dobrze wyznaczono. Jest to zatem kontrola dla s_i

Pomnożywszy równania (2) kolejno przez a_1, a_2, a_3, . . . a_n, dodajmy je do siebie; podobnież pomnożywszy je kolejno przez b_1, b_2, . . . , b_n, dodajmy je do siebie, i t. d., a otrzymamy następujący układ 5 równań:

$$\left.\begin{array}{l} [aa] + [ab] + [ac] + [ad] + [al] = [as], \\ [ab] + [bb] + [bc] + [bd] + [bl] = [bs], \\ [ac] + [bc] + [cc] + [cd] + [cl] = [cs], \\ [ad] + [bd] + [cd] + [dd] + [dl] = [ds], \\ [al] + [bl] + [cl] + [dl] + [ll] = [ls], \end{array}\right\} \qquad (K_1)$$

Lewe strony tych równań przedstawiają spółczynniki równań normalnych (8′) w ust. 35. str. 44. Obliczamy zatem prawe strony powyższych równań, tj. $[as]$, $[bs]$, . . . , $[ls]$ r ó w n o c z e ś n i e ze spółczynnikami $[aa]$, $[ab]$, $[ac]$, . . . , dodając we wzorcu I. do liczb a, b, c, . . . jeszcze jednę kolumnę s; natenczas podług (K_1) suma spółczynników równań normalnych i prawych stron tychże musi się zgadzać z obliczonemi ilościami, tj. $[as]$, $[bs]$, . . . , $[ls]$. Zwrócić atoli należy uwagę na tę okoliczność, że zpowodu rachowania logarytmami i możliwych skróceń nie może istnieć bezwzględna zgodność, gdyż w ostatnich miejscach dziesiętnych w rachunku uwzględnionych, muszą się pojawiać pewne zboczenia czyli różnice. Jeżeli zatem zgodność wyników jest dostatecznie dobra, to możemy być pewni, żeśmy dobrze obliczyli spółczynniki równań normalnych.

Pierwsze równanie układu (K_1) mnożymy przez $-\dfrac{[ab]}{[aa]}$ a odjąwszy je od drugiego, otrzymamy:

$$[bb\,.\,1] + [bc\,.\,1] + [bd\,.\,1] + [bl\,.\,1] = [bs\,.\,1],$$

pomnąc, że (ob. str. 44.):

$$[bs\,.\,1] = [bs] - \frac{[ab]}{[aa]}\,[as],$$

co z danych ilości obliczyć się daje.

Mnożąc drugie równanie układu (K_1) przez $\frac{[ac]}{[aa]}$ i odejmując je od trzeciego i postępując tak samo z równaniem czwartem i piątem, otrzymamy następujący układ czterech równań:

$$\left.\begin{aligned}
[bb.1] + [bc.1] + [bd.1] + [bl.1] &= [bs.1],\\
[bc.1] + [cc.1] + [cd.1] + [cl.1] &= [cs.1],\\
[bd.1] + [cd.1] + [dd.1] + [dl.1] &= [ds.1],\\
[bl.1] + [cl.1] + [dl.1] + [ll.1] &= [ls.1].
\end{aligned}\right\} \qquad (K_2)$$

Po lewej stronie znaku równości mamy tutaj spółczynniki pierwszych równań eliminacyjnych (10) w ust. 35 str. 45. Ponieważ prawe strony powyższych równań obliczają się z ilości, przychodzących w (K_1), przeto równania (K_2) sprawdzają rzetelność spółczynników pierwszych równań eliminacyjnych. Gdy przekonamy się, że spółczynniki układu (10) czynią dostatecznie dobrze zadosyć układowi równań (K_2), możemy być pewni, żeśmy żadnego błędu nie popełnili i możemy dalej rachować.

Jeżeli pierwsze równanie układu (K_2) pomnożymy przez $\frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}$ i odciągniemy od drugiego, następnie jeżeli pomnożymy piewsze równanie tegoż układu przez $\frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}$ i odejmiemy od trzeciego i jeżeli postąpimy tak dalej analogicznie, to korzystając ze skróceń, podanych na str. 46., otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned}
[cc\,.\,2] + [cd\,.\,2] + [cl\,.\,2] &= [cs\,.\,2],\\
[cd\,.\,2] + [dd\,.\,2] + [dl\,.\,2] &= [ds\,.\,2],\\
[cl\,.\,2] + [dl\,.\,2] + [ll\,.\,2] &= [ls\,.\,2],
\end{aligned}\right\} \qquad (K_3)$$

gdzie lewe strony tych równań są spółczynnikami drugich równań eliminacyjnych (12) w ust. 35. str. 46, prawe zaś można obliczyć z (K_2).

Przekonawszy się o dostatecznie dobrej zgodności prawych i lewych stron równań układu (K_3) możemy dalej prowadzić rachunek, będąc pewni, że aż do spółczyników drugich równań eliminacyjnych nie popełniliśmy żadnego błędu.

Pomnożywszy pierwsze równanie układu (K_3) przez $\frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}$ i odjąwszy je od drugiego, jakoteż pomnożywszy pierwsze przez $\frac{[cl\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}$ i odjąwszy je od trzeciego, otrzymamy układ dwu równań:

$$\left.\begin{aligned}
[dd\,.\,3] + [dl\,.\,3] &= [ds\,.\,3],\\
[dl\,.\,3] + [ll\,.\,3] &= [ls\,.\,3],
\end{aligned}\right\} \qquad (K_4)$$

które sprawdzają spółczynniki trzecich równań eliminacyjnych (14).

Tym sposobem — przyjąwszy do ilości a_i, b_i, c_i . . . , l_i, tylko jednę ilość s_i, — przeprowadzamy kontrolę rachunku, która przekonywa nas o prawdziwości spółczynników każdego układu równań eliminacyjnych.

Co do porządku, jaki zachować należy w rachunku, obacz dodatek II., na końcu rozprawki podany, jako też rozwiązania zagadnień w następującym ustępie 46.

---

46. Zagadnienia. 1. Wiadomo, że ciepłota wnętrza ziemi wzrasta od jej powierzchni ku środkowi ziemi. W okolicy Paryża, którego średnia ciepłota roczna $T_0 = 10{\cdot}60^0$ C., wymierzono średnią roczną ciepłotę w rozmaitych głębokościach, przyczem znaleziono:

w głębokości h	= 28 m.	ciepłotę T	= 11·71°C.,
„	= 66 m.	„	= 12·90°C.,
„	= 173 m.	„	= 16·40°C.,
„	= 248 m.	„	= 20·00°C.,
„	= 298 m.	„	= 22·20°C.,
„	= 400 m.	„	= 23·75°C.,
„	= 505 m.	„	= 26·43°C.,
„	= 548 m.	„	= 27·70°C.

Czy równanie:

$$T = T_0 + Ah + Bh^2$$

wyraża zależność ciepłoty wnętrza ziemi od głębokości?

Rozwiązanie. Jeżeli przyjmiemy, że równanie:

$$T = T_0 + Ah + Bh^2$$

wyraża zależność średniej temperatury rocznej T od głębokości h, to, skoro położymy:

$$100A = x, \quad 10000B = y,$$

otrzymamy:

$$T - T_0 = \left(\frac{h}{100}\right) x + \left(\frac{h}{100}\right)^2 y$$

a po podstawieniu powyżej podanych wartości znajdziemy następujące równania błędów:

$$1{\cdot}11 = 0{\cdot}28x + 0{\cdot}28^2y, \qquad 11{\cdot}60 = 2{\cdot}98x + 2{\cdot}98^2y,$$
$$2{\cdot}30 = 0{\cdot}66x + 0{\cdot}66^2y, \qquad 13{\cdot}15 = 4{\cdot}00x + 4{\cdot}00^2y,$$
$$5{\cdot}80 = 1{\cdot}73x + 1{\cdot}73^2y, \qquad 15{\cdot}83 = 5{\cdot}05x + 5{\cdot}05^2y,$$
$$9{\cdot}40 = 2{\cdot}48x + 2{\cdot}48^2y, \qquad 17{\cdot}10 = 5{\cdot}48x + 5{\cdot}48^2y.$$

Na podstawie tych równań otrzymujemy następującą tabelkę:

a)

L. p.	a	b	l	s
1.	0·28	0·0784	1·11	1·4684
2.	0·66	0·4356	2·30	3·3956
3.	1·73	2·9929	5·80	10·5229
4.	2·48	6·1504	9·40	18·0304
5.	2·98	8·8804	11·60	23·4604
6.	4·00	16·0000	13·15	33·1500
7.	5·05	25·5025	15·83	46·3825
8.	5·48	30·0304	17·10	52·6104
	22·66	90·0706	76·29	**189·0206**

Z tabelki tej widzimy, że suma pierwszych trzech kolumn równą jest sumie ostatniej kolumny,, że zatem wartość *s* dobrze obliczono.

Przeprowadzając dalej rachunek zapomocą logarytmów, znajdziemy łatwo spółczynniki równań normalnych i ilości kontrolne, które wpisujemy w następującą tabelkę: (Ob. stron. 82.)

U w a g a. Próbę przeprowadza się korzystnie z poszczególnemi liczbami, tak n. p.:

$a_1a_1 + a_1b_1 + a_1l_1 = 0·0784 + 0·02195 + 0·3108 = 0·41115$, co zgadza się w zupełności z $a_1s_1 = 0·41115$.

Następnie mamy:

$$\begin{array}{rl} [aa] = & 90·07060 \\ [ab] = & 404·55797 \\ [al] = & 295·99230 \\ \hline \Sigma = & 790·62087 \\ i\ [as] = & 790·62093, \end{array} \Big\}\ \text{co dostatecznie dobrze się zgadza.}$$

Podobnież otrzymujemy:

$$\begin{array}{rl} [ab] = & 404·55797 \\ [bb] = & 1934·10002 \\ [bl] = & 1306·89854 \\ \hline \Sigma = & 3645·55653 \\ i\ [bs] = & 3645·55652 \end{array} \Big\}\ \text{które to wypadki zgadzają się nader dobrze.}$$

Wkońcu mamy też:

$$\begin{array}{rl} [al] = & 295·99230 \\ [bl] = & 1306·89854 \\ [ll] = & 979·00352 \\ \hline \Sigma = & 2581·89436 \\ i\ [ls] = & 2581·89437 \end{array} \Big\}\ \text{bardzo zgodne wypadki.}$$

L. p.	aa	ab	al	as	bb	bl	bs	ll	ls
1.	0·0784	0·02195	0·3108	0·41115	0·06147	0·08703	0·17044	1·23210	1·62992
2.	0·4356	0·28750	1·5180	2·24113	0·18975	1·00188	1·47912	5·29000	7·81002
3.	2·9929	5·17772	10·0340	18·20462	8·95745	17·35882	31·49399	33·64000	61·03283
4.	6·1504	15·25299	23·3120	44·71540	37·82742	57·81376	110·89417	88·36002	169·48570
5.	8·8804	26·46359	34·5680	69·91200	78·86150	103·01264	208·33733	134·56000	272·14060
6.	16·0000	64·00000	52·6000	132·60000	256·00000	210·40000	530·40000	172·92250	435·92250
7.	25·5025	128·78763	79·9415	234·23163	650·37751	403·70457	1182·86971	250·58890	734·23500
8.	30·0304	164·56659	93·7080	288·30500	901·82492	513·51984	1579·91136	292·41000	899·63780
	90·0706	404·55797	295·9923	790·62093	1934·10002	1306·89854	3645·55652	979·00352	2581·89437

47. Zamiast równań normalnych układamy wzorzec I. i rozszerzamy go o dwie kolumny. W pierwszą z tych dodanych kolumn z napisem: „Suma“, wpisujemy sumy z liczb tego samego wiersza, w drugą zaś kolumnę „ P_x “ liczby *1*, *0*, przedstawiające prawe strony równań ważności ilości niewiadomej x, skutkiem czego rozwiązujemy je równocześnie z równaniami normalnemi. Ostatnie liczby każdego szeregu poziomego są to odpowiednie logarytmy. A więc mamy:

Wzorzec I.

x	y		Suma	P_x
90·07060	+404·55797	+295·99230	+790·62087	1
1	**4·491567**	**3·286224**	**8·777791**	**0·011102**
	0·6523977	0·5166972	0·9433853	0·0454169—2
	1934·10002	+1306·89854	+3645·55653	0
+404·55797 ×	+1817·100	+ 1329·469	+ 3551·127	4·491565
2·6069808	3·2593785	3·1236780	3·5503661	0·6523977
		979·00352	+2581·89436	
+ 295·99230 ×		+972·6968	+ 2598·158	
2·4712803		2·9879775	3·4146656	
7: 0·62093	3645·55653	2581·89437	Kontrola	Z drugiej tabelki.

Objaśnienie do powyższego wzorca:

log 404·55797 = 2·6069808	log 295·99230 = 2·4712803
log 90·07060 = 1·9545831	log 90·07060 = 1·9545831
0·6523977	0·5166972
log 790·62087 = 2·8979684	log 1 = 0·0000000
log 90·07060 = 1·9545831	log 90·07060 = 1·9545831
0·9433853	0·0454169—2

W ciągu dalszym układamy wzorzec II., przyczem namieniamy, że do charakterystyki logarytmu dopisane *n* oznacza, że dotycząca liczba jest odjemną. Dla niektórych wyjaśnień porównaj wzorzec w Dodatku II.

Wzorzec II.

y		Suma	P_x
117·00002	− 22·57046	+ 94·42956	− 4·491565
1	**− 0·19291**	**+ 0·80709**	**− 0·038478**
	$0\cdot_n 2853545-1$	$0\cdot9069219-1$	$0\cdot_n 5842118-2$
	+ 6·30672	− 16·26374	
− 22·57046 ×	4·35406	− 18·21638	
$1_n\cdot3535404$	0·6388949	$1_n\cdot2604623$	
94·42953	− 16·26364	Kontrola	Z wzorca I.

Objaśnienie do powyższego wzorca:

$$\begin{array}{lrcl} \log & 22\cdot57046 & = & 1_n\cdot3535404 \\ \log & 117\cdot00002 & = & 2\cdot0681859 \\ \hline & & & 0_n\cdot2853545-1 \end{array} \qquad \begin{array}{lrcl} \log & 94\cdot42956 & = & 1\cdot9751078 \\ \log & 117\cdot00002 & = & 2\cdot0681859 \\ \hline & & & 0\cdot9069219-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \log & 4\cdot491565 & = & 0_n\cdot6523977 \\ \log & 117\cdot00002 & = & 2\cdot0681859 \\ \hline & & & 0_n\cdot5842118-2. \end{array}$$

Jako ostatnie równania sprawdzające otrzymujemy:

$$[ll\,.\,2] = 1\cdot95266,$$
$$[ls\,.\,2] = 1\cdot95264,$$

co daje dostatecznie dobrą zgodność.

Z wzorca I. i II. mamy:

$$y = -\,0\cdot19291,$$
$$x + 4\cdot491567y = 3\cdot286324,$$

z czego wypływa:

$$y = -\,0\cdot1929,$$
$$x = 4\cdot1527.$$

Dla ważności otrzymamy:

$$Q_1 + 4\cdot491567\,Q_2 = 0\cdot011102,$$
$$Q_2 = -\,0\cdot038478,$$

więc:

$$\frac{1}{P_x} = Q_1 = 0{\cdot}183531,$$
$$P_x = 5{\cdot}4236,$$
$$P_y = 117{\cdot}0000$$

bezpośrednio z wzorca II.

Błąd średni tedy będzie:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[ll\,.\,2]}{8-2}} = \pm \sqrt{\frac{1{\cdot}95266}{5}} = \pm\, 0{\cdot}5705,$$

przeto:

$$M_x = \pm \frac{\mu}{\sqrt{P_x}} = \pm \frac{0{\cdot}5705}{\sqrt{5{\cdot}4236}} = \pm\, 0{\cdot}24439,$$

$$M_y = \pm \frac{\mu}{\sqrt{P_y}} = \pm \frac{0{\cdot}5705}{\sqrt{117}} = \pm\, 0{\cdot}052747.$$

Błędy zaś oczekiwane są:

$$R_x = \pm\, 0{\cdot}1648,$$
$$R_y = \pm\, 0{\cdot}03557,$$

tak że powiedzieć możemy, że prawdziwą wartość stałych A i B określają niewątpliwie równania:

$$A = 0{\cdot}041527 \pm 0{\cdot}001648,$$
$$B = -\,0{\cdot}00001929 \pm 0{\cdot}000003557.$$

Zatem żądany wzór, dostatecznie odpowiadający powyższym wartościom, będzie:

$$T = T_0 + 0{\cdot}04153h - 0{\cdot}00001919h^2,$$

przyczem błąd oczekiwany w A wynosi około 4%, a w B około 18%. Ponieważ B jest samo przez się bardzo małe, przeto ów pod uwagę wzięty znaczny błąd, bardzo mało wpływa na ostateczny wynik.

2. Dla warunków, podanych w zagadnieniu 2. ust. 43., przyjmujemy, że istnieje wzór:

$$m = pr^q,$$

podający ilość wysypującego się piasku w reńskich calach sześć. na sekundę, gdzie r oznacza promień otworu. Mamy wyznaczyć ilości stałe p i q.

R o z w i ą z a n i e. Mieliśmy tam bowiem:

dla r = 0·05487	m = 0·00912
= 0·08052	= 0·02985
= 0·09868	= 0·05399
= 0·12017	= 0·09532
= 0·16784	= 0·23463

Wzór:

$$m = pr^q$$

napiszemy w postaci następującej:

$$\log m = \log p + q \log r,$$

gdzie podług naszej ogólnej teoryi jest:

$$l = \log m, \quad a = 1, \quad b = \log r,$$

kładąc:

$$\log p = x, \qquad q = y.$$

Bacząc, że:

$$\log 0{\cdot}00912 = 0{\cdot}9599948 - 3 = -2{\cdot}0400052,$$

otrzymujemy następującą tabelkę:

a)

Lp.	a	b	l	s
1.	1	— 1·2607	— 2·0400	— 2·3007
2.	1	— 1·0941	— 1·5251	— 1·6192
3.	1	— 1·0058	— 1·2677	— 1·2735
4.	1	— 0·9202	— 1·0208	— 0·9410
5.	1	— 0·7751	— 0·6296	— 0·4047
	5	— 5·0559	— 6·4832	— 6·5391

z której otrzymujemy następującą:

b)

Lp.	aa	ab	al	as	bb	bl	bs	ll	ls
1.	1	—1·2607	—2·0400	—2·3007	1·589365	2·571828	2·900492	4·161600	4·693429
2.	1	—1·0941	—1·5251	—1·6192	1·197054	1·668612	1·771567	2·325930	2·469442
3.	1	—1·0058	—1·2677	—1·2735	1·011630	1·275052	1·280886	1·607064	1·614416
4.	1	—0·9202	—1·0208	—0·9410	0·846768	0·939340	0·865908	1·042033	9·960573
5.	1	—0·7751	—0·6296	—0·4047	0·600780	0·488003	0·313683	0·396396	0·254799
	5	—5·0559	—6·4832	—6·5391	5·245597	6·942835	7·132536	9·533023	9·992659

Z tej tabelki wyjmujemy liczby dla wzorca I.

Wzorzec I.

x	y		Suma
5	— 5·0559	— 6·4832	— 6·5391
1	**— 1·01118**	**— 1·29664**	**— 1·30782**
	$0\cdot_{n}0048285$	$0\cdot_{n}1128194$	$0\cdot_{n}1165479$
	5·245597	6·942835	7·132532
— 5·0559 ×	5·112426	6·555681	6·612206
$0\cdot_{n}7037985$	0·7086270	0·8166179	0·8203464
		9·533023	9·992658
— 6·48332 ×		9·406376	8·478864
$0\cdot_{n}8117894$		0·9246088	0·9283373
— 6·5391	7·132536	9·992659	Kontrola

Z tabelki b).

Liczby drobnem pismem wskazane drugiego i trzeciego wiersza odjęte od liczb, ponad niemi stojących, dają liczby dla wzorca następującego:

Wzorzec II.

y		Suma
0·133171	0·387154	0·520325
1	**2·907195**	**3·907232**
	0·4634741	0·5918692
	1·126647	1·513801
	1·125532	1·512700
	0·0513579	0·1797530
0·520330	1·513995	Kontrola

Z wzorca I.

W wzorcu tym w trzeciej kolumnie sumy:

[bb . 1] + [bl . 1] = 0·133171 + 0·387154 = 0·520325

i

[bl . 1] + [ll . 1] = 0·387154 + 1·126647 = 1·513801 zgadzają się dostatecznie z liczbami w ostatnim wierszu przychodzącemi a drogą rachunkową z wzorca I. otrzymanemi.

Wzorzec I. i II. daje:

$$[ll\,.\,2] = 0{\cdot}001115\,,$$
$$y = 2{\cdot}907195\,,$$
$$x - 1{\cdot}01118y = -\ 1{\cdot}29664\,,$$

z czego wynika:

$$x = 1{\cdot}64305\,,$$
$$y = 2{\cdot}9072\,,$$

przeto:

$$x = \log p = 1{\cdot}64305,$$
$$y = \quad q \quad = 2{\cdot}9072,$$

czyli:

$$p = 43{\cdot}96\,,$$
$$q = \ 2{\cdot}9072\,.$$

Dla błędu średniego otrzymujemy:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\alpha\alpha]}{n-k}} = \pm \sqrt{\frac{[ll\,.\,2]}{5-2}} = \pm \sqrt{\frac{0{\cdot}001115}{3}} = \pm\ 0{\cdot}01928.$$

Błąd zaś oczekiwany:

$$\rho = \pm\ 0{\cdot}01399,$$

jest cokolwiek mniejszy od wartości, którą podaliśmy w temże zagadnieniu na str. 76., tj. od 0·01450.

Co się tyczy błędów w x i y zawartych, to mamy:

$$M_y = \frac{\mu}{\sqrt{P_y}} = \frac{\pm\ 0{\cdot}01928}{\sqrt{0{\cdot}133171}} = \pm\ 0{\cdot}0528.$$

Aby obliczyć M_x, należy wyznaczyć nasamprzód P_x zapomocą równań ważności:

$$5Q_1 - 5{\cdot}0559Q_2 \quad = 1\,,$$
$$-\ 5{\cdot}0559Q_1 + 5{\cdot}245597Q_2 = 0\,,$$

albowiem otrzymujemy:

$$\frac{5\,.\,5{\cdot}245597 - 5{\cdot}0559^2}{5{\cdot}245597}\ Q_1 = 1,$$

a stąd:

$$P_x = \frac{1}{Q_1} = \frac{26{\cdot}227985 - 25{\cdot}562125}{5{\cdot}245597} = 0{\cdot}12693\,,$$

a więc:

$$M_x = \frac{\mu}{\sqrt{P_x}} = \pm \frac{0{\cdot}01928}{\sqrt{0{\cdot}12693}} = \pm\ 0{\cdot}0541.$$

Zatem błędy oczekiwane są:

$$R_x = \pm\ 0{\cdot}0365,$$
$$R_y = \pm\ 0{\cdot}0356\,.$$

Aby zaś wyznaczyć błąd oczekiwany ilości stałej p, zważmy, że

$$p = 10^x,$$

więc:

$$p + R_p = 10^{x \pm R_x},$$

zatem:

$$R_p = 10^x (10^{R_x} - 1) = p (10^{R_x} - 1).$$

A że:

$$10^{+0 \cdot 0365} = 1 \cdot 09,$$
$$10^{-0 \cdot 0365} = 0 \cdot 92,$$

więc:

$$10^{+0 \cdot 0365} - 1 = 0 \cdot 09,$$
$$10^{-0 \cdot 0365} - 1 = -0 \cdot 08,$$

przeto:

$$R_p = \pm 43 \cdot 96 \, . \, 0 \cdot 09$$
$$R_p = \pm 3 \cdot 956$$
$$R_q = \pm 0 \cdot 03563.$$

Tedy otrzymujemy wzór na ilość m piasku wysypującego się w sekundzie otworem o promieniu r:

$$m = 43 \cdot 96 \, . \, r^{2 \cdot 9072}$$

z błędem oczekiwanym oznaczonych ilości stałych:

$$\pm 0 \cdot 03563 \text{ i } \pm 0 \cdot 01399.$$

3. Jaki jest błąd oczekiwany wartości m poprzedniego zagadnienia, gdy zastosujemy wzór:

$$m = 43 \cdot 96 \, . \, r^{2 \cdot 9072} ?$$

Rozwiązanie. Jeżeli mamy wogóle:

$$m = pr^q$$

a w p i q są błędy, które są bardzo małe, to, ponieważ:

$$\log m = \log p + q \log r$$
$$= x + y \log r,$$

różniczkując, mieć będziemy:

$$\frac{dm}{m} = dx + dy \, . \log r.$$

Jeżeli więc $\pm R_x$, $\pm R_y$ jest błędem oczekiwanym w x, względnie w y, to podług (XXII) błąd oczekiwany R_m wyrazimy równaniem:

$$\frac{R_m}{m} = \pm \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2 (\log r)^2}$$

czyli:

$$R_m = \pm m \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2 (\log r)^2}.$$

Błąd zatem wzrastać będzie z promieniem r otworu wypływu.

Przyjąwszy $r = 0{\cdot}1044$, która to wartość jest średnią arytmetyczną z pięciu danych wartości promienia r, otrzymamy:

$$R_m = \pm m \sqrt{0{\cdot}03649^2 + 0{\cdot}03563^2 . 0{\cdot}9813^2}$$
$$= \pm 0{\cdot}19,$$

a więc oczekiwany błąd w oznaczeniu ilości m podług wzoru:

$$m = 43{\cdot}96 . r^{2{\cdot}9072}$$

wynosi niemal 19% wartości m.

4. Jaki jest błąd oczekiwany ilości m, jeżeli zastosujemy na str. 77 podany wzór:

$$m = 1{\cdot}237 r^2 + 40{\cdot}351 r^3,$$

i jeżeli błędy oczekiwane

$$\text{dla } 1{\cdot}237 \text{ jest } R_A = \pm 0{\cdot}2237,$$
$$\text{„ } 40{\cdot}351 \text{ „ } R_B = \pm 1{\cdot}45?$$

Rozwiązanie. Skoro mamy wzór:

$$m = Ar^2 + Br^3,$$

przeto:

$$dm = r^2 . dA + r^3 . dB,$$

czyli:

$$R_m = \pm \sqrt{P_A{}^2 r^4 + P_B{}^2 r^6}$$
$$= \pm r^2 \sqrt{P_A{}^2 + P_B{}^2 r^2},$$

a więc błąd rośnie wraz z r. Przyjąwszy znowu $r = 0{\cdot}1044$, mieć będziemy:

$$R_m = \pm r^2 \sqrt{0{\cdot}2237^2 + 1{\cdot}45^2 . 0{\cdot}1044^2}$$
$$= \pm 0{\cdot}27 . r^2,$$

przeto:

$$\frac{R_m}{m} = \pm \frac{0{\cdot}27}{1{\cdot}237 + 40{\cdot}351 . 0{\cdot}1044} = \pm 0{\cdot}04977,$$

tak że:

$$R_m = \pm 0{\cdot}05 m,$$

więc mniejszy niż poprzednio. Zatem ostatni wzór jest dokładniejszy niż poprzedzający.

(Dokończenie w programie przyszłorocznym).

SPRAWOZDANIE DYREKTORA.

I.

GRONO NAUCZYCIELSKIE

przy końcu roku szkolnego 1894/5.

1. Siedlecki Stanisław, dyrektor.
2. Maziarski Wincenty, profesor w VIII. randze, gospodarz kl. IVb, uczył jęz. łacińskiego w kl. IVb, Vb, VIIb, tygodniowo godzin 17.
3. Kosiński Władysław, dr. filoz., profesor w VIII. randze, zawiadowca biblioteki nauczycielskiej, gospodarz kl. VI, uczył jęz. łacińskiego w kl. VI, VIIIb, greckiego w kl VI, tygodniowo godzin 16.
4. Kosiba Antoni, dr. filoz., profesor w VIII. randze, gospodarz kl. VIIIb, uczył jęz. polskiego w kl. Vb, VI, VIIIb, propedeut. filoz. w kl. VIIa+b, VIIIa+b, tygodniowo godz. 17.
5. Soswiński Antoni, profesor w VIII. randze, gospodarz kl. VIIa, uczył jęz. łacińskiego w kl. IIb, III, VIIa, tygodniowo godzin 19.
6. Szarłowski Alojzy, profesor w VIII. randze, uczył historyi i geografii w kl. Ia+b, Va+b, VIIa+b, tygodniowo godzin 18.
7. Zaręczny Stanisław, dr. filoz., profesor w VIII. randze, zawiadowca gabinetu historyi naturalnej, gospodarz kl. III, uczył matematyki w kl. III, IVa+b, fizyki w kl. IVa+b, historyi naturalnej w kl. III, VI, tygdoniowo godzin 19.
8. Winkowski Józef, profesor w VIII. randze, gospodarz kl. Va, uczył jęz. łacińskiego w kl. Va, greckiego w kl. Va, VIIIb tygodniowo godzin 16.

9. Bednarski Stanisław, profesor, gospodarz kl. VIIIa, uczył jęz. łacińskiego w kl. VIIIa, greckiego w kl. VIIa+b. VIIIa, tygodniowo godzin 18.
10. X. Puszet Stanisław, profesor, uczył religii w kl. IVb, Va+b, VI, VIIa+b, VIIIa+b, tygodniowo godzin 16 i miewał 2 egzorty.
11. Gustawicz Bronisław, profesor, gospodarz kl. Vb, uczył matematyki w kl. Va+b, VI, VIIIb, fizyki w kl. VIIIb, tygodniowo godzin 16.
12. Dziurzyński Jan, profesor, zawiadowca gabinetu fizykalnego, gospodarz kl. VIIb, uczył matematyki w kl. VIIa+b VIIIa, fizyki w kl. VIIa+b, VIIIa, tygodniowo godzin 17.
13. Zawiliński Roman, profesor, zawiadowca polskiej biblioteki uczniów, uczył jęz. polskiego w kl. IVa, Va, VIIa+b, VIIIa, tygodniowo godzin 15.
14. Bieniasz Franciszek, profesor, gospodarz kl. Ib, uczył matematyki w kl. Ia+b, historyi naturalnej w kl. Ia+b, IIa+b, Va+b, tygodniowo godzin 18.
15. Bylicki Franciszek, dr. filoz., profesor, uczył jęz. niemieckiego w kl. Ia+b, historyi i geografii w kl. VIIIa+b, tygodniowo godzin 18.
16. Bystroń Jan, dr. filoz., profesor, członek korespondent Akademii Umiejętności w Krakowie, zawiadowca niemieckiej biblioteki uczniów, uczył jęz. niemieckiego w kl. VIIa+b, VIIIa+b, tygodniowo godzin 16.
17. Kreiner Jan, egzaminowany zastępca nauczyciela, uczył jęz. łacińskiego w kl. Ib, jęz. niemieckiego w kl. IVa+b, tygodniowo godzin 16.
18. X. Błonarowicz Józef, zastępca nauczyciela, uczył religii w kl. Ia+b, II a+b, III, IVa, tygodniowo godzin 12 i miewał 1 egzortę.
19. Lenczowski Antoni, zastępca nauczyciela, gospodarz kl. IVa, uczył jęz. polskiego w kl. Ib, historyi i geografii w kl. IVa+b, VI, matematyki w kl. IIa, tygodniowo godzin 18.
20. X. Rawski Paweł, dr. św. teologii, zastępca nauczyciela, zawiadowca biblioteki pomocy koleżeńskiej, gospodarz kl. Ia, uczył jęz. łacińskiego w kl. Ia, IIa, polskiego w kl. Ia, tygodniowo godzin 19.
21. Jaworski Józef, zastępca nauczyciela, gospodarz kl. IIa, uczył jęz. polskiego w kl. IIa, IVb, niemieckiego w kl. IIa, III, matematyki w kl. IIb, tygodniowo godzin 18.

22. Ippoldt Juliusz, zastępca nauczyciela, gospodarz kl. IIb, uczył jęz. niemieckiego w kl. IIb, Va+b VI, tygodniowo godzin 17.
23. Paulisch Zygmunt, zastępca nauczyciela, uczył jęz. łacińskiego w kl. IVa, greckiego w kl. III, IVa+b, tygodniowo godzin 19.
24. Pytel Franciszek, zastępca nauczyciela, uczył jęz. polskiego w kl. IIb, III, historyi i geografii w kl. IIa+b, III, tygodniowo godzin 17.

Dr. Landau Samuel, rabin i kaznodzieja, uczył religii mojżeszowej, tygodniowo godzin 3.

Nauczyciele przedmiotów nadobowiązkowych.

1. Szarłowski Alojzy, j. w., uczył historyi kraju rodzinnego w kl. VIIa+b, tygodniowo w I. półr. godzin 2, w II. półr. godzin 4.
. Bylicki Franciszek, j. w., uczył historyi kraju rodzinnego w kl. VIIIa+b w półr. I., tygodniowo godzin 2.
3. Lenczowski Antoni, j. w., uczył historyi kraju rodzinnego w kl. III, IVa+b i kaligrafii tygodniowo godzin 5.
4. Kosiński Władysław, j. w., uczył stenografii w dwóch oddziałach, tygodniowo godzin 2.
5. Rongier Paweł, uczył jęz. francuskiego w trzech oddziałach, tygodniowo godzin 6.
6. Dec Walenty, uczył śpiewu, tygodniowo godzin 4.
7. Bogacki Józef, uczył rysunków, tygodniowo godzin 6.

Zmiany w gronie nauczycielskiem w ciągu roku szkolnego 1894/5.

1. Wys. c. k. Rada Szk. Kr. ddto 25. lipca 1894 r. L. 14897 mianuje kandydata stanu nauczycielskiego Franciszka Pytla zastępcą nauczyciela w tutejszym zakładzie.
2. Wys. c. k. Rada Szk. Kr. ddto 4. sierpnia 1894 r. L. 15469 mianuje kandydata stanu nauczycielskiego Zygmunta Paulischa zastępcą nauczyciela w tutejszym zakładzie.

3. Wys. c. k. Rada Szk. Kr. ddto 27. lipca 1894 r. L. 12646 przenosi zastępcę nauczyciela Felixa Gątkiewicza w tym samym charakterze do c. k. gimnazyum w Samborze.

4. J. E. Pan Minister W. i O. reskryptem z dnia 6. lipca 1894 r. L. 13562 przeniósł Alojzego Szarłowskiego profesora c. k. szkoły realnej w Krakowie, do tutejszego zakładu, a Antoniego Jońca, zastępcę nauczyciela w tutejszym zakładzie, mianował nauczycielem w c. k. gimn. w Przemyślu (W. Prez. R. S. Kr. z d. 10. sierpnia 1894 r. L. 384).

5. Wys. c. k. Rada Szk. Kr. ddto 14. sierpnia 1894 r. L 14304 uwalnia dyrektora Stanisława Siedleckiego na rok szkolny 1894/5 od udzielania lekcyi szkolnych.

6. Wys. c. k. Rada Szk. Kr. ddto. 21. sierpnia 1894 r. L. 16861 podaje do wiadomości że J. E. Pan Minister W. i O. reskryptem ddto 27. lipca 1894 r. L. 16773 udzielił urlopu prof. Bronisławowi Gustawiczowi na 1. półrocze roku szkolnego 1894/5.

7. Wys. c. k. Rada Szk. Kr. ddto 7. września 1894 r. L. 19642 przenosi zastępcę nauczyciela Juliusza Ippoldta z c. k. gimn. w Podgórzu do tutejszego zakładu.

8. Wys. c. k. Rada Szk. Kr. ddto 13. września 1894 r. L. 19276 donosi o pozwoleniu ministeryalnem zmniejszenia ilości godzin szk. zast. naucz. Franciszkowi Fryzowi i Janowi Kreinerowi na 1 półr. r. szk. 1894/5.

9. Wys. c. k. Rada Szk. Kr. ddto. 18. września 1894 r. L. 20282 uwalnia zastępcę nauczyciela Wacława Woysym Antoniewicza od obowiązków nauczycielskich.

10. Wys. c. k. Rada Szk. Kr. ddto 26. września 1894 r. L. 20283 zatwierdza wnioski Dyrekcyi co do zastępstwa prof. Br. Gustawicza, a mianowicie: H. Hołubowicz, nauczyciel w tut. szkole realnej, obejmuje matematykę w kl. Va; S. Tobiczyk, zastępca nauczyciela w tut. szkole realnej, mat. w kl. Vb, VI, fizykę w kl. VIIIb; A. Lenczowski, zast. naucz., matematykę w kl. IIa; B. Grotowski, zast. naucz., j. polski w kl. Ib.

11. Wys. c. k. Rada Szk Kr. ddto 4. stycznia 1895 r. L. 31470 przenosi zastępcę nauczyciela Franciszka Fryza w tym samym charakterze do c. k. gimn. w Jaśle.

12. Wys. c. k. Rada Szk. Kr. ddto 4. stycznia 1895 r. L. 31470 przenosi Józefa Jaworskiego, zastępcę nauczyciela w c. k. gimn. w Tarnowie, w tym samym charakterze do tutejszego zakładu.
13. J. E. Pan Minister W. i O. reskryptem ddto 19. stycznia 1895 r. L. 360 mianował zastępcę nauczyciela w tutejszym zakładzie Bolesława Grotowskiego nauczycielem w c. k. gimn. w Rzeszowie (W. Prez. R. S. Kr. z d. 10. lutego 1895 r. L. 38).
14. Wys. c. k. Rada Szk. Kr. ddto 26. lutego 1895 r. L. 4277 porucza naukę jęz. greckiego w kl. Vb w drugiem półroczu Andrzejowi Gąsiorowskiemu, profesorowi c. k. gimn. św. Anny w Krakowie.

II.

ROZKŁAD NAUK I KSIĄŻKI SZKOLNE W R. SZK. 1894 5

KLASA Ia+b.

1. **Religia.** 2 godziny tygodniowo. Nauka wiary i obyczajów, podług Katechizmu Deharba-Morawskiego.
2. **Język łaciński.** 8. godź.. tygodn. Nauka o formach prawidłowych i najpotrzebniejsze wiadomości o przyimkach i spójnikach na odpowiednich przykładach podług Zwięzłej gramatyki Z. Samolewicza i Przykładów Józefa Steinera i Augusta Scheindlera. — Co tydzień zadanie szkolne.
3. **Język polski.** 3 godź. tygodn. a) Z gramatyki: Elementarna nauka o zdaniu pojedynczem i złożonem, odmiana imienia i słowa w głównych zarysach, nadto w ciągu całego roku przygodne poznawanie wszystkich innych części mowy i przygodna nauka składni; poznanie najważniejszych znaków pisarskich. — b) Czytanie wzorów według wypisów t. I., objaśnianie, zdawanie sprawy z rzeczy poprzednio przeczytanej i dokładnie objaśnionej. — c) Deklamacya. Uczenie się na

pamięć i należyte wygłaszanie zawartych w wypisach, a poprzednio objaśnionych piękniejszych utworów poetycznych, niekiedy ustępów prozaicznych. — d) Wypracowania stylistyczne: 4 na miesiąc. W I. półr. wyłącznie dyktaty, w 2 półr. naprzemian ćwiczenia ortograficzne i wypracowania stylistyczne, zrazu tylko szkolne, pod koniec roku także domowe.

Książki: Gramatyka Małeckiego, wyd. 8. i I. tom Wypisów dla klas niższych.

4. **Język niemiecki.** 6 godź. tygodn. Nauka na podstawie Ćwiczeń niemieckich Germana i Petelenza na kl. I. — Co tydzień zadanie szkolne.

5. **Geografia.** 3 godź. tygodn. Wstępne pojęcia z geografii fizycznej i matematycznej. Lądy, morza, półwyspy, wyspy, przylądki, jeziora, rzeki i góry. Zarys krótki geografii politycznej, podług książki Benoniego i Tatomira. Ćwiczenia kartograficzne w obu półroczach.

6. **Matematyka.** 3. godź. tygodn. W pierwszem półroczu arytmetyka, w drugiem arytmetyka naprzemian z geometryą.

Z arytmetyki: Liczenie słowne i piśmienne. Cztery główne działania liczbami całemi niemianowanemi i mianowanemi. Nauka o ułamkach dziesiętnych z wyjątkiem zamiany ułamków dziesiętnych na zwyczajne i naodwrót. — Nauka o liczbach wielorakich. Podzielność liczb i rozkładanie na czynniki pierwsze. Kurs elementarny (propedeutyczny) nauki o ułamkach zwyczajnych [t. j. tworzenie ułamków, ich upraszczanie, zwiększanie i zmniejszanie (mnożenie i dzielenie przez liczby całe), dodawanie i odejmowanie; mnożenie i dzielenie przez ułamek].

Z geometryi: Zasadnicze pojęcia o ilościach przestrzennych. Linie proste. Linia kołowa. Kąty. Linie równoległe. Trójkąty — do związku między bokami a kątami trójkąta włącznie.

Ćwiczenie domowe na każdą godzinę. Cztery zadania szkolne na półrocze.

Książki: Arytmetyka Baranieckiego Cz. I. Geometrya Močnika w tłómaczeniu Maryniaka Cz. I.

7. **Historya naturalna.** 2. godź. tygodn.

a) Zoologia (6 miesięcy): Zwierzęta ssące (30 gatunków); owady (20 gatunków);

b) Botanika (4 miesiące): wiadomości wstępne i opis przedstawicieli rodzin: jaskrowatych, krzyżowych, migdałowatych, różowatych, malinowatych, jabłkowatych, ślazowatych, psinkowatych, wargowych, liliowatych i palm, z uwzględnieniem form pokrewnych, zwłaszcza uprawnych, pożytecznych i szkodliwych.

Książki: Zoologia Nowickiego, wyd. 6. Botanika Rostafińskiego, wyd. 2.

KLASA IIa+b.

1. **Religia.** 2 godź. tygodn. Dzieje starego Zakonu podług książki Dąbrowskiego.
2. **Język łaciński.** 8. godź. tygodn. Powtórzenie i uzupełnienie prawidłowej odmiany imion i słów, nieprawidłowa odmiana imion i słów, nieodmienne części mowy, ważniejsze prawidła (przygodnie) o cons. temp. w zdaniach pobocznych, accus. i nomin. cum infinitivo, ablat. absolut, gerundium, gerundivum, coniug. periphr. — Co miesiąc 4 zadania szkolne.

   Książki: Zwięzła gramatyka Z. Samolewicza i przykłady do tłómaczenia Steinera i Scheindlera.
3. **Język polski.** 3 godź. tygodn. a) Z gramatyki (1 godź tygodn.). Elementarne powtarzanie i uzupełnianie najważniejszych prawideł głosowni i pisowni, odmiany imienia i słowa, tudzież nauki o zdaniu pojedynczem, tak prostem, jak rozwiniętem; nauka o zdaniu złożonem, interpunkcya. b) Czytanie wzorów i c) Deklamacya jak w kl. I. — d) Wypracowania stylistyczne: 3 na miesiąc, naprzemian szkolne (niekiedy dyktaty) i domowe.

   Książki: Gramatyka Małeckiego, wyd. 8. i Wypisów dla klas niższych tom II.
4. **Język niemiecki.** 5 godź. tygodn. Nauka na podstawie Ćwiczeń niemieckich Germana i Petelenza na kl. II. Co tydzień zadanie szkolne.

5. **Historya i Geografia.** a) Historya 2 godź. tygodn.: Dzieje starożytne sposobem biograficznym opowiadane podług książki A. Semkowicza. — b) Geografia 2 godź. tygodn.: Szerokość i długość geograficzna; geografia fizyczna i polityczna Azyi i Afryki, oro- i hydrografia Europy; szczegółowy opis południowej i zachodniej Europy — podług książki Baranowskiego i Dziedzickiego.
6. **Matematyka.** 3 godź. tygodn. naprzemian arytmetyka i geometrya.

   Z arytmetyki: Wspólna miara i wspólna wielokrotność. Systematyczna nauka o ułamkach zwyczajnych. Zamiana ułamków zwyczajnych na dziesiętne i naodwrót. — O regule trzech prostej (stosunki i proporcye). O regule procentu i potrącaniu procentu. Najważniejsze wiadomości o monetach, miarach i wagach.

   Z geometryi: Przystawanie trójkątów i zastosowania. Ważniejsze własności koła, czworoboków i wieloboków. Zadania jak w kl. I.

   Książki: Arytmetyka Zajączkowskiego. Cz. I. Wyd. 2. i 3. Geometrya Močnika w tłómaczeniu Maryniaka Cz. I.
7. **Historya naturalna.** 2 godź. tygodn. a) Zoologia (6 miesięcy): 24 gatunków ptaków, 18 gatunków gadów, płazów i ryb, 20 gatunków z reszty gromad niższych typów. — b) Botanika (4 miesiące): Powtórzenie wiadomości z klasy pierwszej i opis przedstawicieli rodzin baldaszkowych, motylkowatych, złożonych, kotkowych, traw, storczyków, iglastych, kłodziniastych, paprotników, mszaków i bdeł. — Książki jak w kl. I.

KLASA III.

1. **Religia.** 2 godź. tygodn. Dzieje nowego zakonu podług książki Dąbrowskiego.
2. **Język łaciński.** 6 godź. tygodn. Gramatyka (3 godź.): Składnia zgody i rządu podług gramatyki Z. Samolewicza-Sołtysika i przykładów Próchnickiego. — Lektura

(3 godź.): Cornelii Nepotis (wyd. Patočki z słown. Zawilińskiego) Aristides, Cimon, Epaminondas, Pelopidas, Miltiades, Themistocles, Hannibal. — Co miesiąc dwa zadania szkolne i 1 domowe.

3. **Język grecki.** 5. godź. tygodn. Odmiana prawidłowa imion i słów zakończonych na „ω“ na podstawie odpowiednich przykładów — podług gramatyki Fiderera i przykładów Schenkla w tłómacz. Parylaka. — Od połowy I. półrocza co 14 dni zadanie domowe albo szkolne naprzemian.

4. **Język polski.** 3 godź. tygodn. a) Z gramatyki (jedna godź. na tydzień): Systematyczna nauka składni rządu i deklinacyi. Powtórzenie nieodmiennych części mowy, a przygodnie prawideł pisowni i znaków pisarskich. — b) Czytanie, objaśnianie i zdawanie sprawy z ustępów w III. t. Wypisów zawartych z krótkiemi wiadomościami o życiu i zasługach tych pisarzy, z których dzieł poznano wyjątki. — c) Deklamacya jak w kl. I. — Wypracowania stylistyczne: 2 na miesiąc, naprzemian domowe i szkolne.

Książki: Gramatyka Małeckiego i Wypisów dla klas niższych t. III.

5. **Język niemiecki.** 4 godz. tygodn. Nauka na podstawie gramatyki Petelenza (do składni włącznie) i wypisów Germana-Petelenza na kl. III. — Co 14 dni zadanie szkolne lub domowe.

6. **Historya i Geografia.** 3. godź. tygodn. (naprzemian 1 godź. historya, 1 godź. geografia) a) Historya: Dzieje średniowieczne sposobem biograficznym opowiadane — podług książki Semkowicza. b) Geografia; Uzupełnienie geografii matematycznej. Szczegółowa geografia środkowej, północnej i wschodniej Europy z wyłączeniem monarchii austr.-węg.); geografia Ameryki i Australii, — podług książki Baranowskiego i Dziedzickiego.

7. **Matematyka.** 3 godź. tygodn. (naprzemian 1 godź. aryt., 1 geom.) a) Arytmetyka: Cztery główne działania liczbami całkowitemi i ułamkowemi liczbami ogólnemi. Podnoszenie do drugiej potęgi. Obliczanie pierwiastka kwadratowego. W zastosowaniu do geometrycznych obli-

czeń: skrócone mnożenie i dzielenie; zastosowanie skróconego dzielenia przy obliczaniu pierwiastka kwadratowego. — b) Geometrya: Główne przypadki porównywania, przemiany i podziału figur płaskich. Twierdzenie Pitagorasa. Pomiar figur płaskich. Najważniejsze rzeczy o podobieństwie figur płaskich.

Książki: Arytmetyka Zajączkowskiego, część II. i Geometrya Močnika w tłómacz. Maryniaka, część II. — Zadania piśmienne jak w kl. I.

8. **Nauki przyrodnicze.** 2 godź. tygodn. W I. półroczu fizyka doświadczalna: Wiadomości wstępne. Stan skupienia ciał. Nauka o cieple i najważniejsze rzeczy z chemii nieorganicznej. — W II. półroczu Mineralogia: Rozpoznanie i opis 48 gatunków minerałów ważnych i rozpowszechnionych, bez względu na porządek systematyczny, ale z uwzględnieniem wiadomości nabytych w I. półroczu z fizyki i chemii, z okazaniem, przy sposobności, najpospolitszych skał.

Książki: Fizyka Kaweckiego i Tomaszewskiego. Mineralogia Łomnickiego, wyd. 2. i 3.

KLASA IV a+b.

1. **Religia.** 2. godź. tygodn. Wykład obrzędów i religijnych zwyczajów, podług książki Jachimowskiego.
2. **Język łaciński.** 6 godź. tygodn. a) Gramatyka (w I. półr. 3, w II. półr. 2 godź. tygodn.). Właściwości w użyciu imion, nauka o użyciu czasów i trybów, infinitivus, accus. i nom. cum. infin., oratio obliqua, participium, gerundium, supinum, prozodya i nauka o hexametrze daktylicznym.

b) Lektura (w I. półr. 3, w II. półr. 4 godź. tygodn.). α) Caesaris de bello Gallico ks. I. rozdź. 1—13, 15, 16, 21—31, 33, 34, 37—39, 41—43, 46—54; ks. IV. rozdź. 16, 18—36; ks. V. rozdź. 1—11, 15—23; ks. VI. rozdź. 9—20. β) Ovidii Metam. I. 89—415. Co miesiąc dwa zadania szkolne i 1 domowe.

Książki: Gramatyka Z. Samolewicza-Sołtysika; Przykłady do tłómaczenia Próchnickiego, Cezar i Owidy w wydaniu Bednarskiego.

3. **Język grecki.** 4 godź. tygodn. Uzupełnienie i powtórzenie nauki odmiany słów zakończonych na „ω“, słowa zakończone na „μι“ i słowa nieprawidłowe, najważniejsze rzeczy ze składni na podstawie odpowiednich przykładów. Co miesiąc dwa zadania naprzemian domowe i szkolne.

Książki: Gramatyka Fiderera; Ćwiczenia Schenkla-Parylaka.

4. **Język polski.** 3 godź. tygodn. a) Z gramatyki (1 godź. tygodniowo). Systematyczna nauka konjugacyi i składni w obrębie czasownika; systematyczna nauka o zdaniu złożonem i o okresie. — Wierszowanie. — W końcu roku powtórzenie całego materyału gramatyki w ogólnym zarysie. — b) Czytanie wzorów podług Wypisów ze zwracaniem uwagi na układ całości czytanych ustępów. — c) Deklamacya jak w kl. I. —d) Wypracowania stylistyczne dwa na miesiąc, naprzemian domowe i szkolne.

Książki: Gramatyka Małeckiego i Wypisy Czubka-Zawilińskiego dla kl. IV.

5. **Język niemiecki.** 4. godź. tygodn. a) Nauka o zdaniu pojedynczem, rozwiniętem, zdaniu ściągniętem i złożonem, o użyciu czasów i trybów. — b) Czytanie, objaśnianie, opowiadanie i uczenie się częściowe na pamięć ustępów niemieckich, tłómaczenie ustępów polskich z Wypisów Germana-Petelenza na kl. IV.

Zadania piśmienne jak w kl. III.

6. **Historya i Geografia.** 4 godź. tygodn. a) Geografia 2 godź. tygodn.: Geografia fizyczna i polityczna monarchii austryacko-węgierskiej z uwzględnieniem płodów poszczególnych krajów, zatrudnienia, stosunków handlowych i przemysłowych, jakoteż oświaty ludów. Ćwiczenia kartograficzne. — b) Historya 2 godź. tygodn. Dzieje nowożytne. Najgłówniejsze osoby i zdarzenia; dzieje monarchii austryacko-węgierskiej.

Książki: Welter-Sawczyński. Dzieje powszechne skrócone. Cz III. — Benoni-Majerski, Geografia austr.-węgierskiej monarchii. Wyd. 2.

7. **Matematyka.** 3 godź tygodn. Rozkład godzin jak w kl. III. a) Arytmetyka: Równania oznaczone 1. stopnia o jednej i kilku niewiadomych. Równania dwuwyrazowe drugiego i trzeciego stopnia przy rozwiązywaniu zagadnień geometrycznych. Podnoszenie do trzeciej potęgi. Obliczanie pierwiastka sześciennego. Stosunki i proporcye. Reguła trzech składana. Reguła łańcuchowa. Procent składany. Rachunek terminu, spółki i mięszaniny. — b) Geometrya: Stereometrya.

   Książki jak w kl. III. — Zadania jak w kl. I.

8. **Fizyka.** W I. półr.: Magnetyzm, elektryczność, mechanika ciał stałych; w II. półr.: hydrostatyka i aerostatyka; nauka o głosie i świetle. — Najważniejsze wiadomości z geografii matematycznej i kosmografii.

   Książka: Soleski, Fizyka dla klas niższych. Wyd. 2

KLASA Va+b.

1. **Religia.** 2 godź. tygodn. Apologetyka i dogmatyka ogólna podług książki Martina w tłómaczeniu polskiem Jachimowskiego.

2. **Język łaciński.** 6. godź. tygodn. a) Lektura: (5 godź.). α) Livius I. 1—17, 19, 22—25, 27—29, 33—35, 37, 39—42 44—50, 53, 54, 56, 57, 60; XXI. 1—7, 9, 10, 12—32, 38, 39, 45—47. β) Ovidii Metam. VI. 146—312; VIII. 183—235, 618—720; X. 1—63, 72—77; XI. 87—193. γ) Fast. II. 83—118, 687—710; Tristia IV. 10.

   b) Ćwiczenia gramatyczno-stylistyczne na podstawie lektury (1 godź. tygodn.). — Co miesiąc zadanie szkolne.

   Książki: Gramatyka Z. Samolewicza, Podręcznik metryki Sasa, Livius w wydaniu Zingerle-Majchrowicz, Ovidius w wydaniu Sedlmayera-Bednarskiego.

3. **Język grecki.** 5 godz. tygodn. a) Lektura (4 godź.): Z Chrestomatyi Fiderera: Xenoph. Anab. ustępy: 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 13. §. 1—23. Z Homera Iliady ks. I i II.

b) Co tydzień ćwiczenia gramatyczne na podstawie lektury. — Cztery zadania szkolne na półrocze.

4. **Język polski.** 3 godź. tygodn. a) Czytanie wzorów najważniejszych gatunków poezyi i prozy na podstawie Wypisów Próchnickiego i poznanie najzwyklejszych tropów i figur. Wiadomości historyczno-literackie o pisarzach, z których wyjątki znajdują się w wypisach. — b) Deklamacya wybranych ustępów poetycznych i prozaicznych. — Wypracowania stylistyczne co trzy tygodnie naprzemian domowe i szkolne.

5. **Język niemiecki.** 4. godź tygodn. Czytanie wypisów Wernera-Petelenza na kl. V. z odpowiedniem objaśnieniem gramatycznem i stylistycznem. Ćwiczenia w opowiadaniu i uczenie się na pamięć celniejszych ustępów prozaicznych i poetycznych. Uzupełnienie składni podług gramatyki Petelenza. — Co 3 tygodnie zadanie domowe lub szkolne.

6. **Historya i Geografia.** 3 godź. tygodn. Dzieje starożytne do Grakchów w połączeniu z geografią państw starożytnych podług książki dra W. Zakrzewskiego.

7. **Matematyka.** 4 godź. tygodn. a) Arytmetyka (2 godź.): Cztery działania zasadnicze. Podzielność liczb. Największa wspólna miara i najmniejsza wspólna wielokrotność. Nauka o systemach liczb w ogóle, a szczegółowo o dziesiątkowym. Ułamki zwyczajne i dziesiętne. Stosunki i proporcye w zastosowaniu. Równania I. stopnia o jednej i kilku niewiadomych oznaczone. Podług algebry Baranieckiego. — b) Geometrya (2 godź.): Planimetrya umiejętnie uzasadniona podług książki Močnika-Staneckiego. — Cztery zadania szkolne na półr., co lekcya ćwiczenie domowe.

8. **Historya naturalna.** 2 godź. tygodn. W I. półr. Mineralogia: Krystalografia w krótkim zarysie. Systematyczne omówienie ważniejszych minerałów ze względu na ich fizykalne, chemiczne i inne pouczające własności, z wyłączeniem form rzadkich lub dla uczniów nieprzystępnych, jednak z uwzględnieniem kilkunastu pospolitych skał. Przy końcu półrocza jak najzwięźlejszy zarys

nauki o rozwoju ziemi. — Książka: Mineralogia Łomnickiego dla klas wyższych.

W II. półr.: Botanika: Charakterystyka grup roślinnych podług systemu naturalnego, tudzież cechy najważniejszych rzędów na podstawie znajomości budowy morfologicznej i anatomicznej typowych postaci; przy sposobności wytłómaczenie czynności życia roślin i wzmianka o zaginionych formach kopalnych, z pominięciem zbędnych systematycznych szczegółów, podług książki Rostafińskiego dla klas wyższych.

KLASA VI.

1. **Religia.** 2 godź. tygodn. Dogmatyka szczegółowa podług książki Martina w tłóm. Jachimowskiego.
2. **Język łaciński.** 6 godź. tygodn. a) Lektura: Sallustii Jugurtha; Ciceronis in Catilinam or I.; Vergilii Eclogae I, V; Georgicon I. 1—42, 118—159; II. 109—176, 458 - 540; Aeneidos I. b) Gramatyka (1 godź. na tydzień); Ćwiczenia gramatyczne i stylistyczne na podstawie lektury.

   Co miesiąc zadanie szkolne.
3. **Język grecki.** 5 godź. tygodn. a) Lektura (4 godź.): Z Herodota: VII. 1 11, 19 - 25, 34, 35, 44 46, 53 - 57, 138—147, 206—220. Z Homera Iliady: III., IV. 1 - 230, VI; VIII. 121 - 135; IX. 1 - 8, 84—481; XVI. 1 - 247, 306—345, 598 - 734; XXII. — Z Xenofonta: Memorab. I. 1.

   Cztery zadania szkolne na półrocze.
4. **Język polski.** 3 godź. tygodn. Czytanie i objaśnianie arcydzieł literatury polskiej okresu I—V podług wypisów Tarnowskiego-Wójcika t. I. Na tej podstawie historya literatury od początku do końca w. XVIII. — Uczenie się na pamięć celniejszych utworów poetycznych i zdawanie sprawy z lektury przywatnej.

   Zadania jak w kl. V.
5. **Język niemiecki.** 4. godź. tygodn. Stylistyka, metryka, poetyka. Czytanie Wypisów Petelenza-Wernera w połączeniu z rozbiorem stylistycznym i objaśnieniami rzeczowemi,

tudzież z uwzględnieniem rodzajów poezyi. Uczenie się na pamięć celniejszych utworów poetycznych w obu półroczach.

Zadania jak w kl. V.

6. **Historya i Geografia.** 4 godź. tygodn. Historya starożytna od wojen punickich. Historya średniowieczna w połączeniu z geografią aż do odkrycia Ameryki, — podług książki Dra Zakrzewskiego.
7. **Matematyka.** 3 godź. tygodn. (naprzemian 1 godź. arytm., 1 godź. geom.). a) Arytmetyka: Ułamki ciągłe, potęgi, pierwiastki i logarytmy — podług algebry Dra P. Dziwińskiego. — b) Geometrya: stereometrya, goniometrya i trygonometrya do rozwiązywania trójkątów prostokątnych włącznie — podług książki Močnika-Staneckiego. — Zadania i ćwiczenia jak w kl. V.
8. **Historya naturalna.** 2 godź. tygodn. Najpotrzebniejsze wiadomości o budowie ciała ludzkiego i o czynnościach jego organów z dodaniem przy sposobności uwag z zakresu hygieny. Gromady zwierząt kręgowych i ważniejsze grupy zwierząt bezkręgowych w ich typowych postaciach, przytem własności rozwojowe, anatomiczne i morfologiczne, z uwzględnieniem ważniejszych form paleontologicznych, — podług książki Petelenza.

KLASA VIIa+b.

1. **Religia.** 2 godź. tygodn. Etyka według książki Martina w tłóm. Soleckiego.
2. **Język łaciński.** 5 godź. tygodn. a) Lektura (4 godz.): Cicero de imperio Cn. Pompei; pro Ligario; Laelius de amicitia (wydanie Kornitzer - Sołtysik); Verg. Aen. II. i VI. (wydanie Eichlera). — b) Ćwiczenia gramatyczno-stylistyczne na podstawie lektury (1 godz.) — Zadania jak w kl. V.
3. **Język grecki.** 4 godź. tygodn. a) Lektura (3 godź. tygodn.). Demostenesa Olynth. I., II., III., (wyd. Wotke); Homera Odys. XIII. 1—391; XIV. 1—186; XV. 239—384; XVI. 1—252, 381—407; XVII. 1—27, 139—534; XIX. 1—404 XX. 1—295. (wyd. Pauly-Wotke). — b) Co tydzień ćwiczenia gram. 1 godź. — Zadania jak w kl. V.

4. **Język polski.** 3 godź. tygodn. a) Czytanie i objaśnianie arcydzieł literatury polskiej w wyjątkach, w I. półroczu podług Wypisów Tarnowskiego-Wójcika cz. I., w II. półroczu według Wypisów Tarnowskiego-Próchnickiego cz. II. W całości czytano: Felińskiego „Barbarę Radziwiłłównę“, Mickiewicza „Wallenroda“, Malczewskiego „Maryę“, Fredry „Śluby panieńskie“, Słowackiego „Lillę Wenedę“. b) Historya literatury od Niemcewicza do Słowackiego włącznie. c) Deklamacya i zdanie sprawy z lektury domowej. d) Wypracowania stylistyczne, 5 na półrocze, przeważnie domowe.

5. **Język niemiecki.** 4 godź. tygodn. — Na podstawie Wypisów Petelenza-Wernera wzięto historyę literatury aż do r. 1794 i czytano odpowiednie ustępy. Prywatnie przeczytano: Lessinga: Minna von Barnhelm; Goethego: Hermann und Dorothea, Götz von Berlichingen.

Zadania co miesiąc naprzemian domowe i szkolne.

6. **Historya i Geografia.** 3 godź. tygodn. Historya nowożytna z uwzględnieniem dziejów wewnętrznych Europy i geografii aż do najnowszych czasów podług książki Gindelego w tłóm. Markiewicza.

7. **Matematyka.** 3 godź. tygodn. Rozkład godzin jak w kl. VI. a) Arytmetyka: Równania kwadratowe o jednej i dwóch niewiadomych, tudzież równania wyższych stopni dające się sprowadzić na równania kwadratowe; równania odwrotne, przestępne i nieoznaczone I. stopnia. Szeregi. Rachunek procentu składanego i rachunek rent. Kombinacye i wzór Newtona. — b) Geometrya: Trygonometrya. Zastosowanie algebry do geometryi i analityka płaska.

Książki: Dziwiński, Zasady algebry; Močnik-Stanecki, Geometrya dla wyższych klas; logarytmy Adama.

Zadania i ćwiczenia jak w kl. V.

8. **Fizyka.** 3 godź. tygodn. Uzupełnienie nauki z niższego gimnazyum o ogólnych własnościach ciał. Mechanika. Nauka o cieple. Chemia.

Książki; Fizyka Dra Tomaszewskiego i Kaweckiego; Chemia Dra Tomaszewskiego.

9. **Propedeutyka filozofii.** 2 godź. tygodn. Logika, podług książk: Kozłowskiego.

KLASA VIIIa+b.

1. **Religia** 2 godź. tygodn. Historya kościelna podług książki Robitscha w tłóm pol. Jachimowskiego.
2. **Język łaciński.** 5 godź. tygodn. a) Lektura: (4 godż.). W oddź. *a*: Horatius: Carm. I. 1, 2, 3, 11, 12, 14, 20, 22, 24, 31, 34, 37. — II. 1, 3, 6, 7, 10, 14, 16, 17, 20, — III. 1, 3, 5, 7, 12, 15. — Epod. 2, 7, 9. — Sat. I. 1, 6, 9. — II. 6. — Epist. I. 1, 10. -- Tacitusi Annales I. 1 -15; 72 81. II. 27—43; 53—61; 69—83, — III. 1—19. — W oddź. *b*: Horatius: Carmin. I. 1, 2, 3, 10, 11, 14, 22, 24, 31, 34, 35; — II. 2, 3, 6, 10, 13, 14, 15, 16, 18, 20; III. 2, 8, 18, 30; — IV. 3, 5, 7. — Carm. Saecul. — Epod. 2, 13. — Satir. I. 1, 9; — Epistol. I. 10. (wyd. M. Sasa). — Tacitus Annal. I. 1 —15; 72—81; II. 27—43; 53—61; 69—75. (wyd. Müllera).

   b) Ćwiczenia gramatyczno-stylistyczne na podstawie lektury (1 godź.). — Zadania jak w kl. V.
3. **Język grecki.** 5 godz. tygodn. Lektura: Plato: Apologia. Kryton; Sofoklesa Edyp Król. — Zadania jak w kl. V
4. **Język polski.** 3 godź. tygodn. Czytanie arcydzieł literatury narodowej od Krasińskiego do Szujskiego z uwagami historyczno-literackiemi i poglądem na czasy najnowsze — na podstawie cz. II. Wypisów Tarnowskiego. i Próchnickiego. — W II. półroczu powtarzanie historyi literatury od czasów najdawniejszych. Lektura prywatna: Krasińskiego „Przedświt“, Korzeniowskiego „Mnich“, Szujskiego „Wallas“, Szekspira „Macbeth“.

   Zadania jak w kl. VII.
5. **Język niemiecki.** 4 godź. tygodn. Czytano Goethego Torquato Tasso, Schiller'a Wallenstein, Braut von Messina. Na podstawie Wypisów Petelenza-Wernera wzięto historyą literatury aż do czasów najnowszych. Prywatnie czytano ważniejsze utwory epoki klasycznej, nie-

które dramaty Grillparzer'a, Kleista, Körnera. — Zadania jak w kl. VII.

6. **Historya i Geografia.** 3 godz. tygodn. W I. półr.: Dzieje monarchii austryacko-węgierskiej z uwzględnieniem związku ich z dziejami powszechnemi. — W II. półr. Geografia i statystyka monarchii austryacko-węgierskiej podług książki Hannaka-Lenieka i powtórzenie historyi greckiej i rzymskiej.

7. **Matematyka.** 2 godź. tygodn. Powtórzenie materyału przerobionego w 3 poprzednich klasach, głównie przez rozwiązywanie licznych zagadnień.

Zadania i książki jak w kl. VII.

8. **Fizyka.** 3 godz. tygodn. Elektryczność i magnetyzm. Ruch falowy. Akustyka, optyka i zasady astronomii podług książki Kaweckiego i Tomaszewskiego.

9. **Propedeutyka filozofii.** 2 godź. tygodn. Psychologia empiryczna według książki Crügera (Sawczyńskiego).

Nauki nadobowiązkowe.

1. **Historya kraju rodzinnego** w 7 oddziałach klasowych, po godzinie w tygodniu, w kl. VIIa+b w płr. 2. po 2 godź. tygodn., a w kl. VIIIa+b w płr. 1. po godź. tygodn.

W kl. III. Dzieje Polski do końca XV. w.

W kl. IVa+b. Dzieje do końca XVIII. w.

W kl. VIIa+b. Dzieje Polski do r. 1648 podług książki Lewickiego.

2. **Język francuski** w 3 oddziałach po 2 godź. tygodn.

Oddział I. Czytanie, tłómaczenie i uczenie się na pamięć małych anegdotek. Nauka gramatyczna na podstawie „Gramatyki praktycznej Erarda-Ciechomskiego". Ćwiczenia piśmienne szkolne i domowe.

Oddział II. Czytanie, tłómaczenie, uczenie się na pamięć i opowiadanie mniejszych ustępów z Wypisów Świtkowskiego. Z gramatyki: Rzeczownik nieokreślony, określony, w znaczeniu cząstkowem itd. przymiotniki i określniki, zaimki. Ćwiczenia piśmienne w każdej lekcyi.

Oddział III. Czytanie, tłómaczenie, opowiadanie większych ustępów. Powtórzenie gramatyki. Słowo, używanie i zgoda czasów, forma bierna i zwrotna. Zadania piśmienne domowe i szkolne.

3. **Śpiew** w 2 oddziałach po 2 godź. tygodn. Śpiew chóralny.
4. **Rysunki** w 3 oddziałach.

Oddział I. Uczniowie rysowali ornamenta płaskie geometrycznej natury z wzorów Fallenböcka, rysowane przez nauczyciela na tablicy z objaśnieniem o proporcyach; rysowanie na zeszytach z wolnej ręki.

Oddział II. Uczniowie rysowali ornamenta płaskie z wzorów prof. Steigla, rysowane przez nauczyciela na tablicy z objaśnieniem o proporcyach; rysowanie na zeszytach z wolnej ręki.

Oddział III. Przeważnie rysowali ornamenta z wzorów. Zdolniejsi uczniowie rysowali głowy także z wzorów i ornamenta z gipsu z objaśnieniem na tablicy o budowie głowy ludzkiej.

5. **Kaligrafia** w 2 oddziałach po 1 godzinie tygodn. Pismo zwyczajne łacińskie podług metody Piórkiewicza i niemieckie podług metody Nowickiego.
6. **Stenografia** w 2 oddziałach po 1 godź. tygodn.

Oddział I. Znaki stenograficzne, łączenie ich bezpośrednie, tworzenie wyrazów, partykuły, skrócenia stałe (znaczniki), skrócenia oparte na związku gramat. i logicznym.

Oddział II. Powtarzanie skróceń; ćwiczenia praktyczne.

7. **Gimnastyka.** 4 godz. tygodn. w „Sokole".

III

TEMATY PRAC PISMIENNYCH.

a) **W języku polskim.**

Klasa Va. — 1 Sen o ojczyźnie (Opowiadanie podług „Latarnika" H. Sienkiewicza). — 2. Ostatni z Horeszków (Opowiadanie podług II. ks. „Pana Tadeusza"). — 3. Litwa w r. 1812. (podług I. ks. „Pana Tadeusza"). — 4. Czyny Tadeusza w bitwie z Moskalami (podług IX. ks. „Pana Tadeusza"). – 5. Postać

Gerwazego w „Panu Tadeuszu". — 6. Pogrzeb u pogańskich Litwinów (podług „Grażyny" A. Mickiewicza). — 7. Swaty pana Mohorta (podług poematu W. Pola). — 8. Obraz puszczy białowiezkiej (podług H. Sienkiewicza). — 9. Wieś polska — podług „Wiesława" K. Brodzińskiego. - 10. Bitwa pod Cecorą — podług szkicu J. Szujskiego. — 11. Opis Wawelu — na wzór „Malborga" St. Tarnowskiego. — 12. Obraz wiosny — na podstawie „Wiosny" T. Lenartowicza. — 13. Piękność ziemi polskiej na podstawie czytanych elegij Kl. Janickiego i K. Gaszyńskiego. — 14. Jakie przymioty charakteru posiada Cześnik w „Zemście" Al. Fredry.

Klasa Vb. — 1. Opis miejsca, w którem spędziłem wakacye. — 2. Opisać zdarzenie, wskutek którego Leon Borowski wystąpił z „bandy albeńskiej". — 3. Widok z kopca Kościuszki. — 4. Bitwa Litwinów z Krzyżakami według „Grażyny" Mickiewicza. — 5. Dzieje zamku Horeszków według „Pana Tadeusza". — 6. Przebieg sporu o Kusego i Sokoła według „Pana Tadeusza". — 7. Rehabilitacya Jacka Soplicy według „Pana Tadeusza". — 8. Miltyades, zbawca Aten według „Maratonu" Ujejskiego. — 9. Korzyści i szkody ognia. — 10. Opis zamku Krzyżaków w Malborgu według St. Tarnowskiego. — 11. Cecora i Chocim. Streszczenie szkicu historycznego Józefa Szujskiego. — 12. Treść satyry Krasickiego p. t. „Marnotrawstwo". — 13. Opis majówki według Ig Chodźki. — 14. Papkin w poselstwie u Rejenta.

Klasa VI. — 1. Język a miecz. Porównanie według podanej dyspozycyi. — 2. Tok myśli w wierszu Kochanowskiego: „Nie fortunie, lecz cnocie ufać trzeba". — 3. Charakterystyka Antenora w „Odprawie posłów greckich". — 4. Na co szczególnie uważać powinien młodzieniec podczas swej podróży do obcych krajów? Na podstawie Reya „Żywota człowieka poczciwego". — 5. Zalety dworzanina według Łukasza Górnickiego. — 6. Charakterystyka Jugurty według Sallustyusza. – 7. Tok myśli w sejmowem kazaniu Skargi: „O monarchii i królestwie". — 8. Prawdziwa a fałszywa przyjaźń. Porównanie według podanej dyspozycyi. — 9. Wyjaśnić znaczenie przysłowia: „Ut sementem feceris, ita metes". — 10. Ogród a szkoła. Porównanie według podanych wskazówek. — 11. Wychowanie Mikołaja Doświadczyńskiego i jego skutki według Krasickiego. — 12. Tok myśli w satyrze Krasickiego: „Przestroga młodemu". — 14. Burza a wojna. Porównanie według podanej dyspozycyi. — 14. Podkomorzy i Starosta w „Powrocie posła“ Niemcewicza, a Podkomorzy i Starosta w komedyi Bogusławskiego: „Dowód wdzięczności narodu“.

Klasa VIIa. — 1. Dlaczego nieznajomość przyszłości jest dla nas korzystniejsza, aniżeli jej znajomość? — 2. Charakterystyka Walerego z „Powrotu posła“ Niemcewicza. — 3. Romantyczność podług Morawskiego i Brodzińskiego. — 4. Treść i znaczenie „Farysa“ A. Mickiewicza. — 5. Rozprawa na temat dowolny przez nauczyciela zatwierdzony. — 6. Aldona z „Wallenroda“ Mickiewicza, a „Marya“ z powieści Malczewskiego. (Charakterystyka porównawcza). — 7. Charakterystyka jednej z postaci w „Ślubach panieńskich“ Al. Fredry. — 8. Rozbiór jednej z mniejszych komedyj Fredry. — 9. Kirkor z „Balladyny“, a Lech z „Lilli Wenedy“ (Charakterystyka porównawcza). — 10. Mowa na temat dowolny przez nauczyciela zatwierdzony.

Klasa VIIb. — 1. Rozwinąć myśl Horacyusza: Quid sit futurum cras, fuge quaerere“. — 2. Charakterystyka Szarmanckiego z „Powrotu posła“ Niemcewicza. — 3. Źródła polskiej poezyi romantycznej. — 4. Tok myśli w „Odzie do młodości“ Mickiewicza. — 5. Rozprawa na temat dowolny przez nauczyciela zatwierdzony. — 6. Alf z „Wallenroda“ i Wacław z „Maryi“ (Charakterystyka porównawcza). — 7. Charakterystyka jednej z postaci w „Ślubach panieńskich“ Al. Fredry. — 8. Rozbiór jednej z mniejszych komedyj Fredry. — 9. Alina z „Balladyny“ a Lilla Weneda (Charakterystyka porównawcza). — 10. Mowa na temat dowolny przez nauczyciela zatwierdzony. —

Klasa VIIIa. — 1. Jaką naukę dla życia czerpiemy ze zdania Wergiliusza: „Tu ne cede malis, sed contra audentior ito“. — 2. Wina tragiczna w „Makbecie“ Szekspira. — 3. Tło historyczne „Irydyona“ Krasińskiego. — 4. Prawidła życia w „Resurrecturis“ Krasińskiego. — 5. Rozbiór dzieła w ostatnim czasie przeczytanego. — 6. Objaśnić zdanie A. M. Fredry: „Insza mądry albo rozsądny insza uczony“. — 7. Jakie wady w ustroju rzeczypospolitej wykazują pisarze polityczni polscy od Modrzewskiego do Konarskiego? — 8. Rozwinąć myśl A. Mickiewicza:

„Niech każdy jak ów Greczyn wielbi dzielność swoję:
„Mocniejszy jestem, cięższą podajcie mi zbroję“.

Klasa VIIIb. — 1. Per aspera ad astra. Wyjaśnić znaczenie tego zdania i wykazać jego prawdziwość na przykładach historycznych. — 2. Irydyon a Konrad Wallenrod. Porównanie tych utworów poetycznych pod względem myśli zasadniczej. — 3. Miecznik a Mohort. Charakterystyka porównawcza. — 4. Ateny, Rzym, Jerozolima, jako ogniska i źródła oświaty powszechnej. — 5. Charakter bohatera jednej z czytanych tragedyi Szekspira. Na podstawie lektury prywatnej. — 6. Jakie praktyczne zasady życia podaje nam Horacy w swych pismach i na czem zasadza szczęście człowieka? Na podstawie lektury tego poety. — 7. Rozwinąć myśl zawartą w dwuwierszu Brodzińskiego: „Kto garstką ziemię nosi, góry się doczeka, Z kropli za kroplą z czasem uzbiera się rzeka“. — 8. O ile słusznem jest twierdzenie Owidego: „Prisca iuvent alios, ego me nunc denique natum gratulor“?

b) W języku niemieckim.

Klasa Va. — Die Überreste der ägyptischen Baukunst. — 2. Welche Umstände begünstigten den Welthandel der Phönicier? — 3. Gedankengang des Gedichtes von Goethe: „der Zauberlehrling. — 4. Inhalt des Gedichtes von Schiller: die Bürgschaft“, — 5. Warum lieben wir unsere Heimat? — 6. Jnwiefern waren die Gesetze Lykurgs für Sparta heilsam? — 7. Die Heloten in Sparta und die Sclaven in Athen. — 8. Der Chor der Eumeniden in Schillers Dichtung: „die Kraniche des Ibykus“. — 9. Die Schlacht bei Thermopylä. — 10. Der Gedankengang des Gedichtes von Seidl „Männerwaffen.‘ — 11. Die Horatier und die Curiatier. — 12. Die letzten Zehn vom vierten Regiment. Inhalt des Gedichtes von Mosen. — 13. Wie sich die Alten die Unterwelt vorstellten.

Klasa Vb. — 1. Die Verfassung Aegyptens (nach der Schullectüre). — 2. Die Gründung Roms (nach Livius). — 3. Eine Übersetzung aus dem Polnischen. — 4. Der Sturz des medischen Reiches durch Cyrus. — 5. Der Zug der Zehntausend (nach der Schullectüre). — 6. Wann ist die Freundschaft für uns in Wahrheit ein hohes Gut (nach mitgetheilter Disposition)? — 7. Der Verrath des Orontas. — 8. Wie die Mörder des Ibykus entdeckt worden sind? — 9. Kyros des älteren Jugendjahre. — 10. Ein

Blick auf Herculanum und Pompeji (nach dem Gedichte Schillers). — 11. Cincinnatus (nach der Schullectüre). — 12. Inhaltsangabe des Gedichtes von Goethe: Das Hochzeitslied: — 13. Ovidius (nach der Lectüre).

Klasa VI. — 1. Der Empfang Telemachs am Hofe des Menelaos. — 2. Das Wasser als wohlthätiges und zerstörendes Element. — 3. Pytheas und seine Entdeckungen (nach der Lectüre). — 4. Gottfried von Bouillon im Kriegsrathe (nach dem ersten Gesange des befreiten Jerusalems von Torquato Tasso). — 5. Gedankengang des Gedichtes von Schiller „Der Kampf mit dem Drachen“. — 6. Entstehung und Gedankengang des Gedichtes von Heine „Die Lorelei.“ — 7. Das Glück von Edenhall (Inhalt und Grundgedanke). — 8. Jugurthas Fall und Gefangennahme. — 9. Bernhard von Clairvaux (nach der Schullectüre). — 10. Das Leben und ein Schiff (eine Parallele). — 11. Gedankengang und Grundgedanke der Ballade Goethes: „Der Fischer“. — 12. Warum verdient Karl der Grosse den Beinamen des Grossen. — 13. Der Schiffbruch des Aeneas.

Klasa VIIa. — 1. Siegfried im Lande der Burgunden. — 2. Des Herbstes Freuden. — 3. Ein Abenteurer des 30 jährigen Krieges (auf Grund der Lectüre). — 4. Major Fellheim. — 5. Göthes Ballade „Erlkönig“ verglichen mit Göthes Ballade Erlkönigs Tochter. — 6. Gedankengang des „Wanderers“ von Göthe. — 7. Die Burg Jaxthausen in ruhiger und bewegter Zeit. — 8. Gedankengang des Monologs der Iphigenie auf Tauris. — 9. Orestes. — 10. Über den Nutzen des Studiums der Weltgeschichte.

Klasa VIIb. — 1. Siegfrieds Tod. — 2. Die Elemente hassen das Gebild der Menschenhand. — 3. Lob der Malers (auf Grund der Lectüre). – 4. Gedrängte Inhaltsangabe des Lessing'schen Philotas. — 5. Inhaltsangabe der Bürger'schen Ballade „Lenore“. — 6. Die deutsche Literatur in den sechziger Jahren des XVIII. Jahrhunderts nach Göthes Dichtung und Wahrheit. — 7. Götz von Berlichingen und Adalbert von Weislingen. — 8. Des Odysseus Heimfahrt. — 9. Pylades. — 10. Wallensteins Ermordung.

Klasa VIIIa. — 1. Gedankengang der Horazischen Ode an Maecenas, I, 1. — 2. Der Ackerbau als der Anfang der Cultur. — 3. Burleigh, Talbot und Leicester im Rathe der Königin

Elisabeth. — 4. Frankreichs Lage vor dem Auftreten der Jungfrau von Orleans. — 5. Demetrius vor dem Reichstage in Krakau (nach Schillers Drama). — 6. Die Gewalt der Musik (nach Kleists Legende). — 7, Wie Michael Kohlhaas aus einem rechtschaffenen ein entsetzlicher Mensch wurde. — 8. Österreichs Antheil an der deutschen Literatur.

Klasa VIIIb. — 1. Gedankengang der Horazischen Ode an Maecenas I, 1. —

2. Von der Stirne heiss
Rinnen muss der Schweiss,
Soll das Werk den Meister loben,
Doch der Segen kommt von oben.

— 3. Maria Stuart im Parke von Fotheringhay. — 4. Inhaltsangabe der Götheschen Ballade vom vertriebenen und zurückkehrenden Grafen. — 5. Die Entwicklung der Cultur (nach Schillers Spaziergang). — 6. Inhaltsangabe der Tieck'schen Novelle: „Des Lebens Überfluss". — 7. Octavio und Max Piccolomini. — 8. Grillparzer bei Göthe.

EGZAMIN DOJRZAŁOŚCI W ROKU SZKOLNYM 1894/5.

1. W terminie wrześniowym (1894).

W terminie wrześniowym (1894) składało egzamin poprawczy 8. uczniów tutejszego zakładu i 7 z innych zakładów, razem 15. Uznano za dojrzałych 14, reprobowano na rok 1.

2. W terminie czerwcowym (1895).

a) **Egzamin piśmienny.**

1. **Z języka polskiego.**

W Oddziale A i C: Znaczenie teatru dla oświaty i literatury w starożytności a czasach nowszych.

W oddziale B: Wykazać wpływ literatur obcych na polską w całym jej historycznym rozwoju.

2. **Z języka niemieckiego.**

W oddziale A i C: Es sind in allgemeinen Umrissen die Kämpfe Europas mit Asien zu charakterisieren.

W oddziale B: Der Untergang des weströmischen Reiches.

3. **Z języka łacińskiego.** a) Zadanie polsko-łacińskie.

W oddziale A i C: Przetłómaczyć przysłany text polski od słów: „starożytni mawiali...“ do słów: „które tylko wspólną wszystkich pracą się utrzymuje“.

W oddziale B: Przetłómaczyć przysłany text polski od słów: „I Samnitowie niewątpliwie mieli udział...“ do słów: „poświęcam siebie, legiony i posiłki nieprzyjaciół bogom nocy i matce ziemi“.

b) Zadanie łacińsko-polskie.

W oddziale A i C: Livius, IV., 2. od słów: „Eodem tempore et consules...“ do słów: „admitti patiantur“.

W oddziale B: Cicero, II., 75. od słów: „Caput autem est in omni procuratione...“ do słów: „sed etiam omnibus opulentis populis praedixisse“.

4. **Z języka greckiego.**

W oddziale A i C: Herodot, VIII., 97, 98, 99, od słów: „Ξέρξης δὲ ὡς ἔμαθε...“ do słów: „ὡς περὶ αὐτῷ Ξέρξῃ δειμαίνοντες“.

W oddziale B: Xenofont, Cyropedya VI. 4, od słów: „Οἱ μὲν δὴ εὐξάμενοι...“ do słów: „εἰς τρὶς ἀνέπαυσε τὸ στράτευμα“.

5. **Z matematyki.**

W oddziale A i C: 1) $\log \sqrt{3x-2} + \log\sqrt{4x-7} = 1\cdot11394$.

2) Osoba A oddaje dom swój, który oszacowano na 50000 złr., za roczną rentę 3000 złr., płatną na początku każdego roku; przez ile lat pobierać będzie osoba A tę rentę, jeżeli procent składany liczymy po 5%?

3) Do walca o promieniu $r = 24\cdot35$ cm. wpisano graniastosłup prosty trójboczny; kąty podstawy graniastosłupa wynoszą: $\alpha = 55^0\ 56'$, $\beta = 44^0\ 44'\ 44''$; wysokość zaś obu brylom wspólna jest czwartą geometrycznie proporcyonalną względem boków a, b, c podstawy graniastosłupa. Obliczyć objętości graniastosłupa i walca.

W oddziale B: 1) $\frac{3}{4}\sqrt{x-y} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 5.$$

2) W jakiej szerokości geogr. stopień równoleżnika = 75 Km? (r = 6377·4 Km.). — 3) Obliczyć pierwszy wyraz i różnicę szeregu arytmetycznego, jeżeli suma trzeciego i siódmego wyrazu = 28. a iloczyn drugiego i szóstego wyrazu = 85. — 4) Na jaki procent był umieszczony kapitał, skoro się potroił w przeciągu 21 lat?

b) Egzamin ustny.

Do egzaminu ustnego zgłosiło się uczniów publicznych 57 powtarzających egzamin 3, prywatnych 2. — Świadectwo dojrzałości z odznaczeniem otrzymało uczniów publ. 5; świadectwo dojrzałości uczniów publ. 42; uczniów publ. powtarzających egzamin 2; prywatystów 2; do egz. poprawczego po feryach przypuszczono uczniów publ. 8; reprobowano na rok uczniów publ. 2 i jednego ucznia publ. powtarzające go egzamin (bez terminu.

Wykaz abituryentów,

którzy w terminie czerwcowym (r. 1895) otrzymali świadectwo dojrzałości.

1. Asnyk Włodzimierz z Poznania w W. Ks. Poznańskiem.
2. Brandt Henryk z Tarnowa w Galicyi.
3. Büttner Andrzej z Koście'nik w W. Ks. Krakowskiem.
4. Chwalibogowski Arpad z Uniszowa w Galicyi.
5. Dubil Stefan ze Żywca w Galicyi.
6. Eisen Lieber z Krakowa.
7. Eker Albert z Krakowa (z odznaczeniem).
8. Girtler Zygmunt z Krakowa.
9. Góral Józef z Łapczycy w Galicyi (z odznaczeniem).
10. Grünzweig Zygmunt z Krakowa.
11. Gutmann Józef z Krakowa.
12. Hinzinger Roman z Krakowa.
13. Horowitz Esryel z Krakowa.
14. Konopka Adam z Chrzanowa w W. Ks. Krakowskiem.
15. Korolewicz Władysław z Krakowa.
16. Krajewski Mścisław z Wiednia.
17. Krzyształowicz Kazimierz z Krakowa.
18. Lauer Izak z Krakowa (z odznaczeniem).
19. Lutwak Anselen z Kołomyi w Galicyi (z odznaczeniem).

20. Łakociński Tadeusz z Krakowa.
21. Małdziński Kazimierz z Tyczyna w Galicyi.
22. Mayzel Kazimierz z Krakowa.
23. Michałowski Ludwik z Warszawy.
24. Mokrzycki Jerzy ze Lwowa.
25. Müller Samuel z Krakowa.
26. Ottmann Włodzimierz z Krakowa.
27. Hr. Pusłowski Włodzimierz z Czarkowów w Król. Polskiem.
28. Br. Puszet Ludwik z Krakowa.
29. Pykosz Władysław z Kalwaryi Zebrzydowskiej w Galicyi.
30. Rapoport Edmund z Krakowa.
31. Reiner Rudolf z Węgrzec w W. Ks. Krakowskiem.
32. Rybacki Edward z Krzeszowic w W. Ks. Krakowskiem.
33. Siegel Samuel z Drohobycza w Galicyi.
34. Sierosławski Stanisław z Krakowa (z odznaczeniem).
35. Slęk Stefan z Krakowa.
36. Skórczewski Władysław z Krakowa.
37. Skrzyński Alexander z Wronowic w Galicyi.
38. Solman Wiktor z Tarnowa w Galicyi.
39. Süsser Abraham z Krakowa.
40. Szczaniecki Stefan z Krakowa.
41. Szczęśniak Józef z Włosienicy w Galicyi,
42. Tislowitz Izak z Krakowa.
43. Trzeciak Roman z Dąbrówki w Galicyi.
44. Türkott Józef z Uhrynowa dolnego w Galicyi.
45. Hr. Tyszkiewicz Benedykt z Paryża.
46. Westfried Eliakim z Krakowa.
47. Wisłocki Franciszek z Krakowa.
48. Wołkowicki Antoni z Przedmieścia Strzyżowskiego w Galicyi.
49. Wołkowicki Kazimierz „ „ „
50. Zagórski Julian ze Syngór na Wołyniu.
51. Zakrzewski Tadeusz z Krakowa.

V.

Wzrost zbiorów naukowych w roku szkolnym 1894/5.

a) **Biblioteka.**

I. Biblioteka nauczycieli.

Do biblioteki nauczycielskiej przybyło w ubiegłym roku szkolnym:

w dziale	tomów i zeszytów zakupionych	tomów i zeszytów darowanych	tomów i zeszytów razem
Filozofii	4	—	4
Pedagogii i szkolnictwa.	15	2	17
Filologii klasycznej	37	5	42
Języka polskiego	31	4	35
Języka niemieckiego	6	—	6
Geografii, historyi i statystyki . .	8	12	20
Matematyki	2	1	3
Nauk przyrodniczych	9	1	10
Różnej treści	11	21	32
Razem . . .	123	46	169

Nadto zakupiono 5 tablic Cybulskiego do nauki filologii klasycznej.

Do zbioru map geograficznych zakupiono: a) Br. Gustawicz, Europa w drugiej połowie XVI. wieku; b) V. Haardt, Wandkarte der Alpen (II. Schulausgabe).

Prenumerowano czasopisma: — 1) Annalen der Physik und Chemie. — 2) Ateneum. — 3) Kwartalnik historyczny — 4) Muzeum. — 5. Petermanns Mittheilungen. — 6) Verordnungsblatt. — 7) Zeitschrift f. d. österreich. Gymnasien. — 8) Zeitschrift f. d. deutschen Unterricht. — 9) Przegląd polski. — 10) Oesterreich-Ungar.-Revue.

Sprawozdań różnych zakładów naukowych w Przedlitawii nadesłano 210.

W darze otrzymała biblioteka:

1) Od Wys. Minister. Oświaty dziełko 1; 2) od Wydziału krajowego 6; 3) od Akademii Umiej. w Krakowie 12; 4) od Wys. Rady szkolnej 4; 5) od Zarządu Tow. naucz. szk. wyż. 4; 6) od

Dyrekcyi gimn. w Litomyślu 1; 7) od OO. Zmartwychwstańców 1; 8) od wydawnictwa Oesterr.-Ungar-Revue 16; 9) od W. dyrektora Brzezińskiego 1; 10) od członków grona naucz. tutejszego zakładu 23, a mianowicie: od W. dyrektora Siedleckiego 7, od pp. prof. Bystronia 4, Gustawicza 3, Pytla 2, Zawilińskiego 7.

II. Biblioteka uczniów.

Zakupiono w r. 1894/5:	1) dzieł polskich	68	w	85	tomach
	2) dzieł niemieckich	20	w	50	„
	razem dzieł	88	w	135	tomach

III. Biblioteka pomocy koleżeńskiej.

W ciągu roku szkolnego 1894/5 zakupiono 38 tomów książek szkolnych. (W ciągu roku szkolnego 1893/4 zakupiono 72 tomów książek szkolnych, a nie 30, jak błędnie wydrukowano). Z biblioteki tej korzystała znaczna liczba uczniów, jak o tem świadczą cyfry wypożyczonych w ciągu roku książek, a mianowicie: uczniom klasy I. wypożyczono 98, kl. II. 99, kl. III. 67, kl. IV 86, kl. V. 71, kl. VI. 54, kl. VII. 71, kl. VIII. 74, razem 620. Zarząd biblioteki składa serdeczne podziękowanie wszystkim ofiarodawcom za złożone dary, z których wyłącznie zasila się ta ważna dla ubogiej młodzieży biblioteka.

b) **Gabinet fizykalny.**

Do gabinetu fizykalnego zakupiono następujące przedmioty: Przyrząd diamagnetyczny, — wahadełka para — i diamagnetyczne, — mikroskop złożony, — tablicę astronomiczną Letoschka, — dwie stacye telefoniczne z 6 elementami, — zasadę maszyny dynamo-elektrycznej, — utensilia.

c) **Gabinet historyi naturalnej.**

Do gabinetu historyi naturalnej zakupiono: Z okazów wypchanych — wyjca i kota; z preparatów anat. nastrzykanych

— królika, żabę i rybę (Leuciscus); z okazów przechowanych w wyskoku — sikwę (dipunculus) i koral szlachetny; z minerałów — mały kryształ dyamentu, miedź rodzimą i okruchowiec kostny (bonebed). Prócz tego sprawiono, w miejsce z użytych, nowe materyały dmuchawkowe, jak drut platynowy, kolbki szklane, boraks i t. d.

Z darów przybyły: Słowik (Luscinia major) — od p. prof. Ant. Jońca; kawałek kryształu, pomniczek kryształowy ze soli wielickiej, magnetyt i sferosyderyt z Węgierskiej Górki, gniazdo turkucia, tudzież dziesięć sztuk drobno-krystalicznego kalcytu z Oryszkowiec w powiecie bobreckim — od synów p. prof. Bronisława Gustawicza; ułamek stalaktytu z groty Bialskiej — od p. Adama Kasparka; czaszka psa, piękny okaz — od p. bar. Ludwika Puszeta; czaszka barana z rogami — od Tadeusza Pisarskiego z kl. VI; 15 gatunków jaj ptasich (około 50 sztuk z okolicy Sokołowa w Siedleckiem) — od Witolda Szaniawskiego z kl. VII; trzy odmiany trachitu z Szczawnicy — od Ant. Lekszyckiego z kl. VI; dwie duże czarne gabloty wystawowe o pojedynczych szybach (na zbiór traw zbożowych i pastewnych) — od Władysł. Alfreda Biesiadeckiego z kl. V; siarka rodzima i ruda srebra (PbS, zawierający nieco Ag, z Lipki pod Truskawcem) — od Arnolda Bollanda z kl. IVa; sześć sztuk krzeczka (Trochosa singoriensis), z Podola — od Leona Soleckiego z kl. IVb; kilkanaście skamielin sylurskich ze Sosolówki na Podolu — od Jana Bielańskiego z kl. III; epidot z albitem, z doliny Fassa — od Salomona Horowitza z kl. III; gniewiec (Coronella laevis), z Panieńskich skał — od Pawła Stryjeńskiego z kl. Ia; duży zaskroniec i mała rozgwiazda — od Stanisława Steczki i Wincentego Kańskiego z kl. I. b.

VI.

Wykaz książek szkolnych na rok szkolny 1895/6.

Klasa I. **Religia.** Deharb-Morawski, Katechizm większy dla szkół ludowych. Lwów. 1891. — **Język łaciński.** Samolewicz, Zwięzła gramatyka języka łacińskiego. Wydanie 1. 2. i 3.

Lwów. 1893. — Steiner i Scheindler. Ćwiczenia łacińskie na I. klasę. Lwów. 1893. -- **Język polski.** Małecki, Gramatyka języka polskiego szkolna. Wyd. 8. Lwów. 1891. -- Próchnicki i Wójcik, Wypisy polskie dla I. klasy. Wyd. 1 i 2. Lwów 1892. — **Język niemiecki.** L. German i K. Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla I. klasy. Wydanie 1—3. Lwów. 1891. — **Geografia.** Benoni Tatomir, Krótki rys geografii. Wydanie 4. 5. i 6. Lwów 1894. **Matematyka.** Baraniecki, Podręcznik arytmetyki. Część I. i II. Kraków. 1894. Močnik-Maryniak, Geometrya poglądowa. Część I. Wyd. 6. Lwów. 1889. — **Historya naturalna.** Nowicki-Limbach. Zoologia. Wydanie 7. — Rostafiński, Botanika szkolna na klasy niższe. Wydanie nowe. Kraków. 1892.

Klasa II. **Religia.** Ks. Dąbrowski, Historya biblijna zakonu starego. Wydanie 1. 2. i 3. Stanisławów. 1894. **Język łaciński.** Samolewicz, Zwięzła gramatyka języka łacińskiego. Wydanie 1. 2. i 3. Lwów. 1893. — Steiner i Scheindler, Ćwiczenia łacińskie dla II. klasy. Lwów 1894. — **Język polski.** Małecki, Gramatyka języka polskiego szkolna. Wydanie 8. Lwów. 1891. — Próchnicki i Wójcik, Wypisy polskie dla II. klasy. Lwów. 1893. — **Język niemiecki.** L. German i K. Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla klasy drugiej. Wydanie 1. i 2. Lwów 1891. — **Geografia i historya powszechna.** Baranowski i Dziedzicki, Geografia powszechna. Wyd. 4—7 Lwów. 1895. — Semkowicz, Opowiadania z dziejów powszechnych. Lwów. 1893. — **Matematyka.** Baraniecki. Podręcznik arytmetyki i algebry. Część I. i II. Kraków. 1894. — Močnik-Maryniak. Geometrya poglądowa. Część I. Wyd. 6. Lwów. 1889. — **Historya naturalna.** Nowicki, Zoologia. Wydanie 6 Kraków. 1890. -- Rostafiński, Botanika szkolna na klasy niższe. Wydanie nowe. Kraków. 1892.

Klasa III. **Religia.** Ks. Dąbrowski, Historya biblijna zakonu nowego. Wydanie 1. i 2. Stanisławów. 1889. — **Język łaciński.** Samolewicz-Sołtysik, Gramatyka języka łacińskiego. Część II. Wyd. 5. i 6. Lwów. 1893. - Próchnicki, Ćwiczenia łacińskie dla klasy trzeciej. Wydanie 2. i 3. Lwów. 1893. — Cornelius Nepos. Wydanie Patočka-Zawiliński. — **Język grecki.** Fiderer, Gramatyka języka greckiego. Lwów. 1892. — Schenkl-Parylak, Ćwiczenia greckie. Wyd. 2. Wiedeń 1892.

Język polski. Małecki, Gramatyka języka polskiego. Wydanie 8. Lwów. 1891. — Czubek-Zawiliński, Wypisy polskie dla kl. III. Lwów., 1893. — **Język niemiecki.** L. German i K. Petelenz. Ćwiczenia niemieckie dla klasy trzeciej. Wyd. 1. i 2. Lwów 1892. — Petelenz, Deutsche Grammatik. Krakau· 1890. — **Geografia i historya powszechna.** Baranowski i Dziedzicki, Geografia powszechna. Wydanie 4. — 6. Lwów. 1892. — Semkowicz, Opowiadania z dziejów powszechnych. Część. II. Lwów. 1894. — Rawer, dzieje ojczyste (w druku). **Matematyka.** Baraniecki, Początki arytmetyki i algebry. Część II. i III. (w druku). — Močnik-Maryniak. Geometrya poglądowa. Część II. Wydanie 3. i 4. Lwów. 1891. — **Fizyka.** Kawecki i Tomaszewki, Fizyka dla niższych klas szkół średnich. Kraków. 1894. **Historya naturalna.** Łomnicki, Mineralogia dla niższych klas. Wydanie 2. i 3. Lwów. 1893.

Klasa IV. **Religia.** Jachimowski, Liturgika katolicka. (Podręcznik wyczerpany). — **Język łaciński.** Samolewicz-Sołtysik, Gramatyka języka łacińskiego. Część II. Wyd. 5. i 6. Lwów. 1893. — Próchnicki, Ćwiczenia łacińskie dla klasy IV. Lwów. 1888. — Caesar, Commentarii de bello gallico. Wydanie Prammer-Bednarski. — Ovidius, wydanie Sedlmayer Bednarski.—**Język grecki.** Fiderer, Gramatyka języka greckiego. Lwów. 1892. — Schenkl-Parylak, Ćwiczenia greckie. Wydanie 2. Wiedeń. 1892. — **Język polski.** Małecki, Gramatyka języka polskiego. Wydanie 8. Lwów. 1891. — Czubek-Zawiliński, Wypisy polskie dla kl. IV. Lwów. 1894. — **Język niemiecki.** L. German i K. Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla klasy czwartej. Lwów. 1891. — Petelenz, Deutsche Grammatik. Krakau. 1890.—**Geografia i historya powszechna.** Semkowicz, Opowiadania z dziejów powszechnych. Część III. (w druku). — Benoni-Majerski, Geografia austr.-węgierskiej monarchii Wyd. 2. Lwów. 1892. **Matematyka.** Zajączkowski, Początki arytmetyki i algebry. Część II. Wydanie 2. Lwów. 1891. — Močnik-Maryniak, Geometrya poglądowa. Część II. Wyd. 3. i 4. Lwów. 1891. **Fizyka.** Kawecki i Tomaszewski, Fizyka dla niższch klas szkół średnich. Kraków. 1894.

Klasa V. **Religia.** Ks. Jachimowski, Dogmatyka ogólna. Wyd. 1. i 2. Lwów. 1889. — **Język łaciński.** Livius, wydanie Zingerle-Majchrowicz. Ovidius, wydanie Sedlmayer-Bednarski. —

Samolewicz-Sołtysik, Gramatyka języka łacińskiego. Część II. Wyd. 5. Lwów. 1891. — **Język grecki.** Fiderer, Chrestomatya z pism Xenofonta. Wydanie 1. i 2. Lwów. 1894. — Homera Iliada ks. I., II. Wydanie Christ-Fischer. — Fiderer, Gramatyka języka greckiego. Lwów. 1892. Schenkl-Parylak, Ćwiczenia greckie. Wydanie 2. Wiedeń 1892. — **Język polski.** Próchnicki, Wzory poezyi i prozy do użytku szkół średnich. Lwów. 1893. — **Język niemiecki.** Petelenz und Werner, Deutsches Lesebuch für die fünfte Classe. Lwów. 1892. **Geografia i historya powszechna.** Zakrzewski, Historya powszechna. Część I. Kraków 1891. — **Matematyka.** Baraniecki. Algebra. Kraków. 1892. — Močnik-Stanecki. Geometrya dla wyższych klas. Wydanie 3. Lwów. 1889. — **Historya naturalna.** Łomnicki, Mineralogia i geologia. Wyd. III. Lwów. 1891. — Rostafiński, Botanika szkolna dla klas wyższych. Kraków. 1886.

Klasa VI. **Religia.** Ks. Jachimowski, Dogmatyka szczegółowa Wydanie 1. i 2. Lwów. 1889. — **Język łaciński.** Sallustius Jugurtha. Wyd. Linker-Klimscha-Sołtysik. — Vergilius wyd. Eichler-Rzepiński. — Cicero, Catil. I. Wydanie Nohl-Bednarski. — Samolewicz-Sołtysik, Gramatyka języka łacińskiego. Część II. Wydanie 5. Lwów 1891. — **Język grecki.** Fiderer, Chrestomatya z pism Xenofonta. Wydanie 1. i 2. Lwów. 1894. — Homera Iliada, część I. i II. Wydanie Scheindler-Sołtysik. — Herodot. Wyd. Holder. — Fiderer, Gramatyka języka greckiego. Lwów. 1892. — Schenkl-Lewicki-Parylak, Ćwiczenia greckie. Praga. 1891. — **Język polski.** Wypisy polskie Stan. Tarnowskiego i J. Wójcika. Część I. Wydanie 1. i 2. Lwów. 1894. **Język niemiecki.** Petelenz und Werner, Deutsches Lesebuch für die sechste Classe. Lwów. 1892. — **Geografia i historya powszechna.** Zakrzewski, Historya powszechna. Część I. Kraków. 1891. — Zakrzewski, Historya powszechna. Część II. Kraków. 1894. — **Matematyka.** Baraniecki, Algebra. Kraków. 1892. — Močnik-Stanecki, Geometrya dla wyższych klas. Wydanie 3. Lwów. 1889. — Logarytmy Adama. — **Historya naturalna.** Petelenz, Zoologia dla klas wyższych szkół średnich. Lwów 1892.

Klasa VII. **Religia.** Martin-Solecki, Etyka katolicka. Wydanie 1. i 2. Przemyśl 1885. — **Język łaciński.** Cicero de imperio Cn. Pompei i Cato maior (wyd. Kornitzer-Sołtysik), pro Archia poeta (wyd. Nohl-Bednarski). — Vergilius, wyd. Eichler. — Samolewicz, Gramatyka języka łacińskiego. Część II. Wydanie 5. Lwów. 1891. — **Język grecki.** Homera Odyssea, (wyd. Christ-Jezienicki). — Demostenes, wydanie Wotke-Schmidt. — Curtius-Hartel-Ćwikl ński, Gramatyka języka greckiego. Praga 1890. **Język polski.** Wypisy polskie Stan. Tarnowskiego i J. Wójcika Część I Wydanie 1. i 2. Lwów. 1894. — Wypisy polskie Stan. Tarnowskiego i Fr. Próchnickiego. Część II. Lwów. 1891. — **Język niemiecki.** Petelenz und Werner, Deutsches Lesebuch für die VII. Classe. Lwów. 1893. — **Geografia i historya powszechna.** Gindely-Markiewicz, Dzieje nowożytne. Wydanie 1. i 2. Rzeszów. 1886. — Lewicki, Zarys dziejów Polski i krajów ruskich z nią połączonych. Kraków. 1893. — **Matematyka.** Dziwiński, Zasady algebry. Lwów. 1891. — Močnik-Stanecki, Geometrya dla wyższych klas. Wydanie 3. Lwów. 1889. — Logarytmy Adama. — **Fizyka.** Kawecki i Tomaszewski, Fizyka dla wyższych klas szkół średnich. Kraków. 1892. — Tomaszewski, Chemia. — Kraków. 1892. — **Propedeutyka filozofii.** Kozłowski, Logika elementarna. Lwów. 1891.

Klasa VIII. **Język łaciński.** Horatius, wyd. M. Sasa. — Tacitus, Annales (wyd. Müllera). — Samolewicz, Gramatyka języka łacińskiego. Wydanie 4. Lwów. 1885. — **Język grecki.** Plato Apologia (wyd. Christ. Lewicki). — Laches (wyd. Kral-Tempsky). — Sofokles, Filoktet (wyd. Szubert). Homera Odyssea (wyd. Pauly-Wotke). — Curtius-Hartel-Ćwikliński, Gramatyka języka greckiego. Praga 1890. — **Język polski.** Wypisy polskie Stan. Tarnowskiego i Fr. Próchnickiego. Część. II. Lwów. 1891. — **Język niemiecki.** Petelenz und Werner, Deutsches Lesebuch für die achte Classe. Lwów. 1894. Nadto następujące dzieła: Goethego, Torquato Tasso; Schillera, Wilhelm Tell; Grillparzera, Sappho (wyd. Lichtenhelda). — **Geografia i historya powszechna.** Lewicki, Zarys dziejów Polski i krajów ruskich z nią połączonych. Kraków. 1893. — Hannak-Leniek, Historya i statystyka monarchii austr.-węg. Tarnopol 1892. — **Matematyka.**

Dziwiński, Zasady algebry. Lwów. 1891. — Močnik-Stanecki, Geometrya dla wyższych klas. Wydanie 3. Lwów. 1889. — Logarytmy Adama. — **Fizyka.** Kawecki i Tomaszewski. Fizyka dla wyższych klas szkół średnich. Kraków. 1892. — **Propedeutyka filozofii.** Lindner-Kulczyński, Wykład psychologii. Kraków. 1895.

VII.

Ćwiczenia sił fizycznych.

Oprócz ćwiczeń gimnastycznych odbywanych w 4 godzinach tygodniowo w sali Towarzystwa „Sokół“ miała młodzież sposobność brać często udział w wycieczkach w różne strony dalsze zamiejskie pod przewodnictwem profesorów w każdej porze, o ile tylko pozwalał na to czas wolniejszy i sprzyjająca pogoda. Nadto zgodził się najuprzejmiej w roku bieżącym W. prof. Dr. H. Jordan urządzać od początku maja trzy razy tygodniowo w godzinach popołudniowych zabawy w parku swoim wyłącznie dla uczniów tutejszego zakładu: młodzież korzystała licznie z tego zezwolenia, za co też Dyrekcya najszczersze składa Mu podziękowanie.

VIII.

a) Stypendya.

Stypendya pobierało 13 uczniów, a mianowicie:

Z fund.	Głowińskiego	5	ucz.	po	157·50 zł.,	razem	787·50	zł.
„	Skarbowej	1	„	„	150·00 „	„	150·00	„
„	Żalchockiego	1	„	„	115·50 „	„	115·50	„
„ „	Stupnickiego i Jankowskiego	2	„	„	200·00 „	„	400·00	„
„	I. Pitonia	1	„	„	67·00 „	„	67·00	„
„	X. J. Charbuta	1	„	„	100·00 „	„	100·00	„
„	Silbersteina	2	„	„	100·00 „	„	200·00	„
					Razem . . .		1820·00	„

b) Pomoc koleżeńska.

D o c h ó d.

Pozostało z r. 1893/4	9·07	zł.
Składki uczniów wynosiły	267·61	„
J. W. Hr. Lasocka ofiarowała	5·00	„
Tutejsza Kasa Oszczędności przesłała	25·00	„
J. W. Hr. Tyszkiewicz złożył	100·00	„
W. P. Włodek złożył	23·80	„
W. P. Kalinka złożyła	10·00	„
Razem . . .	440·48	zł.

R o z c h ó d.

Między ubogich uczniów rozdano	373·00 złr.
Na książki do biblioteki pomocy kol.	48·40 „
Pozostaje na rok szk. 1895/6	10·08 „
Razem . . .	440·48 złr.

Wszystkim szlachetnym ofiarodawcom składa niniejszem zarząd gorące podziękowanie.

IX.

STATYSTYKA ZAKŁADU

1. Frekwencya uczniów.

Z końcem r. szk. 1893/94 liczono:

ROK SZKOLNY 1893/4 — KLASA	I a	I b	II	III a	III b	IV a	IV b	V	VI a	VI b	VII a	VII b	VIII a	VIII b	Razem
Uczniów publicznych	37	34	44	31	26	25	33	41	28	31	28	32	34	35	=459
Uczniów prywatnych	1	2	4	3	2	2	2	—	1	—	—	2	—	1	= 20
Razem	38	36	48	34	28	27	35	41	29	31	28	34	34	36	=479

ROK SZKOLNY 1894/5 — KLASA	I a	I b	II a	II b	III	IV a	IV b	V a	V b	VI	VII a	VII b	VIII a	VIII b	Razem
Na początku i w ciągu roku szkolnego 1894/5 wpisało się uczniów publicznych i prywatnych	59	59	34	35	51	34	35	31	31	43	30	35	30	34	=541
Z tych było:															
Uczniów tutejszych z promocyą	—	—	29	24	42	34	20	27	26	37	27	28	27	31	=352
Repetentów tutejszych	3	5	—	—	4	—	—	1	—	3	—	2	1	1	= 20
Uczniów nowych z promocyą	52	53	5	6	4	—	11	2	2	2	3	3	2	1	=146
Repetentów obcych	4	1	—	5	1	—	4	1	3	1	—	2	—	1	= 23
Razem	59	59	34	35	51	34	35	31	31	43	30	35	30	34	=541
Z końcem r. szk. 1894/5 było:															
Uczniów publicznych	51	39	32	31	43	28	29	23	26	43	24	31	26	31	=457
Uczniów prywatnych	3	4	2	2	1	2	1	—	—	—	—	1	—	2	= 18
Razem	54	43	34	33	44	30	30	23	26	43	24	32	26	33	=475
W ciągu r. szk. 1894/5 wystąpiło	5	16	—	2	7	4	5	8	5	—	6	3	4	1	= 66
Razem	59	59	34	35	51	34	35	31	31	43	30	35	30	34	=541

2. Z końcem roku szk. 1894/5 było uczniów rodem:

	I a	I b	II a	II b	III	IV a	IV b	V a	V b	VI	VII a	VII b	VIII a	VIII b	Razem
Z Krakowa i W. Ks. Krakowskiego	30	30	16	18	18	10	10	7	8	15	10	6	15	15	=208
Z Galicyi	18	9	14	12	19	13	14	10	15	24	13	21	8	14	=204
Z Król. Polskiego	2	3	4	1	3	6	4	4	1	2	1	3	3	1	= 38
Ze Śląska austryackiego	—	1	—	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	= 3
Z Czech	2	—	—	—	1	—	—	1	—	—	—	—	—	—	= 4
Z Austryi dolnej	1	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1	= 3
Z Węgier (Spiż)	—	—	—	—	—	—	1	—	2	—	—	—	—	—	= 3
Z W. Ks Poznańskiego	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	= 2
Z Podola rosyjskiego	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1	—	—	= 2
Z Ukrainy	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	= 1
Z Kroacyi	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	= 1
Z Francyi	—	—	—	—	2	—	—	1	—	—	—	—	—	1	= 4
Z W. Ks. Badeńskiego	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	= 1
Z Westfalii	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	= 1
Razem	54	43	34	33	44	30	30	23	26	43	24	32	26	33	=475

3. Z końcem roku szk. 1894/5 było:

	I a	I b	II a	II b	III	IV a	IV b	V a	V b	VI	VII a	VII b	VIII a	VIII b	Razem
Polaków	53	42	34	33	43	30	29	23	26	43	23	32	26	33	=470
Rusinów	1	1	—	—	1	—	1	—	—	—	1	—	—	—	= 5
Razem	54	43	34	33	44	30	30	23	26	43	24	32	26	33	=475

4. Z końcem roku szk. 1894/5 było:

	I a	I b	II a	II b	III	IV a	IV b	V a	V b	VI	VII a	VII b	VIII a	VIII b	Razem
Uczniów wyznania rzymsk.-kat.	44	35	29	26	35	24	25	20	23	41	18	26	21	25	=392
„ „ grecko-kat.	1	1	—	1	1	—	1	—	—	—	1	—	—	—	= 6
„ „ ew. (augsb.)	—	—	—	1	1	—	—	—	—	1	1	—	—	—	= 4
„ „ mojżeszowego	9	7	5	5	7	6	4	3	3	1	4	6	5	8	= 73
Razem	54	43	34	33	44	30	30	23	26	43	24	32	26	33	=475

Wiek uczniów.

	ROK SZKOLNY 1894/5 KLASA I a	I b	II a	II b	III	IV a	IV b	V a	V b	VI	VII a	VII b	VIII a	VIII b	Razem
Z końcem roku szk. 1894/5 było uczniów mających lat (skończonych) 11	22	16	7	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	= 46
„ „ „ „ 12	17	18	14	11	9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	= 69
„ „ „ „ 13	9	7	6	12	12	2	1	—	—	—	—	—	—	—	= 49
„ „ „ „ 14	5	2	5	3	9	9	10	7	1	—	—	—	—	—	= 51
„ „ „ „ 15	1	—	1	3	9	11	4	10	9	5	—	—	—	—	= 53
„ „ „ „ 16	—	—	1	3	1	5	11	1	5	13	2	1	—	—	= 43
„ „ „ „ 17	—	—	—	—	4	1	3	3	6	9	8	12	6	—	= 52
„ „ „ „ 18	—	—	—	—	—	1	1	2	3	9	8	6	14	7	= 51
„ „ „ „ 19	—	—	—	—	—	1	—	—	1	4	2	7	2	12	= 29
„ „ „ „ 20	—	—	—	—	—	—	—	—	1	3	1	4	3	12	= 24
„ „ „ „ 21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2	—	2	= 6
„ „ „ „ 22	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	= 1
„ „ „ „ 23	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	= 1
Razem . . .	54	43	34	33	44	30	30	23	26	43	24	32	26	33	=475

6. Klasyfikacya uczniów.

Wynik egzam. poprawczego po feryach roku szkolnego 1893/4:	I a	I b	II	III a	III b	IV a	IV b	V	VI a	VI b	VII a	VII b	VIII a	VIII b	
Do egzaminu poprawczego przeznaczono	5	4	4	2^{2}	5^{1}	4	3	—	4	2	—	3^{1}	1	1	= 38^{4}
Otrzymało świadectwo stopnia I. . . .	3	4	4	2^{2}	5^{1}	4	3	—	4	2	—	3^{1}	1	1	= 36^{4}
„ „ „ II. . . .	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	= 2

Klasyfikacya uczniów publicznych i prywatnych	I a	I b	II a	II b	III	IV a	IV b	V a	V b	VI	VII a	VII b	VIII a	VIII b	
a) Za I. półr. roku szk. 1894/5:															
Stopień celujący	7^{1}	5^{1}	6^{1}	2	3	4^{1}	—	3	2	7	2	6	3	2	= 52^{4}
„ pierwszy	35^{2}	20	17^{1}	17^{2}	29^{1}	22^{1}	19^{1}	16^{1}	13	26	17	17	18	22	= 288^{9}
„ drugi	6	10	7	9	10^{1}	2^{1}	8	3	14	9	7	10	5^{1}	7^{2}	= 107^{5}
„ trzeci	5	5	—	3	6	2	4^{1}	4	2	1	2	1	1	—	= 36^{1}
Razem . . .	53^{3}	40^{1}	30^{2}	31^{2}	48^{2}	30^{3}	31^{2}	26^{1}	31	43	28	34	27^{1}	31^{2}	= 483^{19}

	I a	I b	II a	II b	III	IV a	IV b	V a	V b	VI	VII a	VII b	VIII a	VIII b	
b) Za II. półr. roku szk. 1894/5:															
Stopień celujący	5^{1}	5^{1}	6	2	1	5^{1}	—	2	—	7	2	6	3	2	= 46
„ pierwszy	36^{1}	22^{3}	20^{2}	18	31^{1}	17	20^{1}	13	15	28	17	21	23	29^{2}	=310
„ drugi	3	6	1	4	2	—	1	3	1	2	2	—	—	—	= 25
„ trzeci	4	2	1	—	6	—	3	3	6	2	—	—	—	—	= 27
Przeznaczono do egz. poprawczego . .	3^{1}	4	4	7^{2}	2	6^{1}	4	2	4	4	3	4^{1}	—	—	= 47
„ „ „ uzupełniającego .	—	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	= 2
Razem . . .	51^{3}	39^{4}	32^{2}	31^{2}	43^{1}	28^{2}	29^{1}	23	26	43	24	31^{1}	26	31^{2}	= 457^{18}

7. Do końca roku szkolnego 1894/5. uczęszczało na naukę.

	I a	I b	II a	II b	III	IV a	IV b	V a	V b	VI	VII a	VII b	VIII a	VIII b	
Historyi kraju rodzinnego	—	—	—	—	43	28	29	—	—	—	24	31	—	—	=155
Języka francuskiego	—	—	3	5	7	6	1	5	1	2	—	3	—	—	= 33
Rysunków	14	12	7	4	5	1	3	1	2	1	2	2	—	—	= 54
Stenografii	—	—	—	—	—	12	—	2	3	19	1	3	—	—	= 40
Kaligrafii	20	22	5	9	=	—	—	—	—	—	—	—	—	—	= 56
Śpiewu	15	11	2	5	2	2	2	1	3	2	2	1	1	—	= 49
Gimnastyki	18	24	9	7	12	2	9	3	—	3	3	5	—	—	= 95

8. Opłata uczniów.

	I a	I b	II a	II b	III	IV a	IV b	V a	V b	VI	VII a	VII b	VIII a	VIII b	
a) Całą opłatę szk po 20 złr. złożyło:															
W półroczu I.	32	21	11	14	20	13	14	14	16	15	6	14	13	15	=218
W półroczu II.	23	22	16	19	20	12	17	13	18	17	10	14	16	19	=236
b) Od całej opłaty było uwolnionych:															
W półroczu I.	24	20	21	19	30	21	19	16	15	28	22	20	16	18	=289
W półroczu II.	33	22	18	15	25	20	14	11	9	26	17	19	12	14	=255
c) Opłata szkolna wynosiła:															
W połroczu I. . . . . . złr.	640	420	220	280	400	260	280	280	320	300	120	280	260	300	=4360 zł.
W półroczu II. . . . . . złr.	460	440	320	380	400	240	340	260	360	340	200	280	320	380	=4720 zł.
Razem złr.	1100	860	540	660	800	500	620	540	680	640	320	560	580	680	=9080 zł.
d) Taksę wstępną po 2·10 złr. złożyło uczniów	56	54	6	11	5	—	15	2	6	3	3	5	2	2	=170
e) Datki na środki naukowe po 1 złr. złożyło uczniów	59	59	34	35	51	34	35	31	31	43	30	35	30	34	=541
f) Taksy wstępne wynosiły . . . złr.	117·60	113·40	12·60	23·10	10·50	—	31·50	4·20	12·60	6·30	6·30	10·50	4·20	4·20	=357·00 „
g) Z datków wpłynęło . . . . złr.	59	59	34	35	51	34	35	31	31	43	30	35	30	30	=541·00 „
Razem złr.	176·60	172·40	46·60	58·10	61·50	34·00	66·50	35·20	43·60	49·30	36·30	45·50	34·20	38·20	=898·00 „

X.

Kronika Zakładu.

Wpisy uczniów na rok szkolny 1894/5 odbywały się w ostatnich dniach sierpnia, egzamina wstępne do kl. I. dnia 30. czerwca i 1. lipca, tudzież 1. i 2. września, egzamina wstępne do klas wyższych i egzamina poprawcze 30. i 31. sierpnia, tudzież między 10. a 15. września.

Egzamin wstępny do kl. I. składało 119 uczniów, z tych reprobowano 21.

Wpisano na początku i w ciągu roku szkolnego uczniów publicznych i prywatnych 541; klasę I., II., IV., V.. VII., i VIII. podzielono każdą na dwa oddziały; zakład liczył przeto w tym roku szkolnym 14 oddziałów klasowych.

Rok szkolny rozpoczęto dnia 3. września uroczystem nabożeństwem w kościele św. Anny.

Egzamin dojrzałości poprawczy odbył się po feryach 21. września pod przewodnictwem W-go Dra L. Germana, c. k. inspektora szkół średnich.

W ciągu roku uczniowie zakładu brali udział w nabożeństwach w kościele św. Anny; dnia 4. października i dnia 19. listopada z powodu imienin Ich Ces. i Król. Apostolskich Mości Najjaśniejszego Pana i Najjaśniejszej Pani; dnia 6. maja za duszę ś. p. Cesarzowej Maryi Anny, a dnia 28. czerwca za duszę ś. p. Cesarza Ferdynanda.

Jego Eksc. c. k. Radca tajny i Namiestnik Galicyi Dr. Kazimierz hr. Badeni zaszczycił zakład odwiedzinami 6. grudnia

1894 r. i był obecny na lekcyach matematyki w kl. I. b, jęz. łacińskiego w kl. Va i VIIIa, jęz. polskiego w kl. VI. — Dnia 19. lutego 1895 zwiedził zakład JWny Wiceprezydent Rady Szkolnej Krajowej Dr. Michał Bobrzyński i był obecny na lekcyach jęz. greckiego w kl. IVa, Va, VIIIa i na historyi kraju rodzinnego w kl. VIIb. — W dniach od 20. do 28. listopada odbył lustracyę zakładu c. k. Inspektor szkół średnich WP. Dr. Ludomił German.

Dnia 1. grudnia 1894 odbył się wieczorek deklamacyjno-muzykalny, urządzony przez młodzież ku uczczeniu pamięci Adama Mickiewicza, na którym przemówił do młodzieży Dr. Antoni Kosiba.

Piśmienny egzamin dojrzałości w terminie letnim odbył się w dniach 13.—17. maja, a ustny pod przewodnictwem c. k. Dyrektora gimnazyum św. Anny WP. Dra. Leona Kulczyńskiego w dniach 4.—15. czerwca 1895.

W ciągu roku szkolnego przystępowała młodzież szkolna trzy razy do Sakramentów Pokuty i Ołtarza i odprawiła w wielkim tygodniu rekolekcye wielkanocne.

Rok szkolny zakończono dnia 29. czerwca uroczystem nabożeństwem dziękczynnem, po którem otrzymali uczniowie świadectwa za drugie półrocze roku szkolnego 1894/5.

XII.

KLASYFIKACYA UCZNIÓW

za II. półrocze roku szkolnego 1894/5.

Klasa I A.

1. **Dziurzyński Miecz.**
2. **Gąsiorek Franciszek**
3. **Grodyński Jerzy.**
4. **Szewczyk Piotr.**
5. **Szydłowski Maryan.**
6. Baliński Eugeniusz.
7. Birnbaum Juda.
8. Blumenfeld Otton.
9. Broszkiewicz Stan.
10. Ćmikiewicz Jan.
11. Danziger Chaim.
12. Englender Efroim.
13. Jahl Stanisław.
14. Jakobsohn Bernard.
15. Janotka Bogdan.
16. Jaugustyn Kazim.
17. Jaugustyn Władysł.
18. Kochański Eugen.
19. Koneczny Gustaw.
20. Kopijasz Karol.
21. Kulka Stanisław.
22. Marszałek Władysł.
23. Meisels Leon.
24. Ośniałowski Rom.
25. Parizek Józef.
26. Siellawa Józef.
27. Skępiec Czesław.
28. Spira Maurycy.
29. Stojanowski Roman.
30. Strojek Adam.
31. Stryjeński Paweł.
32. Turek Adolf.
33. Urban Piotr.
34. Du Vall Zygmunt.
35. Wachtl Jan.
36. Weiss Artur.
37. Wójcikiewicz Stan.
38. Wróbel Stefan.
39. Zawiliński Tadeusz.
40. Zdanowski Stanisł.
41. Żegestowski Zdzisł.

Pryw. **Hr. Tarnowski H.**
„ Korytko Paweł.

3 uczniów otrzymało stopień 2; 4 stopień 3; do egzaminu poprawczego po feryach przeznaczono uczniów publ. 3 i jednego prywatystę.

Klasa I. B.

1. **Dąbrycz Władysł.**
2. **Gustawicz Stanisł.**
3. **Kania Jan**
4. **Remin Władysław.**
5. **Zaczek Kazimierz.**
6. Buxbaum Izrael.
7. Drobner Stanisław.
8. Dura Maryan.
9. Gottlieb Stanisław.
10. Klein Franciszek.
11. Kołodziejczyk Jan
12. Kopff Stanisław.
13. Kozłowski Roman.
14. Króliński Stefan.
15. Landau Juda.
16. Lewicki Wiktor.
17. Matzke Władysław.
18. Michałowski Witołd.
19. Molkner Wilhelm.
20. Rudnicki Mieczysł.
21. Rudnicki Stanisław.
22. Rudnicki Zygmunt.
23. Seweryn Adam.
24. Steczko Stanisław.
25. Szurek Kazimierz.
26. Weber Henryk.
27. Zarzycki Mieczysł.

Pryw. **Malinowski Bron.**
„ Kieszkowski Gus.
„ Pryliński Leszek.
„ Smoleński Tad.

6 uczniów otrzymało stopień drugi, 2 stopień trzeci, 4 uczniom pozwolono powtórzyć egzamin z jednego przedmiotu po feryach.

Klasa II A.

1. **Buszyński Maryan.**
2. **Dziurzyński Roman.**
3. **Horowitz Samuel.**
4. **Katana Leon.**
5. **Łuniewski Antoni.**
6. **Schneider Jan.**
7. Bandrowski Jerzy.
8. Beres Rudolf.
9. Bittner Adam.
10. Cybulski Kazimierz.
11. Drobner Bolesław.
12. Finik Julian.
13. Gurski Janusz.
14. Hubert Tadeusz.
15. Janotka Maryan.
16. Jaworski Adam.
17. Krassowski Antoni.
18. Ostrowski Romuald.
19. Pawlikowski M.
20. Pryliński Adam.
21. Rapacz Henryk.
22. Rossknecht Roman.
23. Seltmann Tadeusz
24. Straszewski Jan.
25. Wisłocki Tadeusz.
26. Wodecki Zygmunt.

Pryw. Hr. Morstin Józef.
„ „ Szembek Fr.

Do egzaminu poprawczego po feryach przeznaczono uczniów 4, stopień drugi otrzymał 1, stopień trzeci 1.

Klasa II B.

1. **Korbel Stanisław.**
2. **Szydłowski Tad.**
3. Bahr Franciszek.
4. Banach Walery.
5. Bisztyga Jan.
6. Drozd Alfred.
7. Gąsiorowski H.
8. Jakubski Zygm.
9. Kisiel Alfred.
10. Kovats Wiktor.
11. Lasocki Bronisław.
12. Lipner Natan.
13. Łukaszkiewicz Z.
14. Malczewski Gustaw.
15. Sitkowski Bolesław.
16. Sokołowski Bolesł.
17. Stróżyński Antoni.
18. Szulc Antoni.
19. Uhl Konrad.
20. Welanyk Antoni.

Postęp drugi otrzymało uczniów 4, pozwolono poprawić z jednego przedmiotu 7 uczniom publicznym i 2 prywatystom.

Klasa III.

1. **Flaschen Stanisł.**
2. Banach Dyonizy.
3. Barda Franciszek.
4. Beres Artur.
5. Bielański Jan.
6. Biliński Antoni.
7. Dembowski Józef.
8. Dolański Leon.
9. Dzianott Zygmunt.
10. Freudmann Salom
11. Haller Władysław.
12. Haraschin Julian.
13. Hausser Ferdynand.
14. Hofmann Wlastym.
15. Horowitz Salomon.
16. Jarra Wacław.
17. Koch Edward
18. Kudasiewicz Teofil.
19. Marszałek Stanisł.
20. Marfiak Ferdynand.
21. Matejko Bronisław.
22. Müller Izak
23. Pszon Stanisław.
24. Rusin Władysław.
25. Ryniewicz Antoni.
26. Sikora Ludwik.
27. Skórczewski Witold.
28. Sprung Jakób.
29. Sztorc Władysław.
30. Turski Stanisław.
31. Wątorski Stanisł.
32. Wojakowski Franc.

Pryw. Zagórski Walde.

Do egzaminu uzupełniającego przypuszczono jednego ucznia publ.; do egzaminu poprawczego po feryach przeznaczono 7 uczniów publicznych; 2 uczniów publicznych otrzymało stopień drugi, a 6 uczniów publicznych stopień trzeci.

Klasa IV A.

1. **Bolland Arnold.**
2. **Blumenfeld Tadeusz**
3. **Gizowski Felix.**
4. **Herstein Samuel.**
5. **Seifter Zygmunt.**
6. Bielański Adam.
7. Bielański Antoni.
8. Dobosz Józef.
9. Dobrzyński Felix.
10. Fuchs Franciszek.
11. Grünspan Michał.
12. Jasiński Maryan.
13. Koneczny Adolf.
14. Lawner Stanisław.
15. Michałowski Eug.
16. Radwanek Karol.
17. Reicher Zygmunt.
18. Sikorski Ludwik.
19. Swolkien Wład.
20. Wilk Antoni.
21. Wilusz Eustachy.
22. Woźniakowski Ign.

Pryw. **Hr. Szembek Jan.**

Sześciu uczniom publicznym i jednemu prywatyście pozwolono składać egzamin poprawczy z jednego przedmiotu po feryach.

Klasa IV B.

1. Bochenek Mieczysł.
2. Chwalibogowski R.
3. Farbowski Ludwik.
4. Gawlik Romuald.
5. Gorzechowski Józef
6. Gyurcsak Jan.
7. Krzysztoń Wład.
8. Lustgarten Artur.
9. Łukawski Jan.
10. Mahler Ignacy.
11. Majer Wiktor.
12. Michalski Wład.
13. Pacułt Teofil.
14. Padalewski Wiktor.
15. Praetzel Artur.
16. Pułka Józef.
17. Reuss Henryk.
18. Solecki Leon
19. Zakrzewski Wacł.
20. Zopoth Stanisław.

Pryw. Kalinka Stanisł.

Do egzaminu uzupełniającego przeznaczono 1 ucznia; do egzaminu poprawczego 4 uczniów; stopień drugi otrzymał 1 uczeń; stopień trzeci 3.

Klasa V A.

1. **Hofmann Stanisław.**
2. **Lubecki Kazimierz.**
3. Boniecki Michał.
4. Faden Emanuel.
5. Falter Hirsch.
6. Jarra Rajmund.
7. Jaworowski Miecz.
8. Krzanowski Ant.
9. Kudas Cezar.
10. Limanowski Zyg.
11. Martynowicz Alex.
12. Miklaszewski Jerzy.
13. Rozmuski Stanisł.
14. Turski Maryan.
15. Tyszkiewicz Ed.

3 uczniów otrzymało stopień drugi, 3 stopień trzeci, 2 uczniom pozwolono powtórzyć egzamin z jednego przedmiotu po feryach.

Klasa V B.

1. Biesiadecki Wład.
2. Bizsak Andrzej
3. Brincska Michał.
4. Chybiński Adolf.
5. Eber Salomon.
6. Engelmann Wacł.
7. Gumiński Bolesł.
8. Immerglück Mich.
9. Karnkowski Wład.
10. Maciąg Adam.
11. Osadziński Roman.
12. Pająk Franciszek.
13. Pomiankowski Stan.
14. Sztorc Ludwik.
15. Wiktor Jan.

Stopień drugi otrzymał 1 uczeń, stopień trzeci 6 uczniów, a 4 pozwolono poprawiać z jednego przedmiotu po feryach.

Klasa VI.

1. **Bajer Józef.**
2. **Dziurzyński Tad.**
3. **Lekszycki Antoni.**
4. **Marszałek Winc.**
5. **Pawlica Władysł.**
6. **Straszewski Kazim.**
7. **Tarnowski Stanisł.**
8. Bieder Eliasz.
9. Bitner Bronisław.
10. Bogdani Roman.
11. Bogusz Witołd.
12. Czarnomski Zdzisł.
13. Czerwiński Felix.
14. Guzikowski Michał.
15. Haller Mieczysław.
16. Hoffmann Romuald.
17. Jarosz Jan.
18. Koch Władysław.
19. Komorowski Cezar.
20. Machowski Wład.
21. Majerski Alexander.
22. Matusiński Antoni.
23. Murczyński Adam.
24. Padałewski Albin.
25. Pisarski Tadeusz.
26. Rybacki Włodzim.
27. Rybakiewicz Tad.
28. Sikorski Tadeusz.
29. Skrzyński Adolf.
30. Stein Stanisław
31. Suchecki Edward.
32. Szczerbowski Karol.
33. Warczewski Józef.
34. Wilkoszewski Luc.
35. Wujcik Kazimierz.

Czterech uczniów przeznaczono do egzaminu poprawczego po feryach; 2 uczniów otrzymało stopień 2, 2 stopień trzeci.

Klasa VII A.

1. **Palarz Kazimierz.**
2. **Strojek Stanisław.**
3. Bobkowski Xawery.
4. Bóbr Adam.
5. Bogdani Wiktor.
6. Cybulski Tadeusz.
7. Dańkowski Henryk.
8. Dutki Ozyasz.
9. Filasiewicz Witołd.
10. Friedlein Stefan.
11. Hubert Zdzisław.
12. Kłak Stanisław,
13. Korolewicz Stan.
14. Magiera Michał.
15. Reich Samuel.
16. Salamon Berisch.
17. Stach Jan.
18. Wierzbicki Gustaw.
19. Żarliński Hieronim.

Do ogzaminu poprawczego po feryach przeznaczono 3 uczniów; stopień drugi otrzymało 2.

Klasa VII B.

1. **Bartman Stanisław.**
2. **Cybulski Adam.**
3. **Kosiński Józef.**
4. **Krzemień Kasper.**
5. **Laskowski Jarosł.**
6. **Sinko Tadeusz.**
7. Blumenfeld Rysz.
8. Bochenek Lucyan
9. Duchowicz Bronisł.
10. Falter Baruch.
11. Fox Felix.
12. Herlinger Maurycy.
13. Jaworowski Kazim.
14. Jeż Stanisław.
15. Kikinger Henryk.
16. Klima Teofil.
17. Kornicki Ignacy.
18. Lack Izrael.
19. Lenartowicz Jan.
20. Massalski Stefan.
21. Morajka Jakób.
22. Opolski Stanisław.
23. Rudnicki Stanisław.
24. Schlank Józef.
25. Skórczewski Bron.
26. Starschedel Otton.
27. Węgrzyn Jan.

Czterech uczniów publicznych i jednego prywatystę przeznaczono do egzaminu poprawczego po feryach.

OGŁOSZENIE.

Rok szkolny 1895/6 rozpocznie się dnia 3. września 1895.

Wpisy uczniów do gimnazyum na rok szkolny 1895/6 odbywać się będą w dniach 29., 30. i 31. sierpnia 1895 w kancelaryi zakładu.

Przy wpisie mają uczniowie tutejszego zakładu wykazać się świadectwem szkolnem z ostatniego półrocza, a uczniowie przybywający z innych gimnazyów także metryką urodzenia i potwierdzeniem dyrekcyi zakładu, w którym przedtem przebywali, że nie ma przeszkody w przyjęciu ich do zakładu innego.

Uczniowie wstępujący do klasy I. powinni wykazać się metryką, a jeżeli uczęszczali przedtem do szkół publicznych, także świadectwem z ostatniego półrocza.

Wszyscy uczniowie obowiązani są do praedłożenia świadectwą szczepienia albo rewakcynacyi, jeżeli szczepieni byli przed 1. stycznia 1893 r.

Przy wpisie każdy uczeń ma złożyć datek na zbiory naukowe w kwocie 1 złr., a nowo przybywający nadto wpisowe w kwocie 2 złr. 10 ct. w. a.

Między 1. a 15. lutego 1896 r. obowiązany jest każdy uczeń z wyjątkiem najuboższych złożyć 50 ct. na cele zabaw szkolnych.

Opłatę szkolną wynoszącą za jedno półrocze **dwadzieścia** złr. w. a. mają uczniowie kl. II—VIII. uiścić w ciągu pierwszych sześciu tygodni każdego półrocza, uczniowie zaś kl. I. w ciągu trzech miesięcy w I. półroczu, a w II. półr. w ciągu sześciu tygodni w sposób przepisany.

Egzamina wstępne do klasy I. odbywają się w dniach 30. czerwca i 1. lipca, tudzież 1. i 2. września.

Egzamina wstępne do klas wyższych i poprawcze odbędą się w dniach 29. do 31. sierpnia.

Stanisław Siedlecki,
dyrektor.