Sprawozdanie

DYREKCYI

c. k. wyższego gimnazyum

W TARNOPOLU

za rok szkolny 1895.

Niezmienniki dwóch powierzchni drugiego rzędu.
(Invariantengebilde zweier Flächen zweiter Ordnung.)

Napisał Dr. Jan Ralski.

TARNOPOL.
NAKŁADEM FUNDUSZU SZKOLNEGO.

Z drukarni St. Kossowskiego
1895.

Sprawozdanie

DYREKCYI

c. k. wyższego gimnazyum

W TARNOPOLU

za rok szkolny 1895.

Niezmienniki dwóch powierzchni drugiego rzędu.
(Invariantengebilde zweier Flächen zweiter Ordnung.)

Napisał Dr. Jan Ralski.

TARNOPOL.
NAKŁADEM FUNDUSZU SZKOLNEGO.

Z drukarni St. Kossowskiego
1895.

Niezmienniki dwóch powierzchni drugiego rzędu i ich znaczenie geometryczne,

napisał

Dr. JAN RALSKI.

Niezmienniki wyrażają własność stałą jużto danych powierzchni, jużteż innych utworów geometrycznych w pewnym związku z nimi będących — własność, która nie zależy od zmiany układu współrzędnych czyli od przekształcenia liniowego równań danych powierzchni zapomocą nowych zmiennych. Niezmienniki dzielą się na *właściwe niezmienniki* (*Invariante*), które są funkcyami współczynników form a nie zawierają zmiennych i na *współzmienniki (Covariante)*, które prócz współczynników zawierają zmienne. Współzmienniki dzielą się znów na *współzmienniki właściwe*, *przeciwzmienniki* (*Contravariante* według Sylvester'a) zwane także *formami przynależnemi* (*zugehörige Form* według Gauss'a) i *współzmienniki mieszane* zwane inaczej *międzyformami* (*Zwischenform*). Współzmienniki tem się różnią od przeciwzmienników, że jeżeli zmienne pierwszych przerabiają się zapomocą pewnego modułu przerobienia, to zmienne drugich przerabiają się zapomocą przestawionego modułu. Współzmienniki mieszane zawierają znów zmienne współzmienników właściwych i przeciwzmienników. *) Współzmienniki można uważać jako niezmienniki dwóch lub kilku form. Definicyę niezmiennika algebraicznie wyrażoną poznamy w dalszym ciągu.

*) Leçons d' algèbre supérieure. Salmon—Bazin IX. n⁰ 89, 91, 96 i 100. Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Salmon—Fiedler. XXI. Kap. 345, 353, 355.

I.

Niezmienniki jednej powierzchni drugiego rzędu

1.

Jeżeli x_1 x_2 x_3 x_4 są współrzędnemi jednorodnemi punktu w przestrzeni, u_1 u_2 u_3 u_4 współrzędnemi jednorodnemi płaszczyzny, równanie

$$f(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) = f_x = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{14} x_1 x_4 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{24} x_2 x_4 + 2a_{34} x_3 x_4 = \Sigma a_{kl} x_k x_l = 0$$

jest równaniem powierzchni drugiego rzędu. W wyrażeniu sumy wskazówki k, l, przebiegają wartości 1, 2, 3, 4, a $a_{kl} = a_{lk}$. Równaniem tej powierzchni w współrzędnych płaszczyznowych jest

$$F(u_1\ u_2\ u_3\ u_4) = F_u = \Sigma A_{kl} u_k u_l = 0,$$

gdzie współczynniki A_{kl} są minorami (podwyznacznikami trzeciego stopnia) wyznacznika

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

spełniającymi równanie

$\Delta = a_{k1} A_{k1} + a_{k2} A_{k2} + a_{k3} A_{k3} + a_{k4} A_{k4}$. Wyznacznik Δ nazywa się *rozróżnikiem (Discriminante)* formy f_x, a forma F_u *formą przynależną* tejże formy.

Jeżeli dla krótkości oznaczymy

$$a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + a_{k3} x_3 + a_{k4} x_4 = a_{kx},$$
$$A_{k1} u_1 + A_{k2} u_2 + A_{k3} u_3 + A_{k4} u_4 = A_{ku},$$

da się wyrazić

$$f_x = a_{1x} x_1 + a_{2x} x_2 + a_{3x} x_3 + a_{4x} x_4,$$
$$F_u = A_{1u} u_1 + A_{2u} u_2 + A_{3u} u_3 + A_{4u} u_4.$$

2.

W dalszym ciągu będziemy się posługiwać rachunkiem symbolicznym, polegającym na następującej zasadzie: Jeżeli jest spełnione równanie identyczne jednorodne drugiego stopnia co do ilości $b_k, b_l, b_{k'}, b_{l'}$ . .

$C_{kl}\, b_k\, b_l + C_{k'l'}\, b_{k'}\, b_{l'} + \ldots = D_{kl}\, b_k\, b_l + D_{k'l'}\, b_{k'}\, b_{l'} + \ldots,$

musi być $C_{kl} = D_{kl}$, $C_{k'l'} = D_{k'l'}$ . . . a wtenczas zamiast $b_k\, b_l, \ldots b_{k'}\, b_{l'}$ można położyć a_{kl} względnie $a_{k'l'}$ i otrzyma się równanie

$$C_{kl}\, a_{kl} + C_{k'l'}\, a_{k'l'} + \ldots = D_{kl}\, a_{kl} + D_{k'l'}\, a_{k'l'} + \ldots$$

wyrażające związek między współczynnikami formy f_x.

Naodwrót z identycznego drugiego równania wynika pierwsze. Oznaczając dla krótkości

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + a_3\, x_3 + a_4\, x_4 = a_x,$$
$$b_1\, x_1 + b_2\, x_2 + b_3\, x_3 + b_4\, x_4 = b_x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\text{ogólnie } u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + u_3\, x_3 + u_4\, x_4 = u_x,$$

możemy wyrazić formę f_x zapomocą symbolów a_x^2, b_x^2, c_x^2 . . .

Wyrażenia symboliczne realizujemy w ten sposób, że $a_k\, a_l$, $b_k\, b_l$, $c_k\, c_l$ . . . zastępujemy przez a_{kl}. W takiem znaczeniu będziemy rozumieć równania

$$f_x = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2 = \ldots$$

Przykłady przerobienia symbolicznego:

I. Wyznacznik Δ wyrażony symbolicznie przyjmuje kształt

$$\begin{vmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 \\ b_2b_1 & b_2b_2 & b_2b_3 & b_2b_4 \\ c_3c_1 & c_3c_2 & c_3c_3 & c_3c_4 \\ d_4d_1 & d_4d_2 & d_4d_3 & d_4d_4 \end{vmatrix} = a_1\, b_2\, c_3\, d_4 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

Elementa a, b, c, d są równouprawnione, dlatego mogą się nawzajem zastępować, czyli, co na to samo wychodzi, przestawiać. Za każdem przestawieniem dwóch sąsiednich elementów wyznacznik ostatni zmieni znak.

Uskuteczniwszy wszystkie przestawienia w liczbie 24, dodawszy je z należytymi znakami i podzieliwszy sumę przez 24 otrzymamy

$$\frac{1}{24} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix},$$

znacząc dla krótkości

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = (abcd)_{1234} = (abcd)$$

mamy

$$\Delta = \frac{1}{24}(abcd)^2$$

2. Chcąc wyprowadzić kształt symboliczny formy przynależnej F_u przeróbmy minor rozróżnika

$$\begin{vmatrix} a_{kk'} & a_{kl'} & a_{km'} \\ a_{lk'} & a_{ll'} & a_{lm'} \\ a_{mk'} & a_{ml'} & a_{mm'} \end{vmatrix} = (-1)^{n+n'} A_{nn'}.$$

gdzie k, l, m, n i k', l', m', n' są przestawieniami elementów 1, 2, 3, 4.

Będzie

$$\begin{vmatrix} a_k a_{k'} & a_k a_{l'} & a_k a_{m'} \\ b_l b_{k'} & b_l b_{l'} & b_l b_{m'} \\ c_m c_{k'} & c_m c_{l'} & c_m c_{m'} \end{vmatrix} = a_k b_l c_m \begin{vmatrix} a_{k'} & a_{l'} & a_{m'} \\ b_{k'} & b_{l'} & b_{m'} \\ c_{k'} & c_{l'} & c_{m'} \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(abc)_{klm}(abc)_{k'l'm'}.$$

Ponieważ $F_u = A_{1u}\, u_1 + A_{2u}\, u_2 + A_{3u}\, u_3 + A_{4u}\, u_4$, przeto wyrażając A_{kl} symbolicznie otrzymamy

$$A_{1u} = A_{11}\, u_1 + A_{12}\, u_2 + A_{13}\, u_3 + A_{14}\, u_4$$

$$= \frac{1}{6}(abc)_{234}\left[(abc)_{234}\, u_1 - (abc)_{134}\, u_2 + (abc)_{124}\, u_3 - (abc)_{124}\, u_4\right]$$

$$= \frac{1}{6}(abc)_{234}\ (abcu),$$

$$A_{2u} = -\frac{1}{6}(abc)_{134}\ (abcu), \ldots;$$

$$Fu = \frac{1}{6}(abcu)(abcu) = \frac{1}{6}(abcu)^2.$$

Oznaczając następnie

$$\frac{1}{6}(abc)_{klm}(abc)_{k'l'm'} = \alpha_n\, \alpha_{n'} = \beta_n\, \beta_{n'} = \ldots$$

można jeszcze F_u wyrazić symbolicznie w kształcie

$$F_u = u_\alpha^{\,2} = u_\beta^{\,2} = \ldots$$

tylko trzeba pamiętać, że przy realizowaniu $\alpha_k\ \alpha_k,\ \beta_k\ \beta_k, \ldots$ zastępuje się przez A_{kl}.

3.

Kładąc $x + \lambda y$ zamiast x w formie f_x i rozwijając wedle potęg λ otrzymamy przy λ wyrażenie

$$\Sigma y_k \frac{df x}{dx_k} = 2\ \Sigma a_{kl}\ x_k\ y_l,$$

które oznaczymy przez

$$2f\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

lub krótko przez $2f_{xy}$. Symbolicznie $f_{xy} = a_x\ a_y$.

Podobnie

$$\Sigma\ A_{kl}\ u_k\ v_l = F_{uv} = u_\alpha\ v_\alpha = \frac{1}{6}(abcu)(abcv).$$

Formy F_u i F_{uv} dadzą się jeszcze wyrazić w kształcie wyznaczników

$$F_u = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{18} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{22} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_2 & u_4 & 0 \end{vmatrix},\ F_{uv} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{18} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{24} & u_2 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 \end{vmatrix},$$

co łatwo sprawdzić rozwijając wyznaczniki.

4.

Jeżeli $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$, $y_1\ y_2\ y_3\ y_5$ są współrzędnemi dwóch punktów, to punkt z prostej xy ma współrzędne

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i$$

gdzie λ, μ są od siebie niezależne ilości.

Równanie

$$f_z = f_{\lambda x + \mu y} = \lambda^2 f_x + 2\lambda\mu f_{xy} + \mu^2 f_y = 0$$

wyraża, że punkt z prostej xy leży na powierzchni f, t. j. że jest punktem przecięcia się prostej xy z powierzchnią f.

Ponieważ to równanie ma dwa rozwiązania na λ, μ, zatem w ogólnym przypadku są dwa przecięcia. Jeżeli rozróżnik lewej strony równania

$$\begin{vmatrix} f_x & f_{xy} \\ f_{xy} & f_y \end{vmatrix} = f_x f_y - f_{xy}^2 = 0,$$

wtenczas oba rozwiązania są równe; to znaczy, że prosta *xy* przecina powierzchnię *f* w podwójnym punkcie czyli, że jest styczną do powierzchni *f*.

Rozróżnik ten da się wyrazić symbolicznie

$$a_x^2 b_y^2 - a_x a_y b_x b_y = \frac{1}{2}\left(a_x^2 b_y^2 + a_y^2 b_x^2 - 2a_x a_y b_x b_y\right)$$

$$= \frac{1}{2}(a_x b_y - a_y b_x)^2 = \frac{1}{2}\left[\Sigma (ab)_{kl} (xy)_{kl}\right]^2.$$

Wyznaczniki

$$(xy)_{33}, (xy)_{31}, (xy)_{12}, (xy)_{14}, (xy)_{24}, (xy)_{24}$$

są współrzędnymi promieniowymi prostej *xy* i wyrażają się zapomocą współrzędnych płaszczyzn *u*, *v* przez nią przechodzących na mocy rówaań

$$(xy)_{23} = (uv)_{14}, (xy)_{31} = (uv)_{24}, (xy)_{12} = (uv)_{34},$$
$$(xy)_{14} = (uv)_{23}, (xy)_{24} = (uv)_{31}, (xy)_{34} = (uv)_{12}.$$

Zastępując $(xy)_{kl}$ przez odpowiedne $(uv)_{k'l'}$ otrzymamy

$$\frac{1}{2}\left[\Sigma (ab)_{kl} (xy)_{kl}\right]^2 = \frac{1}{2}\left[\Sigma (ab)_{kl} (uv)_{k'l'}\right]^2 = \frac{1}{2}(abuv)^2,$$

gdyż wskazówki k', l' uzupełniają wskazówki k, l do 1, 2, 3, 4 w wyżej podany sposób.

Na przyszłość będziemy oznaczać

$$\frac{1}{2}(abuv)^2 = \varphi_{uv}.$$

Równanie $\varphi_{uv} = 0$ wyraża, że krawędź *uv* jest styczną do powierzchni *f*; wyraża zatem zbiór promieni (*Strahlencomplex* według Plücker'a) stycznych do powierzchui *f* czyli jest równaniem powierzchni *f* w współrzędnych promieniowych.

Ponieważ

$$\frac{1}{2}\left[\Sigma (ab)_{kl} (uv)_{k'l'}\right]^2 = \frac{1}{2}\Sigma (ab)_{kl} (uv)_{k'l'} \Sigma (ab)_{mn} (uv)_{m'n'}$$

$$= \frac{1}{2}\Sigma (ab)_{kl} (ab)_{mn} (uv)_{k'l'} (uv)_{m'n'},$$

przeto wykonując działania i realizując symbole mamy

$$\varphi_{uv} = \Sigma (a_{km} a_{ln} - a_{kn} a_{lm}) (uv)_{k'l'} (uv)_{m'n'},$$

gdzie również wskazówki m', n' uzupełniają wskazówki m, n do 1, 2, 3, 4.

Podobnie jak przy poprzednich formach otrzymamy

$$\varphi_{uv\,u'v'} = \Sigma\,(a_{km}\,a_{ln} - a_{kn}\,a_{lm})\,(uv')_{k'l'}\,(u'v')_{m'n'},$$

symbolicznie

$$\varphi_{uv\,u'v'} = \frac{1}{2}(abuv)(abu'v').$$

5.

Wyznacznik Δ i formy f_x, f_{xy}, F_u, F_{uv}, φ_{uv} i $\varphi_{uvu'v}$ są niezmiennikami; mianowicie wyznacznik Δ niezmiennikiem właściwym, formy f_x, f_{xy} współzmiennikami a reszta przeciwzmiennikami.

Jeżeli współrzędne punktu x, y wyrazimy zapomocą współrzędnych trzech płaszczyzn u, v, w względnie u', v', w' przezeń przechodzących, wtenczas ponieważ $x_1 = (uvw)_{234}$, $x_2 = (uvw)_{134}$, $x_3 = (uvw)_{124}$, $x_4 = (uvw)_{123}$, $x'_1 = (u'v'w')_{234} \ldots$, otrzymamy w kształcie symbolicznym

$$f_x = (auvw)^2,\ f_{xy} = (auvw)\,(au'v'w'),$$

t. j. współzmienniki sprowadzimy do kształtu przeciwzmienników. Że wyznacznik Δ i wszystkie powyższe formy są utworami niezmiennikowymi, łatwo można okazać, jeżeli je napiszemy w kształcie symbolicznym i odpowiednio przerobimy. Równocześnie okaże się, że współzmienniki można uważać jako niezmienniki wspólne form danych i formy u_x.

Niech z_1 z_2 z_3 z_4 oznaczają nowe zmienne a równania

$$\begin{aligned}
x_1 &= \xi_1 z_1 + \eta_1 z_2 + \zeta_1 z_3 + \vartheta_1 z_4,\\
x_2 &= \xi_2 z_1 + \eta_2 z_2 + \zeta_2 z_3 + \vartheta_2 z_4,\\
x_3 &= \xi_3 z_1 + \eta_3 z_2 + \zeta_3 z_3 + \vartheta_3 z_4,\\
x_4 &= \xi_4 z_1 + \eta_4 z_2 + \zeta_4 z_3 + \vartheta_4 z_4
\end{aligned}$$

niech wyrażają związek między jednemi a drugiemi zmiennemi, wtenczas przejdzie

$$a_x \text{ na } a_\xi z_1 + a_\eta z_2 + a_\zeta z_3 + a_\vartheta z_4,$$

$$b_x \text{ na } b_\xi z_1 + b_\eta z_2 \quad b_\zeta z_3 + b_\vartheta z_4 \text{ itd.}$$

Weźmy następnie jeden czynnik z kształtu symbolicznego np. (abuv) i utwórzmy odpowiedni czynnik dla form przerobionych. Ponieważ elementom a_1, b_2 u_3 . . . odpowiadają po przerobieniu a_ξ, b_η, u_ϱ . . ., przeto powyższy czynnik utworzony dla form przerobionych będzie

$$\begin{vmatrix} a_\xi & a_\eta & a_\zeta & a_\vartheta \\ b_\xi & b_\eta & b_\zeta & b_\vartheta \\ u_\xi & u_\eta & u_\zeta & u_\vartheta \\ v_\xi & v_\eta & v_\zeta & v_\vartheta \end{vmatrix} = (abcd)\,(\xi\eta\zeta\vartheta).$$

W ten sposób postępując widzimy, że każdy czynnik utworzony dla form przerobionych równa się czynnikowi form pierwotnych pomnożonemu przez wyznacznik $(\xi\eta\zeta\vartheta)$, czyli innemi słowy, każdy czynnik jest niezmiennikiem.

Z tego znów wynika, że wyznacznik $\varDelta$ i formy f_x, f_{xy} F_u . . . są niezmiennikami. Np. wyznacznik formy przerobionej

$$\frac{1}{24}\begin{vmatrix} a_\xi & a_\eta & a_\zeta & a_\vartheta \\ b_\xi & b_\eta & b_\zeta & b_\vartheta \\ c_\xi & c_\eta & c_\zeta & c_\vartheta \\ d_\xi & d_\eta & d_\zeta & d_\vartheta \end{vmatrix}^2 = \frac{1}{24}\,(\xi\eta\zeta\vartheta)^2\,(abcd)^2 = (\xi\eta\zeta\vartheta)^2\,\varDelta\,;$$

forma przynależna formy przerobionej

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_\xi & a_\eta & a_\zeta & a_\vartheta \\ b_\xi & b_\eta & b_\zeta & b_\vartheta \\ c_\xi & c_\eta & c_\zeta & c_\vartheta \\ u_\xi & u_\eta & u_\zeta & u_\vartheta \end{vmatrix}^2 = \frac{1}{6}\,(\xi\eta\zeta\vartheta)^2\,(abcu)^2 = (\xi\eta\zeta\vartheta)^2\,F_u.$$

Że każdy współzmiennik jest niezmiennikiem wspólnym formy f_x i form u_x, v_x . . ., łatwo zrozumieć bacząc na to, że każdy czynnik współzmiennika zawiera także zmienne u, v . . .

Wyznacznik $(\xi\eta\zeta\vartheta)$ nazywa się *modułem przerobienia.*

II.

Znaczenie geometryczne poznanych niezmienników.

6.

Znaczenie $\Delta = 0$.

Chcąc znaleść znaczenie geometryczne $\Delta = 0$, rozwiążmy równania

$$a_{1z} = 0, \; a_{2z} = 0, \; a_{3z} = 0, \; a_{4z} = 0.$$

Jako równania liniowe co do zmiennych z dadzą się tylko wtenczas rozwiązać, jeżeli ich wyznacznik $\Delta = 0$. Przypuśćmy dalej, że nie wszystkie minory A_{kl} są równe zeru, że np. A_{44} nie równe zeru. Odrzucając ostatnie równanie i rozwiązując trzy pierwsze otrzymamy

$$z_i = \varepsilon A_{4i},$$

gdzie ε jest dowolną ilością różną od zera. Ilość ε można tak dobrać, że będą spełnione równania

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{1k} + \varepsilon A_{41}, \\ x_2 &= a_{2k} + \varepsilon A_{42}, \\ x_3 &= a_{3k} + \varepsilon A_{43}, \\ x_4 &= \phantom{a_{3k} +{}} \varepsilon A_{44}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu tych wartości do formy f_x będzie

$$f_x = f(a_{1x}\, a_{2x}\, a_{3x}\, 0) + 2\varepsilon f\begin{pmatrix} A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 f(A_{41}\, A_{42}\, A_{43}\, A_{44})$$

Ponieważ współczynniki przy ε, ε^2 równe zeru, zostaje

$$f_x = f\,(a_{1x}\; a_{2x}\; a_{3x}\; 0) = g\,(a_{1x}\; a_{2x}\; a_{3x}),$$

gdzie $g_x =$

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2.$$

Zatem f_x da się wyrazić jako funkcya jednorodna całkowita drugiego stopnia trzech form liniowych a_{1x}, a_{2x}, a_{3x} o czterech zmiennych. Jeżeli weźmiemy jakikolwiek punkt y na powierzchni f, można okazać, że każdy punkt prostej yz leży na tej powierzchni. Każdy bowiem punkt x prostej yz ma współrzędne $x_i = \lambda y_i + \mu z_i$, gdzie λ, μ są ilości dowolne, od siebie niezależne.

Po podstawieniu tych wartości do f_x mamy

$$f_x = f(\lambda a_{1y} + \mu a_{1z}, \lambda a_{2y} + \mu a_{2z}, \lambda a_{3y} + \mu a_{3z}, 0)$$
$$= g\ (\lambda a_{1y}, \lambda a_{2y}, \lambda a_{3y}) = \lambda^2 g\ (a_{1y}, a_{3y}, a_{5y}) = 0,$$
$$\text{ponieważ } f_y = g\ (a_{1y}, a_{2y}, a_{3y}) = 0.$$

To znaczy, że powierzchnia f jest stożkiem, a punkt z wierzchołkiem tego stożka. Jeżeli zatem wyznacznik $\Delta = 0$, ale nie wszystkie minory znikają, równanie $f_x = 0$ jest równaniem stożka.

Obliczmy formę przynależną w tym przypadku. Dla dogodności rachunku połóżmy

$$a_{1x} = \xi_1 x_1 + \eta_1 x_2 + \zeta_1 x_3 + \vartheta_1 x_4\ ,$$
$$a_{2x} = \xi_2 x_1 + \eta_2 x_2 + \zeta_2 x_3 + \vartheta_2 x_4\ ,$$
$$a_{3x} = \xi_3 x_1 + \eta_3 x_2 + \zeta_3 x_3 + \vartheta_2 x_4\ ,$$

będziemy mieć

$$f_x = g\ (\xi_1 x_1 + \eta_1 x_2 + \zeta_1 x_3 + \vartheta_1 x_4, \xi_2 x_1 + \ldots)$$
$$= x_1{}^2 g_\xi + x_2{}^2 g_\eta + x_3{}^2 g_\zeta + x_4{}^2 g_\vartheta + 2 x_1 x_2 g_\xi g_\eta + \ldots$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_\xi & g_{\xi\eta} & g_{\xi\zeta} & g_{\xi\vartheta} \\ g_{\eta\xi} & g_\eta & g_{\eta\zeta} & g_{\eta\vartheta} \\ g_{\zeta\xi} & g_{\zeta\eta} & g_\zeta & g_{\zeta\vartheta} \\ g_{\vartheta\xi} & g_{\vartheta\eta} & g_{\vartheta\zeta} & g_\vartheta \end{vmatrix}.$$

Kładąc dla krótkości

$$g_{i\xi} = a_{i1}\ \xi_1 + a_{i2}\ \xi_2 + a_{i3}\ \xi_3,$$
$$g_\xi = g_{1\xi}\ \xi_1 + g_{2\xi}\ \xi_2 + g_{3\xi}\ \xi_3$$

i bacząc na równania

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{1\xi} & g_{2\xi} & g_{3\xi} \\ g_{1\eta} & g_{2\eta} & g_{3\eta} \\ g_{1\zeta} & g_{2\zeta} & g_{3\zeta} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} g_{1\xi} & g_{2\xi} & g_{3\xi} \\ g_{1\eta} & g_{2\eta} & g_{3\eta} \\ g_{1\zeta} & g_{2\zeta} & g_{3\zeta} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi'_1 & \xi'_2 & \xi'_3 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \eta'_3 \\ \zeta'_1 & \zeta'_2 & \zeta'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{\xi\xi'} & g_{\xi\eta'} & g_{\xi\zeta'} \\ g_{\eta\xi'} & g_{\eta\eta'} & g_{\eta\zeta'} \\ g_{\zeta\xi'} & g_{\zeta\eta'} & g_{\zeta\zeta'} \end{vmatrix}$$

otrzymamy minory wyznacznika Δ

$$A_{11} = \begin{vmatrix} g_\eta & g_{\eta\zeta} & g_{\eta\vartheta} \\ g_{\zeta\eta} & g_\zeta & g_{\zeta\vartheta} \\ g_{\vartheta\eta} & g_{\vartheta\zeta} & g_\vartheta \end{vmatrix} = A_{44}(\eta\zeta\vartheta)^2,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} g_{\xi\eta} & g_{\xi\zeta} & g_{\xi\vartheta} \\ g_{\zeta\eta} & g_\zeta & g_{\zeta\vartheta} \\ g_{\vartheta\eta} & g_{\vartheta\zeta} & g_\vartheta \end{vmatrix} = -A_{44}(\xi\zeta\vartheta)(\eta\zeta\vartheta)$$

i t. d. a w końcu

$$F_u = A_{44}\left[(\eta\zeta\vartheta)^2 u_1{}^2 + (\xi\zeta\vartheta)^2 u_2{}^2 + \ldots - (\eta\zeta\vartheta)(\xi\zeta\vartheta) u_1 u_2 \ldots\right]$$
$$= A_{44}\left[(\eta\zeta\vartheta) u_1 - (\xi\zeta\vartheta) u_2 + (\xi\eta\vartheta) u_3 - (\xi\eta\zeta) u_4\right]^2.$$

Wyznaczniki $(\eta\zeta\vartheta)$, $-(\xi\zeta\vartheta)$, .. są współrzędnemi punktu przecięcia się płaszczyzn $a_{1x} = o$, $a_{2x} = o$, $a_{3x} = o$ czyli współrzędnemi wierzchołka stożka z, zatem po wlicze niu $\sqrt{A_{44}}$ jako czynnika do współrzędnych jednorodnych punktu z wypadnie

$$F_u = u_z{}^2,$$

t. j. forma przynależna stożka wyraża kwadrat wierzchołka stożka.

W podobny sposób da się okazać, że gdy wszystkie minory są równe zeru, ale nie wszystkie podwyznaczniki stopnia drugiego znikają, wtenczas forma f_x da się wyrazić jako funkcya całkowita jednorodna dwóch form liniowych o czterech zmiennych, a równanie $f_x = o$ wyraża dwie płaszczyzny; gdy także podwyznaczniki drugiego stopnia równe zeru, forma f_x daje się wyrazić jako kwadrat jednej formy liniowej, a równanie $f_x = o$ wyraża jednę płaszczyznę podwójnie liczoną. W obu tych przypadkach forma przynależna jest identycznie równa zeru.

Również forma F_u, której wyznacznik równy zeru, alė nie wszystkie minory znikają, da się przedstawić jako funkcya jednorodna całkowita drugiego stopnia trzech form liniowych A_{1u}, A_{2u}, A_{3u} o czterech zmiennych, a forma przynależna wyraża kwadrat płaszczyzny, przechodzącej przez punkta dane zapomocą równań $A_{1u} = o$, $A_{2u} = o$, $A_{n3} = o$.

7.

Znaczenie geometryczne $F_u = o$.

Jak na początku podaliśmy, równanie $F_u = o$ jest równaniem powierzchni f w współrzędnych płaszczyznowych, t. j. wyraża, że płaszczyzna u spełniająca równanie $F_u = o$ jest styczną do powierzchni f. Chcąc to okazać, weźmy pod uwagę równanie $f_y f_x - f_{yx}^2 = o$ (nr 4) wyrażające stożek styczny z punktu y do powierzchni f poprowadzony. Jeżeli punkt y leży na powierzchni, wtenczas $f_y = o$, a równanie powyższe zamienia się na

$$f_{xy}^2 = (a_{1y} x_1 + a_{2y} x_2 + a_{3y} x_3 + a_{4y} x_4)^2 = o,$$

t. j. wyraża kwadrat płaszczyzny p stycznej do powierzchni f w punkcie y.

Współrzędne tej płaszczyzny są

$$a_{1y} = p_1, \quad a_{2y} = p_2, \quad a_{3y} = p_3, \quad a_{4y} = p_4,$$

a z rozwiązania tych równań wypada

$$\Delta y_1 = A_{1p}, \quad \Delta y_2 = A_{2p}, \quad \Delta y_3 = A_{3p}, \quad \Delta y_4 = A_{4p},$$

$$\Delta(p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 + p_4 y_4) = A_{1p} p_1 + A_{2p} p_2 + A_{3p} p_3 + A_{4p} p_4$$
$$= F_p = o,$$

t. j. płaszczyzna styczna spełnia równanie $F_u = o$.

Ponieważ $\Delta u_y = F_{pu}$ zatem równanie $F_{pu} = o$ jest równaniem punktu styczności płaszczyzny p z powierzchnią f.

8.

Znaczenie $f_{xy} = o$.

Punkta x, y spełniające równanie $f_{xy} = o$ i punkta przecięcia się prostej xy z powierzchnią f tworzą dwie pary punktów harmonicznych, z tego też powodu punkta x, y nazywają się punktami sprzężonymi względem powierzchni f. Aby to okazać, weźmy pod uwagę równanie

$$f_x \lambda^2 + 2 f_{xy} \lambda\mu + f_y \mu^2 = o \quad (\text{n}^{\text{r}}\ 4)$$

wyrażające punkta przecięcia się prostej xy z powierzchnią f. Rozkładając lewą stronę równania na czynniki pierwiastkowe $\alpha\lambda + \beta\mu$, $\gamma\lambda + \delta\mu$, otrzymamy $(\beta, -\alpha)$ i $(\delta, -\gamma)$ jako rozwiązania powyższego równania, $\beta x_i - \alpha y_i$, $\delta x_i - \gamma y_i$ jako współrzędne a $(\beta u_x - \alpha u_y)(\delta u_x - \gamma u_y) = o$ jako równanie punktów przecięcia się. Ostatnie równanie po wykonaniu mnożenia i po podstawieniu

$\alpha\gamma = f_x$, $\alpha\delta + \beta\gamma = f_{xy}$, $\beta\delta = f_y$ przybiera kształt

$$f_y\, u_x^2 - f_{xy}\, u_x\, u_y + f_z\, u_y^2 = o,$$

Pary punktów wyrażone równaniami

$$\begin{aligned} f_y\, u_x^2 - 2\, f_{xy}\, u_x\, u_y + f_x\, u_y^2 &= o, \\ -\, 2\, u_x\, u_y &= o \end{aligned}$$

stanowią dwie pary punktów harmonicznych, jeżeli niezmiennik wspólny powyższych równań

$$f_x \,.\, o + f_y \,.\, o - 2\, f_{xy} = o,$$

t. j. jezeli $f_{xy} = o$.

Z kształtu równania $f_{xy} = o$ poznajemy, że punkta sprzężone do punktu y są położone na płaszczyźnie p, która się nazywa płaszczyzną biegunową punktu y a naodwrót punkt y nazywa się biegunem płaszczyzny p względem powierzchni f.

Współrzędne płaszczyzny biegunowej p punktu y są wyrażone równaniami

$$a_{1y} = p_1, \quad a_{2y} = p_2, \quad a_{3y} = p_3, \quad a_{4y} = p_4;$$

rozwiązując te równania co do y_1, y_2, y_3, y_4, otrzymamy

$$\Delta\, u_y = F_{pu} = o$$

jako równanie bieguna płaszczyzny p.

Jeżeli punkt y znajduje się na powierzchni, to tylko sam do siebie iest sprzężony, gdyż w tym przypadku tylko $f_{xx} = f_x = o$.

Współrzędne punktów wspólnych powierzchni f i stożka stycznego z punktu z do powierzchni f poprowadzonego spełniają równania (nr 4)

$f_z\, f_x - f_{zx}^2 = o$ i $f_x = o$, z czego wynika $f_{zx} = o$;

t. j. płaszczyzna biegunowa punktu z przechodzi przez punkta przecięcia się stożka stycznego, którego wierzchołkiem jest punkt z, z daną powierzchnią.

Wierzchołek stożka jest sprzężony do wszystkich punktów. W tym przypadku bowiem

$$f_{zx} = g \begin{pmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11}\, a_{1z} + a_{12}\, a_{2z} + a_{13}\, a_{3z})\, a_{1x}$$
$$+ (a_{21}\, a_{1z} + a_{22}\, a_{2z} + a_{23}\, a_{3z})\, a_{2x}$$
$$+ (a_{31}\, a_{1z} + a_{32}\, a_{2z} + a_{33}\, a_{3z})\, a_{3x} = o,$$

gdyż $a_{1z} = a_{2z} = a_{3z} = o.$

9.

Znaczenie $F_{uv} = o$.

Postępując podobnie jak w poprzednim ustępie, znajdziemy, że płaszczyzny u, v spełniające równanie $F_{uv} = o$ tworzą z płaszczyznami prz chodzącemi przez krawędź uv a stycznemi do powierzchni f dwie pary płaszczyzn harmonicznych, z tego też powodu nazywają się sprzężonemi względem powierzchni F. Z równania $F_{pu} = o$ poznajemy, że płaszczyzny sprzężone do płaszczyzny p przechodzą przez jeden punkt y, którego współrzędne są

$$A_{1p} = y_1, \quad A_{2p} = y_2, \quad A_{3p} = y_3, \quad A_{4p} = y_4.$$

Te równania rozwiązane co do p_1, p_2, p_3, p_4, dają

$$\Delta p_x = f_{yx} = o$$

jako równanie, które okazuje, że punkt y jest biegunem płaszczyzny p w znaczeniu w poprzednim ustępie wyłożonem.

Jeżeli płaszczyzna p jest styczną do powierzchni f, to tylko sama do siebie jest sprzężoną, gdyż tylko $F_{pp} = F_p = o$.

Dla stożka płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek jest sprzężoną do każdej płaszczyzny. Albowiem w tym przypadku $F_u = u_z^2$, $F_{uv} = u_x v_z$ a jeżeli płaszczyzna p przechodzi przez wierzchołek z, natenczas $F_{pu} = p_z v_z = o$, gdyż $p_z = o$.

W przypadku jeżeli wyznacznik formy F_u równy zeru, ale nie wszystkie minory znikają, płaszczyzna przechodząca przez punkta $A_{1u} = o$, $A_{2u} = o$, $A_{3u} = o$ jest sprzężoną do wszystkich płaszczyzn, a każdy punkt tej płaszczyzny jest sprzężony do każdego punktu przestrzeni.

10.

Znaczenie $\varphi_{uv\,u'v'} = o$.

Jeżeli weźmiemy punkta y, z i ich płaszczyzny biegunowe p, q, wtenczas każdy punkt krawędzi pq jest sprzężony do punktu y i punktu z. Ponieważ znów dowolny punkt z' krawędzi pq jest sprzężony do punktów y i z, więc jego płaszczyzna biegunowa musi przechodzić przez prostą yz, czyli wszystkie punkta prostej yz są sprzężone do punktu z'. Zatem również każdy punkt prostej yz jest sprzężony do każdego punktu krawędzi pq. Takie proste nazywają się prostemi wzajemnie sprzężonemi względem powierzchni f.

Jeżeli równania

$$f_{yx} = a_y\, a_x = o, \quad f_{zx} = a_z\, a_x = o$$

są równaniami płaszczyzn biegunowych punktów y i z, wtenczas współrzędne promieniowe ich krawędzi przecięcia się są

$$a_y\, b_z\, (ab)_{14}, \quad a_y\, b_z\, (ab)_{24}, \quad a_y\, b_z\, (ab)_{34}, \quad \ldots$$

a równanie tej krawędzi jest

$$a_y\, b_z\, (ab\,uv) = \frac{1}{2}\,(a_y\, b_z - a_z\, b_y)\,(ab\,uv) = o,$$

jeżeli u', v' są płaszczyznami przechodzącemi przez prostą yz, wtenczas równanie powyższe przyjmie kształt

$$\frac{1}{2}\,(ab\,uv)\ \Sigma(ab)_{kl}\,(yz)_{kl} = \frac{1}{2}\,(ab\,uv)\ \Sigma(ab)_{kl}\,(u'v')_{k'l'}$$
$$= \frac{1}{2}\,(ab\,uv)\,(ab\,u'v') = \varphi_{uv\,u'v'} = o.$$

Zatem równanie $\varphi_{uv\,u'v'} = o$ jest równaniem prostych wzajemnie sprzężonych.

Prosta przecina swoją wzajemnie sprzężoną, jeżeli $\frac{1}{2}(ab\,uv)(ab\,uv) = \varphi_{uv} = o$, tj. jeżeli jest styczną do powierzchni.

Ponieważ wierzchołek stożka jest sprzężony do wszystkich punktów, więc prosta wzajemnie sprzężona do każdej prostej względem stożka przechodzi przez jego wierzchołek.

III.

Ogólne twierdzenia tyczące się jednej powierzchni.

11.

Wyznacznik formy przynależnej.

Mnożąc wyznacznik formy przynależnej przez $\varDelta$ otrzymamy

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varDelta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varDelta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varDelta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varDelta \end{vmatrix} = \varDelta^4,$$

skąd wypada

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = \varDelta^3,$$

t. j. wyznacznik formy przynależnej równa się sześcianowi wyznacznika formy pierwotnej.

12.

Forma przynależna formy przynależnej.

Jeżeli oznaczymy przez $\mathcal{A}_{11}$, $\mathcal{A}_{12}$, $\mathcal{A}_{13}$, ... minory wyznacznika formy przynależnej, t. j. jeżeli

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = A_{k1}\mathcal{A}_{k1} + A_{k2}\mathcal{A}_{k2} + A_{k3}\mathcal{A}_{k3} + A_{k4}\mathcal{A}_{k4},$$

forma przynależna formy F_u przybierze kształt

$$\mathcal{A}_{11}x_1^2 + \mathcal{A}_{22}x_2^2 + \ldots \qquad + 2\mathcal{A}_{12}x_1x_2 + \ldots$$

Chcąc obliczyć ilości $A_{11}, A_{22}, \ldots$ tworzymy iloczyn wyznaczników

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1u} & O & O & O \\ a_{2n} & \Delta & O & O \\ a_{3u} & O & \Delta & O \\ a_{3u} & O & O & \Delta \end{vmatrix},$$

czyli $(A_{11} u_1 + A_{12} u_2 + A_{13} u_3 + A_{14} u_4) . \Delta = \Delta^3 a_{1u}$.

Porównując współczynniki przy $u_1 u_2 \ldots$ otrzymamy

$$A_{11} = \Delta^2 a_{11}, \quad A_{12} = \Delta^2 a_{12}, \ldots,$$

wskutek czego forma sprzężona formy F_u będzie $\Delta^2 (a_{11} x_1{}^2 + \ldots) = \Delta^2 f_x$. Zatem forma sprzężona formy sprzężonej równa się formie pierwotnej pomnożonej przez kwadrat jej wyznacznika.

13.

Forma zbioru promieni formy przynależnej.

Postępując podobnie jak przy tworzeniu formy φ_{uv}. otrzymujemy

$$F_u F_v - F_{uv}{}^2 = \Sigma (A_{km} A_{ln} - A_{kn} A_{lm}) (uv)_{kl} (uv)_{mn}.$$

Wyznacznik $A_{km} A_{ln} - A_{kn} A_{lm}$ otrzymamy tworząc iloczyn wyznaczników

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{18} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{22} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1u} & a_{2u} & a_{3u} & a_{4u} \\ a_{1v} & a_{2v} & a_{3v} & a_{4v} \\ O & O & \Delta & O \\ O & O & O & \Delta \end{vmatrix},$$

czyli

$$\Delta \left[(A_{33} A_{44} - A_{34}{}^2)(uv)_{12} + (A_{32} A_{44} - A_{34} A_{42})(uv)_{31} + \ldots \right]$$
$$= \Delta^2 \left[(a_{11} a_{22} - a_{12}{}^2)(uv)_{12} + (a_{21} a_{13} - a_{11} a_{23})(uv)_{31} + \ldots \right].$$

Porównując współczynniki przy $(uv)_{12}, \ldots$ mamy

$$A_{33} A_{44} - A_{34}{}^2 = \Delta (a_{11} a_{22} - a_{12}{}^2),$$
$$A_{32} A_{44} - A_{42} A_{43} = \Delta (a_{21} a_{13} - a_{11} a_{23})$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

ogólnie

$$A_{km} A_{ln} - A_{kn} A_{lm} = \Delta (a_{k'm'} a_{l'n'} - a_{k'n'} a_{l'm'}).$$

Wskutek tych równań staje się

$$F_u F_v - F_{uv}^2 = \Delta \Sigma (a_{k'm'} a_{l'n'} - {}_{k'n'} a_{l'm'}) (uv)_{kl} (uv)_{mn} = \Delta \varphi_{uv}.$$

14.

Czworościan biegunowy względem powierzchni.

Biorąc dowolny punkt ξ i jego płaszczyznę biegunową $f\xi_x = p_x = o$, dowolny punkt η na płaszczyźnie p i jego płaszczyznę biegunową $f\eta_x = q_x = o$, następnie na krawędzi pq dowolny punkt ζ i jego płaszczyznę biegunową $f\zeta_x = = r_x = o$, przecinającą krawędź pq w punkcie ϑ; nadto oznaczywszy płaszczyznę $\xi\eta\zeta$, która jest płaszczyzną biegunową punktu ϑ przez s mamy tak zwany czworościan biegunowy. Wszystkie naroża ξ, η, ζ, ϑ są biegunami przeciwległych ścian, zatem wszystkie naroża i wszystkie ściany są do siebie sprzężone, a przeciwległe krawędzie są prostemi wzajemnie sprzężonemi. Analitycznie tak się to wyraża $f\xi\eta = o$ $f\xi\zeta = o$.., $F_{pq} = o$, $F_{pr} = o$,... $\varphi_{pq,rs} = o$, $\varphi_{ps,qr} = o$, $\varphi_{pr,qs} = o$.

15.

Formy f_x, F_u, φ_{uv} wyrażone zapomocą ścian, naroży i krawędzi czworościanu biegunowego.

Rozwinąwszy wyznacznik, identycznie równy zeru

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & u\xi \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & u\eta \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 & u\zeta \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & \vartheta_4 & u\vartheta \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & ux \end{vmatrix} \begin{array}{l} = (\xi\,\eta\zeta\vartheta) u_x - (\xi\eta\zeta x) u\vartheta + (\xi\eta\vartheta x) u\zeta \\ \quad - (\xi\zeta\vartheta x) u\eta + (\eta\zeta\vartheta v) u\xi = o \end{array}$$

i porównując współczynniki przy ui mamy

$$(\xi\eta\zeta\vartheta) x_i = - (\eta\zeta\vartheta x)\xi_i + (\xi\zeta\vartheta x)\eta_i - (\xi\eta\vartheta x)\zeta_i + (\xi\eta\zeta x)_i.$$

Po podstawieniu $(\xi\eta\zeta\vartheta) x_i$ zamiast x_i do f_x wypadnie $f(\xi\eta\zeta\vartheta)x = (\xi\eta\zeta\vartheta)^2 f_x = (\eta\zeta\vartheta x)^2 f\xi + (\xi\zeta\vartheta x)^2 f\eta + (\xi\eta\vartheta x)^2 f\zeta +$

$+ (\xi\eta\zeta x)^2 f\vartheta$, inne bowiem wyrazy odpadają z powodu, że $f\xi\eta = f\xi\zeta = \ldots = o$.

Ponieważ $(\xi\eta\zeta\vartheta)$ nie równe zeru i ponieważ $(\eta\zeta\vartheta x) = p_x$, $(\xi\zeta\vartheta x) = q_x, \ldots$ przybiera forma f_x kształt

$$f_x = ap_x^2 + bq_x^2 + cr_x^2 + ds_x^2.$$

Podobnież stósując identyczność

$$(pqrs)u_x - (pqru)s_x + (pqsu)r_x - (prsu)q_x + (qrsu)p_x = o$$

mamy

$$(pqrs)u_i = -(qrsu)p_i + (prsu)q_i - (pqsu)r_i + (pqru)s_i,$$

co po podstawieniu do F_u z powodu, że $F_{pq} = F_{pr} =$ daje $F(pqrs)u = (pqrs)^2 F_u = (qrsu)^2 F_p + (prsu)^2 F_q + (pqsu)^2 F_r + (pqru)^2 F_s$ czyli

$$F_u = Au\xi^2 + Bu\eta^2 + Cu\zeta^2 + Du\eta^2.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} f_x f_y - f_{xy}^2 &= (ap_x^2 + bq_x^2 + cr_x^2 + ds_x^2)(ap_y^2 + bq_y^2 + cr_y^2 + ds_y^2) \\ &\quad - (ap_x p_y + bq_x q_y + cr_x r_y + d\delta_x s_y)^2 \\ &= ab(p_x^2 q_y^2 + p_y^2 q_x^2 - 2p_x p_y q_x q_y) + \ldots \\ &= ab(p_x q_y - p_y q_x)^2 - \ldots \\ &= ab[\Sigma(pq)_{kl}(xy)_{kl}]^2 + \ldots, \end{aligned}$$

zatem

$$\begin{aligned} \varphi_{uv} &= ab[\Sigma(pq)_{kl}(uv)_{k'l'}]^2 + ac[\Sigma(pr)_{kl}(uv)_{k'l'}]^2 + \ldots \\ &= ab(pquv)^2 + ac(pruv)^2 + \ldots, \end{aligned}$$

czyli $\varphi_{uv} = \alpha(pquv)^2 + \beta(pruv)^2 + \gamma(psuv)^2 + \delta(qruv)^2 + \varepsilon(qsuv)^2 + \varkappa(rsuv)^2$.

IV.

Niezmienniki wspólne dwóch powierzchni drugiego rzędu.

16.

Niech $f_x = o$, $f'_x = o$ oznaczają dwie powierzchnie drugiego rzędu tego rodzaju, iż wyznacznik żadnej z nich nie znika. Wyznacznik, formę przynależną i formę zbioru promieni formy f'_x będziemy oznaczać przez Δ', F_u', φ'_{uv}.

Równania $\lambda f_x + \lambda' f'_x = o$ i $\varrho F_u + \varrho' F_u' = o$ dla zmiennych $\lambda, \lambda', \varrho, \varrho'$ przedstawiają układy powierzchni drugiego rzędu, z których pierwszy nazywa się pękiem a drugi gromadą powierzchni drugiego rzędu. Znajdźmy niezmienniki tych układów powierzchni.

Wyznacznikiem formy $\lambda f_x + \lambda' f_x'$ jest

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \lambda' a'_{11}, & \lambda a_{12} + \lambda' a'_{12}, & \lambda a_{13} + \lambda' a'_{13}, & \lambda a_{14} + \lambda' a'_{14} \\ \lambda a_{21} + \lambda' a'_{21}, & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{31} + \lambda' a'_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{41} + \lambda' a'_{41} & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$
$$= \Delta\lambda^4 + \Theta\lambda^3\lambda' + \Phi\lambda^2\lambda'^2 + \Theta'\lambda\lambda'^3 + \Delta''^4,$$

gdzie Θ, Φ, Θ' są wspólnymi niezmiennikami obu form. Po rozwinięciu powyższego wyznacznika wypadnie

$$\Theta = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a'_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{41} & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a'_{14} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \Phi = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{14} & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} & a'_{14} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} & a'_{14} \\ a'_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{41} & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a'_{13} & a_{14} \\ a'_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{41} & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a'_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{41} & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Chcąc wyrazić w kształcie symbolicznym Θ i Φ wyrachujmy pojedyncze wyznaczniki. N. p.

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a'_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{41} & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_1 a'_1, & a_1 a_2, & b_1 b_2, & c_1 c_2 \\ a'_2 a'_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_3 a'_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_4 a'_1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{array}{l} = a'_1 a_2 b_3 c_4 (a'abc) \\ = {}^1\!/_6\, a'_1 (abc)_{234} (a'bc) \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a_{21} & . & . & . \\ a_{31} & . & . & . \\ a_{41} & . & . & . \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 a_1, & b_1 b_2, & a'_1 a'_3, & b'_1 b'_4 \\ a_2 a_1 & . & . & . \\ a_3 a_1 & . & . & . \\ a_4 a_1 & . & . & . \end{vmatrix} \begin{matrix} = a_1 b_2 a'_3 b'_4 (aba'b') \\ = {}^1/_4 (ab)_{12} (a'b')_{34} (aba'b'). \end{matrix}$$

Obliczywszy w ten sposób wszystkie wyznaczniki i dodawszy, otrzymamy

$$\Theta = {}^1/_6 (a'abc)^2, \quad \Phi = {}^1/_4 (aba'b')^2 \quad \text{i} \quad \Theta' = {}^1/_6 (a'a'b'c')^2,$$

Θ' bowiem tylko tem się różni od Θ, że zamiast elementów kreskowanych są niekreskowane i naodwrót.

Wyznacznik formy $\lambda f_x + \lambda' f'_x$ wyrażony symbolicznie przybiera kształt

$$\begin{aligned} {}^1/_{24} (abcd)^2 \lambda^4 &+ {}^1/_6 (abca')^2 \lambda^3 \lambda' + {}^1/_4 (aba'b')^2 \lambda^2 \lambda'^2 \\ &+ {}^1/_6 (aa'b'c')^2 \lambda \lambda'^3 + {}^1/_{24} (a'b'c'd')^2 \lambda'^4. \end{aligned}$$

17.

Formę przynależną formy $\lambda f_x + \lambda' f'_x$ wyraża wyznacznik (nr 3.)

$$- \begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \lambda' a'_{11}, & \lambda a_{12} + \lambda' a'_{12}, & \lambda a_{13} + \lambda' a'_{13}, & \lambda a_{14} + \lambda' a'_{14}, & u_1 \\ \lambda a_{21} + \lambda' a'_{21} & . & . & . & u_2 \\ \lambda a_{31} + \lambda' a'_{31} & . & . & . & u_3 \\ \lambda a_{41} + \lambda' a'_{41} & . & . & . & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= F_u \lambda^3 + G_u \lambda^2 \lambda' + G'_u \lambda \lambda'^2 + F_u' \lambda'^3,$$

gdzie G_u, G'_u są formami przynależnemi wspólnemi obu form.

$$G_u = \Sigma a'_{kl} \frac{dF_u}{da_{kl}} = - \left\{ \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a'_{21} & . & . & . & u_2 \\ a'_{31} & . & . & . & u_3 \\ a'_{41} & . & . & . & u_4 \\ 0 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & . & . & . & u_2 \\ a_{31} & . & . & . & u_3 \\ a_{41} & . & . & . & u_4 \\ u_1 & 0 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & . & . & . & u_2 \\ a_{31} & . & . & . & u_3 \\ a_{41} & . & . & . & u_4 \\ u_1 & u_2 & 0 & u_4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a'_{14} & u_1 \\ a_{21} & . & . & . & u_2 \\ a_{31} & . & . & . & u_3 \\ a_{41} & . & . & . & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right\}.$$

Chcąc wyrazić G_u symbolicznie, rozwińmy wyznaczniki w nawiasie będące co do elementów kreskowanych. Każdy element kreskowany będzie pomnożony przez wyznacznik kształtu

$$\begin{vmatrix} a_{kk'} & a_{kl'} & a_{km'} & u_k \\ a_{lk'} & a_{ll'} & a_{lm'} & u_l \\ a_{mk'} & a_{ml'} & a_{mm'} & u_m \\ u_{k'} & u_{l'} & u_{m'} & 0 \end{vmatrix},$$

który przerobiony symbolicznie

$$= a_{k'} b_{l'} c_{m'} \begin{vmatrix} a_k & b_k & c_k & u_k \\ a_l & b_l & c_l & u_l \\ a_m & b_m & c_m & u_m \\ \frac{u_{k'}}{a_{k'}} & \frac{u_{l'}}{b_{l'}} & \frac{u_{m'}}{c_{m'}} & 0 \end{vmatrix} = \begin{aligned} &- u_{k'} b_{l'} c_{m'} (bcu)_{klm} \\ &+ u_{l'} a_{k'} c_{m'} (acu)_{klm} \\ &- u_{m'} a_{k'} b_{l'} (abu)_{klm} \end{aligned}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left[u_{k'}(bc)_{l'm'}(bcu)_{klm} - u_{l'}(ac)_{k'm'}(acu)_{klm} + u_{m'}(ab)_{k'l'}(abu)_{klm}\right]$$
$$= -\tfrac{1}{2}\left[u_{k'}(bc)_{l'm'}(bcu)_{klm} - u_{l'}(bc)_{k'm'}(bcu)_{klm} + u_{m'}(bc)_{k'l'}(bcu)_{klm}\right]$$
$$= -\tfrac{1}{2}(bcu)_{klm}(bcu)_{k'l'm'}.$$

Stósując to równanie, otrzymamy pierwszy wyznacznik formy G_u

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a'_{21} & . & . & . & u_2 \\ a'_{31} & . & . & . & u_3 \\ a'_{41} & . & . & . & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{aligned} &-\tfrac{1}{2} a_1'(bcu)_{234}[a'_1(bcu)_{234} - a'_2(bcu)_{134} \\ &\quad + a'_3(bcu)_{124} - a'_4(bcu)_{123}] \end{aligned}$$
$$= -\tfrac{1}{2}a'_1(bcu)_{234}(a'bcu),$$

a po dodaniu wszystkich czterech wyznaczników w ten sposób przerobionych wypadnie

$$G_u = \tfrac{1}{2}(a'bcu)[a'_1(bcu)_{234} - a'_2(bcu)_{134} + a'_3(bcu)_{124} + a'_4(bcu)_{123}]$$
$$= \tfrac{1}{2}(a'bcu)^2.$$

$G'_u = \Sigma a_{kl} \dfrac{da'_{kl}}{dF_u}$ tem się różni od G_u, iż elementa kreskowane znajdują się zamiast niekreskowanych i naodwrót; wskutek tego

$$G'_n = \tfrac{1}{2}(ab'c'u)^2.$$

Forma przynależna formy $\lambda f_x + \lambda' f'_x$ wyrażona symbolicznie będzie

$$\tfrac{1}{6}(abcu)^2\lambda^3 + \tfrac{1}{2}(aba'u)^2\lambda^2\lambda' + \tfrac{1}{2}(aa'b'u)^2\lambda\lambda'^2 + \tfrac{1}{6}(a'b'c'u)^2\lambda'^4.$$

18.

Forma zbioru promieni formy $\lambda f_x + \lambda' f'_x$ jest

$$(\lambda f_x + \lambda' f'_x)(\lambda f_y + \lambda' f'_y) - (\lambda f_{xy} + \lambda' f'_{xy})^2$$
$$= \lambda^2(f_x f_y - f_{xy}^2) + \lambda\lambda'(f_x f'_y + f_y f'_x - 2f_{xy}f'_{xy}) + \lambda'^2(f'_x f'_y + f'^2_{xy})$$
$$= \lambda^2\varphi_{uv} + \lambda\lambda'\varphi_{uv} + \lambda'^2\psi'_{uv},$$

gdzie ψ_{uv} jest wspólnym zbiorem promieni obu form.

Ponieważ $f_x f'_y + f_y f'_x - 2f_{xy}f'_{xy} = a_x^2 a'^2_y + a_y^2 a'^2_x - 2a_x a_y a'_x a'_y$

$$= (a_x a'_y - a_y a'_x)^2 = [\Sigma(aa')_{kl}(xy)_{kl}]^2 = [\Sigma(aa')_{kl}(uv)_{k'l'}]^2$$
$$= (aa'uv)^2,$$

przeto symbolicznie $\quad \psi_{uv} = (aa'uv)^2$,

a forma zbioru promieni formy $\lambda f_x + \lambda' f'_x$ wyrażona symbolicznie brzmi

$$\tfrac{1}{2}(abuv)^2\lambda^2 + \tfrac{1}{2}(aa'uv)^2\lambda\lambda' + \tfrac{1}{2}(a'b'uv)^2\lambda'^2.$$

19.

Dla formy $\varrho F_u + \varrho' F'_u$ otrzymamy łatwo wyznacznik i obie formy współzmiennikowe w kształcie symbolicznym, jeżeli w takichże wyrażeniach dla $\lambda f_x + \lambda' f'_x$ wyprowadzonych zamiast a, b, c, d, u, λ, λ' położymy oppowiednio α, β, γ, δ, x, ϱ, ϱ'.

Wyznacznik będzie

$$\tfrac{1}{24}(\alpha\beta\gamma\delta)^2\varrho^4 + \tfrac{1}{6}(\alpha\beta\gamma\alpha')^2\varrho'^3\varrho' + \tfrac{1}{4}(\alpha\beta\alpha'\beta')^2\varrho^2\varrho'^2 + \tfrac{1}{6}(\alpha\alpha'\beta'\gamma')^2\varrho\varrho'^3$$
$$+ \tfrac{1}{24}(\alpha'\beta'\gamma'\delta')^2\varrho'^4,$$

forma przynależna

$$\tfrac{1}{6}(\alpha\beta\gamma x)^2\varrho^3 + \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\alpha' x)^2\varrho^2\varrho' + \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha'\beta' x)^2\varrho\varrho'^2 + \tfrac{1}{6}(\alpha'\beta'\gamma' x)^2\varrho'^3,$$

a forma zbioru promieni

$$\tfrac{1}{2}(\alpha\beta xy)^2\varrho^2 + (\alpha\alpha'' xy)^2\varrho\varrho' + \tfrac{1}{2}(\alpha'\beta' xy)^2\varrho'^2.$$

Niektóre współczynniki przy potęgach ϱ, ϱ' znamy i tak:

$^1/_{24}(\alpha\beta\gamma\delta)^2 = \Delta^3$ jako wyznacznik formy F_u,

$^1/_6(\alpha\beta\gamma x)^2 = \Delta^2 f_x$ jako forma przynależna formy F_u,

$^1/_2(\alpha\beta xy)^2 = \Delta\varphi_{uv}$ jako forma zbioru promieni formy F_u;

podobnież $^1/_{24}(\alpha'\beta'\gamma'\delta') = \Delta'^3$, $^1/_6(\alpha'\beta'\gamma' x)^2 = \Delta'^2 f_x$,

$^1/_2(\alpha'\beta' xy)^2 = \Delta'\varphi'_{uv}$.

Łatwo obliczyć, że

$$^1/_6(\alpha\beta\gamma\alpha')^2 = \Delta^2 f\alpha' = \Lambda^2 a^2{}_{\alpha'} = {}^1/_6\Lambda^2(aa'b'c')^2 = \Lambda^2\Theta,$$

$$^1/_6(\alpha'\beta'\gamma'\alpha)^2 = \Lambda'^2\Theta.$$

Przerobiwszy symbolicznie $F_u F_v - F_{uv}{}^2 = \Delta\varphi_{uv}$ mamy

$$u_\alpha^2 v_\beta^2 - u_\alpha v_\alpha u_\beta v_\beta = {}^1/_2(u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha)^2 = {}^1/_2[\Sigma(\alpha\beta)_{kl}(uv)_{kl}]$$

$$= \Lambda\, {}^1/_2(abuv)^2 = \Lambda\, {}^1/_2[\Sigma(ab)_{kl}(uv)_{k'l'}]^2,$$

czyli

$$[\Sigma(\alpha\beta)_{kl}(xy)_{k'l'}]^2 = (\alpha\beta xy)^2 = \Lambda[\Sigma(ab)_{kl}(xy)_{kl}]^2,$$

podobnież

$$[\Sigma(\alpha'\beta')_{kl}(uv)_{kl}]^2 = \Lambda'(a'b'uv)^2.$$

Stósując powyższe identyczności otrzymamy

$$^1/_4(\alpha\beta\alpha'\beta')^2 = {}^1/_4\Lambda[\Sigma(\alpha'\beta')_{kl}(ab)_{kl}]^2 = {}^1/_4\Lambda\Lambda'(aba'b')^2 = \Lambda\Lambda'\Phi.$$

Ponieważ $^1/_2(\alpha\beta xy)^2 = {}^1/_2\Lambda[\Sigma(ab)_{kl}(xy)_{kl}]^2 = \Lambda(f_x f_y - f_{xy}{}^2)$,

zatem $$^1/_2(\alpha\beta\alpha' x)^2 = \Delta(f_x f\alpha' - f\alpha'^2{}_x) = \Delta T_x,$$

gdzie $$T_x = f_x f\alpha' - f\alpha'_x = a_x{}^2 b_{\alpha'}{}^2 - a_{\alpha'} b_{\alpha'} a_x b_x$$

$$= \Theta' f_x - a_{\alpha'} b_{\alpha'} a_x b_x,$$

lub też $$T_x = {}^1/_2(a_{\alpha'} b_x - a_x b_{\alpha'})^2.$$

Podobnie $$^1/_2(\alpha'\beta' ax)^2 = \Delta' T_x',$$

gdzie $T'_x = \Theta f'_x - a'_\alpha b'_\alpha a'_x b'_x = {}^1/_2(a'_\alpha b'_x - a'_x b'_\alpha)^2$.

W końcu oznaczamy

$$(\alpha\alpha' xy)^2 = [\Sigma(\alpha\alpha')_{kl}(xy)_{k'l'}]^2 = [\Sigma(\alpha\alpha')_{kl}(uv)_{kl}]^2 = \chi_{uv}.$$

Formę χ_{uv} otrzymamy wprost przerabiając

$$F_u F_v' + F_v F_u' - 2F_{uv}F'_{uv} = u_\alpha^2 u_{\alpha'}^2 + v_\alpha^2 u_{\alpha'}^2 - 2u_\alpha v_\alpha u_{\alpha'} v_{\alpha'}$$

$$= u_\alpha v_{\alpha'} - u_{\alpha'} v_\alpha)^2 = [\Sigma(\alpha\alpha')_{kl}(uv)_{kl}]^2 = \chi_{uv}.$$

Uwzględniwszy powyższe identyczności otrzymamy na wyznacznik, formę przynależną i formę zbioru promieni formy $\varrho F_u + \varrho' F_u$ wyrażenia:

$$\varDelta^3\varrho^4 + \varDelta^2\Theta'\varrho^3\varrho' + \varDelta\varDelta'\Phi\varrho^2\varrho'^2 + \varDelta'^2\Theta\varrho\varrho'^3 + \varDelta'^3\varrho'^4,$$

$$\varDelta^2 f_x\varrho^3 + \varDelta T_x\varrho^2\varrho' + \varDelta' T'_x\varrho\varrho'^2 + \varDelta'^2 f'_x\varrho'^3,$$

$$\varDelta\varphi_{uv}\varrho^2 + \chi_{uv}\varrho\varrho' + \varDelta'\varphi'_{vu}\varrho'^2.$$

V.

Znaczenie geometryczne niezmienników wspólnych.

20.

Znaczenie $\Theta = 0$.

Jeżeli ξ, η, ζ, ϑ oznaczają naroża czworościanu biegunowego względem powierzchni F, wtenczas F_u da się wyrazić (nr 14.).

$$F_u = A u_\xi^2 + B u_\eta^2 + C u_\zeta^2 + D u_\vartheta^2.$$

Kładąc a'_{kl} zamiast $u_k u_l$ będziemy mieć symbolicznie

$$a'_\alpha{}^2 = A a'_\xi{}^2 + B a'_\eta{}^2 + C a'_\zeta{}^2 + D a'_\vartheta{}^2.$$

Ponieważ $a'_\alpha{}^2 = \frac{1}{6}(a'abc)^2 = \Theta$, przeto

$$\Theta = Af'_\xi + Bf'_\eta + Cf'_\zeta + Df'_\vartheta.$$

Jeżeli $f'_\xi = f'_\eta = f'_\zeta = f'_\vartheta = 0$, wtenczas $\Theta = 0$.

Lub też, jeżeli p, q, r, s oznaczają ściany czworościanu biegunowego względem powierzchni f', wtenczas

$$f'_x = a'p_x^2 + b'q_x^2 + c'r_x^2 + d's_x^2, \quad (\text{n}^\text{r}\ 14),$$

z czego po podstawieniu A_{kl} zamiast $x_k x_l$ wynika

$$a'_\alpha{}^2 = a'_p{}_\alpha^2 + b'_q{}_\alpha^2 + c'_r{}_\alpha^2 + d'_s{}_\alpha^2,$$

czyli $$\Theta = a'F_p + b'F_q + c'F_r + d'F_s$$

Jeżeli $F_p = F_q = F_r = F_s = 0$, wtenczas $\Theta = 0$.

Słowami: $\Theta = 0$, jeżeli w drugą powierzchnię f' da się wpisać czworościan biegunowy względem pierwszej powierzchni f; lub też, jeżeli na pierwszej powierzchni f da się opisać czworościan biegunowy względem drugiej powierzchni f'. Podobnie się tłómaczy znaczenie $\Theta' = 0$.

21.

Znaczenie $\Phi = 0$.

Jeżeli p, q, r, s oznaczają ściany czworościanu biegunowego względem powierzchni f, można wyrazić (nr 14)

$$\varphi_{uv} = \alpha(pquv)^2 + \beta(pruv)^2 + \lambda(psuv)^2 + \delta(qruv)^2 + \varepsilon(qsuv)^2 + \varkappa(rsuv)^2.$$

Kładąc $(a'b')_{kl}$ zamiast $(uv)_{kl}$ otrzymamy symbolicznie

$$\tfrac{1}{2}(aba'b')^2 = \alpha(a'b'pq)^2 + \beta(a'b'pr)^2 + \gamma(a'b'ps)^2 + \delta(a'b'qr)^2 + \varepsilon(a'b'qs)^2 + \varkappa(a'b'rs)^2,$$

czyli $\Phi = \alpha\varphi'_{pq} + \beta\varphi'_{pr} + \gamma\varphi'_{ps} + \delta\varphi'_{qr} + \varepsilon\varphi'_{qs} + \varkappa\varphi'_{rs}$.

Jeżeli $\varphi'_{pq} = \varphi'_{pr} = \varphi'_{ps} = \varphi'_{qr} = \varphi'_{qs} = \varphi'_{rs} = 0$, wtenczas $\Theta = 0$.

To samoby wypadlo, gdyby ściany p, q, r, s były sprzężone względem drugiej powierzchni f', a krawędzie pq, pr . . . były styczne do pierwszej powierzchni f. Zatem: $\Phi = 0$, jeżeli się da utworzyć taki czworościan biegunowy względem jednej powierzchni, któregoby krawędzie były styczne do drugiej powierzchni.

22.

Znaczenie $G_u = 0$.

Współrzędne punktu x leżącego na płaszczyźnie przechodzącej przez punkta ξ, η, ζ dadzą się wyrazić

$$x_i = X_1\xi_i + X_2\eta_i + X_3\zeta_i,$$

gdzie X_1, X_2, X_3 są ilości od siebie niezależne. Równania

$$f_x = f_\xi X_1^2 + f_\eta X_2^2 + f_\zeta X_3^2 + 2f_{\eta\zeta} X_2 X_3 + 2f_{\zeta\xi} X_3 X_1 + 2f_{\xi\eta} X_1 X_2 = 0,$$

$$f'_x = f'_\xi X_1^2 + f'_\eta X_2^2 + f'_\zeta X_3^2 + 2f'_{\eta\zeta} X_2 X_3 + 2f'_{\zeta\xi} X_3 X_1 + 2f'_{\xi\eta} X_1 X_2 = 0$$

wyrażają krzywe przecięcia się płaszczyzny $\xi\eta\zeta$ z powierzchniami f i f' a równanie

$$(\lambda f\xi + \lambda' f'\xi)X_1^2 + (\lambda f\eta + \lambda' f'\eta)X_2^2 + \dots \quad = 0$$

wiązkę krzywych na płaszczyźnie $\xi\eta\zeta$. Wyznacznikiem tej wiązki jest

$$\begin{vmatrix} \lambda f\xi + \lambda' f'\xi, & \lambda f\xi\eta + \lambda' f'\xi\eta, & \lambda f\xi\zeta + \lambda' f'\xi\zeta \\ \lambda f\eta\xi + \lambda' f'\eta\xi', & \lambda f\eta + \lambda' f'\eta, & \lambda f\eta\zeta + \lambda' f'\eta\zeta \\ \lambda f\zeta\xi + \lambda' f'\zeta\xi, & \lambda f\xi\eta + \lambda' f'\zeta\eta, & \lambda f\zeta + \lambda' f'\zeta \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 \begin{vmatrix} f\xi & f\xi\eta & f\xi\zeta \\ f\eta\xi & f\eta & f\eta\zeta \\ f\zeta\xi & f\zeta\eta & f\xi \end{vmatrix} + \lambda^2\lambda' \left\{ \begin{vmatrix} f'\xi & f\xi\eta & f\xi\zeta \\ f'\eta\xi & f\eta & f\eta\zeta \\ f\xi\zeta & f\xi\eta & f\zeta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f\xi & f'\xi\eta & f\xi\zeta \\ . & . & . \quad . \\ & & \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} f\xi & f\xi\eta & f'\xi\zeta \\ . \; . \; . & . \; . & . \\ & & \end{vmatrix} \right\} + \dots$$

Wyznaczniki przy potęgach λ i λ' stojące dadzą się przerobić. Np.

$$\begin{vmatrix} f\xi & f\zeta\eta & f\xi\zeta \\ . \; . & . \; . & . \\ & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_\xi a_\xi & b_\xi b_\eta & c_\xi c_\zeta \\ . \; . & . \; . & . \; . \\ & & \end{vmatrix} = \zeta_a \eta_b \xi_c \begin{vmatrix} a_\xi & b_\xi & c_\xi \\ a_\eta & a_\eta & a_\eta \\ a_\xi & a_\xi & a_\zeta \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{6} \begin{vmatrix} a_\xi & b_\xi & c_\xi \\ . \; . & . & . \\ & & \end{vmatrix}^2$$

$$= \tfrac{1}{6}[(abc)_{234}(\xi\eta\xi)_{234} + (abc)_{134}(\xi\eta\xi)_{134}) + \dots]^2$$

$$= \tfrac{1}{6}(abcu)^2 = F_u.$$

gdyż $(\xi\eta\xi)_{234} = u_1$, $(\xi\eta\xi)_{134} = -u_2$, $(\xi\eta\xi)_{124} = u_3$, $(\xi\eta\xi)_{123} = -u_4$ jako współrzędne płaszczyzny u przechodzącej przez punkta ξ, η, ζ. Przerobiwszy w ten sposób wszystkie wyznaczniki, otrzymamy na wyznacznik wiązki krzywej wyrażenie

$$F_u\lambda^3 + G_u\lambda^2\lambda' + G'_u\lambda\lambda'^2 + F_u'\lambda'^3.$$

Stosując twierdzenie o wiązce krzywych wyrażone w geometryi na płaszczyźnie, możemy wyrazić znaczenie $G_u = 0$ w następujący sposób: Jeżeli $G_u = 0$, wtenczas w krzywej przecięcia się płaszczyzny u z drugą powierzchnią f' da się wpisać trójkąt biegunowy względem krzywej przecięcia się tejże płaszczyzny z pierwszą powierzchnią f. lub na krzywej przecięcia się z pierwszą powierzchnią f' da się opisać trójkąt biegunowy względem krzywej przecięcia się z drugą powierzchnią f'. Podobnie tłómaczy się znaczenie $G'_u = 0$.

23.
Znaczenie $T_x = 0$.

Chcąc mieć znaczenie geometryczne $T_x = 0$, poprowadźmy z punktu z stożki h i h' styczne do powierzchni f i f'. Równania ich będą (n^x 4)

$$h_x = f_z f_x - f_{zx} = 0, \quad h'_x = f'_z f'_x - f'^2_{zx} = 0.$$

Znajdźmy następnie wiązkę krzywych przecięcia się płaszczyzny $\xi\eta\zeta$ z obu stożkami (n^r 22) i napiszmy wyznacznik tej wiązki

$$\begin{vmatrix} \lambda h\xi + \lambda' h'\xi, & \lambda h\xi\eta + \lambda' h'\xi\eta, & \lambda h\xi\zeta + \lambda' h'\xi\zeta, \\ \lambda h\eta\xi + \lambda' h'\eta\xi, & \lambda h\eta + \lambda' h\eta, & \lambda h\eta\zeta + \lambda' h\eta\zeta' \\ \lambda h\zeta\text{ɋ}^{*)} + \lambda' h\zeta\xi', & \lambda h\zeta\eta + \lambda' h'\zeta\eta & \lambda h\zeta + \lambda' h\zeta \end{vmatrix}$$

gdzie $= \lambda^3 P + \lambda^2\lambda^2 Q + \lambda\lambda^{12} R + \lambda^{13} S$

$$P = \begin{vmatrix} h\xi & h\xi\eta & h\xi\zeta \\ h\eta\xi & h\eta & h\eta\zeta \\ h\zeta\xi & h\zeta\eta & h\zeta \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} h'\xi & h\xi\eta & h\xi\zeta \\ h\eta\xi & . & . \\ h\text{ɋ}\xi & . & . \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h\xi\zeta & h'\xi\eta & \xi\zeta \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h\text{ɋ} & h\text{ɋ}\eta & h'\text{ɋ}\xi \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} \text{ itd.}$$

Chcąc wyrachować wyznacznik P wypisujemy go obszernie pamiętając, że

$$h\text{ɋ} = f_z f\text{ɋ} - f\text{ɋ}_z^2, \quad h\text{ɋ}\eta = f_z f\text{ɋ}\eta - f\text{ɋ}_z f\eta_z \; . \; . \; . \text{ itd.}$$

Wypada

$$P = \begin{vmatrix} f_z f\text{ɋ} - f\text{ɋ}^2_z, & f_z f\text{ɋ}\eta - f\text{ɋ}_z f\eta_z, & f_z f\text{ɋ}\zeta - f\text{ɋ}_z f_z\zeta \\ f_z f\eta\text{ɋ} - f\eta_z f\xi_z, & . \; . \; . \; . & . \; . \\ f_z f\zeta\text{ɋ} - f\zeta_z f\text{ɋ}_z, & . \; . \; . \; . & . \; . \end{vmatrix},$$

$$= f_z^2 \left\{ f_z \begin{vmatrix} f\text{ɋ} & f\text{ɋ}\eta & f\text{ɋ}\zeta \\ . & . & . \\ & & \end{vmatrix} - f\text{ɋ}_z \begin{vmatrix} f\text{ɋ}_z & f\text{ɋ}\eta & f\text{ɋ}\zeta \\ . & . & . \\ & & \end{vmatrix} - f\eta_z \begin{vmatrix} f\text{ɋ} & f\text{ɋ}_z & f\text{ɋ}\zeta \\ . & . & . \\ & & \end{vmatrix} - f\text{ɋ}_z \begin{vmatrix} f\text{ɋ} & f\text{ɋ}\eta & f\text{ɋ}\xi \\ . & . & . \\ & & \end{vmatrix} \right\}$$

---

*) litera ɋ zastępuje literę ξ

$$= f_z^2 \begin{vmatrix} f_z & f_z\psi & f_z\eta & f_z\psi \\ f\psi_z & f\psi & f\psi\eta & f\psi\zeta \\ f\eta_z & f\eta\psi & f\eta & f\eta\psi \\ f\psi_z & f\zeta\psi & f\psi\eta & f\psi \end{vmatrix} = f_z^2 a_z b_\psi d_\psi (abcd)(z\psi\eta\zeta) = \frac{f_z^2 (abcd)^2}{24} (z\psi\eta\zeta)^2$$
$$= \Delta\, f_z^2\, (z\psi\eta\zeta)^2.$$

Podobnie przerabia się pierwszy wyznacznik sumy Q

$$\begin{vmatrix} h' & h\psi\eta & h\psi\zeta \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'\xi f'\psi - f'\psi_z^2, & f_z f\psi\eta - f\psi_z f\eta_z, & f_z f\psi\zeta - f\psi_z f\zeta_z \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ & & \end{vmatrix}$$

$$= f_z f'_z \left\{ f\xi \begin{vmatrix} f_z & f\psi\eta & f\psi\zeta^{*)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - f\eta_z \begin{vmatrix} f'\psi & f\psi_z & f\psi\zeta \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - f\psi_z \begin{vmatrix} f'\psi & f\psi\eta & f\psi_z \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \right\}$$

$$- f_z f'\psi_z \left\{ f_z \begin{vmatrix} f'\psi_z f\psi\eta & f\psi\zeta \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \end{vmatrix} - f\eta_z \begin{vmatrix} f'\psi_z & f\psi_z & f\psi\zeta \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - f\zeta_z \begin{vmatrix} f'\psi_z f\psi\eta & f\psi_z \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \end{vmatrix} \right\}$$

$$= f_z \left\{ f''_z \begin{vmatrix} f'_z f_z\psi f_z\eta & f_z\psi \\ f\psi_z & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f\eta_z & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f\zeta_z & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix} - f'\psi_z \begin{vmatrix} f_z & f'_z & f_z\eta & f_z\zeta \\ f\psi_z & f'\psi_z & \cdot & \cdot \\ f\eta_z & f'\eta_z & \cdot & \cdot \\ f\zeta_z & f'\zeta_z & \cdot & \end{vmatrix} \right\}$$

$$= f_z \left\{ f''_z a_z a'_\psi b\eta c\zeta\ (aa'bc)\ (z\psi\eta\zeta) - f\psi_z a_z a'_z b\eta c\zeta\ (aa'bc)\ (z\psi\psi\eta\zeta) \right\}$$

$$= \frac{f_z\ (aa'bc)\ (z\psi\eta\psi)}{6} \left(f'_z a'\xi - f'\xi_z a'_z\right) \begin{vmatrix} a_z & b_y & c_z \\ a\eta & x\eta & c\eta \\ a\zeta & b\zeta & c\zeta \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-f_z\ (aa'bc)\ (z\xi\eta\zeta)}{6}\ b'_z \left(b'_z a'\xi - b'\xi a'_z\right) \begin{vmatrix} a_z & b_z & c_z \\ a\eta & \cdot & \cdot \\ a\zeta & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Obliczywszy w ten sposób dalsze dwa wyznaczniki i dodawszy, otrzymamy

$$Q = \frac{f_z\ (z\psi\eta\zeta)\ (aa'bc)\ b_z}{6} \left\{ \left(b'_z a'\xi - b'\xi a'_z\right) \begin{vmatrix} a_z & b_z & c_z \\ a\eta & \cdot & \cdot \\ a\zeta & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \left(b'_z a'\eta - b'\eta a'_z\right) \begin{vmatrix} a_z & b_z & c_z \\ a\eta & \cdot & \cdot \\ a\zeta & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \right.$$
$$\left. + \left(b'_z a'\zeta - b'\zeta a'_z\right) \begin{vmatrix} a_z & b_z & c_z \\ a\xi & \cdot & \cdot \\ a\eta & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \right\}$$

---

*) litera ζ zastępuje literę ξ

$$= \frac{f_z\,(z\xi\eta\zeta)^2(aa'bc)\,b_z}{6}\left\{ a_{,z}\begin{vmatrix} b'_z & a_z & b_z & c_z \\ b'\xi & . & . & . \\ b'\eta & . & . & . \\ b'\zeta & . & . & . \end{vmatrix} - b'_z\begin{vmatrix} a'_z & a_z & b_z & c_z \\ a'\xi & . & . & . \\ a'\eta & . & . & . \\ a'\zeta & . & . & . \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{f_z\,(z\xi\eta\zeta)^2(a'abc)\,b'_z}{6}\left[(a'abc)b'_z = (b'abc)a'_z\right] = f_z(z\xi\eta\zeta)^2 a'\alpha b'_z\, b'_z a' = a'_z b'\alpha)$$

$$= f_z\,(z\xi\eta\zeta)^2\;{}^1/_2\;[b'_a a'\alpha - a'_z b'\alpha]^2 = f_z\,(z\xi\eta\zeta)^2\;T'_z.$$

Tak samo obliczone

$$R = f_z\,(z\xi\eta\zeta)^2\;T_z,\quad S = \Lambda' f'^2_z (z\xi\eta\zeta)^2$$

a wyznacznik wiązki krzywych przybiera kształt

$$(z\xi\eta\zeta)^2\,(\Lambda f_z^2\lambda^3 + f_z T'_z\lambda^{2\prime} + f_z T_z\lambda\lambda'^2 + \Lambda' f'^2_z\lambda'^3).$$

Jeżeli położymy $f_z\lambda = \Lambda'\varrho'$, $f'_z\lambda' = \Lambda\varrho$, wtenczas po opuszczeniu czynnika $\frac{(z\xi\eta\zeta)^2\Lambda\Lambda'}{f_z f'_z}$ przechodzi powyższy wyznacznik wiązki krzywych na

$$\Lambda^2 f_z\varrho^3 + \Lambda\,T_z\varrho^2\varrho' + \Lambda' T'_z\varrho\varrho'^2 + \Lambda'^2 f'_z\varrho'^3,$$

t. j. na formę przynależną formy $\varrho F_u + \varrho' F'_u$ (n^r 19).

Podobnie wnioskując, jak w poprzednim ustępie poznajemy, że gdy $T_z = 0$, wtenczas w krzywej przecięcia się płaszczyzny $\xi\eta\zeta$ ze stożkiem h da się wpisać trójkąt biegunowy względem krzywej przecięcia się ze stożkiem h'; lub na krzywej przecięcia się ze stożkiem h' da się opisać trójkąt biegunowy względem krzywej przecięcia się ze stożkiem h. Bacząc na znaczenie punktów sprzężonych (n^r 8), można rzecz odnieść do stożków h, h' i tak wyrazić: Jeżeli z punktu leżącego na powierzchni $T_x = 0$ poprowadzimy stożki styczne $h\;h'$ do danych powierzchni, wtenczas w stożek h da się wpisać trójścian, którego krawędzie są wzajemnie sprzężone względem stożka h' a na stożku h' da się opisać trójścian, którego ściany są sprzężone względem stożka h.

24.

Znaczenie $\psi_{uv} = 0$.

Pary punktów przecięcia się prostej xy z powierzchnią f i f' wyrażają równania (nr 8)

$$f_y u_x^2 - 2f_{xy} u_x u_y + f_x u_y^2 = 0,$$
$$f_y u_x^2 + 2f'_{xy} u_x u_y + f_x u_y^2 = 0.$$

Te pary punktów są harmoniczne, jeżeli niezmiennik wspólny tych równań równy zeru t. j. jeżeli

$$f_x f'_y + f_y f'_x - 2f_{xy} f'_{xy} = \psi_{uv} = 0.$$

Zatem zbiór promieni $\psi_{uv} = 0$ jest zbiorem prostych przecinających powierzchnie f i f' w dwóch parach punktów harmonicznych.

25.

Znaczenie $\chi_{uv} = 0$.

W podobny sposób, jak w poprzednim ustępie, dowodzi się, że proste spełniające równanie $\chi_{uv} = 0$ są krawędziami, z których poprowadzone płaszczyzny styczne do powierzchni F i F' tworzą dwie pary płaszczyzn harmonicznych.

VI.

Ogólne twierdzenia i zagadnienia tyczące się dwóch powierzchni.

26.

Wspólny czworościan biegunowy.

Jeżeli wyznacznik $\Delta\lambda^4 + \Theta\lambda^3\lambda' + \Phi\lambda^2\lambda'^2 + \Theta'\lambda\lambda'^3 + \Delta'\lambda'^4 = 0$, wtenczas powierzchnia $\lambda f_x + \lambda' f'_x = 0$ jest stożkiem. Ponieważ równanie pierwsze ma cztery rozwiązania $\lambda_k \lambda'_k$, więc w pęku powierzchni znajdują się cztery stożki. Weźmy pod uwagę przypadek, kiedy wszystkie cztery rozwiązania są różne. W tym przypadku stożki są istotne; wierzchołek żadnego z nich nie może leżeć na powierzchni $\lambda f_x + \lambda' f'_x = 0$, w przeciwnym bowiem razie stożek wyrodziłby się w płaszczyznę styczną a forma przynależna formy $\lambda f_x + \lambda' f'_x$ znikałaby identycznie. Że znów forma przynależna nie może być identycznie równą zeru, okażemy w następujący sposób:

Przypuśćmy, że identycznie

$$F_u\lambda^3 + G_u\lambda^2\lambda' + G'_u\lambda\lambda'^2 + F'_u\lambda'^3 = 0,$$

podstawiając raz a_{kl} drugi raz a'_{kl} za $u_k u_l$ otrzymamy w kształcie symbolicznym równania

$$\tfrac{1}{6}(abcd)^2\lambda^3 + \tfrac{1}{2}(abda')^2\lambda^2\lambda'^2 + \tfrac{1}{2}(ada'b')^2\lambda\lambda'^2 + \tfrac{1}{6}(a'b'c'd')^2\lambda'^3 = 0,$$

$$\tfrac{1}{6}(abcd')^2\lambda^3 + \tfrac{1}{2}(aba'd')^2\lambda^2\lambda'^2 + \tfrac{1}{2}(aa'b'd')^2\lambda\lambda'^2$$
$$+ \tfrac{1}{6}(a'b'c'd')^2\lambda'^3 = 0,$$

czyli $$4\Delta\lambda^3 + 3\Theta\lambda^2\lambda' + 2\Phi\lambda\lambda'^2 + \Theta'\lambda^3 = 0$$
$$\Theta\lambda^3 + 2\Phi\lambda^2\lambda' + 3\Theta'\lambda\lambda'^2 + 4\Delta'\lambda'^3 = 0,$$

Równania te są pierwszemi pochodnemi co do λ i λ' wyznacznika formy $\lambda f_x + \lambda' f'_x$ a spełnienie ich wyraża warunek, że równanie

$$\Delta\lambda^4 + \Theta\lambda^3\lambda' + \Phi\lambda^2\lambda'^2 + \Theta'\lambda\lambda'^3 + \Delta'\lambda'^3 = 0$$

ma dwa rozwiązania równe, co jest sprzeczne z założeniem.

Jeżeli λ_1 λ'_1 jest rozwiązaniem ostatniego równania, to forma przynależna formy $\lambda_1 f_x + \lambda'_1 f_x$ wyraża kwadrat wierzchołka stożka

$$F_u\lambda_1{}^3 + G_u\lambda_1{}^2\lambda'_1 - G'_u\lambda_1\lambda'_1 + F_u'\lambda'_1{}^3 = u\varsigma^2.$$

Chcąc wyrazić wszystkie wierzchołki stożków, mnożymy formy przynależne dla wszystkich form $\lambda_k f_x + \lambda'_k f'_x$. Taki iloczyn zawiera funkcye symetryczne całkowite ilości λ_k, λ'_k, wskutek tego będzie funkcyą całkowitą niezmienników Δ, Θ, Φ, Θ', Δ' i współzmienników F_u, G_u, G'_-, F'_u.

Jeżeli ς, η, ζ, ϑ są wierzchołkami czterech stożków odpowiadającymi rozwiązaniom $\lambda_1\lambda'_1$, $\lambda_2\lambda'_2$, $\lambda_3\lambda'_3$, $\lambda_4\lambda'_4$ i jeżeli baczymy na to, że wierzchołek stożka jest sprzężony do każdego punktu (nr 8), otrymamy szereg równań

$$\lambda_1 f\xi + \lambda'_1 f'\xi = 0, \quad \lambda_1 f\xi\eta + \lambda'_1 f'\xi\eta = 0 \; . \; . \; .$$
$$\lambda_2 f\eta\xi + \lambda'_2 f'\eta\xi = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$\lambda_3 f\zeta\xi + \lambda'_3 f'\zeta\xi = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$\lambda_4 f\vartheta\xi + \lambda'_4 f'\vartheta\xi = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Które tylko wtenczas mogą być spełnione, jeżeli

$$f\xi\eta = f\xi\zeta = \ldots = 0, \qquad f'\xi\eta = f'\xi\zeta = \ldots = 0'$$

t. j. jeżeli wszystkie wierzchołki stożków są do siebie względem obu powierzchni sprzężone. Żeby to okazać, weźmy n. p. równania

$$\lambda_1 f\xi\eta + \lambda'_1 f'\eta\xi = 0, \qquad \lambda_2 f\xi\eta + \lambda'_2{}' f'\xi\eta = 0.$$

Te równania tylko wtenczas mogą być spełnione, jeżeli $f\xi\eta = 0$ $f'\xi\eta = 0$, gdyż wyznacznik tych równań $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 \end{vmatrix}$ nie równy z powodu, że rozwiązania $\lambda_1\lambda'_1$, $\lambda_2\lambda'_2$ są różne. W ten sposób się dowodzi, że $f\xi\zeta = 0$, $f'\xi\zeta = 0$, . . . itd.

Wierzchołki ξ, η, ζ, ϑ nie mogą leżeć na jednej płaszczyźnie. Aby to okazać, przeróbmy formę $\lambda f_x + \lambda' f'_x$ zapomocą podstawienia

$$x = \xi_k z_1 + \eta_k z_2 + {}_k\xi z_3 + \vartheta_k z_4$$

i napiszmy wyznacznik formy przerobionej. Ten jako niezmiennik jest równy iloczynowi niezmiennika formy pierwotnej i modułu podstawienia.

Ponieważ $f\xi\eta = f'\xi\eta = \quad = \ldots, 0$ wypadnie

$$\begin{vmatrix} \lambda f\xi + \lambda' f'\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda f\eta + \lambda' f'\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda f\zeta + \lambda' f'\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda f\vartheta + \lambda' f'\vartheta \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda f\xi + \lambda' f'\xi)(\lambda f\eta + \lambda' f'\eta)(\lambda f\zeta + \lambda' f'\zeta)(\lambda f\vartheta + \lambda' f'\vartheta)$$
$$= (\xi\eta\xi\vartheta)^2 (\Delta\lambda^4 + \Theta\lambda^3\lambda' + \Phi\lambda^2\lambda'^2 + \Theta'\lambda\lambda'^3 + \Delta'\lambda'^4).$$

Gdyby punkta ξ, η, ζ, ϑ leżały na jednej płaszczyźnie, byłoby moduł $(\xi\eta\zeta\vartheta) = 0$, wskutek tego jeden z czynników lewej strony równania byłby równy zeru dla dowolnych wartości na λ, λ'. Toby znów tylko wtenczas było możliwem, gdyby jeden wierzchołek leżał na powierzchni $\lambda f_x + \lambda' f'_x = 0$, co jednak nie ma miejsca.

Ponieważ punkta $\varrho, \eta, \zeta, \vartheta$ nie leżą na jednej powierzchni, są zatem narożami czworościanu biegunowego względem obu powierzchni czyli wspólnego czworościanu biegunowego.

27.

Równanie naroży wspólnego czworościanu biegunowego.

Równanie kwadratu wierzchołków czterech stożków $\lambda_k f_x + \lambda'_k f'_x = 0$ jest zarazem równaniem kwadratu czterech naroży wspólnego czworościanu biegunowego.

Równanie naroży wspólnego czworościanu biegunowego można także w następujący sposób wyprowadzić:

Ponieważ płaszczyzna u przechodząca przez wierzchołek stożka ϱ jest sprzężoną do każdej płaszczyzny (nr 8) zatem równanie

$$\lambda_1{}^3 F_{uv} + \lambda_1{}^2 \lambda'_1 G_{uv} + \lambda_1 \lambda'_1{}^2 G'_{uv} + \lambda'_1{}^3 F'_{uv} = {}^u\lambda\, {}^v\varrho = 0$$

dla każdej wartości na $v_1\ v_2\ v_3\ v_4$.

Oznaczając $G_u = \Sigma B_{kl} u_k u_l$, $G'_u = \Sigma B'_{kl} u_k u_l$

i po rozwinięciu powyższego równania równając zeru współczynniki stojące przy v_1, v_2, v_3, v_4 otrzymamy równania

$$A_{ku} \lambda_1{}^3 + B_{ku} \lambda_1{}^2 \lambda'_1 + B'_{ku} \lambda_1 \lambda'_1{}^2 + A'_{ku} \lambda'_1{}^3 = 0.$$

Ponieważ ilości $\lambda_1\ \lambda'_1$ równocześnie nie mogą być równe zeru, powyższe równania tylko wtedy mogą być spełnione, jeżeli wyznacznik

$$\begin{vmatrix} A_{1u} & B_{1u} & B'_{1u} & A'_{1n} \\ A_{2u} & B_{2u} & B'_{2u} & A'_{2u} \\ A_{3u} & B_{3u} & B'_{3u} & A'_{3u} \\ A_{4u} & B^5{}_u & B'_{4u} & A'_{4u} \end{vmatrix} = 0,$$

Ten sam warunek wypadnie dla płaszczyzn przechodzących przez pozostałe wierzchołki η, ϱ, ϑ. Zatem ostatnie równanie jest równaniem naroży wspólnego czworościanu biegunowego i jest czwartego stopnia co do zmiennych $u_1\ u_2\ u_3\ u_4$.

28.

Równanie ścian wspólnego czworościanu biegunowego.

W podobny sposób rozumując o gromadzie powierzchni $\varrho F_u + \varrho' F'_u = 0$ dochodzimy do następujących wyników:

Wyznacznik formy $\varrho F_u' \varrho' F_u$

$$\Delta^3\varrho^4 + \Delta^2\Theta'\varrho^3\varrho' + \Delta\Delta'\Phi\varrho^2\varrho'^2 + \Delta'^2\Theta\varrho\varrho'^3 + \Delta'^3\varrho'^4 = 0$$

dla czterech rozwiązań na ϱ, ϱ'. Jeżeli położymy $\varrho = \lambda'\Delta'$, $\varrho = \lambda\Delta$, wtenczas po odrzuceniu czynnika $\Delta^3\Delta'^3$ powyższe równanie przyjmie kształt

$$\Delta\lambda^4 + \Theta\lambda^3\lambda' + \Phi\lambda^2\lambda'^2 + \Theta'\lambda\lambda'^3 + \Delta'\lambda'^4 = 0,$$

z czego poznajemy, że z rozwiązań drugiego równania łatwo otrzymać można rozwiązania pierwszego i że jeżeli rozwiązania drugiego są różne, to także rozwiązania pierwszego różne być muszą, Ponieważ wyznacznik formy $\varrho F_u + \varrho' F'_u$ znika, zatem forma da się wyrazić jako forma kwadratowa trzech form liniowych o czterech zmiennych u_1 u_2 u_3 u_4, czyli trzeeh punktów a forma przynależna

$$\Delta f_x \varrho^3 + \Delta T_x \varrho^2 \varrho' + \Delta' T'_x \varrho\varrho'^2 + \Delta'^2 f'_x \varrho'^3$$

wyraża kwadrat płaszczyzny przəchodzacej przez te trzy punkta i nie może zniknąć identycznie. Takich płaszczyzn otrzymamy cztery i żadna z nich nie może być styczną do powierzchni $\varrho F_u + \varrho' F'_u = 0$. Wszystkie cztery płaszczyzny nie mogą przechodzić przez jeden punkt i mają tę własność, że parami są sprzężone względem obu powierzchni $F_u = 0$ i $F'_u = 0$. Tworzą przeto czworościan bieguaowy wspólny obu powierzchniom. Równanie ścian tego czworościanu biegunowego można otrzymać jużto mnożąc formy sprzężone dla wszystkich czterech rozwiązań ϱ_k, ϱ'_k wskutek czego otrzymany kwadrat ścian czworościanu wyrażony jako funkcyę całkowitą uiezmienników Δ, Θ, Φ, $\hat{\Theta}'$, Δ', i współzmienników $f_x T_x$, $T'_x f'_x$, lub też postępując w następujący sposób. Jeżeli p, q, r, s, są czterema płaszczyznami wyrażonemi przez formę przynależną dla rozwiązań $\varrho_1\varrho'_1$ $\varrho_2\varrho'_2$ $\varrho_3\varrho'_3$ $\varrho_4\varrho'_4$ równanie np.

$$\Delta^2 f_{xy}\varrho_1{}^3 + \Delta T_{xy}\varrho_1{}^2\varrho'_1 + \Delta' T'_{xy}\varrho_1\varrho'_1{}^2 + \Delta'^2 f'_{xy}\varrho'_1{}^3 = p_x p_y = 0,$$

będzie spełnione identycznie dla wszystkich punktów x leżących na płaszczyźnie p. (nr 9). Oznaczając

$$T_x = \Sigma b_{kl} x_k x_l, \quad T'_x = b'_{kl} x_k y$$

i równając zeru współczynniki stojące przy $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ otrymamy równania:

$$\Delta^2 a_{kx} \varrho_1^3 + \Delta b_{kx} \varrho_1^2 \varrho'_1 + \Delta' b'_{kx} \varrho_1 \varrho'^2_1 + \Delta'^2 a'_{kx} \varrho'^3_1 = 0.$$

i warunek spełnienia tych równań

$$\begin{vmatrix} a_{1x} & b_{1x} & b'_{1x} & a'_x \\ a_{2x} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{3x} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{4x} & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

Ten sam warunek wypadnie dla wszystkich punktów leżących na płaszczyznach q, r, s ratem powyższe równanie będące czwartego stopnia co do zmiennych $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ jest równaniem czterech ścian wspólnego czworościanu biegunowego.

29.

Równanie krawędzi wspólnego czworościanu biegunowego.

Chcąc utworzyć równanie krawędzi wspólnego czworościanu biegunowego, bierzemy pod uwagę równanie

$$F_u \mathfrak{d}_1^3 + G_u \mathfrak{d}'^2_1 \gamma'_1 + G_u \mathfrak{d}'_1 \mathfrak{d}'^2_1 + F'_u \mathfrak{d}'^3_1 = u^2 \varsigma$$
$$F_u \mathfrak{d}_2^3 + G_u \mathfrak{d}_2^2 \mathfrak{d}'_2 + G'_u \mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}'^2_2 + F'_u \gamma'^3_2 = u^2 \eta$$

i tworzymy wyrażenie

$$u\varsigma^2 v\eta^2 + u\eta^2 v\varsigma^2 - 2u\varsigma v\varsigma u\eta v\eta = (u\varsigma v\eta - u\eta v\varsigma)^2 = [\Sigma (uv)_{kl} (\varsigma\eta)_{kl}]^2$$
$$= [+(uv)_{kl} (rs)_{k'l'}]^2 - (uvrs)^2$$

gdzie rs oznacza krawędź płaszczyzn przechodzących przez naroża ς, η. Po wykonaniu otrzymamy

$$2(F_u F_v - F_{uv}^2) \mathfrak{d}_1^3 \mathfrak{d}_2^3 + (F_u G_v + F_v G_u - 2F_{uv} G_{u}) \mathfrak{d}_1^2 \mathfrak{d}_2^2 (\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}'_2 + \mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}'_1)$$
$$+ (F_u G'_v + F_v G'_u - 2F_{uv} G'_{uv}) \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2 (\mathfrak{d}_1^2 \mathfrak{d}'^2_2 + \mathfrak{d}_2^2 \mathfrak{d}'^2_1) + (F_u F'_v + F_v F'_u$$
$$- 2F_{uv} F'_{uv})(\mathfrak{d}_1^3 \mathfrak{d}'^3_2 + \mathfrak{d}_2^3 \mathfrak{d}'^3_1)$$
$$+ 2(G_u G_u - G^2_{uv}) \mathfrak{d}_1^2 \mathfrak{d}_2^2 \mathfrak{d}'_1 \mathfrak{d}'_2 + (G_u G'_v + G_v G'_u - 2G_{uv} G'_{uv}) \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}'_1 \mathfrak{d}'_2$$
$$(\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}'_2 + \mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}'_1)$$
$$+ (G_u F'_v + G_v F'_u - 2G_{uv} F'_{uv} \mathfrak{d}'_1 \mathfrak{d}'_2 (\mathfrak{d}_1^2 \mathfrak{d}'^2_2 + \mathfrak{d}_2^2 \mathfrak{d}'^2_1) + 2(G'_u G'_v$$
$$- G'^2_{uv}) \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}'^2_1 \mathfrak{d}'^2_2$$

$$+ (G'_u F'_v + G'_v F'_u - 2G'_{uv} F'_{uv}) \lambda'^2_1 \lambda'^2_2 (\lambda_1 \lambda'_2 + \lambda_2 \lambda'_1) + 2(F'_u F'_v - F'^2_{uv}) \lambda'^3_1 \lambda'^3_3 = (uvrs)^1 = 0$$

jako równanie krawędzi rs wspólnego czworościanu biegunowego.

Utworzywszy w ten sposób kwadraty wszystkich krawędzi i pomnożywszy przez siebie będziemy mieć kwadrat wszystkich krawędzi. Ilości λ_k, λ'_k . . nie będą zachodzić osobno, tylko w funkcyach symetrycznych, które się dadzą wyrazić zapomocą niezmienników Δ, Θ, Φ, Θ' i Δ'.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę ściany wspólnego czworościanu biegunowego i utworzymy wyrażenie

$$p_x^2 q_y^2 - p_y^2 q_x^2 - 2p_x q_x p_y q_y = (p_x q_y - p_y q_x)^2 = [\Sigma (pq)_{kl} (xy)_{kl}]^2$$

$=(\zeta\vartheta xy)$ otrzymamy na drugi sposób wyrażony kwadrat krawędzi $\zeta\vartheta$.

Po wykonaniu będzie

$$2\Delta^4 \varrho_1^3 \varrho_2^3 (f_x f_y - f_{xy}^2) + \Delta^3 \varrho_1^2 \varrho_2 (\varrho_1 \varrho'_2 + \varrho_2 \varrho'_1)(f_x T_y + f_y T_x - 2f_{xy} T_{xy})$$

$$+ \Delta^2 \Delta' \varrho_1 \varrho_2 (\varrho_1^2 \varrho'^2_2 + \varrho_2^2 \varrho'^2_1)(f_x T'_y + f_y T'_x - 2f_{xy} T'_{xy})$$

$$+ \Delta^2 \Delta'^2 (\varrho_1^3 \varrho'^3_2 + \varrho_2^3 \varrho'^3_1)(f_x f'_y + f_y f'_x - 2f_{xy} f'_{xy})$$

$$+ 2\Delta^2 \varrho_1^2 \varrho_2^2 \varrho'_1 \varrho'_2 (T_x T_y - T_{xy}^2)$$

$$+ \Delta\Delta' \varrho_1 \varrho_2 \varrho'_1 \varrho'_2 (\varrho_1 \varrho'_2 + \varrho_2 \varrho'_1)(T_x T'_y + T_y T'_x - 2T_{xy} T'_{xy}) + \ldots$$

$$\ldots\ldots = (\zeta\vartheta xy).$$

30.

Warunek, aby powierzchnie f i f' były do siebie styczne.

Jeżeli punkt ς jest punktem styczności obu powierzchni wtenczas płaszczyzny styczne w tym punkcie poprowadzone a wyrażone równaniami $f\varsigma_x = 0$, $f'\varsigma_x = 0$ muszą być identyczne. Będzie więc $f\varsigma_x = \varepsilon f'\varsigma_x$, lub położywszy $\lambda\varepsilon = -\lambda'$, $\lambda f\varsigma_x + \lambda' f'\varsigma_x = 0$ identycznie dla każdej wartości na x; prócz tego ponieważ $f\varsigma = 0$, i $f'\varsigma = 0$, będzie także $\lambda f\varsigma + \lambda' f'\varsigma = 0$, Z powyższych równań odczytujemy: Punkta sprzężone punktu ς względem powierzchni f są także sprzężonymi względem powierzchni f'; zatem punkt ϱ jest narożem wspólnego czworościanu biegunowego, czyli wierzchołkiem stożka wiązki powierzchni $\lambda f_x + \lambda' f'_x$. Ponieważ punkt ϱ leży na powierzchni $\lambda f_x + \lambda' f'_x$, więc stożek styczny zamienia się na kwadrat płaszczyzny (nr 7) a wyznacznik i forma przynależna formy $\lambda f_x + \lambda' f'_x$ muszą być równe zeru — forma przynależna nawet identycznie.

Według tego, cośmy w nr 26, powiedzieli, równanie

$$\Delta\lambda^4 + \Theta\lambda^3\lambda_{,} + \Phi\lambda^2\lambda'^2 - \Theta'\lambda\lambda'^3 + \Delta'\lambda'^4 = 0$$

musi mieć rozwiązanie na λ, λ' podwójne, co jest wtenczas możliwe, jeżeli rozróżnik lewej strony równania równy zeru. Zatem jeżeli powierchnie f i f' są do siebie styczne, rozróżnik formy $\Delta\lambda^4 + \Theta\lambda^3\lambda' + \ldots$ musi być równy zeru. Po obliczeniu rozróżnika otrzymamy równanie

$(16\Delta\Delta' - \Theta\Theta_{,})^3 - 2(8\Delta\Phi - 3\Theta^2)(8\Delta'\Phi - 3\Theta'^2)(16\Delta\Delta' - \Theta\Theta') - 4(\Phi\Theta - 6\Delta\Theta')(\Phi\Theta' - 6\Delta'\Theta)(16\Delta\Delta' - \Theta\Theta') - (8\Delta\Phi - 3\Theta^2)(8\Theta'\Phi - 3\Theta_{,}^2)(9\Theta\Theta' - 4\Phi^2) + 4(O\Phi - 6\Delta\Theta')^2(8\Delta'\Phi - 3\Theta'^2) + 4(\Phi\Theta' - 6\Delta'\Theta)^2(8\Delta\Phi - 3\Theta^2) = 0$, wyrażające żądany warunek.

31.

Warunek, aby krzywe przecięcia się płaszczyzny *u* z powierzchniami *f* i *f'* były do siebie styczne.

Wyznacznikiem wiązki krzywych przecięcia się (nr 22) jest $F_u\lambda^3 + G_u\lambda^2\lambda' + G'_u\lambda'\lambda^2 + F'_u\lambda'^3$. Jeżeli krzywe są do siebie styczne, wtenczas wyznacznik zrównany zeru musi mieć dwa rozwiązania równe, co jest wtedy spełnione, jeżeli rozróżnik powyższego wyznacznika $4(F\, G'_u - G_u^2)(3F'_uG_u - G'_u{}^2) - (9F_uF'_u - G\, G'_u)^2 = 0$. To równanie wyraża powierzchnię której płaszczyzny styczne przecinają dane powierzchnie w przekrojach stycznych.

32.

Warunek, aby z danego punktu z poprowadzone stożki styczne do danych powierzchni f i f' były do siebie styczne.

Jeżeli z punktu z poprowadzone stożki styczne do powierzchni f i f' są do siebie styczne, wtenczas krzywe przecięcia się stożków z dowolną płaszczyzną muszą być również styczne. To jest wtenczas spełnione, jeżeli równanie (nr 23)

$$\varDelta^2 f_z \varrho^3 + \varDelta T_z \varrho^2 \varrho' + \varDelta' T'_z \varrho \varrho'^2 + \varDelta'^2 f'_z \varrho'^3 = 0$$

ma dwa rozwiązania równe, t. j. jeżeli rozróżnik lewej strony równania (po opuszczeniu czynnika $\varDelta^2 \varDelta'^2$)

$$4(3\varDelta f'_z T_z - T'^2_z)(3\varDelta' f_z T'_z - T'^2_z) - (9\varDelta\varDelta' f_z f'_z - T_z T'_z)^2 - 0.$$

Równanie to wyraża powierzchnie 8go rzędu tego rodzaju że z jej punktów dadzą się poprowadzić proste styczne równocześnie do obu powierzchni. Jestto równanie powierzchni rozwijalnej wspólnej obu powierzchniom.

33.

Miejsce geometryczne punktów, których płaszczyzny biegunowe względem powierzchni f są styczne do powierzchni f'.

Płaszczyzna biegunowa punktu z względem powierzchni f ma współrzędne $a_z a_1$, $a_z a_2$, $a_z a_3$, $a_z a_4$, ponieważ jest styczną do powierzchni f', więc jej współrzędne muszą spełniać równanie $u^2\alpha' = 0$. Po podstawieniu wypadnie $a\alpha$, $b\alpha$, $a_z\ b_z = 0$ jako równanie żądanego miejsca geometrycznego. Jestto powierzchnia drugiego rzędu i według nr 19 wyraża się także zapomoaą równaaia $\Theta' f_z - T_z = 0$. Podobnież $\Theta f'_z - T'_z = 0$ jest równaniem bięgunów względem powierzehni f' płaszczyzn stycznych do powierzchni f.

34.

Miejsce geometryczne płaszczyzn, których bieguny względem powierzchni f leżą na powierzchni f'.

Biegun płaszczyzny v względem powierzchni f ma współrzędne $v\alpha^a{}_1$, $v\alpha^a{}_2$, $v\alpha^a{}_3$, $v\alpha^a{}_4$, ponieważ leży na powierzchni f'

więc jego współrzędne spełniają równanie $a'^2_x = 0$. Wskutek tego wypada $a'\alpha a'\beta u\alpha u\beta = 0$, jako równanie żądanego miejsca geometrycznego. Po przerobieniu

$$a'\alpha a'\beta u\alpha u\beta = a'\alpha^2 u'\beta^2 - \tfrac{1}{2}(a'\alpha u\beta - a'\beta u\alpha)^2$$

$$= a'\alpha^2 u^2\beta - \tfrac{1}{2}[\Sigma(\alpha\beta)_{kl}\,(a'a)_{kl}]^2 = a'\alpha^2 u\beta^2 - \Delta\,\tfrac{1}{2}(aba'u)^2 \quad (\text{n}^\text{r}\ 19)$$

przyjmuje powyższe równanie kształt $\Theta F_u - \Delta G_u = 0$. Jak widzimy jestto równanie powierzchni drugiego rzędu. Podobnie się tłómacąy równanie $\Theta' F'_u - \Delta' G'_u = 0$.

35.

Warunek aby prosta przechodziła przez punkt przecięcia się obu powierzchni f i f'.

Punkta przecięcia się prostej yz z obu powierzchniami wyrażają równania (n^r 24)

$$f_y\lambda^2 + 2fy_z\lambda\lambda' + f_z\lambda'^2 = 0,$$

$$f'_y\lambda^2 + 2f'y_z\lambda\lambda' + f'_z\lambda'^2 = 0.$$

Jeżeli pewien punkt prostej yz znajduje się na obu powie rzchniach, oba równania mają rozwiązania wspólne, co jest wtedy możliwem, jeżeli *rugownik (Resultante)* tych równań

$$4(f_y f_z - f_{yz}^2)(f'_y f'_z - f'^2_{yz}) - (f_y f'_z + f_z f'_y - 2f_{yz} f'_{yz})^2 = 0,$$

czyli $4\varphi_{uv}\,\varphi'_{uv} = \psi_{uv}^2 = 0$. To równanie okazuje, że proste przechodzące przez punkta przecięcia się obu powierzchni należą do zbioru promieni 4^{go} rzędu. Ten zbiór promieni otrzymamy tworząc rozróżnik formy $\lambda^2\varphi_{uv} - \lambda\lambda'\psi_{uv} + \lambda'^2\varphi'_{uv}$.

36.

Warunek, aby prosta leżała na płaszczyznie stycznej do powierzchni f i f'.

Podobnie postępując jak w poprzednim ustępie, znajdziemy dla krawędzi vw żądany warunek wyrażony zapomocą równania

$$4(F_v F_w - F_{vw}^2)(F'_v F'_w - F'^2_{vw}) - (F_v F'_w + F_w F'_v - 2F_{vw} F'_{vw})^2 = 0,$$

czyli $4\Delta\Delta'\varphi_{vw}\varphi'_{vw} - \chi_{vw}^2 = 0$.

37.

Warunek, aby krawędź płaszczyzn biegunowych pnnktu z względem obu powierzchni była styczną 1) do powierzchni f, 2) do powierchni f' i 3) przecinała obie powierzchnie w punktach harmonicznych.

Płaszczyzny biegunowe punktu z względem powierzchni f i f' są $f_{xz} = a_z a_x = 0$ i $f'_{zx} = a'_z a'_x = 0$, i przecinają się w krawędzi o współrzędnych $a_z a_z'$ $(aa')_{23}$, $a_z a_z$ $(aa')_{23}$ . . . .

Jeżeli ta krawędź jest styczną do powierzchni f, muszą jej współrzędne spełniać równanie $\varphi_{uv} = 0$, t. j. musi być

$$\frac{1}{2}(acda')\ (bcdb')\ a_z b_z a'_z b'_z = 0.$$

Podobnież równanie $\frac{1}{2}(aa'c'd')\ (bb'c'd')\ a_z b_z a'_z b'_z = 0$ wyraża, że krawędź jest styczną do powierzchni f'.

Jeżeli krawędź ma przecinać obie powierzchnie w dwóch parach punktów harmonicznych, muszą jej współrzędne spełniać równanie $\psi_{uv} = 0$, skąd wynika żądany warunek trzeci

$$(aca'c')\ (bcb'c')\ a_z b_z a'_z b'_z = 0.$$

Stosując równanie identyczne nr 15 i równania identyczne

$$(acda')\ (bcdb')\ a_z = \frac{1}{3}(acda')\ [(bcdb')a_z + (abdb')c_z - (abcb')d_z]$$

$$= \frac{1}{3}(acda')\ [(acdb')b_z - (abcd)b'_z],$$

$$(abcd)(acda')b_z - \frac{1}{4}(abcd)[(acda')b_z - (bcda')a_z - (abda')c_z + (abc'a)d_z]$$

$$= \frac{1}{4}(abcd)^2 a'_z \text{ i t. p.}$$

otrzymujemy powyższe równanie wyrażona w kształcie

$$1)\ \Theta f_z f'_z - f_z T_z - \Delta f'^2_z = 0,$$

$$2)\ \Theta' f_z f'_z - f'_z T_z - \Delta' f^2_z = 0,$$

$$2)\ \Phi f_z f'_z - f_z T_z - f'_z T_{/z} = 0.$$

38.

Warunek, aby prosta łącząca bieguny płaszczyzny v względem obu powierzchni była styczną 1) do powierzchni f, 2) do powierzchni f' i 3) miała tę własność żeby płaszczyzny styczne przez nią do obu powierzchni poprowadzone tworzyły dwie pary płaszczyzn harmonicznych.

Postępując podobnie jak w poprzednim ustępie, otrzymamy rozwiązanie zagadnienia wyrażone równaniami

$$1)\ {}^1/_2(\alpha\gamma\delta\alpha')\ (\beta\gamma\delta\beta')\ \mathrm{v}\alpha\mathrm{v}\beta\mathrm{v}\alpha'\mathrm{v}\beta' - 0,$$
$$2)\ {}^1/_2(\alpha\alpha'\gamma'\delta')\ (\beta\beta'\gamma'\delta')\ \mathrm{v}\alpha\mathrm{v}\beta\mathrm{v}\alpha'\mathrm{v}\beta' = 0,$$
$$3)\ (a\gamma\alpha'\gamma')\ (\beta\gamma\beta'\gamma')\ \mathrm{v}\alpha\mathrm{v}\beta\mathrm{v}\alpha'\mathrm{v}\beta' = 0,$$

które po podobnem przerobioniu przy zastosowaniu równania identycznego

$${}^1/_6(\alpha\beta\gamma x)(\alpha\beta\gamma y) - \varDelta^2 f_{xy} \quad (\text{n}^{\text{r}}\ 19)$$

po opuszczeniu czynników $\varDelta^2, \varDelta'^2, \varDelta\varDelta'$) przybierają kształt

$$1)\ \Theta' F_v F_v - \varDelta' F_v G'_v - \varDelta F'^2_v - 0,$$
$$2)\ \Theta F_v F'_v - \varDelta F'_v G_v - \varDelta' F_v^2 - 0.$$
$$3)\ \Phi F_v F'_v - \varDelta G'_v \quad - \varDelta' G_v - 0.$$

39.

Równanie powierzchni rozwijalnej utworzonej przez proste styczne do krzywej przecięcia się powierzchni f i f'.

Dla punktu z leżącego na prostej stycznej do krzywej przecięcia się obu powierzchni a zatem stycznej równoeześnie do obu powierzchni płaszczyzny biegunowe muszą przechodzić przez punkt styczności a krawędź ich musi spełniać równanie $4\varphi_{uv}\varphi'_{uv} - \psi^2_{uv} = o$ (n$^{\text{r}}$ 35).

Podstawiwszy współrzędne krawędzi (n$^{\text{r}}$ 37) w powyższe równanie otrzymamy

$$4\ (\Theta f_z f'_z - f_z T'_z - \varDelta f'^2_z)\ (\Theta' f_z f'_z - f'_z T_z - \varDelta' f_z^2) - (\Phi f_z f'_z - f_z T_z - f'_z T'_z)^2 = 0$$

jako żądane równanie.

40.

Równanie powierzchni utworzonej przez proste styczne do obu powierzchni.

Postępując podobnie, jak w poprzednim ustępie, otrzymamy żądane równanie po opuszczeniu czynnika $\varDelta^2\ \varDelta'^2$ wyrażone w kształcie

$$4(\Theta' F_u F'_u - \varDelta' F_u G'_u - \varDelta F'^2_u)\ (\Theta F_u F'_u - \varDelta F'_u G_u - \varDelta' F_u^2) - (\Phi F_u F'_u - \varDelta G'_u - \varDelta' G_u)^2 = 0.$$

41.

Warunek, jaki spełniać musi prosta, jeżeli jej wzajemnie sprzężone względem obu powierzchni się przecinają.

Krawędź *uv* ma względem powierzchni *f* prostą sprzężoną o współrzędnych $\frac{1}{2}(abuv)(ab)_{23}$, $\frac{1}{2}(abuv)(ab)_{31}$, ... (nr 10), względem powierzchni *f*, prostą o współrzędnych $\frac{1}{2}(a'b'uv)(a'b')_{23}$, $\frac{1}{2}(a'b'uv)(a'b')_{31}$, ... Te proste się przecinają jeżeli

$$\frac{1}{4}(aba'b')(abuv)(a'b'uv) = 0,$$

t. j. jeżeli krawędź *uv* należy do zbioru promieni wyrażonego powyższem równaniem.

42.

Warunek, jaki spełniać musi prosta, jeżeli jej wzajemnie sprzężona względem powierzchni *f* jest styczną do powierzchni *f'*.

Jeżeli prosta wzajemnie sprzężona do krawędzi *uv* względem powierzchni *f* ma być styczną do powierzchni *f'*, muszą jej współrzędne $\frac{1}{2}(abuv)(ab)_{23}$, $\frac{1}{2}(abuv)(ab)_{31}$, ... spełniać równanie $\frac{1}{2}(a'b'u'v') = 0$. Po podstawieniu otrzymamy żądany warunek wyrażony równaniem

$$\tau_{uv} = \frac{1}{8}(aba'b')(cda'b')(abuv)(cduv) = 0.$$

Ten sam zbiór promieni otrzymamy, utworzywszy zbiór promieni dla powierzchni $a_{\alpha'} b_{\alpha'} a_x b_x = 0$ (nr 33) i $a'_\alpha a'_\beta u_\alpha u_\beta = 0$ (nr 34).

Podobnie się tłómaczy zbiór promieni

$$\tau'_{uv} = \frac{1}{8}(aba'b')(abc'd')(a'b'uv)(c'd'uv) = 0.$$

43.

Na bliższą uwagę zasługują zbiory promieni zachodzące w nrze 29. Zbiory te są w pewnej od siebie zależności, o czem już z tego można wnioskować, że tak jedne, jak drugie służą do wyrażenia tych samych krawędzi wspólnego czworościanu biegunowego. Znaczenie ich geometryczne łatwo można odczytać z ich kształtu; prócz tego mają tę własność, że się dadzą wyrazić zapomocą zbiorów φ_{uv}, φ'_{uv}, ψ_{uv}, χ_{uv}, τ_{uv}, τ'_{uv} i niezmienników Δ, Δ', Θ, Θ' i Φ. Nie mogąc z powodu braku miejsca umieścić całego przerobienia, podajemy wyniki wyrażone równaniami

$$
\begin{aligned}
&F_u G_v + F_v G_u - 2 F_{uv} G_{uv} = \Delta \psi_{uv} + \Theta \varphi_{uv}, \\
&F_u G'_v + F_v G'_u - 2 F_{uv} G'_{uv} = \Phi \varphi_{uv} + \Delta \varphi'_{uv} - \tau_{uv}, \\
&G_u G_v - G^2_{uv} = \Theta \psi_{uv} + \tau_{uv}, \\
&G_u G'_v + G_v G'_u - 2 G_{uv} G'_{uv} = \Theta \varphi'_{uv} + \Theta' \varphi_{uv} + \Phi \psi_{uv} - \chi_{uv}, \\
&f_x T_y + f_y T_x - 2 f_{xy} T_{xy} - \Theta' \varphi_{uv} + \chi_{uv}, \\
&f_x T'_y + f_y T'_x - 2 f_{xy} T'_{xy} = \Phi \varphi_{uv} + \Delta \varphi'_{uv} - \tau_{uv}, \\
&T_x T_y - T_{xy}^2 = \Theta' \chi_{uv} + \Delta' \tau_{uv}, \\
&T_x T'_y + T_y T'_x - 2 T_{xy} T'_{xy} - \Delta' \Theta \varphi_{uv} + \Delta \Theta' \varphi'_{uv} + \Phi \chi_{uv} - \Delta \Delta' \psi_{uv}.
\end{aligned}
$$

Z tych równań łatwo wyprowadzić inne związki między zbiorami promieni nr 29. istniejące.

VII.

Współzmienniki mieszane dwóch powierzchni drugiego rzędu.

44.

Związek zachodzący między płaszczyznami biegunowemi tego samego punktu i między biegunami tej samej płaszczyzny względem obu powierzchni.

Płaszczyzna u ma względem powierzchni f' biegun z o współrzędnych $z_1 = {}^u\alpha' \alpha_1'$, $z_2 = {}^u\alpha' a_2'$, . . . (nr 8.), co podstawiając do równania $f_{zx} = a_z\, a_x = 0$, otrzymamy

$$ {}^a\alpha' \; {}^u\alpha' \; {}^a{}_x = 0 $$

jako równanie płaszczyzny biegunowej punktu z względem powierzchni f.

Równanie to wyraża nietylko związek między płaszczyznami biegunowemi tego samego punktu, ale także między biegunami tej samej płaszczyzny względem obu powierzchni. Jezeli bowiem punkt x ma względem powierzchni f płaszczyznę biegunową o współrzędnych $a_x\, a_1,\ a_x\, a_2, \ldots$ to biegun tej płaszczyzny względem powierzchni f' wyraża również równanie

$$^a\alpha'\ {}^u\alpha'\ {}^a x = 0.$$

Podobnie się tłómaczy równanie $^{a'}\alpha\ {}^u\alpha\ {}^{a'}x = 0$.

45.

Związek zachodzący między punktami sprzężonymi do danego punktu względem obu powierzchni.

Krawędź przecięcia się płaszczyzn biegunowych punktu x względem obu powierzchni ma współrzędne

$$a_x\, a'_x\, (aa')_{23},\ a_x\, a'_x\, (aa')_{31}, \ldots \quad (\text{n}^\text{r}\ 37),$$

a równanie tej krawędzi $(aa'uv) a_x a'_x = 0$ okazuje, że punkta sprzężone do danego punktu względem obu powierzchni leżą na linii prostej — naodwrót, punkta sprzężone do danej prostej względem obu powierzchni znajdują się na powierzchni drugiego rzędu.

46.

Związek zachodzący między płaszczyznami sprzężonemi do danej płaszczyzny względem obu powierzchni.

Płaszczyzny sprzężone do danej płaszczyzny u względem obu powierzchni przechodzą przez prostą łączącą jej bieguny. Równanie tej prostej $(\alpha\alpha' xy)^u\alpha^u\alpha' = 0$ okazuje nadto, że płaszczyzny sprzężone do wiązki płaszczyzn przechodzących przez prostą xy są styczne do powierzchni drugiego rzędu.

Formy $^a\alpha'{}^u\alpha'{}^a x$, $(aa'uv)a_x a'_x$, $(\alpha\alpha' xy)^u\alpha^u\alpha'$ są współzmiennikami mieszanymi, gdyż zawierają zmienne x i u.

Tarnopol dnia 20. czerwca 1895.