

kat. komp.



101760

22(1950)

III



101760

III

DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA
MATEMATYCZNEGO T. XXII

VI ZJAZD
MATEMATYKÓW POLSKICH

WARSZAWA 20—23 IX 1948

26

KRAKÓW 1950

INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIwersytetu Jagiellońskiego
UL. ŚW. JANA 22

DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA
MATEMATYCZNEGO T. XXII

VI ZJAZD
MATEMATYKÓW POLSKICH

WARSZAWA 20—23 IX 1948

Biblioteka Jagiellońska



1003047192

KRAKÓW 1950

INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
UL. ŚW. JANA 22

101.760

III



P. T. M. — 500 egz. — B 5 — pap. druk. sat. b/drzewny 70×100 cm 80 gr.
X. 1950 M - 45092 Zam. 75/50

Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem P. Z. W. S.

CzEO 1951 nr. 284

SPIS RZECZY

	Str.
Lista uczestników Zjazdu	1
Posiedzenia plenarne	3
Sekcja analizy matematycznej	39
Sekcja geometrii	53
Sekcja analizy funkcjonalnej i teorii funkcji zmiennej rzeczywistej	56
Sekcja topologii	60
Sekcja algebry i teorii liczb	71
Sekcja matematyki stosowanej	72
Sekcja podstaw matematyki	78
Sekcja dydaktyczna	93

VI ZJAZD MATEMATYKÓW POLSKICH

Warszawa 20 - 23 IX 1948

Bibliograf.
Obrady Zjazdu toczyły się w Zakładzie Fizyki Doświadczalnej Uniwersytetu Warszawskiego. Przewodniczącym Zjazdu był profesor Kazimierz Kuratowski, sekretarzem — profesor Andrzej Mostowski.

Dnia 23 IX na obrady Zjazdu przybyli Minister Oświaty dr Stanisław Skrzyszewski i Vice-minister Eugenia Krasowska. Minister Skrzyszewski wygłosił do zebranych dłuższe przemówienie, w którym omówił aktualne potrzeby szkolnictwa średniego w zakresie matematyki i przedstawił sugestie, dotyczące współpracy matematyków zorganizowanych w Polskim Towarzystwie Matematycznym z Ministerstwem Oświaty w dziedzinie szkolenia na poziomie niższym i średnim.

Po zakończeniu obrad Zjazdu odbyła się wspólna kolacja w Klubie Inteligencji Pracującej.

Poniżej podana jest lista uczestników Zjazdu, tytuły wszystkich odczytów i komunikatów oraz streszczenia tychże, o ile zostały one nadesłane przez referentów.

LISTA UCZESTNIKÓW ZJAZDU

J. Albrycht (Poznań), P. Alexandroff (Moskwa), A. Alexiewicz (Poznań), G. Alexits (Budapeszt), A. Bielecki (Lublin), M. Biernacki (Lublin), J. Bonder (Gliwice), K. Borsuk (Warszawa), A. Böhmówna (Warszawa), Z. Butlewski (Poznań), B. Bydżovský (Praga), E. Čech (Praga), Z. Charzyński (Łódź), A. Chrośniński (Kraków), R. Cieślowski (Kraków), A. Ciopa-Sniatycki (Toruń), T. Czechowski (Warszawa), M. Czyżykowski (Warszawa), S. Drobot (Wrocław), S. Gołąb (Kraków), H. Greniewski (Warszawa), H. Gruzewska (Warszawa), A. Gruzewski (Warszawa), Z. Frydrych (Kraków), S. Hartman (Wrocław), R. S. Ingarden (Wrocław), B. Iwaszkiewicz (Wrocław), F. Jakóbczyk (Lublin), J. Janikowski (Łódź), W. Jankowski (Poznań), W. Janowski (Łódź), V. Jarník (Praga), M. Jarosz (Poznań), S. Jaśkowski (Toruń), L. Jeśmanowicz (Toruń), E. Karaśkiewicz (Byd-

goszcz), B. Knaster (Wrocław), V. Kořinek (Praga), T. Kochmański (Kraków), A. Kolmogorow (Moskwa), K. Kuratowski (Warszawa), J. Krzyż (Lublin), M. Krzyżański (Kraków), Z. Krygowska (Kraków), W. Krysiński (Łódź), F. Leja (Kraków), J. Leśniak (Kraków), T. Lewacki (Lublin), T. Leżański (Warszawa), J. Łoś (Wrocław), E. Marczewski (Wrocław), K. Mardjanishvili (Moskwa), J. Maroszkowa (Kraków), K. Matulewicz (Kraków), K. Maurin (Warszawa), J. G.-Mikusiński (Lublin), A. Mostowski (Warszawa), M. Nosarzewska (Wrocław), W. Oktaba (Lublin), M. Olekiewicz (Lublin), W. Orlicz (Poznań), E. Otto (Łódź), J. Perkal (Wrocław), W. Pogorzelski (Warszawa), H. Rasiowa (Warszawa), J. Roliński (Łódź), Ś. Romanowski (Kraków), A. Rusiecki (Warszawa), H. Ryffertówna (Poznań), C. Ryll-Nardzewski (Lublin), A. Schönhuber (Poznań), S. Sedlak (Katowice), F. Sieczka (Radzanów), W. Sierpiński (Warszawa), J. Słowikowski (Łódź), M. Stark (Wrocław), H. Steinhaus (Wrocław), S. Stoilow (Bukareszt), S. Straszewicz (Warszawa), M. Subotowicz (Łódź), R. Suszko (Poznań), K. Szałajko (Gliwice), J. Szarski (Kraków), W. Szmielew (Warszawa), H. Szmuszkiewicz (Łódź), W. Ślebodziński (Wrocław), B. Średniawa (Kraków), J. Ulam (Kraków), A. Wakulicz (Katowice), T. Ważewski (Kraków), J. Weyssenhoff (Kraków), J. H. C. Whitehead (Oxford), L. Włodarski (Łódź), W. Wrona (Kraków), Z. Zahorski (Łódź), K. Zaraniewicz (Warszawa), E. Żyliński (Gliwice).

POSIEDZENIA PLENARNE

1. P. ALEXANDROFF (Moscou). *Théorèmes de dualité pour les ensembles non fermés* (résumé de la conférence prononcée en langue russe).

1. Considérons l'ensemble de tous les recouvrements ouverts et localement finis σ_α d'un espace métrique R à base dénombrable. Si σ_α précède σ_β (c'est-à-dire que chaque élément de σ_β est contenu dans un, au moins, des éléments de σ_α), nous écrivons $\alpha \prec \beta$. Alors, le nerf de σ_β se projette, comme d'habitude, sur le nerf de σ_α , et toutes les projections, pour σ_α et σ_β fixés, donnent une même homomorphie du groupe de Betti Δ_β^p en Δ_α^p (les groupes de Betti étant basées sur les chaînes finies; les infinies ne sont point considérées). Les projections sont désignées par $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$.

Le cycle projectif z^p de l'espace R est, par définition, un système de cycles $\{z_\alpha^p\}$, à raison de 1 sur chaque σ_α , tel que pour $\alpha \prec \beta$

$$\tilde{\omega}_\alpha^\beta z_\beta^p \sim z_\alpha^p \text{ sur } \sigma_\alpha.$$

Les cycles projectifs forment, avec l'addition par coordonnées $\{z_\alpha^p\} + \{z'_\alpha^p\} = \{z_\alpha^p + z'_\alpha^p\}$, le groupe $Z^p R$. Le sous-groupe $H^p R$ des cycles homologues à 0 y est donné (en ce sens que $\{z_\alpha^p\} \sim 0$ lorsque tout $z_\alpha^p \sim 0$ dans σ_α). Le groupe-quotient $Z^p R - H^p R$ est désigné par $\delta^p R$ (le domaine des coefficients étant un groupe discret \mathfrak{A}).

Soit A un ensemble arbitraire non-vide dans S^n (espace sphérique de dimension n). Désignons par $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$ etc. les entourages de A dans S^n ; la relation $\alpha \prec \beta$ signifie à présent que $\lambda_\beta \subset \lambda_\alpha$. Le cycle flottant (floating cycle) de A est, par définition, un système de cycles $z_{(A)}^p = \{z_{(\alpha)}^p\}$ où $z_{(\alpha)}^p$ est un cycle (fini) situé dans l'ensemble ouvert λ_α et $z_{(\beta)}^p \sim z_{(\alpha)}^p$ dans λ_α pour $\alpha \prec \beta$.

2. Soient maintenant A et B deux ensembles non-vides dans S^n , l'un complémentaire de l'autre, et par ailleurs tout à fait arbitraires. Soient \mathfrak{A} et \mathfrak{B} deux groupes abéliens, l'un dual de l'autre au sens de Pontriagin. Soient enfin p et q deux nombres entiers non-négatifs et tels que $p + q = n - 1$.

Appelons *cycle compact dans B* tout cycle z^q (au sens de Vietoris), aux coefficients du domaine \mathfrak{B} et qui est situé sur un ensemble compact quelconque $\Psi \subseteq B$.

Il est évident que, pour tout cycle compact $z_{[B]}^q$ dans B et pour tout cycle flottant $z_{[A]}^p$ de A , le coefficient d'enlacement $v(z_{[A]}^p, z_{[B]}^q)$ se trouve bien défini.

Un cycle compact $z_{[B]}^q$ est dit *non-enlaçable* lorsque $v(z_{[A]}^p, z_{[B]}^q) = 0$, quel que soit le cycle flottant $z_{[A]}^p$.

En profitant des résultats de Chogoshvili, je démontre d'abord le

Théorème d'invariance. *Le groupe $Z_0^p B$ de tous les cycles de l'ensemble B , non enlaçables et de dimension q , est un invariant topologique de l'ensemble B .*

Ceci établi, on peut définir le groupe $\Delta'^q B$ attaché de manière topologiquement invariante à l'ensemble B , à savoir comme le groupe-quotient $Z^q B$ de tous les cycles compacts dans B de dimension q suivant le sous-groupe $Z_0^q B$ des cycles non-enlaçables:

$$\Delta'^q B = Z^q B - Z_0^q B.$$

On introduit la topologie dans le groupe $\Delta'^q B$ comme il suit. Pour définir un entourage quelconque de l'élément nul du groupe $\Delta'^q B$, on considère un entourage quelconque W de l'élément nul dans le groupe cyclique continu et un nombre fini de cycles flottants z_1^p, \dots, z_s^p de l'ensemble A . Ces données déterminent un entourage de l'élément nul du groupe $\Delta'^q B$ comme composé de tous les éléments ζ^q de ce groupe pour lesquels

$$v(z_1^p, \zeta^q) \in W, \quad \dots, \quad v(z_s^p, \zeta^q) \in W.$$

Il est facile de montrer (en utilisant les résultats mentionnés de Chogoshvili) que le groupe $\Delta'^q B$, rendu ainsi topologique, est lié de manière topologiquement invariante à l'ensemble B et qu'il est un sous-groupe partout dense d'un certain groupe

bicompact qui se trouve, par cette condition, déterminé univoquement et constitue un invariant topologique de l'ensemble B . Je le désigne par $\bar{\Delta}^q B$ et l'appelle *groupe bicompact* de Betti de dimension q de l'ensemble B (aux coefficients du domaine \mathfrak{B}).

3. Mon résultat fondamental est le suivant:

Loi générale de dualité. *Pour deux ensembles non-vides quelconques A et B situés dans S^n , complémentaires l'un de l'autre, et pour deux entiers positifs quelconques p et q , tels que $p+q=n-1$, les groupes $\delta^p A$ et $\bar{\Delta}^q B$ (avec les domaines des coefficients: \mathfrak{A} pour A et \mathfrak{B} pour B respectivement) sont duals l'un de l'autre.*

Appelons un cycle compact z^q dans B *homologue à zéro dans B* lorsqu'il l'est sur un ensemble compact contenu dans B . On arrive ainsi au groupe $\Delta_c^q B$, défini comme groupe-quotient de celui de tous les cycles compacts de dimension q dans B suivant le sous-groupe $H^q B$ de tous les cycles homologues à zéro dans B . On a évidemment $H^q B \subseteq Z_0^q B$, mais l'inclusion inverse n'est pas toujours vraie.

La question s'impose de savoir s'il existe des classes d'ensembles à la fois assez vastes est suffisamment intéressantes, pour lesquelles la loi générale de dualité prend la forme élémentaire

$$(*) \quad \Delta_c^p A \mid \Delta_c^q B$$

(où le trait vertical désigne la dualité au sens de Pontriagin). Cette question se résout par affirmative par la construction de la classe des ainsi dits rétractes homologues.

4. Définition. L'ensemble A est un *rétracte homologique* en dimension p avec le domaine des coefficients \mathfrak{A} lorsqu'il a les deux propriétés suivantes:

1° il existe un entourage λ_0 de A , tel que tout cycle compact z^p de A qui est homologue à zéro dans λ_0 l'est dans A ,

2° quel que soit l'entourage λ_α de l'ensemble A , il existe un entourage λ_β de cet ensemble, tel que tout cycle z_β^p situé dans λ_β est homologue dans λ_α à un cycle compact de A .

Chacune des propriétés 1^o et 2^o est un invariant topologique de l'ensemble A .

Je démontre que A étant un rétracte homologique (avec le domaine des coefficients \mathfrak{A}), l'homomorphie naturelle du groupe $\Delta_c^p A$ en groupe $\delta^p A$ est la transformation par l'isomorphie en ce groupe tout entier; on a de plus $Z_c^q B = H^q B$, d'où $\Delta_c^q B = \Delta^q B$, et ce groupe (rendu topologique comme plus haut) est bicomact, donc identique à $\bar{\Delta}^q B$; en conséquence, on a, pour les rétractes homologiques, la dualité (*).

Appelons *polyèdre au sens large* (infracted polytope) tout ensemble qui résulte des polytopes convexes par un nombre fini d'opérations d'addition et de soustraction.

Tous les ensembles homéomorphes à des polyèdres au sens large sont des rétractes homologiques (pour \mathfrak{A} et p arbitraires); on a donc pour eux la dualité (*).

On peut en dire bien plus que cela.

Appelons *domaine de dualité* toute famille Σ d'ensembles situés dans des espaces sphériques S^n (de diverses dimensions n) et qui a les deux propriétés suivantes:

(a) si $A \in \Sigma$ et $A \subset S^n$, on a $B = S^n - A \in \Sigma$,

(b) si, en outre, A est homéomorphe à A' et $A' \subset S^n$, on a $A' \in \Sigma$.

Il est évident qu'à toute famille Σ d'ensembles vient correspondre un domaine de dualité le plus petit qui la contient.

Je démontre que le groupe $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ étant fini, le plus petit domaine de dualité contenant tous les polyèdres au sens large ne contient que des ensembles qui sont des rétractes homologiques.

Il en résulte que la dualité (*) s'applique à tous ces ensembles.

De même, le plus petit domaine de dualité contenant tous les ensembles compacts dont les groupes de Betti mod m sont finis, ne se compose que de rétractes homologiques.

Notons que, pour tout ensemble ouvert B , on a $Z_c^q B = H_c^q B$, d'où $\Delta^q B = \Delta_c^q B$, et le groupe $\bar{\Delta}^q B$ devient la fermeture bicomacte $\bar{\Delta}_c^q B$ du groupe $\Delta_c^q B$. Pour A fermé, on a évidemment $\Delta_c^p A = \delta^p A$. Il en résulte un nouveau théorème de dualité pour les ensembles fermés:

Théorème. *Si l'ensemble $A \subset S^n$ est fermé, le groupe de Betti $\Delta_c^p A$ de A (entendu au sens élémentaire) avec un domaine discret des coefficients \mathfrak{A} est dual à la fermeture bicomacte du groupe de Betti de l'ensemble ouvert complémentaire B avec le domaine bicomact des coefficients $\mathfrak{B}|\mathfrak{A}$.*

Enfin, il est à remarquer que le théorème général de dualité (voir 3) contient en particulier le théorème d'Eilenberg sur l'invariance du nombre des composantes en lesquelles l'ensemble A coupe l'espace S^{n-1} .

2. G. ALEXITS (Budapest). *Sur la convergence des séries orthogonales lacunaires.*

Soit $\{\varphi_n(x)\}$ un système de fonctions orthogonales et normées dans l'intervalle fini (a, b) . Soit $\{\lambda_n\}$ une suite non-décroissante de nombres positifs. Nous appelons la série orthonormale

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n(x)$$

λ_n -lacunaire, si le nombre des coefficients $c_{v_n} \neq 0$ dont les indices v_n sont compris entre 2^n et 2^{n+1} est $O(\lambda_2^n)$. J'ai démontré²⁾ le théorème suivant: Si la série (1) est presque partout sommable $(C, 1)$ et λ_n -lacunaire, alors la convergence de $\sum c_n^2 \lambda_n$ entraîne la convergence presque partout de la série (1). Ce critère de convergence a été amélioré par M. Renyi³⁾ dans le cas, lorsque λ_n est d'ordre $(\log n)^a$ avec $1 < a < 2$.

Ce théorème se laisse améliorer considérablement de la manière suivante⁴⁾:

Si la série (1) est sommable $(C, 1)$ presque partout et λ_n -lacunaire, alors la convergence de $\sum c_n^2 \cdot (\log \lambda_n)^2$ entraîne la convergence presque partout de la série (1).

¹⁾ Les résultats exposés constituent une partie de ceux établis dans le mémoire: P. Alexandroff, *Théorèmes fondamentaux de dualité pour les ensembles non fermés*, Recueil Mathématique de Moscou, 1947.

²⁾ G. Alexits, *Sur la convergence des séries lacunaires*, Acta Szeged 11 (1948), p. 251—253.

³⁾ A. Renyi, *Remarque à la note précédente*, ibidem, p. 253.

⁴⁾ G. Alexits — E. Gál, *Sur la convergence des séries orthonormales lacunaires* (à paraître dans les Acta Szeged).

J'ai réussi de démontrer ce théorème (démontré d'abord mais non publié par M. Gál) d'une façon très simple, en appliquant le théorème connu ⁵⁾ de MM. Rademacher et Menchoff à la différence des suites partielles d'ordre m et 2^n où $2^n < m < 2^{n+1}$. De plus, le critère de convergence contenu dans ce résultat est, en certain sens, le meilleur, puisque j'ai réussi de démontrer, à l'aide d'un exemple connu de M. Menchoff ⁶⁾, le théorème suivant ⁴⁾:

Si $w(n)$ est une suite non-décroissante de nombres positifs tels que $(\log \log n)^2 \leq w(n) = o((\log n)^2)$, on peut construire une série du type (1) presque partout sommable $(C, 1)$ et λ_n -lacunaire pour laquelle $\sum c_n^2 \cdot w(\lambda_n)$ converge, tandis que la série elle-même est partout divergente.

3. MIECZYŚLAW BIERNACKI (Lublin). *Nowsze badania nad geometrią zer wielomianów.*

Ponieważ w r. 1938 ukazała się monografia J. Dieudonné pt. *La théorie analytique des polynomes*, która zawiera — z niewielu wyjątkami — wszystkie wówczas znane wyniki dotyczące omawianego tematu, zajmę się tu w zasadzie tylko pracami, które ukazały się po tym terminie, a więc głównie podczas wojny lub po niej. Jest zresztą wykluczone, żebym mógł zreferować wszystkie otrzymane w tym okresie wyniki; ograniczę się więc do tych, które wydają mi się więcej interesujące lub typowe. Wyniki te nie mają na ogół większej łączności ze sobą, w konsekwencji referat mój będzie miał charakter nieco „kalejdoskopowy“.

Oto najpierw kilka uzupełnień dotyczących niektórych klasycznych twierdzeń algebry. Nazywając stale zerem wielomianu $f(z)$ pierwiastek równania $f(z) = 0$, można sformułować twierdzenie Rolle'a w sposób następujący: jeśli $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ są liczbami zer odpowiednio wielomianu n -tego stopnia, jego pochodnej pierwszej, drugiej, ..., $(n-1)$ -ej w danym przedziale, to w ciągu tym każdy wyraz jest nie mniejszy od poprzedniego albo mniejszy o jedność. W r. 1939 Mikusiński udowodnił, że

⁵⁾ Voir S. Kaczmarz — H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Warszawa—Lwów, 1935, Monografie Matematyczne, p. 162.

⁶⁾ L. c. ⁴⁾, p. 167.

i odwrotnie, dla każdego ciągu liczb r_i spełniających ten warunek można znaleźć wielomian n -tego stopnia, który, wraz ze swymi kolejnymi pochodnymi, ma dokładnie r_0, r_1, \dots, r_{n-1} zer w danym przedziale, innymi słowy, że twierdzenie Rolle'a jest jedynym ograniczeniem, któremu podlegają liczby zer kolejnych pochodnych.

W rozważanym przeze mnie okresie pojawiły się 2 nowe dowody zasadniczego twierdzenia algebry o istnieniu pierwiastków każdego równania algebraicznego. Jeden z nich, Englisha, jest nader prosty: łatwe rachunki wykazują, że gdyby moduł wielomianu $f(z)$ miał w punkcie x minimum nie równe zeru, to byłyby też $f'(x)=0$, $f''(x)=0$, a więc musiałyby się zerować rugownik wielomianów $f'(z)$ i $f''(z)$, co na ogół nie zachodzi.

W toku swych studiów historycznych Serge se u przypomniał zapomniany dziś a wyprowadzony przez Breta w r. 1815 wzór na kres górny zer dodatnich wielomianu i ulepszył, współpracując z Montelem, ten wynik.

Klasyczne twierdzenie Cauchy'ego orzeka, że wszystkie zera wielomianu

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

są zawarte w kole $|z| \leq R$, przy czym R jest jedynym pierwiastkiem dodatnim równania

$$(*) \quad |a_0| + |a_1|z + \dots + |a_{n-1}|z^{n-1} - |a_n|z^n = 0.$$

W r. 1941 Lipka ulepszył ten wynik, wprowadzając inne jeszcze analogiczne do (*) równanie, którego jedyny pierwiastek dodatni R_1 jest mniejszy od R , i wykazując, że te zera wielomianu danego, które leżą w pierścieniu $R_1 < |z| \leq R$, nie mogą leżeć w kącie $|\arg z| < \pi n^{-1}$ i w $n-1$ kątach, które się z niego otrzymują przez kolejne obroty o $2\pi n^{-1}$ dokoła początku układu. W r. 1881 Pellet uogólnił znów to twierdzenie Cauchy'ego w sposób następujący: jeżeli równanie

$$|a_0| + |a_1|z + \dots + |a_{p-1}|z^{p-1} - |a_p|z^p + |a_{p+1}|z^{p+1} + \dots + |a_n|z^n = 0$$

ma dwa pierwiastki dodatnie r_1 i r_2 , $r_1 < r_2$ (według reguły Kartezjusza równanie to albo nie posiada wcale pierwiastków dodatnich, albo ma ich dokładnie 2), to wielomian dany po-

siada w kole $|z| \leq r_1$ dokładnie p zer, natomiast w pierścieniu $r_1 < |z| < r_2$ nie ma ich wcale. Ostatnio Marden uzupełnił to twierdzenie w sposób analogiczny do tego, w jaki Lipka uzupełnił twierdzenie Cauchy'ego.

Klasyczna reguła Sturma wyznacza liczbę zer wielomianu w danym przedziale, ale bez uwzględnienia krotności tych zer. W r. 1941 podał Thomas ciąg analogiczny do ciągu Sturma, który pozwala obliczyć liczbę zer z uwzględnieniem ich krotności, a nawet liczbę zer o danej z góry krotności.

Przejdę teraz do uzupełnień lub uogólnień twierdzeń mniej lub więcej dawno znanych, ale zwykle nie omawianych w kursach algebry. Zagadnieniem analogicznym do zagadnienia Sturma jest obliczenie liczby zer wielomianu w danym kole. Można zawsze zredukować problem przez przekształcenie liniowe do przypadku, gdy chodzi o liczbę zer w kole $|z| < 1$, albo też przez przekształcenie ułamkowo liniowe do przypadku, gdy chodzi o liczbę zer w półpłaszczyźnie na lewo od osi urojonej. Dawno już Hurwitz wykazał, że w ostatnim przypadku zagadnienie sprowadza się do określenia znaków pewnych wyznaczników. Inny zupełnie sposób rozwiązania zagadnienia podał Cohn w r. 1919. W zmodyfikowanej ostatnio przez Mardena postaci sposób ten polega na tym, że jeśli dany wielomian jest $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, to kładąc $f^*(z) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + \dots + \bar{a}_0 z^n$ (\bar{a} jest liczbą zespoloną sprzężoną z a) i później $f_1 = \bar{a}_0 f - a_n f^*$, definiujemy rekurencyjnie ciąg wielomianów f_1, f_2, \dots, f_n coraz niższych stopni. Liczba zer wielomianu danego w kole $|z| < 1$ jest równa liczbie wyrazów ujemnych w ciągu iloczynów $f_1(0), f_1(0)f_2(0), \dots, f_l(0)f_j(0), \dots, f_n(0)$. Reguła ta teoretycznie rozwiązuje zagadnienie w zupełności, w praktyce może jednak prowadzić do uciążliwych rachunków, ważne są zatem twierdzenia, które informują szybko o położeniu zer wielomianu na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Najdawniejszym chyba tego rodzaju twierdzeniem jest twierdzenie Gaussa-Lucasa: *Każdy wielobok domknięty i wypukły, który zawiera wszystkie zera wielomianu, zawiera też wszystkie zera wielomianu pochodnego.* Z twierdzenia tego wynika natychmiast, że każde koło K , które zawiera wszystkie n zer wielomianu n -go stopnia, zawiera również wszystkie $n-1$ zer jego pochodnej. Powstaje teraz pytanie, co zachodzi, jeżeli zało-

zymy, że tylko pewna ilość $p < n$ zer wielomianu leży w kole K . Kakeya udowodnił, że wówczas co najmniej $p-1$ zer pochodnej leży w kole współśrodkowym z K , o promieniu $\psi(n, p)R$, przy czym czynnik $\psi(n, p)$ zależy tylko od n i p . Marden i ja podaliśmy przed paru laty oszacowania górne dla $\psi(n, p)$, ale dokładna wartość tego wyrażenia nie jest jeszcze znana w przypadku ogólnym. Oba wspomniane oszacowania znalazły zastosowanie w tzw. problemie Montela: znaleźć kres górny modułu p zer wielomianu

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p + b_{p+1} z^{p+1} + \dots + b_n z^n,$$

zależny tylko od współczynników a i od liczby wyrazów (a nie od stopnia) wielomianu.

Dawno znany jest analogiczny do twierdzenia Gaussa-Lucasa wynik Jensena:

Jeśli połączymy odcinkami pary zer zespolonych ze sobą sprzężonych wielomianu o współczynnikach rzeczywistych i narysujemy koła, których te odcinki są średnicami, to wszystkie zera zespolone wielomianu pochodnego znajdują się w tych tzw. *kołach Jensena*.

Marden uogólnił niedawno to twierdzenie i wykazał, że każdy obszar spójny utworzony z pewnej ilości kół Jensena i zawierający p zer wielomianu zawiera co najmniej $p-1$ i co najwyżej $p+1$ zer pochodnej. Przypuśćmy teraz, że koła Jensena nie zachodzą na siebie i że każde z nich zawiera 2 zera pojedyncze (zespolone). Z reguły podanej przed chwilą wynika, że każde koło Jensena zawiera co najwyżej 2 zera zespolone pochodnej, a więc że suma odległości zer wielomianu pochodnego od osi rzeczywistej nie przekracza sumy odległości zer wielomianu danego od tejże osi. W r. 1947 wynik ten został znacznie uogólniony i zaostroszony przez matematyków holenderskich de Bruijna i Springera, którzy wykazali, że średnia arytmetyczna odległości zer wielomianu pochodnego od jakiegokolwiek prostej płaszczyzny zmiennej zespolonej nie przekracza nigdy średniej arytmetycznej odległości zer wielomianu danego od tejże prostej. W twierdzeniu tym można zresztą zamienić słowo „prosta“ słowem „punkt“. Istnieją niewątpliwie twierdzenia analogiczne do twierdzenia Gaussa-Lucasa i dotyczące położenia zer pochodnej funkcji ułamkowej wy-

miernej, są one jednak mało zbadane. Kilka wyników w tym kierunku zawdzięczamy Dieudonné'emu i Walsh'owi.

By przejść od wielomianu

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k + \dots + a_n z^n$$

do wielomianu $z A'(z)$, należy pomnożyć każdy współczynnik a_k wielomianu przez k tj. przez odpowiedni współczynnik wielomianu

$$z + 2z^2 + \dots + k z^k + \dots + n z^n.$$

Naturalnym uogólnieniem tego postępowania jest pomnożenie każdego współczynnika a_k przez współczynnik b_k wielomianu

$$B(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_k z^k + \dots + b_n z^n;$$

otrzymujemy w ten sposób wielomian złożony

$$H(z) = a_0 b_0 + \dots + a_k b_k z^k + \dots + a_n b_n z^n.$$

Można też badać wielomian

$$H_1(z) = a_0 b_0 + \dots + \frac{a_k b_k}{k!} z^k + \dots + \frac{a_n b_n}{n!} z^n$$

lub wreszcie wielomian

$$H_2(z) = a_0 b_0 + \dots + \frac{a_k b_k}{C_n^k} z^k + \dots + \frac{a_n b_n}{C_n^n} z^n$$

(C_n^k oznacza tu, jak zwykle, współczynnik dwumianu Newtona).

Otóż Mało udowodnił już dawniej, że jeśli wszystkie zera wielomianu $A(z)$ są rzeczywiste, a wszystkie zera wielomianu $B(z)$ rzeczywiste i tego samego znaku, to i wszystkie zera wielomianu $H(z)$ są rzeczywiste, a Schur udowodnił to samo dla wielomianu $H_1(z)$. Ostatnio Weisner uogólnił te twierdzenia wykazując, że jeśli wszystkie zera wielomianu $A(z)$ są rzeczywiste, a wszystkie zera wielomianu $B(z)$ znajdują się w pewnym kącie K o wierzchołku w początku układu, to wszystkie zera wielomianów $H(z)$ i $H_1(z)$ znajdują się albo w kącie K , albo w kącie symetrycznym do K względem początku układu. W r. 1947 cytowani już poprzednio de Bruijn

i Springer uzyskali następujące, mające wiele zastosowań, twierdzenie o wielomianach złożonych:

Jeśli moduły zer wielomianu $A(z)$ są $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$,
 i „ „ „ „ $B(z)$ są $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$
 „ „ „ „ $H_2(z)$ są $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$,
 to zachodzi nierówność

$$\frac{pq}{\gamma_1} \cdot \frac{pq}{\gamma_2} \cdot \dots \cdot \frac{pq}{\gamma_n} \leq \frac{p}{\alpha_1} \cdot \frac{p}{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \frac{p}{\alpha_n} \cdot \frac{q}{\beta_1} \cdot \frac{q}{\beta_2} \cdot \dots \cdot \frac{q}{\beta_n},$$

w której p i q są jakimikolwiek liczbami dodatnimi, a wszystkie czynniki mniejsze od 1 należy zastąpić przez 1.

Przejdźmy teraz do innego zagadnienia: jeśli mamy informacje o położeniu zer wielomianu, to co można powiedzieć o jego tzw. a -punktach tj. o punktach płaszczyzny zmiennej zespolonej, w których przyjmuje on daną wartość a ? Przypuśćmy najprzód, że wszystkie zera są w początku układu tj. że wielomianem jest z^n ; a -punkty są więc wierzchołkami n -kąta foremnego i znajdują się w odległości $\sqrt[n]{|a|}$ od początku układu, który jest środkiem tego wielokąta. To banalne twierdzenie zostało znacznie uogólnione przez Walsh'a, który udowodnił w r. 1922, że jeśli wszystkie zera wielomianu n -go stopnia leżą w pewnym kole K , to wszystkie jego a -punkty leżą w n kołach otrzymanych z K za pomocą przesunięć o $\sqrt[n]{|a|}$ w n kierunkach, tworzących ze sobą te same kąty $2\pi n^{-1}$ i zależnych od argumentu a ; jeśli te koła są rozłączne, to każde z nich zawiera dokładnie 1 a -punkt. Obecnie v. Szökefalvi Nagy otrzymał dalsze uogólnienie, co prawda jeszcze niepełne, na przypadek, gdy koło K jest zastąpione przez dowolny obszar skończony i wypukły. Otrzymał on też drogą bardzo elementarną następujące analogiczne twierdzenie: jeśli x_1, x_2, \dots, x_n są zerami wielomianu n -go stopnia, a r_1, r_2, \dots, r_n jakimikolwiek liczbami dodatnimi, których iloczyn jest równy $|a|$, to wszystkie a -punkty wielomianu znajdują się w kołach $|z - x_i| \leq r_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), przy czym każdy obszar złożony z p takich kół, a nie mający punktów wspólnych z pozostałymi, zawiera dokładnie p a -punktów

wielomianu. W innej pracy zajmuje się v. Szökefalvi Nagy wartościami funkcyj ułamkowych. Oto dwa typowe twierdzenia przezeń otrzymane:

I. *Funkcja ułamkowa*

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_k z^k + \dots + b_n z^n},$$

gdzie

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} \quad (a_0 b_0 a_1 b_1 \neq 0),$$

przyjmuje każdą wartość w każdym kole, którego obwód przechodzi przez początek układu i przez punkt $-na_0(a_1)^{-1}$ (twierdzenie to udało się dotąd tylko częściowo uogólnić na przypadek, gdy spełniony jest warunek $a_0 b_k - b_0 a_k = 0$).

II. Jeśli w punkcie P , który nie jest ani zerem, ani biegunem powyższej funkcji ułamkowej, zerują się pochodne zarówno licznika $f(z)$ jak mianownika $g(z)$ i jeśli nakreślimy 2 koła k i K styczne do siebie zewnątrznie w P , przy czym promień koła K jest $n-1$ razy większy od promienia koła k , to każda wartość, którą funkcja ułamkowa przyjmuje w kole k , jest też przyjęta w kole K .

Zupełnie innego rodzaju zagadnieniem jest szacowanie liczby zer rzeczywistych wielomianu o współczynnikach rzeczywistych. Jeszcze przed wojną Schmidt, Szegö i Schur wprowadzili zawsze większą od 1 wielkość

$$P = \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|}{\sqrt{|a_0| \cdot |a_n|}}$$

i udowodnili, że liczba zer rzeczywistych wielomianu

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n,$$

jest dla $n > 6$ mniejsza niż $2(n \log P)^{1/2}$, a Littlewood i Offord wykazali w r. 1941, że wielomiany

$$\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 z + \dots + \varepsilon_n a_n z^n,$$

gdzie współczynniki a są ustalone, ale wielkości ε przyjmują na wszelkie sposoby wartości $+1$ i -1 , posiadają, z wyjątkiem znikomo malej (rzędu $(\log n)^{-1} \log \log n$) ich części mniej niż $10(2 + \log P)(\log n)^6$ zer rzeczywistych. Także Kac otrzymał,

niedługo później, wynik analogiczny: przyjmując że wszystkie współczynniki wielomianu

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

mają ten sam rozdział normalny o gęstości $e^{-u^2} \pi^{-1/2}$, znalazł on na wartość asymptotyczną średniej ilości zer rzeczywistych wyrażenie $2\pi^{-1} \log n$.

Ciekawym zagadnieniem zajęła się w r. 1946 Elżbieta Beaman. Przypuśćmy, że dane jest dowolne równanie algebraiczne n -go stopnia. Chodzi o wyznaczenie równania o współczynnikach rzeczywistych i tegoż stopnia, którego pierwiastkami byłyby moduły (lub kwadraty modułów) pierwiastków równania danego. Autorka rozwiązała to zagadnienie dla $n=2$ i $n=3$ w przypadku, gdy chodzi o kwadraty modułów. Dla $n=3$ można napisać równanie stopnia wyższego od n , którego pierwiastkami są, między innymi, moduły (lub odpowiednio kwadraty modułów) wszystkich pierwiastków równania danego, ale eliminacja dodatkowych pierwiastków jest trudna.

A teraz omówię kilka zupełnie nowych, jak sądzę, przed wojną nie poruszanych tematów. Przypuśćmy, że zera wielomianu n -go stopnia, uporządkowane według wzrastających modułów, są x_1, x_2, \dots, x_n :

$$|x_1| \leq |x_2| \leq \dots \leq |x_n|.$$

Zmieńmy teraz argumenty współczynników wielomianu nie zmieniając wcale ich modułów i niech zera wielomianu w ten sposób otrzymanego, znów uporządkowane według wzrastających modułów, będą y_1, y_2, \dots, y_n :

$$|y_1| \leq |y_2| \leq \dots \leq |y_n|.$$

Ostrowski wykazał w r. 1940, że zmiana modułów zer jest w tych warunkach ograniczona; dokładniej, otrzymał on w szczególności nierówność:

$$\left| \frac{y_k}{x_k} \right| \leq 0,73 \cdot (n+1)^2 \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

a Batschelet uzupełnił w r. 1945 ten wynik podając przykład, w którym jeden taki stosunek $|y_k|:|x_k|$ jest większy od $0,25n^2$,

a więc wykazując, że wynik Ostrowskiego jest zbliżony do możliwie najlepszego.

W innym zupełnie kierunku uzyskał matematyk węgierski Turan w r. 1946 następujący wynik definitywny: *jeśli maximum modułu wielomianu n -go stopnia w pewnym kole jest osiągnięte w punkcie P obwodu koła, to wielomian nie może mieć zer na tym otwartym łuku koła, którego środkiem jest P , a którego długość jest n -tą częścią długości obwodu koła.* Wynik ten nie da się ulepszyć, bo na tymże łuku domkniętym wielomian może się już zerować.

Na zakończenie wspomnę o pewnym bardzo ogólnym zagadnieniu wysuniętym przez grupę matematyków radzieckich Czebotarewa, Gawryłowa i Mejmana, zagadnieniu tzw. K -przedłużania wielomianów. Ogólnie chodzi o to: jeśli dany jest wielomian

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n,$$

to czy można zawsze (lub przy pewnych założeniach) znaleźć taki stopień q i takie współczynniki b , że wielomian przedłużony

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + b_{n+1} z^{n+1} + \dots + b_q z^q$$

posiada pewną z góry daną własność? Oto przykład otrzymanych twierdzeń: jeśli daną jest krzywa zamknięta Jordana, taka że każdy promień wychodzący z początku układu przecina ją dokładnie w jednym punkcie, to jakiegokolwiek byłyby współczynniki a ($a_0 \neq 0$), można zawsze znaleźć taki stopień q i takie współczynniki b , że wszystkie zera wielomianu przedłużonego leżą na danej krzywej. Oczywiście, ten punkt widzenia sugeruje wielką ilość nierozwiązanych jeszcze zagadnień.

4. B. BYDŽOVSKÝ (Praha). *Sur l'invariant simultané Φ de deux quadriques* (Extrait).

Si, étant donné deux quadriques régulières, il existe un tétraèdre conjugué par rapport à l'une d'elles, les arêtes duquel touchent l'autre on a $\Phi = 0$, où Φ est l'invariant simultané des deux quadriques, quadratique dans les coefficients de chacune d'elles. La démonstration est fort simple; il n'en est pas ainsi du problème inverse, qui demande de déter-

miner la relation géométrique entre deux quadriques pour lesquelles $\Phi=0$. Par une voie purement algébrique, en employant la théorie des diviseurs élémentaires, on trouve le résultat suivant: *Si le couple de quadriques appartient à l'un des types suivants: [1,1,1,1]; [1,1,2]; [1,1,(1,1)]; [2,2]; [2,(1,1)]; [1,3]; [1,(1,1,1,1)], $\Phi=0$ est la condition suffisante pour l'existence de tétraèdres de l'espèce caractérisée plus haut. Il y en a une infinité simple, sauf dans le dernier cas, où cette infinité est triple.*

Pour plus de détails, je renvoie le lecteur à mon mémoire du même titre dans les „Rozprawy II. třídy České Akademie Věd a Umění, roč. L. (1940), č. 21“ ou à un résumé français assez détaillé dans le „Bulletin International de l'Académie des Sciences de Bohême, 1940“.

5. EDUARD ČECH (Praha). *Polarité algébrique et géométrie différentielle.*

En ramenant l'équation d'une supersurface H à la forme $f(x_1, x_2, \dots, x_n)=1$, où f est une fonction (algébrique ou non) homogène du second degré, on obtient pour l'hyperquadrique osculatrice $Q(a)$ de H passant par l'origine de coordonnées une expression très commode $\sum f_{ik} x_i x_k = 2$, où les f_{ik} sont les valeurs des dérivées partielles du second ordre de f au point a . Ceci permet de résoudre d'une manière très simple un grand nombre de questions relatives aux hyperquadriques $Q(a)$.

6. STANISŁAW GOŁĄB (Kraków). *Ostatnie kierunki rozwojowe geometrii i jej związki z innymi gałęziami matematyki.*

Odczyt ten ogłoszony został w czasopiśmie „Matematyka“, t. 2 (1949), zeszyt 4, str. 8—15, pt. *Kierunki rozwoju współczesnej geometrii.*

7. JACQUES HADAMARD (Paris). *Quelques résultats accessoires de la Théorie des Equations aux dérivées partielles.*

En mentionnant des résultats de cette sorte, il m'est arrivé de parler de „sous-produit“ de la théorie, par analogie avec certaines fabrications chimiques qui, indépendamment des pro-

duits en vue desquels elles ont été instituées, se trouvent en fournir d'autres souvent plus précieux encore.

Un exemple classique de théorie riche en „sous-produits“ est donné par celle des Fonctions Elliptiques, qui, fondée en vue de l'intégration d'une différentielle algébrique, conduit, comme il est bien connu, à des formules d'Arithmétique relatives aux sommes de carrés et à d'autres résultats arithmétiques concernant les formes quadratiques définies: au célèbre théorème de Picard sur les fonctions entières, à des transcendentes qui se révèlent nécessaires dans la Théorie de la Chaleur et qui résolvent aussi des questions d'Hydrodynamique.

Or, l'étude des équations aux dérivées partielles se montre, elle aussi, féconde en conséquences plus ou moins inattendues. J'ai donné, à cet égard, un ou deux exemples. J'en ajouterai ici deux autres.

I. Commençons par une notation nouvelle dont les applications se révèlent dores et déjà assez variées.

La formule classique qui permet (dans l'espace ordinaire, pour fixer les idées) de transformer l'intégrale triple

$$\iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

introduit les produits

$$(1) \quad \cos(n, x) dS, \quad \cos(n, y) dS, \quad \cos(n, z) dS$$

où dS est un élément de la surface frontière.

Or, lorsque cette surface est donnée, on obtient aisément, en général, des quantités *proportionnelles* aux cosinus directeurs qui figurent dans les expressions (1). Mais il reste, pour obtenir les cosinus eux-mêmes, à diviser par un radical (par exemple, $\sqrt{1+p^2+q^2}$ si p et q sont les dérivées partielles de z par rapport à x, y).

Il semble donc que ce radical intervienne d'une manière essentielle dans la formule. Il n'en est rien, car ce même radical figure en facteur dans la valeur de dS .

Rien n'empêche, dans les produits (1), de multiplier tous les facteurs cosinus par une même quantité, à condition de diviser dS par cette même quantité.

Prenons le cas où la surface est donnée par son équation

$$(2) \quad G(x, y, z) = \text{const} = G_0.$$

On pourra alors remplacer les trois cosinus par les dérivées

$$\frac{\partial G}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial y}, \quad \frac{\partial G}{\partial z},$$

en remplaçant dS par une autre quantité

$$dS_G = \frac{dS}{\left(\frac{dG}{dn}\right)}$$

(où dG/dn est la dérivée normale de G). Cette même quantité dS_G peut légitimement être écrite

$$\frac{dx \, dy \, dz}{dG} = \frac{dT}{dG}.$$

En effet, elle représente l'aire (portion de la surface (2)) de la base d'un petit cylindre, de génératrices non tangentes à la surface, limité à la surface infiniment voisine $G = G_0 + \delta G'$ et de volume dT .

Or, ce symbole dT/dG , ainsi introduit par l'étude des équations aux dérivées partielles, peut être avantageusement employé dans un certain nombre d'autres questions, telles que:

— la différentiation, par rapport à un paramètre a , d'une intégrale triple

$$\iiint f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

étendue à un domaine dont la forme dépend de a . Si

$$G(x, y, z) = a$$

est l'équation de la surface frontière, la dérivée est

$$\iiint f \frac{dx \, dy \, dz}{dG}.$$

— l'application du théorème de Liouville (et de Boltzmann-Gibbs-Poincaré) aux systèmes qui admettent l'inté-

grale de l'énergie E . Si dT est l'élément d'extension en phase, une intégrale qui reste invariante est

$$S \frac{dT}{dE}$$

l'intégration étant étendue à une surface $E = \text{const.}$

— la distribution en probabilité d'une fonction $G(x, y, z)$ lorsqu'on se donne la distribution en probabilité des variables x, y, z elles mêmes. Soit, pour la probabilité élémentaire elle même,

$$\varphi(x, y, z) dx dy dz;$$

la probabilité élémentaire relative à G est alors

$$\mathcal{P}(G_0 < G < G_0 + dG) = P dG,$$

$$P = \int_{G=G_0} \int \varphi \frac{dx dy dz}{dG}.$$

II. Le cas elliptique des équations aux dérivées partielles fait intervenir le Calcul fonctionnel, en raison du rôle essentiel que joue la forme du domaine envisagé, dans tous les problèmes aux limites qui concernent ce cas.

Soit d'abord le problème classique de Dirichlet. Soient un domaine fermé (aire plane ou volume dans l'espace) et deux points intérieurs A, B . La fonction de Green g_A^B dépend des coordonnées de ces deux points, mais aussi de la forme du domaine. Si l'on déforme ce dernier (sans changer ni A ni B) en déplaçant chaque point de la frontière, suivant la normale, d'une quantité (infinitement petite) mesurée en grandeur et signe par δ , la fonction de Green éprouve la variation

$$(3) \quad \delta g_A^B = S \frac{d g_M^A}{d n_M} \cdot \frac{d g_M^B}{d n_M} \delta n ds.$$

D'autres problèmes aux limites, relatifs les uns à l'équation de Laplace, les autres à d'autres équations du 2^{me} ordre du type elliptique, d'autres enfin à des équations d'ordre supérieur comme celle des solides ou des plaques élastiques $\Delta \Delta u = 0$, donnent lieu à des fonctions analogues à la fonction de Green et on peut, de même, évaluer, par des formules

analogues à la précédente, la variation que subit l'une quelconque d'entre ces dernières lorsqu'on déforme le contour.

Si maintenant, dans l'un quelconque de ces cas, on forme une combinaison convenable des dérivées partielles à la fois par rapport aux coordonnées de A et à celle de B , on obtient une quantité Ψ dont la variation par déformation a l'expression, la même dans tous les cas ¹⁾,

$$\delta \Psi_A^B = S \Psi_A^M \cdot \Psi_M^B \delta n ds,$$

de sorte que la „dérivée fonctionnelle“ de Ψ_A^B est $\Psi_A^M \Psi_M^B$.

Or, „l'équation aux dérivées fonctionnelles“ à laquelle on est ainsi conduit par l'étude des équations aux dérivées partielles joue un rôle primordial dans l'Analyse fonctionnelle, laquelle est ainsi éclairée par les considérations précédentes.

Ce ne sont pas, d'ailleurs, les seules conséquences remarquables que l'on peut tirer de l'expression (3). Si l'on suppose que la frontière (plane ou spatiale) se déforme dans un sens constant, par exemple en s'étendant constamment sans jamais ni nulle part se rétrécir, l'accroissement final de g_A^B sera l'intégrale d'une différentielle (3) dans laquelle δn sera de signe constant. Les fonctions des coordonnées de deux points ainsi obtenues satisfont, en ce qui regarde leurs dérivées de tous ordres, à un système d'inégalités qui, indépendamment même de l'usage qui peut en être fait en vue de la résolubilité des problèmes aux limites qui leurs ont donné naissance, mériteraient peut être, en elles-mêmes, une étude plus approfondie.

8. VOJTĚCH JARNÍK (Praha). *Sur quelques résultats de la théorie analytiques des nombres.*

9. A. KOLMOGOROFF (Moscou). *Algèbres de Boole métriques complètes* (traduction de la conférence prononcée en russe).

Sommaire: 1. Définitions. 2. Rapports à la théorie de la mesure. 3. Importance pour la théorie des probabilités. 4. Classification des algèbres de Boole métriques complètes.

¹⁾ Le résultat s'étend à des équations du type hyperbolique, lorsqu'on se propose, à leur égard, un „problème mixte“.

Il apparaît aussi dans la théorie de la représentation conforme, comme l'a montré M. Julia.

1. Définitions. Je vais regarder comme connue la définition de l'*algèbre de Boole*. Les opérations fondamentales d'*intersection* et de *réunion* d'éléments seront désignées, en conformité avec le livre de M. Birkhoff [1], par

$$\begin{aligned} x \cap y & \qquad \qquad \qquad (\text{intersection}), \\ x \cup y & \qquad \qquad \qquad (\text{réunion}). \end{aligned}$$

Il résulte — comme on sait — de la définition de l'algèbre de Boole qu'il y existe un élément-unité u et un élément nul n pour lesquels on a identiquement (c'est-à-dire pour tout x):

$$\begin{aligned} x \cap u &= x, & x \cup u &= u, \\ x \cap n &= n, & x \cup n &= x. \end{aligned}$$

On appelle *algèbre de Boole métrique* l'algèbre de Boole avec une fonction réelle d'élément, $\mu(x)$, dite *mesure* de l'élément x , définie dans cette algèbre et assujettie aux postulats:

$$(I) \quad x \cap y = n \text{ entraîne } \mu(x \cup y) = \mu(x) + \mu(y),$$

$$(II) \quad x \neq n \text{ entraîne } \mu(x) \geq 0.$$

Il est facile de voir, en vertu de (I), que

$$\mu(n) = 0,$$

et, en vertu de (I) et (II), que pour tout élément x

$$0 \leq \mu(x) \leq \mu(u).$$

L'élément *complémentaire* à x sera désigné par x' . La relation d'*inclusion* $x \subseteq y$ sera entendue au sens de $x \cup y = y$.

Il est naturel d'introduire, pour les algèbres de Boole métriques, la définition suivante de l'isomorphie: deux algèbres de Boole métriques sont *isomorphes* lorsqu'il existe une correspondance biunivoque

$$x^* = f(x), \quad x = f^{-1}(x^*)$$

entre les ensembles de leurs éléments, pour laquelle on a identiquement:

$$\begin{aligned} f(x \cap y) &= f(x) \cap f(y), \\ f(x \cup y) &= f(x) \cup f(y), \\ \mu(f(x)) &= \mu(x). \end{aligned}$$

Les différences symétriques

$$x \circ y = (x \cap y') \cup (x' \cap y)$$

étant introduites, il est naturel de considérer la valeur

$$\varrho(x, y) = \mu(x \circ y)$$

comme *distance* entre les éléments x et y . Cette distance satisfait à tous les axiomes de l'*espace métrique*. Si l'espace métrique ainsi formé est complet, l'algèbre de Boole métrique dont on était parti s'appelle elle-même *complète*.

Par analogie à la notion de complètement d'un espace métrique, on introduit celle de *complètement* de l'algèbre de Boole métrique¹⁾. On déduit sans peine du théorème fondamental sur le complètement des espaces métriques que *toute algèbre de Boole métrique admet un complètement unique* (à l'isomorphie près). Grâce à cela, l'étude des algèbres de Boole métriques arbitraires se réduit à celle des sous-algèbres partout denses dans les algèbres de Boole métriques complètes, dont l'importance fondamentale devient ainsi manifeste.

La définition générale de l'algèbre de Boole métrique, qui vient d'être envisagée, est une généralisation naturelle des propriétés d'une série d'objets mathématiques classiques, connus depuis longtemps. C'est ainsi par exemple que, les définitions formelles étant convenablement choisies, les *parties* d'un domaine borné quelconque de l'espace, munies des *volumes* qui leur sont attribués à titre des mesures, forment une algèbre de Boole métrique. Un autre exemple important d'algèbres de Boole métriques est fourni par les systèmes d'*événements* dans un problème quelconque de la théorie des probabilités, avec leurs *probabilités* respectives à titre des mesures.

¹⁾ L'algèbre de Boole B_1 est dite *sous-algèbre* de l'algèbre de Boole B lorsque l'ensemble des éléments de B_1 est sous-ensemble de celui de B , l'élément-unité et l'élément zéro de l'une et de l'autre sont les mêmes et que les valeurs des fonctions $x \cup y$, $x \cap y$, $\mu(x)$ de l'algèbre B_1 coïncident, pour ses éléments, avec celles des fonctions correspondantes de l'algèbre B .

L'algèbre de Boole B' est dite le *complètement* de l'algèbre de Boole B lorsqu'elle est complète, contient B comme sous-algèbre et que l'ensemble des éléments de B est dense dans celui de B' .

2. Rapports à la théorie de la mesure. Les notions classiques de volume d'une figure spatiale et de probabilité d'un événement, qui viennent d'être mentionnées à titre d'exemples, ont subi dans la mathématique récente un autre développement logique; on les conçoit le plus souvent comme subordonnées à la notion générale de *mesure d'un ensemble*. En tout, on peut considérer la théorie des algèbres de Boole métriques et la théorie générale de la mesure comme parallèles et concurrentes pour un façonnage logique formel de leur substance concrète, qui est essentiellement la même pour les deux théories.

La corrélation logique formelle entre elles peut être caractérisée comme suit. Considérons les mesures $\mu(x)$ qui sont des fonctions réelles, non négatives et complètement additives d'ensemble, définies dans un champ borelien \mathfrak{F}_μ de sous-ensembles d'un certain ensemble fondamental U_μ qui appartient lui-même au champ \mathfrak{F}_μ . Les ensembles appartenant à ce champ se rangent — comme on sait — de manière naturelle en classes disjointes, dites *types métriques*. Cette classification s'effectue d'après le principe suivant: deux ensembles, X et Y , appartiennent au même type métrique lorsque la mesure de leur différence symétrique est nulle:

$$\mu(X \circ Y) = 0.$$

Tous les ensembles du même type métrique sont de même mesure. Il est donc naturel de regarder leur mesure commune comme *la mesure* du type métrique lui-même. Les définitions de l'*intersection* et de la *réunion* de deux types métriques n'ont pas besoin d'être rappelées, tant elles s'offrent naturellement. On montre très facilement que

(a) *Les types métriques de mesure quelconque forment une algèbre de Boole métrique complète.*

D'autre part, la théorie des idéaux d'algèbres de Boole, développée par M. Stone [3], permet de montrer que

(b) *Toute algèbre de Boole métrique complète est isomorphe à l'algèbre des types métriques d'une certaine mesure.*

Or, deux mesures s'appellent *isomorphes par structure* lorsque les algèbres de leurs types métriques sont isomorphes

(en tant qu'algèbres de Boole métriques). En vertu de (a) et (b), on peut donc dire que *la théorie des algèbres de Boole métriques complètes équivaut à celle des mesures, considérées à l'isomorphie par structure près.*

3. Importance pour la théorie des probabilités. Je vais envisager plus en détail l'importance des algèbres de Boole métriques pour la théorie des probabilités. On sait que cette théorie n'est devenue une science mathématique rigoureuse (en même sens que la géométrie dans les célèbres *Fondements de la géométrie* de Hilbert, par exemple) qu'à l'époque relativement récente. Le système le plus développé de la construction axiomatique de la théorie des probabilités est celui basé sur la conception de la probabilité comme d'une fonction additive d'ensemble (comme c'est fait dans mon livre [2], par exemple). Je me permets d'insister ici sur le fait que c'est *seulement ce système* qui soit suffisamment développé, en ce sens que toutes les recherches probabilistes concrètes présentant de l'intérêt pour les sciences techniques ou naturelles, et qui se servent de plus en plus de la distribution des probabilités dans des espaces fonctionnels, se rangent dans lui sans obstacle. Les autres systèmes de fonder la théorie des probabilités, bien qu'ils ne soient pas, en principe, moins irréprochables au point de vue logique, ne sont élaborés en détail que dans leur partie concernant les problèmes combinatoires élémentaires avec un nombre fini d'événements à envisager.

Convenons d'appeler *ensembliste* le système d'exposer la théorie des probabilités qui est basé, conformément à [2], sur l'ensemble U des événements élémentaires et sur une fonction additive d'ensemble (la probabilité), $P(x)$, définie dans une famille de sous-ensembles de U . Le succès de ce système est dû en grande partie à ce qu'il a permis de mettre au profit de la théorie des probabilités l'appareil bien élaboré et fort souple de la *théorie de la mesure* et de la théorie métrique des fonctions. Mais, du point de vue des tâches concrètes de la théorie des probabilités, le système en question mérite aussi une certaine critique. Cette critique n'a pas de portée des objections formelles contre la consistance logique du système, mais elle indique, et à raison, ce qu'il y est d'arbitraire et d'artificiel. Plus

précisément, les défauts du système ensembliste de présenter la théorie des probabilités sont les suivants :

1^o La notion d'événement élémentaire est une surconstruction artificielle au-dessus de la notion d'événement, qui a un sens concret. En réalité, ce ne sont pas les événements qui se composent d'événements élémentaires, mais les événements élémentaires tirent leur origine du démembrement des événements composés.

2^o Les problèmes quelque peu compliqués exigent, si la théorie doit être simple et maniable, que la probabilité soit soumise à l'*axiome d'additivité dénombrable*. La justification de cet axiome reste néanmoins purement empirique, à savoir qu'on n'ait rencontré jusqu'à présent aucun problème intéressant pour lequel on n'eût pas réussi de construire un champ correspondant des probabilités, conforme à l'axiome en question (cf. [2], p. 23).

3^o On est contraint à renoncer au principe, formulé souvent dans de nombreux travaux classiques de la théorie des probabilités, d'après lequel l'événement dont la probabilité est nulle est absolument impossible. Plus précisément, on doit admettre qu'un événement de probabilité positive peut se décomposer en une infinité (continue par exemple) des variantes dont chacune est de probabilité égale à zéro.

Tous ces inconvénients se laissent éviter si l'on met à la base de la théorie des probabilités les axiomes suivants :

(A) Le système d'événements, avec la fonction d'événement — la probabilité — définie pour eux, est une algèbre métrique de Boole.

(B) La probabilité d'un événement nécessaire est égale à un.

Une telle conception de la théorie des probabilités n'est point nouvelle. Plutôt est-il difficile d'en indiquer la date exacte d'apparition, car elle est, tout simplement, la façon moderne de formuler l'exposé „naïf“ de la théorie des probabilités, le plus usuel dans les manuels élémentaires. Cette conception se trouve formulée dans le livre de Glivenko [4], par exemple. Comment on supprime alors les défauts 1^o et 2^o, on n'a pas besoin de l'expliquer longuement: les événements élémentaires (du moins dans l'exposé des *fondements* de la

théorie des probabilités) deviennent simplement superflus, et l'événement ayant la *probabilité zéro* n'est qu'un seul, à savoir l'événement impossible n .

Plus intéressante et plus compliquée est la question de ce qui correspond, dans la nouvelle conception, à l'axiome d'additivité dénombrable de la probabilité. Les sommes d'une infinité d'éléments et les limites de suites d'éléments n'étant guère définies dans les algèbres de Boole, il semble d'abord que la question de l'additivité dénombrable de la mesure γ perd simplement son sens.

On peut cependant, dans les algèbres de Boole *métriques*, définir la convergence d'éléments

$$x_k \rightarrow x$$

par la condition

$$\mu(x_k \circ x) \rightarrow 0$$

et introduire les sommes dénombrables

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} x_k$$

en les *définissant* comme limites de sommes finies correspondantes. Il est alors facile de montrer que l'*additivité dénombrable de la mesure se présente automatiquement*, c'est-à-dire que les conditions

$$x = \bigcup_{k=1}^{\infty} x_k \quad \text{et} \quad x_i \cap x_j = n \quad \text{pour} \quad i \neq j$$

entraînent toujours l'égalité

$$\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(x_k).$$

L'utilisation de l'additivité dénombrable, vraiment vaste et libre d'inconvénients, n'est toutefois possible que dans les algèbres de Boole *métriques complètes*. C'est pourquoi il est naturel, dans la théorie des probabilités, de supposer toujours l'algèbre des événements *complétée* par l'adjonction d'éléments idéaux. Cette proposition est — comme il a été dit — toujours réalisable.

Ainsi, l'emploi de l'additivité dénombrable de la probabilité dans la théorie des probabilités se montre, en définitive, légitime et n'impose aucune restriction supplémentaire quant au caractère des problèmes qui tombent sous l'action de la théorie générale.

Il me semble que ce système des fondements de la théorie des probabilités est, du côté des principes, le plus satisfaisant parmi ceux qui sont actuellement connus. Il résulte des théorèmes cités (voir 2), que l'applicabilité de ce système est aussi universelle que celle du système ensembliste.

Du côté technique, le système ensembliste présente cependant une série d'avantages. Or, ces avantages peuvent être sauvegardés aussi dans le système algébrique des *fondements* de la théorie des probabilités; en effet, en vertu du théorème (b) (voir 2), l'algèbre complète des événements peut toujours être transformée par isomorphie en algèbre des types métriques d'une mesure convenablement construite.

4. Classification des algèbres de Boole métriques complètes.

Nous allons voir tout à l'heure que le passage de la théorie de la mesure à celle des algèbres de Boole métriques complètes a une conséquence fort appréciable: les algèbres de Boole métriques complètes peuvent être (à l'isomorphie près) parfaitement revues et classées. Pour exposer cette classification, quelques notions spéciales sont nécessaires.

Désignons par $S(x)$ l'ensemble de tous les éléments $y \subseteq x$, c'est-à-dire qui sont inclus dans x . Appelons *poids* de x celui de l'ensemble $S(x)$ en tant qu'espace métrique (avec la distance $\rho(y, z) = \mu(y \circ z)$), c'est-à-dire la plus petite puissance d'ensemble dense dans $S(x)$. L'élément x est dit *homogène* lorsque le poids de tout élément y de $S(x)$, distinct de l'élément nul n , est égal à celui de l'élément x .

On démontre que le poids $\tau(x)$ de x dans une algèbre de Boole métrique complète est toujours égal à

(i) *un* (et on a dans ce cas $x = n$),

(ii) *deux* (et dans ce cas x ne contient que x et n ; on l'appelle alors un *atome*),

(iii) une *puissance infinie* (et dans ce cas les puissances infinies quelconques peuvent se présenter).

Le théorème suivant, qui se déduit d'un résultat remarquable de M^{lle} Maharam [5] (et sur lequel M. Marczewski a bien voulu attirer mon attention), permet d'établir la classification en question de toutes les algèbres de Boole métriques complètes (à l'isomorphie près):

L'élément-unité u de toute algèbre de Boole métrique complète peut être représenté dans la forme

$$u = \left(\bigcup_r a_r\right) \cup \left(\bigcup_s c_s\right), \quad r=1,2,\dots; s=1,2,\dots,$$

où a_r sont des atomes et c_s — des éléments homogènes de poids infini, tous ces éléments satisfaisant, en outre, aux conditions:

$$(1) \quad \mu(a_1) \geq \mu(a_2) \geq \dots,$$

$$(2) \quad \tau(c_1) < \tau(c_2) < \dots$$

Les sommes dans le membre droit de la décomposition peuvent être finies ou dénombrables. La décomposition satisfaisant à (1) et (2) est unique (à la permutation des atomes de mesure égale près). Pour que deux algèbres de Boole métriques complètes soient isomorphes, il faut et il suffit que les suites (de nombres réels et transfinis)

$$(3) \quad \begin{cases} \mu(a_1), \mu(a_2), \dots, \\ \tau(c_1), \tau(c_2), \dots, \\ \mu(c_1), \mu(c_2), \dots \end{cases}$$

coïncident pour l'une et pour l'autre de ces algèbres.

On construit aisément des algèbres de Boole métriques complètes qui correspondent à un système quelconque d'invariants (3) assujetti aux conditions (1), (2) et aux deux suivantes:

$$(3) \quad \begin{aligned} \mu(a_r) > 0, \quad \mu(c_s) > 0, \\ \sum_r \mu(a_r) + \sum_s \mu(c_s) < \infty, \end{aligned}$$

$$(4) \quad \tau(c_1) \geq \aleph_0;$$

cf. à ce sujet Maharam [5]. Plus logique encore que l'emploi des mesures dans Ω_τ (en conformité avec [5]), me paraît leur emploi dans les produits de τ couples de points.

LITTÉRATURE

- [1] Garret Birkhoff, *Lattice Theory*, 1940.
 [2] A. N. Kolmogoroff, *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, Moscou 1936 (en russe).
 [3] M. H. Stone, *The theory of representations for Boolean Algebras*, Transactions of the Amer. Math. Soc. 40 (1935), p. 37—111.
 [4] V. I. Glivenko, *Cours de la théorie des probabilités*, Moscou 1939 (en russe).
 [5] Dorothy Maharam, *On homogeneous measure algebras*, Proceedings of the National Acad. of Sc. 28 (1942), p. 108—111.

10. VLADIMÍR KOŘÍNEK (Praha). *Le théorème de Jordan-Hölder et son rôle dans la théorie des groupes et dans la théorie des structures.*

Depuis sa première formulation par Camille Jordan et Otto Hölder [1, 2], le théorème de Jordan-Hölder, concernant les chaînes de décomposition, donnait naissance à un très intéressant développement qui est loin d'être terminé. La présente communication veut donner un bref aperçu de l'état actuel du problème et quelques résultats acquis dans les dernières années.

Plusieurs mathématiciens ont généralisé ce théorème de la théorie des groupes dans de différentes voies. Mais seulement le développement de la théorie des structures (lattices) permettait d'examiner les conditions de sa validité. En effet, ce ne sont que les notions d'intersection et de sousgroupe-union de deux sousgroupes, de groupe-facteur et d'isomorphisme qui entrent dans la démonstration et dans l'énoncé de ce théorème. Or, l'intersection et l'union sont évidemment notions de la théorie des structures. La notion de groupe-facteur doit être remplacée par celle de quotient. Si l'on a dans une structure $a \geq b$, le quotient a/b est la sousstructure (sublattice) formée par tous les éléments x tels que $a \geq x \geq b$. Enfin, il faut remplacer l'isomorphisme de deux groupes-facteurs par la simple similitude d'en bas ou d'en haut. Deux quotients a/b et c/d sont dits simplement semblables d'en bas, s'il existe un quotient u/v tel qu'on a $a = b \vee u$, $v = b \wedge u$, $c = d \vee u$, $v = d \wedge u$. Ici \vee désigne l'union et \wedge l'intersection. La simple similitude d'en haut s'obtient de cette définition par la dualité.

On peut maintenant énoncer le théorème de Jordan-Hölder de la manière suivante. Soient

$$(1) \quad \begin{aligned} a &= a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_r = b \\ a &= b_0 > b_1 > b_2 > \dots > b_s = b \end{aligned}$$

deux chaînes finies allant de a à b et qui sont complètes (c'est-à-dire dans lesquelles on ne peut pas intercaler d'autres éléments). On a alors $r=s$ et on peut faire correspondre d'une manière biunivoque à chaque quotient a_i/a_{i+1} de la première chaîne un quotient b_k/b_{k+1} de la seconde de sorte que les deux quotients correspondants soient simplement semblables d'en bas. En ce cas, je dis, pour être court, que les chaînes (1) sont simplement semblables d'en bas.

Il faut évidemment supposer dans ce théorème que, entre a et b , il existe des chaînes complètes. Le théorème de Schreier [3], qui est une généralisation du théorème de Jordan-Hölder, se passe de cette supposition. Il se laisse énoncer comme il suit: Soient (1) deux chaînes finies quelconques. On peut toujours intercaler, dans la première chaîne et dans la seconde, de nouveaux éléments de sorte que les nouvelles chaînes ainsi obtenues aient la même longueur et soient simplement semblables d'en bas.

Ces deux théorèmes sont vrais dans chaque structure modulaire ([4], Ch. III), mais ils ne sont pas en général vrais dans une structure quelconque. Parce que la structure des sousgroupes d'un groupe n'est pas modulaire, on voit que ces théorèmes sont vrais même dans certains cas des structures non modulaires. Il s'agit de déterminer les conditions de la validité de ces deux théorèmes. Une voie à ce but consiste en ce que, dans une structure donnée, on n'admet pas toutes les chaînes allant de a à b , mais seulement certaines chaînes, de sorte que pour les chaînes ainsi choisies les théorèmes soient vrais. Cela signifie définir d'une manière convenable, parmi tous les éléments x contenus dans un élément donné a ($a \geq x$), les éléments normaux dans a , et d'admettre seulement des chaînes normales, c'est-à-dire des chaînes (1) telles que chaque élément y est normal dans son précédent. Cette notion de normalité a été l'objet d'un travail de M. Uzkov [5] et, plus tard, d'un travail de l'auteur [6].

Récemment, l'auteur est parvenu aux résultats d'une autre nature. Il s'y agit de caractériser toutes les structures où le théorème de Jordan-Hölder est vrai pour deux chaînes complètes (1) quelconques. Pour cela, il faut que, entre deux éléments quelconques a et b ($a \geq b$), des chaînes finies complètes existent. Cela a lieu dans les structures qui satisfont à la condition maximum et à la condition minimum et seulement dans ces structures. Une structure S satisfait à la condition maximum, si dans chaque ensemble d'éléments de S il y a des éléments maximum, cela veut dire qui ne sont contenus dans aucun autre élément de l'ensemble. La condition minimum s'en obtient par la dualité. Nous nous bornons dans ce qui suit seulement à de telles structures S . J'appelle un quotient a/b primitif, si b est distinct de a et si l'on ne peut intercaler entre a et b aucun autre élément. Je dis que S satisfait à la condition supérieure de primitivité, si du fait que a/b est primitif il découle que chaque quotient c/d pour lequel on a $a = b \vee c$, $d = b \wedge c$ est primitif aussi. Or, pour que dans une structure S le théorème de Jordan-Hölder soit vrai, il faut et il suffit que S satisfasse à la condition supérieure de primitivité. L'exposé complet des choses esquissées ici sera publié plus tard ailleurs.

BIBLIOGRAPHIE

1. Camille Jordan, *Commentaire sur Galois*, Math. Ann. 1 (1869), 141—160.
 2. Otto Hölder, *Zurückführung einer beliebigen Gleichung...*, Math. Ann. 34 (1889), 26—56.
 3. Otto Schreier, *Über den Jordan-Hölderschen Satz*, Abh. aus d. Math. Sem. Hamburg. Univ. 6 (1928), 300—302.
 4. Garret Birkhoff, *Lattice Theory*, Am. Math. Soc. Coll. Publ. 25, 1940.
 5. A. J. Uzkov, *O teoremie Jordana-Höldera*, Matematičeskij Sbornik (Moskwa) 4 (1938), 31—43.
 6. Vladimír Kořínek, *Der Schreiersche Satz und das Zassenhausche Verfahren in Verbänden*, Věstník Král. České Spol. Nauk. 1941, nr 14.
- 11.** EDWARD MARCZEWSKI (Wrocław). *Miara, wymiar, kategoria.*

Tekst odczytu będzie opublikowany w jednym z następnych tomów Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

12. K. MARDJANISHVILI. *Application de la méthode de I. Winogradow aux systèmes d'équations diophantiques avec des nombres premiers* (résumé de la conférence prononcée en langue russe).

M. I. Winogradow a résolu en 1937 le problème de Goldbach pour les nombres impairs en montrant que tout nombre impair N suffisamment élevé se laisse représenter dans la forme

$$N = p_1 + p_2 + p_3,$$

où p_1 , p_2 et p_3 sont des nombres premiers, et en donnant une formule asymptotique pour le nombre des représentations. Ce problème, qui a pris naissance dans la correspondance d'Euler avec Goldbach, était resté ouvert pendant presque 200 ans.

J'ai appliqué en 1940 la méthode de Winogradow au problème de la résolubilité en nombres premiers du système d'équations diophantiques

$$(1) \quad \begin{aligned} N_1 &= p_1 + p_2 + \dots + p_r, \\ N_2 &= p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_r^2, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ N_n &= p_1^n + p_2^n + \dots + p_r^n, \end{aligned}$$

où $0 < N_1 < \dots < N_n$ sont des entiers donnés d'avance.

J'ai établi alors une formule asymptotique pour le nombre $I(N_1, N_2, \dots, N_n; r)$ des solutions du système (1) dans le cas où $r > 5n(n+1)(n+2) \log n$. Une formule analogue a été trouvée plus tard par Hua-Lo-Ken. J'ai montré en 1947 que la formule asymptotique trouvée par moi est vraie déjà dans le cas où le nombre des sommandes est d'ordre $n^2 \log n$; ce résultat est proche du définitif. Soit

$$N_k = h_k P^k \text{ pour } k=1, 2, \dots, n-1 \text{ et } N_n = P^n.$$

La formule asymptotique en question prend alors la forme

$$(2) \quad \begin{aligned} &I(N_1, \dots, N_n; r) = \\ &= B(h_1, \dots, h_{n-1}; r) P^{r - \frac{n(n+1)}{2}} (\log P)^{-r} S(N_1, \dots, N_n; r) + \\ &+ O(P^{r - \frac{n(n+1)}{2}} (\log P)^{-r-\omega}), \end{aligned}$$

où $\omega > 0$ est une constante et

$$0 < C_1(n, r) \leq B(h_1, \dots, h_{n-1}; r) \leq C_2(n, r),$$

sous l'hypothèse que le système d'équations

$$N_j = x_1^j + x_2^j + \dots + x_r^j \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

est résoluble en nombres réels; $S(N_1, \dots, N_n; r)$ dépend des propriétés arithmétiques de N_1, N_2, \dots, N_n , à savoir

$$S(N_1, \dots, N_n; r) = \sum_{q_1, \dots, q_n=1}^{\infty} A(q_1, \dots, q_n; r; N_1, \dots, N_n),$$

où

$$A(q_1, \dots, q_n; r; N_1, \dots, N_n) = \sum'_{a_1, \dots, a_n} D^s e^{-2\pi i \left(\frac{a_1}{q_1} N_1 + \dots + \frac{a_n}{q_n} N_n \right)},$$

a_1, a_2, \dots, a_n parcourant les systèmes correspondants des restes ci-dessus suivant les modules q_1, q_2, \dots, q_n et D étant défini par la formule

$$D = D(a_1, q_1; \dots; a_n, q_n) = \frac{1}{\varphi(q_1 \dots q_n)} \sum'_x e^{2\pi i \left(\frac{a_1}{q_1} x + \dots + \frac{a_n}{q_n} x^n \right)},$$

où \sum' s'étend sur les valeurs de x qui parcourent les systèmes des restes ci-dessus suivant le module $q_1 \dots q_n$.

Il résulte de la formule (2) que si $S(N_1, N_2, \dots, N_n; r)$ dépasse une certaine constante positive, indépendante de N_1, N_2, \dots, N_n , on a $I(N_1, N_2, \dots, N_n; r) > 0$ pour P suffisamment grand, c'est-à-dire que le système (1) est résoluble.

Etant donné un nombre premier p , soient

$$n_1(p) = 1, \quad n_2(p), \quad \dots, \quad n_n(p)$$

les n premiers nombres naturels, premiers par rapport à p .

Désignons par $\Theta(p)$ l'entier défini par la condition

$$p^{\Theta} \parallel \begin{vmatrix} n_n^{n-1}(p), & \dots, & n_1^{n-1}(p) \\ n_n^{n-2}(p), & \dots, & n_1^{n-2}(p) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ n_n^0(p), & \dots, & n_1^0(p) \end{vmatrix}$$

(c'est-à-dire que p^Θ divise et $p^{\Theta+1}$ ne divise pas ce déterminant).
Si les entiers N_1, N_2, \dots, N_n satisfont au système de congruences

$$\begin{vmatrix} N_n, & n_{n-1}^{n-1}(p), & \dots, & n_1^{n-1}(p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_1, & n_{n-1}^0(p), & \dots, & n_1^0(p) \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p^{\Theta(p)}}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad \begin{vmatrix} n_n^{n-1}(p), & n_{n-1}^{n-1}(p), & \dots, & N_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n_n^0(p), & n_{n-1}^0(p), & \dots, & N_1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p^{\Theta(p)}}$$

pour tous les nombres premiers $p \leq n$, on peut trouver un $r = r(N_1, N_2, \dots, N_n)$ tel que $r \leq r_0(n)$ et que

$$S(N_1, \dots, N_n; r) \geq C_0(n) > 0.$$

Notons que $p > n$ entraîne

$$\begin{vmatrix} p^n, & n_{n-1}^{n-1}(p), \dots, & n_1^{n-1}(p) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p, & n_{n-1}^0(p), \dots, & n_1^0(p) \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p^{\Theta(p)}}.$$

C'est pourquoi la condition nécessaire pour que le système (N_1, N_2, \dots, N_n) soit représentable dans la forme (1) est la résolubilité pour les nombres premiers $p < n$ du système de congruences

$$\begin{vmatrix} N_n - z_1 2^n - \dots - z_m p^m, & n_{n-1}^{n-1}(p), & \dots, & n_1^{n-1}(p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_1 - z_1 2 - \dots - z_m p, & n_{n-1}^0(p), & \dots, & n_1^0(p) \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p^{\Theta(p)}},$$

(où $2, 3, \dots, p_m$ sont des nombres premiers ne dépassant pas n) en entiers z_1, z_2, \dots, z_m non-négatifs et satisfaisant aux conditions

$$N_j - z_1 2^j - \dots - z_m p_m^j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n)^1).$$

13. HUGO STEINHAUS (Wrocław). *Drogi matematyki stosowanej.*

Pelny tekst odczytu ukazał się w czasopiśmie „Matematyka“, tom 2 (1949), zeszyt 3, str. 8—19.

14. S. STOÏLOW (Bucarest). *Les surfaces de Riemann à frontière nulle.*

Les considérations et résultats présentés dans cette conférence peuvent être envisagés comme une illustration de l'idée générale — dont l'origine est dans l'oeuvre de Riemann — que les propriétés essentielles des fonctions analytiques doivent être cherchées dans la structure (topologique et métrique) de leur domaine naturel d'existence.

La théorie des fonctions sur une surface de Riemann donnée a réalisé, ces dernières années, des progrès importants, tout particulièrement par les travaux de R. Nevanlinna sur l'extension de la théorie des intégrales abéliennes de première espèce aux fonctions définies sur les surfaces de Riemann dont la frontière est de mesure harmonique nulle. Comme on sait, dans le plan, cette condition est équivalente à celle qui consiste à supposer la frontière de capacité nulle, ou encore, de diamètre transfini nul. Son extension, par Nevanlinna, aux frontières „idéales“ des surfaces de Riemann conçues *a priori*, conduit à envisager une classe très importante de telles surfaces (surfaces à „frontière nulle“), qu'on peut considérer immédiatement après les surfaces closes.

La définition générale *a priori* d'une surface de Riemann (R) (ou de recouvrement riemannien d'une autre surface), donnée par l'auteur (voir par exemple: *Principes topologiques de la*

¹⁾ Les démonstrations de ces résultats ont été publiés dans mes travaux dont l'un a paru dans „Izvestia Akademii Nauk SSSR“ (Série Mathématique) en 1940 et l'autre dans „Soobščenia Akademii Nauk Grouzinskoï SSR“ en 1947.

théorie des fonctions analytiques, Collection Borel, 1938), se prête, d'une manière très naturelle, à toutes définitions et considérations, topologiques ou métriques, intervenant dans ces questions. Les affixes des points singuliers (autres qu'algébriques) des fonctions correspondantes à (R) sont les valeurs asymptotiques de la transformation intérieure intervenant dans la définition de cette (R) et chacun de ces points peut être rattaché à un „élément frontière“ déterminé. A certains de ces éléments peut ne correspondre aucun point singulier; d'autres éléments peuvent avoir un nombre fini quelconque, ou infini, de tels points.

Sont présentés, plus particulièrement, dans cette conférence certains résultats de l'auteur sur le comportement des fonctions correspondant aux surfaces dont la frontière est de mesure harmonique nulle, au voisinage des éléments de cette frontière, et certaines conséquences de ce comportement.

Une proposition préliminaire établit que toutes ces fonctions possèdent la propriété que leur prolongement analytique est toujours possible dans un voisinage quelconque d'un chemin donné quelconque dans le plan (z) (propriété d'Iversen).

Le principal résultat qu'on en déduit, ici, est que les éléments frontières sont, pour $w=f(z)$, de deux espèces: les uns au voisinage desquels f est complètement indéterminée; les autres auxquels ne correspondent, pour f , que des points singuliers transcendants ordinaires.

Les premiers de ces éléments forment un ensemble fermé dans la frontière de R . Si cet ensemble est vide, la fonction $w=f(z)$ satisfait à une relation

$$\sum_{k=0}^n z^k A_k(w),$$

où les $A_k(w)$ sont des fonctions *uniformes* de w ayant des ensembles singuliers de mesure harmonique nulle.

On aperçoit l'analogie avec les cas classiques simples du point singulier isolé et des surfaces closes; ainsi que la généralisation du cas, bien connu, des inverses des fonctions méromorphes. C'est une conséquence de la „nullité“ de la frontière de (R) .

15. J. H. C. WHITEHEAD (Oxford). *The homotopy type of a special kind of polyhedron.*

A (finite, connected) polyhedron, P , is in the class considered if, and only if, $\dim P \leq n+2$ and $\pi_r(P) = 0$ for $r=1, \dots, n-1$. The case $n=2$ is treated in a paper, which is to appear in the Comm. Math. Helvetici (1949), and here we take $n > 2$. Let H^r be the integral, r -dimensional co-homology group of P , and $H^r(2)$ the mod. 2 co-homology group. We define homomorphisms

$$\mu: H^n \rightarrow H^n(2), \quad \Delta: H^n(2) \rightarrow H^{n+1}$$

as follows. If x' is an (absolute) co-cycle in the co-homology class x , then μx is the mod. 2 co-homology class of x' . If $x \in H^n(2)$ and if x' is a co-cycle, mod. 2, in the class x , then $\delta x' = 2y'$ and Δx is the co-homology class of y' . We also introduce the homomorphism

$$\gamma^*: H^n(2) \rightarrow H^{n+2}(2),$$

where γ^*x is the „Steenrod square“, $Sq_{n-2}x$. We use H to denote the system, which consists of the five groups $H^r, H^s(2)$ ($r=n, n+1, n+2; s=n, n+2$), related by μ, Δ, γ^* .

Let \bar{H} be another such system and μ, Δ, γ^* mean the same in \bar{H} as in H . Then a *proper homomorphism (isomorphism)*, $f^*: \bar{H} \rightarrow H$, will mean a family of homomorphisms (isomorphisms),

$$f^*: \bar{H}^r \rightarrow H^r, \quad f^*: \bar{H}^s(2) \rightarrow H^s(2),$$

such that $f^*\mu = \mu f^*$, $f^*\Delta = \Delta f^*$, $f^*\gamma^* = \gamma^* f^*$. The homotopy type of P is characterized by the system H in the sense that P is of the same homotopy type as a polyhedron, \bar{P} , in the class, if, and only if, H is properly isomorphic to the system \bar{H} , which is associated with \bar{P} . More precisely, a homotopy equivalence, $f: P \rightarrow \bar{P}$, induces a proper isomorphism, $f^*: \bar{H} \rightarrow H$, and any proper isomorphism, $f^*: \bar{H} \rightarrow H$, can be realized by a homotopy equivalence $f: P \rightarrow \bar{P}$.

Further theorems, details and references are given in an article in the Annales de la Soc. Polonaise de Mathématique (1948).

SEKCJA ANALIZY MATEMATYCZNEJ

1. MIECZYŚLAW BIERNACKI (Lublin). *O funkcjach słabo p -listnych.*

Niech $M(r)$ oznacza maximum modułu funkcji

$$f(z) = a_0 + \dots + a_n z^n + \dots$$

holomorficznej w kole $|z| \leq r < 1$ i $A(r)$ pole powierzchni Riemanna, na którą ta funkcja odwzorowuje powyższe koło. Hardy i Littlewood udowodnili¹⁾, że jeśli jest

$$A(r) \leq p\pi[M(r)]^2, \quad p \geq 1,$$

dla każdego r z przedziału $0 < r < 1$, to zachodzi też nierówność

$$M(r) \leq A(p) \mu_p (1-r)^{-B(p)}, \quad \text{gdzie } \mu_p = \max [|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{E(p)}|],$$

a $A(p)$ i $B(p)$ zależą tylko od p , nie otrzymali jednak żadnego efektywnego oszacowania tych funkcji. Przypuszczając, że jest

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{A(r)}{\pi[M(r)]^2} = p \quad (0 < p < \frac{1}{4}),$$

otrzymałem nierówność

$$M(r) \leq \frac{C(f)}{(1-r)^{B(p)}},$$

w której $C(f)$ jest stałą zależną od danej funkcji, a $B(p)$ spełnia nierówności:

$$B(p) \leq \frac{2\sqrt{p}}{1-2\sqrt{p}} \quad \text{dla } 0 < p < \frac{1}{16},$$

$$B(p) \leq 1 \quad \text{dla } \frac{1}{16} \leq p < \frac{1}{4}.$$

¹⁾ Kgl. Danske Videns. Selskab. Math. fysiske Medd. **7**, 1925, str. 1—16.

2. J. BONDER (Gliwice). *O pewnym rozszerzeniu zakresu zastosowań zasady symetrii (zasady odbić Schwarz'a), przy efektywnym wyznaczaniu odwzorowań wiernokątnych.*

W zastosowaniach teorii odwzorowań wiernokątnych daje się dotkliwie odczuć brak efektywnych metod wyznaczania funkcji realizujących te odwzorowania. Znane są wprawdzie różne metody iteracyjne, które pozwalają z żadaną dokładnością wyznaczać odpowiadające sobie punkty obszarów odwzorowywanych. Jednakże wszystkie te metody są nie tylko uciążliwe rachunkowo, ale — co gorsza — najzupełniej nieprzydatne, gdy chodzi o analizę i dyskusję własności całych rodzin odwzorowań (a tego najczęściej wymagają właśnie zastosowania).

Jedyny dotychczas wyłom w tej dziedzinie stworzyły klasyczne prace Schwarz'a i Christoffela¹⁾, dotyczące wiernokątnych odwzorowań półpłaszczyzny na wnętrze bądź na zewnętrzze wielokątów. Zwłaszcza duże dla nauki znaczenie miała praca Schwarz'a, w której jasno sformułowana została właściwa do tego celu prowadząca metoda — później nazwana *zasadą odbić Schwarz'a* albo *zasadą symetrii względem prostej bądź okręgu*; (znane uogólnienie tej zasady na dowolne łuki analityczne posiada doniosłe znaczenie teoretyczne, ale do efektywnego wyznaczania funkcji odwzorowującej już się nie nadaje).

W komunikacie niniejszym dowodzę możliwości użycia zasady odbić Schwarz'a — w jej pierwotnej postaci, a więc zasady symetrii względem prostej lub okręgu — również i w tych przypadkach, gdy cały brzeg obszaru odwzorowanego redukuje się do jednego łuku analitycznego, zresztą dowolnego, np. do łuku owalu Cassiniego, łuku stożkowej itp. Cel ten osiągam rozbijając sam proces odwzorowania na kilka odpowiednio dobranych etapów, przy czym odwzorowania pośrednie są do pewnego stopnia ustalone już przez samo równanie brzegu obszaru odwzorowanego.

¹⁾ Christoffel, *Annali di Matematica*, II serie, t. 1 (1867); H. A. Schwarz, *Journ. f. Math.* 70 (1869).

Niech poszukiwana funkcja analityczna

$$(1) \quad z = f(Z)$$

odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie obszar „kanoniczny“ D_Z , np. zewnątrz koła $|Z| > R_0$, na zewnątrz D_z danego łuku analitycznego AB (tzn. na całą płaszczyznę z , rozciętą jednak wzdłuż tego łuku AB).

Przede wszystkim obieramy taką pomocniczą funkcję $\zeta = \varphi(z)$, możliwie najprostszej budowy, która będąc określona w całej płaszczyźnie z (choć niekoniecznie jednoznacznie), jest holomorficzną na samym łuku AB i odwzorowuje w płaszczyźnie ζ ten łuk na odcinek prostoliniowy, bądź na łuk okręgu, bądź na układy takich odcinków czy łuków (tego rodzaju funkcję można np. otrzymać z równań parametrycznych krzywej, na której leży w płaszczyźnie z dany łuk AB). Z kolei funkcja złożona

$$(2) \quad \zeta = \varphi[f(Z)]$$

odwzoruje domknięty obszar „kanoniczny“ \bar{D}_Z na obszar domknięty \bar{D}_ζ , o brzegu utworzonym wyłącznie z odcinków prostoliniowych i łuków kół. Punkty osobliwe tej funkcji w obszarze \bar{D}_Z oraz przynależne do nich rozwinięcia ustalamy na podstawie własności geometrycznych badanego odwzorowania. Następnie, uwzględniając kształt brzegu obszaru D_ζ , z łatwością uskuteczniamy — kierując się zasadą symetrii Schwarza — przedłużenie analityczne funkcji (2) na wnętrze koła $|Z| < R_0$ (obszar D_Z^*); tym samym wyznaczamy tam jej punkty osobliwe oraz postać odpowiednich rozwinięć. Wreszcie wracając z pomocą związku $z = \varphi^{-1}\{\varphi[f(Z)]\}$ do szukanej funkcji (1), otrzymujemy w ten sposób i dla niej wszystkie niezbędne rozwinięcia, i to w całej płaszczyźnie Z .

Jeżeli funkcja pomocnicza $\zeta = \varphi(z)$ wyraża się dość prosto, udaje się często zbudować *wyrażenie analityczne* poszukiwanej funkcji $z = f(Z)$. W tym celu — idąc znowu śladem Schwarza (l. c.) — szukamy takiego algorytmu różniczkowego, który by przekształcił funkcję (2) na *funkcję wymierną* albo *meromorficzną*. Wtedy bowiem wystarcza już znajomość biegunów tej funkcji i ich residuów, by zbudować jej wyrażenie analityczne. Otrzymanie zaś samej funkcji odwzorowującej $z = f(Z)$ spro-

wadza się do zastosowania algorytmu odwrotnego do poprzedniego (co zresztą nie zawsze jest rzeczą prostą).

Powyższą metodą wyznaczyłem wyrażenia analityczne funkcji odwzorowujących taki czy inny obszar „kanoniczny“: 1^o na zewnątrz łuków Cassiniego (wynik — o ile wiem — nowy); 2^o na zewnątrz łuków parabol, elips i hiperbol. Zwłaszcza prosto wypada to postępowanie w stosunku do łuków Cassiniego, dla których $\zeta = \varphi(z) = \sqrt{z^2 - c^2}$, a wspomniany wyżej algorytm stanowi po prostu pochodną logarytmiczną funkcji (2); kierując się zasadą symetrii, znajdujemy:

$$(3) \quad \frac{\zeta'}{\zeta} = \frac{1}{Z} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z - Z_1} + \frac{1}{Z - Z_2} - \frac{1}{Z - Z_1^*} - \frac{1}{Z - Z_2^*} \right),$$

gdzie

$$Z_{1,2}^* = R_0^2 \cdot \bar{Z}_{1,2} \quad \text{a} \quad f(Z_{1,2}) = z_{1,2} = \pm c.$$

Całkując obustronnie równość (3) i uwzględniając jeszcze właściwe temu odwzorowaniu warunki geometryczne, otrzymujemy na poszukiwaną funkcję $z = f(Z)$ bardzo proste wyrażenie algebraiczne.

3. ZYGMUNT BUTLEWSKI (Poznań). *O całkach pewnego równania różniczkowego zwyczajnego II-ego rzędu.*

4. ZYGMUNT CHARZYŃSKI i J. JANIKOWSKI (Łódź). *O pewnym uogólnieniu twierdzenia Koebe'go o zniekształceniu.*

5. FRANCISZEK LEJA (Kraków). *O problemie Dirichleta przy obłożeniu nieciągłym.*

Niech B będzie brzegiem obszaru płaskiego D zawierającego wewnątrz punkt $z = \infty$. Załóżmy, że średnica pozaskończona zbioru B jest dodatnia i rozdzielną B na dwa zbiory rozłączne

$$B = B_1 + B_2, \quad B_1 \cdot B_2 = 0,$$

o średnicach pozaskończonych dodatnich. Na brzegu B niech będzie określona funkcja $\varphi(z)$ przybierająca w zbiorze B_1 wartość stałą a , w zbiorze zaś B_2 wartość stałą b , gdzie a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Obierzmy na brzegu B układ $n+1$ punktów $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ różnych od siebie, który oznaczymy krócej przez $\zeta^{(n)}$:

$$(1) \quad \zeta^{(n)} = \{\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n\};$$

oznaczymy przez $L^{(j)}(z, \zeta^{(n)})$ wielomian n -go stopnia przybierający wartość 1 w punkcie $z = \zeta_j$ i wartość 0 w pozostałych punktach układu $\zeta^{(n)}$, tj.

$$L^{(j)}(z, \zeta^{(n)}) = \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^n \frac{z - \zeta_k}{\zeta_j - \zeta_k}, \quad j=0, 1, \dots, n,$$

i niech λ będzie parametrem rzeczywistym przybierającym wartości nieujemne. Funkcja $f(z, \lambda, \zeta^{(n)})$ określona wzorem

$$(2) \quad f(z, \lambda, \zeta^{(n)}) = \log \sqrt[n]{\sum_{j=0}^n |L^{(j)}(z, \zeta^{(n)})| e^{n\lambda\varphi(\zeta_j)}}$$

posiada na całej płaszczyźnie zmiennej z wartości rzeczywiste; w punktach układu (1) wartości te równają się $\lambda\varphi(z)$.

Zmieniajmy układ (1) w zbiorze B i przy każdym ustalonym z, λ i n oznaczymy przez $f_n(z, \lambda)$ kres dolny wszystkich funkcji (2)

$$(3) \quad f_n(z, \lambda) = \inf_{\zeta^{(n)} \in B} f(z, \lambda, \zeta^{(n)}), \quad n=1, 2, \dots$$

Można dowieść, że otrzymany w ten sposób ciąg funkcji (3) posiada następujące własności:

1^o Przy każdej ustalonej wartości λ ciąg (3) jest zbieżny na całej płaszczyźnie zmiennej z i funkcja graniczna

$$(4) \quad f(z, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z, \lambda)$$

jest harmoniczna na całej płaszczyźnie poza zbiorem B .

Oznaczymy przez Δ dopełnienie zbioru $D+B$ do całej płaszczyzny. Zbiór Δ jest oczywiście otwarty lub pusty, a gdy nie jest pusty, wówczas jest on sumą skończonej lub przeliczalnej ilości obszarów jednospójnych ograniczonych, których brzegi są zawarte w zbiorze B .

2^o Zauważmy, że gdy $\lambda=0$, funkcje (2) i (3) — a przez to i funkcja graniczna $f(z, \lambda)$ — nie zależą od funkcji brzegowej $\varphi(z)$. W tym przypadku mamy

$$f(z, 0) = \begin{cases} e^{G(z)} & \text{dla } z \in D, \\ 0 & \text{dla } z \in \Delta + B, \end{cases}$$

gdzie $G(z)$ jest funkcją Greena obszaru D z biegunem w nieskończoności.

3^o Jeżeli funkcja brzegowa $\varphi(z)$ ma wartość stałą $a=b$, to iloraz $f(z, \lambda)/\lambda$ posiada przy każdym $\lambda > 0$ w zbiorze $\Delta + B$ wartość stałą, równą a .

4^o W przypadku ogólnym, gdy $\lambda > 0$ i zbiór Δ nie jest pusty, iloraz $f(z, \lambda)/\lambda$ tworzy przy zmiennym λ rodzinę normalną funkcji harmonicznych w zbiorze Δ . Jeżeli $a \leq b$, to przy każdym $\lambda > 0$ mamy

$$a \leq \frac{f(z, \lambda)}{\lambda} \leq b \quad \text{dla } z \in \Delta + B.$$

Gdy z jest punktem brzegu B i $\varphi(z)$ jest funkcją ciągłą w tym punkcie, wówczas istnieje granica

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(z, \lambda)}{\lambda} = \varphi(z)$$

i, jeżeli ilość punktów nieciągłości funkcji brzegowej $\varphi(z)$ jest skończona, to granica $\lim_{\lambda \rightarrow 0} [f(z, \lambda)/\lambda]$ istnieje również wewnątrz Δ

i przedstawia rozwiązanie problemu Dirichleta dla obszarów Δ przy danym obłożeniu nieciągłym $\varphi(z)$.

Dowody twierdzeń 1^o i 2^o są zawarte implícite w moich pracach zamieszczonych w czasopiśmie: Bull. Acad. Polon. (Série A), Kraków 1936, str. 79—92 i Ann. Soc. Polon. de Math. t. 12 (1934), str. 57—71. Dowody twierdzeń 3^o i 4^o będą ogłoszone później.

6. TADEUSZ KOCHMAŃSKI (Kraków). *Zastosowanie algebry jądrowej do funkcji analitycznych trzech i więcej zmiennych.*

Mamy funkcję analityczną trzech argumentów ξ, η, ζ

$$(1) \quad F(\xi, \eta, \zeta)$$

określona w otoczeniu punktu $P(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$, przy czym

$$(2) \quad F(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = 0 \quad \text{oraz} \quad F_\xi(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \neq 0.$$

Mamy za zadanie wyznaczyć metodami algebry jądrowej¹⁾ element funkcji uwikłanej ζ w punkcie P , jako funkcję pozostałych dwóch zmiennych argumentów ξ i η .

Rozwińmy funkcję (1) w szereg Taylora i zamieńmy zmienne według równań:

$$(3) \quad \xi - \xi_0 = x, \quad \eta - \eta_0 = y, \quad \zeta - \zeta_0 = z;$$

wówczas po wykonaniu działań otrzymamy równanie:

$$(4) \quad F(x + \xi_0, y + \eta_0, z + \zeta_0) = f(x, y, z) = 0$$

w postaci szeregu potęgowego zmiennych x, y, z , o którym zakładamy, że jest bezwzględnie zbieżny w otoczeniu punktu $(0, 0, 0)$. Wobec powyższych założeń dla funkcji $f(x, y, z)$ określonej równaniem (4) istnieje w otoczeniu punktu $(0, 0, 0)$ element funkcji uwikłanej z .

Udowodnimy, że element ten możemy jednoznacznie wyznaczyć przy pomocy metod algebry jądrowej, zachowując rekurencyjność i kolejność obliczania. Uporządkujemy w tym celu wyrazy szeregu (4) według rosnących potęg zmiennej z , wyciągając z^i , dla i naturalnego lub zero, przed nawias. Po przejściu na symbolikę krakowianowo-jądrową otrzymamy w miejsce (4) równanie

$$(5) \quad x a y + z(x b y) + z^2(x c y) + \dots = 0,$$

gdzie a, b, c, \dots są krakowianami o nieskończenie wielu kolumnach i wierszach czyli jądrami.

Celem rachunku ma być liczbowe wyznaczenie kolejnych elementów jądra a spełniającego równanie

$$(6) \quad z = x a y,$$

gdzie z jest elementem funkcji uwikłanej określonej równaniem (5).

¹⁾ T. Kochmański, *Algèbre des noyaux*, Rocznik Pol. Tow. Mat., t. 20 (1948), str. 384.

Istnienie α wynika z poczynionych powyżej założeń. Możemy więc wstawić wyrażenie (6) do równania (5). Po wykonaniu zaznaczonych działań możemy według metody współczynników nieoznaczonych napisać równanie jądrowe

$$(7) \quad ! \quad \alpha + \alpha b + \alpha^{(2)} c + \alpha^{(3)} d + \dots = 0.$$

Równanie (7) pozwala na proste, rekurencyjne obliczenie kolumny „zerowej“ (tzn. pierwszej) jądra α , czyli α_0 . Zauważymy bowiem, że dla $x=0$ i $y=0$ ma być według założenia $z=0$, a więc według (6) musi zachodzić $\alpha_{00}=0$.

Przepiszmy równanie (7) dla zerowych kolumn wyrazów występujących w (7). Otrzymamy równanie

$$(7a) \quad ! \quad \alpha_0 + \alpha_0 b_0 + (\alpha^{(2)})_0 c_0 + (\alpha^{(3)})_0 d_0 + \dots = 0.$$

Z równania (7a) można bezpośrednio obliczyć kolejne elementy α_0 . Wynika to stąd, że dla $\alpha_{00}=0$ w i -tej potędze jądrowej $\alpha^{(i)}$ ($i=1,2,3,\dots$) pierwsze i elementów są zerami. Wskutek tego przy pomocy elementu α_{0i} można obliczyć element w $(i+j)$ -tym wierszu iloczynu jądrowego z równania (7a) przy potędze $\alpha^{(j)}$. Wskutek tego dla każdego wiersza równania jądrowego (7a) można zbudować równanie, w którym zawsze tylko jedna niewiadoma będzie występowała w członie $\alpha_0 b_0$, albowiem człony następných iloczynów albo są zerami, albo mogą być obliczone przy pomocy poprzednich wierszy. Prócz tego ilość iloczynów jądrowych z (7a) potrzebnych do obliczenia α_{0i} wynosi i , a więc jest skończona.

Tak więc dla obliczenia α_{01} będziemy mieli równania

$$\alpha_{01} + \alpha_{01} b_{00} = 0,$$

skąd dla $b_{00} \neq 0$

$$(8) \quad \alpha_{01} = \frac{\alpha_{01}}{b_{00}}.$$

Warunek $b_{00} \neq 0$ wynika z warunku $F_{\xi}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \neq 0$, albowiem $f_x(0, 0, 0) = F_{\xi}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = b_{00}$.

Jest to zarazem warunek wystarczający dla stosowania metody algebry jądrowej, ponieważ każdy nowy niewiadomy element jest mnożony przez b_{00} i dla $b_{00} \neq 0$ może być obliczony.

Mając obliczone α_0 , zmieniamy powtórnie zmienne w następujący sposób. Wstawmy mianowicie do (5) $y=0$ i oznaczmy otrzymane dla tego wypadku z przez z_0 . Na podstawie równania (6) obliczymy z_0 jako

$$(9) \quad z_0 = x\alpha_0,$$

gdzie α_0 jest już obliczone równaniem (7a).

Niech

$$(10) \quad z = z - z_0 + z_0$$

oraz

$$(11) \quad z - z_0 = Z.$$

Łatwo zauważyć, że dla $z = z_0$ zachodzi $Z=0$. Wstawiając do (5) wyrażenie $(Z + z_0)$, gdzie z_0 jest funkcją x według (9), otrzymamy po wykonaniu działań funkcję zmiennych x, y, Z :

$$(12) \quad \Phi(x, y, Z) = 0$$

i to taką, że dla $y=0$ jest zawsze $Z=0$.

Jeżeli istnieje element funkcji uwikłanej Z danej przez równanie (12) w postaci szeregu potęgowego bezwzględnie zbieżnego w okolicy punktu $(0, 0, 0)$, to napiszemy go w postaci

$$(13) \quad Z = x\beta y.$$

Dla $y=0$ zachodzi stale $Z=0$, a więc

$$(14) \quad \beta_0 = 0.$$

Równanie (12) po zastosowaniu metody współczynników nieoznaczonych przedstawi się w postaci jądrowej analogicznie do równania (7):

$$(15) \quad ! \quad A + \beta B + \beta^{(2)} C + \beta^{(3)} D + \dots = 0,$$

gdzie

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} ! \quad A = a + \alpha_0 b + \alpha_0^{(2)} c + \alpha_0^{(3)} d + \dots \\ ! \quad B = b + 2\alpha_0 c + 3\alpha_0^{(3)} d + \dots \\ ! \quad C = c + 3\alpha_0 d + \dots \end{array} \right.$$

Ponieważ $(\alpha^i)_{00} = 0$ dla $i \geq 1$, więc $\Phi_z(0, 0, 0) = B_{00} = b_{00} \neq 0$, a więc jądro β istnieje zawsze i da się obliczyć z równania (15).

Współczynniki w równaniach (16) otrzymuje się z trójkąta Pascala; leżą one na liniach równoległych do jednego z boków. Obliczenie jądra β z równania (15) odbywa się z łatwością i to całymi kolumnami, analogicznie jak w równaniu (7a) obliczaliśmy poszczególne elementy, a to dlatego, że w $\beta^{(0)}$ jest i pierwszych kolumn złożonych z zer. Podobnie więc jak w (7a) braliśmy pod uwagę kolejno dwa, trzy, ... składniki sumy dla obliczenia elementów w drugim, trzecim, ... wierszu α_0 , tak obecnie bierzemy we wzorze (15) dwa, trzy, ... składniki sumy, by kolejno otrzymać kolumny β_1, β_2, \dots itd.

Po znalezieniu potrzebnej do danego zagadnienia ilości kolumn jądra β znajdziemy z z równania $z = Z + z_0$, czyli

$$(17) \quad a = \beta + a_0.$$

A więc jądro a powstaje z jądra β przez wstawienie na miejsce $\beta_0 = 0$ kolumny a_0 , znanej z rozwiązania równania (7a).

Opisane tu postępowanie daje się natychmiast uogólnić na funkcje dowolnej ilości zmiennych. Dla n zmiennych niezależnych należy wykonać n operacji zamiany zmiennych, analogicznie do równań (3) i (11).

7. M. KRZYŻAŃSKI (Kraków). *Sur les solutions de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique, discontinues sur la caractéristique.*

Soit

$$(1) \quad F(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y)$$

une équation linéaire du type parabolique. Les coefficients a, b, c et la fonction f sont des fonctions continues dans un segment Σ : $0 \leq y \leq h$, $-\infty < x < a + \infty$, et le coefficient b satisfait, en outre, à l'inégalité $b < \beta < 0$ (β constant). Soit $\varphi(x)$ une fonction continue en dehors d'un ensemble E sur la caractéristique $y = 0$. On cherche une fonction $u(x, y)$ satisfaisant à l'intérieur de Σ à l'équation (1) et sur la caractéristique $y = 0$ à la condition

$$(2) \quad u(x, 0) = \varphi(x),$$

sauf aux points de E .

On démontre le théorème suivant.

Admettons que:

1° il existe une fonction $K(x, y)$, continue et positive dans $\Sigma - E$, admettant les dérivées du 2^me ordre continues à l'intérieur de Σ , satisfaisant dans Σ à la condition $F(K) < 0$ et tendant vers ∞ , lorsque le point (x, y) tend vers un point de E ;

2° $\varphi_n(x)$ est une suite de fonctions continues, telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x),$$

sauf aux points de E , la convergence étant uniforme dans tout ensemble fermé ne contenant pas de points de E ;

3° à chaque fonction $\varphi_n(x)$ correspond à l'intérieur de Σ une solution $u_n(x, y)$ de (1), telle que

$$u_n(x, 0) = \varphi_n(x);$$

4° à tout nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\delta > 0$, tel que pour $x \in CE$ et $\bar{x} \in E$ (où CE désigne le complémentaire de E)

$$|x - \bar{x}| < \delta \text{ entraîne } |\varphi_n(x)| < \varepsilon K(x, 0).$$

Alors la suite $\{u_n\}$ converge dans $\Sigma - E$ vers une fonction $u(x, y)$ satisfaisant à (1) à l'intérieur de Σ et à la condition initiale (2) pour $y = 0$.

Lorsque $a = 0$, $b = 1$, c est borné et E est un sous-ensemble de mesure nulle de l'intervalle $\langle a, b \rangle$, on détermine la fonction $K(x, y)$ de la manière suivante.

Soit $\theta(x)$ une fonction continue et positive dans $\langle a, b \rangle$, en dehors de E , tendant vers l'infini lorsque $x \rightarrow \bar{x} \in E$, et telle que l'intégrale

$$\int_a^b \theta(x) dx$$

soit convergente. On pose

$$K(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \int_a^b \exp \left[\nu y - \frac{(x-s)^2}{4y} \right] \theta(s) ds,$$

ν étant une constante positive.

8. WITOLD POGORZELSKI (Warszawa). *O pewnych zagadnieniach brzegowych teorii potencjału.*

9. JACEK SZARSKI (Kraków). *O pewnych systemach nierówności różniczkowych, cząstkowych rzędu pierwszego. Zastosowanie w teorii systemów równań różniczkowych, cząstkowych rzędu pierwszego.*

Twierdzenie 1. Załóżmy, że funkcje

$$f_v^\mu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m, q_1^{(\mu)}, \dots, q_n^{(\mu)}) \quad (\mu=1, \dots, m; v=1, \dots, k)$$

są ciągle w pewnym zbiorze przestrzeni $(2n+k+m)$ -wymiarowej, którego rzut na przestrzeń $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n$ pokrywa zbiór

$$(1) \quad \hat{x}_v \leq x_v < \hat{x}_v + a; \quad b_i + M \sum_{v=1}^k (x_v - \hat{x}_v) \leq y_i - \hat{y}_i \leq a_i - M \sum_{v=1}^k (x_v - \hat{x}_v).$$

Założmy, że funkcje f_v^μ spełniają warunek Lipschitz'a ze stałą M względem zmiennych $q_1^{(\mu)}, \dots, q_n^{(\mu)}$, oraz następujący warunek monotoniczności:

$$(2) \quad \text{Jeżeli } z_1 \geq \bar{z}_1, \dots, z_{\mu-1} \geq \bar{z}_{\mu-1}, z_\mu = \bar{z}_\mu, z_{\mu+1} \geq \bar{z}_{\mu+1}, \dots, z_m \geq \bar{z}_m,$$

to

$$\begin{aligned} f_v^\mu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m, q_1^{(\mu)}, \dots, q_n^{(\mu)}) &\geq \\ &\geq f_v^\mu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m, q_1^{(\mu)}, \dots, q_n^{(\mu)}). \end{aligned}$$

Niech wreszcie funkcje

$$u_\mu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) \text{ i } v_\mu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) \quad (\mu=1, \dots, m)$$

posiadają w każdym punkcie zbioru (1) różniczkę zupełną i spełniają w tym zbiorze następujące nierówności:

$$u_\mu(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k, y_1, \dots, y_n) > v_\mu(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k, y_1, \dots, y_n).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} &> f_v^\mu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_m, \frac{\partial u_\mu}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u_\mu}{\partial y_n}) \\ \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu} &\leq f_v^\mu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, v_1, \dots, v_m, \frac{\partial v_\mu}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial v_\mu}{\partial y_n}) \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \mu=1, \dots, m \\ \nu=1, \dots, k \end{array} \right).$$

Przy powyższych założeniach, nierówności

$$u_\mu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) > v_\mu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

są spełnione w całym zbiorze (1).

Twierdzenie 2. Weźmy pod uwagę następujący system równań różniczkowych:

$$(3) \quad \frac{\partial z_\mu}{\partial x_\nu} = f_\nu^\mu \left(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m, \frac{\partial z_\mu}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z_\mu}{\partial y_n} \right) \quad \left(\begin{array}{l} \mu = 1, \dots, m \\ \nu = 1, \dots, k \end{array} \right).$$

Założmy, że wszystkie pochodne funkcji

$$f_\nu^\mu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m, q_1^{(\mu)}, \dots, q_n^{(\mu)})$$

rzędu pierwszego i drugiego są ciągle i bezwzględnie mniejsze od stałej M w zbiorze

$$\bar{x}_\nu \leq x_\nu < \bar{x}_\nu + a; \quad y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m, q_1^{(\mu)}, \dots, q_n^{(\mu)} \text{ dowolne.} \\ \nu = 1, \dots, k$$

Założmy ponadto, że funkcje f_ν^μ spełniają warunek monotoniczności (2).

Niech funkcje $\omega_\mu(y_1, \dots, y_n)$ i $\theta_\mu(y_1, \dots, y_n)$ ($\mu = 1, \dots, m$) posiadają pochodne cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego ciągle i bezwzględnie mniejsze od M w całej przestrzeni y_1, \dots, y_n .

Założmy wreszcie, że funkcje ω_μ i θ_μ spełniają następujące nierówności:

$$\omega_\mu(y_1, \dots, y_n) \geq \theta(y_1, \dots, y_n) \quad (\mu = 1, \dots, m).$$

Przy powyższych założeniach, istnieje taka liczba dodatnia $\delta(a, m, n, k, M)$ (zależna wyłącznie od stałych a, m, n, k, M), że jeżeli $u_\mu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$ i $v_\mu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$ ($\mu = 1, \dots, m$), są dwiema całkami systemu (3) posiadającymi ciągle pochodne cząstkowe rzędu pierwszego w zbiorze

$$(4) \quad \bar{x}_\nu \leq x_\nu < \bar{x}_\nu + \delta; \quad y_1, \dots, y_n \text{ dowolne} \\ \nu = 1, \dots, k$$

oraz spełniającymi tożsamości:

$$u_\mu(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, y_1, \dots, y_n) = \omega_\mu(y_1, \dots, y_n) \\ v_\mu(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, y_1, \dots, y_n) = \theta_\mu(y_1, \dots, y_n) \quad (\mu = 1, \dots, m),$$

wówczas nierówności

$$u_{\mu}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) \geq v_{\mu}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

zachodzą w całym zbiorze (4).

10. TADEUSZ WAŻEWSKI (Kraków). *Jednolity dowód uogólnionego twierdzenia de l'Hôpitala.*

11. TADEUSZ WAŻEWSKI (Kraków). *O porównywaniu całek układów równań różniczkowych.*

SEKCJA GEOMETRII

1. STANISŁAW GOŁĄB (Kraków). *O pewnym warunku istnienia asymptoty krzywej płaskiej.*

Jeżeli weźmiemy szczególną krzywą płaską wypukłą i posiadającą asymptotę, to łatwo przerachować, że jej krzywizna dąży do zera w miarę jak po krzywej oddalamy się zbliżając się do asymptoty. Zjawisko odwrotne nie ma miejsca, albowiem np. dla paraboli, która asymptot nie posiada, krzywizna również dąży do zera, gdy oddalamy się po gałęzi paraboli do nieskończoności. Intuicja mówi nam, że dla krzywych posiadających asymptotę krzywizna szybciej zdąży do zera aniżeli dla krzywych nie mających asymptoty. Aby to intuicyjne pojęcie ująć ściśle weźmy pod uwagę naturalne równanie krzywej

$$(1) \quad x = f(s),$$

gdzie s oznacza łuk liczony od pewnego wybranego punktu w pewnym kierunku, zaś x oznacza krzywiznę krzywej.

Autor dowodzi następujących dwóch twierdzeń, z których pierwsze podaje warunek dostateczny dla istnienia kierunku asymptotycznego, zaś drugie warunek dostateczny dla istnienia asymptoty.

Twierdzenie 1. *Jeżeli istnieje liczba $\alpha > 1$ taka, że*

$$(2) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} f(s) \cdot s^\alpha = g \neq 0,$$

wówczas krzywa (1) ma dla $s \rightarrow \infty$ kierunek asymptotyczny.

Twierdzenie 2. *Jeżeli istnieje liczba $\beta > 2$ taka, że*

$$(3) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} f(s) \cdot s^\beta = G \neq 0,$$

wówczas krzywa (1) posiada dla $s \rightarrow \infty$ asymptotę.

Autor dyskutuje następnie kwestię możliwości odwrócenia powyższych twierdzeń.

2. STANISŁAW GOŁĄB (Kraków). *O obiektach geometrycznych nieróżniczkowych.*

Nazwą tą obdarza autor takie obiekty, dla których prawo transformacji składowych przy przejściu od jednego układu współrzędnych do innego nie zależy od pochodnych funkcji składowych przekształcenia. Obiekty nieróżniczkowe nie były dotychczas przedmiotem badań.

Autor wyznaczył na razie obiekty nieróżniczkowe w przestrzeni jednowymiarowej i o jednej składowej. Wynik jest następujący. Oznaczmy współrzędną punktu jednowymiarowej przestrzeni przez ξ w jednym układzie, przez $\bar{\xi}$ w drugim układzie. Przez ω oznaczmy składową obiektu w pierwszym układzie i odpowiednio przez $\bar{\omega}$ jego składową w drugim układzie. Prawidło transformacji będzie następujące:

$$(1) \quad \bar{\omega} = f(\omega, \xi, \bar{\xi}).$$

Ażeby (1) przedstawiało prawidło transformacji funkcja f nie może być dowolną; trzeba i wystarcza, aby była ona kształtu:

$$(2) \quad f(\omega, \xi, \bar{\xi}) = g\{G(\omega, \xi), \bar{\xi}\},$$

gdzie funkcja

$$(3) \quad g(u, v)$$

jest dowolną funkcją dwu zmiennych niezależnych, byle odwracalną ze względu na pierwszą zmienną u , natomiast funkcja G powstała z g przez odwrócenie tej ostatniej ze względu na pierwszą zmienną, czyli mówiąc dokładniej:

$$(4) \quad g\{G(v, w), v\} = w.$$

3. W. ŚLEBODZIŃSKI (Wrocław). *Kilka zagadnień związanych z różniczkową formą zewnętrzną II-go stopnia.*

4. WŁODZIMIERZ WRONA (Kraków). *On multivectors in a Riemannian V_n .*

The curvature affiner $K_{\kappa\lambda\mu\nu}$ and fundamental tensor $a_{\lambda\mu}$ in a Riemannian V_n can be used to define some new affiners with $2m$ indices, where $2 \leq m \leq n$. By means of these affiners we can give new form to the conditions that the space should be either Einsteinian or conformal to a flat space, enabling us to interpret these conditions geometrically in terms of the scalar curvature of an m -direction. Further, the generalized Schur's theorem appears as an almost automatic consequence of the new expression for scalar curvature. By means of these new affiners we also define principal m -vectors in V_n and investigate some of their properties in order to point to the possibility of a new way of classification of Riemannian spaces.

SEKCJA ANALIZY FUNKCJONALNEJ I TEORII FUNKCJI ZMIENNEJ RZECZYWISTEJ

1. ANDRZEJ ALEXIEWICZ (Poznań). *On differentiation of abstract functions.*

Let X be a Banach space. A set Ξ_0 of linear functionals on X will be called fundamental if, given any $x_0 \in X$ and $\varepsilon > 0$, there exists a linear combination $\xi(x)$ of elements of Ξ_0 such that $\|\xi\| \leq 1$ and $|\xi(x)| \geq \|x\| - \varepsilon$. Let $x(t)$ be an abstract function i. e. a function from an interval to the space X ; an element x_0 will be called the *strong derivative* of $x(t)$ at t_0 if

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|[x(t_0 + h) - x(t_0)]h^{-1} - x_0\| = 0;$$

an element x_0 will be called the Ξ_0 -*weak derivative* of $x(t)$ at t_0 if, given any $\xi(x)$, $\lim_{h \rightarrow 0} \xi([x(t_0 + h) - x(t_0)]h^{-1} - x_0) = 0$.

The main theorem obtained by the author is:

If for an abstract function $x(t)$ the Ξ_0 -weak derivative exists at any point of a set E , and is Bochner-measurable on this set, and if

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow +0} \|[x(t+h) - x(t)]h^{-1}\| < +\infty$$

in E , then the strong derivative of $x(t)$ exists a. e. in E .

Applying this theorem to the space of convergent sequences, the author obtains the following theorem concerning differentiation of real functions.

Let $f_n(t)$ be a sequence of real functions differentiable in a set E , for which $f_n(t) \rightarrow F(t)$, $f'_n(t) \rightarrow \Phi(t)$ in E . If the condition

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow +0} (\sup_{n=1,2,\dots} |[f_n(t+h) - f_n(t)]h^{-1}|) < +\infty$$

is satisfied in E , then the functions $f_n(t)$ are equi-differentiable a. e. in E , $F'(t)$ exists and $F'(t) = \Phi(t)$ a. e. in E .

2. JERZY ŁOŚ (Wrocław). *O definiowalności funkcji przez superpozycje.*

Tekst referatu ukaże się w *Fundamenta Mathematicae*, tom 37.

3. JAN MIKUSIŃSKI (Lublin). *O słabej zbieżności.*

4. WŁADYSŁAW ORLICZ (Poznań). *O pewnej klasie ciągów i operacji.*

5. JULIUSZ ULAM (Kraków). *The general mean.*

1. *Construction of the general mean* (mean after function φ). We consider a function of n real variables, $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n)$, which, in a certain n -dimensional cube I_φ , is

1. real,
2. univalent,
3. continuous (with respect to the set of variables),
4. symmetric (with respect to every pair of variables),
- 5a. strictly monotonuous (with respect to every variable).

We define next the function $\Phi(a) \equiv \varphi(a, a, \dots, a)$; it is easy to prove, that the counter-domains of functions φ and Φ coincide, $\{\varphi\} = \{\Phi\}$. We can therefore define the function

$$M_\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) \equiv \Phi^{-1}[\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n)]$$

which is the *general mean* to be discussed.

2. *Axioms of the mean.* It can easily be verified that the function M_φ fulfils 1–4. and besides

5. is increasing (with respect to every variable),
6. its value, for every set of values of the a_i 's, lies between the smallest and the greatest of the numbers of this set (i. e. is a mean).

We can consider the conditions 1–6 as *axioms, defining the notion of the mean.*

$N(a_1, a_2, \dots, a_n)$ being a mean, satisfying to 1–6, another function $\chi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ can always be found, fulfilling 1–5a and such, that

$$M_\chi(a_1, a_2, \dots, a_n) = N(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

i. e. the method of construction of the mean M_φ embraces all means, satisfying to the set of axioms 1—6.

3. *Characteristic function of a mean.* Many problems, connected with a given mean, are related to the functional equation:

$$f[M_\varphi(x_1, x_2)] = M_\varphi[f(x_1), f(x_2)].$$

We denote the continuous solution of this equation (if such exists) by $n_\varphi(x)$ and call it the characteristic function of M_φ . For the arithmetical mean $n_\varphi(x)$ is a linear function.

A function $g(x)$ is said to be φ -convex (resp. φ -concave) in (a, b) if for every $x_1, x_2 \in (a, b)$ the relation is valid

$$g[M_\varphi(x_1, x_2)] < M_\varphi[g(x_1), g(x_2)] \\ (\text{resp. } g[M_\varphi(x_1, x_2)] > M_\varphi[g(x_1), g(x_2)]).$$

4. *Similarity of means.* The problem of existence of $n_\varphi(x)$ for a given mean M_φ is connected with the following definition, due to T. Ważewski:

Two means, M_φ and M_x , are said to be *similar*, if a continuous and strictly monotonous function $\lambda(x)$ exists such that

$$\lambda[M_\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n)] = M_x[\lambda(a_1), \lambda(a_2), \dots, \lambda(a_n)].$$

With this definition it is possible to separate the class of *quasi-arithmetical means*, viz. of means, similar to the arithmetical mean. They are of the form:

$$M_\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) = f^{-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i) \right]$$

which is the form of a generalized mean, discussed by G. H. Hardy, G. Polya, D. E. Littlewood in their book „Inequalities“.

5. *Uniformity of means.* Another definition, of particular importance, is also due to T. Ważewski:

Given a mean M_φ and any set of four numbers a_1, a_2, a_3, a_4 such that

$$a_i = M_\varphi(a_{i-1}, a_{i+1}),$$

the mean M_φ is said to be *uniform*, if

$$M_\varphi(a_1, a_4) = M_\varphi(a_2, a_3).$$

Examples of non-uniform means can easily be given, while all commonly used means are uniform.

6. *Equivalence. Two classes of means.* The exceptional position of quasi-arithmetical means is emphasised by the following fundamental theorem.

The properties of a mean:

A. of possessing a continuous solution of the equation

$$f[M_\varphi(x_1, x_2)] = M_\varphi[f(x_1), f(x_2)]$$

(i. e. of existence of $n_\varphi(x)$),

B. of being a quasi-arithmetical mean,

C. of being uniform,

are equivalent.

The proof of this is given in two steps: first it is proved, that $A \supset B \supset C$, and then, that $C \supset A$.

In virtue of this theorem and of the role, which the properties A and C are playing, it is justified to consider the quasi-arithmetical means as a class of means of a particularly regular character, in discrimination to the class of non-uniform means.

7. *Mean functionals, φ -operation, φ -differentiation.* Further inquiry is concerned with the „passage to infinity“, which when applied to the arithmetical mean, leads to the Riemann integral. An analogous passage, applied to the general mean M_φ , gives us a functional \mathfrak{M}_φ , the properties of which are discussed; these are connected with the operation defined by the function φ . There exists also a possibility to define, by means of φ and M_φ , a functional operation, inverse, in a certain sense, to \mathfrak{M}_φ , which involves differentiation as a particular case (viz. corresponding to the arithmetical mean).

6. ZYGMUNT ZAHORSKI (Łódź). *O mierzalności pochodnych aproksymatywnych skrajnych.*

SEKCJA TOPOLOGII

1. KAROL BORSUK (Warszawa). *O zanurzaniu zbiorów zwartych w striangulowanych wielościanach.*

Tekst odczytu ukazał się w *Fundamenta Mathematicae*, tom 35 (1948), str. 217–234.

2. BRONISŁAW KNASTER (Wrocław). *Un théorème sur les ensembles biconnexes.*

Démonstration de la propriété suivante des ensembles biconnexes B qui contiennent un point p singulier (c'est-à-dire tel que toute composante de $B - (p)$ se réduit à un point): tout B contient un sous-ensemble biconnexé B_0 tel que toute quasi-composante (au sens de Hausdorff) de $B_0 - (p)$ se réduit à un point. Le problème de la généralisation de cette propriété aux ensembles sans point singulier reste ouvert.

Une démonstration détaillée va paraître dans *Fundamenta Mathematicae*.

3. KAZIMIERZ KURATOWSKI (Warszawa). *Z topologii przestrzeni zwartych.*

W związku z pewnym zagadnieniem p. Sikorskiego, autor podaje przykład dwóch zbiorów domkniętych, położonych na płaszczyźnie, z których każdy jest homeomorficzny z podzbiorem względnie otwartym drugiego, a które nie są między sobą homeomorficzne.

4. W. SIERPIŃSKI (Warszawa). *O pewnym ujęciu teorii przestrzeni (V) Fréchet'a.*

Każde ujęcie aksjomatyczne topologii opiera się, jak wiadomo, na pewnych pojęciach pierwotnych. Jako takie brane są albo otoczenie, albo pochodna, albo domknięcie, albo zbiór

zamknięty (względnie otwarty). Najbardziej intuicyjną jest topologia, oparta na pojęciu otoczenia, a najogólniejszą ta, w której co do otoczeń nie czynimy żadnych zgoła założeń, prócz tego, że każdy element uważanej przestrzeni posiada co najmniej jedno otoczenie, będące zbiorem, zawartym w tej przestrzeni. Są to tak zwane *przestrzenie* (V) Fréchet'a.

Dla rozwinięcia topologii danej przestrzeni potrzebne są, prócz aksjomatów, jeszcze definicje zasadniczych pojęć (nie będących pierwotnymi), jak element skupienia zbioru, domknięcie zbioru itp.

Elementem skupienia zbioru Z , zawartego w przestrzeni (V), K , nazywa M. Fréchet każdy element a przestrzeni K taki, że każde jego otoczenie zawiera co najmniej jeden różny od a element zbioru Z . Definicja taka doprowadza do tak mało naturalnych faktów, jak istnienie, w pewnych przestrzeniach (V), zbiorów jednoelementowych, posiadających elementy skupienia. Zmodyfikujmy więc definicję elementów skupienia w ten sposób, że elementem skupienia zbioru Z , zawartego w przestrzeni (V), będziemy nazywali każdy taki element a uważanej przestrzeni, którego każde otoczenie zawiera nieskończenie wiele różnych elementów zbioru Z . Jak później zobaczymy, dla tak zmodyfikowanych przestrzeni (V) można wyprowadzić więcej twierdzeń podstawowych niż dla zwykłych przestrzeni (V) Fréchet'a.

Przez *pochodną* Z' zbioru Z (zawartego w przestrzeni K) rozumieć będziemy, jak zwykle, zbiór wszystkich elementów przestrzeni K , będących elementami skupienia zbioru Z .

Przy naszej definicji elementów skupienia funkcja $f(Z)=Z'$ (przyporządkowująca zbiorom $Z \subset K$ zbiory $f(Z) \subset K$) spełnia, jak łatwo widzieć, następujące trzy warunki:

- 1) $f(0)=0$ (gdzie 0 oznacza zbiór pusty),
- 2) $f(Z_1) \subset f(Z)$, dla $Z_1 \subset Z \subset K$,
- 3) $f(Z + \{p\}) = f(Z)$ dla $p \in K$,

(gdzie $\{p\}$ oznacza zbiór, złożony z jednego tylko elementu p).

Przypuśćmy teraz, że K oznacza dowolny zbiór i że każdemu zbiorowi $Z \subset K$ przyporządkowany jest zbiór $f(Z) \subset K$, przy czym spełnione są warunki 1), 2) i 3). Powiadamy, że dla elementów zbioru K można tak określić otoczenia, żeby zbiór K

stał się przestrzenią (V), w której (przy naszej definicji elementów skupienia) będzie

$$(1) \quad Z' = f(Z) \quad \text{dla} \quad Z \subset K.$$

W samej rzeczy, uważajmy za otoczenie dowolnego punktu p przestrzeni K każdy zbiór $U \subset K$, taki iż $p \in [K - f(K - U)]$.

Przypuśćmy, że p nie jest elementem skupienia zbioru $Z \subset K$, czyli, że $p \notin Z'$. Istnieje więc otoczenie U elementu p , takie, że zbiór ZU jest skończony (lub pusty). Z własności 3) funkcji f wynika z łatwością, że $f(Z - ZU) = f(Z)$, zaś z uwagi że U jest otoczeniem elementu p , mamy $p \in K - f(K - U)$, skąd $p \notin f(K - U)$. Lecz $K - U \supset Z - U = Z - ZU$ i, wobec własności 2) funkcji f , mamy $f(K - U) \supset f(Z - ZU)$, zatem $f(K - U) \supset f(Z)$, skąd, wobec $p \notin f(K - U)$, mamy tym bardziej $p \notin f(Z)$. Dowiedliśmy więc, że z $p \notin Z'$ wynika $p \notin f(Z)$, co dowodzi, że

$$(2) \quad f(Z) \subset Z'.$$

Przypuśćmy teraz, że $p \notin f(Z)$ i połóżmy $U = (K - Z) + \{p\}$: będzie więc $K - U = Z - \{p\}$, skąd, wobec własności 3) funkcji f : $f(K - U) = f(Z - \{p\}) = f(Z)$, zatem $p \notin f(K - U)$. Jest więc $p \in U(K - f(K - U))$, co dowodzi, że zbiór U jest otoczeniem elementu p . Wobec $U = (K - Z) + \{p\}$ zbiór U zawiera co najwyżej jeden element ze zbioru Z ; ponieważ U jest otoczeniem elementu p , więc wynika stąd, że $p \notin Z'$. Dowiedliśmy więc, że z $p \notin f(Z)$ wynika $p \notin Z'$, co dowodzi, że

$$(3) \quad Z' \subset f(Z).$$

Wzory (2) i (3) dają wzór (1), c. b. d. o.

Mówimy, że określoną jest *topologia* danej przestrzeni, jeżeli znane są elementy skupienia każdego zbioru, zawartego w tej przestrzeni, innymi słowy, jeżeli znaną jest funkcja $f(Z) = Z'$ dla Z , zawartych w tej przestrzeni.

Otoczenia wyznaczają oczywiście topologię danej przestrzeni, ale nie na odwrót: różne bowiem układy otoczeń mogą dawać te same pochodne. Takie układy otoczeń nazywamy *topologicznie równoważnymi*. Można z łatwością dowieść, że *na to, żeby dwa układy otoczeń były topologicznie równoważne, potrzeba i wystarcza, żeby dla każdego elementu p uważanej*

przestrzeni oraz każdego jego otoczenia U_1 z pierwszego układu otoczeń istniało otoczenie U_2 tegoż elementu p z drugiego układu otoczeń, takie iż zbiór $U_2 - U_1$ jest skończony (lub pusty), i na odwrót.

Pod względem topologicznym badanie przestrzeni (V) przy naszej definicji elementów skupienia jest, jak widzimy, równoważne badaniu przestrzeni K , w których określoną jest dla ZCK funkcja $Z' = f(Z)CK$, spełniająca warunki 1), 2) i 3).

Przypuśćmy teraz, że K jest przestrzenią (V) Fréchet'a z naszą definicją elementów skupienia. Powiadam, że dla elementów zbioru K można tak określić otoczenia, żeby zbiór K (z tą nową definicją otoczeń) stał się przestrzenią (V) Fréchet'a taką, że przy jego oryginalnej definicji elementów skupienia, pokrywają się one dla każdego zbioru ZCK z elementami skupienia tegoż zbioru wedle naszej definicji. W tym celu, jak łatwo widzieć, wystarczy jako nowe otoczenie każdego elementu $p \in K$ uważać dowolny zbiór, będący jakimkolwiek starym otoczeniem elementu p , pozbawionym dowolnej skończonej liczby elementów. W ten sposób przestrzeń (V) z naszą definicją elementów skupienia można uważać jako szczególny przypadek przestrzeni (V) Fréchet'a z jego oryginalną definicją elementów skupienia. Wszystkie zatem twierdzenia o charakterze topologicznym, słuszne dla wszelkich przestrzeni (V) Fréchet'a z jego oryginalną definicją elementów skupienia będą więc też słuszne dla wszelkich przestrzeni (V) z naszą definicją elementów skupienia.

Jeżeli w takiej przestrzeni określimy *domknięcie* Z zbioru ZCK jako zbiór $Z + Z'$, to funkcja $\varphi(Z) = Z'$ będzie, jak łatwo widzieć, spełniała warunki:

$$1^0. \varphi(0) = 0,$$

$$2^0. \varphi(Z_1) \subset \varphi(Z) \text{ dla } Z_1 \subset ZCK,$$

$$3^0. \varphi(Z + \{p\}) = \varphi(Z) + \{p\}, \text{ dla } p \in K.$$

Z warunku 3^0 wynika, dla $p \in Z$ (co daje $Z = Z + \{p\}$): $p \in \varphi(Z)$, zatem

$$4^0. Z \subset \varphi(Z) \text{ dla } ZCK.$$

Przypuśćmy teraz, że dla ZCK określona jest funkcja $\varphi(Z)CK$, spełniająca warunki 1^0 , 2^0 i 3^0 . Podobnie jak wyżej dla funkcji f , można dowieść, że jeżeli przez otoczenie ele-

mentu $p \in K$ będziemy rozumieli każdy zbiór UCK , taki iż $p \in U[K - \varphi(K - U)]$, to (przy naszej definicji elementów skupienia) będziemy mieli

$$\varphi(Z) = Z + Z' \text{ dla } Z \subset K.$$

Zauważymy, że funkcja $\varphi(Z) = Z + Z'$ określa topologię uważanej przestrzeni. Jeżeli bowiem funkcja $f(Z) = Z'$ spełnia warunki 1), 2) i 3), to można z łatwością dowieść, że

$$(p \in Z') = [p \in (Z - \{p\}) + (Z - \{p\})'],$$

zatem

$$(p \in Z') = [p \in \varphi(Z - \{p\})].$$

Elementy skupienia zbioru Z są to więc elementy p przestrzeni K , które należą do domknięcia zbioru $Z - \{p\}$.

Zbiór ZCK nazywamy *zamkniętym*, jeżeli $Z' \subset Z$. Z wyprowadzonych przez nas własności pochodnej wynika z łatwością, że w przestrzeniach (V) (przy naszej definicji elementów skupienia):

I. *Zbiór pusty jest zamknięty, jako też cała przestrzeń K jest zbiorem zamkniętym.*

II. *Iloczyn dowolnej mnogości zbiorów zamkniętych jest zamknięty.*

III. *Zbiór zamknięty nie przestaje nim być, jeżeli do niego dołączymy jakikolwiek jeden element przestrzeni.*

Zauważmy jednak, że, mimo iż pochodna zbioru nie ulega zmianie po usunięciu z niego jakiegokolwiek jednego elementu, zbiór zamknięty może przestać być zamkniętym po usunięciu z niego jednego elementu.

Niech teraz K oznacza dowolny zbiór, R — rodzinę jego podzbiorów, taką iż:

A) $0 \in R$ oraz $K \in R$.

B) *Iloczyn dowolnej mnogości zbiorów rodziny R należy do R .*

C) *Jeżeli $Z \in R$ oraz $p \in K$, to $Z + \{p\} \in R$.*

Powiadam, że można tak określić otoczenia elementów zbioru K , żeby zbiór ten stał się przestrzenią (V) , w której (przy naszej definicji elementów skupienia) zbiory zamknięte pokrywają się ze zbiorami rodziny R .

W samej rzeczy, uważajmy za otoczenie dowolnego elementu $p \in K$ każdy zbiór $U \subset K$, taki, iż $p \in U$ oraz $K - U \in R$. Zbiór taki istnieje, np. $U = K$. Powiadam, że zbiory rodziny R będą zamknięte. W samej rzeczy, niech będzie $Z \in R$, zaś $a \in Z'$. Gdyby było $a \bar{\in} Z$, zatem $a \in K - Z$, to, w myśl naszej definicji otoczeń w K , zbiór $K - Z$ byłby otoczeniem elementu a , oczywiście nie zawierającym żadnego elementu zbioru Z , wbrew $a \in Z'$. Jest więc $a \in Z$. Dowiedliśmy zatem, że $Z' \subset Z$, czyli że zbiór Z jest zamknięty.

Okażemy teraz, że każdy zbiór zamknięty CK należy do rodziny R . W samej rzeczy, niech Z oznacza zbiór zamknięty CK . Jeżeli $Z = K$, to, w myśl A) mamy $Z \in R$. Jeżeli $Z \neq K$, to istnieje element $a \in K - Z$, a że, wobec zamkniętości zbioru Z , mamy $Z' \subset Z$, więc $a \bar{\in} Z'$ i przeto istnieje otoczenie U elementu a , takie, że zbiór UZ jest skończony (lub pusty). Skoro U jest otoczeniem elementu a , mamy $K - U \in R$ i, w myśl własności C), zbiór $F = (K - U) + (UZ - \{a\})$ należy do rodziny R . Lecz, wobec $a \in K - Z$ mamy, jak łatwo widzieć, $Z \subset F$, zaś $a \bar{\in} F$. Dla każdego elementu a zbioru $K - Z$ istnieje więc zbiór $F \in R$, taki, iż $Z \subset F$ oraz $a \bar{\in} F$. Oznaczmy przez F_0 iloczyn wszystkich zbiorów F , takich iż $Z \subset F$ oraz $F \in R$. Oczywiście będzie $Z = F_0$, zaś, w myśl własności B) będzie $F_0 \in R$. Jest więc $Z \in R$.

Dowiedliśmy więc, że zbiory zamknięte pokrywają się ze zbiorami rodziny R , c. b. d. o.

Z tego cośmy dowiedli wynika natychmiast, że (przy naszej definicji elementów skupienia) zbiory zamknięte posiadają we wszelkich przestrzeniach (V) jedynie te własności, które są konsekwencją własności I), II) i III).

Zauważymy, że rodzina wszystkich zbiorów zamkniętych przestrzeni K nie wyznacza topologii tej przestrzeni.

W samej rzeczy, niech K oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych. Określmy dla $Z \subset K$ pochodną Z' w następujący sposób. Jeżeli zbiór Z jest skończony lub pusty, to $Z' = 0$, jeżeli zaś zbiór Z jest nieskończony, to $Z' = K$. Jak łatwo widzieć, funkcja $f(Z) = Z'$ będzie spełniała warunki 1), 2) i 3), a rodzina R wszystkich zbiorów zamkniętych będzie się składała ze zbiorów skończonych CK oraz ze zbioru K .

Zmieńmy teraz definicję funkcji $f(Z)$ w następujący sposób. Jeżeli zbiór Z jest pusty lub skończony, połączmy $f(Z) = 0$.

Jeżeli zbiór Z jest nieskończony i istnieje liczba naturalna k taka iż w zbiorze Z jest co najwyżej skończona ilość liczb podzielnych przez 2^k , to niech p oznacza najmniejszą z takich liczb k . Jako $f(Z)$ przyjmiemy wówczas zbiór wszystkich liczb postaci $2^{m-1}(2n-1)$, gdzie m jest liczbą naturalną $\leq p+1$, zaś n liczbą naturalną.

Jeżeli wreszcie dla każdej liczby naturalnej k istnieje w zbiorze Z nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 2^k , to położmy $f(Z) = K$.

Jak łatwo sprawdzić, funkcja f będzie spełniała warunki 1), 2) i 3). Gdybyśmy położyli $Z' = f(Z)$ otrzymalibyśmy inną definicję pochodnej niż poprzednio, gdyż np. dla $Z = \{1, 3, 5, \dots\}$ przy pierwszej definicji mamy $Z' = K$, zaś przy drugiej

$$Z' = \{1, 3, 5, \dots\} + \{2, 6, 10, \dots\}$$

zatem, jak łatwo widzieć, $4 \in Z'$.

Jednakże rodzina R wszystkich zbiorów zamkniętych jest, jak łatwo widzieć, w obu przypadkach ta sama.

Domknięcie \bar{Z} zbioru $Z \subset K$ można określić jeszcze inaczej niż przez wzór $\bar{Z} = Z + Z'$. Mianowicie można przez domknięcie \bar{Z} zbioru Z rozumieć najmniejszy zbiór zamknięty zawierający Z . Zbiór taki istnieje, gdyż, w myśl własności I), K jest zbiorem zamkniętym, zawierającym Z , a więc istnieje iloczyn wszystkich zbiorów zamkniętych $\subset K$ i zawierających Z , który, w myśl własności II), jest zbiorem zamkniętym, zatem zbiorem zamkniętym, zawierającym Z i zawartym w każdym zbiorze zamkniętym, zawierającym Z .

Gdy jednak funkcja $\varphi(Z) = Z + Z'$, jak widzieliśmy, określała topologię przestrzeni K , to domknięcie \bar{Z} teraz określone topologii tej na ogół nie określa. W samej rzeczy, przy podanych wyżej dwóch definicjach pochodnych w zbiorze wszystkich liczb naturalnych, dających tę samą rodzinę zbiorów zamkniętych, będziemy, jak łatwo widzieć, mieli dla każdego zbioru jednakowe domknięcie, mianowicie domknięciem zbioru skończonego będzie sam ten zbiór, zaś domknięciem każdego zbioru nieskończonego $\subset K$ będzie zbiór K .

Określone przez nas domknięcie $\bar{Z} = \psi(Z)$ jest, jak łatwo widzieć, funkcją określoną dla $Z \subset K$ i spełniającą warunki:

- a) $\psi(0) = 0$,
 b) $\psi(Z_1) \subset \psi(Z_2) \subset K$ dla $Z_1 \subset Z_2 \subset K$,
 c) $\psi(Z + \{p\}) = \psi(Z) + \{p\}$ dla $p \in K$,
 d) $\psi(\psi(Z)) = \psi(Z)$ dla $Z \subset K$.

Z c) wynika z łatwością, że $Z \subset \psi(Z)$ dla $Z \subset K$.

Przypuśćmy teraz, że dla zbiorów $Z \subset K$ określona jest funkcja ψ , przyporządkowująca zbiorom zbiory i spełniająca warunki a), b), c) i d). Powiadam, że można w zbiorze K tak określić otoczenia jego elementów, żeby (przy naszej definicji elementów skupienia, oraz definicji domknięcia \bar{Z} jako najmniejszego zbioru zamkniętego $\supset Z$) było

$$(4) \quad \bar{Z} = \psi(Z) \quad \text{dla} \quad Z \subset K.$$

W samej rzeczy, uważajmy za otoczenie dowolnego elementu p zbioru K każdy taki i tylko taki zbiór U , że $p \in U$, oraz że przy pewnym $T \subset K$ mamy $U = K - \psi(T)$.

Niech Z oznacza dowolny zbiór $\subset K$: powiadam, że zbiór $\psi(Z)$ jest zamknięty. W samej rzeczy, przypuśćmy, że $a \notin \psi(Z)$. Jest więc $a \in K - \psi(Z)$ i zbiór $U = K - \psi(Z)$ jest otoczeniem elementu a , nie zawierającym żadnego elementu zbioru $\psi(Z)$, skąd $a \in [\psi(Z)]'$. Jeżeli więc $a \notin \psi(Z)$, to $a \in [\psi(Z)]'$, co dowodzi, że $[\psi(Z)]' \subset \psi(Z)$, czyli, że zbiór $\psi(Z)$ jest zamknięty.

Niech teraz F oznacza dowolny zbiór zamknięty $\subset K$. Przypuśćmy, że $F \neq \psi(F)$: wobec $F \subset \psi(F)$ (co, jak wiemy, wynika z c)) istnieje element $a \in \psi(F) - F$ i, wobec zamkniętości zbioru F , mamy $a \notin F'$: istnieje więc otoczenie U elementu a , takie iż zbiór UF jest skończony (lub pusty).

Z naszej definicji otoczeń w przestrzeni K wynika, że istnieje zbiór $Z \subset K$, taki, iż $U = K - \psi(Z)$. Wobec skończoności zbioru UF oraz w myśl c) mamy $\psi(Z + UF) = \psi(Z) + UF$: jest więc

$$\begin{aligned} U - F &= U - UF = [K - \psi(Z)] - UF = K - [\psi(Z) + UF] = \\ &= K - \psi(Z + UF), \end{aligned}$$

skąd $K - F \supset U - F = K - \psi(Z + UF)$, co daje $F \subset \psi(Z + UF)$, skąd, wobec b) i d): $\psi(F) \subset \psi\psi(Z + UF) = \psi(Z + UF)$, co, wobec $a \in \psi(F) - F \subset \psi(F)$, daje $a \in \psi(Z + UF) = \psi(Z) + UF$. Ponieważ

$$a \in U = K - \psi(Z),$$

więc $a \in UF$, wbrew temu, że $a \in \psi(F) - F$. Nie może więc być $F \neq \psi(F)$, czyli mamy $F = \psi(F)$.

Dowiedliśmy więc, że na to, żeby zbiór $F \subset K$ był zamknięty, potrzeba i wystarcza, żeby było $F = \psi(F)$.

Niech teraz Z oznacza dowolny zbiór $\subset K$, zaś F jakikolwiek zbiór zamknięty $\subset K$, taki iż $Z \subset F$. Mamy więc $F = \psi(F)$, oraz, wobec $Z \subset F$ i w myśl b): $\psi(Z) \subset \psi(F)$, czyli $\psi(Z) \subset F$. Lecz $\psi(Z)$ jest, jak wiemy, zbiorem zamkniętym $\subset Z$: jest to więc najmniejszy zbiór zamknięty $\subset Z$, c. b. d. o. Wzór (4) został więc udowodniony.

Z tego cośmy dowiedli wynika natychmiast, że w przestrzeniach (V) (z naszą definicją elementów skupienia) domknięcie $\psi(Z)$ zbioru Z , określone jako najmniejszy zbiór zamknięty, zawierający zbiór Z , nie posiada żadnych innych własności (zachodzących w każdej przestrzeni (V)), prócz tych, które są konsekwencjami własności a), b), c) i d).

Nazwijmy zbiorem *zwartym* każdy zbiór $Z \subset K$, którego każda część nieskończona (o ile istnieje) ma pochodną nie pustą.

Udowodnimy dla przestrzeni (V) (z naszą definicją elementów skupienia) następujące

Twierdzenie G. Cantora. *Jeżeli Z_1, Z_2, \dots jest ciągiem nieskończonym zbiorów zamkniętych, nie pustych $\subset K$, z których jeden co najmniej jest zwarty, oraz jeżeli $Z_1 \supset Z_2 \supset \dots$, to $Z_1 Z_2 Z_3 \dots \neq 0$.*

Dowód. Jeżeli zbiory $Z_n (n=1, 2, \dots)$ są nie puste, to dla każdej liczby naturalnej n istnieje element $p_n \in Z_n$. Połóżmy $P = \{p_1, p_2, \dots\}$ oraz $P_n = \{p_n, p_{n+1}, \dots\}$ dla $n=1, 2, \dots$, i rozróżnimy dwa przypadki.

1) Zbiór P jest skończony. Wówczas jeden co najmniej z wyrazów ciągu nieskończonego p_1, p_2, \dots , np. p_m , musi się w nim powtarzać nieskończenie wiele razy. Mamy więc, dla nieskończenie wielu różnych wskaźników k , $p_k = p_m$, zatem $p_m \in Z_k$, skąd, z uwagi, że $Z_1 \supset Z_2 \supset \dots$, wynika natychmiast, że $p_m \in Z_k$ dla każdego wskaźnika k , zatem $p_m \in Z_1 Z_2 Z_3 \dots$, skąd $Z_1 Z_2 Z_3 \dots \neq 0$.

2) Zbiór P jest nieskończony. Wśród zbiorów Z_1, Z_2, \dots , jak zakładamy, jeden co najmniej, np. zbiór Z_s , jest zwarty. Jeżeli

zbiór P jest nieskończony, to i zbiór P_s jest nieskończony (gdyż $P = \{p_1, p_2, \dots, p_{s-1}\} + P_s$) i, jako część nieskończona zbioru zwartego Z_s , ma pochodną nie pustą. Jest więc $P'_s \neq 0$. Niech n oznacza dowolną liczbę naturalną: zbiory P_n i P_s różnią się co najwyżej o skończoną liczbę elementów: wobec własności 3) pochodnej mamy więc $P'_n = P'_s$. Lecz, wobec zamkniętości zbioru Z_n , jest $Z'_n \subset Z_n$, zaś, wobec $P_n \subset Z_n$, znajdujemy (w myśl własności 2) pochodnej) $P'_n \subset Z'_n$. Jest więc $P'_s \subset Z'_n$ dla $n=1, 2, \dots$, skąd $P'_s \subset Z_1 Z_2 Z_3 \dots$ i, wobec $P'_s \neq 0$: $Z_1 Z_2 Z_3 \dots \neq 0$.

Twierdzenie Cantora zostało więc udowodnione.

Nazwijmy *otwartym*, każdy zbiór CK , którego dopełnienie do K jest zbiorem zamkniętym. Z twierdzenia Cantora wynika z łatwością, jak wiadomo, następujące

Twierdzenie Borela. *Jeżeli Z jest zbiorem zamkniętym i zwartym, zaś Q_1, Q_2, \dots jest ciągiem nieskończonym zbiorów otwartych, takim, iż*

$$Z \subset Q_1 + Q_2 + \dots,$$

to istnieje liczba naturalna n , taka iż

$$Z \subset Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n.$$

Dla przestrzeni (V) Fréchet'a z jego oryginalną definicją elementów skupienia, twierdzenia Cantora i Borela w podanym przez nas brzmieniu nie zawsze byłyby prawdziwe.

W rozdziale I nowego wydania mej *Topologii ogólnej*, które, w tłumaczeniu angielskim, dokonany przez prof. dra Cyeclię Krieger ukaże się niebawem nakładem Uniwersytetu w Toronto, wyprowadziłem szereg twierdzeń o charakterze topologicznym dla przestrzeni (V) Fréchet'a z jego oryginalną definicją elementów skupienia. Twierdzenia te będą, jak wiemy, tym bardziej słuszne dla przestrzeni (V) z naszą definicją elementów skupienia. Dla takich przestrzeni można więc rozwinąć znaczną część topologii.

5. JULIUSZ ULAM (Kraków). *On morphology of sets.*

1. The name *morphology of sets* is given to investigations, concerned with some of those properties of sets, which, though obviously related to our intuitive idea of *shape*, have found up till now no formulation in the mathematical language. Topological inquiry, based on homeomorphy, fails to grasp

many features of no secondary importance for the description of a set and the need exists of introducing another transformation, more restrictive and with a greater number of invariants. No doubt, this purpose can be attained on various ways, every one of them corresponding to another aspect of the problem of shape. One of these possible ways is considered below.

2. We consider an arbitrary set W in a metrical space R . Given a point $x \in W$ we define the function

$$d(x) = \text{dist}(x, \text{Fr}(W)).$$

Next, r being a real number, we denote by W_r the set of all points $x \in W$, for which $d(x) \geq r$. Taking for a simple example a connex bounded domain on the plane, we observe, that the sets W_r provide us with a kind of „hipsographical map“ of the set W , wherein lies their importance.

A point $p \in W$ is said to be a *central point* of W , if $d(x)$ has a local maximum in it; then $d(p)$ is called a *critical radius* of W , while the set $C(W)$ of all central points of W is referred to as the *centre* of W .

3. Basing on these few notions, it is possible to undertake a preliminary analysis of „shape“ of a set. In the course of this analysis it appears, that the best criterion for the morphological similarity of two sets is the coincidence of their „hipsographical maps“. To precise this, we introduce the *transformation of equiformy*:

Two sets W and V are said to be equiform (W uf V), if a continuous and increasing function $f(r) = r'$ exists such, that $f(0) = 0$ and that

$$W_r \text{ hf } V_{r'}$$

for all r .

It is immediately seen, that equiformy is by far more restrictive than homeomorphy; it can be proved, that W uf V implies \overline{W} hf \overline{V} , $C(W)$ hf $C(V)$ etc. Equiform sets exhibit an outstanding resemblance in many respects; therefore equiformy seems to furnish us with a good basis for a morphological systematics of sets, which is the object of a further study.

6. KAZIMIERZ ZARANKIEWICZ (Warszawa). O punktach nierozspajających.

SEKCJA ALGEBRY I TEORII LICZB

1. STANISŁAW HARTMAN (Wrocław). *Uwagi o twierdzeniu Ostrowskiego z teorii ekwipartycji liczb mod 1.*

Praca ogłoszona została w *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, tom XXII (1949), str. 169—172.

SEKCJA MATEMATYKI STOSOWANEJ

1. JULIUSZ PERKAL (Wrocław). *O pewnych zagadnieniach dendrometrii.*

Prof. Steinhaus pokazał w jednej ze swych prac¹⁾, że jeśli się chce wyznaczyć objętość stożka ściętego przy pomocy długości h i średnicy $d^{(1/2)}$ mierzonej w środku długości stożka, to należałoby używać nie ogólnie stosowanego w dendrometrii wzoru Kästnera-Hubera

$$(\mathcal{K}) \quad V_k = \frac{\pi}{4} d^{2(1/2)} h,$$

ale raczej wzoru

$$(\mathcal{S}) \quad V_s = 0.8 d^{2(1/2)} h.$$

Praktyka potwierdziła słuszność tych przewidywań. Traktowanie jednak objętości dłużycy (tj. pnia drzewnego) jako objętości stożka ściętego daje w niektórych przypadkach poważne błędy. Jeśli dłużycę przeciąć na dwie części, to suma objętości tych części, mierzonych jako stożki ścięte, jest często widocznie różna od objętości całej dłużycy mierzonej tą samą metodą. Stanowi to pole do nadużyć.

Autor zauważa, że tworząca dłużycy nie jest linią prostą, lecz krzywą bardzo rozmaitych kształtów, i dlatego zagadnienie wzoru na objętość dłużycy przestaje być zagadnieniem geometrycznym, a zaczyna być zagadnieniem statystycznym.

W praktyce leśnej najwygodniejsze są metody pomiaru jednośrednicowe, tzn. metody wyznaczania objętości dłużycy z pomiaru długości h i średnicy $d(a)$ mierzonej w odległości ah od odziomka. Rozważa się dwuparametrową rodzinę takich

¹⁾ H. Steinhaus, *Sur la cubature des troncs de bois*, Coll. Math. I, 1, p. 23.

metod, zależną od parametrów $0 < \alpha < 1$ i $k > 0$, z których pierwszy określa wysokość w której mierzy się średnicę, a drugi stałą we wzorze na objętość:

$$(1) \quad V = k d^2(\alpha) h.$$

Znana jest znaczna ilość metod tego typu²⁾. Parametr α przybiera w nich znaczenia $1/2, 1, 0, 1/3, 0.34, 0.36$. Chodzi o znalezienie najlepszej metody jednośrednicowej.

Autor rozważa zbiór złożony z n dłużyce (np. zbiór reprezentacyjny określonego zbioru generalnego). V_i oznacza prawdziwą objętość i -tej dłużyce ($i=1, 2, \dots, n$). Wyznaczając błąd popełniony przy obliczaniu i -tej dłużyce przez

$$\Delta_i(\alpha, k) = V_i - k d_i^2(\alpha) h_i$$

można by wyznaczyć α i k z warunku minimizacji maksymalnego błędu $\Delta_i(\alpha, k)$ lub sumy kwadratów błędów $\sum_{i=1}^n \Delta_i^2(\alpha, k)$.

Zadanie to prowadzi do długich i nieprzyjemnych rachunków.

Autor rozważa ciąg funkcji zmiennej α

$$(2) \quad k_i(\alpha) = V_i / d_i^2(\alpha) \cdot h_i.$$

Każdą z tych funkcji mnoży się przez $n / \sum_{i=1}^n k_j(\alpha)$ i otrzymuje się w ten sposób ciąg funkcji

$$(3) \quad l_i(\alpha) = n \cdot k_i(\alpha) / \sum_{i=1}^n k_j(\alpha).$$

Gdyby wszystkie wykresy funkcji $l_i(\alpha)$ przecinały się w jednym punkcie np. dla $\alpha = \alpha_0$ to byłoby

$$k_1(\alpha) = k_2(\alpha) = \dots = k_n(\alpha) = k,$$

co wobec (2) da $V_i = k d_i^2(\alpha) h_i$ czyli jedną z metod rodziny (1) dającą dokładną objętość każdej z dłużyce rozważanego zbioru. Zagadnienie minimizacji maksymalnego błędu $\Delta_i(\alpha, k)$ jest równoznaczne ze znalezieniem takiego α_1 , aby $l_{\max}(\alpha_1) - l_{\min}(\alpha_1)$ osiągało minimum ($l_{\max}(\alpha_1) = \max_i l_i(\alpha_1)$; $l_{\min}(\alpha_1) = \min_i l_i(\alpha_1)$).

²⁾ Por. Tischendorf, *Lehrbuch der Holzmassenermittlung*, Berlin 1927, str. 68.

Parametr k_1 wyznaczamy z tegoż warunku minimizacji maksymalnego błędu

$$k_1 = \frac{2k_{\max}(a_1) k_{\min}(a_1)}{k_{\max}(a_1) + k_{\min}(a_1)},$$

gdzie $k_{\max}(a_1)$ i $k_{\min}(a_1)$ oznaczają maksymalną i minimalną wartość liczb ciągu $k_i(a_1)$. Zagadnienie minimizacji sumy kwadratów błędów jest równoznaczne ze znalezieniem takiego a_2 , by dyspersja ciągu $l_i(a_2)$ osiągnęła minimum. Stała k_2 wyznaczona z tego warunku

$$k_2 = \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2(a_2) V_i h_i}{\sum_{i=1}^n d_i^4(a_2) h_i^2} \sim \frac{\sum_{i=1}^n V_i}{\sum_{i=1}^n d_i^2(a_2) h_i}$$

w praktyce posiada i tę własność, że $\sum_{i=1}^n \Delta l_i(a_2, k_2) = 0$. Szczególne znaczenie w praktyce leśnej może posiadać rozwiązanie tego ostatniego zagadnienia (minimizacja dyspersji). Znalezienie parametrów a_2 i k_2 da najlepszą jednośrednicową metodę pomiaru i wzór na objętość. Zaznaczyć należy, że sposób ten nie będzie trudniejszy ani dla mierzącego, ani dla liczącego, lub korzystającego z tablic, niż sposób Kästnera-Hubera.

W celu ustalenia ostatecznego a i k dla danego zbioru generalnego np. dla wszystkich sosen w Polsce należałoby pomierzyć dostatecznie reprezentatywny zbiór dłużyce. Wobec braku tego rodzaju danych, autor zmuszony był sam dokonać pewnej ilości pomiarów. Zebrany materiał pozwala przypuszczać, że średnicę należy mierzyć daleko poniżej środka. Dla dłużyce mierzonych przez autora otrzymano optimum dla $a = 0.15-0.16$. Należy przypuszczać, że jest to przypadek wynikły stąd, że pomierzony zbiór był nieliczny. Łącząc obecne wyniki z poprzednimi, dotyczącymi dłużyce teoretycznych (stożek, paraboloida, neiloida) otrzymuje się $a = 0.3$ i $k = 0.71$. Wyniki pomiarów metodami Kästnera-Hubera, prof. Steinhausa i powyższymi dwiema są podane w następującej tabeli:

Sosna	Sekcyj- na	Kästner	Stein- haus	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.155$	
		$\alpha = 0.5$ $k = \frac{\pi}{4}$	$\alpha = 0.5$ $k = 0.8$	$k = 0.71$	$k = 0.621$	
	$\sum V_i$	9.11	8.96	9.12	9.10	
	$\sum \Delta_i$	—	-15	+1	-1	
	$\sum \Delta_i $	—	33	29	15	
	$\sum \Delta_i^2$	—	173	175	37	
Świerk	j. w.	j. w.	j. w.	j. w.	$k = 0.598$	
	$\sum V_i$	6.63	6.27	6.39	6.67	6.63
	$\sum \Delta_i$	—	-36	-24	+4	0
	$\sum \Delta_i $	—	46	38	32	28
	$\sum \Delta_i^2$	—	448	318	236	196

Można by zapytać o metodę pomiaru dłużyc w praktyce nie trudniejszą, a jednocześnie najlepszą spośród daleko szerszej klasy metod jednośrednicowych. Należałoby wzór (1) zastąpić wzorem

$$(1^*) \quad V = f(d(a), h),$$

gdzie f jest dowolną funkcją dwóch zmiennych.

Znalezienie „najlepszej“ metody typu (1*) polegałoby na wyznaczeniu optymalnych a i f dla danego zbioru dłużyc³⁾.

2. HUGO STEINHAUS (Wrocław). *O zagadnieniach kontroli produkcji masowej za pomocą próbek.*

Referent ogranicza się do przypadku alternatywy: sztuka towaru może być tylko dobra lub wadliwa. Chodzi o przyjęcie lub odrzucenie partii towaru na podstawie badania próbki

³⁾ W chwili obecnej (listopad 1948 r.) zagadnienie to jest teoretycznie w pełni rozwiązane.

z n sztuk. Gdy przyjmie się równomierny rozkład jakości jako rozkład a priori, tj. jako rozkład w universum towarów, to za pomocą wzoru Bayesa można z liczby m wadliwych sztuk w próbie obliczyć prawdopodobieństwo, że jakość towaru przekracza a (a = stosunek liczby dobrych sztuk do liczby wszystkich w partii). Pod wpływem krytyki R. A. Fishera zarzucono, zwłaszcza w Anglii i w Ameryce, ten sposób (nazwijmy go *retrospektywnym*) uważając hipotezę równomiernego rozkładu (i jakąkolwiek inną) za niesprawdzalną. Nowy sposób (nazwijmy go *prospektywnym*) polega na określeniu prawdopodobieństwa błędów przy stosowaniu planu kontroli. Plan kontroli $m//n$ jest określony przez licznosc próbki n i przez największą liczbę m wadliwych sztuk, przy której jeszcze następuje przyjęcie. Gdy oznaczymy przez α_1 tzw. dolny poziom jakości, przez α_2 górny poziom jakości, to będziemy uważali za błąd zarówno przyjęcie towaru o jakości dolnej, jak i odrzucenie towaru o jakości górnej. Postulat, żeby każdy z tych błędów miał prawdopodobieństwo 5⁰/₀ wyznacza już plan $m//n$.

Postępując według starego sposobu można zażądać, by wynik m sztuk wadliwych na n w próbie dawał prawdopodobieństwo 5⁰/₀, że jakość jest niższa od α_1 , zaś wynik $m+1$ wadliwych także prawdopodobieństwo, że jakość przewyższa α_2 . Jeden i drugi sposób prowadzi do podobnego postępowania, jednak towarzyszą temu postępowaniu inne opisy i określenia. P. inż. J. Oderfeld z Polskiego Komitetu Normalizacyjnego, zauważył, że tłumaczenie metody retrospektywnej na język frekwencji w myśl prawa wielkich liczb, podaje częstość błędów popełnianych na granicach m , $m+1$ planu $m//n$, przy hipotezie, że dostawcy równie często dostarczają wszelkich jakości; tłumaczenie metody prospektywnej podaje częstość błędów przy hipotezie, że dostawcy dostarczają towaru tylko o granicznych jakościach α_1 , α_2 . Wobec tego realne warunki nigdy nie pozwolą sprawdzić ani jednego ani drugiego sposobu. Nie poprzestając na tej uwadze p. Oderfeld pokazał, że reszta wzoru Moivre'a napisana jako Cauchy'ego reszta wzoru Taylora daje prawdopodobieństwo szukane w metodzie retrospektywnej, zaś przed tym przekształceniem prawdopodobieństwo szukane w metodzie prospektywnej, przy obniżeniu

Bib. Jag.

(lub podwyższeniu) o jednostkę liczb m, n ¹⁾. Stąd taki wynik: Jeżeli plan $m//n$ spełnia warunek ryzyka 50% co do dolnej jakości α_1 w metodzie prospektywnej, to plan $m//n-1$ spełnia analogiczny warunek w metodzie retrospektywnej i na odwrót. Można taksamo udowodnić, że odpowiednikiem planu $m//n$ co do α_2 w metodzie pierwszej jest $m-1//n-1$ w drugiej. Dla poparcia nowej metody używa się jako argumentu oszczędności w długości badania. Mianowicie A. Waldowi z Columbia University udało się podczas wojny pogodzić zasadę prospektywności z sekwencjonalnością, tzn. określić plany nie mające stałej długości badania n , lecz pozwalające przerywać badanie wcześniej, gdy wynik odpowiada pewnemu kryterium. Jednak w starej metodzie sekwencjonalność uzyskuje się w sposób natychmiastowy, gdy po zbadaniu każdej sztuki stawia się pytanie o wynikające prawdopodobieństwo. Tym samym otrzymuje się dowód na optymalność metody, którego dotychczas w teorii Walda brak. Referent uważa mniemanie, jakoby metoda retrospektywna była zasadniczo wadliwa za uprzedzenie; mamy tu tylko kwestię przyzwyczajenia do wyrażania pewnych ocen jakościowych w pewnych terminach ilościowych, tak jak sprawą przyzwyczajenia jest używanie skali Réaumura lub Celsiusa.

¹⁾ Rezultat p. Oderfelda będzie ogłoszony in extenso w Colloquium Mathematicum.

SEKCJA PODSTAW MATEMATYKI

1. HENRYK GRENIEWSKI (Warszawa). *Functors of the Propositional Calculus.*

1.

In this paper by the brief expression „propositional calculus“ is meant a two-valued propositional calculus, involving at least implication and negation, built axiomatically, and possessing among its primitive terms neither 0 (falsum) nor 1 (verum) nor any quantifier. By „language of propositional calculus“ is thus meant a language possessing variables of only one logical type, namely propositional variables.

The purpose of the present paper is to prove that the following notions can be formulated in the language of propositional calculus: 1) matrices (zero — one tables) of propositional functions with propositional arguments; 2) duality; 3) the notions which can be formulated in the language of Leśniewski's „protothetics“, and for which the language of propositional calculus is usually believed to be insufficient.

Attainment of a given aim with means simpler than those generally used is, as a rule, interesting; in particular, formulation of a given notion in a certain language, if heretofore that notion had to be formulated in a meta-language, or formulation of a given notion in a language possessing variables of only one logical type, if heretofore it had to be formulated in a language containing variables of at least two logical types, appears to be some kind of progress. It seems, therefore, interesting: 1) to build matrices (zero — one tables) in the language of propositional calculus, and not, as is generally done, in a meta-language; 2) to define duality in the language of propositional calculus, and not in a meta-language or the language of „protothetics“ which contains variables of an

infinite number of logical types; 3) to formulate the method (in the present paper given only by way of example) of replacing the functional variables of the „protothetics“ by an appropriate number of propositional variables. The last achievement may prove to be a blow for the „protothetics“, since if the theorems of the „protothetics“ can be expressed in so simple a language as is the language of propositional calculus then the complicated language of Leśniewski's system can just be dispensed with.

In the present paper propositional variables are letters: $pp_1 p_2 \dots qq_1 q_2 \dots r_1 r_2 \dots ss_1 s_2 \dots$. The symbols for negation, sum (alternation), product (conjunction), implication, and equivalence are, respectively: $' + \cdot \rightarrow \leftrightarrow$.

In order to reduce the number of parentheses in the formulae we introduce the following rule:

the parenthetized formulae are replaced by

$$\begin{array}{ll} (p_1 + \dots + p_n) \leftrightarrow q & p_1 + \dots + p_n \leftrightarrow q \\ p \leftrightarrow (q_1 + \dots + q_n) & p \leftrightarrow q_1 + \dots + q_n \\ (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n) \rightarrow q & p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \rightarrow q \\ (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n) \leftrightarrow q & p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \leftrightarrow q \\ p \leftrightarrow (q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n) & p \leftrightarrow q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n \end{array}$$

The following definitions are introduced:

$$\begin{array}{ll} (1.11) \quad p | q =_{Df} p \rightarrow q' & (1.12) \quad p \leftarrow q =_{Df} q \rightarrow p \\ (1.13) \quad p \dashv q =_{Df} (p \rightarrow p) \rightarrow q & (1.14) \quad p \vdash q =_{Df} q \dashv p \\ (1.15) \quad p - q =_{Df} (p \rightarrow q)' & (1.16) \quad p \dot{-} q =_{Df} p \leftrightarrow q' \end{array}$$

The following is a thesis belonging to the propositional calculus:

$$(1.21) \quad (p \dot{-} q) \leftrightarrow [(p - q) + (q - p)].$$

The expression $p \dashv q$ is read „ q is independent of p “; the expression $p \dot{-} q$ is called symmetric difference and is read „either p or q “ (in Latin: p aut q).

2.

Every table which determines a propositional function containing n propositional variables derives from the schema

(2.11)

$p_1 \dots p_n$	
0 ... 0	q_1
1 ... 0	q_2
.....	...
1 ... 1	q_{2^n}

through substitution of either 0 or 1 for each of the 2^n propositional variables: $q_1 \dots q_{2^n}$. If the order, in which the sequences, each consisting of 0's and/or 1's, are inscribed in the left column of the table, be fixed „once for all“, then the left column of the table can be dispensed with, and the bi-dimensional schema (2.11) can be replaced by a uni-dimensional expression, e. g.:

(2.12) $p_1 \dots p_n \in q_1 \dots q_{2^n}$

which will be called ϵ -function.

The order of the sequences, each consisting of 0's and/or 1's, in the left column of the schema (2.11), to be fixed „once for all“, can conveniently be determined as follows: 1) each of the independent variables $p_1 \dots p_n$ assumes first (counting from the top of the table downwards) the value 0; 2) the first variable (counting from left to right), i. e., p_1 , changes its value (i. e., 0 into 1, and then vice versa) in every line of the schema, the second variable, i. e., p_2 , changes its value every two lines, in general, the k -th independent variable (where $1 \leq k \leq n$) changes its value every 2^{k-1} lines.

Applying the schema (2.12) and the above specified rules of order of substituting 0's and 1's for independent variables it is possible, for instance, in characterizing implication and equivalence, to use in place of matrices

$p_1 p_2$		$p_1 p_2$	
0 0	1	0 0	1
1 0	0	1 0	0
0 1	1	0 1	0
1 1	1	1 1	1

the ϵ -functions

$$p_1 p_2 \in 1011 \quad p_1 p_2 \in 1001.$$

Should it be possible to define in the language of propositional calculus

- 1) the terms 0 and 1,
- 2) for every $n \geq 1$, the propositional function which contains $(n+2^n)$ variables

$$p_1 \dots p_n \in q_1 \dots q_{2^n}$$

and which after the zero-one substitutions for the variables

$$q_1 \dots q_{2^n}$$

gives results equivalent to the functions containing n variables,

then it would be possible to assert that every matrix (zero-one table) belongs to the language of propositional calculus.

The following definitions (of the empty function and the full function) are introduced:

$$(2.21) \quad 0p =_{\text{Df}} (p \rightarrow p)' \qquad (2.22) \quad 1p =_{\text{Df}} p \rightarrow p.$$

The two following equivalences can easily be proved:

$$(2.23) \quad (0p) \leftrightarrow (0q) \qquad (2.24) \quad (1p) \leftrightarrow (1q)$$

so that it is possible to write briefly „0“ instead of „0p“, and „1“ instead of „1p“. In this way the problem of introducing the 0 (falsum) and the 1 (verum) into the language of propositional calculus has been solved. The following definitions will also be useful:

$$(2.31) \quad p \dot{0} q =_{\text{Df}} (0p) + (0q) \qquad (2.32) \quad p \dot{1} q =_{\text{Df}} (1p) \cdot (1q).$$

The language of propositional calculus being thus enriched with the terms 0 and 1, no difficulties are encountered in introducing the quantifiers, namely by means of the following rule for abbreviation of expressions:

1) An expression A containing at least n propositional variables

$$p_1 \cdots p_n$$

is considered.

2) In the expression A the 0's and 1's are substituted for all the variables specified under 1), in all possible ways (thus giving 2^n substitutions of the expression A).

3) The sum (or product) of all expressions obtained in conformity with 2) is written down.

4) The sum (or product) obtained in conformity with 3) is just replaced by the operator

$$\sum_{p_1 \cdots p_n} \text{ (or } \prod_{p_1 \cdots p_n} \text{)}$$

followed by the parenthesized expression A .

In conformity with this rule the expression

$$\sum_p (p \rightarrow p)$$

is an abbreviation of

$$(0 \rightarrow 0) + (1 \rightarrow 1)$$

and the expression

$$\prod_{p_1 p_2} (p_1 \leftrightarrow p_2)$$

is an abbreviation of

$$(0 \leftrightarrow 0) \cdot (1 \leftrightarrow 0) \cdot (0 \leftrightarrow 1) \cdot (1 \leftrightarrow 1).$$

3.

Introduced are: the definition

$$(3.11) \quad p \in q_1 q_2 =_{\text{Df}} (p' \rightarrow q_1) \cdot (p \rightarrow q_2)$$

and the definition schema

$$(3.12) \quad \begin{aligned} & p_1 \cdots p_{n+1} \in q_1 \cdots q_{2^{n+1}} =_{\text{Df}} \\ & =_{\text{Df}} p_{n+1} \in (p_1 \cdots p_n \in q_1 \cdots q_{2^n}) (p_1 \cdots p_n \in q_{2^n+1} \cdots q_{2^{n+1}}). \end{aligned}$$

It must be emphasized that (3.12) is not a definition but a schema which jointly with the definition (3.11) forms a recursive rule of construction of an infinite number of definitions. In conformity with this rule the definition

$$(3.13) \quad p_1 p_2 \in q_1 q_2 q_3 q_4 =_{\text{Df}} p_2 \in (p_1 \in q_1 q_2) (p_1 \in q_3 q_4)$$

is introduced.

In the ϵ -function

$$p_1 \dots p_n \in q_1 \dots q_{2^n}$$

each of the variables

$$p_1 \dots p_n$$

is called an argument, and the sequence consisting of 2^n propositional variables $q_1 \dots q_{2^n}$ is called a variable functor.

The following theses belonging to the propositional calculus can easily be proved:

$$(3.21) \quad (p_1 p_2 \in q_1 q_2 q_3 q_4) \leftrightarrow p'_1 \cdot p'_2 \cdot q_1 + p_1 \cdot p'_2 \cdot q_2 + p'_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot q_4$$

$$(3.22) \quad (p'_1 p'_2 \in q_1 q_2 q_3 q_4) \leftrightarrow (p_1 p_2 \in q_4 q_3 q_2 q_1)$$

$$(3.23) \quad (p_1 p_2 \in q_1 q_2 q_3 q_4)' \leftrightarrow (p_1 p_2 \in q'_1 q'_2 q'_3 q'_4)$$

$$(3.24) \quad (p_2 p_1 \in q_1 q_2 q_3 q_4) \leftrightarrow (p_1 p_2 \in q_1 q_3 q_2 q_4).$$

The following schema

$$(3.31) \quad [(p_1 p_2 \in q_1 q_2 q_3 q_4) \circ (p_1 p_2 \in r_1 r_2 r_3 r_4)] \leftrightarrow \\ \leftrightarrow [p_1 p_2 \in (q_1 \circ r_1) (q_2 \circ r_2) (q_3 \circ r_3) (q_4 \circ r_4)]$$

goes over in theses belonging to the propositional calculus if we replace in it „the circle“ by one of the six symbols:

$$+ \cdot \rightarrow \leftrightarrow - \dot{\cdot} \cdot$$

Certain theses containing ϵ -functions with one argument and ϵ -functions with two arguments will be mentioned below.

$$(3.41) \quad (p_1 \in q_1 q_2) \leftrightarrow (p_1 p_2 \in q_1 q_2 q_1 q_2)$$

$$(3.42) \quad (p_2 \in q_1 q_2) \leftrightarrow (p_1 p_2 \in q_1 q_1 q_2 q_2)$$

$$(3.43) \quad [(p_1 + p_2) \in q_1 q_2] \leftrightarrow (p_1 p_2 \in q_1 q_2 q_2 q_2).$$

The following schema

$$(3.51) \quad [(p_1 \in q_1 q_2) \circ (p_2 \in r_1 r_2)] \leftrightarrow \\ \leftrightarrow [p_1 p_2 \in (q_1 \circ r_1) (q_2 \circ r_1) (q_1 \circ r_2) (q_2 \circ r_2)]$$

(where „the circle“ is to be replaced by one of the six symbols: $+ \cdot \rightarrow \leftrightarrow - \dot{-}$) contains six theses belonging to the propositional calculus. The second of theses is the formulæ of the Cartesian product in the propositional calculus.

If another schema

$$(3.52) \quad \begin{aligned} & [(p_1 \in q_1 q_2) \circ (p_2 \in q_1 q_2)] \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow [p_1 p_2 \in q_1 (q_1 \circ q_2) (q_1 \circ q_2) q_2] \end{aligned}$$

is considered, then by replacing in it „the circle“ by one of the two symbols: $+ \cdot$ two theses belonging to the propositional calculus are obtained.

The matrices of the 16 propositional functions containing two propositional variables, formulated in the language of propositional calculus, are contained in the 16 following theses:

$$\begin{aligned} (p \dot{0} q) & \leftrightarrow (pq \in 0000); & (p \dot{1} q) & \leftrightarrow (pq \in 1111) \\ (p' \cdot q') & \leftrightarrow (pq \in 1000); & (p + q) & \leftrightarrow (pq \in 0111) \\ (p - q) & \leftrightarrow (pq \in 0100); & (p \rightarrow q) & \leftrightarrow (pq \in 1011) \\ (p \dot{-} q') & \leftrightarrow (pq \in 1100); & (p \dot{-} q) & \leftrightarrow (pq \in 0011) \\ (p' \cdot q) & \leftrightarrow (pq \in 0010); & (p \leftarrow q) & \leftrightarrow (pq \in 1101) \\ (p' \dot{-} q) & \leftrightarrow (pq \in 1010); & (p \dot{-} q) & \leftrightarrow (pq \in 0101) \\ (p \dot{-} q) & \leftrightarrow (pq \in 0110); & (p \leftrightarrow q) & \leftrightarrow (pq \in 1001) \\ (p | q) & \leftrightarrow (pq \in 1110); & (p \cdot q) & \leftrightarrow (pq \in 0001). \end{aligned}$$

4.

The following definition schemata are introduced:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} & q_1 \dots q_{2^n} \subseteq r_1 \dots r_{2^n} =_{\text{Df}} \dots \\ & =_{\text{Df}} \prod_{p_1 \dots p_n} [(p_1 \dots p_n \in q_1 \dots q_{2^n}) \rightarrow (p_1 \dots p_n \in r_1 \dots r_{2^n})] \end{aligned}$$

$$(4.12) \quad \begin{aligned} & q_1 \dots q_{2^n} = r_1 \dots r_{2^n} =_{\text{Df}} \dots \\ & =_{\text{Df}} \prod_{p_1 \dots p_n} [(p_1 \dots p_n \in q_1 \dots q_{2^n}) \leftrightarrow (p_1 \dots p_n \in r_1 \dots r_{2^n})] \end{aligned}$$

$$(4.13) \quad \begin{aligned} & q_1 \dots q_{2^n} \text{ Dual } r_1 \dots r_{2^n} =_{\text{Df}} \dots \\ & =_{\text{Df}} \prod_{p_1 \dots p_n} [(p_1 \dots p_n \in q_1 \dots q_{2^n}) \dot{-} (p'_1 \dots p'_n \in r_1 \dots r_{2^n})]. \end{aligned}$$

The first of these three defined functions is called inclusion; the second, equality; the third, duality. It might seem that

these notions can be formulated only in the language of Leśniewski's „protothetics“, since for this purpose variables belonging to a higher logical type than propositional variables are believed to be necessary. Owing to the introduction of variable functors, each consisting of propositional variables, introduction of variables belonging to a higher logical type can be dispensed with.

In the following theses belonging to the propositional calculus the limitation to $n=2$ (i. e., to functors containing two arguments) is introduced for the sake of simplicity:

$$(4.21) \quad (q_1 q_2 q_3 q_4 \subseteq r_1 r_2 r_3 r_4) \leftrightarrow (q_1 \rightarrow r_1) \cdot (q_2 \rightarrow r_2) \cdot (q_3 \rightarrow r_3) \cdot (q_4 \rightarrow r_4)$$

$$(4.22) \quad (q_1 q_2 q_3 q_4 = r_1 r_2 r_3 r_4) \leftrightarrow (q_1 \leftrightarrow r_1) \cdot (q_2 \leftrightarrow r_2) \cdot (q_3 \leftrightarrow r_3) \cdot (q_4 \leftrightarrow r_4)$$

It can further be proved that

$$(4.31) \quad (q_1 q_2 q_3 q_4 \text{ Dual } r_1 r_2 r_3 r_4) \leftrightarrow (q_1 \overset{*}{\leftarrow} r_4) \cdot (q_2 \overset{*}{\leftarrow} r_3) \cdot (q_3 \overset{*}{\leftarrow} r_2) \cdot (q_4 \overset{*}{\leftarrow} r_1).$$

Duality is symmetric, since

$$(4.32) \quad (q_1 q_2 q_3 q_4 \text{ Dual } r_1 r_2 r_3 r_4) \leftrightarrow (r_1 r_2 r_3 r_4 \text{ Dual } q_1 q_2 q_3 q_4).$$

For every functor there is one and only one dual functor, since

$$(4.33) \quad (q_1 q_2 q_3 q_4 \text{ Dual } q'_1 q'_2 q'_3 q'_4)$$

$$(4.34) \quad (q_1 q_2 q_3 q_4 \text{ Dual } r_1 r_2 r_3 r_4) \cdot (q_1 q_2 q_3 q_4 \text{ Dual } s_1 s_2 s_3 s_4) \rightarrow \\ \rightarrow (r_1 r_2 r_3 r_4 = s_1 s_2 s_3 s_4).$$

The square of duality is equality, since

$$(4.35) \quad (q_1 q_2 q_3 q_4 \text{ Dual } r_1 r_2 r_3 r_4) \cdot (r_1 r_2 r_3 r_4 \text{ Dual } s_1 s_2 s_3 s_4) \rightarrow \\ \rightarrow (q_1 q_2 q_3 q_4 = s_1 s_2 s_3 s_4).$$

$$(4.36) \quad (q_1 q_2 q_3 q_4 = s_1 s_2 s_3 s_4) \leftrightarrow \sum_{r_1 r_2 r_3 r_4} [(q_1 q_2 q_3 q_4 \text{ Dual } r_1 r_2 r_3 r_4) \cdot \\ \cdot (r_1 r_2 r_3 r_4 \text{ Dual } s_1 s_2 s_3 s_4)].$$

There are only four such bi-argumental functors that every one of them is dual to itself, since

$$(4.37) \quad (q_1 q_2 q_3 q_4 \text{ Dual } q_1 q_2 q_3 q_4) \leftrightarrow (q_1 \overset{*}{\leftarrow} q_4) \cdot (q_2 \overset{*}{\leftarrow} q_3)$$

and only four zero-one substitutions for the variables $q_1 q_2 q_3 q_4$ fulfil the condition that the expression $(q_1 \dot{-} q_4) \cdot (q_2 \dot{-} q_3)$ is converted in 1.

These substitutions are:

q_1	q_2	q_3	q_4
0	0	1	1
1	0	1	0
0	1	0	1
1	1	0	0

It can be proved that

$$(4.38) \quad (q_1 q_2 q_3 q_4 \subseteq r_1 r_2 r_3 r_4) \leftrightarrow (r'_1 r'_2 r'_3 r'_4 \subseteq q'_1 q'_2 q'_3 q'_4),$$

$$(4.39) \quad (q_1 q_2 q_3 q_4 = r_1 r_2 r_3 r_4) \leftrightarrow (q'_1 q'_2 q'_3 q'_4 = r'_1 r'_2 r'_3 r'_4).$$

2. STANISŁAW HŁAWICZKA (Biała Krakowska). *Podstawy ontologiczne logiki.*

3. S. JAŚKOWSKI (Toruń). *Sur la logique pour les systèmes déductifs contradictoires* (voir *Un calcul des propositions pour les systèmes déductifs contradictoires*, *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, sectio A, vol. I, pp. 57—77, Toruń 1948, en polonais avec un résumé français).

4. S. JAŚKOWSKI (Toruń). *Sur les axiomes de la géométrie des corps.* La communication contient la suite des résultats présentés à la séance du 21. V. 1948 de la Section de Varsovie de la Soc. Pol. de Math.¹⁾ Les axiomes formulés dans le travail cité sont désignés ici par „A I“ et „A II“. Pour réduire le nombre des termes primitifs à un seul: „ x est un demi-espace“, je me borne à la géométrie affine dans laquelle on peut définir les notions métriques relativisées p. ex. par rapport à un cube fondamental.

Soit $\mathcal{G}(a_1, \dots, a_n)$ le produit logique de toutes les relations n -aires qui 1^o sont satisfaites par chaque système de n demi-

¹⁾ *Annales de la Soc. Pol. de Math.*, **21** (1949), pp. 349—350.

espaces de l'espace euclidien 3-dimensionnel et 2^0 qui s'expriment en termes de l'algèbre de Boole additive au sens restreint et du calcul des propositions, sans quantificateurs. Considérons la suite des théorèmes B1, B2, ... de la forme suivante:

B_n : a_1, \dots, a_n étant des demi-espaces, $\mathcal{G}(a_1, \dots, a_n)$.

Théorème. Pour fonder la géométrie affine, il est suffisant de postuler comme axiomes A I et B7. L'adjonction de A II suffit pour démontrer la mesurabilité des corps au sens de Peano-Jordan.

Soit $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_n)$ la relation suivante: a_1, \dots, a_n satisfont à l'égalité

$$(1) \quad a_1 \cdot a_2 \dots a_n + a'_1 \cdot a'_2 \dots a'_n = 0$$

ou bien à une autre obtenue de (1) par une substitution de certains a'_i au lieu de a_i . A I et B4 seraient insuffisants comme axiomes géométriques, car ils sont satisfait dans un espace „non-punctuel“ dans lequel le théorème suivant est faux: a, b, c, d, e étant des demi-espaces, le système des trois relations non- $\mathcal{L}(a, b, c), \mathcal{L}(a, b, c, d), \mathcal{L}(a, b, c, e)$ entraîne $\mathcal{L}(a, b, d, e)$. L'espace considéré est un modèle pour une géométrie des corps „localement non-euclidienne“.

5. JERZY ŁOŚ (Wrocław). *O modelach systemów algebraicznych.*

Wyniki tej pracy ukazały się w pracy „O macierzach logicznych“, Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego, seria B, Nr. 19, Wrocław 1949, rozdział IV.

6. JAN ŁUKASIEWICZ (Dublin). *W sprawie aksjomatyki implikacyjnego rachunku zdań.*

Pamięci Wajsberga poświęcam tę notatkę.

Mordchaj Wajsberg wykazał, że w układzie aksjomatów implikacyjnego rachunku zdań, pochodzącym od Tarskiego i Bernaysa:

$$CpCqp, \quad CCCpqqp, \quad CCpqCCqrCpr,$$

aksjomat pierwszy można zastąpić równoważnie przez którąkolwiek z następujących tez: $CpCCpqq, CpCCqpp, CpCCqqp,$

$Cq Cpp$, $Cq CCCpppp$, $Cq CCCppp CCppp$, $Cq CCpp Cpp$, $Cq CCpp CCpp Cpp$, $Cp CCppp$, $Cp Cpp$ ¹⁾. Wyniki te autor zdołał częściowo uogólnić, stwierdzając, że aksjomat $Cp Cqp$ można zastąpić przez dowolną tezę kształtu $Cp Cap$, o ile a jest konsekwencją tego nowego układu aksjomatów, albo przez dowolną tezę kształtu Cqa , o ile a nie zawiera zmiennych, równokształtnych z q . Uogólnień tych autor dowodzi indukcyjnie²⁾.

W notatce tej udowadniam następujące twierdzenie, obejmujące wszystkie przytoczone wyżej wyniki Wajsberga, tak szczegółowe jak ogólne:

Jeśli do prawa Peirce'a $CCCpqqp$ i prawa sylogizmu $CCpq CCqr Cpr$ dołączymy jakąkolwiek tezę kształtu $Cp Ca\beta$, czyli tezę, której poprzednik jest zmienną a następnik implikacją, to otrzymamy prawo symplicyfikacji $Cp Cqp$, a więc zupełny układ aksjomatów implikacyjnego rachunku zdań.

Oto wywód tego twierdzenia, przeprowadzony wyłącznie przy pomocy reguł podstawiania i odrywania:

$$1 \quad Cp Ca\beta$$

$$2 \quad CCCpqqp$$

$$3 \quad CCpq CCqr Cpr$$

$$3 \quad p/Cpq, q/CCqr Cpr, r/s \times C3 - 4$$

$$4 \quad CCCCqr Cpr CCpqs$$

$$4 \quad q/Cqr, r/Csr, s/CCsq Cp Csr \times C4p/s, s/Cp Csr - 5$$

$$5 \quad CCp Cqr CCsq Cp Csr$$

$$5 \quad p/CCCCprt CCqrts, q/CCqr Cpr, r/s, s/Cpq \times C4q/Cpr, \\ r/t, p/Cqr - C3 - 6$$

$$6 \quad CCCCPprt CCqrts CCpqs$$

$$6 \quad p/q, t/Cpr, q/s, s/CCpq CCsr Cpr \times C4s/CCsr Cpr - 7$$

1) M. Wajsberg, *Metalogische Beiträge. Przyczynki do metalogiki*. Wiadomości Matematyczne 43, Warszawa 1936, str. 131—168. *Metalogische Beiträge II. Przyczynki do metalogiki II*. Tamże, 47, Warszawa 1939, str. 119—139. — Zob. w części II twierdzenia 2b, 2c i 2i, powtarzające wyniki części pierwszej, oraz twierdzenia 11, 13, 15, 16, 17, 34 i 42.

2) *Metalogische Beiträge II*, twierdzenia 37 i 38. W lemmatach do tych twierdzeń, 35 i 39, autor posługuje się rozważaniami indukcyjnymi.

- 7 $CCqsCCpqCCsrCpr$
 $5p/Cqs, q/Cpq, r/CCsrCpr, s/t \times C7-8$
- 8 $CCtCpqCCqsCtC CsrCpr$
 $7q/CCsqs \times C2p/s-9$
- 9 $CCpCCsqsCCsrCpr$
 $7q/CtCCsqs, s/CCsrCtr, r/u \times C9p/t-10$
- 10 $CCpCtCCsqsCCCCsrCtruCpu$
 $3q/Ca\beta, r/CCCsqaCC\beta sCCsqs \times C1-C7q/a,$
 $s/\beta, p/Csq, r/s-11$
- 11 $CpCCCCsqaCC\beta sCCsqs$
 $3q/CCCsqaCC\beta sCCsqs, r/CCCC\beta sCCsqsCCCsqaCsq \times$
 $\times C11-C3p/CCsqa, q/CC\beta sCCsqs, r/Csq-12$
- 12 $CpCCCC\beta sCCsqsCsqCCCCsqaCsq$
 $10t/CCCC\beta sCCCsqsCsq, s/Csq, q/a, r/q, u/CCsCCC\beta s$
 $CCsqsCsqCCCsqqCsq \times C12-C5p/CCsqq, q/CCC\beta s$
 $CCsqsCsq, r/q-13$
- 13 $CpCCsCCC\beta sCCsqsCsqCCCsqqCsq$
 $10t/CsCCC\beta sCCCsqsCsq, s/Csq, r/s, u/CCsrCCCsqsqr \times$
 $\times C13-C9p/CCsqs, q/CCC\beta sCCsqsCsq-14$
- 14 $CpCCsrCCCsqs$
 $8t/p, p/Crq, q/CCCrtrq, r/q \times C14s/r, r/q, q/t-15$
- 15 $CCCCCrtrqsCpCCsqCCrqq$
 $6p/Crt, t/q, s/CpCCCCqrqqCCrqq \times C15s/CCqrq-16$
- 16 $CCCrqCpCCCCqrqqCCrqq$
 $2p/CpCCCCqpqqCCpqq \times C16r/p, t/CCCCqpqqCCpqq-17$
- 17 $CpCCCCqpqqCCpqq$
 $17p/CCCCpppp \times C2q/p-C2p/q, q/CCCCpppp-18$
- 18 $CCCCppppqq$
 $10p/CCpppp, t/q, s/CCpppp, q/p, r/p, u/Cqp \times C16r/p,$
 $t/p, q/p, p/q-C18q/Cqp-19$
- 19 $CCCpppCqp$
 $9s/CCpppp, q/p, r/Cqp \times C17q/p-C19-20$
- 20 $CpCqp.$

Jeżeli w tym wywodzie zastąpimy litery a i β wszędzie tam, gdzie one występują, a więc i w tezach i w wierszach dowodowych, przez wyrażenia sensowne implikacyjnego rachunku zdań tak dobrane, by $CpCa\beta$ było tezą, to otrzymamy wywód prawa $CpCqp$, oparty na tej tezie oraz na prawach Peirce'a i sylogizmu. Zastąpmy np. a przez p i β przez p ; wtedy $CpCa\beta$ przechodzi w $CpCp$ i z tezy tej łącznie z prawem Peirce'a i prawem sylogizmu otrzymujemy wywód prawa $CpCqp$, uzyskujemy więc ostatni ze szczegółowych wyników Wajsberga. Albo też położmy $a=Cpq$, $\beta=q$; wtedy mamy wywód prawa $CpCqp$ z aksjomatów $CpCCpqq$, $CCCpqqp$ i $CCpqCqrCpr$, czyli pierwszy z wyników szczegółowych Wajsberga. Albo wreszcie niech $a=CqCpr$, a $\beta=Cqr$; wtedy powstaje wywód prawa $CpCqp$ z tez $CpCCqCprCqr$, $CCCpqqp$ i $CCpqCCqrCpr$, przy czym jak wiadomo, teza pierwsza jest dedukcyjnie równoważna prawu kommutacji. Litery a i β można traktować jako *skrót* czy to wyrażen $CqCpr$ i Cqr , czy też jakichkolwiek innych wyrażen, byle tak dobranych, by $CpCa\beta$ było tezą. Przez wykonanie tych skrótów *spójność* wyvodu nie zostaje naruszona, w tezach bowiem, zawierających litery greckie, a są nimi tylko tezy 1, 11, 12 i 13, nie dokonywam podstawień, lecz posługuję się nimi jedynie jako przesłankami, to jest jako poprzednikami implikacyj, od których odrywam następniki. Operacja podstawiania nie dosięga więc treści liter greckich i nie może tej treści zmienić, tak samo zresztą, jak i operacja odrywania. Skutkiem tego powyższy wywód staje się *schematem*, według którego można wywieść prawo symplifikacji z dowolnej tezy kształtu $CpCa\beta$, posługując się prawem Peirce'a i prawem sylogizmu.

Zastanówmy się jednak, co się stanie, gdy literom a i β nadamy takie wartości, iż $CpCa\beta$ *nie* przejdzie w tezę. Położmy np. $a=p$, a $\beta=s$, a więc przyjmijmy za aksjomat pierwszy wyrażenie $CpCps$, nie będące tezą. I w tym przypadku otrzymamy prawo $CpCqp$, uzyskamy więc zupełny układ aksjomatów implikacyjnego rachunku zdań. Wiadomo zaś, że jeśli do takiego układu dołączymy jakiekolwiek wyrażenie, nie będące tezą, to otrzymamy sprzeczność w tym znaczeniu, że otrzymamy wszystkie wyrażenia sensowne. Stać się to musi i w naszym przypadku. Istotnie, już samo wyrażenie $CpCps$

prowadzi do sprzeczności, bo podstawiając za p wyrażenie $CpCps$ otrzymujemy po dwukrotnym oderwaniu zmienną s , a więc wszystkie wyrażenia sensowne. Warto jeszcze zbadać, jak zachowują się pozostałe ogniwa wywodu, zawierające litery greckie, a więc wyrażenia 11, 12 i 13. W naszym przykładzie wyrażenie 11 prowadzi także do sprzeczności, kładąc bowiem $a=p$, a $\beta=s$, otrzymujemy z $CpCCCsqaCC\beta sCCsqs$ wyrażenie $CpCCCsqpCCssCCsqs$, co po podstawieniu p/Cpp i q/s i po czterokrotnym oderwaniu daje znowu zmienną s , czyli sprzeczność. Natomiast wyrażenie 13, w którym nie ma już litery a , lecz tylko β , jest tezą bez względu na to, jaką wartość nadamy literze β . Fakt ten tłumaczy się tym, iż dla dowolnego β można tak dobrać a , że $CpCa\beta$ będzie tezą, kładąc np. $a=Cp\beta$. Ponieważ możliwość taka istnieje, a przy tej możliwości wszystkie ogniwa wywodu są tezami, przeto i wyrażenie 13 musi być w tym przypadku tezą, i to przy dowolnym β . Tezą jest także i wyrażenie 12, choć zawiera obie litery greckie, a i β . Ale a występuje w tym wyrażeniu w zespole $CCCsqaCsq$, a zespół ten na mocy prawa Peirce'a i prawa symplifikacji jest równoważny wyrażeniu Csq , w którym nie ma już litery a . A więc i to wyrażenie musi być tezą z tych samych względów, co wyrażenie 13. Gdy zatem a i β są tak dobrane, że $CpCa\beta$ prowadzi do sprzeczności, to z ogniwa wywodu jedno tylko wyrażenie 11 może jeszcze prowadzić do sprzeczności, i to może, ale nie musi, bo dla $a=p$ i $\beta=Csq$, $CpCa\beta$ przechodzi w $CpCpCsq$, co daje sprzeczność, zaś $CpCCCsqaCC\beta sCCsqs$ przechodzi w $CpCCCsqpCCCsqsCCsqs$, a więc w tezę.

Wyrażenia $CpCa\beta$ nie można zastąpić w wywodzie przez wyrażenie ogólniejsze Cpa ; innymi słowy, nie jest prawdą, że jeśli dodamy do prawa Peirce'a i prawa sylogizmu jakąkolwiek tezę, której poprzednik jest zmienną, a następnik jest dowolny, czyli jakąkolwiek tezę kształtu Cpa , to otrzymamy w konsekwencji prawo $CpCqp$. Jeśli bowiem a reprezentuje nie implikację, lecz zmienną, to teza Cpa przechodzi w Cpp , a z układu tez Cpp , $CCCpqqp$ i $CCpqCCqrCpr$ nie wynika $CpCqp$, czego dowodzi zamieszczona niżej matryca.

C	1	2	3	4
*1	1	2	4	4
2	1	1	4	4
3	2	2	1	2
4	1	2	1	1

Matryca ta, której wartością wyróżnioną jest 1, sprawdza zarówno prawo tożsamości Cpp jak prawo Peirce'a i prawo sylogizmu, nie sprawdza natomiast ani prawa $CpCqp$, ani żadnej w ogóle tezy kształtu $CpCa\beta$. Wyrażenie Cqp bowiem, a tak samo $Ca\beta$, będąc implikacją, przybierać może zgodnie z matrycą tylko wartości 1, 2 lub 4, z czego wynika, że $CpCqp$, a tak samo $CpCa\beta$, dla $p=3$ przechodzi stale w 2. Warto jeszcze zaznaczyć, że jeśli wyrażeniu $C33$ nadamy nie wartość 1 lecz 2, to zmieniona w ten sposób matryca sprawdza nadal prawo Peirce'a i prawo sylogizmu, nie sprawdza już atoli prawa tożsamości ani żadnej w ogóle tezy implikacyjnej, której poprzednikiem jest zmienna.

7. ANDRZEJ MOSTOWSKI (Warszawa). *O nowym typie zdań nierozstrzygalnych.*

Praca ukazała się w „Fundamenta Mathematicae“, tom 36.

8. ROMAN SUSZKO (Poznań). *Pewne uwagi logiczne o teorii mnogości.*

9. WANDA SZMIELEW (Warszawa). *O macierzach grupowych.*



SEKCJA DYDAKTYCZNA

1. A. CHROMIŃSKI (Kraków). *Wykresy równań, zawierających wartość bezwzględną. Równania wieloboków i wielościanów oraz równania nieciągłych miejsc geometrycznych.*

Wprowadzenie symbolu wartości bezwzględnej do równań miejsc geometrycznych pozwala ująć w jednym równaniu miejsca geometryczne płaskie, utworzone z odcinków prostych, jak wieloboki, lub przestrzenne, jak wielościany. Np.

$$|x + y| + |x - y| = 2$$

(kwadrat o przekątnych na prostych $x + y = 0$ i $x - y = 0$ i długości boku $= 2$); $|x| + |y| + |z| = 1$ (ośmiościan foremny z płaszczyznami przekątnymi na ścianach układu). Można też otrzymywać równania figur płaskich, złożonych z odcinków prostych i łuków linii krzywych oraz przestrzennych, złożonych z części płaszczyzn i części powierzchni krzywych. Np.

$$|x^2 + y^2 - 1| + |y - x| + |x^2 + y^2 - 4| = 5$$

(ornament, którego kontur stanowią dwa odcinki prostoliniowe równoległe i cztery łuki dwóch kół oraz okręgi dwóch jednakowych kół małych stycznych wzajemnie w środku konturu; całość przypomina żyletkę); $|z - 2 + \sqrt{x^2 + y^2}| + \sqrt{x^2 + y^2} = 2$ (powierzchnia powstała przez obrót przeciwprostokątnej i przyprostokątnej trójkąta prostokątnego dokoła drugiej przyprostokątnej). To łączenie elementów różnych figur w jedną całość pochodzi stąd, że dane równanie z symbolami wartości bezwzględnej zastępuje pewną liczbę zwykłych równań, z których każde dotyczy innego obszaru płaszczyzny (przestrzeni). Ustalenie geometrycznej interpretacji danego równania z symbolami wartości bezwzględnej przy większej liczbie tych symboli jest na ogół dość żmudne, wymaga bowiem rozbicia płaszczyzny (przestrzeni) na obszary i zbadania równań, odpowiadających

każdemu z tych obszarów. Istnieją jednak pewne metody, ułatwiające taką dyskusję, np. metoda przekątnych i metoda odzwierciadlania. Pierwsza metoda polega na ustaleniu przekątnych wieloboku (płaszczyzn przekątnych wielościanu). W ten sposób właśnie powstały powyższe równania kwadratu i ośmiościanu foremego. Druga metoda polega na odzwierciadlaniu w prostych (płaszczyznach), uważanych jako zwierciadła jednostronne. Odzwierciadlenie polega na usunięciu z wykresu (modelu) części figury, znajdującej się za „zwierciadłem“, której miejsce zajmuje natomiast odbicie zwierciadlane pozostałej części, stanowiące łącznie z tą częścią nową figurę symetryczną względem „zwierciadła“. Np. odzwierciadlenie w prawej stronie osi OY ($x=0$) prostej $x+y=1$ da łamaną, złożoną z prostej $x+y=1$ na prawo od OY i prostej $-x+y=1$ na lewo od OY . Równaniem tej łamanej będzie $|x|+y=1$. Dalsze odzwierciadlenie tej figury w górnej stronie osi OX ($y=0$) da kwadrat o równaniu $|z|+|y|=1$. Analogiczne odzwierciadlenie płaszczyzny $x+y+z=1$ w ścianach układu da ośmiościan foremny, wyżej otrzymany.

Gdy chodzi o miejsca geometryczne nieciągłe na szczególną uwagę zasługuje wyrażenie

$$\sigma(x, y) = \sqrt{\frac{|f(x, y)|}{f(x, y)}} = \sqrt{\frac{f(x, y)}{|f(x, y)|}},$$

gdzie $f(x, y)$ jest dowolną funkcją byle by taką, że $|f(x, y)| \neq f(x, y)$. Otóż $\sigma(x, y) = 1$, gdy $f(x, y) > 0$; $\sigma(x, y) = \sqrt{-1} = i$, gdy $f(x, y) < 0$; gdy $f(x, y) = 0$, $\sigma(x, y)$ traci sens.

Np. obierając $f(x, y) = y - 1 - \cos x$, mamy $\sigma(x, y) = 1$ w obszarze nad krzywą $y = 1 + \cos x$. Wprowadzenie tego wyrażenia jako czynnika w dowolnym miejscu równania danego miejsca geometrycznego da równanie, którego wykresem będzie część poprzedniego wykresu nad krzywą $y = 1 + \cos x$. Wobec tego wykresem równania $y = 1 \cdot \sigma(x, y)$ jest nieskończony ciąg odcinków prostej $y = 1$ o długości równej π , przedzielonych odstępami tejsze długości.

Analogiczne uwagi dotyczą wyrażenia

$$\sigma(x, y, z) = \sqrt{\frac{|f(x, y, z)|}{f(x, y, z)}}.$$

Obierając np.

$$\sigma(x, y, z) = \sqrt{\frac{|x^2 + y^2 + z^2 - 1|}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}}$$

i wprowadzając $\sigma(x, y, z)$ do równania płaszczyzny $x + y + z = 0$ w charakterze czynnika w dowolny sposób, np. $x + \sigma y + z = 0$, uzyskaliśmy równanie płaszczyzny z wyciętym krążkiem o średnicy = 2. Oczywiście równaniem tego krążka będzie równanie choćby tej samej postaci, gdzie

$$\sigma = \sqrt{\frac{|f(x, y, z)|}{-f(x, y, z)}} = \sqrt{\frac{|x^2 + y^2 + z^2 - 1|}{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$$

W powyższych przykładach, zakładamy $\sigma = 1$, gdy $f = 0$.

Czynniki σ dają więc możność dowolnego przerywania linii i konturów oraz „obeinania“ i „dziurawienia“ powierzchni. Są to więc czynniki „wyłączające“.

Stosowanie tych i innych metod daje możność budowania równań najrozmaitszych figur płaskich (desenie, parkietaże) i przestrzennych (kryształy, motywy architektoniczne).

2. A. CHROMIŃSKI (Kraków). *Trójkąt Pascala jako tablica potęg liczb naturalnych.*

Tablice I i II dotyczą dwóch różnych postaci trójkąta Pascala. Ciągi marginesów górnych wyjęte zostały z odpowiednich tabel różnic ciągów ... $(-2)^n, (-1)^n, 0, 1^n, 2^n, 3^n, \dots$,

5. potegi	-1	1	0	30	120	120	
4. potegi	1	-1	2	12	24		
sześciany	-1	1	0	6			
kwadraty	1	-1	2				
	1	1					
	1	2	1				
	1	3	3	1			
	1	4	6	4	1		
	1	5	10	10	5	1	
	1	6	15	20	15	6	1

Tabl. I.

				5. potęgi	1	1	0	30	-120	120					
				4. potęgi	1	1	2	-12	24						
				sześciany	1	1	0	6							
				kwadraty	1	1	2								
					1	1	1	1	1	1	---				
					1	2	3	4	5	6	---				
				kwadraty	1	3	6	10	15	21	---				
				sześciany	1	4	10	20	35	56	---				
				4. potęgi	1	11	11	1	1	5	15	35	70	126	---
				1	26	66	26	1	1	6	21	56	126	252	---
				---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	
				---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	

Tabl. II.

gdzie $n=2,3,4,\dots$. Ciągi marginesu bocznego Tabl. II stanowią ciągi $(n+1)$ -szych różnic, wyjęte z odpowiednich tabel różnic ciągów $\dots 0, 0, 0, 1^n, 2^n, 3^n, 4^n, \dots$, gdzie $n=2,3,4,\dots$. Warto zauważyć, że suma wyrazów bocznego ciągu marginesowego $=k!$, gdzie $k=n+1$ jest liczbą wyrazów danego ciągu, co wynika wprost z budowy tabeli różnic ciągu $\dots 0, 0, 0, 1^n, 2^n, 3^n, 4^n, \dots$. Symetryczna budowa ciągów bocznej tabeli czyni ją podobną do trójkąta Pascala.

Ciągi umieszczone na marginesach tablic I i II nie są jedynymi ciągami, mającymi tu zastosowanie. Ciągów takich można zbudować nieograniczenie wiele. Np. zamiast ciągu $1, -1, 2$ można by wziąć ciąg $0, 1, 2$ lub $1, 3, 2$ itd.; zamiast $-1, 1, 0, 6$ — np. $0, 1, 6, 6$ lub $1, 7, 12, 6$ itd. Podane nad tablicą I i II ciągi zawierają możliwie najmniejsze liczby. Podobnie zamiast ciągu $1, 1$ można by użyć na marginesie bocznym ciągu $4, -3, 1$ lub $1, -3, 4$ lub $9, -11, 4$ lub $4, -11, 9$ itd. Będą to jednak zawsze ciągi trójwyrazowe; ogólnie zaś inne ciągi marginesu bocznego (poza podanymi przy tablicy II) będą zawierały o jeden wyraz więcej.

Sposób korzystania z ciągów marginesów górnych polega na tym, że wyrazy danego ciągu marginesowego mnożymy przez znajdujące się pod nimi (w tej samej kolumnie) wyrazy jednego wybranego wiersza trójkąta Pascala i sumujemy otrzymane iloczyny. Np. mnożąc kolejno wyrazy ciągu marginesowego tablicy I: $-1, 1, 0, 6$ przez odpowiednie wyrazy ciągu $1, 3, 3, 1$

z trójkąta Pascala otrzymamy: $-1 \times 1 + 1 \times 3 + 0 \times 3 + 6 \times 1 = 8$; następny ciąg trójkąta Pascala da podobnie: $-1 \times 1 + 1 \times 4 + 0 \times 6 + 6 \times 4 = 27$ itd. Tablica II daje: $1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 1 + 6 \times 1 = 8$; $1 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 3 + 6 \times 4 = 27$ itd. Przy korzystaniu z danego bocznego ciągu marginesowego tablicy II najdogodniej jest uważać ten ciąg jako przesuwalny w prawo wzdłuż wiersza, w którym się znajduje. W ten sposób za każdym przesunięciem o jedną pozycję wyrazy ciągu marginesowego będą trafiały na coraz to inne wyrazy odpowiadającego im ciągu trójkąta Pascala. Mnożąc parami trafiające na siebie wyrazy obu ciągów i sumując iloczyny uzyskane, znajdziemy właściwą danemu wierszowi potęgę kolejnych liczb naturalnych. Np. gdy chodzi o sześciany, mamy: $1 \times 1 = 1$; dalej: $4 \times 1 + 1 \times 4 = 8$; dalej $1 \times 1 + 4 \times 4 + 1 \times 10 = 27$; następnie: $1 \times 4 + 4 \times 10 + 1 \times 20 = 64$ itd.

Ten sam boczny ciąg marginesowy, przesuwany wzdłuż następnego wiersza trójkąta Pascala, sumuje obliczone w poprzednim wierszu potęgi. Np. $1 \times 5 + 4 \times 15 + 1 \times 35 = 100 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$; dalej: $1 \times 15 + 4 \times 35 + 1 \times 70 = 225 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$; itd.

Łatwo też zauważyć, że

$$\frac{P_{k-1}(x)}{(1-x)^{k+1}} = 1^k + 2^k \cdot x + 3^k \cdot x^2 + \dots + n^k \cdot x^{n-1} + \dots,$$

gdzie $|x| < 1$ oraz $P_{k-1}(x)$ jest wielomianem całkowitym stopnia $k-1$ o współczynnikach, będących wyrazami bocznego ciągu marginesowego tablicy II. Np.

$$\frac{x^2 + 4x + 1}{(1-x)^4} = 1^2 + 2^3 \cdot x + 3^3 \cdot x^2 + \dots + n^3 \cdot x^{n-1} + \dots = 1 + 8x + 27x^2 + 64x^3 + \dots, \text{ gdy } |x| < 1.$$

3. A. CHROMIŃSKI (Kraków). *Prosta dyskusja elementarna ogólnego równania krzywych stożkowych, prowadząca w efektywnym rachunku do natychmiastowego wykresu.*

Dyskusja ta niemal całkowicie opiera się na dwóch równaniach, które otrzymujemy w następujący sposób. Ogólne równanie stożkowych

$$(1) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

uwazamy raz za kwadratowe względem x :

$$(2) \quad Ax^2 + (By + D)x + (Cy^2 + Ey + F) = 0,$$

drugi raz za kwadratowe względem y :

$$(3) \quad Cy^2 + (Bx + E)y + (Ax^2 + Dx + F) = 0.$$

Otóż przyrównując do zera wyróżniki równań (2) i (3), uzyskamy potrzebne do dyskusji równania:

$$(4) \quad (By + D)^2 - 4A(Cy^2 + Ey + F) = 0$$

$$(5) \quad (Bx + E)^2 - 4C(Ax^2 + Dx + F) = 0.$$

To wystarcza do naszkicowania zgruba elipsy i paraboli. Przy hiperboli, mając już dwa lub cztery jej punkty, wyznaczamy jeszcze współczynniki kierunkowe asymptot na podstawie równania

$$(6) \quad Ct^2 + Bt + A = 0, \quad \text{gdzie} \quad t = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}.$$

Co się tyczy zdegenerowanej elipsy, hiperboli i paraboli, to jedynie w przypadku paraboli wypadnie szukać punktów na osiach (przy prostej lub dwóch prostych równoległych) z równań, otrzymanych przez przyrównanie do zera wyrazów wolnych równań (2) i (3).

Wszystkie powyższe równania z łatwością odczytamy z symbolicznego zapisania równania (1) w postaci trójkątnej tabelki

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ & D & E \\ & & F \end{array}$$

Przykłady: 1) $2x^2 + 2xy + y^2 - x + 2y + 1 = 0$ tj. symbolicznie

$$\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & \\ & & 1 \end{array}$$

skąd wprost piszemy równania (4) i (5):

$$(2y - 1)^2 - 4 \cdot 2(y^2 + 2y + 1) = 0$$

$$(2x + 2)^2 - 4 \cdot 1(2x^2 - x + 1) = 0.$$

Gdy pierwsze z tych równań jest spełnione, tj. gdy

$$y = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{18}}{2} \simeq \begin{cases} -0,4 \\ -4,6 \end{cases},$$

równanie (2) daje odpowiednio

$$x = -\frac{2y-1}{4} \simeq \begin{cases} 0,45 \\ 2,55 \end{cases};$$

mamy spólrzędne punktów, w których elipsa ($\Delta = B^2 - 4AC = -4 < 0$) jest styczna do dwóch prostych równoległych do OX . Podobnie drugie z naszych równań dostarczy drugą parę punktów, w których elipsa jest styczna do dwóch prostych równoległych do OY . Mamy więc elipsę, wpisaną w prostokąt, którego środek jest środkiem elipsy.

2) $2x^2 - 5xy + 2y^2 + 2y = 0$, tj. symbolicznie

$$\begin{array}{ccc} 2 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & \\ & & 0 \end{array}$$

Równania (4) i (5) mają tu postać:

$$(-5y+0)^2 - 4 \cdot 2(2y^2 + 2y + 0) = 0,$$

skąd $y_1 = 0$; $y_2 = \frac{16}{9}$, a wtedy z (2) $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{20}{9}$;

$$(-5x+2)^2 - 4 \cdot 2(2x^2 + 0x + 0) = 0,$$

skąd $x_3 = 2$; $x_4 = \frac{2}{9}$, a wtedy z (3) $y_3 = 2$; $y_4 = -\frac{2}{9}$.

Spólrzędne środka hiperboli ($\Delta = 9 > 0$):

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{10}{9}; \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{8}{9}.$$

Spółczynniki kierunkowe asymptot da nam równanie (6):

$$2 + 2 - 5t + 2 = 0, \quad \text{skąd } t = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ 0,5 \end{cases}.$$

Osiami hiperboli są dwusieczne kątów między asymptotami.

3) $x^2 - 2xy + y^2 + x + 2y - 1 = 0$, tj. symbolicznie

$$\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ & 1 & 2 \\ & & -1 \end{array}$$

Tu równania (4) i (5) mają postać:

$$(-2y+1)^2 - 4 \cdot 1(y^2 + 2y - 1) = 0,$$

skąd $y_1 = \frac{5}{12}$, a wtedy z (2) $x_1 = y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{12}$;

$$(-2x+2)^2 - 4 \cdot 1(x^2 + x - 1) = 0,$$

skąd $x_2 = \frac{2}{3}$, a wtedy z (3) $y_2 = x - 1 = -\frac{1}{3}$.

Mamy tu parabolę ($\Delta = 0$), styczną w wyznaczonych dwóch punktach do ramion kąta prostego równoległych do osi układu, co wystarcza do prowizorycznego szkicu. Dokładniejszy wykres można osiągnąć, obliczając współczynnik kątowy osi paraboli z równania (6): $t^2 - 2t + 1 = 0$, skąd $t = 1$, i, prowadząc prostą dowolną o współczynniku kątowym $= -1/t = -1$, np. $y = -x$, wyznaczyć dwa punkty paraboli symetryczne względem osi, a więc i punkt na osi, a tym samym i oś paraboli.

Przy elipsie można uzupełnić szkic wyznaczeniem współczynników kierunkowych osi elipsy z równania

$$Bt_1^2 + 2(A - C)t_1 - B = 0,$$

gdzie t_1 jest współczynnikiem kierunkowym. Równanie to otrzymuje się z łatwością jako warunek konieczny dla ekstremum długości średnicy stożkowej z równania (1), przenosząc początek układu do środka symetrii krzywej i oznaczając przez t_1 stosunek nowej rzędnej do nowej odciętej.

4. A. CHROMIŃSKI (Kraków). *Kieszonkowa taśma logarytmiczna. Jej konstrukcja i użycie.*

Taśma ta posiada z obu stron trzy skale prostoliniowe równoległe wzdłuż całej długości. Budowę taśmy rozpoczynamy od środkowej skali L , która jest skalą jednostajną (od 0 do 1). Pod nią budujemy skalę logarytmiczną I z modulem równym długości skali L , pisząc 1 pod 0 skali L , gdyż $\log 1 = 0$ oraz 10 pod 1 skali L , gdyż $\log_{10} 10 = 1$. Podobnie pod 0,301 skali L napiszemy 2, gdyż $\log_{10} 2 \approx 0,301$ itd. Na tej samej stronie taśmy nad skalą L umieszczamy skalę logarytmiczną II z modulem równym połowie długości skali L . Wobec tego skala ta otrzyma ocyfrowanie od 1 do 10 w pierwszej połowie (II')

i od 10 do 100 (II'') w drugiej połowie. Z wielu względów zaleca się opuszczenie końcowych zer na skali II . Skalę I powtarzamy ze zmianą ocyfrowania na: od 0,1 do 1 na drugiej (trygonometrycznej) stronie taśmy, umieszczając ją jako skalę środkową. Stanowi ona podstawę do zbudowania skali sinusa (S) i skali tangensa (T) na tej stronie taśmy. Np. nad cyfrą 0,5 skali I umieścimy 30° na skali S , gdyż $\sin 30^\circ = 0,5$, zaś pod cyfrą 0,9 skali I umieścimy 42° na skali T , gdyż $\operatorname{tg} 42^\circ \approx 0,900$ itd.

Taśmę należy sporządzić z wiotkiego papieru, żeby ją można było dowolnie zginać i składać. Długość taśmy, wobec możliwości składania jej lub zwijania w rulon, może być dowolnie duża. Wiotkość taśmy zapewnia też prostotę posługiwania się nią.

Taśma służy do: 1) bezpośredniego (bez składania taśmy) odczytania wartości kwadratów, pierwiastków kwadratowych, mantys logarytmów, antylogarytmów, sinusów, cosinusów, tangensów (do 45°), cotangensów (powyżej 45°) oraz odpowiednich funkcji kołowych; 2) bezpośredniego odczytywania z taśmy, złożonej na pół tak, aby oba końce taśmy leżały obok siebie, zwrócone stroną trygonometryczną do stołu, i aby skale II' i II'' przylegały bezpośrednio do siebie. Taśma przybiera wtedy kształt stopy. Odczytujemy tu wprost: odwrotności liczb (II' i II''), dopełnienia do 1, 10, 100, ... (L); zaś po odwróceniu na stronie trygonometrycznej: wartości tangensów (powyżej 45°), cotangensów (do 45°) oraz odpowiednich funkcji kołowych. Np. $\operatorname{tg} 58^\circ = \operatorname{ctg} 32^\circ = 1,600$ tj. $0,16 \times 10$; 3) odczytania wyników następujących działań: $a \cdot b$; $\frac{a}{b}$; $\frac{a \cdot b}{c}$ przy ułożeniu taśmy podobnie jak w p. 2) z odpowiednim przesunięciem wzajemnym obu skal II' i II'' . Np. chcąc otrzymać iloczyn 3×4 , zestawiamy 3 (II') z 4 (II'') lub 4 (II') z 3 (II'') i odczytujemy wynik 12 na skali II' w zestawieniu z 1 (II''). Przy tym ustawieniu taśmy wszystkie pary zestawionych liczb skal II' i II'' dają iloczyn 12; np. 2×6 ; $8 \times 1,5$ itd. Wobec tego, nie zmieniając ułożenia taśmy, odczytamy dowolny iloraz $\frac{12}{c}$, np. $\frac{12}{16} = 0,75$; $\frac{12}{8} = 1,5$. Podobnie na stronie trygonometrycznej; np. $\frac{2 \times \operatorname{tg} 35^\circ}{\sin 30^\circ}$; odpowiednie zestawienie 2 (I) z 35° (T) daje odpowiedniość 30° (S) i 2,8 (I), co stanowi

wartość naszego wyrażenia; 4) odczytania (po złożeniu taśmy tak, aby kreska a nakryła kreskę b tej samej skali) wartości wyrażen: $a \cdot b$; $\sqrt{a \cdot b}$; $\sqrt[4]{a \cdot b}$. Np. $\sqrt[4]{6 \times 40}$ wymaga nałożenia 6 (II') na 2 (II'') i złamania taśmy na zgięciu, w którym na skali I odczytamy żądany wynik $\cong 3,31$; jednocześnie na skali II' , odczytamy $\sqrt{6 \times 20} \cong 10,96$ w tym samym zgięciu. Podobnie na stronie trygonometrycznej odczytamy $\sqrt{f_1 \cdot f_2}$ lub $\sqrt{a \cdot f}$, gdzie f , f_1 i f_2 są to funkcje trygonometryczne. Tu trzeba zestawiać kreski dwóch różnych skal. Np. $\sqrt{20 \cdot \text{tg } 35^\circ}$ wymaga nałożenia przedłużenia kreski 2 (I) na przedłużenie kreski 35° (T), złamania taśmy na zgięciu, w którym na skali I odczytamy 3,74; wartość $\sqrt{2 \cdot \text{tg } 35^\circ}$ odczytamy na skali I o pół długości tej skali w lewo, tj. 1,18; 5) rozwiązywania trójkątów płaskich i kulistych. Np. znając kąty trójkąta płaskiego: $\alpha = 36^\circ 52'$; $\beta = 59^\circ 29'$; $\gamma = 83^\circ 39'$ i bok $b = 280$, przenosimy na brzeg kartki papieru miejsca kresek, odpowiadające tym kątom na skali S i przykładamy ten brzeg kartki do skali I tak, żeby kreska β wypadła przy 280 skali I ; wtedy kreska α wskaże na skali I bok $a = 195$, kreska γ — bok $c = 323$; 6) odczytania z jednego ułożenia taśmy dla liczb a i b wyników następujących działań: $a \cdot b$; $\frac{a}{b}$; $\frac{b}{a}$; \sqrt{ab} ; $\sqrt[4]{ab}$ i analogicznie na stronie trygonometrycznej: $f_1 \cdot f_2$; $\frac{f_1}{f_2}$; $\frac{f_2}{f_1}$; $\frac{a}{f}$; $\frac{f}{a}$; $a \cdot f$; \sqrt{af} ; $\sqrt{f_1 \cdot f_2}$.

Postępowanie to bez szczegółowych rysunków opisać się nie da, jak również i wiele innych zastosowań taśmy, wymagających bezpośredniego pokazu lub ilustracji rysunkowej.

5. BOLESŁAW IWASZKIEWICZ (Wrocław). *O tak zwanym formalizmie w szkolnym nauczaniu matematyki.*

Tekst odczytu wydrukowany został w piśmie „Matematyka“, t. 1 (1948), zeszyt 1, str. 33—41.

6. ZOFIA KRYGOWSKA (Kraków). *Zagadnienia związane z rozwiązywaniem zadań konstrukcyjnych.*

Rozwiązać oznaczone zadanie konstrukcyjne, o danych parametrycznych, to znaczy dać odpowiedź na cztery pytania:

1) przy jakich wartościach parametrów istnieje figura, spełniająca warunki zadania? 2) ile jest takich figur, dla danego układu wartości parametrów? 3) jeżeli taka figura istnieje, to czy można ją zbudować przy pomocy danych środków? 4) jak zbudować tę figurę tymi środkami?

W szkole przyjęto następujący sposób rozwiązywania zadań konstrukcyjnych. Uczeń szuka najpierw odpowiedzi na pytanie 4, po czym rozważając, w jakich warunkach znaleziona konstrukcja jest wykonalna i ile daje figur, rozwiązujących zadanie, otrzymuje odpowiedź na pozostałe pytania. Szukaną figurę można na ogół skonstruować różnymi sposobami. Przy takim postępowaniu, wychodząc z różnych konstrukcji, mogliśmy otrzymać różne odpowiedzi na te pytania, co wskazywałoby na niepoprawność rozumowania; na każde z pytań 1), 2), 3) jest bowiem tylko jedna odpowiedź poprawna.

W referacie rozważono, kiedy determinacja zadania na podstawie wybranej konstrukcji prowadzi do wyników bezbłędnych. W związku z tym omówiono rolę przyrządów, pojęcia równoważności zadań i analizy zadania.

Przyrządy. Jeżeli przy użyciu pewnych przyrządów nie można zbudować figury, rozwiązującej zadanie, to stąd nie wynika, że taka figura nie istnieje, jeżeli zaś przy ich użyciu można zbudować figurę, spełniającą warunki zadania, to zbiór wszystkich figur, jakie otrzymamy w ten sposób, może stanowić tylko część pełnego zbioru rozwiązań. Jeżeli odpowiedzi na pytania 1), 2) oprzemy tylko na wynikach konstrukcji, to mogą one wtedy być błędne. Poprawne rozwiązanie zadania wymaga znajomości klasyfikacji zadań ze względu na użyte środki konstrukcyjne (Enriques, Hilbert, Vahlen). W referacie uzupełniano znane wyniki efektywnym przeprowadzeniem konstrukcji liniowych, miarowych, elementarnych przy pomocy liniału i „przenośnika stałego kąta“ i wykazano, że każde zadanie, rozwiązalne przy pomocy liniału i przenośnika dowolnych odcinków, można rozwiązać przy pomocy liniału i przyrządu, pozwalającego obracać jeden stały odcinek dokola jego końca, tylko wewnątrz pewnego dowolnie małego kąta, którego wierzchołkiem jest ten koniec. Każde takie zadanie można rozwiązać, używając tylko liniału, jeżeli na płaszczyźnie jest narysowany dowolny wycinek dowolnego koła.

Równoważność zadań. Dwa zadania Z_1 o parametrach $a_1 \dots a_n$ i Z_2 o parametrach $b_1 \dots b_m$ przyjęto w referacie za równoważne ze względu na pewne środki S , jeżeli 1) Z_1 i Z_2 są rozwiązywalne przy pomocy środków S , 2) między układami wartości parametrów $(a_1 \dots a_n)$ i $(b_1 \dots b_m)$ można ustalić odpowiedniość jednojednoznaczną, którą można konstrukcyjnie zrealizować przy pomocy środków S , przy czym rozwiązania obu zadań dla odpowiadających układów wartości parametrów są identyczne. Jeżeli jedno z tych zadań jest elementarne ze względu na środki S , to rozwiązanie drugiego sprowadza się do rozwiązania zadania elementarnego, dyskusję zaś istnienia i ilości rozwiązań zadania drugiego można zastąpić badaniem wykonalności konstrukcji elementarnych i liczby otrzymanych przez nie figur.

Analiza zadania. Przypuszczamy, że dana figura, określona warunkami zadania dla pewnego układu wartości parametrów istnieje i znajdujemy warunki (dotyczące jej elementów) konieczne na to, by była ona rozwiązaniem zadania. Spośród warunków koniecznych wybieramy jeden, lub układ kilku, który stanowi już warunek wystarczający na to, by figura zbudowana zgodnie z nim, była figurą rozwiązującą zadanie. Determinację zadania można wtedy oprzeć na badaniu wykonalności konstrukcji. Zupełność rozwiązania wynika tu z faktu, że warunki dyktujące konstrukcję są konieczne, poprawność, że te warunki są wystarczające.

Jeżeli natomiast konstrukcję opieramy tylko na warunkach wystarczających do tego, by figura spełniała warunki zadania, czyli zadawałamy się wykryciem sposobu budowania figury, to badania istnienia i ilości rozwiązań powinny polegać na rozwiązaniach niezależnych od sposobu konstrukcji.

7. WŁADYSŁAW KRYSICKI (Łódź). *Metody całkowania w polskich podręcznikach akademickich.*

8. JAN LEŚNIAK (Kraków). *O pewnym sposobie wprowadzenia pojęcia funkcji w szkole średniej.*

Tekst tego odczytu wydrukowany jest w piśmie „Matematyka“, t. 2 (1949), zeszyt 6, str. 28—32 oraz zeszyt 7, str. 29—35.

9. KONSTANTY MATULEWICZ (Góra Śląska). *Tablica kwadratów liczb naturalnych w zakresie 1—10⁹.*

W dziele M. Kraitchika *Théorie des nombres* (Paris 1922, t. I, str. 162) podano — wśród innych — dwustronicową tablicę, z pomocą której można obliczyć kwadrat każdej liczby naturalnej do miliona.

W tym celu należy podzielić liczbę potęgowaną na grupy dwucyfrowe (od jednostek i dziesiątek) i następnie dodać i odjąć kilka liczb wypisanych odpowiednio z tablicy).

Tablicę ułożono na podstawie tożsamości

$$(1) \quad (10000a + 100b + c)^2 = 10000 \cdot 10101a^2 + 100 \cdot 10101b^2 + \\ + 10101c^2 - 100(b - c)^2 - 10000(a - c)^2 - 1000000(a - b)^2.$$

Aby zastosować powyższy pomysł do obliczania kwadratów liczb naturalnych większych od miliona i nie wprowadzać wzorów o bardziej skomplikowanej budowie niż (1), należy dzielić liczbę potęgowaną na grupy 3 cyfrowe. Jeżeli a, b, c są liczbami naturalnymi mniejszymi od 1000, to każdą liczbę do miliona możemy przedstawić w postaci $10^3a + b$, a każdą liczbę do miliarda w postaci $10^6a + 10^3b + c$.

Łatwo wyprowadzić wzory

$$(2) \quad (10^3a + b)^2 = 10^3ka^2 + kb^2 - 10^3(b - a)^2, \quad k = 1001$$

$$(3) \quad (10^6a + 10^3b + c)^2 = 10^6ka^2 + 10^3kb^2 + kc^2 - 10^9(a - b)^2 - \\ - 10^6(a - c)^2 - 10^3(b - c)^2, \quad k = 1001001.$$

Jeżeli przepiszemy wzory (2) i (3) w sposób niżej podany

$$(2') \quad \begin{array}{r} + \\ + \\ - \end{array} \left| \begin{array}{c} \\ 10^3ka^2 \\ 10^3(b - a)^2 \end{array} \right| \begin{array}{c} kb^2 \\ \\ \end{array}$$

$$(3') \quad \begin{array}{r} + \\ + \\ + \\ - \\ - \\ - \end{array} \left| \begin{array}{c} \\ \\ 10^6ka^2 \\ \\ 10^6(a - c)^2 \\ \\ -10^9(a - b)^2 \end{array} \right| \begin{array}{c} kc^2 \\ \\ 10^3kb^2 \\ \\ 10^3(b - c)^2 \\ \\ \end{array}$$

to uwidocznimy sposób, w jaki należy zapisywać składniki dodatnie i ujemne w rachunku liczbowym.

Przytaczamy parę dalszych wzorów, które dają możliwość — przy analogicznej do poprzedniej technice rachunku — podnosić do kwadratu liczby 12- i 15-cyfrowe:

$$(10^9a + 10^6b + 10^3c + d)^2 = 10^9ka^2 + 10^6kb^2 + 10^3kc^2 + kd^2 - \\ - [10^{15}(b-a)^2 + 10^{12}(c-a)^2 + 10^9(c-b)^2 + 10^9(d-a)^2 + \\ + 10^6(d-b)^2 + 10^3(d-e)^2], \quad k = 1001001\ 001,$$

$$(10^{12}a + 10^9b + 10^6c + 10^3d + e)^2 = 10^{12}ka^2 + 10^9kb^2 + 10^6kc^2 + \\ + 10^3kd^2 + ke^2 - [10^{21}(b-a)^2 + 10^{15}(d-a)^2 + 10^{12}(e-a)^2 + \\ + 10^9(e-b)^2 + 10^3(e-d)^2 + 10^{18}(c-a)^2 + 10^{15}(c-b)^2 + \\ + 10^{12}(d-b)^2 + 10^9(d-e)^2].$$

Tablica, zestawiona przez autora zawiera: kwadraty liczb naturalnych od 10^2 do 999^2 , następnie liczby pomocnicze do szybkiego obliczania iloczynów powyższych kwadratów przez czynniki postaci 1001, 1001 001, 1001 001 001 itd.





