Rok I LISTOPAD 1937 Zeszyt 1

MATEMATYKA i SZKOŁA

CZASOPISMO POŚWIĘCONE ZAGADNIENIOM DOTYCZĄCYM MATEMATYKI ELEMENTARNEJ I JEJ NAUCZANIA W SZKOŁACH ŚREDNICH

WYCHODZI 3 RAZY DO ROKU
POD REDAKCJĄ
BRONISŁAWA BIELECKIEGO
PRZY WSPÓŁUDZIALE:
S. KULCZYCKIEGO
J. LEŚNIAKA
T. SIERZPUTOWSKIEGO
S. STRASZEWICZA

TREŚĆ:

NAKŁAD S. A. KSIĄŻNICA-ATLAS T. N. S. W., LWÓW-WARSZAWA

UWAGI DLA P. T. WSPÓŁPRACOWNIKÓW MATEMATYKI i SZKOŁY

Artykuły i notatki upraszamy nadsyłać przepisane na maszynie lub pisane odręcznie w sposób bardzo czytelny. Artykuły te i notatki są honorowane, o ile ukażą się w druku.

Odbitki z paginacją bieżącą mogą autorzy otrzymywać bezpłatnie na życzenie wyrażone przy przesyłce rękopisu.

UWAGI DLA P. T. PRENUMERATORÓW

Pisma w sprawie prenumeraty nadsyłać należy tylko pod adresem Administracji Matematyki i Szkoły: KSIĄŻNICA-ATLAS, LWÓW, CZARNIECKIEGO 12. Prenumeratę prosimy wpłacać o ile możności przekazem rozrachunkowym nr 4.

Prenumerata wynosi rocznie zł 5,—

Prenumeraty półrocznej i kwartalnej nie przyjmujemy, czasopismo bowiem ukazuje się trzy razy w roku.

WARUNKI OGŁOSZEŃ

NA OKŁADCE:
(Strona trzecia i czwarta)

Pełna kolumna	zł 250,—
1/2 kolumny . .	„ 150,—

ZA TEKSTEM:

Pełna kolumna	zł 125,—
1/2 kolumny . .	„ 65,—
1/4 „ . .	„ 35,—

Rok I LISTOPAD 1937 Zeszyt 1

MATEMATYKA i SZKOŁA

CZASOPISMO POŚWIĘCONE ZAGADNIENIOM DOTYCZĄCYM MATEMATYKI ELEMENTARNEJ I JEJ NAUCZANIA W SZKOŁACH ŚREDNICH

WYCHODZI TRZY RAZY DO ROKU POD REDAKCJĄ: B. BIELECKIEGO, PRZY WSPÓŁUDZIALE: S. KULCZYCKIEGO, J. LEŚNIAKA, T. SIERZPUTOWSKIEGO i S. STRASZEWICZA

OD REDAKCJI.

Oddając do użytku czytelników pierwszy zeszyt czasopisma „Matematyka i Szkoła" redakcja zaznacza, że celem tego wydawnictwa jest wymiana myśli pomiędzy wszystkimi mającymi bezpośredni lub pośredni kontakt z nauczaniem matematyki w szkołach średnich. Odpowiednio do tak założonego celu czasopismo nasze chętnie udzieli miejsca na swych łamach wszelkim artykułom i przyczynkom mogącym zainteresować ogół czytelników lub wzbudzić dyskusję. Materiały zebrane w pierwszym zeszycie wyszły przeważnie z ognisk lub grup metodycznych matematyki zorganizowanych przez Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, zwłaszcza zaś z Ogniska Krakowskiego, liczymy jednak na to, że już w bliskiej przyszłości krąg naszych współpracowników znacznie się rozszerzy.

Redakcja przewiduje w „Matematyce i Szkole" zasadniczo następujące działy: 1) Oświetlenia naukowe zagadnień mających związek z matematyką szkoły średniej; 2) artykuły dotyczące dydaktyki i metodyki matematyki elementarnej; 3) artykuły z zakresu historii matematyki; 4) recenzje książek; 5) zadania; 6) notatki o charakterze kronikarskim; 7) materiał, którym nauczyciel mógłby się podzielić z uczniami na lekcjach lub w kółkach uczniowskich; 8) krótkie komunikaty i notatki z zakresu kosmografii. Dokładniejsze ukształtowanie czasopisma przyniesie życie samo w zależności od potrzeb i możliwości środowiska, dla którego czasopismo jest przeznaczone i z którym będzie współpracować.

Wszelkie uwagi krytyczne i wskazówki, które by nam pomogły w myśl powyższych założeń uczynić „Matematykę i Szkołę" jak najbardziej pożyteczną, przyjmiemy z wdzięcznością.

Redakcja.

A. Hoborski (Kraków).

Uwagi o geometrii i jej znaczeniu w szkole średniej.

Odczyt wygłoszony d. 20 lutego 1933 w Ognisku Metodycznym Matematyki w Krakowie.

Wywody swoje dzielę na dwie (nierówne) części. W części pierwszej podam rozważania teoretyczne, czysto naukowe, które dotyczyć będą tylko jednej sprawy, ale pierwszorzędnego znaczenia. Końcowy wynik wywodów części pierwszej stanie się punktem wyjścia dla rozważań części drugiej, dla części praktycznej dotyczącej nauczania geometrii w szkole średniej.

I.

Rozważania teoretyczne, które obecnie przedstawię, są natury metodologicznej, a więc natury filozoficznej.

Aby być lepiej rozumianym, przypomnę dawne wykłady geometrii analitycznej i różniczkowej.

Wykład geometrii analitycznej np. płaskiej miał mniej więcej postać następującą: wprowadzało się układ Kartezjusza prostokątny, pojęcie odciętej i rzędnej punktu, określało pojęcie równania prostej, współczynnika kierunkowego prostej, a potem podawało się szereg zagadnień o punkcie i prostej, a więc rozpatrywało się prostą przez dwa punkty, równoległość i prostopadłość dwóch prostych, kąt między prostymi, odległość punktu od prostej, pole trójkąta itd. itd.

A jak wykładano dawniej geometrię różniczkową (oczywiście klasyczną, a więc płaską lub przestrzenną)?

Ta rzecz jest nieco trudniejsza do przedstawienia. Większość bowiem pierwszorzędnych geometrów podaje długie szeregi twierdzeń bez należytego sprecyzowania założeń — stan taki odpowiada okresowi ogromnej twórczości naukowej. Każdy niemal dzień tego okresu przynosił nowe, bardzo interesujące wyniki, wskutek czego gmach geometrii bardzo szybko rósł, miał bowiem liczny zastęp budowniczych pierwszorzędnych. Dość wymienić nazwiska Chaslesa, Darboux, Ennepera, Kummera, Bianchiego, Beltramiego, Kleina, Liego.

Tymczasem analiza nie spoczywała, badania nad podstawami przyniosły arytmetykę teoretyczną, teorię liczb niewymiernych, wreszcie teorię mnogości. Ścisłość i poprawność rozumowania, skrupulatne wysławianie założeń twierdzenia stworzyły odrazu dysproporcię między analizą i geometrią. I ta dysproporcja dała początek drugiemu okresowi klasycznej geometrii różniczkowej, zapoczątkowanemu przez E. Study'ego, krytyka nadzwyczaj surowego.

O tej karcie geometrii różniczkowej wspominam tylko mimochodem, nie chcąc jej pominąć milczeniem. Na coś zupełnie innego chcę zwrócić uwagę. A więc załóżmy, że ktoś wywody Darboux, Ennepera, Beltramiego, Bianchiego uściślił, dopisał założenia. Czym się więc będzie zajmował w dawnej geometrii różniczkowej? Ze względów praktycznych podzieli ją sobie na geometrię jednej krzywej i na geometrie rodzin krzywych, na geometrię jednej powierzchni i rodzin powierzchni itd.

Nie będę wchodził w szczegóły, ograniczę się do geometrii różniczkowej jednej krzywej. Podaje się w niej pojęcie stycznej, normalnej głównej, binormalnej, łuku, krzywizny pierwszej (która mierzy „odchylenie" krzywej od prostej) i krzywizny drugiej (skręcenie), która mierzy „odchylenie" krzywej od krzywej płaskiej. Przypominając to, co poprzednio powiedziałem o dawnej geometrii analitycznej, mogę krótko orzec, że obie geometrie tak analityczna jak i różniczkowa, ba nawet elementarna, a więc planimetria i stereometria, mają następującą wspólną cechę: zajmują się „własnościami" figur. Cechę tę za chwilę inaczej wyrazimy.

Kiedy geometria analityczna była już gotowym budynkiem, a geometria różniczkowa klasyczna już wysoko ponad swoje fundamenty sięgała, powstała nowa dziedzina matematyczna, zawdzięczająca swój początek geometrii. W latach od 1869 powstaje i rozwija się w szybkim tempie teoria przekształceń. Twórcą jej był Sophus Lie, Norweg z pochodzenia, długoletni profesor w Lipsku.

Pojęcie i znaczenie tej teorii dla geometrii postaram się wyjaśnić mimo krótkiego czasu, jakim dysponuję. W tym celu zwrócę się do kilku przykładów.

Na płaszczyźnie odniesionej do prostokątnego układu współrzędnych (x, y) obierzmy dowolny punkt $A\,(x, y)$ i liczbę (m) stałą tzn. niezależną od wyboru punktu $A\,(x, y)$; wyszukajmy punkt $A'\,(x', y')$ taki, że jest:

$$(1)\quad x' = m\,x, \quad y' = m\,y.$$

Wzory (1) wyznaczają więc punkt A' w zależności od punktu A i liczby (m). Każdemu punktowi A został więc przydany nowy punkt A'. Zamiast tak mówić powiemy: punkt A został przekształcony na punkt A' przekształceniem (1). Zdajmy sobie pokrótce sprawę z geometrii tego przekształcenia. Gdy $x = y = 0$ czyli, gdy A jest początkiem układu, to $x' = y' = 0$, a więc A' jest też początkiem układu; początek układu jest więc punktem niezmiennym tego przekształcenia. I jedynym punktem niezmiennym, gdy jest $m \neq 1$, jak nadal zakładamy. Założymy jeszcze, że $m \neq 0$. A więc wolno na (m) wybrać dowolną stałą, byle

$$m \neq 0, \quad m \neq 1.$$

Z (1) otrzymujemy, gdy $x \neq 0$ (wtedy też $x' \neq 0$):

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$$

t. zn. punkt A' leży na prostej OA; własność ta jest prawdziwa i w przypadku, gdy $x = 0$; wtedy A i A' leżą na osi (y).

Prosta konstrukcja * geometryczna pozwala wyznaczyć punkt A'. Gdy A nie leży na osi (x), to $AJ \parallel A'M$, przy czym $J\ (1, 0)$, $M\ (m, 0)$. Mając jedną taką parę wyznaczoną, można wyznaczyć parę punktów B, B' na osi (x), gdyż $AB \parallel A'B'$, jak łatwo wykazać. Jak widać konstrukcja posługuje się figurami podobnymi. Trójkąt dowolny przekształca (1) w trójkąt podobny ze środkiem podobieństwa w O (w początku układu).

Przekształcenie (1) zowie się *przekształceniem*** *podobieństwa ze środkiem podobieństwa w O*. Wiemy już, że trójkąty, a więc w ogóle wielokąty, przekształca (1) w wielokąty podobne; *zachowuje więc kąty*. A czy odległości zmienia? Weźmy dwa punkty $A\ (x_1, y_1)$ i $B\ (x_2, y_2)$; te punkty przekształca w $A'\ (x'_1, y'_1)$, $B'\ (x'_2, y'_2)$ i jest:

$$A'B' = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2} = |m| \cdot \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

czyli

$$A'B' = |m|\, AB;$$

wszystkie więc odległości, na całej płaszczyźnie, zmienia w jednakim stosunku $(1 : |m|)$, niezależnie od położenia odcinka na płaszczyźnie. Weźmy też krzywą C na płaszczyźnie i każdy jej punkt przekształćmy, otrzymamy nową krzywą, krzywą C' przekształconą, tzw. *krzywą podobną* o środku podobieństwa w O.

Punkt A na C przekształci się w A' na C', styczna w A przejdzie w styczną w A', równoległą do stycznej w A (gdyż kąty nachy-

* Czytelnikowi radzimy wykonywanie podawanych konstrukcji.
** Także zowie się je przekształceniem homotetji ze środkiem w O.

lenia stycznych są zachowane!) Nowa krzywa ma $|m|$-krotnie większy promień krzywizny, a więc $|m|$-krotnie pomniejszoną krzywiznę. Iloczyny

$$x \cdot \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

nie zmieniają swych wartości; pierwszy czynnik zwiększa się m-krotnie, drugi $\frac{1}{m}$-krotnie, więc iloczyn nie zmienia się, jest niezmiennikiem.

Dotąd zajmowaliśmy się jednym przekształceniem tzn. obraliśmy jedno m; obecnie rozważamy wszystkie możliwe wartości na m byle

$$m \neq 0.$$

Te przekształcenia tworzą zbiór — oznaczmy go przez Z — o bardzo ciekawej a zasadniczego znaczenia własności. Ze zbioru tego wybierzmy dowolne przekształcenie, które wykonajmy na punkcie A; otrzymamy punkt A' o współrzędnych:

$$x' = m\,x, \quad y' = m\,y;$$

następnie wybierzmy ze zbioru Z jakieś drugie przekształcenie (a więc o stałej m') i na A' wykonajmy to przekształcenie — otrzymamy punkt A''

$$x'' = m'\,x', \quad y'' = m'\,y'.$$

I zapytajmy: czy w zbiorze Z znajdzie się przekształcenie, które punkt A wprost przekształci w A''. Oczywiście odpowiedź wypadnie twierdząco, gdyż

$$x'' = m'\,m\,x, \quad y'' = m'\,m\,y,$$

a w zbiorze Z znajdziemy to przekształcenie.

Zbiór Z przekształceń o takiej własności nazwiemy grupą. A więc przekształcenia (1) tworzą grupę. Grupa ta zawiera przekształcenie identyczne: $m = 1$ i do każdego przekształcenia m należy odwrotne $\frac{1}{m}$ (Dlatego wykluczyliśmy wypadek $m = 0$).

Weźmy inne przekształcenia pod uwagę. Np. przekształcenia

$$x' = \alpha x + \beta y, \quad y' = \gamma x + \delta y,$$

gdzie α, β, γ, δ oznaczają stałe, ale tak dobrane, że wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} = 1.$$

Te przekształcenia tworzą grupę przekształceń affinarnych (pokrewnościowych). Mając taką grupę badamy, jakie wyrażenia pozostają niezmienne, czyli pytamy się o **niezmienniki** algebraiczne lub różniczkowe grupy. Przekształcenia affinarne przekształcają np. proste równoległe w proste równoległe; długość odcinków zmieniają, ale stosunek dwóch odcinków tej samej prostej lub dwu równoległych prostych pozostawiają niezmiennym. Jeżeli więc odcinki AB, CD leżą na prostych równoległych i przekształcają się w odcinki $A'B'$, $C'D'$, to jest

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$

Ponadto affinarne przekształcenia nie zmieniają pola. Weźmy kwadrat $ABCD$ o boku a, a więc polu a^2 i przekształćmy go affinarnie. Boki przeciwległe kwadratu są równoległe i mają stosunek $= 1$; więc kwadrat przejdzie w równoległobok, ale pole będzie nadal $= a^2$, jak zresztą dokładny rachunek może przekonać.

Zastosujmy * przekształcenie affinarne do figury objaśniającej twierdzenie Pitagorasa, która mimo swej banalności zawiera szczegół może niezbanalizowany.

Narysujmy figurę podaną poniżej (Fig. 1). Prosta OH przepoławia AC i jest przez AC przepołowiona czyli L jest środkiem na OH i na AC. Podobnie K jest środkiem odcinka BC i odcinka OI. Poddajmy tę figurę przekształceniu affinarnemu. Stosunki odcinków na jednej prostej będą zachowane, podobnie pola nie ulegną zmianie; otrzymamy tedy figurę drugą (Fig. 2), z kwadratów powstają równoległoboki zacieniowane, których konstrukcja jest prosta, bo znów punkty K, L są środkami odpowiednich odcinków. Z powodu niezmienności pól otrzy-

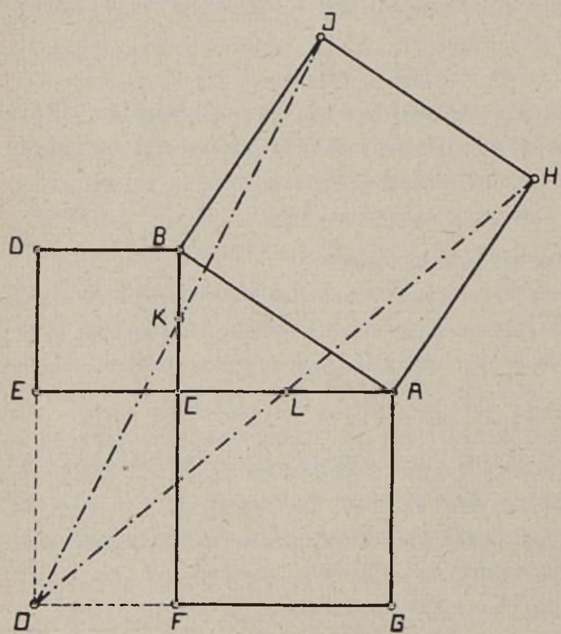


Fig. 1.

* Höfling. 60 Jahre Erlanger Programm. Zeitschrift für math. u. naturw. Unterricht. 63 Jg. (1932). Str. 153—159.

mamy, że równoległobok na boku AB ma pole równe sumie pól pozostałych dwóch równoległoboków. Nietrudne jest bezpośrednie uzasadnienie tego twierdzenia przez kombinację pól, co wyjaśnia trzeci rysunek (Fig. 3).

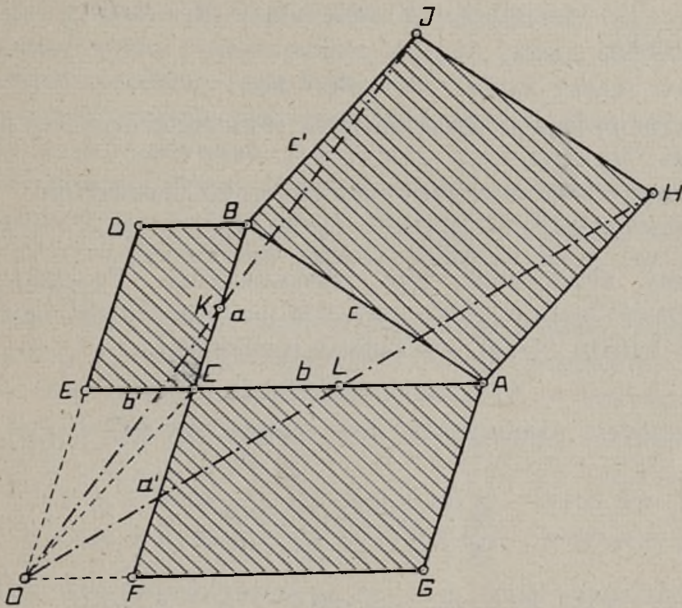


Fig. 2.

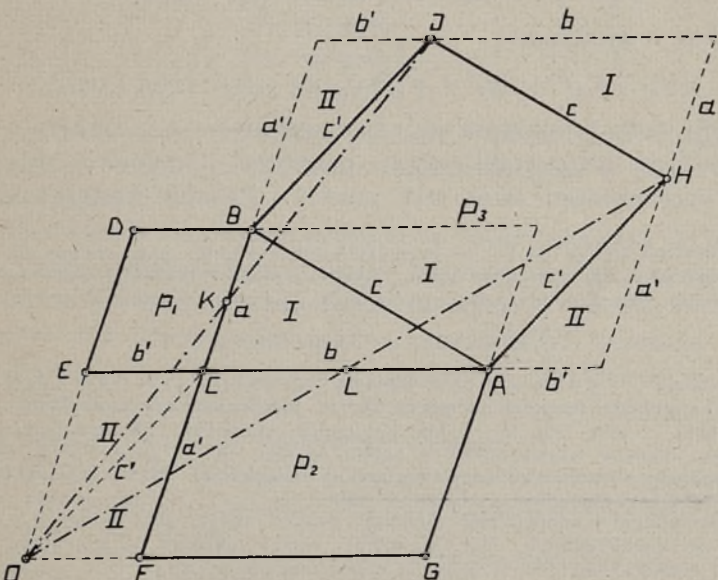


Fig. 3.

Jeżeli przez γ oznaczymy kąt przy C w trójkącie ABC, to będzie raz

$$(a + a')(b + b') \sin\gamma = p_1 + p_2 + 2I + 2II,$$

drugi raz

$$(a + a')(b + b') \sin\gamma = p_3 + 2I + 2II.$$

Stąd wynika:

$$p_3 = p_1 + p_2,$$

przy czym p_1, p_2, p_3 oznaczają pola równoległoboków na figurze * trzeciej.

Weźmy z kolei tzw. ruch euklidesowy na płaszczyźnie: **

$$x' = x \cos a - y \sin a + a, \quad y' = x \sin a + y \cos a + b.$$

Zbadajmy niezmienniki tego przekształcenia. Ponieważ punkt (x, y) przejść może w każdy inny, więc nie może istnieć niezmiennik jednego punktu $f(x, y)$ tzn. funkcja o własności:

$$f(x, y) = f(x', y').$$

Przekształćmy równocześnie dwa punkty (x_1, y_1), (x_2, y_2). Otóż mamy

$$x'_1 = x_1 \cos a - y_1 \sin a + a, \quad y'_1 = x_1 \sin a + y_1 \cos a + b,$$
$$x'_2 = x_2 \cos a - y_2 \sin a + a, \quad y'_2 = x_2 \sin a + y_2 \cos a + b,$$

stąd

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1) \cos a - (y_2 - y_1) \sin a,$$
$$y'_2 - y'_1 = (x_2 - x_1) \sin a + (y_2 - y_1) \cos a,$$

a to daje natychmiast:

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y_2' - y'_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2;$$

odległość tedy 2 punktów nie ulega zmianie.

Jaki jest niezmiennik trzech punktów? Oczywiście pole trójkąta wyznaczonego przez trzy punkty. Ponadto zostaje niezmie-

---

* Zwracam uwagę na to, że przekształcenie affinarne, zastosowane do fig. 1. dałoby specjalną figurę 3, a nie ogólną, ponieważ przekształcenie affinarne nie zmienia stosunku odcinków tej samej prostej, więc na figurze 3 uzyskalibyśmy:

$$\frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} = 1 \qquad \text{czyli } ab = a'b'$$

albo $\frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} a'b' \sin\gamma$, co wyrażałoby, że trójkąty ABC i EFC mają równe pola, a to zachodzi rzeczywiście też na fig. 1. Jednakowoż konstrukcja fig. 3. tego nie zakłada i wobec tego fig. 3 daje przypadek ogólniejszy. Dla konstrukcji fig. 3 rysujemy najpierw trójkąt ABC, a potem odcinek OC w polu $OECF$. Odcinek ten wyznacza jednoznacznie wszystkie trzy równoległoboki. Wybór punktu O w innym polu daje twierdzenie o różnicy pól!

** W geometri analitycznej zachodzą podane wzory, jako wzory na zmianę układu osi współrzędnych. Powyżej mamy jeden układ i dwa punkty, jeden punkt o współrzędnych (x, y), drugi o współrzędnych (x', y').

niony kąt między 2 kierunkami. I w ten sposób można iść dalej: otrzyma się tylko odcinki, kąty i pola jako niezmienniki punktów.

A niezmienniki różniczkowe? Jest niezmiennikiem krzywizna krzywej i pochodne kolejne tej krzywizny względem łuku.

Weźmy z kolei ruch euklidesowy w przestrzeni. Gdy dowolną figurę geometryczną (a więc punkty, odcinki, proste, kąty, krzywe, powierzchnie) poddamy temu ruchowi, to figura zmieni swe położenie w przestrzeni, ale niezmienne pozostaną te elementy figury, które są zwykle nazywane „własnościami figury", niezależnymi od położenia figury. Taką własnością powierzchni jest krzywizna gaussowska. Jest to niemal banalne, bo intuicyjnie jest widoczne, że ruch euklidesowy zmienia położenie figury, ale jej nie deformuje.

Jeszcze jedną grupę przekształceń rozpatrzymy, mianowicie grupę, której własności geometryczne oddawna szczegółowo zostały zbadane. Jest to grupa przekształceń rzutowych w przestrzeni:

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4}, \qquad y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4},$$

$$z' = \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4},$$

przy czym stałe współczynniki a_1, b_1 ... d_4 mają wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1, d_1 \\ a_2, b_2, c_2, d_2 \\ a_3, b_3, c_3, d_3 \\ a_4, b_4, c_4, d_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Przekształcenia te przekształcają (na ogół *) płaszczyzny w płaszczyzny, proste w proste, powierzchnie stopnia drugiego w powierzchnie stopnia drugiego.

Oprócz tych przekształceń punktów w punkty rozważa się w geometrii także przekształcenia innego rodzaju, np. na płaszczyźnie punktów w proste i przekształcenia prostych w punkty — są to przekształcenia objęte ogólną nazwą przekształceń korelacji. Inne przekształcenia, przekształcenia stycznościowe, wystudiowane przez Liego, obejmują ogólną klasę przekształceń, których znaczenie wychodzi daleko poza ramy niniejszego odczytu.

Zamykając ten pobieżny przegląd przekształceń podkreślam jeszcze raz, że gmach geometrii klasycznej kończono budować, kiedy

* Tzn. wszystkie prócz jednej, a mianowicie płaszczyznę $a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0$ przekształcają w tzw. płaszczyznę w nieskończoności.

teoria przekształceń wychodziła poza fundamenty. Obie te dziedziny łączyły się wprawdzie ze sobą wielością wspólnych zagadnień, ponadto brak było w geometrii elementu porządkującego. Były znane geometrie: zwykła euklidesowa, nieeuklidesowa i rzutowa; można było przewidywać, że powstaną dalsze. Brak było jednak idei przewodniej, idei uogólniającej.

Tę myśl porządkującą materiał naukowy geometrii, ideę, która zarazem uogólniała pojęcie geometrii, wypowiedział Feliks Klein w swojej pracy zwanej Erlanger Programm w r. 1872.

Pełny tytuł pracy tej był następujący: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Jest to przemówienie, do którego Klein był ówczesnym zwyczajem zobowiązany po nominacji na profesora zwyczajnego w Erlangen. W r. 1893 była ta praca przedrukowana w Mathematische Annalen w tomie 43. W wydaniu zbiorowym prac Kleina (Gesam. Abhandlungen) mieści się w tomie I, gdzie zajmuje strony od 460 do 497. Na str. 464 czytamy rzecz następującą, którą podaję w tłumaczeniu:*

„Dana jest przestrzeń (Manningfaltigkeit) i dla niej grupa przekształceń. Należy rozwinąć teorię niezmienników odnośnej grupy przekształceń. To jest tym ogólnym zagadnieniem, które w sobie obejmuje zwyczajną geometrię i zwłaszcza różne nowe geometryczne metody“... Zdanie to ma epokowe znaczenie. Wyraża ono, że każda geometria ma jako podstawę pewną grupę przekształceń, a geometria jest teorią niezmienników figur względem podstawowej grupy przekształceń.

A więc dla naszej zwykłej geometrii tzw. euklidesowej jest podstawową grupa ruchów euklidesowych; geometria nasza tworzy pojęcia (długość odcinka, kąt, pole trójkąta, krzywiznę krzywej), tworzy pojęcia (powtarzam), przy których pomocy może opisać własności figur, niezmienne przy przekształceniach grupy ruchów euklidesowych.

Podobnie, biorąc za podstawę grupę przekształceń affinarnych (pokrewnościowych) utworzył Blaschke geometrię affinarną różniczkową na wzór naszej, są tam pojęcia analogiczne do naszych,

* Niemiecki tekst: Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben. Man entwickle die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie. Dies ist das allgemeine Problem, welches die gewöhnliche Geometrie nicht nur, sondern namentlich auch die hier zu nennenden neueren geometrischen Methoden... unter sich begreift.

ale tak skonstruowane, że pozwalają wyrazić własności figur tzw. niezmiennicze własności względem grupy przekształceń affinarnych.

Jak więc dziś wygląda wykład geometrii analitycznej czy geometrii różniczkowej, liczący się z zasadą Kleina?

Szablon wykładu jest następujący: po wprowadzeniu ortogonalnego układu Kartezjusza i współrzędnych punktu określa się grupę ruchów euklidesowych, po czym szuka się niezmienników tej grupy, niezmiennikom tym nadaje się nazwy powszechnie znane.

Ponieważ grupa ruchów euklidesowych dowolny punkt przeprowadza w każdy, więc nie istnieje niezmiennik jednego punktu; istnieje dopiero niezmiennik dwóch punktów na płaszczyźnie:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

a w przestrzeni

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Drugi pierwiastek z tego niezmiennika nazywamy odległością 2 punktów.

Niezmienniki trzech punktów dadzą kąt między 2 kierunkami i pole trójkąta; jednym z niezmienników 4 punktów w przestrzeni jest objętość czworościanu. Przy pomocy tych pojęć rozwija się zwykłą geometrię analityczną; szuka się tylko takich elementów, które są niezmiennikami grupy ruchów euklidesowych.

Dla przykładu rozważmy punkt i prostą w przestrzeni; jednym z niezmienników tej pary utworów jest odległość punktu od prostej, co bardzo łatwo wykazać. Punkt A i prosta p przejdą przez ruch w punkt A' i prostą p'. Przez A prowadzimy płaszczyznę π prostopadłą do p. Płaszczyzna π przejdzie w płaszczyznę π' przez A'; ale ponieważ kąty będą zachowane, więc π' będzie prostopadłą do p'; nadto punkt B przebicia π przez p przejdzie w punkt B' przebicia π' przez p'. Odległość $AB = A'B'$, bo wiemy, że odległość 2 punktów jest niezmiennikiem, a właśnie to mieliśmy udowodnić.

Widzimy z tego przykładu, że tok rozumowania geometrycznego jest następujący. Dla danej figury (F) mamy znaleźć jej ,,własności", a więc figurę (F) poddajemy wszystkim przekształceniom podstawowej grupy przekształceń, przez co otrzymujemy nieskończenie wiele figur. Szukamy następnie własności, które posiada (F) i wszystkie te figury, które z niej powstały.

Aby być jaśniejszym, podam konkretny przypadek. Niech będzie dana krzywa C i obierzmy na niej punkt M_0. Przez M_0 poprowadźmy prostą p; oczywiście przez punkt można w przestrzeni poprowadzić nieskończenie wiele prostych; chcemy jedną prostą z tego nieskończonego zbioru prostych, wyróżnić, ale wyróżnić w pewien szczególny sposób, mianowicie tak, by to „wyróżnienie" miało cechę niezmienniczą względem grupy ruchów euklidesowych. Gdy krzywą C poddamy ruchowi, to C przyjmie położenie C', punkt M_0 przejdzie w M_0', prosta p przejdzie w p'. Otóż prosta (p) powinna być tak określona, żeby jej definicja zastosowana do C' w M_0' dała prostą (p'). Prostą w M_0 o tej własności jest np. styczna do C. Ona jest wyróżniona w sposób niezmienniczy tzn. gdy krzywą C wraz z jej styczną (t) poddamy ruchowi, to otrzymamy krzywą C' i prostą (t') i ta właśnie prosta (t') jest styczną do C'.

Z tych przykładów można sobie wyrobić ogólne pojęcie o postaci nowoczesnego wykładu geometrii analitycznej i różniczkowej.

Wykład dawny tych działów służy dalej tylko jako propedeutyczny w uniwersytetach, na szkołach politechnicznych, dla górników i hutników itd.; ale i ten stary typ idzie dalej tylko po „remoncie" tzn. po kilku pierwszych wykładach wprowadza się grupę ruchów euklidesowych.

Zamykając wywody teoretyczne nadmienię jeszcze, że dla nowoczesnej geometrii różniczkowej n-wymiarowej przestrzeni idea Kleina okazała się niewystarczająca, dla R_2 i R_3 jest ona dziś panującą.

Streszczając to, co poprzednio powiedziałem, dochodzę do ostatecznej konkluzji: oto koniec wieku XIX przyniósł nam ogólny pogląd filozoficznej natury na strukturę geometrii, czyniąc z niej teorię niezmienników pewnej podstawowej grupy przekształceń. A więc geometria euklidesowa jest teorią niezmienników grupy ruchów euklidesowych. Geometria affinarna jest teorią niezmienników grupy affinarnej; geometria rzutowa jest teorią niezmienników grupy rzutowej itd. itd.

II.

Przechodzę teraz do części praktycznej tzn. do kwestii materiału szkolnego i dydaktyki. Chodzi więc o odpowiedź na pytanie: czy, ew. co i jak należy lub można mówić w szkole o przekształceniach i ich roli w geometrii?

Jeżeli chcemy się uchronić od przesady i jeżeli nie chcemy wymagać rzeczy niemożliwych do zrealizowania, to odpowiedź będzie dość łatwa, o ile chodzi o zakres inowacji, a mianowicie: dawka ma być mała.

Bardzo małą zmianę wprowadzi się w materiał szkolny, jeżeli naukę o podobieństwie figur rozpocznie się od przekształceń homotetii (o których dziś była mowa). W niektórych szkołach mówi się o przekształceniu przez promienie odwrotne.

Jeżeliby te dwa rodzaje przekształceń miały należeć do programu szkolnego w ogóle, to rzecz oczywista, nie możnaby pominąć przekształceń ruchu euklidesowego na płaszczyźnie i w przestrzeni. A więc najpierw w planimetrii naukę o równoległych możnaby wyzyskać do wyjaśnienia translacji czyli przesunięcia równoległego; tu byłaby okazja wprowadzenia pojęcia wektora. Przy nauce o kole mówiłoby się o obrocie w płaszczyźnie, o obrocie odcinka, o obrocie prostej; potem następowałaby lekcja o ruchu złożonym z translacji i obrotu, oraz o możliwości zastąpienia translacji i obrotu w płaszczyźnie przez obrót.

Wiele trudności może tu nie będzie. Trudności specjalnego rodzaju wystąpią znacznie później, w geometrii analitycznej, gdy ruch płaski ujmie się we wzory, gdy bowiem we wzorach:

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + a, \quad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + b$$

na α, a, b przyjmiemy trzy określone liczby, to otrzymamy specjalne przekształcenie, które punkt (x, y) „przerzuca" w punkt (x', y') — jak się ktoś wyraził trafnie — mamy „skok" euklidesowy, a nie ruch w znaczeniu intuicyjnym. Ruch otrzymamy dopiero wtedy, gdy α, a, b będziemy uważali za funkcje czasu (oczywiście ciągłe) (odpowiada to w teorii Liego jednoczęściowej ciągłej podgrupie przekształceń). (Ruch więc z intuicji się wywodzący, zmusza nas do wciągnięcia czasu tj. pojęcia niegeometrycznego w rozważania geometryczne). Nie mogę tu wymienić wszystkich sposobności, które nasuwa obecny program, by wplatać rzecz o ruchach euklidesowych lub w ogóle o przekształceniach. Wspomnę jeszcze o dwóch okazjach. Przystawania trójkątów, pojmowanego dziś abstrakcyjnie, a wywodzącego się z aksjomatów, uczono ongiś inaczej; trójkąt przenoszono tak, by z przystającym się nakrył. Ruch ten był raczej frazesem popularyzatorskim; można mu jednak nadać postać solidną. W tym celu dla dwóch par homologicznych wierzchołków dwóch przystających trójkątów wyznacza się środek obrotu (lub translację), która trzecią parę homologicznych wierzchołków przeprowadza w siebie lub czyni je symetrycznymi. Podobnie i symetria dwóch figur płaskich dostarcza sposobności do nauki o obrotach (kąt obrotu $= 180^0$).

Przy nauce geometrii analitycznej wykazać można, że dwa punkty przez ruch euklidesowy przechodzą w dwa punkty o tej samej odległości, dwie proste przecinające się w dwie proste znów się przecinające i o tym samym wzajemnym nachyleniu, punkt i prosta przechodzą w punkt i prostą o tej samej wzajemnej odległości itd. Pojęcie niezmiennika ruchu euklidesowego leży więc, jak na dłoni!

Kończąc swoje wywody chciałbym podkreślić, że rzucam tu myśl pewnej przebudowy nauczania geometrii, myśl ta niech będzie podstawą dyskusji. Jakkolwiek się tę myśl oceni, to jednego jej odmówić nie można: oto nie dąży do wprowadzenia rzeczy abstrakcyjnych, apeluje raczej do wyobraźni i ją kształci i rozwija może w wyższym stopniu, niż rozpanoszona dziś po podręcznikach szkolnych metoda aksjomatyczna, na której przesadę podany tu przeze mnie projekt może być skuteczną „odtrutką".

Witold Wilkosz (Kraków).

Definicje w matematyce szkoły średniej.

„Mathesis et ars et scientia est dicenda" mawiał za Gaussem Kronecker i w myśl tej zasady postępując uczymy w szkole matematyki, i jako sztuki wykonywania zadań w odpowiedzi na pewne problemy, i jako nauki — i to nauki *dedukcyjnej*. Z tą chwilą jednak podpadamy już pod przepisy i metody uczenia nauki dedukcyjnej w ogóle, choćby w pomniejszeniu, nie zawsze wiernym i dokładnym. Kto postępuje dedukcyjnie, ten atoli posługuje się w mniejszym czy większym stopniu *logiką*. Ta ostatnia jednak posiada dwie i tylko dwie gałęzie swych czynności: *dowodzenie* i *określanie*. Pozostawimy na uboczu dowodzenie, a zajmiemy się *określaniem* i to w szczególności określeniami, jakich musimy mieć wiele w nauce szkoły średniej. Śledząc i klasyfikując różne typy określeń pozwolę sobie omówić każdy typ definicji, najpierw z naukowego punktu widzenia, a dopiero potem pod kątem zastosowań w nauce szkoły średniej. Ogromny rozwój logiki w ostatnich dziesiątkach lat przyniósł tu wiele z tego, co może się przyczynić do rozjaśnienia i uproszczenia różnych zawiłych kwestyj. Nie zawsze i nie wszędzie liczono się z tym postępem w szkole — z tymi zdobyczami, które usuwają zagmatwanie i prowadzą do prostoty pojmowania.

I Definicje nominalne. Teoretycznie logika przychodzi, a właściwie już przyszła do przekonania, że jedynie uprawnionymi określeniami z punktu widzenia teorii *czystej* (bynajmniej nie ze stanowiska praktyki!) są tak zwane *definicje nominalne*, to jest określenia ustalające znaczenie nowego terminu przy pomocy innych w postaci:

„A jest to: ....“,*

gdzie po ręce lewej mamy termin *nowy* A (*definiendum*), po prawej zaś układ terminów znanych i wprowadzonych *uprzednio* (*definiensy*).

„Kwadrat“ *jest to* „prostokąt, którego wszystkie boki są równe“

„wspólny podzielnik a i b“ *jest to* „liczba, która dzieli a i b“ itp.

Spotykamy je aż nazbyt często w szkole średniej.

Mamy tu do wyróżnienia kilka typowych gatunków tego rodzaju określeń, z których każdy odgrywa jakąś rolę w nauce szkolnej. Przejdziemy je po kolei.

1. **Określenia zdań.**

Nowym terminem, który wprowadzamy może być *całe zdanie*, Na przykład:

(1) „a jest podzielne przez b“

ma oznaczać: **

„istnieje taka liczba c, że $a = b \times c$“

(2) „prosta l jest równoległa do prostej p“

ma oznaczać:

„l i p leżą na jednej płaszczyźnie i nie posiadają punktów wspólnych“.

Ten typ określeń nie nasuwa żadnych ważniejszych uwag, przejdziemy zatem do następnego.

2. **Określenia imion ogólnych i zakresów.** Niezmiernie często klasyfikujemy przedmioty w ogóle lub tylko pewnego rodzaju na dwa gatunki zależnie od tego, czy *spełniają* one lub *nie* pewien z góry narzucony warunek W.

Jeżeli przedmiotem jest a, to oznaczać będziemy przez $W(a)$ zdanie:

„a spełnia *warunek* W“

Od niepamiętnych czasów ludzkość stworzyła i stosuje dwa dalsze sposoby wyrażenia faktu, że jakiś przedmiot a spełnia pewien warunek W.

* Lub: „A ma oznaczać“, „niech oznacza“ itp.
** Mowa tu o *liczbach całkowitych.*

I *sposób*. Tworzymy pewien konwencjonalny termin, jakieś A zwane „*nomen generale* lub *appellativum*“ czy „*imieniem ogólnym*“, „*terminem klasowym*“ — warunku W, którego zadaniem ma być wyrażanie zdania $W(a)$ w postaci:

„a jest A“

Przykłady. Klasyfikujemy np. liczby względne wedle tego, czy są one *większe od zera*, czy *nie*. Jest to klasyfikacja wedle warunku, którego spełnienie przez a zapisujemy w postaci:

$$a > 0$$

Prócz tego tworzymy sobie termin *liczba dodatnia*, którego jedyną funkcją istotną jest zastąpienie zdania

„$a > 0$“

przez:

„a *jest* liczbą dodatnią“

„Liczba dodatnia“ jest *imieniem ogólnym*, związanym w powyższy sposób z warunkiem, który zaznaczyliśmy pisząc:

„$a > 0$“

II *sposób*. Rozważamy „ogół przedmiotów spełniających dany warunek W“ i ów *ogół (zbiór, klasę)* oznaczamy jakimś terminem, powiedzmy α. Zdanie: $W(a)$ *zastępujemy wtedy powiedzeniem*, że:

„*a należy do* α“.

Sposób ten zna od tysiącleci geometria, gdy np. rozważa „miejsce geometryczne punktów spełniających pewien warunek“ itp.

Przykład: „Kula o środku A i promieniu r“ jest to:

„Ogół (miejsce geometryczne) punktów, których odległość od A jest równa r“. Termin α nazwiemy *zakresem warunku* W lub *zakresem* jego *imienia ogólnego*. Mamy zatem aż *trzy* różne sposoby zaznaczenia jednego i tego samego faktu:

(1) zachodzi $W(a)$

(2) a jest A

(3) a należy do α,

o ile utworzyliśmy dla warunku W *imię ogólne* A oraz *zakres* α.

Jakże teraz postępuje praktyka naukowa? Musimy tu wyróżnić kilka sposobów postępowania w różnych okolicznościach.

(1) *Logika teoretyczna* daje w rękę sposoby i pozwala tworzyć w wypadku każdego warunku W, klasyfikującego pojedyncze przedmioty, tak jego *imię ogólne*, powiedzmy A, jak i *zakres* α. *Dawniejsza logika* (tradycyjna) operowała przeważnie *imionami ogólnymi* stojąc

na stanowisku, jak się to mówi, *treści* (*comprehensio*). Imię ogólne symbolizuje w tej teorii i „współoznacza“ (connotat) całość *cech*, jakie przedmioty spełniające warunek tworzący posiadają i które owe przedmioty od innych odróżniają.

Rozdział „o definicjach“ w tradycyjnych podręcznikach odnosi się z reguły do tych właśnie spraw i zawiera prawidła tworzenia *imion ogólnych* przy pomocy innych imion ogólnych. Tu należą (1) znane reguły tworzenia *imion ogólnych* („pojęć“) przez „rodzaj najbliższy i różnicę gatunkową“ („genus proximum et differentia specifica“), (2) zakazy, zresztą niepraktyczne i dziś nieuznawane, nie tworzenia określeń „negatywnych“ („definitio non fit per negationem“) i tym podobne. Prawideł tych jest tak mało w odnośnych choćby obszernych traktatach tradycyjnej logiki, że nie wystarczyłyby one w praktyce nawet dla celów wykładu matematyki w obrębie szkoły średniej. Wiele tych reguł straciło też dziś dla nas swe znaczenie i nikt ich poważnie nie słucha.

Nowsza logika zwróciła się do studiowania raczej teorii *zakresów*. Ujmuje ona problem ze stanowiska *zakresu (extensio), klas, zespołów* itp. Wiedzie to swój początek już od *Leibniza*, którego prace nie mogły jednak wywrzeć tu wielkiego wpływu, gdyż je dopiero niedawno *L. Couturat* z rękopisów częściowo ogłosił. Teorię rzeczoną rozbudowali *Lambert, Boole, de Morgan, Jevons,* nakoniec *Peano* i jego szkoła (jeżeli zechcemy się zatrzymać na czołowej postaci naszych już czasów).

Ze strony *matematyki* powstaje stworzona przez J. Cantora *teoria mnogości,* która jest niczym innym jak tylko rozbudowaną w kierunku matematyki teorią *zakresów*. Tym razem logika stworzyła już przebogaty zespół reguł operowania zakresami, doprowadziła sposoby ich kombinowania i przekształcania do wielkiej jasności i doskonałości. Nie dziw też, że w *teoretycznym* ujęciu *matematyki* badacze przestawili się nieomal całkowicie na punkt widzenia teorii zakresów i w terminach tej teorii stawiają odnośne definicje. Stąd w nowszej matematyce pełno *zakresów, klas, ogółów, zespołów* itp. Nawiasowo dodam, że *Frege, Peano,* a zwłaszcza *Russell* rozwinęli bogato teorię operowania wprost *warunkami* klasyfikującymi czyli, jak się w tej teorii mówi, *funkcjami zdaniowymi* (propozycjonalnymi).

A teraz *matematyka szkolna.* Otóż tu spotykamy się z kompletnym chaosem. Mając do czynienia (świadomie lub nieświadomie) z warunkami klasyfikującymi pojedyncze przedmioty, matematyka szkolna raz określa ich *imiona ogólne* („pojęcia ogólne“, „terminy klasowe“), to znów przerzuca się na określanie ich *zakresów* [przeważnie w geometrii, w teorii tzw. miejsc geometrycznych].

Na przykład:

(1) „*Prostokąt*“ jest to „*równoległobok, posiadający choć jeden kąt prosty*“

[określenie *imienia ogólnego*].

(2) „*Przedział liczbowy od* 2 do 3“ jest to „*ogół liczb takich, że* $2 < x < 3$“

[określenie *zakresu*].

(3) „*Okrąg o środku A i promieniu r na danej płaszczyźnie* α“ jest to „miejsce geometryczne punktów płaszczyzny α oddalonych od punktu A o r“

[określenie *zakresu*].

Spotykamy się również z tak dziwnymi określeniami, jak np.: „Okrąg“ jest to „miejsce geometryczne punktów leżących na jednej płaszczyźnie i oddalonych od pewnego stałego punktu o pewną stałą odległość“.

Autor daje tu określenie *imienia ogólnego* („okrąg“) całej *klasy* utworów (poszczególnych okręgów), które *jednocześnie* są tu określone jako *zakresy* (miejsca geometryczne). Czy jednak takie pomieszanie dwóch gatunków definicyj przyczynia się do rozjaśnienia kwestii, a nie prowadzi do zniszczenia możliwości analizy pojęciowej, śmiem w to wątpić! Nie mam zamiaru żądać od szkoły średniej, aby uczyła dokładnego analizowania logicznego pojęć matematycznych, ale nie mogę się zgodzić z faktem utrudniania tej analizy, jeżeli ten i ów zdolniejszy uczeń sam na własną rękę czy z pomocą uczącego będzie sobie chciał zdać sprawę dokładniej ze struktury objaśnianych przez książkę pojęć. Autorzy matematyczni bardzo często jednak nie dbają o precyzję logiczną, której dać można przecież wyraz i w najprostszych nawet słowach.

Sądzę, że nie ma co toczyć walki o jednolitość definicyj w problemie określenia imion ogólnych czy zakresów. Będziemy w praktyce posługiwali się i jednymi i drugimi. Atoli przynajmniej uczący winien wiedzieć dokładnie, z którym rodzajem ma w danej chwili do czynienia.

3. **Określenie jednostkowe.** Przejdźmy do omówienia typu określeń, co do którego panują największe nieporozumienia, nie tylko w matematyce szkolnej, ale i gdzieindziej. Wróćmy do danego

warunku W, jego terminu klasowego (imienia ogólnego) A i jego zakresu α. Być może, że *znajdzie się jeden jedyny przedmiot, który czyni zadość warunkowi* W. Jeśli tak jest istotnie, to warunek W *wyznacza ów przedmiot w zupełności i niedwuznacznie.* Chodzi nam teraz o to, aby stworzyć sobie formę dla określenia owego *jedynego przedmiotu.* W dawniejszej tradycyjnej logice mieszano wtedy termin A — *imię ogólne* przedmiotów czyniących zadość warunkowi W z terminem oznaczającym ów *jedyny przedmiot* i A stawało się jego *imieniem własnym* (nomen proprium). Z drugiej strony termin α, oznaczający zakres warunku W, jest nazwą zbioru składającego się z jednego jedynego przedmiotu, sądzono więc, że można zidentyfikować ów przedmiot z zakresem i nazwać go tym samym terminem α. I jedno i drugie okazało się niemożliwe. Prawidła logiczne operowania imionami ogólnymi, zakresami o jednym przedmiocie i poszczególnymi przedmiotami są, jak się pokazało zbyt różne, aby tego rodzaju identyfikacja nie prowadziła do głębokich nieporozumień. *Peano i Russell* stworzyli osobną formę logiczną, dla oznaczania *przedmiotu wyznaczonego jednoznacznie* przez dany *warunek* W. Nazwano ją *opisem jednostkowym* lub *deskryptem.* Słowną postać nadajemy opisowi w teorii Russella taką:

„jedyny przedmiot czyniący zadość warunkowi W".

lub „ów (jedyny) przedmiot, który spełnia warunek W".

Proponuję już dawno * szkolną postać tej definicji:

„przedmiot spełniający W, *o ile taki istnieje i tylko jeden*".

W językach posiadających rodzajnik deskrypt odpowiada imieniu z rodzajnikiem *oznaczonym* (są zresztą od tego prawidła i wyjątki). Reguły operowania deskryptem i w ogóle cała jego teoria zostały głęboko rozwinięte przez *Russella* i *Whiteheada* w *Principia Mathematica* (t. 1, I wyd. 1910). Ostatnio *Hilbert* i *Bernays* w znakomitym dziele *Grundlagen der Mathematik I* (1934) poświęcają deskryptowi sporą część książki. Czytelnik może się nieco więcej o tym dowiedzieć też z mej książki *Podstawy teoretyczne arytmetyk.* Kraków 1935. Zanim przejdę do przykładów szkolnych, zacytuję choć jeden przykład formalny dla zilustrowania różnicy między deskryptem będącym opisaniem czy wyszczególnieniem *przedmiotu* określonego *jednoznacznie* przez dany warunek W, a *imieniem ogólnym* A przed-

* p. Gutkowski—Wilkosz, Algebra I. 1923. Porównaj również W. Wilkosz. Arytmetyka liczb całkowitych. Kraków, 1932, wyd. II.

miotów czyniących zadość *W*, czy też *zakresem a*, a więc klasy przedmiotów spełniających *W*:

Przykład: *Wnioskowanie typu*:

koń jest *zwierzęciem*

więc *koń stepowy* jest *zwierzęciem stepowym*

jest *poprawne*.

Tutaj: „koń", „zwierzę", „koń stepowy", „zwierzę stepowe" są to *imiona ogólne*, zastępujące posługiwanie się pewnymi warunkami klasyfikującymi pojedyncze przedmioty w sposób, który opisaliśmy uprzednio.

Wnioskowanie typu:

koń jest *zwierzęciem*,

więc: *głowa konia* jest *głową zwierzęcia*,

jest *mimo pozory niepoprawne!*

Wskazuje na to przykład:

małża jest *zwierzęciem*,

więc: *głowa małży* jest *głową zwierzęcia*, co prowadzi do absurdu, gdyż właśnie małża należy do gromady „bezgłowych". Terminy: „głowa *danego* konia", „głowa *danej* małży" były to opisy jednostkowe przedmiotów pojedynczych, przy czym w wypadku danego konia ów przedmiot był wyznaczony, w przypadku zaś małży *nie*. [Przykład Russella, nieco zmodyfikowany]

A teraz przejdźmy do przykładów deskryptu ze szkoły średniej.

(1) *Różnica* liczb a i b, czyli $a - b$ *powinna być* określona jako: „Owa *jedyna* liczba z taka, że $b + z = a$, lub w postaci mojej: „Liczba z taka, że $b + z = a$, *o ile taka istnieje* i *tylko jedna*"

(2) *Iloraz liczb* a i b, czyli a/b jest to deskrypt: „liczba z taka, że $b \times z = a$, *o ile taka istnieje* i *tylko jedna*"

Czy $^5/_0$ jest *ilorazem* 5 przez 0?

Nie! Gdyż liczba z taka, że $0 \times z = 5$ *nie istnieje*.

Czy $^0/_0$ jest *ilorazem* 0 przez 0?

Nie! Gdyż liczba z taka, że $0 \times z = 0$ istnieje, lecz *nie jedyna*!

A tymczasem pisuje się niestworzone rzeczy na temat tego, że $^0/_0$ to jest „dowolna liczba", „każda liczba", że jest to „symbol nieoznaczony" itp. Niestety dzielni nawet matematycy niechętnie zapoznają się ze zdobyczami logiki! Jasne jest, że tu kłopot sprawia jedynie nieodróżnienie definicji imienia ogólnego lub definicji zakresu od opisu jednostkowego przedmiotu!

(3) Rozważmy następujące określenia:

(α): „punkt jednakowo oddalony od wszystkich punktów koła K"

(β): „punkt jednakowo oddalony od wszystkich punktów koła K i położony w jego płaszczyźnie"

(γ): „ów jedyny punkt, który jest jednako oddalony od wszystkich punktów koła K i leży w jego płaszczyźnie"

Otóż: (α) określa nam *imię ogólne* wszystkich punktów prostej prostopadłej do płaszczyzny koła K i przechodzącej przez jego środek;

(γ): jest poprawnym *opisem jednostkowym środka* koła K.

(β): dawałoby nam, poprawnie biorąc, *imię ogólne* wszelkich punktów płaszczyzny koła K, z których każdy jest od wszystkich punktów koła K jednakowo oddalony.

Takie imię ogólne będzie nam w praktyce, w tym wypadku, niepotrzebne, gdyż dla *koła K* taki punkt *istnieje* i *tylko jeden*. Mieszamy nietroskliwie (β) z (γ), co w tym wypadku jakoś może nie doprowadza do kłopotów. Pomyślmy jednak, że w geometrii analitycznej krzywych płaskich rzędu drugiego, w wypadku zupełnie ogólnym, chcemy określić *środek* krzywej tego rodzaju. Spotykamy się z dwiema postaciami określenia w książkach znanych powszechnie.

(1) Środkiem krzywej danej drugiego stopnia nazywamy: (każdy?) punkt, który połowi * wszystkie średnice tej krzywej przechodzące przez niego.

(2) Środkiem krzywej danej drugiego stopnia jest: ów jedyny punkt, który połowi wszystkie średnice przechodzące przez niego.

W pierwszym wypadku mamy *definicję imienia ogólnego*, w drugim *opis jednostkowy*. W wypadku koła, elipsy, hiperboli, dwu przecinających się prostych mamy na myśli raczej (2) mówiąc o środku tych krzywych. Atoli w wypadku dwu prostych równoległych jesteśmy w kłopocie. Wedle definicji (1) środkiem jest każdy punkt prostej równoległej do obu prostych i leżącej między nimi w równej od obu odległości i w tej samej płaszczyźnie. Wedle (2) krzywa drugiego stopnia, jaką też jest układ dwu prostych równoległych, *nie posiada środka* {brak „jednotliwości"}. Widzimy więc, że w subtelniejszych wypadkach, a przecież tak jeszcze elementarnych, musimy dobrze już uważać!

4. **Określenie relacyj.** Bardzo często stwierdzamy osobnym zdaniem, że pewien warunek W jest spełniony nie przez pojedynczy

---

* Rozumiemy to w odpowiedni sposób w geometrii analitycznej.

przedmiot, lecz *parę* przedmiotów, na przykład a i b. Stwierdzenia takie mamy na przykład w zdaniach:

„Prosta l i prosta m leżą w jednej płaszczyźnie i nie posiadają punktów wspólnych".

„Istnieje liczba całkowita, która pomnożona przez całkowitą a daje w iloczynie całkowitą b".

„Punkt A należy do zbioru punktów tworzących prostą l".

Podobnie, jak rozważanie warunków nakładanych na pojedyncze przedmioty doprowadziło nas do rozważania imion ogólnych, zakresów i opisów jednostkowych, tak też rozważanie warunków nakładanych na *parę* przedmiotów, doprowadza nas do rozważania nowych tworów logicznych zwanych *relacjami*. Zapisywać będziemy spełnienie warunku W przez przedmioty a i b jako $W(a, b)$, przy czym *porządek* tych przedmiotów *może być nieobojętny*! $W(a, b)$ może być spełnione, lecz nie $W(b, a)$. Tradycje języka codziennego ustaliły tu pewien typ wyrażania się, oczywiście nie bezwyjątkowo obserwowany. Zachodzenie $W(a, b)$ jest tu wyrazem pozostawania a w pewnej *relacji* (danej przez W) do przedmiotu b, przy czym dawne zdanie ma postać zdania orzekającego, w którym a jest *podmiotem*, b *przedmiotem*, wyrazem zaś relacji — jest forma *czasownika* zazwyczaj, choć niekoniecznie, *przechodniego* umieszczonego między podmiotem a przedmiotem. W naszych przykładach odnośne zdania brzmią:

(1) $\qquad$ *l jest równoległe do m*

(2) $\qquad$ *a dzieli b*

(3) $\qquad$ *A leży na l*

„być równoległym do", „dzielić", „leżeć na" są to *relacje* wyznaczone przez odnośne warunki.

Logika teoretyczna uogólniając zwyczaj językowy pozwala dla każdego warunku W, narzuconego *parom przedmiotów*, stworzyć symbol, powiedzmy R, dla *relacji* danej (czy stworzonej) przez W, którego zadaniem będzie wyrazić zdanie $W(a, b)$ w postaci *równoważnej*:

$$a \; R \; b$$

O samym R, danym przez W, możemy powiedzieć przy pomocy dość długiej frazy, że „jest to relacja między przedmiotami, powiedzmy u i v, wyrażająca zachodzenie $W(u, v)$". Ponieważ jednak sposób ten jest dość niezgrabny, przeto w elementarnej matematyce raczej określamy cały zwrot:

$$a \; R \; b$$

niż samą relację R. A więc na przykład określamy, co oznacza: $l // m$, $l \perp m$, „l przecina m", $a < b$, $a \neq b$ itp., a rezygnujemy z określenia samych relacyj: $//$, $\perp$, „przecinać", $<$, $\neq$. Należy też zauważyć, że praktyka nie korzysta czasem z przysługującego jej prawa przekształcania zdań typu $W(a, b)$ na zdania typu $a\ R\ b$, chociaż w języku dostatecznie wyrobionym da się to zawsze przeprowadzić. Na przykład stwierdzamy wprost w jakimś wypadku, że $a = b + 1$, ale od biedy możemy to zamienić na zdanie:

a jest „o 1 większe od" b.

Mniejsze znaczenie posiada już dla nas przeprowadzenie analogicznych rozważań dla warunków nakładanych na trójkę, czwórkę itd. przedmiotów i dlatego na tym przegląd typów nominalnych definicyj kończymy.

II Definicja genetyczna.

Definicje nominalne są jedynie używanymi w teoretycznej budowie systemów dedukcyjnych, o ile przeprowadzamy ją w sposób zupełnie ścisły. Z punktu widzenia dydaktyka i pedagoga mogą owe definicje nie zawsze odpowiadać celom i metodom uczenia. Możemy je wtedy zastąpić innymi, które na żądanie umielibyśmy zamienić na nominalne, choć tego zapewne w elementarnej nauce nie będziemy ani chcieli, ani uważali za wskazane uczynić. Logika tradycyjna dyktuje kilka takich nie-nominalnych typów, z których jeden uważam i propaguję już od lat jako szczególnie ważny dla nauki matematyki w szkole niższej i średniej. Jest to *definicja genetyczna.*

Oto na czym ona polega: Zamiast określać nominalnie jakiś utwór matematyczny i podawać czym on ma *być,* opisujemy *czynności,* które należy wykonać, aby ów utwór *otrzymać.* Aczkolwiek ma to zastosowanie, tak dobrze w arytmetyce jak i w geometrii, to jednak w tej ostatniej zdaje mi się posiadać większe znaczenie.

Przykład: Zamierzamy określić genetycznie *linię łamaną płaską.*

Definicja nominalna jest tu dość kłopotliwa, co widać już choćby z tego, jakie błędy ze stanowiska logiki popełniają tu autorzy podręczników.

Postąpimy jednak tak:

Tworzymy łańcuch czynności:

1. Obieramy skończoną ilość punktów na płaszczyźnie.

2. Numerujemy w dowolny sposób owe punkty kolejnymi liczbami od 1 aż do n. Oznaczamy je przy tym na przykład jako A_1, $A_2 \ldots . A_n$.
3. Łączymy kolejno odcinkami:

$$A_1 \text{ z } A_2 \quad A_2 \text{ z } A_3 \ldots \text{ aż do } A_{n-1} \text{ z } A_n.$$

Figurę tak utworzoną nazwiemy linią łamaną płaską.

Gdybyśmy jeszcze dodali jedną czynność:

4. A_n łączymy jeszcze z A_1,

otrzymalibyśmy genetycznie *wielobok zamknięty* (krzyżujący się ze sobą lub nie). Czytelnik zechce teraz pomyśleć o podobnym genetycznym określeniu tak trudnych dla nominalnego ujęcia utworów, jak graniastosłup, ostrosłup, stożek itp.

St. Gołąb i J. Leśniak (Kraków).

Pojęcie funkcji i równania.*

Jest faktem niezaprzeczonym, popartym przez historię nauki, że nietylko — naturalnym porządkiem rzeczy — matematyka opiera się na logice, ale i na odwrót logika zawdzięcza sporo matematyce. Dzięki rewizji podstaw matematyki, rewizji, którą na wielką skalę rozpoczął ubiegły wiek (a która do dnia dzisiejszego na wielu punktach jeszcze nie jest ukończona), musiano znacznie rozbudować logikę klasyczną i obecnie poważniejsze studium matematyczne jest nie do pomyślenia bez obszernej i solidnej podbudowy logicznej, jak również — zdaniem naszym — sprawy poruszone w tym artykule nie powinny być obce uczącym matematyki w szkole średniej. O ile wspomniana rewizja podstaw matematyki, a w ślad za tym i logiki, rozpoczęta została przez matematyków przede wszystkim, o tyle dokonanie epokowego przewrotu na tym polu stało się udziałem dwóch filozofów angielskich B. Russella i A. N. Whitehead'a. Tym dwom uczonym w pierwszym rzędzie ma matematyka do zawdzięczenia prawdziwie naukowe, na podstawach logicznych ugruntowanie fundamentalnych pojęć matematyki współczesnej.

W niniejszym artykule postawiliśmy sobie za zadanie wyłożyć ze stanowiska możliwie najbardziej nowoczesnego i czyniącego zadość

* W czasie pomiędzy napisaniem tego artykułu a jego opublikowaniem, ukazała się książka doc. dr A. Tarskiego pt. „O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej" poruszająca niektóre z rozważanych zagadnień.

wymaganiom ścisłości dwa najbardziej podstawowe w matematyce pojęcia: pojęcie funkcji i pojęcie równania.

Funkcje propozycjonalne (zdaniowe).

Badania ostatnich dziesiątków lat stwierdziły, że jednym z najważniejszych dla logiki matematycznej i matematyki pojęć jest pojęcie tzw. funkcji propozycjonalnej. Oczywiście nie tu miejsce na podawanie ze stanowiska formalnego zupełnie ścisłej definicji funkcji propozycjonalnej, gdyż to może być uskutecznione tylko na gruncie pewnego określonego systemu logicznego, co w ramach niniejszego artykułu jest niemożliwe. Podamy tedy definicję funkcji propozycjonalnej nie formalną wprawdzie, ale intuicyjnie zupełnie zrozumiałą i dla naszych celów wystarczającą.

Definicja. *Funkcją propozycjonalną (zdaniową) nazywamy wyrażenie, zawierające tzw. zmienne lub nieoznaczone, które ma tę własność, że staje się sądem (tj. zdaniem prawdziwym lub fałszywym), jeżeli w miejsce wszelkich występujących zmiennych (nieoznaczonych) podstawimy jakiekolwiek przedmioty (pojęcia) z pewnego z góry umówionego zbioru (zakresu, zwanego też polem).* [1]

Przykłady funkcyj propozycjonalnych:

1) $x = x$

2) $x \neq x$

3) $x = x^2$

4) $\frac{1}{x}$ jest liczbą

5) x jest autorem „Quo vadis"

6) x jest człowiekiem żyjącym i ma co najmniej 50 lat

7) x jest bratem y

8) $x = y + 1$

9) $x > y$

---

* Zmienne oznaczać będziemy w myśl ustalonej tradycji końcowymi literami alfabetu. Jeżeli w danym wyrażeniu figuruje litera np. x kilka razy, wówczas obowiązuje umowa, iż należy równocześnie podstawić w miejsce każdej litery x jeden i ten sam wybrany przedmiot z pola. Jeśli natomiast w danej funkcji propozycjonalnej występuje kilka różnych liter np. x, y, z,..., wówczas wskazuje to, że wolno za poszczególne litery wstawiać niezależnie od siebie rozmaite przedmioty z pola. Dopuszczamy też operacje polegające na tym, iż w miejsce zmiennej x podstawiamy pewien przedmiot z pola, a w miejsce pozostałych zmiennych y, z,... nic nie podstawiamy. Wówczas oczywiście funkcja propozycjonalna nie przechodzi w sąd, ale pozostaje nadal funkcją propozycjonalną, tylko o mniejszej „ilości" nieoznaczonych. Tego rodzaju postępowanie nazwiemy „skasowaniem" (albo zgaszeniem, albo jeszcze upozornieniem) zmiennej x. Poniżej poznamy inne (i to zasadniczo inne) sposoby kasowania zmiennych we funkcjach propozycjonalnych.

10) $$x + y = y + x$$

11) y dzieli się przez x

12) x ma wysokość y.

Funkcje propozycjonalne od pierwszej do piątej włącznie zawierają jedną zmienną x. Funkcje od siódmej do dwunastej zawierają dwie zmienne: x, y. Oczywiście można podać funkcje propozycjonalne zawierające trzy i więcej zmiennych. Funkcjom propozycjonalnym zawierającym dwie zmienne dajemy za Russellem i Whiteheadem nazwę relacyj. Przykłady 5), 6), 7) są zaczerpnięte z życia, pozostałe z matematyki. Funkcje 1) i 10) stają się prawdą dla wszelkich możliwych podstawień w miejsce x wzgl. x, y z zakresu liczb; funkcja 2) staje się zawsze fałszem. Funkcja 4) staje się dla każdego $x \neq 1$ fałszem, jeżeli stoimy na gruncie liczb całkowitych, staje się jednak przy wielu podstawieniach prawdą, gdy dopuścimy zakres liczb wymiernych lub rzeczywistych. Staje się jednak zawsze fałszem przy podstawieniu zera za x przy jakimkolwiek zakresie liczbowym. Analogiczna uwaga obowiązuje co do funkcji 11). Zauważmy, że wartość funkcji 6) zależy nie tylko od elementu podstawionego, ale też i od chwili, w której to czynimy. W matematyce z tego rodzaju funkcjami *nie* mamy do czynienia. Zwróćmy wreszcie uwagę na to, że w przykładzie 12) jest inny zakres podstawiania za zmienną x inny za zmienną y. Gdybyśmy za obie zmienne podstawili liczby, dostalibyśmy nonsens (ani prawdę, ani fałsz). Jeżeli jednak za x podstawimy konkretny prostokąt, a za y liczbę, dostaniemy zawsze sąd (zdanie posiadające ocenę prawdy względnie fałszu).

Zajmiemy się z początku funkcjami propozycjonalnymi zawierającymi jedną zmienną. Chodzi o wprowadzenie krótkiego a wygodnego symbolu na funkcje propozycjonalne. Można by je oznaczać za pomocą jednej litery. Czasem trzeba jednak uwidocznić w symbolu zmienną, gdyż obok samych funkcyj przychodzi nam operować sądami będącymi wynikiem podstawienia za zmienną konkretnych elementów z pola.

Dla lepszej orientacji będziemy funkcje propozycjonalne oznaczali zawsze za pomocą dużych liter alfabetu łacińskiego krótko:

$$F, G, H, A, B, C, \ldots$$

albo z zaznaczeniem zmiennej (nieoznaczonej): $F(x)$, $G(x)$,...

Natomiast początkowe litery alfabetu rezerwujemy dla oznaczenia konkretnych choć bliżej nam nie znanych elementów z pola. Wobec tego

$$F(a),\ G(b),\ H(c), \ldots$$

oznaczają już sądy, które otrzymujemy po podstawieniu we funkcji F elementu a za zmienną, we funkcji G elementu b za zmienną, we funkcji H elementu c za zmienną.

Logika zdań (sądów) podaje nam sposoby (definicje) konstruowania z danych sądów nowych sądów. I tak najważniejszymi z tych konstrukcji są następujące:

Gdy p i q są sądami, wówczas

1) $\sim p$ (przeczenie p) jest sądem

2) $p \vee q$ (p lub q) jest sądem

3) $p \,.\, q$ (p i q) jest sądem

4) $p \supset q$ (z p wynika q) jest sądem

5) $p \equiv q$ (p równoważne q) jest sądem.

Poniższa tabelka, w której krótko znakiem $+$ oznaczamy ocenę prawdy, znakiem zaś $-$ ocenę fałszu, pokazuje (definiuje) nam, w których przypadkach nowo utworzone sądy uważamy za prawdziwe, a w których za fałszywe.

(1)

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \,.\, q$	$p \supset q$	$p \equiv q$
$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

Z definicji funkcji propozycjonalnej wypływa bezpośrednio, że, skoro $F(x)$, $G(x)$ są dwiema funkcjami propozycjonalnymi o tym samym zakresie podstawiania, wówczas

$$\sim F(x), \quad F(x) \vee G(x), \quad F(x) \,.\, G(x), \quad F(x) \supset G(x), \quad F(x) \equiv G(x)$$

są funkcjami propozycjonalnymi. Funkcję $\sim F(x)$ nazywamy zaprzeczeniem funkcji $F(x)$. Funkcję $F(x) \vee G(x)$ nazywamy sumą logiczną funkcyj $F(x)$ i $G(x)$. Funkcję $F(x) \,.\, G(x)$ nazywamy iloczynem funkcyj $F(x)$ i $G(x)$.

Z danej funkcji propozycjonalnej $F(x)$ można zawsze przez tzw. generalizację wzgl. partykularyzację (terminy wprowadzone przez Russella i Whitehead'a) utworzyć dwa sądy, które odpowiednio będziemy czytali

(2 a) $\left\{\begin{array}{l}\text{„dla każdego } x \text{ prawdą jest } F(x)\text{"} \\ \text{„istnieje } x\text{, dla którego prawdą jest } F(x)\text{"}\end{array}\right.$

a które będziemy odpowiednio notowali:

$$(2\,b) \quad \begin{cases} (x)\ \{F(x)\} \\ (\exists\, x)\ \{F(x)\}. \end{cases}$$

Zauważmy, iż wyrażenia (2b) są już sądami. Występująca w nich litera x ma charakter tylko pozorny, a nie istotny. Znaczy to, że x nie jest tu zmienną, w którą wolno by było podstawiać elementy pola. Na skutek tego zdanie $(x)\ \{F(x)\}$ oznacza to samo co $(y)\{F(y)\}$ czy $(z)\ \{F(z)\}$. Zauważymy, iż za pomocą odpowiednich oznaczeń można by się w ogóle obejść bez zmiennych pozornych.*

Określenie I. Jeżeli sąd

$$(3) \qquad (x)\ \{F(x) \equiv G(x)\}$$

jest prawdą, wówczas powiadamy, że funkcje propozycjonalne $F(x)$ i $G(x)$ są sobie równoważne.

Określenie II. Jeżeli sąd

$$(4) \qquad (x)\ \{F(x) \supset G(x)\}$$

jest prawdą, wówczas powiadamy, że funkcja $G(x)$ jest konkluzją funkcji $F(x)$ albo inaczej, że $G(x)$ wynika (wypływa) z funkcji $F(x)$. Ze sądami typu (3) wzgl. (4) mamy bardzo często do czynienia.

Pojęcie klasy.

Pojęcie klasy (zbioru albo mnogości) wiąże się ściśle z pojęciem funkcji propozycjonalnej i nie da się ująć (przynajmniej w dzisiejszym stanie nauki) w postaci definicji nominalnej. Tworzenie tzw. klas i operowanie klasami ma za cel jedynie wygodniejsze omawianie funkcji propozycjonalnych. Każda funkcja propozycjonalna rodzi pewną określoną klasę i naodwrót rozważać będziemy tylko takie klasy, które powstały z pewnych funkcji propozycjonalnych. Jeżeli dana jest funkcja propozycjonalna, to klasą, którą ona rodzi, jest

* Otrzymywanie z funkcji propozycjonalnych jednej zmiennej sądów przez generalizację lub przez partykularyzację (albo jak się ogólnie mówi przez kwantyfikowanie zmiennej) jest zatem sposobem kasowania tej zmiennej. Jeżeli mamy funkcję propozycjonalną większej ilości zmiennych, wówczas możemy pewne zmienne skwantyfikować, inne zaś nie. W takim razie otrzymamy funkcję propozycjonalną o mniejszej ilości zmiennych. Należy jednak pamiętać, że jeżeli kwantyfikujemy większą ilość zmiennych, wówczas rezultat jest naogół zależny od porządku kwantyfikowania. Jako najprostszy przykład weźmy $F\,(x, y) \overset{df}{=} x = y$ (znak $\overset{df}{=}$ czytamy niech będzie z definicji albo oznacza z definicji). Wówczas sąd $(x)\ (\exists\ y)\ \{F(x\,y)\}$ jest prawdą, podczas gdy sąd $(\exists\ y)\ (x)\ \{F(x\,y)\}$ jest fałszem (porządek kwantyfikowania w symbolu panuje od ręki prawej ku lewej, ale w wypowiedzi ustnej (właściwość naszego języka!) wygodniej jest zachować porządek odwrotny tj. od ręki lewej ku prawej. Tak więc pierwszy z powyższych sądów czytamy: dla każdego x istnieje y o własności $F(x, y)$; drugi natomiast: Istnieje y takie, że dla wszystkich x zachodzi $F(x\,y)$.

klasa tych wszystkich x, dla których $F(x)$ staje się prawdą (sądem prawdziwym). Klasę tę będziemy oznaczali symbolem

(5) $$\hat{x}\,\{F(x)\}\ *$$

Opłaca się klasy oznaczać jednym krótkim symbolem. Będziemy je oznaczali początkowymi literami alfabetu greckiego, o ile nie będzie konieczne zaznaczanie funkcyj propozycjonalnych, z których one powstały.

Dwie klasy będą uważane za identyczne (czyli zawierające te same elementy), jeżeli odpowiednie funkcje propozycjonalne $F(x)$ i $G(x)$, z których one powstały, są sobie równoważne. A zatem, skoro

(6) $$\alpha \overset{df}{=} \hat{x}\,\{F(x)\},\quad \beta \overset{df}{=} \hat{x}\,\{G(x)\},$$

to

(7) $$\alpha = \beta \overset{df}{=} (\hat{x})\,\{F(x) \equiv G(x)\}\ \text{jest prawdą.}$$

Wprowadzamy dalej wygodne pojęcie sumy i iloczynu dwu klas:

(8) $$\alpha \cup \beta \overset{df}{=} \hat{x}\,\{F(x) \vee G(x)\},\quad \alpha \cap \beta \overset{df}{=} \hat{x}\,\{F(x)\,.\,G(x)\}.$$

Powiadamy nareszcie, że klasa α mieści się w klasie β i zapisujemy to symbolicznie $\alpha \subset \beta$, jeżeli $G(x)$ wynika z $F(x)$ czyli

(9) $$\alpha \subset \beta \overset{df}{=} (x)\,\{F(x) \supset G(x)\}\ \text{jest prawdą.}$$

Ponieważ mamy czasem do czynienia z funkcjami propozycjonalnymi, które przy żadnym podstawieniu nie stają się prawdą, przeto zmuszeni jesteśmy do rozważań wprowadzić klasy tzw. puste, nie zawierające żadnego elementu, zrodzone z takich właśnie funkcyj. Przyjmujemy symbol

(10) $$\Lambda$$

za symbol klasy pustej. Powiedzenie, że element a należy do klasy α powstałej z funkcji $F(x)$, oznacza, że prawdą jest $F(a)$, co zapisujemy: $a \varepsilon \alpha$ i czytamy: a należy do α.

Często mamy do czynienia z klasami, do których należy tylko jeden element czyli z tzw. klasami jednostkowymi. Np. klasa α powstała z następującej funkcji propozycjonalnej

$$F(x) \overset{df}{=} 1 + x = 2$$

jest taką klasą jednostkową, bo należy do niej tylko jeden jedyny element, mianowicie liczba 1. Czysto formalnie można klasy jednostkowe zdefiniować za pomocą pojęcia funkcyj propozycjonalnych dwu zmiennych, co pomijamy jako niekonieczne dla naszych dalszych rozważań. Jednoznaczne określenie elementu za pomocą

* Zauważmy, że x jest w tym symbolu zmienną pozorną.

funkcji $F(x)$ wyznaczającej klasę jednostkową nosi nazwę opisu jednostkowego (deskryptu) i bywa w matematyce (w szczególności np. w arytmetyce) często stosowane.

Relacje.

Przejdźmy teraz do funkcji propozycjonalnych dwu zmiennych, które nazwaliśmy relacjami. Tutaj będzie wygodniej zamiast symboli

(11 a) $$R(x, y), \quad S(x, y), \quad T(x, y)$$

używać symboli

(11 b) $$x\,R\,y, \quad x\,S\,y, \quad x\,T\,y,$$

gdzie R, S, T są krótkimi symbolami relacyj, a x, y zmiennymi, a więc pustymi „miejscami", w które można wstawiać przedmioty z określonych zakresów. Dla uniknięcia nieporozumień zaznaczamy dobitnie na samym początku, że pary przedmiotów wstawiane do relacyj mają być pojęte jako pary uporządkowane* (jeden z elementów pary jest wyróżniony) tak, iż wynik podstawienia pary (a, b) w relację $x\,R\,y$ może być inny niż wynik podstawienia pary (b, a). Umawiamy się przy tym, że podstawiać parę porządkową (a, b) w relację $x\,R\,y$ znaczy podstawić a za x oraz b za y. Tak np., jeżeli

$$x\,R\,y \overset{df}{=} x > y,$$

wówczas $y\,R\,x$ oznacza całkiem inną relację, a mianowicie

$$y > x,$$

która w tym przypadku będzie miała przy każdym podstawieniu różnych elementów z pola liczb rzeczywistych ocenę przeciwną niż relacja $x\,R\,y$.

Z każdej relacji $x\,R\,y$ można przez generalizację względnie partykularyzację jednej ze zmiennych otrzymać cztery funkcje propozycjonalne, dwie zależne od zmiennej x i dwie zależne od zmiennej y:

(12) $$\begin{cases} (\exists\, x)\,\{x\,R\,y\}\ (= \mathit{Q}(y)) \\ (\exists\, y)\,\{x\,R\,y\}\ (= D(x)) \end{cases}$$

(13) $$\begin{cases} (x)\,\{x\,R\,y\} \\ (y)\,\{x\,R\,y\}. \end{cases}$$

z których pierwsze dwie mają bardzo ważne znaczenie. Klasę wyzna-

* Pojęcie pary uporządkowanej da się określić czysto formalnie. Zaznaczamy jednak, iż nie zgadzamy się w tym kierunku z Russell'em i Whitehead'em, których definicja pary uporządkowanej za pomocą specjalnej relacji kryje w sobie naszym zdaniem — circulus vitiosus.

czoną przez funkcję propozycjonalną $\mathfrak{C}(y)$ nazywać będziemy przeciwdziedziną relacji R i będziemy ją oznaczać przez

(14) $$\mathfrak{C}'R.$$

Klasę wyznaczoną przez funkcję propozycjonalną $D(x)$ nazywać będziemy dziedziną relacji R i będziemy ją oznaczać krótko przez

(15) $$D'R.$$

Można wykazać, że klasy $\mathfrak{C}'R$ i $D'R$ mogą być puste tylko równocześnie i wówczas relację R nazywamy pustą relacją.

Funkcje liczbo-liczbowe.

Wśród relacji odgrywają w matematyce najważniejszą rolę relacje szczególne, którym dajemy nazwę relacji jednoznacznych. Są to mianowicie te relacje, które — mówiąc słowami — mają tę własność, że do każdego x istnieje „co najwyżej jedno" takie y, iż $x\,R\,y$ staje się po podstawieniu prawdą. Definicja formalna opiewa następująco:

Utwórzmy przy pomocy relacji R funkcję propozycjonalną trzech zmiennych $A(x, y, z)$:

(16) $$A(x, y, z) \overset{df}{=} x\,R\,y \cdot x\,R\,z \supset y = z.$$

Przez zgeneralizowanie wszystkich trzech zmiennych otrzymujemy z funkcji $A(x, y, z)$ sąd p:

(17) $$p \overset{df}{=} (x)\,(y)\,(z)\,\{A(x, y, z)\}.$$

Otóż R jest relacją jednoznaczną $\overset{df}{=}$ p jest prawdą.

Jeżeli R jest relacją jednoznaczną, wówczas, o ile a należy do dziedziny relacji, możemy zapomocą deskryptu utworzyć jednoznacznie określony przedmiot, który nazywamy odpowiednikiem (według relacji R) elementu a, i który oznaczamy symbolem

(18) $$R(a)^*.$$

Oczywiście symbol (18) nie przedstawia nic, jeżeli a nie należy do dziedziny $D'R$ lub, jeżeli sąd $(y)\,(z)\,\{A(a, y, z)\}$ jest fałszem. Pośród relacji jednoznacznych istnieje pewna b. ważna kategoria relacji, którą uczynimy przedmiotem naszych dalszych rozważań, mianowicie kategoria tych relacji, dla których zakresem podstawialności za obie zmienne są liczby i to (przeważnie) liczby rzeczywiste. Tego rodzaju relacjom dajemy nazwę *funkcyj liczbo-liczbowych lub krótko funkcyj*. Odtąd zatem słowo funkcja będzie oznaczać

---

* $R(a)$ jest jedynym elementem klasy jednostkowej powstałej z funkcji propozycjonalnej $F(x) \overset{df}{=} a\,R\,x$.

funkcję liczbo-liczbową. Ilekroć zaś będzie mowa o innych funkcjach (np. propozycjonalnych) dodawać będziemy zawsze przymiotnik wyróżniający.*

Zauważymy nasamprzód — co Czytelnik z łatwością sam wykaże, — że w myśl poprzedniej definicji funkcji oraz deskryptu $R(a)$, jeżeli $x \, R \, y$ jest funkcją, *wówczas relacja* S:

(19) $$x \, S \, y \overset{df}{=} y = R(x)$$

jest równoważna relacji R, co oznacza, że obie relacje przy jakimkolwiek podstawieniu stają się równocześnie prawdą wzgl. fałszem. Zyskujemy tym samym nowy, a wygodny w praktyce, symbol funkcji: $y = R(x)$. Dla oznaczania funkcyj (liczbo-liczbowych) będziemy używali małych liter alfabetu łacińskiego: f, g, h,... itd.

W tym miejscu należy zwrócić uwagę, iż przyjęcie tej symboliki jest pewnym odstępstwem od zawartej umowy, iż symbol, w którym przed literą x, ujętą w nawias stoi duża litera alfabetu łacińskiego, oznaczać nam będzie funkcję propozycjonalną. $R(x)$ bowiem nie oznacza funkcji propozycjonalnej. $R(x)$ genetycznie powstał — rzec można — w odwrotnym kierunku niż $F(x)$. Najpierw bowiem jest dana funkcja propozycjonalna $F(x)$, z której przez wstawianie otrzymujemy sądy $F(a)$, $F(b)$, etc. Podczas gdy z danego naprzód zespołu przedmiotów $R(a)$, $R(b)$, etc. tworzymy wtórnie wyrażenie $R(x)$ z nieoznaczoną x, które to wyrażenie ma przy odpowiednich podstawieniach za x przechodzić w przedmioty $R(a)$, $R(b)$ etc.

Odnośnie do przyjętej terminologii zauważymy jeszcze, że dla funkcji

(20) $$y = f(x)$$

dziedzina odpowiedniej relacji nazywa się polem albo obszarem określenia funkcji f; przeciwdziedzina zaś nazywa się zapasem albo zbiorem wartości funkcji f; x nosi nazwę zmiennej niezależnej, y zmiennej zależnej.

Ze względu na typowy charakter (20) relacyj będących funkcjami liczbo-liczbowymi nie stoi obecnie nic na przeszkodzie, a nawet jest wskazane ze względu na dalsze zastosowania, przyjąć po prostu symbol $f(x)$ za symbol funkcji $y = f(x)$.

Uwaga. Russell i Whitehead przyjmują symbol

(21) $$f(\hat{x})$$

za symbol funkcji. Daszek nad literą x ma oznaczać miejsce puste. Jesteśmy jednak zdania, że daszek ten jest zbyteczny, jeżeli tylko konsekwentnie przestrzegamy umowy, że litery x, y, z... oznaczają zmienne, a więc nie liczby (w ogóle przedmioty), tylko puste miej-

* W różnych działach matematyki odgrywają bardzo wielką rolę relacje, w których zmienna y posiada zakres liczbowy, a zmienna x nieliczbowy. Np. za x wolno nam podstawiać tylko zbiory punktów określonej przestrzeni.

sca, natomiast litery a, b, c,... wzgl. x, y, z ze wskaźnikami (u dołu) oznaczają liczby. Tak więc symbol $f(x)$ przedstawia nam funkcję, natomiast symbole $f(a)$, $f(b)$, $f(x_0)$, $f(y_1)$,... przedstawiają nam liczby, które otrzymuje się w wiadomy sposób z funkcji $f(x)$.

Tu nasuwa się jednak pytanie, dlaczego dla funkcji liczbowej nie przyjęliśmy określenia bezpośredniego, analogicznego do tego, jakie przyjęliśmy dla funkcji propozycjonalnej, a mianowicie:

funkcją liczbo-liczbową nazywamy wyrażenie zawierające nieoznaczoną x, które to wyrażenie staje się liczbą po podstawieniu za x wartości liczbowej z danego z góry zbioru.

Dlaczegoż zatem obraliśmy drogę dłuższą i okólnie poprzez funkcje propozycjonalne dwu zmiennych (a po drodze nawet trzech zmiennych) dotarliśmy do definicji funkcji liczbo-liczbowej jednej zmiennej? Otóż po pierwsze dlatego, że bez pojęcia funkcji propozycjonalnej w dalszym ciągu nie można się obejść (definicja równania!). Po drugie, przy definicji funkcji za pomocą relacyj ujawnia się w sposób naturalny pole funkcji, które przy definicji bezpośredniej musimy a priori wprowadzać w sposób sztuczny. Zachodzi bowiem niejednokrotnie potrzeba rozróżniania funkcyj o tym samym formalnie przepisie przyporządkowania, a różnych polach. Wreszcie samo pole jako klasa liczb najprościej określa się przez funkcję propozycjonalną.

Inna rzecz, że w praktyce mamy najczęściej do czynienia z funkcjami definiowanymi w sposób bezpośredni i że tylko sposób bezpośredni — w różnych zresztą odmianach — nadaje się do spopularyzowania pojęcia funkcji w szkole średniej.

W praktyce częściej spotykamy się z funkcjami, które można zdefiniować za pomocą „*wyrażeń analitycznych*“, aniżeli z takimi, które definiuje się dłuższym lub krótszym opisem słownym (tzw. definicje genetyczne), jak np. funkcja

$$E(x),$$

którą określamy jako największą całkowitą zawartą w x. Zresztą jest kwestią dość elastyczną, bo kwestią umowy, co nazwać wyrażeniem analitycznym. Wiadomo np., że funkcję $f(x)$ określoną za pomocą dwóch słownych umów:

gdy a wymierne, niech $f(a) = 0$,

gdy a niewymierne, niech $f(a) = 1$,

można, posługując się dwukrotnym przejściem do granicy, wyrazić za pomocą funkcji równowartościowej * określonej przez wzór analityczny.

* Zob. str. 35.

Podobnie biorąc za punkt wyjścia elementarną, genetyczną definicję funkcji sinus,* skłonni jesteśmy powiedzieć, że nie określiliśmy funkcji sinus przez wyrażenie analityczne. Posiadłszy jednak teorię szeregów potęgowych i określając funkcję sinus za pomocą wzoru:

$$\sin x \overset{df}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

zgodzimy się na to, że określono sinus przez wyrażenie analityczne. (Uwaga: używamy tego samego symbolu sinus ze względu na to, że obie funkcje są równowartościowe).

Odnośnie do definiowania funkcyj zauważymy, że w praktyce, o ile definiujemy funkcję sposobem bezpośrednim za pomocą wyrażenia analitycznego, powinniśmy wpierw podać pole tej funkcji, albowiem pole wraz z przepisem wyznaczają funkcję. Jeżeli jednak podajemy funkcję przez wyrażenie analityczne bez wyszczególnienia pola, to nie mamy jeszcze do czynienia z funkcją. W takich razach przyjmujemy umowę, że polem funkcji $f(x)$ jest zbiór tych *wszystkich* liczb, które wstawione w miejsce x do wyrażenia analitycznego sprawiają, że wyrażenie staje się liczbą jednoznacznie określoną.

Każde wyrażenie analityczne jest albo kombinacją funkcyj elementarnych (przez kombinację rozumiemy tworzenie nowych wyrażeń ze starych za pomocą dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia, potęgowania i pierwiastkowania), albo funkcją złożoną albo nieskończonym szeregiem funkcyj. Przez poprzednie omówienie pól funkcyj elementarnych, wykonalności działań algebraicznych oraz zbieżności szeregów można zawsze a posteriori ustalić pole danego wyrażenia analitycznego. Zacieśniając w sposób sztuczny pole przy pozostawieniu bez zmiany przepisu tworzymy nową funkcję, nie identyczną z dawną.

Zauważymy, iż przy definicji funkcji jako relacji pole funkcji mieści się w samej definicji funkcji, można więc powiedzieć, że jest dane równocześnie z przepisem funkcyjnym. Przy definicji bezpośredniej naprzód podajemy pole, a potem przepis funkcyjny, działający w tym polu. O ile wreszcie definiujemy funkcję przez samo wyrażenie analityczne, to wyznaczenie pola funkcji dokonywa się a posteriori. Przy badaniu pola a posteriori może się zdarzyć, że pole jest zbiorem pustym. (W tym przypadku i zapas funkcji jest oczywiście również pustym zbiorem).

* Zob. J. Leśniak: O okresach zasadniczych funkcyj trygonometrycznych. Poradnik. Rok V. Nr 3 (9).

Definicja. *Funkcje* $f(x)$ *i* $g(x)$ *nazywamy równowartościowymi i piszemy*

(22) $$f(x) \equiv g(x),$$

jeżeli ich relacje (z których powstały) są sobie równoważne.

Wychodząc zaś z bezpośredniej definicji funkcyj należałoby równowartościowość dwóch funkcyj $f(x)$ i $g(x)$ określić w ten sposób:

I) pola funkcyj $f(x)$ i $g(x)$ są klasami identycznymi oraz

II) zdanie $(x)\ \{x \varepsilon P(f) \supset f(x) = g(x)\}$ *

jest zdaniem prawdziwym. Z powyższego określenia wypływa, że równowartościowość dwóch funkcji jest własnością przechodnią, to znaczy: dwie funkcje równowartościowe trzeciej, są między sobą równowartościowe.

Funkcje stałe.

Pewną szczególną a ważną klasę funkcyj tworzą te, których przepisy przyporządkowują każdej wartości z pola jedną i tę samą liczbę. Są to tzw. funkcje stałe. Jeżeli c jest ową jedyną liczbą, która jest przyporządkowana na mocy przepisu f wszystkim liczbom pola, wówczas piszemy:

(23) $$f(x) \equiv c$$

gdzie użyto symbolu c jako symbolu funkcji stałej. W powyższym wzorze należałoby ze względu na definicję równowartościowości dwóch funkcyj w jakiś sposób zaznaczyć pole funkcji stałej c. Oznaczając przez α pole funkcji stałej c zapiszemy funkcję znakiem

(24) $$c_{[\alpha]}.$$

Przez opuszczenie znaku $[\alpha]$ będziemy rozumieli, że pole składa się ze *wszystkich* liczb. Należy podkreślić, iż funkcje stałe przybierające tę samą wartość mogą się różnić przepisem, polem wzgl. jednym i drugim. Dla przykładu weźmy funkcje:

$$f(x) \overset{df}{=} 0 \cdot x + 2$$
$$g(x) \overset{df}{=} 0 \cdot x^2 + 2$$
$$h(x) \overset{df}{=} 2$$
$$k(x) \overset{df}{=} \frac{x}{x} + 1$$
$$l(x) \overset{df}{=} 2_{[\alpha]}, \quad \text{gdzie} \quad \alpha \overset{df}{=} \hat{x}\,\{x \neq 0\}.$$

Wszystkie powyższe funkcje są funkcjami stałymi (o wartości 2). Pierwsze trzy różnią się tylko przepisem (pola mają identyczne), ale są między sobą równowartościowe. Czwarta ma już inne pole, wobec tego nie jest równowatościową z żadną z pierwszych trzech.

---

* $P(f)$ oznacza pole funkcji $f(x)$.

Natomiast jest:

$$k(x) \equiv l(x)$$

Omawianie pojęcia funkcji liczbo-liczbowych dwu lub więcej zmiennych uważamy ze względu na prostotę analogii i zakreślone ramy niniejszego artykułu za zbędne.

Pojęcie równania o jednej niewiadomej.

Definicja. Równaniem (liczbowym) o jednej niewiadomej nazywamy każdą funkcję propozycjonalną $F(x)$ taką, że jest

(25) $$F(x) \stackrel{df}{=} f(x) = g(x).$$

gdzie $f(x)$ i $g(x)$ są dwiema dowolnymi funkcjami (liczbo-liczbowymi) zmiennej x.

Uwaga 1. Pojęcie równania jest w matematyce daleko szersze, aniżeli tu wprowadzone. Są np. równania funkcyjne (wśród nich różniczkowe, całkowe), które nie podpadają pod powyższą definicję. Z tych powodów wprowadziliśmy pojęcie równania liczbowego, a nie równania.

Uwaga 2. Wiadomo, że posiadamy różne zakresy liczbowe (liczby całkowite, wymierne, rzeczywiste itd.). Wprawdzie przy podaniu relacji otrzymujemy podany z góry zakres podstawialności za zmienne, to jednak, ponieważ w różnych zakresach liczbowych używamy przy oznaczaniu działań tych samych symboli, więc sama forma równania (25) nie dyktuje nam jeszcze zakresu liczbowego, wobec czego dla dokładności należałoby przy podaniu równania dodawać zawsze zakres liczbowy, do jakiego mamy równanie odnieść. Celem uniknięcia zbytecznych komentarzy umawiamy się raz na zawsze, że nie podanie zakresu liczbowego oznacza, iż mamy na myśli zakres liczb rzeczywistych. W przeciwnym razie będziemy wyszczególniać zakres liczbowy, jaki mamy na względzie.

Uwaga 3. Weźmy pod uwagę następujące najprostsze równanie

(*) $$x = 0.^{*}$$

Widoczne, że funkcja propozycjonalna wyrażona w postaci tego równania jest równoważna funkcji propozycjonalnej określonej przez nierówność:

(**) $$x^2 \leqslant 0.$$

Mimo, że funkcja propozycjonalna (*) jest równoważna funkcji propozycjonalnej (**), *nie* nazwiemy funkcji propozycjonalnej (**)

---

* W myśl rozważań ze strony 35 zero po prawej stronie równania należy uważać za *funkcję* stałą.

równaniem. Widzimy więc, że w definicji równania obok wartości funkcji propozycjonalnej tkwi jeszcze jej *forma.*

Wyjaśnienie. Odnośnie do postawionej definicji równania winni jesteśmy dać pewne uzupełnienie, a to z tego powodu, że symbol $f(x)$ funkcji jest już symbolem uproszczonym, powstałym ze symbolu $y = f(x)$, czy też pierwotnego ogólnego $x\,R\,y$. Otóż według naszej pierwotnej nieuproszczonej symboliki równanie jest funkcją propozycjonalną (zmiennej x) kształtu następującego

$$(26) \qquad (y)\,(z)\,\{x\,R\,y \,.\, x\,S\,z \supset y = z\},$$

gdzie R i S są tymi relacjami, z których powstały odpowiednio symbole $f(x)$ i $g(x)$.

Odpowiedzieliśmy już na pytanie, co to jest równanie. Przystępujemy do drugiej b. ważnej kwestji, a mianowicie sformułowania, co to znaczy „*rozwiązać*“ równanie. Postawimy najpierw definicję pierwiastka równania (25).

Definicja. *Pierwiastkiem równania* (25) *nazywamy każdą liczbę, która wstawiona za x obraca równanie w sąd prawdziwy.*

Zamiast mówić, że pierwiastek obraca równanie w zdanie prawdziwe, mówić będziemy krócej, że *pierwiastek spełnia równanie.*

Widzimy tedy, że zbiór pierwiastków równania to właśnie klasa, wyznaczona przez równanie jako funkcję propozycjonalną.

Stawiamy następującą nieformalną definicję: *Rozwiązać równanie, to znaczy „znaleźć“ jego wszystkie pierwiastki.*

Oczywiście musimy się umówić, co rozumieć pod słowem „znaleźć“. A więc:

I) Po pierwsze, mamy rozstrzygnąć, czy równanie w ogóle posiada pierwiastki, tj. czy klasa wyznaczona przez funkcję propozycjonalną stanowiącą równanie jest pusta, czy nie pusta. Jeżeli się okaże pustą, wówczas sprawę rozwiązania równania uważamy już za załatwioną. Wystarcza odpowiedź: równanie nie posiada żadnego pierwiastka. Jeżeli jednak okaże się, że klasa pierwiastków *nie* jest pusta, wówczas

II) Po drugie, należy zbadać, czy klasa ta jest skończona, czy nieskończona. W szczególności, czy jest klasą jednostkową, czy więcej liczną. Jeżeli pierwiastków jest nieskończenie wiele, to należy dalej rozstrzygnąć, czy jest ich ilość przeliczalna czy nieprzeliczalna.

III) Po trzecie mamy „podać“ wszystkie pierwiastki. Jeżeli jest ich ilość skończona, poprzestajemy na ich kolejnym „wymienieniu“. Jeżeli pierwiastki tworzą zbiór przeliczalny, wówczas dadzą się — jak wiadomo — ponumerować wszystkie liczbami naturalnymi (ułożyć w ciąg nieskończony) i zadaniem naszym jest wtedy doprowadzić do wzoru postaci:

(27) $$x_n = \varphi(n),$$

gdzie $\varphi(n)$ jest pewną funkcją zmiennej n i gdzie, podstawiając za n kolejno wszystkie liczby naturalne, otrzymamy i wyczerpiemy w ten sposób wszystkie pierwiastki $x_1, x_2, \ldots$ naszego równania. W przypadku wreszcie, gdy ilość pierwiastków jest nieprzeliczalna, nie umiemy podać żadnego dostatecznie ogólnego wskazania w tym kierunku, co to znaczy „podać" *wszystkie* pierwiastki. W tych razach jednak w praktyce najczęściej pierwiastki albo wypełniają całe przedziały i można je wtedy „podać" za pomocą szeregu nierówności, albo też zbiór liczb nie będących pierwiastkami równania jest przeliczalny i „podajemy" wówczas właśnie zbiór liczb nie będących pierwiastkami.

Pozostaje do wyjaśnienia kwestia, co znaczy „wymienić" wzgl. „podać" pewną liczbę. Sprawa ta nie jest tak prosta, jakby się wydawało na pierwszy rzut oka i mogłaby ona sama śmiało być tematem osobnego artykułu. Jeżeli liczba, o którą chodzi, jest liczbą całkowitą albo wymierną, to słowo „podać" znaczy „podać efektywnie" czyli innymi słowy napisać specyficzny symbol tej liczby, co jest (po przyjęciu pewnego określonego systemu podstawowego np. dziesiętnego) zawsze możliwe. Inaczej się sprawa przedstawia, gdy zechcemy ustalić, co to znaczy „podać" liczbę niewymierną. Tutaj wydaje się jedno pewne, a mianowicie, że choćbyśmy aktualnie wymienili cały szereg dopuszczalnych sposobów konstruowania liczb (w sensie podawania efektywnego), to zawsze po pewnym czasie mogą się pojawić nowe sposoby, które będziemy musieli włączyć do naszego dawnego szeregu. Tak np. bez znajomości teorii granic względnie szeregów nieskończonych liczba e nie byłaby zaliczana do tych, które można „podać". Natomiast po przyjęciu teorii granic sposób określenia liczby e za pomocą związku

$$e \overset{df}{=} \lim_{n \to \infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n$$

musimy zaliczyć jako dopuszczalny. Podobnie znajomość teorii funkcyj hipergeometrycznych rozszerza nam znacznie zakres tych liczb algebraicznych, które można „podać".

Ponieważ na gruncie teorii Dedekinda każdą liczbę niewymierną można uważać za parę klas lub nawet prościej za klasę liczb wymiernych, spełniającą pewne proste warunki, przeto „podanie" tej klasy powinniśmy uznać za dopuszczalny sposób „podania" odnośnej liczby niewymiernej. Przesuwamy jednak w ten sposób całą trudność na teren zagadnienia (na ogół trudniejszego), co to znaczy „podać" *zbiór* rozważanego gatunku. Zagadnieniem tym (w odniesieniu do przekrojów Dedekinda) zajmował się prof. Zaremba w swej Arytmetyce teoretycznej i wprowadził specjalnie w tym celu tzw. „określniki". Weźmy najprostszy przykład. Skoro mamy określone ciało liczb rzeczywistych i wybudowaną arytmetykę tych liczb, wówczas łatwo wykazać, że równanie

$$x^3 = 2 \tag{28}$$

posiada dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty. Czy jednak napisanie symbolu $\sqrt[3]{2}$ będziemy uważali za „podanie" liczby będącej tym pierwiastkiem? Chyba nie, bo po głębszym wniknięciu w szczegóły definicji okazuje się, iż symbol $\sqrt[3]{2}$ zostaje a posteriori wprowadzony na oznaczenie jedynej liczby x czyniącej zadość warunkowi (28). Z drugiej jednak strony podanie wiadomości, że $\sqrt[3]{2}$ jest pierwiastkiem równania

$$x^{15} - 3\,x^9 + 2\,x^6 - 5\,x^3 - 6 = o \tag{29}$$

nie będzie już tylko trywialnym stwierdzeniem pewnego faktu, ale może się nam okazać b. pomocnym dla znalezienia pozostałych pierwiastków tego równania, czego byśmy bez tej wiadomości dokonać nie potrafili. Weźmy jeszcze przykład następujący. Niech będzie dane równanie

$$x^7 + 2\,x^5 + 4\,x + 1 = o. \tag{30}$$

Z łatwością można wykazać, że równanie to ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty. Zbiór Ω liczb wymiernych ω, które spełniają nierówność

$$f(\omega) < o \tag{31}$$

stanowi — jak łatwo wykazać — klasę przekrojową, definiującą zatem pewną określoną liczbę x_0 równą — jak nietrudno zauważyć-pierwiastkowi równania (30). Każdy jednak przyzna, iż podanie pierwiastka x_0 równania (30) przez podanie zbioru Ω, powyżej określonego, kryje w sobie właściwie tautologię. Z przykładów tych widać, jak trudne jest ogólne sformułowanie tego, co znaczy „podać" pierwiastek równania. Jako wybrnięcie z tej kłopotliwej sytuacji zaproponujemy następującą umowę. „Podać pewną liczbę jako pierwiastek danego równania, to znaczy w każdym konkretnym przypadku podać sposób wyznaczenia przybliżenia dziesiętnego tej liczby z błędem dowolnie małym".

Oczywiście nie należy traktować powyższej umowy jako optimum wymagania w każdym możliwym przypadku, gdyż w przeciwnym razie moglibyśmy z góry zrezygnować z rozmaitych metod rozwiązywania równań, a ograniczyć się wyłącznie do metod przybliżonego rozwiązywania równań. Wprost przeciwnie, te ostatnie należy oceniać jako ostateczne remedium, do którego uciekamy się wówczas dopiero, gdy zawodzą metody „dokładnego" rozwiązywania równań.

C. d. n.

Zofia Czarkowska (Kraków).

Pojęcie granicy ciągu w szkole średniej.

Uwagi poniższe dotyczące opracowania pojęcia granicy ciągu w szkole są wynikiem kilkoletnich doświadczeń przeprowadzonych w klasie siódmej gimnazjum humanistycznego dawnego typu. W chwili pisania tego artykułu programy liceum w ostatecznej redakcji nie są mi jeszcze znane. Nie mogę więc ocenić, czy wyniki mych doświadczeń będą jeszcze aktualne dla praktyki szkolnej; w każdym razie pojęcie granicy znajdzie się i w materiale matematyki wyznaczonym dla liceum, wydaje mi się więc, że analiza dydaktyczna tego pojęcia na gruncie doświadczeń dotychczasowych może przynieść pewien pożytek.

Pomysł i wskazówki dla nowego opracowania nauki o ciągach w szkole podał mi p. prof. W. Wilkosz. Kierując się nimi odstąpiłam od tradycyjnego ujęcia tego działu stosowanego w podręcznikach i z rezultatów, które osiągałam w ciągu kilku lat na tej drodze, byłam bardziej zadowolona niż dawniej. Pojęcie granicy dla umysłu ucznia kilkunastoletniego jest niewątpliwie bardzo trudne i niestety najczęściej trzeba je mimo wysiłków nauczyciela zaliczyć do tych pojęć, które pozostają dla większości klasy nazwą o mętnej, niejasnej i trudnej w zastosowaniach treści. Trudności te — niejednokrotnie przecież stwierdzane — powinny skłonić uczących i autorów podręczników do bardzo dokładnego i wnikliwego przemyślenia zagadnień z nimi związanych. Analiza dydaktyczna pojęcia granicy (jak zresztą każdego innego pojęcia matematycznego) powinna, moim zdaniem, streścić się w odpowiedziach na następujące pytania: 1) Jak definiuje się to pojęcie w nauce? 2) Która z przyjmowanych w nauce definicyj ma budowę logicznie prostszą? 3) Która z definicyj naukowych określa dane pojęcie w sposób łatwiejszy w zastosowaniach, tzn. na podstawie której wygodniej jest udowadniać twierdzenia i rozwiązywać praktyczne zadania? 4) Która z definicyj naukowych lepiej ze względu na poprzednio wymienione punkty widzenia „przystaje" do materiału szkolnego. Trzeba bowiem pamiętać o tym, że definicja dająca łatwiejsze zastosowania w teorii naukowej, ujętej jako całość, może ustępować pod tym względem innej definicji — wygodniejszej w zakresie tego małego i fragmentarycznego odcinka, z którym mamy do czynienia w szkole.

Nauka daje nam dwie możliwości elementarnego wprowadzenia pojęcia granicy ciągu. Można to uczynić metodą Cauchy'ego; można też pojęcie granicy ciągu oprzeć o pojęcie kresu ciągu monotonicznego i o pojęcie ciągu wybranego z danego ciągu. Zanalizujmy te dwie metody z punktu widzenia drugiego, trzeciego i czwartego z wyżej wymienionych zagadnień dydaktycznych.

Definicja granicy Cauchy'ego jest niewątpliwie logicznie skomplikowana. Zawiera ona kilka kwantyfikatorów, co, według opinii p. prof. Wilkosza, popartej w zupełności doświadczeniem szkolnym, powinno być ostrzeżeniem dla uczącego. W konsekwencjach wywołuje bowiem w umysłach uczniów duże trudności w posługiwaniu się tym pojęciem. W odwracaniu wypowiedzi o granicach, a szczególniej w negowaniu ich, uczniowie plączą się, popełniają duże błędy, nie rozumiejąc najczęściej prostych rozumowań. W związku z zawiłością logiczną także stylistyczne ujęcie definicji jest trudne. Nie można jej sformułować prosto używając potocznego języka polskiego, co przeszkadza w wykorzystaniu intuicji ucznia.

Ujęcie drugie, którego plan dla celów szkolnych naszkicuję w zakończeniu, prowadzi do definicji logicznie prostej, jasnej dla ucznia, sformułowanej językiem codziennym w sposób, który pozwala mu na swobodne operowanie tym pojęciem. Na podstawie jej uczeń łatwo wypowiada zdania o istnieniu, czy nieistnieniu granicy ciągu, szybko potrafi wyjaśnić, co to znaczy, że jakaś liczba jest, czy nie jest granicą danego ciągu.

W odpowiedzi na pytanie drugie musimy zatem definicję Cauchy'ego uznać za mniej dogodną dla celów szkolnych. Jak się przedstawia wartość dydaktyczna tych definicyj z punktu widzenia trzeciego pytania? W trudniejszych zastosowaniach praktycznych i przy dowodzeniu twierdzeń o granicach w ujęciu ścisłym, naukowym definicja Cauchy'ego jest bardzo wygodna. Szczególniej, gdy chodzi o ciągi niemonotoniczne o skomplikowanej postaci, stosowanie definicji opartej na pojęciu ciągu wybranego jest uciążliwe; w szkole operowanie nią byłoby zupełnie niemożliwe. Nie odrzucajmy jednak łatwo tej ostatniej; zbadajmy przedtem materiał nauczania. Ciągi, którymi zajmujemy się w szkole, to w większości wypadków ciągi monotoniczne. Ciągi niemonotoniczne występują w postaci bardzo prostej takiej, że przy stosowaniu do nich definicji drugiej nie napotykamy nawet w szkole na trudności. Nasuwa się jeszcze zagadnienie dowodzenia twierdzeń o granicach ciągów (granica sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu ciągów). Dowody tych twierdzeń w oparciu o definicję drugą są w szkole zupełnie niemożliwe. Jeżeli jednak przyjmiemy definicję Cauchy'ego, to trudności, jakkolwiek mniejsze, są jeszcze także bardzo duże. Posługiwanie się wartością bezwzględną lub podwójnymi nierównościami, przy skomplikowanej budowie logicznej zdań tam występujących, jest może dostępne dla uczniów zdolnych, dla przeciętnego jednak ucznia nie ma wartości kształcących; w większości wypadków sprowadza się do wyuczenia się dowodu na pamięć bez zrozumienia jego istotnej treści.

Z rozważań tych należy, moim zdaniem, wyciągnąć następujące wskazania dydaktyczne. W zakresie szkolnej matematyki wygodnie jest oprzeć definicję granicy ciągu na pojęciu kresu ciągu monotonicznego, co uczniowie przyjmują łatwo i intuicyjnie, oraz na pojęciu ciągu wybranego z danego ciągu. Ujęcie to wymaga przyjęcia kilku twierdzeń o granicach bez dowodu, przy czym należy się ograniczyć do tych twierdzeń, które są bezwzględnie konieczne do zrozumienia dalszych działów matematyki szkolnej.

Na zakończenie podam w skróceniu przykład rozwinięcia tej myśli w formie schematu, według którego opracowywałam z uczennicami teorię ciągów w klasie siódmej gimnazjum humanistycznego. Każdy punkt tego planu opiera się oczywiście na licznych, a bardzo prostych przykładach.

1. Wprowadzam ciąg jako funkcję, której polem są liczby naturalne; uczennice podają przykłady, obliczają wyrazy ciągu.

2. Definiuję w zwykły sposób pojęcie ciągu monotonicznego i niemonotonicznego; wśród ciągów monotonicznych wyróżniam ciągi nie rosnące i nie malejące.

3. Określam liczbę górną ciągu, jako liczbę, od której wszystkie wyrazy ciągu są nie większe; analogicznie liczbę dolną, jako liczbę, od której wszystkie wyrazy ciągu są nie mniejsze. Ze względu na

istnienie liczby górnej czy dolnej ciągu następuje nowa klasyfikacja ciągów. (Ciągi ograniczone i nieograniczone z góry lub z dołu).

4. Określam kres ciągu nie malejącego jako jego najmniejszą liczbę górną, jeżeli taka istnieje i tylko jedna. Podobnie definiuję kres ciągu nie rosnącego jako jego największą liczbę dolną, jeżeli taka istnieje i tylko jedna.

5. Formułuję twierdzenie oczywiste dla intuicji uczennic: ciąg monotoniczny ograniczony posiada jeden jedyny kres.

6. Definiuję ciąg wybrany z ciągu danego.

7. W sposób prosty przez sprowadzenie do sprzeczności dowodzę twierdzenia: jeżeli ciąg monotoniczny posiada kres, to każdy z niego wybrany jest też monotoniczny i posiada ten sam kres.

8. Specjalnie dokładnie uczennice badają ciągi $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = -\frac{1}{n}$. Rozumowaniem nie wprost wykazuję, że ciągi te posiadają kres równy zero, a zatem, jak wynika z 7., ciągi z nich wybrane posiadają też kres równy zero.

9. Rozpatrując ciągi $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ i $b_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ na podstawie poprzednich rozważań i wykresu uczennice bez trudności wykazują, że wszystkie ciągi monotoniczne wybrane z a_n mają kres zero; natomiast z ciągu b_n można wybrać dwa ciągi monotoniczne, rosnący o kresie równym -1 i malejący o kresie równym 1. (Z ciągów monotonicznych wybranych z a_n bardzo łatwo zdać sobie sprawę rozważając ciąg wyrazów dodatnich i ciąg wyrazów ujemnych, które to ciągi są wybrane z ciągów rozpatrywanych w punkcie 8, a zatem mają kres równy zero. Inne ciągi monotoniczne wybrane z a_n muszą być zarazem wybrane z tych ostatnich, a więc według punktu 7. muszą mieć ten sam kres).

10. Na podstawie przykładów 9. w sposób naturalny nasuwa się definicja: ciąg posiada granicę, jeżeli wszystkie ciągi monotoniczne z niego wybrane mają wspólny kres. Ten wspólny kres nazywamy granicą danego ciągu. Ciąg nie posiada zatem granicy, jeżeli choć jeden monotoniczny ciąg z niego wybrany nie ma kresu, lub dwa wybrane mają różne kresy.

11. Jako wniosek z punktów 5., 7. i 10. wynika, że każdy ciąg monotoniczny ograniczony posiada granicę.

12. Badanie ciągu potęgowego $a_n = q^n$ na podstawie powyższych definicyj i twierdzeń i zastosowanie do obliczenia granicy ciągu sum ciągu geometrycznego nie przedstawia trudności.

13. W rozważaniach geometrycznych (pole, obwód koła, objętości brył), w których stosujemy obliczenie granicy pewnych ciągów, występują wyłącznie ciągi monotoniczne, dla których granica jest zarazem kresem (definicja 4.), a więc liczbą zdefiniowaną prosto i intuicji ucznia dostępną.

S. Steckel (Białystok).

O pierwiastkach wymiernych wielomianów o współczynnikach całkowitych.

Jest rzeczą dobrze znaną, że mając dowolny wielomian o współczynnikach całkowitych można za pomocą skończonej ilości prób wyznaczyć wszystkie jego pierwiastki wymierne. W samej rzeczy, niech będzie dany wielomian:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n \tag{1}$$

o współczynnikach całkowitych i załóżmy, że $a_0 \neq 0$. Możemy, bez ograniczenia ogólności naszych rozważań, także przyjąć, że $a_n \neq 0$; gdyby bowiem współczynnik a_n był zerem, moglibyśmy wielomian n-tego stopnia (1) napisać w postaci iloczynu: $x \,.\, W_{n-1}(x)$, gdzie $W_{n-1}(x)$ jest wielomianem $(n-1)$-ego stopnia o współczynnikach całkowitych, i w ten sposób sprowadzić zagadnienie wyznaczania pierwiastków wymiernych wielomianu (1) do prostszego zagadnienia wyznaczania pierwiastków wymiernych wielomianu $W_{n-1}(x)$. Załóżmy, że liczba wymierna $\frac{r}{s}$ (r jest liczbą całkowitą, s liczbą naturalną, r i s są względnie pierwsze) jest pierwiastkiem wielomianu (1). Mamy wówczas:

$$a_0 \left(\frac{r}{s}\right)^n + a_1 \left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0 \tag{2}$$

czyli:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} s + \ldots\ldots + a_n s^n = 0, \tag{3}$$

stąd otrzymujemy:

$$\frac{a_0 r^n}{s} = -\left(a_1 r^{n-1} + \ldots\ldots + a_n s^{n-1}\right). \tag{4}$$

Ponieważ prawa strona równości (4) jest liczbą całkowitą, zatem: $a_0 r^n$ jest podzielne przez s, skąd, wobec założenia, że r i s są względnie pierwsze, wynika, że s jest dzielnikiem współczynnika a_0. W podobny sposób dowodzimy, że r jest dzielnikiem współczynnika a_n. Przekształcając równość (3) otrzymujemy bowiem:

$$(5) \qquad a_n s^n = -r(a_0 r^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} s^{n-1}),$$

skąd, dzieląc przez r (r jest różne od zera, skoro założyliśmy, że $a_n \neq 0$) mamy:

$$(6) \qquad \frac{a_n s^n}{r} = -(a_0 r^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} s^{n-1}).$$

Ponieważ prawa strona równości (6) jest liczbą całkowitą, zatem: $a_n s^n$ jest podzielne przez r, skąd, wobec założenia, że r i s są względnie pierwsze, wynika, że r jest dzielnikiem współczynnika a_n.

Aby więc wyznaczyć wszystkie pierwiastki wymierne wielomianu (1), wystarcza zbadać każdą z liczb: $\frac{r}{s}$, gdzie s jest dzielnikiem naturalnym współczynnika a_0, zaś r dzielnikiem (dodatnim lub ujemnym) współczynnika a_n. Ponieważ liczb takich jest skończona ilość, zatem po skończonej ilości prób dojdziemy do celu.

Dla przykładu wyznaczmy pierwiastki wymierne równania:

$$(7) \qquad 11x^4 - 13x^3 - 20x^2 + 26x - 4 = 0.$$

Mamy tu: $a_0 = 11$; $a_n = -4$. Dzielnikami naturalnymi liczby 11 są 1 i 11. Dzielnikami liczby: -4 są: $-4, -2, -1, 1, 2, 4$. Pierwiastków wymiernych równania (7) należy więc szukać wśród liczb:

$$-4,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 4$$

lub:

$$-\frac{4}{11},\ -\frac{2}{11},\ -\frac{1}{11},\ \frac{1}{11},\ \frac{2}{11},\ \frac{4}{11}.$$

Badając każdą z powyższych 12 liczb znajdujemy, że liczby: 1 i $\frac{2}{11}$ spełniają równanie (7), pozostałe zaś liczby równania tego nie spełniają. Jedynymi więc pierwiastkami wymiernymi równania (7) są liczby: 1 i $\frac{2}{11}$. Mając dwa pierwiastki równania (7) możemy oczywiście już znaleźć pozostałe jego pierwiastki. Dzieląc lewą stronę równania (7) przez trójmian: $(11x-2)(x-1) \equiv 11x^2 - 13x + 2$ znajdujemy rozkład na czynniki:

$$11x^4 - 13x^3 - 20x^2 + 26x - 4 \equiv (11x-2)(x-1)(x^2-2),$$

skąd wnioskujemy, że pierwiastkami równania (7) są liczby: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2}{11}$, $x_3 = -\sqrt{2}$, $x_4 = \sqrt{2}$.

Sądzę, że powyższy temat nadaje się do opracowania na kółku matematycznym w liceum ogólnokształcącym.

W. Wojtowicz (Warszawa).

Prosty sposób pierwiastkowania i logarytmowania.

Według Kommerella.

W broszurze p. t. Der Begriff des Grenzwerts in d. Elementarmathematik podał K. Kommerell bardzo elementarny sposób wyznaczania przybliżeń dziesiętnych dla pierwiastka dowolnego stopnia wymiernego i dla logarytmu. Sposób ten, jeśli go uwolnimy od wzorów, którymi autor operuje, jest istotnie dostępny przeciętnemu uczniowi. * Uczeń musi tylko: 1) posiadać tablicę kwadratów; 2) umieć napisać liczbę wymierną w układzie dwójkowym; 3) rozumieć, że jeśli liczba $0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$ została napisana w układzie dwójkowym (a więc $x_1, x_2, \ldots$ są to cyfry 0 lub 1), wówczas przesunięcie w tej liczbie przecinka w prawo o 1, 2, 3... miejsca jest równoznaczne z pomnożeniem liczby przez 2, 2^2, 2^3..., przesunięcie zaś przecinka w lewo — równoznaczne z podzieleniem jej przez 2, 2^2, 2^3...

Teraz już łatwo wytłumaczyć uczniowi, że jeśli w liczbie $a^{0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}$ wykładnik potęgi został napisany w układzie dwójkowym, wówczas przesunięcie w wykładniku przecinka o 1 miejsce w prawo jest równoznaczne z podniesieniem tej liczby do kwadratu, przesunięcie w lewo — z wyciągnięciem z niej pierwiastka kwadratowego.

Po tych rozważaniach przygotowawczych możemy przystąpić z uczniami do obliczeń.

I. Chcemy np. obliczyć $x \approx 10^{0,7783}$.

Pisząc wykładnik potęgi w układzie dwójkowym mamy równość przybliżoną $x \approx 10^{0,1100011101}$. Nadal będziemy pisali wszystkie wykładniki w układzie dwójkowym. (Aby o tym nie zapomnieć, uczeń może pisać je innym kolorem). Z tablicy kwadratów znajdujemy kolejno:

$10^{0,1} \approx 3,162$; $10^{0,01} \approx 1,778$; mnożąc przez 10 obie strony tej równości mamy

$$10^{1,01} \approx 17,78,$$

zatem $10^{0,101} \approx 4,216$; mnożąc przez 10 obie strony, mamy

$$10^{1,101} \approx 42,16,$$

zatem $10^{0,1101} \approx 6,493$; mnożąc przez 10 obie strony mamy

$$10^{1,1101} \approx 64,93$$

---

* Zdaje się, że sposób ten nie jest zupełnie nowy. Jeśli mnie pamięć nie myli, tę samą lub podobną metodę podał Sarrus w pierwszej połowie XIX w.

zatem $10^{0,11101} \approx 8{,}058$; $10^{0,011101} \approx 2{,}839$; $10^{0,0011101} \approx 1{,}685$;

$$10^{0,00011101} \approx 1{,}298,$$

mnożąc zaś obie strony przez 10 mamy $10^{1,00011101} \approx 12{,}98$,

zatem $10^{0,100011101} \approx 3{,}602$; mnożąc obie strony przez 10 mamy

$$10^{1,100011101} \approx 36{,}02,$$

zatem $10^{0,1100011101} \approx 6{,}002$.

Tak więc $x \approx 6{,}002$. Tę samą wartość dają 4 cyfrowe fablice logarytmów.

II. Jeszcze łatwiej przedstawia się obliczenie logarytmu dziesiętnego.

Chcemy znaleźć $lg_{10}\, 8{,}5$. Piszemy równość $10^{0,x_1x_2x_3\ldots x_n} \approx 8{,}5$. Podnosząc obie strony do kwadratu mamy $10^{x_1,x_2x_3\ldots x_n} \approx 72{,}25$, stąd widać, że $x_1 = 1$. Dzieląc teraz obie strony równości przez 10, otrzymujemy nową równość przybliżoną $10^{0,x_2x_3\ldots x_n} \approx 7{,}225$. Podnosząc do kwadratu mamy $10^{x_2,x_3\ldots x_n} \approx 52{,}2$, zatem $x_2 = 1$. Znów dzielimy obie strony przez 10, poczym podnosimy je do kwadratu, co daje $10^{x_3,x_4\ldots x_n} \approx 27{,}25$, stąd $x_3 = 1$.

Dzielimy obie strony przez 10, poczym podnosimy je do kwadratu i otrzymujemy $10^{x_4,x_5\ldots x_n} \approx 7{,}425$, stąd $x_4 = 0$, itd.

W ten sposób znajdujemy, że $10^{0,11101101111} \approx 8{,}5$.

Pozostaje napisać ten wykładnik potęgi w układzie dziesiętnym. Otrzymujemy, że $lg_{10}\, 8{,}5 \approx 0{,}9294$ z dokładnością do czwartego znaku. Należy dodać, iż wszystkie rachunki wykonaliśmy przy pomocy szkolnych tablic kwadratów.

III. Uczniom musi nasunąć się pytanie, czy każdy pierwiastek (o wykładniku wymiernym) można tym sposobem „wyciągnąć“ z dowolnym przybliżeniem. Zagadnienie sprowadza się do innego: czy każdą liczbę wymierną można z dowolnym przybliżeniem przedstawić w postaci ułamka dwójkowego, a to znów rozstrzyga się w prosty sposób — chociażby przez systematyczne połowienie przedziału $(0; 1)$.

St. Gołąb (Kraków).

Głębokość zanurzenia kuli pływającej w cieczy.

Niechaj w cieczy, której ciężar właściwy przyjmujemy jako równy 1, pływa kula, zrobiona z materiału jednorodnego o ciężarze właściwym ϱ:

(1) $$0 < \varrho < 1.$$

Idzie o to, aby znaleźć głębokość x, do jakiej zanurzy się ta kula przy osiągnięciu położenia równowagi.* Równanie, z którego mamy obliczyć szukane x, dyktuje nam znane dobrze prawo Archimedesa. Uwzględniając, że na objętość odcinka kuli mamy wzór

(2) $$V = \pi \left(h^2 r - \frac{h^3}{3} \right)$$

gdzie r oznacza promień kuli, h wysokość odcinka, równanie przyjmuje postać:

(3) $$x^3 - 3\,r\,x^2 + 4\,r^3\,\varrho = 0.$$

Otrzymujemy więc równanie stopnia trzeciego. Ażeby je rozwiązać, doprowadzamy je do tzw. postaci normalnej (pozbycie się wyrazu stopnia drugiego) przez podstawienie:

(4) $$x = y + r.$$

Równanie na y przyjmie formę:

(5) $$y^3 - 3\,r^2\,y + 4\,r^3\,\varrho - 2\,r^3 = 0.$$

Ażeby rozstrzygnąć ile rzeczywistych pierwiastków ma to równanie, obliczamy wyróżnik $\triangle$ równania rozwiązującego:

(6) $$\triangle = 16\,r^6\,\varrho\,(\varrho - 1),$$

który, na skutek (1) jest ujemny. Równanie (5) ma więc trzy rzeczywiste pierwiastki (casus irreductibilis). Należy rozstrzygnąć, który z tych trzech pierwiastków daje odpowiedź na nasze zagadnienie fizyczne. W tym celu zwróćmy uwagę, że w zagadnieniu fizycznym tylko takie pierwiastki x mogą wchodzić w rachubę, które spełniają nierówności:

(7) $$0 < x < 2\,r,$$

co ze względu na (4) prowadzi do nierówności

(8) $$-r < y < +r.$$

Oznaczmy krótko:

(9) $$f(y) = y^3 - 3\,r^2\,y + 4\,r^3\,\varrho - 2\,r^3.$$

---

* Łatwo zauważyć, że zadanie to jest równoważne z zadaniem o podziale kuli płaszczyzną w danym stosunku.

Otrzymujemy przez zwykłe wstawienie

(10) $\qquad f(-r) = 4\,r^3\,\varrho > 0, \quad f(+r) = 4\,r^3\,(\varrho - 1) < 0.$

Ponieważ $f(y) \to \infty$ dla $y \to \infty$ oraz $f(y) \to -\infty$ dla $y \to -\infty$, więc z ciągłości funkcji $f(y)$ i nierówności (10) wypływa, iż równanie

(11) $$f(y) = 0$$

czyli równanie (5) ma jeden z pierwiastków większy od $+r$, a jeden mniejszy od $-r$. Jeden zatem tylko spełnia nierówności (8). Odpowiedzią na nasze pytanie będzie zatem pierwiastek pośredni. Wyznaczymy go metodą trygonometryczną. Z ogólnej teorii wiadomo, że jeśli oznaczymy krótko:

(12) $$p = -3\,r^2, \quad q = 4\,r^3\,\varrho - 2\,r^3,$$

(13) $$\sigma = \sqrt{-\frac{p}{3}},$$

to pierwiastkami (rzeczywistymi) równania (5) będą

(14) $$\begin{cases} y_1 = 2\,\sigma\cos\dfrac{\varphi}{3} \\ y_2 = 2\,\sigma\cos\left(\dfrac{\varphi}{3} + \dfrac{2\pi}{3}\right) \\ y_3 = 2\,\sigma\cos\left(\dfrac{\varphi}{3} + \dfrac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

przy czym kąt φ wyznacza się z równania:

(15) $$\cos\varphi = -\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}.$$

Należy teraz przedyskutować, który z pierwiastków (14) jest pośrednim co do wielkości. Otóż równanie (15) przybiera w naszym przypadku postać:

(16) $$\cos\varphi = 1 - 2\,\varrho.$$

Oznaczmy sobie

(17) $$\varphi_0 = \operatorname{arc\,cos}\,(1 - 2\,\varrho).$$

W takim razie jest

(18) $$0 < \varphi_0 < \pi.$$

Ponieważ dalej jest u nas

(19) $$\sigma = r,$$

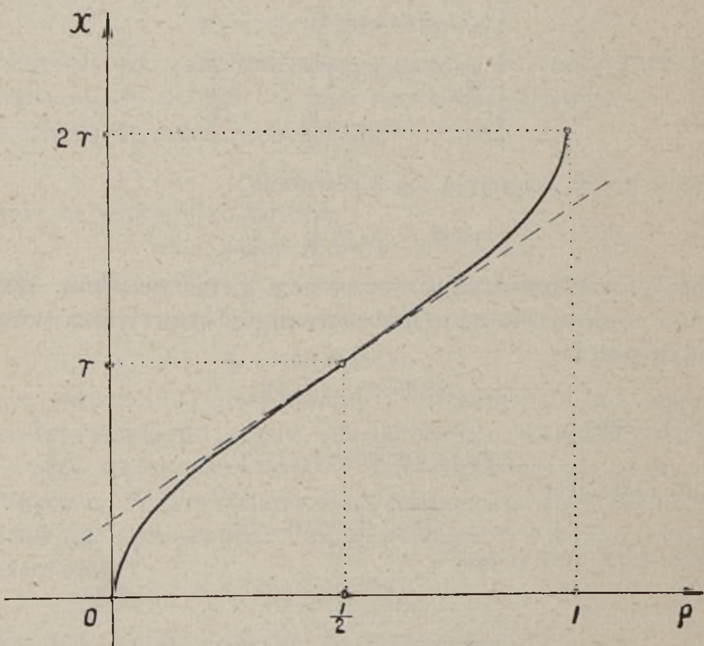
więc

(20) $$\begin{cases} y_1 = 2\,r\cos\dfrac{\varphi_0}{3} > 2\,r\cos\dfrac{\pi}{3} = r, \\ y_2 = 2\,r\cos\left(\dfrac{\varphi_0}{3} + \dfrac{2\pi}{3}\right) < 2\,r\cos\dfrac{2\pi}{3} = -r. \end{cases}$$

Żaden z tych pierwiastków nie leży w przedziale $(-r, +r)$. Pozostaje nam więc trzeci pierwiastek, który daje odpowiedź na zagadnienie. Wstawiając go do (4), otrzymujemy rozwiązanie na x, które brzmi ostatecznie:

$$x = r\left[1 + 2\cos\frac{4\pi + \operatorname{arc\,cos}(1-2\varrho)}{3}\right]. \tag{21}$$

Ze wzoru (21) otrzymujemy przy pomocy tablic funkcyj trygonometrycznych przy danym ϱ głębokość zanurzenia kuli. Poniższy wykres przedstawia głębokość zanurzenia we funkcji ciężaru właściwego ϱ. Krzywa jest rosnącą w całym przedziale $(0, 1)$. Dla $\varrho = {}^1/_2$ przybiera funkcja wartość r. Krzywa zwraca się do osi ϱ wklęsłością w przedziale $(0, {}^1/_2)$, wypukłością natomiast w przedziale $({}^1/_2, 1)$. W punkcie $\varrho = {}^1/_2$ krzywa ma przegięcie. Styczna do krzywej w tym punkcie przegięcia ma współczynnik kierunkowy równy $\frac{4r}{3}$. W punktach $\varrho = o$ i $\varrho = 1$ styczna jest prostopadła do osi ϱ. Przy dokładnie narysowanym wykresie można głębokości zanurzenia odczytywać z dość dobrym przybliżeniem wprost z wykresu.



Połóżmy teraz

$$\varphi(\varrho) = \begin{cases} \frac{7r}{3}\sqrt{\frac{\varrho}{3}} & \text{w przedziale } 0 \leqslant \varrho \leqslant \frac{3}{16} \\ r\,\frac{4\varrho + 1}{3} & \text{w przedziale } \frac{3}{16} \leqslant \varrho \leqslant \frac{13}{16} \\ r\left(2 - \frac{7}{3}\sqrt{\frac{1-\varrho}{3}}\right) & \text{w przedziale } \frac{13}{16} \leqslant \varrho \leqslant 1. \end{cases} \tag{22}$$

Otrzymamy wówczas, kładąc

(23) $$x = \varphi(\varrho)$$

przybliżenie dla funkcji (21), którego błąd, jak można wykazać, nie przekracza

(24) $$\frac{r}{30}$$

w całym przedziale (0, 1). Wprawdzie górny kraniec błędu jest dość znaczny, jednak kształt funkcji aproksymującej $\varphi(\varrho)$ jest b. prosty (liniowy względnie pierwiastkowy).

M. Zarycki (Lwów).

Urywki z życia szkolnego w związku z nauczaniem matematyki.*

Nieco historii.

Uczniowie (VIII kl. dawnego typu, albo liceum) wchodzą do klasy i widzą na ścianie zawieszoną drewnianą tabliczkę, a na niej jakiś tekst łaciński z jakimś rysunkiem geometrycznym.

Acta Eruditorum, Lipsiae 1685.

Adami Adamandi e Societate Iesu Kochański Dobriniaci, Sereniss. Poloniarum Regis Mathematici et Bibliothecarii, Observationes Cyclometricae.

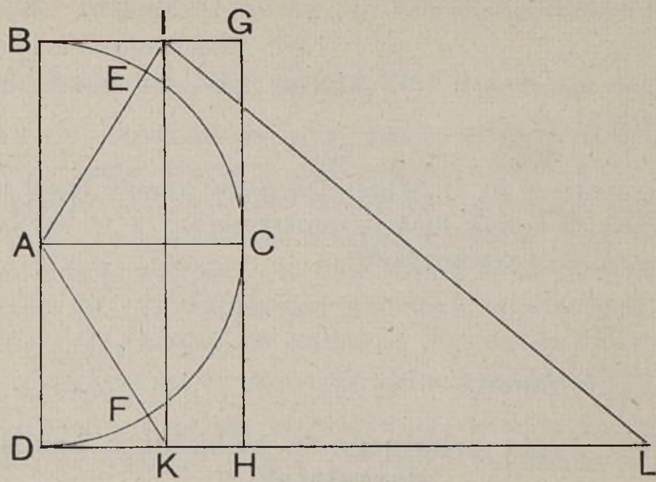
Oportet Semiperipheriae BCD Rectam proxime aequalem reperire. Ducantur tangentes BG, DH, quarum prior Radio AC aequalis et iungantur GCH. Tum Radio CA fecentur ex C arcus utrinque aequales CE et CF: quorum quivis complectetur Gradus 60, relequi autem BE, DF singuli gr. 30. Agatur per E secans AI, determinans Tangentem BI. Capiatur tandem HL, aequalis Diametro BD; actum ducatur IL. Dico IL aequalem esse Semiperipheriae BCD proxime. Demonstratur calculo Trigonometrico.

Grupka uczniów skupia się przed tabliczką, czyta tekst i przygląda się rysunkowi.

U_1: *Co to właściwie jest? Łacina czy matematyka?*

U_2: *W każdym razie posypią się nowe dwóje!*

* Jest to część większej całości, którą nadesłał nam Autor, a której nie możemy wydrukować w pierwszym zeszycie „Matematyki i Szkoły" ze względu na brak miejsca. Ten fragment drukujemy jako szczególnie ciekawy przyczynek do korelacji pomiędzy nauczaniem matematyki a nauczaniem języków obcych i historii. *Redakcja.*



U_3: *Popatrz — tu jest „e societate Iesu", to coś z historii kościoła.*

U_4: *A tu jest „Poloniarum regis". To musi być Sobieski, bo tam na górze jest rok 1685.*

U_4: *Ale czemu Poloniarum a nie Polonorum?*

U_4: *Tangentes — to pewnie styczne, radius — promień, a na końcu masz trigonometrico. To jest łacińska matematyka.*

U_4: *Tu jest Kochański, a przecież braliśmy kiedyś wyprostowanie okręgu Kochańskiego, tylko tam rysunek był inny.* Zresztą to jakiś inny Kochański, bo to Jezuita.*

U_4: *W każdym razie trzeba sobie odpisać; ty dyktuj, a my będziemy pisali.*

Na godzinie matematyki:

N: *Co znaczy bibliothecarii? — A więc król polski miał bibliotekarza, ten bibliotekarz był Jezuitą i pisał po łacinie o matematyce!*

Następuje wyjaśnienie słów.

N.: *A popatrz wreszcie do swego słowniczka, co znaczy „calculus".*

U_4: *Jest — to znaczy „kamyczek".*

N : *A więc jak to będzie? Kamyczkiem trygonometrycznym? Co to za kamyki trygonometryczne? — Zatem „calculus" znaczy także „rachunek", a jak chcecie wiedzieć dlaczego calculus znaczy i „kamyczek" i „rachunek", to przeczytajcie sobie dwie stronice z tej oto książeczki niemieckiej, a kto pierwszy przeczyta, to nam na następnej lekcji opowie.*

---

* Niektóre nasze podręczniki nie podają oryginalnej konstrukcji Kochańskiego, lecz niepotrzebnie ją modyfikują.

U_{10}: *Ale to nie pójdzie łatwo, bo to po niemiecku.*
N.: *Nie mamy niestety podobnej książeczki polskiej.*

Następuje tłumaczenie tekstu i rysowanie figury. Potem uczniowie obliczają długość odcinka IL w zależności od promienia okręgu i otrzymują: $3{,}1415\,r$. Gdy promień $r = AB$ równa się jedności, to: $IL = 3{,}1415...$

N.: *A jak to mówi Zegadłowicz?*
U_{11}: *Źle w mgle i snach bolejącym do wiedzy progu iść, wszak ognistym, wierzącym jedynie, miłującym Bóg do nóg poznania kiść strąca.*

A więc $\pi = 3{,}1415926...$

Zatem odcinek IL podaje nam wprost liczbę π z wielką dokładnością, bo jeszcze czwarte miejsce dziesiętne jest dokładne.

N.: *A więc gdyby promień był długi na jeden metr, to jaki byłby błąd?*
U_{12}: *Błąd byłby mniejszy od jednej dziesiątej części milimetra. No, to jest bardzo dobre przybliżenie i nietrudna konstrukcja.*
N.: *Przy pomocy jakich przyrządów wykonaliśmy konstrukcję? A ile razy rozchylaliśmy cyrkiel? A więc raz tylko jeden rozchyliliśmy cyrkiel i tym samym promieniem zakreśliliśmy kilka łuków.*

Następuje kilka słów o Kochańskim i o jego korespondencji z Leibnizem, o bibliotece w Wilanowie i o jednym z pierwszych czasopism naukowych *Acta eruditorum.*

Uczeń zapamiętuje, że dawniej pisano dzieła naukowe prawie wyłącznie po łacinie.

Nauczyciel wyjmuje z teczki dwie książki * i wyjaśnia ich tytuły. Uczeń czyta z pierwszej książki (Cantor, tom III, str. 20—21):

Kochansky ist am bekanntesten durch eine äusserst elegante näherungsweise vollzogene Rektifikation des Kreises, welche er in den Acta Eruditorum... veröffentlichte.

Następnie z drugiej książki (Braunmühl, II tom, str. 56):

Eine sehr elegante geometrische Näherungskonstruktion gab der Jesuit Adam Adamandus Kochansky (1613—1700), Mathematiker des Königs von Polen in den Acta Eruditorum 1685.

N.: A więc wybitni obcy uczeni oceniają należycie pomysł Kochańskiego.

Uczniowie przeżyli uczucie rozkoszy „badania ze źródeł".

---

* M. Cantor: Geschichte der Mathematik, tom III, 1898;
A. Braunmühl: Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, II część, 1903.

Bibliografia.

Mathematik im Dienste der national-politischen Erziehung. Ein Handbuch für Lehrer, herausgegeben von A. Dorner, Diesterweg 1935.

Zbiór artykułów wydanych na zlecenie Związków Niemieckich Towarzystw Matematycznych przez A. Dornera obejmuje około 300 zadań, których doborem kierowały względy ogólno-wychowawcze i polityczne. Przewodniczący Związku, Hamel, powiada w przedmowie do książki, że ma ona ,,pomóc wyplenić zadawnione nieporozumienie, jakoby matematyka polegała na manipulowaniu tablicami logarytmów i wykuwaniu na pamięć niezrozumiałych formuł, z którymi nie wiadomo co począć. Dla każdego powinno się stać jasne, że właśnie matematyka jest niezbędna do gruntownego zrozumienia wiedzy o narodzie oraz narodowo-socjalnej pracy konstrukcyjnej (Aufbauarbeit)". Ogół powinien nauczyć się, zdaniem Hamela, że ,,przyszłość Niemiec nie byłaby zabezpieczona bez matematyki". Gdy to pojmie, wówczas ,,matematyka zachowa w nauczaniu tę ilość godzin, która jest jej potrzebna dla spełnienia zadań względem ojczyzny".

Dla redaktora zbiorku, A. Dornera, związek między nauczaniem matematyki a bezpośrednim pożytkiem narodowym nie ulega również wątpliwości. Przecież ,,liczby i działania rachunkowe są niezbędnymi narzędziami przy pracy dla pomyślności narodu", a ,,byt narodu i działalność są w istotny sposób współokreślane (mitbestimmt) przez liczby i wielkości mierzalne". Stąd wynika na odwrót, że ,,nauczanie matematyki powinno bardziej niż dotychczas przeniknąć się sprawami życia narodu". Zadania zbiorku mają temu celowi służyć.

Najsilniej zaznacza się tendencja w zadaniach, które propagują poglądy drogie dla ideologii współczesnych Niemiec. A więc przede wszystkim ideę doniosłości zagadnień dziedziczności i związanej z nimi troski o zdrowie publiczne. ,,Nauczanie matematyki, piszą autorzy, powinno zająć się regułami prawdopodobieństw płynącymi z praw Mendla, nieustannie stawiać przed oczyma nieugięty charakter praw dziedziczności, i oświetlać należycie zadania i zarządzenia opieki nad zdrowotnością dziedziczną".

Oblicza się tedy na wielu przykładach prawdopodobieństwa rozmaitych możliwości, jakie powstają dla potomstwa, gdy jeden z przodków cierpiał na taką, czy inną chorobę dziedziczną. Wskazuje się na niebezpieczeństwo płynące dla społeczeństwa z istnienia w nim osobników obciążonych dziedzicznie; w zad. 93 np. mamy takie pytanie: ,,Wiadomo, że w Berlinie 10 zdrowych małżeństw ma 17 dzieci, podczas gdy 10 chorych dziedzicznie ma ich 35; jak się przedstawiać będzie liczebność tych grup po upływie 50, 100, 200 lat, przyjmując, że małżeństwa zawierać będą zdrowi ze zdrowymi, a chorzy z chorymi". W szeregu zadań arytmetycznych rozważane są koszty utrzymania chorych umysłowych (około 300 000 w Niemczech); młodzież dowiaduje się, że koszt dziennego utrzymania takiego chorego wynosi 4 *M*, podczas gdy niski urzędnik zarabia dziennie 4 *M*, a robotnik niefachowy 2 *M*. Zadania 263 i 264 pouczają wreszcie w jakim stopniu sterylizujące zabiegi zmniejszają procent chorych dziedzicznie.

Zadania przeważnie podawane są bez komentarzy, młodzież sama je wyciągnie. W podobnie sugestywny sposób traktowane są dość obszernie zagadnienia populacyjne i rasowe. Zadanie 48 przeznaczone dla niższych klas, brzmi: „Jeśli w pewnej rasie (białej) małżeństwo ma przeciętnie troje dzieci, a w innej rasie (czarnej) ma czworo, i jeśli w danej chwili stosunek liczebności ras jest 50 : 50, to po upływie trzech pokoleń stosunek ten będzie tylko 30 : 70, po 9 pokoleniach 7 : 93, a po 11 4 : 96. Przedstaw to graficznie". Dziecko nie dostrzeże sztuczności zadania i pozostanie pod silnym wrażeniem. W tym samym Nr 48 stawia się pytanie: „Dlaczego jest konieczne wyplenienie elementów rasowo niezdatnych". W zad. 44 oblicza się, ile dzieci powinno być w rodzinie, aby zapewnić niezmniejszanie się ludności kraju, (rachunek arytmetyczny nietrudny a instruktywny daje w wyniku liczbę 3,4).

Charakter agitacyjny noszą również zadania, które zwracają uwagę na pewne sprawy polityczne „i zmuszają młodzież do zajęcia względem nich wewnętrznego stanowiska". Poleca się np. unaocznić graficznie rozkwit kolonij niemieckich dzięki pracy niemieckiej; obliczyć, jaki procent ziemi, mieszkańców, kolei, zasobów węgla, rud itd. utraciły Niemcy na skutek „Wersalskiego Dyktanda", lub też jaki procent strat wojennych spowodowała „blokada głodowa", a jakie postępy czyni obecnie praca nad uniezależnieniem Niemiec w zakresie potrzeb odżywiania itd. „Planowo, mówi Dorner, zmierza się do tego, aby wbić w głowy narodu fakty zasadnicze, które wytyczają kierunek działalności rządu".

Należą do nich sprawy wojska i bezpieczeństwa państwa. Cały artykuł poświęcony jest obronie powietrznej. Zestawia się w nim siły państw, omawia działanie bomb różnego rodzaju, wyznacza ilość gazów potrzebnych do zagazowania miasta danej powierzchni, objętość schronów gazowych danej wielkości i kształtu itp.; oswaja się młodzież z warunkami przyszłej wojny. Dobór i treść zadań nie zawsze są tu udatne: nie wszystkie zadania arytmetyczne (o gazach np.) będą należycie rozumiane przez tę młodzież, która się arytmetyki uczy i której jeszcze brak dostatecznej orientacji w zakresie niektórych stosunków i wielkości; inne zadania (ruch bomb) są sztuczne i nieinteresujące. To samo można powiedzieć o artykule rozpatrującym zastosowania matematyki do „wiedzy wojennej", wbrew opinii autora (Rothe), który żywi wysokie mniemanie o znaczeniu tych zadań i sądzi, że „z nich mogą się dowiedzieć uczniowie, rodzice i władze szkolne, iż bez naszej wiedzy nie podobna się obyć przy obronie ojczyzny". Wrażenie czytelnika nieuprzedzonego jest zgoła odmienne, dostrzega bowiem, jak w zadaniach — przeważnie balistycznych — wyniki rachunku, nie uwzględniającego oporu ośrodka, odbiegają od rzeczywistości, jakże ma więc uznać pożytek tego rachunku.

Poza zadaniami scharakteryzowanymi wyżej książka Dornera zawiera sporo materiału podanego bez celów propagandowych a przede wszystkim dla celów kształcących.

Dwa pierwsze — może najciekawsze — rozdziały (statystyka matematyczna) zawierają wiele i wszechstronnie dobranych wiadomości o politycznych, społecznych i ekonomicznych stosunkach Niemiec, przeznaczonych nie tylko na ćwiczenia arytmetyczne dla klas początkowych, lecz i dla młodzieży starszej, dla której wprowadza się pojęcia, pogłębiające zrozumienie statystyki: odchylenia średniego, korelacji, prawa Gaussa, prawa wielkich liczb. Dostarczają one wielu ciekawych dla młodzieży zadań, np. Nr. 49: Śmiertelność niemowląt w jednym roku wynosiła 10%, w następnym 9%. Czy można stąd wnosić o zmniejszaniu się śmiertelności, jeśli obserwacji podlegało 400 niemowląt? Ciekawe jest zadanie Nr 53, w którym zestawia się stopnie szkolne rodziców (3952 rodzin) ze stopniami szkolnymi dzieci i stwierdza się istnienie korelacji. Wymagają te zadania wiadomości matematycznych (r-ku prawdopodobieństwa, a np. Nr 34 metody najmniejszych kwadratów), które nie są u nas przedmiotem nauczania, ale niejedno z nich dałoby się w uproszczonej formie zużytkować i u nas.

Rozdział o terenoznawstwie podaje znane przeważnie, ale niezłe zadania. Charakterystyczne jest ograniczanie się do zadań prymitywnych, możnaby powiedzieć ,,harcerskich", nie wymagających dłuższych czynności mierniczych i rachunkowych, oraz sporo ćwiczeń na ocenę według mapy widzialności jednych punktów z innych, np. pytanie, czy ze szczytu wzgórza widać zbocze przeciwległego grzbietu (w innym wysłowieniu: czy je można ostrzeliwać z karabinu maszynowego). Nowością w nauczaniu są zadania dotyczące mierniczych zastosowań fotografii. Fotografia daje obraz perspektywiczny terenu, opierając się więc na własnościach perspektywy można odtworzyć kształt terenu mając jego fotografię. Wdzięczny to i zajmujący temat, choć może nie całkiem wyzyskany przez autorów. W naszym szkolnictwie, niestety, zużytkować nie dałby się wobec braku potrzebnego przygotowania.

Na początku wskazywałem cele, jakie sobie postawili autorzy. W pewnym tylko stopniu udało się im te cele osiągnąć, tzn. tak wybrać i zredagować zadania, aby trafiały do przekonania młodzieży i zawierały jednocześnie istotną treść matematyczną. Najmniej udatnie wypadły zadania wojskowe, pomyślniej zadania statystyczne, biologiczne, terenoznawcze. Zakres poruszanych teoryj matematycznych jest wąski: poza rachunkiem prawdopodobieństwa stosowane są pewne działy geometrii, a nie spotyka się wcale lub niemal wcale większej części kwestyj figurujących w b. obszernym w Niemczech programie matematyki. W związku z tym nasuwa się pytanie, czy spełnią się nadzieje Hamela i książka przekona ogół, iż dla pracy narodowo socjalistycznej niezbędne jest nauczanie matematyki w dotychczasowym zakresie i w dotychczasowej ilości godzin. Wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa pozostaną chyba w programie.

S. Kulczycki.

Kommerell, Dr K. Das Grenzgebiet der elementaren und höheren Mathematik in ausgewählten Kapiteln dargestellt von... Mit 110 Figuren. pp. VIII, 249. K. F. Koehler-Verlag. Leipzig 1936. Cena 14 marek.

Książka powstała z wykładów na kursach wakacyjnych dla nauczycieli. Autor miał na względzie przede wszystkim potrzeby i nastroje młodego narybku nauczycielskiego, który olśniony szerokim horyzontem nauki uniwersyteckiej często nie docenia matematyki elementarnej i nie dostrzega ścisłego związku między zagadnieniami nauki spółczesnej a pozornie banalnymi pytaniami matematyki szkolnej.

Nawiązanie kontaktu między „wyższą“ a „niższą“ matematyką może się dokonać w rozmaity sposób — im bardziej różnorodne będą te sposoby, tym lepiej dla nauczania. W Niemczech Klein, we Włoszech Peano, Vailati, Enriques i szereg młodszych uczonych i nauczycieli pokazali, ile światła rzucają spółczesne badania naukowe na tradycyjne, oklepane zdawałoby się zagadnienia matematyki szkolnej, jak zmuszają do całkowitego przebudowania jej wykładu. — Kommerell inaczej podchodzi do tych spraw. Przede wszystkim uczy na przykładach, jak można przygotować ucznia do zrozumienia podstawowych pojęć analizy, zwłaszcza pojęcia granicy. Stawia jako zasadę, że jeśli wprowadzamy jakiś nowy rodzaj funkcji, powinniśmy pokazać uczniowi, jak może obliczać wartości tej funkcji. Omawia więc sposoby obliczania przybliżeń dla pierwiastków, logarytmów, funkcyj trygonometrycznych, dla liczby π. Wykład wiąże się jak najściślej z praktyką szkolną, często jednak czyni autor dygresje wybiegające daleko poza ramy nauczania szkolnego i pokazuje, jak metody elementarne prowadzą nieraz bezpośrednio do ważnych zagadnień matematyki „wyższej“ — że wymienię tylko badania Liouville'a nad liczbami przestępnymi oraz związek między średnią arytmetyczno-geometryczną a obliczaniem okresu rzeczywistego całki eliptycznej I rodzaju. W tym pierwszym rozdziale mowa przeważnie o rzeczach znanych, sposób jednak ujęcia jest ciekawy, pouczający i często zupełnie nowy. Warto zwłaszcza zwrócić uwagę na teorię ułamków ciągłych podaną w szacie geometrycznej i opartą na pojęciu siatki liczbowej (Zahlengitter).

Drugi rozdział traktuje o przekształceniach geometrycznych. Autorowi nie chodzi o sprawy zasadnicze, o rolę przekształcenia w systemie geometrii, lecz jedynie o ciekawe i różnorodne zastosowania. Omawia więc takie rzeczy, jak zasadę planigrafu Darboux, jak zasadę na której oparł Brill konstrukcję swych znanych modeli powierzchni drugiego rzędu, jak związek pomiędzy kolineacją a przekształceniem Lorentza i specjalną teorią względności itp. Najpiękniejszy jednak jest ustęp poświęcony cyklidom Dupina. Opierając się tylko na najbardziej elementarnych pojęciach rzutu perspektywicznego i inwersji udowadnia autor wszystkie zasadnicze własności cyklid. Gdy czyta się tę piękną rozprawę, mimowoli przychodzą na myśl utyskiwania Vahlena nad tym, jak szkoła coraz bardziej zaniedbuje metody matematyki elementarnej, którymi tak artystycznie władali nasi poprzednicy.

Trzeci i ostatni rozdział zatytułowany: „Rachunek wektorów i algebra“ jest może mniej interesujący, jakkolwiek i tu znajdzie czytelnik kilka ładnych rzeczy, np. wyprowadzenie wzorów trygonometrii kulistej (i to zarówno dla trójkątów Eulera jak i Möbiusa) za pomocą najprostszych pojęć rachunku wektorów. Miłośnicy konstrukcyj geometrycznych znajdą tu również elementarne, od teorii Gaussa niezależne uzasadnienie konstrukcji siedemnastokąta foremnego podanej przez Richmonda.

Książka Kommerella powinnaby znaleźć się w każdej bibliotece nauczycielskiej. *Wł. Wojtowicz.*

Biblioteczka Kółka Matem.-Fizycznego U. U. J. pod red. prof. dr W. Wilkosza. Kółko Matem.-Fizyczne U. U. J. w Krakowie, od dawna już znane ze swej ożywionej działalności wydawniczej — nie tylko na polu skryptów hektograficznych, lecz również w zakresie wydawnictw drukowanych — rozpoczęło w r. 1932 pod redakcją dr W. Wilkosza, profesora Uniwersytetu Jagiellońskiego wydawnictwo pod nazwą *Biblioteczki Kółka Mat.-Fiz. U. U. J.*, nie mające odpowiednika w dotychczasowej polskiej literaturze matematycznej, a przypominające pod wieloma względami znany zbiór niemiecki *Sammlung Göschen*; podobny jest format (w przybliżeniu 11 × 15,5 cm) i jednolita szata graficzna, a przede wszystkim cel dostarczenia w postaci jasnej, możliwie przystępnej i przy tym koniecznie zwięzłej, szeregu monograficznych ujęć poszczególnych teoryj matematycznych. Książeczki te, których niewysoka cena ułatwia nabycie,* przeznaczone są w pierwszym rzędzie dla słuchaczy szkół wyższych, lecz mogą one również oddać znakomite usługi bądź dojrzałym osobom pragnącym uzupełnić, czy też lepiej ugruntować, swoje wiadomości o najważniejszych działach matematyki, bądź też samoukom w rozmaitym wieku.

Omówimy poniżej niektóre z siedmiu tomików, które dotychczas się ukazały.

Nr 1. Prof. Dr Witold Wilkosz: *Arytmetyka liczb całkowitych. System aksjomatyczny.* 1932. Str. II × 136. Cena zł 4,—.

Jest to systematyczny wykład elementarnych własności liczb całkowitych odpowiadający nowoczesnym wymaganiom naukowej ścisłości, stopniowo i bardzo zgrabnie wprowadzający czytelnika po drodze w pojęcia nowoczesnej logiki wraz z jej symboliką. Za podstawę przyjął autor klasyczną — rzec można — dzisiaj aksjomatykę G. Peany, na końcu znajdzie jednak czytelnik wskazówki dotyczące innego sposobu budowania arytmetyki liczb całkowitych, pochodzącego w zasadzie od G. Fregego, a opartego na podstawach teoriomnogościowych, tj. wywodzącego arytmetykę z pojęcia liczby kardynalnej; kilka uwag historycznych i filozoficznych stanowi cenne uzupełnienie całości.

Studium omawianej książeczki nie wymaga żadnego określonego zasobu wiedzy matematycznej, obliczone jest jednak na pewną ogólną dojrzałość umysłową, bez której trudno o zrozumienie samej potrzeby naukowego opracowywania tego, co umysłowi nieprzygotowanemu wydaje się zbiorem ,,faktów oczywistych". Lektura *Arytmetyki liczb całkowitych* znakomicie w dalszym ciągu rozwija ten krytycyzm umysłu, potrzebny nie tylko samodzielnemu badaczowi, ale także każdemu, kto chce głębiej wniknąć w istotę matematyki. Lekturę tę należy tym usilniej polecić każdemu, kto nie miał sposobności zaznajomić się dokładnie z podstawami teorii liczb całkowitych — na której opiera się w znacznej mierze cała matematyka — iż jest to obecnie jedyne w polskiej literaturze naukowej dzieło na ten temat.

Nr 2. Prof. Dr W. Wilkosz. *Teoria mnogości punktowych. Cz. I. Mnogości liniowe: Teoria opisowa. Miara Lebesgue'a.* 1933. Str. IV + 127. Cena zł 3,—.

Niewielka ta książeczka zawiera w systematycznym układzie te wiadomości z zakresu teorii mnogości liniowych, które potrzebne są przy głębszym studium analizy i teorii funkcji analitycznych, choć zazwyczaj nie znajdujemy ich *explicite* wyłożonych w podręcznikach tych działów matematyki. Obok najelementarniejszych wiadomości o punktach skupienia, zbiorach otwartych i zamkniętych itp., tudzież wymienionej w podtytule teorii miary Lebesgue'a, znajdujemy w dziełku prof. Wilkosza m. i. tak ważne w zastosowaniach twierdzenie o pokryciu Vitaliego i Rademachera. Na końcu umieszczona jest krótka bibliografia.

Omawiane dziełko unika wchodzenia w zagadnienia dotyczące abstrakcyjnej teorii mnogości, z którymi można się zapoznać studiując inne książki temu właśnie tematowi poświęcone (w polskiej literaturze: prof. W. Sierpińskiego i prof.

---

* Można je nabywać, lub zamawiać bezpośrednio w Kółku Mat.-Fiz. U. U. J., Kraków, Gołębia 20.

W. Wilkosza); niemniej jednak jest ono pisane — nie pozostawiając przy tym nic do życzenia pod względem ścisłości — w taki sposób, aby do jego lektury nie było potrzeba uprzednich studiów nad ogólnymi podstawami teorii mnogości. Jak wiadomo, teoria mnogości wymaga stanowczo zajęcia jakiegoś określonego stanowiska względem zagadnienia, którego jednym z rozwiązań jest *hierarchia typów* B. Russella, tzn. zagadnienia, kiedy wolno nam z danych klas tworzyć nowe za pomocą operacyj logicznych (sprawy te zaczynają zresztą odgrywać rolę i poza właściwą teorią mnogości, np. w pewnych konstrukcjach czystej algebry). Przyjęcie bowiem nieograniczonej wykonalności działań logicznych prowadzi niechybnie do sprzeczności. Otóż prof. Wilkosz załatwia tę sprawę w sposób bardzo prosty i dla matematyki dogodny przez *zasadę jednorodności*: postuluje się mianowicie wykonalność jednoczesną działań logicznych dla podklas jakichś klas, które musimy uważać za dane *a priori* przez teorię dedukcyjną, którą rozwijamy; te dane na początku klasy mają podobne znaczenie jak „*świat mowy*" logików angielskich XIX w. Otrzymujemy w ten sposób możność wykonywania tych wszystkich konstrukcyj logicznych, które są naprawdę potrzebne w matematyce, nie narażając się na znane paradoksy teoriomnogościowe.

Na uwagę zasługuje w układzie omawianej książeczki troskliwość sformułowania postulatu Zermeli i zasady wyboru oraz wyodrębnienie wszystkich twierdzeń, których dowód wymaga oparcia się na wspomnianym postulacie. Niewątpliwie korzystne jest również zaznaczenie gwiazdką tych definicyj i twierdzeń, które dadzą się przenieść wprost na przestrzeń o dowolnej skończonej ilości wymiarów. Topologii utworów dwu- i więcej wymiarowych ma być poświęcona — zapowiedziana w przedmowie — druga część *Teorii mnogości punktowych* prof. Wilkosza.

Nr 3. Prof. Dr W. Wilkosz. *Zarys algebry w ujęciu klasycznem. Część I.* 1934. Str. IV. 179. Cena zł 4,—.

Ogół dyscyplin, który nazywamy algebrą, rozpada się na dwa zasadniczo różne działy. Z jednej strony mamy do czynienia z „czystą" algebrą, opartą o pojęcie *ciała algebraicznego*, z drugiej zaś strony — z algebrą w ujęciu klasycznym, która jest teorią wielomianów zespolonych i rzeczywistych. „Czysta" algebra daje może więcej satysfakcji estetycznej, ale gdy chodzi o zastosowania w różnych podstawowych działach matematyki, a zwłaszcza analizy, wysuwa się mimo wszystko na pierwszy plan klasyczne ujęcie algebry. Toteż obowiązkowy kurs algebry, wchodzący w skład studiów magisterskich na polskich uniwersytetach, ogranicza się najczęściej do algebry w znaczeniu klasycznym.

Temu właśnie tematowi poświęcona jest omawiana książeczka. Jest to tylko pierwsza część zamierzonej całości obejmująca to, co autor uważał za najniezbędniejsze z punktu widzenia zastosowań do analizy. Należy sobie życzyć ukazania się w możliwie najbliższym czasie drugiej części, tym bardziej, iż brak miejsca nie pozwolił na umieszczenie w pierwszej takich rozdziałów, jak teoria funkcyj symetrycznych lub wskazówki dotyczące rozwiązywania liczbowego równań. Czytelnik znajdzie natomiast w tej pierwszej części na wstępie konstruktywną teorię liczb zespolonych wraz z ich interpretacją geometryczną i poprawnym logicznie przedstawieniem izomorfizmu pewnej podklasy liczb zespolonych z klasą liczb rzeczywistych, a dalej bardzo zgrabnie ujętą teorię podzielności wielomianów wielu zmiennych (co prawda przeprowadzoną na wielomianach dwu zmiennych, ale z możliwością uogólnienia). Prócz tego omawiana książka zawiera tzw. zasadnicze twierdzenie algebry jednej zmiennej wraz z dowodem, ustępy o równaniu dwumiennym, o pierwiastkach wielomianów rzeczywistych, o przywiedlności wielomianów jednej zmiennej, o teorii Sturma, o oddzielaniu pierwiastków równań algebraicznych i o rozwiązywaniu równań drugiego, trzeciego i czwartego stopnia. Zakończenie stanowi rozdział o rugowniku i wyróżniku z uwzględnieniem równania różnic pierwiastków. Teoria wyznaczników jest pominięta, jako osobny temat sam dla siebie, któremu zresztą jest poświęcony osobny podręcznik wydany także nakładem Kółka Mat.-Fiz. U. U. J. (J. Śleszyński, *Teoria wyznaczników*, opr. S. Rozental, 1926) i który na uniwersytetach najczęściej bywa wykładany poza właściwym kursem algebry.

Warto zwrócić uwagę w omawianej książeczce, tak jak zresztą i w innych wydawnictwach prof. Wilkosza, na wielką dbałość o logiczną stronę ujęcia. Tak np. autor przez wyraźne postawienie sprawy unika nieporozumień związanych z pomieszaniem pojęcia samej funkcji z jej wartością. Te nieporozumienia, które przecież dawno mogłyby należeć do historii, były jednakże — jak się zdaje — powodem, dla którego np. O. Perron w swojej znakomitej zresztą Algebrze (*Lehrbuch der Algebra*) konstruuje wielomian, niezależnie od ogólnego pojęcia funkcji, jako czysto formalny układ znaczków; ten punkt widzenia daje się wprawdzie przeprowadzić zupełnie poprawnie, ale powoduje niepotrzebne komplikacje i dziwactwa. Należy również podnieść w omawianym dziełku ścisłe postawienie pojęć dzielnika i czynnika pierwiastkowego oraz w ogóle wszystkiego tego, co się łączy z pojęciem pierwiastka wielokrotnego. Pewne wątpliwości w piszącym te słowa wzbudza z punktu widzenia celowości ograniczenie znaczenia operatora $\sqrt[n]{}$ do wartości głównej pierwiastka (str. 116), gdyż zatracamy w ten sposób ciągłość pierwiastka i tak dogodną identyczność $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$. Ocena powyższa ma jednak charakter subjektywny i jest — być może — odosobniona, a trzeba w każdym razie przyznać, iż formalne ujęcie wieloznaczności pierwiastka jest dość kłopotliwe. Z innych szczegółów przez autora uściślonych w porównaniu z tradycyjnym przedstawieniem rzeczy zwraca jeszcze uwagę ładne ujęcie formalne ilości zmian znaków w skończonym ciągu liczb rzeczywistych (teoria Sturma). Parę ustępów petitem nawiązuje do teorii funkcyj analitycznych. Można je jednak opuszczać przy lekturze, tak iż do studiowania omawianej książeczki wystarcza całkowicie zasób wiadomości wyniesiony ze szkoły średniej.

Korekta książki pozostawia niestety to i owo do życzenia. W wywodzie wzoru Cardana (str. 157) odpadła przez to część zdania istotna dla sensu, mianowicie objaśniająca, iż wartość pierwiastka

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\varepsilon'\sqrt{R}}$$

ma być tak dobrana, aby było

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\varepsilon'\sqrt{R}}\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\varepsilon'\sqrt{R}}=-\frac{p}{3}.$$

Również do wzorów na str. 169 wkradły się błędy drukarskie. Są to oczywiście usterki całkiem drobne, które będą usunięte przez dodanie do części II erratów odnoszących się do części I. Przytaczam je dla użytku przyszłych Czytelników, których pragnąłbym niniejszą recenzją przysporzyć pięknej, oryginalnej i nawskroś nowoczesnej książeczce prof. Wilkosza.

S. K. Zaremba (Kraków).

Biblioteczka Matematyczna pod redakcją Tadeusza Sierzputowskiego i Edwarda Szpilrajna, wydawana nakładem Książnicy-Atlasu.

Biblioteczka Matematyczna dostarcza czytelnikom lektury matematycznej wykraczającej poza program szkolny, a jednak nie wymagającej przygotowania specjalnego. Jest ona materiałem do pracy dla szkolnych kółek matematycznych, a nauczycielowi matematyki dopomaga uzupełniać i urozmaicać tok lekcji w gimnazjum i liceum.

Dotąd ukazały się: Tomik 1: W. Sierpiński: **Przekroje.** Wstęp do teorii liczb niewymiernych. Cena zł 1,—. Tomik 2: S. Straszewicz: **O wielobokach.** Cena zł 1,40. Tomik 3—5: A. Tarski: **O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej.** Cena zł 4,40. Tomik 7: M. Kerner: **Maksima i minima w dziedzinie geometrii.** Cena zł 1,40.

W przygotowaniu: E. Stamm: **Rachunek kalendarzowy.** W. Sierpiński: **Wstęp do ogólnej teorii działań.** A. Łomnicki: **Wielościany umiarowe.** S. Steckel: **Wstęp do teorii mnogości.**

Tomik 1: Dr Wacław Sierpiński, Profesor Uniwersytetu Józefa Piłsudskiego w Warszawie: **Przekroje.** Wstęp do teorii liczb niewymiernych. Str. 32. Cena zł 1,—.

Książeczka prof. W. Sierpińskiego omawia jedno z ważniejszych pojęć współczesnej analizy matematycznej: pojęcie przekroju, które szczególnie ważną rolę odgrywa przy wprowadzeniu liczb niewymiernych. Podane dowody twierdzeń, w książeczce posługują się rozumowaniami nieskomplikowanymi, a jednocześnie stanowią doskonały materiał do wdrażania się w logiczne wnioskowanie.

Dziełko prof. W. Sierpińskiego wydrukowane zostało ostatnio w języku rosyjskim.

Tomik 2: Dr Stefan Straszewicz, Profesor Politechniki Warszawskiej: **O wielobokach.** Str. 32. Cena zł 1,40.

Temat książeczki należy do geometrii elementarnej, omawia ona jednak zagadnienia niespotykane w podręcznikach. Główną jej treść stanowi rozważanie wieloboków posiadających tzw. punkty podwójne, a wszczególności rozstrzygnięcie pytania, ile punktów podwójnych może występować w wieloboku o danej liczbie boków. W części końcowej jest mowa o wielobokach wypukłych i paru zastosowaniach tego pojęcia. Tekst ilustruje spora liczba rysunków. Do zrozumienia książeczki wystarczą najelementarniejsze wiadomości z geometrii, lektura jej wymagać jednak będzie uwagi i zastanowienia się nad niejednym rozumowaniem, odbiegającym od szablonu szkolnego. Zdolniejszych uczniów klas wyższych szkół średnich lektura ta może pobudzić do samodzielnych rozmyślań i rozszerzyć ich widnokrąg matematyczny.

Tomik 3 — 5: Dr Alfred Tarski, Docent Uniwersytetu Józefa Piłsudskiego w Warszawie: **O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej.** Str. 168. Cena zł 4,40.

Książka A. Tarskiego zaznajamia czytelnika z najważniejszymi pojęciami logiki matematycznej. Nauka ta stworzona została w celu pogłębienia i udoskonalenia podstaw matematyki, a w ciągu niespełna stuletniego okresu istnienia zdołała osiągnąć wysoki poziom doskonałości. Logika tradycyjna stanowi w tej chwili fragment tej nowej logiki i to fragment stosunkowo nieznaczny. Logika matematyczna jest obecnie jedyną naukową formą logiki; znaczenie jej przekroczyło w ten sposób cel, dla którego została stworzona. Omawiana książka zawiera też wykład podstawowych zasad budowania teoryj matematycznych, w tym więc swoim dziale stanowi wstęp do metodologii matematyki.

Materiał wybrany został w ten sposób, że omówione są wszystkie bodaj kwestje logiczne i metodologiczne nastręczające się w gimnazjalnym kursie matematyki. Autor stale ilustruje rozważania konkretnymi przykładami zaczerpniętymi z matematyki szkolnej. Każdy rozdział zakończony jest licznymi ćwiczeniami. Lektura książki nie wymaga żadnego przygotowania specjalnego.

Książka uwzględnia najnowsze badania w dziedzinach, którymi się zajmuje. Zaznaczamy, że uczeni polscy, a w szczególności warszawska szkoła logiczna, do której zalicza się autor książki, odgrywają obecnie w rozwoju badań logicznych i metodologicznych pierwszorzędną rolę.

O potrzebie książki tego rodzaju nietylko w literaturze polskiej, ale i zagranicznej, świadczy okoliczność, że omawiane dziełko ukaże się niebawem w przekładzie niemieckim, w nakładzie firmy J. Springera.

Tomik 7: Dr Michał Kerner: **Maksima i minima w dziedzinie geometrii.** Stron 36. Cena zł 1,40.

Książeczka *Maksima i minima w dziedzinie geometrii* zawiera wybrane zagadnienia geometryczne dotyczące figur, dla których osiągają maksimum lub minimum wielkości tego rodzaju, jak obwód, pole itp. Pierwsza jej część poświęcona jest dowodom własności ekstremalnych w przypadkach bardziej elementarnych, a druga wybiega poza zakres geometrii elementarnej i omawia w sposób poglądowy zagadnienia trudniejsze rezygnując ze ścisłych dowodów, a korzystając z interpretacji fizycznych (np. przy pomocy błon mydlanych). Więcej nieco uwagi poświęcono własności izoperimetrycznej koła. Książeczka przeznaczona jest dla czytelników na poziomie licealnym, jak również dla rozpoczynających studia wyższe w zakresie nauk ścisłych.

Dr Otton Nikodym: **Dydaktyka matematyki czystej w zakresie wyższych klas szkoły średniej.** T. II. Ułamki oraz ich algebra. Warszawa 1937. Nakładem ,,Naszej Księgarni", Sp. Akc. Związku Nauczycielstwa Polskiego.

Tom II Dydaktyki matematyki czystej dra Nikodyma jest poświęcony nauczaniu ułamków (na poziomie wyższym od poziomu nauczania w wzkole powszechnej) i stanowi konsekwentny ciąg dalszy tomu I obejmującego naukę o liczbach naturalnych. Tom II tak samo jak tom I składa się z trzech części: A) wzorów lekcyjnych, B) części naukowej, C) szczegółowych uwag dydaktycznych, przy czym część A jest napisana w formie dialogu. Książka obejmuje następujący zakres: naukę ułamków zwykłych, ich algebrę, równania w zakresie ułamków, naukę o proporcjonalności prostej i odwrotnej.

Nauka ułamków w części pierwszej jest przeprowadzona w sposób geometryczny i odznacza się dużą konsekwencją takiego ujęcia. W myśl stanowiska zasadniczego zajętego już w t. I autor nie wprowadza ułamków przez adiunkcję do liczb naturalnych, lecz traktuje ułamki, jak sam zaznacza w przedmowie, w sposób separatystyczny. Część pierwsza zawiera wzory ćwiczeń opracowane przez dr St. Nikodymową.

Część naukowa zaczyna się od bardzo pięknego rozdziału pt. ,,Propedeutyka logiki zdań", rozdział drugi zawiera geometryczną teorię ułamków, a rozdział trzeci — ich teorię arytmetyczną.

Najkrótsza jest część trzecia i ostatnia zawierająca szczegółowe uwagi dydaktyczne, którym poświęcono 38 stronic. Z pięciu paragrafów tej części trzy dotyczą zagadnień ogólnych, a mianowicie nauczania ułamków w wyższych klasach szkoły powszechnej, nauczania ułamków w zaniedbanych klasach wyższych, programu nauczania algebry.

Z powyższego widzimy, że książka dra Nikodyma dotyczy zagadnień najistotniejszych dla każdego nauczyciela i jako taka zasługiwałaby na bardziej szczegółowe omówienie. Musimy jednak zrezygnować z niego w pierwszym zeszycie naszego czasopisma ze względu na brak miejsca.

Stanisława Nikodymowa i Otton Nikodym: **Wstęp do rachunku różniczkowego dla użytku samouków, absolwentów szkół średnich oraz słuchaczy elementarnego kursu matematyki wyższej.** Nakładem ,,Naszej Księgarni", Sp. Akc. Związku Nauczycielstwa Polskiego, Warszawa 1936.

Książeczka ta swymi rozmiarami i charakterem popularyzatorskim przypomina tomiki ,,Biblioteczki matematycznej" Książnicy Atlas. Na czterech arkuszach niewielkiego formatu autorzy wprowadzają czytelnika w podstawowe pojęcia niezbędne do zrozumienia rachunku różniczkowego. Zaczynając od pojęć najbardziej elementarnych, jak oś liczbowa, liczby naturalne i całkowite, wymierne i niewymierne, ciągi, przedziały, doprowadzają autorzy czytelnika do pojęcia granicy ciągu, twierdzeń o granicach, pojęcia funkcji ciągłej i jej pochodnej. Autorzy rezygnują jednak z rozwijania rachunku różniczkowego wobec istnienia w polskiej literaturze podręcznikowej ,,kilku doskonałych książek z tej dziedziny". Wykaz tych ostatnich czytelnik znajdzie w końcu omawianego ,,Wstępu".

Kronika.

Polskie Towarzystwo Matematyczne. Polskie Towarzystwo Matematyczne (grupujące głównie pracowników naukowych w dziedzinie matematyki) zostało w r. b. zreorganizowane. Siedzibą Towarzystwa był dotąd Kraków, a w innych miastach uniwersyteckich mieściły się oddziały. Obecnie stworzono oddział w Krakowie, siedziba zarządu głównego przeniesiona została do Warszawy, a walne zgromadzenie składa się odtąd z delegatów poszczególnych Oddziałów. Organ P. T. M. „Annales de la Société Polonaise de Mathématique" wychodzić będzie nadal w Krakowie.

Pierwsze po reorganizacji walne zgromadzenie P. T. M. odbyło się 7. III. r. b. w Warszawie. Prezesem P. T. M. obrano prof. S. Mazurkiewicza (Warszawa), sekretarzem doc. B. Knastera (Warszawa), skarbnikiem doc. W. Orlicza (Lwów). Wiceprezesami są w myśl nowego statutu prezesi oddziałów: prof. S. Zaremba (Kraków), prof. H. Steinhaus (Lwów), prof. M. Biernacki (Poznań), prof. J. Rudnicki (Wilno). Zebranie uchwaliło m. i. zwołać do Warszawy na jesień r. 1937 III Polski Zjazd Matematyczny oraz konferencję profesorów i docentów w sprawie nauczania matematyki w szkołach wyższych.

III Polski Zjazd Matematyczny. W dniach od 29. IX. do 3. X. 1937 odbył się w Warszawie III Polski Zjazd Matematyczny. W skład Komitetu Organizacyjnego powołanego przez Zarząd Polskiego Tow. Matematycznego weszli: prezes prof. W. Sierpiński; wiceprezesi profesorowie K. Kuratowski, S. Mazurkiewicz, S. Straszewicz; sekretarz generalny doc. dr. K. Zarankiewicz; zastępcy sekretarza generalnego doc. dr. K. Borsuk i dr. E. Szpilrajn; członkowie komitetu prof. M. Huber, doc. B. Knaster i prof. Łukasiewicz. Zarówno odczyty plenarne jak i posiedzenia sekcyj odbywały się w gmachu Politechniki.

Podczas Zjazdu odbyły się odczyty plenarne poświęcone syntetycznemu omówieniu szeregu zagadnień z podstawowych działów matematyki oraz komunikaty naukowe na posiedzeniach 5 sekcji. Odczyty plenarne wygłosili: Prof. A. Zygmund (Wilno). Nowsze wyniki teorii szeregów trygonometrycznych, ortogonalnych oraz teorii interpolacji. Prof. M. Biernacki (Poznań). O obszarach pokrytych przez wartości funkcji analitycznych. Prof. W. Sierpiński (Warszawa). Rodziny przeliczalne zbiorów. Prof. K. Kuratowski (Warszawa). Z topologii przestrzeni spójnych. Prof. M. Huber (Warszawa). Zagadnienia matematyki stosowanej w naukach technicznych. Prof. T. Ważewski (Kraków). O podstawowych zagadnieniach związanych z problemem Cauchy'ego w zakresie równań cząstkowych pierwszego rzędu. Prof. S. Mazurkiewicz (Warszawa). Z podstaw teorii prawdopodobieństwa. Prof. H. Steinhaus (Lwów). O funkcjach niezależnych i ich zastosowaniach. Komunikaty były wygłaszane w następujących sekcjach: I Podstawy matematyki, teoria mnogości, teoria funkcji rzeczywistych. II Analiza, algebra, teoria liczb. III Geometria z topologią. IV Mechanika, teoria prawdopodobieństwa, matematyka stosowana. V Historia matematyki, dydaktyka.

W Zjeździe wzięło udział 173 uczestników. Jakkolwiek był to Zjazd krajowy, to jednak przybyło nań kilkunastu wybitnych uczonych z zagranicy. Fakt ten świadczy o wysokim stanie matematyki w Polsce. Między innymi przybyli na Zjazd: prof. M. Fréchet (Paris), prof. H. Hopf (Zürich), prof. P. Sergescu i prof. A. Bratu (Cluj), prof. Kerékjártó (Szeged), dr L. Cesari (Roma), dr H. Fried (Wien). Komunikatów na sekcjach wygłoszono 67. Na posiedzeniu końcowym prof. K. Kuratowski zreferował uchwały Komitetu Matematycznego przy Radzie Nauk Ścisłych i Stosowanych obejmujące całokształt potrzeb matematyki w Polsce. Zjazd postanowił jednomyślnie przyłączyć się w całej rozciągłości do tych postulatów. Szczegółowe sprawozdanie ze Zjazdu ukaże się w „Annales de la Société Polonaise de Mathématique" (Kraków).

W ramach Zjazdu odbyły się: Konferencja profesorów i docentów w sprawie nauczania matematyki w szkołach akademickich oraz obchód ku uczczeniu 65 lat pracy naukowej, pedagogicznej i społecznej prof. S. Dicksteina. Bardziej szczegółowe sprawozdanie z tego obchodu dajemy poniżej.

Z natury rzeczy sekcja piąta Zjazdu obejmująca historię i dydaktykę matematyki może budzić wśród naszych czytelników większe zainteresowanie od innych sekcyj, których prace w większości wypadków były dostępne tylko ścisłym kołom specjalistów. Odczyty z historii odbyły się w przedostatnim dniu Zjazdu, zagadnieniom zaś dydaktycznym poświęcono tylko dwie ostatnie godziny przed jego zamknięciem, co zmusiło prelegentów do dużego pośpiechu i uniemożliwiło dyskusję. Postaramy się zachęcić prelegentów sekcji dydaktycznej do spokojniejszego wypowiedzenia się w nastepujących zeszytach Matematyki i Szkoły.

Jubileusz Profesora Samuela Dicksteina. Wzywając uczestników III Polskiego Zjazdu Matematycznego do udziału w uczczeniu Profesora Samuela Dicksteina Polskie Towarzystwo Matematyczne rozesłało pismo w następujący sposób przedstawiające zasługi jubilata:

,,Od lat 65 z górą prowadzi Profesor Dickstein pracę nauczycielską. Niestrudzony organizator nauki i szkolnictwa w najcięższych okresach życia polskiego pozostaje w stałym kontakcie z nauką międzynarodową, informuje zagranicę o pracach matematyków polskich, świadczy, iż w najgorszych warunkach zaboru rosyjskiego, pozbawiona własnych placówek uniwersyteckich, istnieje jednak, krzepnie i rozwija się polska wiedza matematyczna.

Czterdzieści pięć tomów ,,Prac Matematyczno-Fizycznych", czterdzieści cztery tomy ,,Wiadomości Matematycznych" — jeden zaledwie fragment twórczości organizacyjno-naukowej Profesora Dicksteina — oto pomnik pracy i szlachetnego wysiłku. Przez długi okres czasu publikacje te są jedynym stałym wydawnictwem matematycznym polskim, przez kordony graniczne nawiązują i utrwalają łączność między uczonymi polskimi, stanowią czynnik postępu nauki, przyczyniają się do ustalania polskiego słownictwa matematycznego.

W okresie niewoli, gdy każda niemal instytucja obywatelska w kraju jest placówką obronną polskości, Profesor Dickstein współdziała w inicjatywie i organizacji szkół, bibliotek, muzeów, wydawnictw popularno-naukowych, stowarzyszeń samopomocy społecznej. Gdy w r. 1915 wojska rosyjskie opuszczają Warszawę, jest członkiem Komitetu Obywatelskiego stolicy. Gdy w r. 1920 powrotne fale najazdu zbliżają się do jej bram, wchodzi w skład Komitetu Obywatelskiego Obrony Państwa".

W celu uczczenia tych zasług zorganizowano Komitet, w skład którego weszły: Polska Akademia Umiejętności, Akademia Nauk Technicznych, Towarzystwo Naukowe Warszawskie, Uniwersytet Józefa Piłsudskiego i jego Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Polskie Towarzystwo Matematyczne oraz Towarzystwo Nauczycieli Szkół Średnich i Wyższych.

Obchód jubileuszowy rozpoczął się w południe dnia 3/X w sali kolumnowej Towarzystwa Naukowego Warszawskiego (w pałacu Staszica). Po licznych przemówieniach, w których zobrazowano dorobek wieloletniej pracy Jubilata oraz po przemówieniach gości z zagranicy zabrał głos sam Jubilat i w słowach serdecznych a prostych wypowiedział wiele pięknych myśli sięgając pamięcią w daleką przeszłość, jeszcze do czasów powstania 1863 roku, które przeżywał w Warszawie jako uczeń gimnazjum. Jubilat zwrócił uwagę na to, że praca jego była głównie pracą odtwórczą, a jeżeli przyniosła wyniki, to przede wszystkim dzięki temu, że miał w swym otoczeniu ludzi, z którymi mógł współpracować. Tu Jubilat wymienił szereg osób, przeważnie już nieżyjących, oraz podzielił się wspomnieniami ze swoich dawniejszych spotkań ze znakomitymi matematykami. Koło godziny 14 zakończono oficjalną część obchodu, wieczorem odbył się bankiet jubileuszowy w hotelu Bristol.