SPRAWOZDANIE DYREKTORA

C. K.

GIMNAZYUM ŚW. JACKA

W KRAKOWIE

za rok szkolny 1892.

W KRAKOWIE.
NAKŁADEM FUNDUSZU NAUKOWEGO.
W DRUKARNI WŁ. L. ANCZYCA I SPÓŁKI,
pod zarządem Jana Gadowskiego.
1892.

TREŚĆ.

ELEMENTARNA TEORYA WYZNACZNIKÓW.

PRZEZ

PROFESORA JANA KORCZYŃSKIEGO.

1. Wstęp.

Rozwiązując równania pierwszego stopnia n. p. o trzech niewiadomych

$$
\begin{aligned}
a_1\ x + b_1\ y + c_1\ z &= d_1 \\
a_2\ x + b_2\ y + c_2\ z &= d_2 \\
a_3\ x + b_3\ y + c_3\ z &= d_3,
\end{aligned}
$$

otrzymujemy niewiadome

$$x = \frac{d_1 b_2 c_3 - d_1 c_2 b_3 + c_1 d_2 b_3 - b_1 d_2 c_3 + b_1 c_2 d_3 - c_1 b_2 d_3}{a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 + c_1 a_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3}$$

$$y = \frac{a_1 d_2 c_3 - a_1 c_2 d_3 + c_1 a_2 d_3 - d_1 a_2 c_3 + d_1 c_2 a_3 - c_1 d_2 a_3}{a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 + c_1 a_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3}$$

$$z = \frac{a_1 b_2 d_3 - a_1 d_2 b_3 + d_1 a_2 b_3 - b_1 a_2 d_3 + b_1 d_2 a_3 - d_1 b_2 a_3}{a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 + c_1 a_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_3 a_3}$$

Rzuciwszy okiem na te wzory, spostrzeżemy zaraz, że liczniki niewiadomych utworzyć możemy ze wspólnego mianownika, zastępując w nim kolejno współczynniki $a_1\ a_2\ a_3$; $b_1\ b_2\ b_3$; $c_1\ c_2\ c_3$; odpowiadającymi im drugimi zrównań stronami $d_1\ d_2\ d_3$.

Ponieważ tedy mianownik wyznacza liczniki wartości niewiadomych, dlatego nazwano go wyznacznikiem danych równań.

Taki jest początek teoryi wyznaczników, która obecnie ważne matematyce oddaje usługi. Dlatego konieczną dla początkujących jest rzeczą poznać najgłówniejsze tychże funkcyi zarysy.

Własności wyznaczników, które są niezależne od danych równań, i sposób tworzenia wysnujemy najłatwiej z tak zwanych funkcyj znakozmiennych czyli alternujących.

Obierzmy tedy kilka różnych ilości n. p. sześć a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 i utworzywszy z nich różnice, pomnóżmy je przez siebie i przez iloczyn a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a otrzymamy wyrażenie

$$
\begin{aligned}
a)\ I = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 &(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_5 - a_1)(a_6 - a_1). \\
&\qquad\qquad (a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_5 - a_2)(a_6 - a_2). \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (a_4 - a_3)(a_5 - a_3)(a_6 - a_3). \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (a_5 - a_4)(a_6 - a_4). \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (a_6 - a_5).
\end{aligned}
$$

Ten iloczyn staje się zerem, jeżeli w nim jeden którykolwiek wyraz podstawimy za inny n. p. a_2 za a_1; albowiem jeden czynnik $(a_2 - a_2) = 0$; więc cały wieloczyn jest także zerem.

Iloczyn ten zmienia tylko znak, nie zmieniając swojej wartości liczebnej, jeżeli w nim jakiebądź dwa wyrazy n. p. a_2 i a_1, albo a_3 i a_2, albo a_4 i a_3 i t. d. i t. d. przestawimy, gdyż przez taką przemianę jeden tylko czynnik znak zmienia. I tak: $(a_1 - a_2) = -(a_2 - a_1$; albo $(a_2 - a_3) = -(a_3 - a_2$; albo $(a_3 - a_4) = -(a_4 - a_3)$ i t. d. i t. d.

Przestawiwszy dwa wyrazy jednej pary, przestawmy dwa wyrazy drugiej, potem trzeciej czwartej i t. d. a przekonamy się, że iloczyn a), po dwukrotnej, czterokrotnej, sześciokrotnej, ośmiokrotnej i t. d. przemianie znak pierwotny odzyskuje; zmienia zaś na przeciwny przez trzykrotne, pięciokrotne, siedmiokrotne i t. d. przestawienie.

Tę trzy twierdzenia są także ważne i wtedy, gdy do utworzenia iloczynu sposobem powyższym zamiast sześciu wyrazów użyjemy ich więcej.

Otóż wszystkie funkcye takie własności posiadające, jakie ma powyższy iloczyn, nazywają się funkcyami znakozmiennymi.

Przejdźmy teraz do rozwinięcia wieloczynu „I“ i dla łatwiejszego zrozumienia rzeczy wybierzmy sobie do jego utworzenia sposobem wskazanym tylko trzy wyrazy a_1 a_2 a_3.

Wykonawszy mnożenie, otrzymujemy

$$I_{(3)} = a_1\ a_2\ a_3\ (a_2 - a_,)\ (a_3 - a_1)\ (a_3 - a_2) =$$
$$= a_1^1\ a_2^2\ a_3^3 - a_1^1\ a_3^2\ a_2^3 - a_2^1\ a_1^2\ a_3^3 + a_2^1\ a_3^2\ a_1^3 + a_3^1\ a_1^2\ a_2^3 - a_3^1\ a_2^2\ a_1^3.$$
$$= a_1^1\ a_2^2\ a_3^3 - a_1^1\ a_2^3\ a_3^2 - a_1^2\ a_2^1\ a_3^3 + a_1^2\ a_2^3\ a_3^1 + a_1^3\ a_2^1\ a_3^2 - a_1^3\ a_2^2\ a_3^1.$$

iloczyn składający się z sześciu iloczynów częściowych, a mianowicie z trzech dodatnich i z trzech odjemnych. Każdego z nich czynnikami są wyrazy $a_1\ a_2\ a_3$ opatrzone różnymi wykładnikami potęgowymi.

Pierwszy iloczyn częściowy $a_1^1\ a_2^2\ a_3^3$ nazywa się składnikiem głównym zupełnego iloczynu, i opatrujemy go znakiem dodatnim, w znaczeniu algebraicznem; każdy następny wywodzi się z głównego prostem przestawianiem (permutacyą) skaźników, albo wykładników potęgowych, przyczem każdej tak utworzonej gromadce dajemy znak + albo — wedle tego, czy parzystą liczbę przemian, czy też nieparzystą na skaźnikach, albo na wykładnikach wykonać należy, ażeby wróciły do naturalnego porządku. I tak składniki $a_1^1\ a_3^2\ a_2^3$ $(a_1^1\ a_2^3\ a_3^2)$, $a_2^1\ a_1^2\ a_3^3$ $(a_1^2\ a_2^1\ a_3^3)$, $a_3^1\ a_2^2\ a_1^3$ $(a_1^3\ a_2^2\ a_3^1)$ muszą mieć znak odjemny; zaś składniki $a_2^1\ a_3^2\ a_1^3$ $(a_1^2\ a_2^3\ a_3^1)$, $a_3^1\ a_1^2\ a_2^3$ $(a_1^3\ a_2^1\ a_3^2)$ dodatni.

Wieloczyn z czterech wyrazów utworzony i rozwinięty jest następujący:

$$I_{(4)} = a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ (a_2 - a_1)\ (a_3 - a_1)\ (a_4 - a_1)\ (a_3 - a_2)\ (a_4 - a_3)$$
$$= a_1^1\ a_2^2\ a_3^3\ a_4^4 - a_1^1\ a_2^2\ a_4^3\ a_3^4 - a_1^1\ a_3^2\ a_2^3\ a_4^4 +$$
$$+ a_2^1\ a_3^2\ a_4^3\ a_2^4 + a_1^1\ a_4^2\ a_2^3\ a_3^4 - a_1^1\ a_4^2\ a_3^3\ a_2^4$$
$$- a_2^1\ a_1^2\ a_3^3\ a_4^4 + a_2^1\ a_1^2\ a_4^3\ a_3^4 + a_2^1\ a_3^2\ a_1^3\ a_4^4$$
$$- a_2^1\ a_3^2\ a_4^3\ a_1^4 - a_2^1\ a_4^2\ a_1^3\ a_3^4 + a_2^1\ a_4^2\ a_3^3\ a_1^4$$
$$+ a_3^1\ a_1^2\ a_2^3\ a_4^4 - a_3^1\ a_1^2\ a_4^3\ a_2^4 - a_3^1\ a_2^2\ a_1^3\ a_4^4$$
$$+ a_3^1\ a_2^2\ a_4^3\ a_1^4 + a_3^1\ a_4^2\ a_1^3\ a_2^4 - a_3^1\ a_4^2\ a_2^3\ a_1^4$$
$$- a_4^1\ a_1^2\ a_2^3\ a_3^4 + a_4^1\ a_1^2\ a_3^3\ a_2^3 + a_4^1\ a_2^2\ a_1^3\ a_3^4$$
$$- a_4^1\ a_2^2\ a_3^3\ a_1^4 - a_4^1\ a_3^2\ a_1^3\ a_2^4 + a_4^1\ a_3^2\ a_2^3\ a_1^4.$$

Również i ten iloczyn zupełny składa się z iloczynów częściowych, w połowie dodatnich, a w połowie odjemnych; każdy z nich ma cztery czynniki $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ opatrzone wykładnikami różnymi. Iloczyn $a_1^1\ a_2^2\ a_3^3\ a_4^4$ jest składnikiem zasadniczym, z którego powstają wszystkie następne sposobem wskazanym. Wszystkich składników jest 24 = 1. 2. 3. 4.

2. Wyznaczniki.

Jeżeli teraz w rozwinięciu $I(_3)$, albo $I(_4)$, $I(_5) \ldots I(_n)$ wykładniki potęgowe uważać będziemy także za skaźniki, wtedy owe rozwinięcia również są funkcyami znakozmiennymi, które się nazywają wyznacznikami. Pierwszy $W(_3)$ zawiera $3^2 = 9$ różnych wyrazów; drugi $W(_4)$ $4^2 = 16$; trzeci $W(_5)$ $5^2 = 25$ i t. d. Pierwszy jest wyznacznikiem trzeciego, drugi czwartego, trzeci piątego stopnia i t. d.

Wszystkie składniki wyznacznika, jakiegokolwiek on jest stopnia, wyrachować możemy ze zasadniczego terminu $a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 \ldots a_4^4$, wykonawszy wszystkie przestawienia możliwe bez powtarzania dolnych albo górnych skaźników i opatrzywszy każdą grupę stosownym znakiem według wyżej podanego prawidła przy tworzeniu iloczynów częściowych wyrażenia $I(_3) = a_1\, a_2\, a_3\, (a_2 - a_1)\, (a_3 - a_1)\, (a_3 - a_2)$. Dlatego to wyraża się wyznacznik notacyą Jakobiego:

$$W(_3) = \Sigma \pm a_1^1\, a_2^2\, a_3^3.$$

$$W(_4) = \Sigma \pm a_1^1\, a_2^2\, a_3^3\, a_4^4;\quad W(_5) = \Sigma \pm a_1^1\, a_2^2\, a_3^3\, a_4^4\, a_5^5.$$

$$W(_n) = \Sigma \pm a_1^1\, a_2^2\, a_3^3\, a_4^4\, a_5^5 \ldots\ldots a_{n-1}^{n-1}\, a_n^n.$$

Często go przedstawiają kwadratem

$$W(_2) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix};\quad W(_3) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix};$$

$$W(_4) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix}.$$

W kwadracie wyznacznikowym wyrazy położone na linii poziomej, opatrzone każdy z osobna skaźnikiem 1. stanowią linią pierwszą; wyrazy ze skaźnikiem 2. linią drugą, a wyrazy ze skaźnikiem 3. trzecią i t. d. i t. d. Wszystkie wyrazy ze wskazówką 1, w dole umieszczoną, tworzą kolumnę pierwszą; wyrazy ze wskazówką 2, kolumnę drugą, a wyrazy ze wskazówką 3, kolumnę trzecią i t. d. i t. d. Więc górny skaźnik powiada, do którego wiersza należy jakiś wyraz, a dolny do której kolumny.

Wyrazy $a^1_1\ a^2_2\ a^3_3 \ldots a^n_n$, stojące na przekątni kwadratu, prowadzącej z góry na dół w kierunku pochyłym od strony lewej ku prawej, tworzą tak zwaną przekątnię główną.

Wieloczyn tychże wyrazów zowie się zasadniczym wyznacznika składnikiem, z którego się wywodzą wszystkie inne, znanym już sposobem.

3. Określenie wyznacznika.

Porównawszy rozwinięcie wyznacznika

$$W_{(3)} = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a^1_1\ a^2_2\ a^3_3 - a^1_1\ a^2_3\ a^3_2 - a^1_2\ a^2_1\ a^3_3 \\ & + a^1_2\ a^2_3\ a^3_1 + a^1_3\ a^2_1\ a^3_2 - a^1_3\ a^2_2\ a^3_1. \end{aligned}$$

$$W_{(4)} = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & a^1_4 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & a^2_4 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 & a^3_4 \\ a^4_1 & a^4_2 & a^4_3 & a^4_4 \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a^1_1\ a^2_2\ a^3_3\ a^4_4 - a^1_1\ a^2_2\ a^3_4\ a^4_3 - a^1_1\ a^2_3\ a^3_2\ a^4_4 \\ & + a^1_1\ a^2_3\ a^3_4\ a^4_2 + a^1_1\ a^2_4\ a^3_2\ a^4_3 - a^1_1\ a^2_4\ a^3_3\ a^4_2 \\ & - a^1_2\ a^2_1\ a^3_3\ a^4_4 + a^1_2\ a^2_1\ a^3_4\ a^4_3 + a^1_2\ a^2_3\ a^3_1\ a^4_4 \\ & - a^1_2\ a^2_3\ a^3_4\ a^4_1 - a^1_2\ a^2_4\ a^3_1\ a^4_3 + a^1_2\ a^2_4\ a^3_3\ a^4_1 \\ & + a^1_3\ a^2_1\ a^3_2\ a^4_4 - a^1_3\ a^2_1\ a^3_4\ a^4_2 - a^1_3\ a^2_2\ a^3_1\ a^4_4 \\ & + a^1_3\ a^2_2\ a^3_4\ a^4_1 + a^1_3\ a^2_4\ a^3_1\ a^4_2 - a^1_3\ a^2_4\ a^3_2\ a^4_1 \\ & - a^1_4\ a^2_1\ a^3_2\ a^4_3 + a^1_4\ a^2_1\ a^3_3\ a^4_2 + a^1_4\ a^2_2\ a^3_1\ a^4_3 \\ & - a^1_4\ a^2_2\ a^3_3\ a^4_1 - a^1_4\ a^2_3\ a^3_1\ a^4_2 + a^1_4\ a^2_3\ a^3_2\ a^4_1. \end{aligned}$$

albo innego jakiegokolwiek stopnia z wyrazami kwadratu, zaraz wysnujemy wyznacznika określenie:

„Nazywamy wyznacznikiem układu $2^2\ 3^2\ 4^2\ 5^2 \ldots n^2$ ilości uważanych sumę algebraiczną wieloczynów tychto ilości wziętych po 2, 3, 4, 5, n. wszystkimi sposobami możebnymi, ale tak, ażeby w żadnym wieloczynie dwa czynniki nie należały nigdy oba do jednej linii, ani oba do jednej kolumny, i żeby wieloczyny były ze znakiem $+$, albo $-$ według tego, czy parzystą, czy też nieparzystą liczbę przestawień na skaźnikach ich wykonaćby trzeba, aby je sprowadzić do naturalnego porządku".

4. Własności ogólne wyznaczników.

Jak się wyżej rzekło, każdy wyznacznik zupełny rozwinąć się daje ze zasadniczego składnika $a^1_1\ a^2_2\ a^3_3 \ldots a^n_n$ przez wykonanie wszystkich przestawień na skaźnikach górnych albo dolnych. Jeżeli tedy w składniku głównym pozamieniamy skaźniki górne na dolne i odwrotnie dolne na górne, wyznaczaik przez to wcale się niezmieni.

Zamienić skazniki górne na dolne, a dolne na górne znaczy to samo, co zamienić wiersze na kolumny, a kolumny na wiersze. Zatem mamy

Twierdzenie pierwsze: „Wyznacznik niezmienia ani znaku, ani liczebnej wartości swojej, gdy jego linie poziome stają się kolumnami, a kolumny liniami“.

Określenie wyznacznika wywiedliśmy z iloczynu znakozmiennego $J(_3) = a_1 \; a_2 \; a_3 \; (a_2 - a_1) \; (a_3 - a_1) \; (a_3 - a_2)$ albo z $J(_4) = a_1 \, a_2 \, a_3 \, a_4 \, (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)$ a dwa twierdzenia zawierające takich iloczynów własności nasuwają nam analogiczne twierdzenia o wyznaczniku, które tak opiewają:

Twierdzenie drugie: „Wyznacznik staje się zerem, jeżeli na miejsce jednego, któregokolwiek skaźnika górnego albo dolnego postawimy jakibądź inny skaźnik górny albo dolny; czyli inaczej: wyznacznik schodzi do zera, jeżeli na miejsce jednej linii poziomej, albo kolumny położymy drugą jakąkolwiek linią albo kolumnę“.

Jakoż weźmy na uwagę wyznacznik trzeciego stopnia:

$$\left\| \begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{matrix} \right\| = \begin{matrix} a_1^1 \; a_2^2 \; a_3^3 - a_1^1 \; a_3^2 \; a_2^3 - a_2^1 \; a_1^2 \; a_3^3 \\ + a_2^1 \; a_3^2 \; a_1^3 + a_3^1 \; a_1^2 \; a_2^3 - a_3^1 \; a_2^2 \; a_1^3. \end{matrix} =$$

$$= a_1^1 \; a_2^2 \; a_3^3 - a_1^1 \; a_2^3 \; a_3^2 - a_1^2 \; a_2^1 \; a_3^3 + a_1^2 \; a_2^3 \; a_3^1 + a_1^3 \; a_2^1 \; a_3^2 - a_1^3 \; a_2^2 \; a_3^1.$$

Kładąc w nim n. p. skaźnik górny 3 za 2 czyli wiersz trzeci za drugi, otrzymujemy

$$\left\| \begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{matrix} \right\| = \begin{matrix} a_1^1 \; a_2^3 \; a_3^3 - a_1^1 \; a_2^3 \; a_3^3 - a_1^3 \; a_2^1 \; a_3^3 \\ + a_1^3 \; a_2^3 \; a_3^1 + a_1^3 \; a_2^1 \; a_3^3 - a_1^3 \; a_2^3 \; a_3^1 = 0 \end{matrix}$$

Tak samo, kładąc dolny skaźnik 3 za dolny 2 czyli kolumnę trzecią za drugą, mamy:

$$\left\|\begin{matrix} a_1^1 & a_3^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_3^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_3^3 & a_3^3 \end{matrix}\right\| = \begin{matrix} a_1^1\ a_3^2\ a_3^3 - a_1^1\ a_3^2\ a_3^3 - a_3^1\ a_1^2\ a_3^3 \\ a_3^1\ a_3^2\ a_1^3 + a_3^1\ a_1^2\ a_3^3 - a_3^1\ a_3^2\ a_1^3 \end{matrix} = 0$$

c. b. d. d.

Twierdzenie trzecie: „Wyznacznik zmienia tylko znak, jeżeli w nim przestawimy dwa którekolwiek skaźniki górne albo dolne; czyli innymi słowami: wyzuacznik zmienia znak niezmieniając swojej wartości liczebnej, jeżeli jego dwie jakiebądź linie albo kolumny przestawimy“.

Biorąc n. p. wyznacznik trzeciego stopnia

$$\begin{aligned} W(_3) = a_1^1\ a_2^2\ a_3^3 - a_1^1\ a_3^2\ a_2^3 - a_2^1\ a_1^2\ a_3^3 \\ + a_2^1\ a_3^2\ a_1^3 + a_3^1\ a_1^2\ a_2^3 - a_3^1\ a_2^2\ a_1^3 \end{aligned}$$

i przestawiając w nim skaźniki dolne 2 i 3 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} - W(_3) = a_1^1\ a_3^2\ a_2^3 - a_1^1\ a_2^2\ a_3^3 - a_3^1\ a_1^2\ a_2^3 \\ + a_3^1\ a_2^2\ a_1^3 + a_2^1\ a_1^2\ a_3^3 - a_2^1\ a_3^2\ a_1^3 \end{aligned}$$

wypadek równy poprzedzającemu wyznacznikowi ale z przeciwn. znakiem. Tak samo przestawiając w wyznaczniku tego samego stopnia

$$\begin{aligned} W(_3) = a_1^1\ a_2^2\ a_3^3 - a_1^1\ a_2^3\ a_3^2 - a_1^2\ a_2^1\ a_3^3 \\ + a_1^2\ a_2^3\ a_3^1 + a_1^3\ a_2^1\ a_3^2 - a_1^3\ a_2^2\ a_3^1 \end{aligned}$$

skaźniki górne 2 i 3 uzyskujemy ten sam wyznacznik ze znakiem przeciwnym

$$\begin{aligned} - W(_3) = a_1^1\ a_2^3\ a_3^2 - a_1^1\ a_2^2\ a_3^3 - a_1^3\ a_2^1\ a_3^2 \\ + a_1^3\ a_2^2\ a_3^1 + a_1^2\ a_2^1\ a_3^3 - a_1^2\ a_2^3\ a_3^1. \end{aligned}$$

Twierdzenie to można wysłowić ogólniej jeszcze tak:

α) „Wyznacznik zmienia znak, jeżeli liczba przestawień wykonanych na liniach albo kolumnach jest nieparzysta; nie zmienia zaś znaku, gdy liczba onych przestawień jest parzysta“.

β) „Przestawiając naprzód wiersze a potem kolumny, albo odwrotnie kolumny a po nich linie poziome zmieniamy wyznacznika znak albo go nienaruszamy, jeżeli razem wykonamy nieparzystą albo też parzystą liczbę przestawień“.

5. Wyznaczniki mniejsze.

Jeżeli w wyznaczniku ngo stopnia

$$\Sigma \pm a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 \dots a_n^n = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \dots & a_n^3 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

ze składnika zasadniczego wyrzucimy wyraz którykolwiek n. p. a_n^n czyli inaczej: z kwadratu wypuścimy jednę jakąbądź linię poziomą i tegoż samego porządku jednę kolumnę n. p. ntą linię i ntą kolumnę, otrzymamy z pozostałych tak zwany „mniejszy wyznacznik główny“ o jeden stopień niższego rzędu:

$$W_n^n = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_{n-1}^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_{n-1}^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \dots & a_{n-1}^3 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1^1\, a_2^2 \dots a_{n-1}^{n-1}.$$

Złożony on z tych samych wierszy i kolumn, z jakich się składa wyznacznik zupełny $\Sigma \pm a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 \dots a_n^n$, brakuje mu tylko ntej linii i ntej kolumny.

Nazywa się mniejszym wyznacznikiem głównym z tej przyczyny, że jego składnik zasadniczy zawiera w sobie wyrazy przyczyniające się do utworzenia zasadniczego składnika w wyznaczniku zupełnym.

Jasną jest rzeczą, że opuszczając pierwszą, drugą, trzecią i t. d. linię i kolumnę, utworzymy wyznaczniki mniejsze W_1^1; W_2^2; $W_3^3 \dots W_{n-1}^{n-1}$.

Możemy z danego wyznacznika dwie, trzy, cztery którekolwiek linie i tego samego porządku kolumny i więcej nawet wyrzucić i przez to osiągnąć także mniejsze wyznaczniki główne: jak n. p.

$$W_{1\,3}^{1\,3} = \Sigma \pm a_2^2\, a_4^4\, a_5^5 \dots a_n^n.$$

$$W^{1\,3\,5}_{1\,3\,5} = \Sigma \pm a_2^2\, a_4^4\, a_6^6\, a_7^7 \ldots a_n^n$$

i t. d.

Również wyłączyć można linie i kolumny, które nie są oznaczone tymi samymi skaźnikami, n. p. pierwszą linią i trzecią kolumnę; drugą i piątą linię a trzecią i czwartą kolumnę i t. d. a pozostałe linie i kolumny tworzą także wyznaczniki mniejsze, które się głównymi już nie nazywają.

Mając n. p. wyznacznik zupełny szóstego stopnia

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 & a_6^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 & a_2^6 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 & a_6^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & a_5^4 & a_6^4 \\ a_1^5 & a_2^5 & a_3^5 & a_4^5 & a_5^5 & a_6^5 \\ a_1^6 & a_2^6 & a_3^6 & a_4^6 & a_5^6 & a_6^6 \end{Vmatrix} = \Sigma \pm a_1^1\, a_2^2\, a_3^3\, a_4^4\, a_5^5\, a_6^6$$

otrzymujemy z niego, opuszczając pierwszą linią a trzecią kolumnę, albo drugą i piątą linią a trzecią i czwartą kolumnę, wyznaczniki mniejsze. Jeden z nich jest stopnia piątego:

$$\begin{Vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_4^2 & a_5^2 & a_6^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_4^3 & a_5^3 & a_6^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_4^4 & a_5^4 & a_6^4 \\ a_1^5 & a_2^5 & a_4^5 & a_5^5 & a_6^5 \\ a_1^6 & a_2^6 & a_4^6 & a_5^6 & a_6^6 \end{Vmatrix} = W^1_3.$$

a drugi czwartego:

$$W^{2,\;5,}_{3,\;4,} = \begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_5^1 & a_6^1 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_5^3 & a_6^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_5^4 & a_6^4 \\ a_1^6 & a_2^6 & a_5^6 & a_6^6 \end{Vmatrix}$$

Określenie: „Dwa wyznaczniki mniejsze różnego stopnia nazywają się nawzajem dopełniającymi się względem danego wyznacznika zupełnego, jeżeli linie i kolumny w pierwszym z nich są brakującymi do uzupełnienia liniami i kolumnami w drugim.

Takimi są n. p. następujące:

$$W^{2,\;5,}_{3,\;4,} = \begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_5^1 & a_6^1 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_5^3 & a_6^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_5^4 & a_6^4 \\ a_1^6 & a_2^6 & a_5^6 & a_6^6 \end{Vmatrix} \qquad W^{1,\;3,\;4,\;6,}_{1,\;2,\;5,\;6,} = \begin{Vmatrix} a_3^2 & a_4^2 \\ a_3^5 & a_4^5 \end{Vmatrix}$$

względem

$$W_{(6)} = \begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 & a_6^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 & a_6^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 & a_6^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & a_5^4 & a_6^4 \\ a_1^5 & a_2^5 & a_3^5 & a_4^5 & a_5^5 & a_6^5 \\ a_1^6 & a_2^6 & a_3^6 & a_4^6 & a_5^6 & a_6^6 \end{Vmatrix}$$

Określenie 2: Dwa wyznaczniki mniejsze tego samego stopnia nazywają się w stosunku do danego, zupełnego, sprzężonymi, jeżeli brakujące jednemu z nich do uzupełnienia linie mają takie same skazówki, jakimi są oznaczone kolumny brakujące do uzupełnienia drugiemu.

Takimi n. p. są następujące

$$W_3^2 = \begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_4^1 & a_5^1 & a_6^1 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_4^3 & a_5^3 & a_6^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_4^4 & a_5^4 & a_6^4 \\ a_1^5 & a_2^5 & a_4^5 & a_5^5 & a_6^5 \\ a_1^6 & a_2^6 & a_4^6 & a_5^6 & a_6^6 \end{Vmatrix}; \quad W_2^3 = \begin{Vmatrix} a_1^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 & a_6^1 \\ a_1^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 & a_6^2 \\ a_1^4 & a_3^4 & a_4^4 & a_5^4 & a_6^4 \\ a_1^5 & a_3^5 & a_4^5 & a_5^5 & a_6^5 \\ a_1^6 & a_3^6 & a_4^6 & a_5^6 & a_6^6 \end{Vmatrix}$$

względem

$$W_{(6)} = \Sigma \pm a_1^1 . a_2^2 . a_3^3 . a_4^4 . a_5^5 . a_6^6 .$$

6. Porządkowanie wyznacznika.

Dla łatwiejszego przedstawienia rzeczy weźmy na uwagę wyznacznik rozwinięty trzeciego stopnia

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{Vmatrix} = \begin{array}{l} a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_3^2 a_2^3 + a_2^1 a_3^2 a_1^3 \quad = \\ - a_2^1 a_1^2 a_3^3 + a_3^1 a_1^2 a_2^3 - a_3^1 a_2^2 a_1^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_2^3 a_3^2 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 \\ \quad - a_1^2 a_2^1 a_3^3 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 - a_1^3 a_2^2 a_3^1 \end{array}$$

i w pierwszem rozwinięciu wyłączmy przed nawias, gdzie można, wyrazy należące do jednej linii, a w drugiem do jednej kolumny, n. p. do pierwszej linii w pierwszem rozwinięciu, a w drugiem do pierwszej kolumny, a otrzymamy

a) $W_{(3)} = a_1^1 (a_2^2 a_3^3 - a_3^2 a_2^3) - a_2^1 (a_1^2 a_3^3 - a_3^2 a_1^3 + a_3^1 (a_1^2 a_2^3 - a_2^2 a_1^3.$

albo pisząc

$$W_1^1 = \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad W_2^1 = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad W_3^1 = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix}$$

$$\alpha) \ldots W(_3) = a_1^1 W_1^1 - a_2^1 W_2^1 + a_3^1 W_3^1.$$

Wzór ten przedstawia wyznacznik uporządkowany według wyrazów składających pierwszą linią.

Porządkując według wyrazów pierwszej kolumny mamy

$$\text{b)} \; W(_3) = a_1^1(a_2^2 a_3^3 - a_2^3 a_3^2) - a_1^2(a_2^1 a_3^3 - a_2^3 a_3^1) + a_1^3(a_2^1 a_3^2 - a_2^2 a_3^1)$$

albo pisząc

$$W_1^1 = \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad W_1^2 = \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad W_1^3 = \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

$$\beta) \ldots W(_3) = a_1^1 W_1^1 - a_1^2 W_1^2 + a_1^3 W_1^3.$$

Możnaby ten sam wyznacznik uporządkować według wyrazów drugiej linii albo kolumny; tudzież według ilości trzeciej linii albo kolumny.

Zatem wyznacznik $W(_3)$ tak się jeszcze przedstawia:

$$W(_3) = - a_1^2 W_1^2 + a_2^2 W_2^2 - a_3^2 W_3^2 \ldots \alpha').$$
$$W(_3) = - a_2^1 W_2^1 + a_2^2 W_2^2 - a_2^3 W_2^3 \ldots \beta').$$
$$W(_3) = a_1^3 W_1^3 - a_2^3 W_2^3 + a_3^3 W_3^3 \ldots \ldots \alpha'').$$
$$W(_3) = a_3^1 W_3^1 - a_3^2 W_3^2 + a_3^3 W_3^3 \ldots \ldots \beta'').$$

Jakie mają mieć znaki wyznaczniki mniejsze, łatwo dojść można: Naprzód napisać trzeba każdego składnik zasadniczy i dołączyć do niego wyraz przed wyznacznikiem stojący w miejscu takiem, aby skaźniki górne albo dolne były w naturalnym porządku, a następnie baczyć na to, ile przemian wykonać należy na skaźnikach nieuporządkowanych, aby je także sprowadzić do naturalnego szeregu. Parzysta ilość takich przestawień wskazuje dodatni, nieparzysta odjemny znak wyznacznika mniejszego.

Weźmy na uwagę wyznacznik mniejszy,

$W_1^1 = \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$ którego składnikiem głównym jest $a_2^2\, a_3^3$. Położywszy przed nim wyraz a_1^1 mamy zasadniczy składnik dodatni $a_1^1\, a_2^2\, a_3^3$ zupełnego wyznacznika $\sum \pm a_1^1\, a_2^2\, a_3^3$.

Składnikiem głównym wyznacznika mniejszego

$W_2^1 = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$ jest $a_1^2\, a_3^3$. Postawiwszy przed nim wyraz a_1^1 mamy $- a_1^1 a_1^2 a_3^3$, ponieważ jedno przestawienie na skaźnikach dolnych wykonane sprowadza je do naturalnego porządku.

Znak wyznacznika $W_1^3 = \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$ jest dodatni, albowiem w $a_1^3\, a_2^1\, a_3^2$ skaźnik górny 3. musi dwa razy zmienić miejsce, aby się dostał na ostatnie.

Zupełnie takim samym sposobem można porządkować wyznaczniki rzędów wyższych: albo według wyrazów stanowiących którąbądź linią (rząd) „r“ albo którąbądź kolumnę (słup) „s“; dlatego mamy wzory ogólne

$$W = a_1^r W_1^r + a_2^r W_2^r + a_3^r W_3^r + \ldots\ldots + a_n^r W_n^r \ldots A).$$

$$W = a_s^1 W_s^1 + a_s^2 W_s^2 + a_s^3 W_s^3 + \ldots\ldots + a_s^n W_s^n \ldots B).$$

przedstawiające wyznacznik jako sumę algebraiczną iloczynów ilości porządkujących i wyznaczników mniejszych, będących algebraicznymi uzupełnieniami tychże wyrazów porządkujących. Wzór A) wyraża wyznacznik uporządkowany według wyrazów rtej linii; a wzór B) ten sam oznacza wyznacznik, lecz uporządkowany według ilości stej kolumny.

7. Mnożenie i dzielenie wyznaczników przez jakąś liczbę.

Pomnożywszy obie strony równań A) i B) przez jakąkolwiek liczbę m, otrzymujemy

$$W\,m = m\,a_1^r W_1^r + m\,a_2^r W_2^r + m\,a_3^r W_3^r + \ldots + m\,a_n^r W_n^r.$$

$$W\,m = m\,a_s^1 W_s^1 + m\,a_s^2 W_s^2 + m\,a_s^3 W_s^3 + \ldots + m\,a_s^n W_s^n.$$

Z podzielenia zaś tych wzorów, o których była mowa, przez ilość m wynika

$$W : m = \frac{a_1^r}{m} W_1^r + \frac{a_2^r}{m} W_2^r + \frac{a_3^r}{m} W_3^r + \ldots + \frac{a_n^r}{m} W_n^r.$$

$$W : m = \frac{a_s^1}{m} W_s^1 + \frac{a_s^2}{m} W_s^2 + \frac{a_s^3}{m} W_s^3 + \ldots + \frac{a_s^n}{m} W_s^n.$$

Zatem wypływa

Twierdzenie 4: „Wyznacznik mnoży się albo dzieli przez jakąś liczbę, mnożąc albo dzieląc wszystkie wyrazy jednej którejkolwiek linii albo kolumny“.

Z tego twierdzenia znowu wynika *wniosek:* „Wyznacznik się nie zmienia, jeżeli jednę linią albo kolumnę mnożymy a drugą zaraz dzielimy przez jakąkolwiek liczbę“.

Wyżej widzieliśmy (twierd. 2), że wyznacznik jest zerem, jeżeli ma jakiekolwiek dwie linie albo kolumny równe. Otóż na mocy twierdzenia 4. przekonujemy się, że wyznacznik jest także zerem, jeżeli wyrazy jakiejkolwiek linii albo kolumny są z odpowiednimi wyrazami linii równoleglej w stosunku statecznym. Jakoż jeśli w wyznaczniku

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_1^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{Vmatrix} \qquad \begin{matrix} a_1^1 : a_2^1 = \alpha \\ a_1^2 : a_2^2 = \alpha \\ a_1^3 : a_2^3 = \alpha \end{matrix} \quad \text{to} \quad \begin{matrix} a_1^1 = \alpha .\, a_2^1 \\ a_1^3 = \alpha .\, a_2^2 \\ a_1^3 = \alpha .\, a_2^3 \end{matrix}$$

przeto

$$\begin{Vmatrix} \alpha .\, a_2^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ \alpha .\, a_2^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ \alpha .\, a_2^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{Vmatrix} = \alpha . \begin{Vmatrix} a_2^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{Vmatrix} = 0.$$

Okazało się więc

Twierdzenie 5. „Wyznacznik jest zerem, jeżeli wyrazy jego linii albo kolumny są z wyrazami drugiej linii albo kolumny w stosunku stałym“.

8. Ze wzorów ogólnych.

$$W = a_1^r W_1^r + a_2^r W_2^r + a_3^r W_3^r + a_4^r W_4^r + \ldots + a_n^r W_n^r \ldots A).$$
$$W = a_s^1 W_s^1 + a_s^2 W_s^2 + a_s^3 W_s^3 + a_s^4 W_s^4 + \ldots + a_s^n W_s^n \ldots B).$$

wysnuwamy

Twierdzenie 6. „Wyznacznik jest zerem, jeżeli w nim wszystkie wyrazy jednej linii albo kolumny są zerami“.

Jeżeli n. p.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

to, porządkując według wyrazów, drugą linią stanowiących, otrzymujemy algebryczną sumę: $W_{(3)} = 0.W_1^2 + 0.W_2^2 + 0.W_3^2 = 0.$

Twierdzenie 7. „Jeżeli ilości składające jakąkolwiek linią lub kolumnę są zerami z wyjątkiem jednej, wtedy wyznacznik jest wieloczynem tejże ilości przez wyznacznik rzędu o jeden stopień niższego, będący algebraicznem owej ilości uzupełnieniem“, Przykłady:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & 0 & a_3^2 \\ a_1^3 & 0 & a_3^3 \end{vmatrix} = - a_2^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix}$$

Z twierdzenia 7. wynika znowu

Twierdzenie 8. „Jeżeli wszystkie wyrazy wyznacznika, napisanego w postaci kwadratu, leżące po jednej stronie przekątni są zerami, wyznacznik przywodzi się do wieloczynu wyrazów na przekątni się znajdujących ze znakiem przynależnym".

Przykłady:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & 0 & 0 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & 0 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & 0 & 0 \\ a_2^3 & a_3^3 & 0 \\ a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 \begin{vmatrix} a_3^3 & 0 \\ a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 a_4^4.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4^1 \\ 0 & 0 & a_3^2 & a_4^2 \\ 0 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} = - a_4^1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_3^2 \\ 0 & a_2^3 & a_3^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 \end{vmatrix} = a_4^1 a_3^2 \begin{vmatrix} 0 & a_2^3 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{vmatrix} = a_4^1 a_3^2 a_2^3 a_1^4.$$

Z ostatniego twierdzenia wynika *wniosek:* „Wszelki wyznacznik można, jeśli zachodzi potrzeba, przekształcić na wyznacznik stopnia wyższego, a to wstawiając linią i kolumnę tego samego rzędu, z których linia albo kolumna ma wyrazy dowolne z wyjątkiem wyrazu wspólnego który musi być jednostką, a kolumna lub linia ma zera za wyrazy z wyjątkiem wspólnego".

N. p.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & 0 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 0 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & 0 & 0 \\ \alpha_1^3 & \alpha_3^3 & 1 & 0 \\ \alpha_1^4 & \alpha_2^4 & \alpha_3^4 & 1 \end{vmatrix}$$

tutaj wprowadzone wyrazy α_1^3 α_2^3 α_1^4 α_2^4 α_3^4 są zupełnie dowolne.

Jeżeli we wzorach

$$A) \dots W = a_1^r W_1^r + a_2^r W_2^r + a_3^r W_3^r + \dots\dots + a_n^r W_n^r.$$
$$B) \dots W = a_s^1 W_s^1 + a_s^2 W_s^2 + a_s^3 W_s^3 + \dots\dots + a_s^n W_s^n.$$

a mianowicie w pierwszym wyrazy porządkujące $a_1^r\ a_2^r\ a_3^r \dots a_n^r$ zastąpimy innymi wyznacznika wyrazami: $a_1^w\ a_2^w\ a_3^w \dots a_n^w$; zaś w drugim $a_s^1\ a_s^2\ a_s^3 \dots a_s^n$ zastąpimy wyrazami $a_v^1\ a_v^2\ a_v^3 \dots a_v^n$, oba wzory stają się zerami, albowiem ilości porządkujące wyręczyć innymi równoległymi znaczy linię lub kolumnę zastąpić inną linią lub kolumną tego samego wyznacznika; więc

$$a_1^w W_1^r + a_2^w W_2^r + a_3^w W_3^r + a_4^w W_4^r + \dots + a_n^w W_n^r = 0.$$
$$a_v^1 W_s^1 + a_v^2 W_s^2 + a_v^3 W_s^3 + a_v^4 W_s^4 + \dots + a_v^n W_s^n = 0.$$

Ztąd Twierdzenie 9. „Jeżeli w wyznaczniku uporządkowanym według ilości składających jednę linię albo kolumnę zastąpiono ilości te przez odpowiadające ilości innej linii albo kolumny, wyznacznik staje się zerem“.

9. Przekształcanie wyznaczników.

We wzorach

$$A) \dots W = a_1^r W_1^r + a_2^r W_2^r + a_3^r W_3^r + a_4^r W_4^r + \dots + a_n^r W_n^r.$$
$$B) \dots W = a_s^1 W_s^1 + a_s^2 W_s^2 + a_s^3 W_s^3 + a_s^4 W_s^4 + \dots + a_s^n W_s^n.$$

zamiast wyrazów porządkujących podstawmy dwumiany

$$(a_1 \pm m\, a_1^w),\ (a_2^r \pm m\, a_2^w),\ (a_3^r \pm m\, a_3^w) \dots (a_n^r \pm m\, a_n^w)$$

w pierwszym, a w drugim dwumiany

$$(a_s^1 \pm m\, a_v^1),\ (a_s^2 \pm m\, a_v^2),\ (a_s^3 \pm m\, a_v^3) \dots (a_s^n \pm m\, a_v^n)$$

a wykonawszy mnożenie otrzymujemy

$$a) \dots a_1^r W_1^r + a_2^r W_2^r + a_3^r W_3^r + a_4^r W_4^r + \dots + a_n^r W_n^r$$
$$\pm m (a_1^w W_1^r + a_2^w W_2^r + a_3^w W_3^r + \dots + a_n^w W_n^r)$$
$$b) \dots a_s^1 W_s^1 + a_s^2 W_s^2 + a_s^3 W_s^3 + a_s^4 W_s^4 + \dots + a_s^n W_s^n$$
$$\pm m (a_v^1 W_s^1 + a_v^2 W_s^2 + a_v^3 W_s^3 + \dots + a_v^n W_s^n)$$

W tych sumach algebraicznych części tychże sum nawiasami objęte są zerami według twierdzenia poprzedzającego. Zatem wyłania się

Twierdzenie 10. „Wyznacznik nie zmienia się, gdy ilościom jednej linii lub kolumny przydamy albo im ujmiemy odpowiadające ilości innych linij albo kolumn, pomnożone przez jakąkolwiek liczbę".

Gdy we wzorach A) i B) zamiast ilości porządkujących napiszemy w pierwszym: $(a_1^r + \alpha_1^r)$, $(a_2^r + \alpha_2^r)$, $(a_3^r + \alpha_3^r)$, $(a_4^r + \alpha_4^r)$ $\ldots (a_n^r + \alpha_n^r)$; zaś w drugim: $(a_s^1 + \alpha_s^1)$, $(a_s^2 + \alpha_s^2)$, $(a_s^3 + \alpha_s^3) \ldots$ $(a_s^4 + \alpha_r^4) \ldots (a_s^n + \alpha_s^n)$, zamienimy je na następujące

$$\begin{aligned} \text{E)} \ldots & (a_1^r + \alpha_1^r) W_1^r + (a_2^r + \alpha_2^r) W_2^r + (a_3^r + \alpha_3^r) W_3^r + \ldots \\ & + (a_n^r + \alpha_n^r) W_n^r = \\ & = a_1^r W_1^r + a_2^r W_2^r + a_3^r W_3^r + a_4^r W_4^r + \ldots + a_n^r W_n^r + \\ & + \alpha_1^r W_1^r + \alpha_2^r W_2^r + \alpha_3^r W_3^r + \alpha_4^r W_4^r + \ldots + \alpha_n^r W_n^r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{F)} \ldots & (a_s^1 + \alpha_s^1) W_s^1 + (a_s^2 + \alpha_s^2) W_s^2 + (a_s^3 + \alpha_s^3) W_s^3 + \ldots \\ & + (a_s^n + \alpha_s^n) W_s^n = \\ & = a_s^1 W_s^1 + a_s^2 W_s^2 + a_s^3 W_s^3 + a_s^4 W_s^4 + \ldots + a_s^n W_s^n + \\ & + \alpha_s^1 W_s^1 + \alpha_s^2 W_s^2 + \alpha_s^3 W_s^3 + \alpha_s^4 W_s^4 + \ldots + \alpha_s^n W_s^n. \end{aligned}$$

Wzór E) przedstawia sumę algebraiczną dwóch wyznaczników tego samego stopnia, mających te same wiersze, tylko rty wiersz jednego różni się od rtego wiersza drugiego. Tak samo wzór F) wyraża sumę algebraiczną dwóch wyznaczników mających wszystkie kolumny te same, a tylko sta jednego różna jest od stej drugiego.

Mamy więc znowu

Twierdzenie 11. „Wyznaczniki tego samego stopnia, mające wszystkie linie wspólne prócz jednej, albo wszystkie kolumny z wyjątkiem jednej, można zlać w jeden wyznacznik; trzeba tylko wyrazami dodać linie lub kolumny niewspólne". Odwrotnie: „Jeżeli wyrazy składające linią lub kolumnę dadzą się rozłożyć na wielomiany, wyznacznik można rozłożyć na sumę algebraiczną wyznaczników tego samego stopnia, mających wspólne linie albo kolumny prócz jednej".

Przykłady:

$$1 \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 + \alpha_1^2 & a_2^2 + \alpha_2^2 & a_3^2 + \alpha_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}.$$

$$2 \quad \begin{vmatrix} a_1^1 + \alpha_1^1 & a_2^1 + \alpha_2^1 & a_3^1 + \alpha_3^1 \\ a_1^2 + \alpha_1^2 & a_2^2 + \alpha_2^2 & a_3^2 + \alpha_3^2 \\ a_1^3 + \alpha_1^3 & a_2^3 + \alpha_2^3 & a_3^3 + \alpha_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 + \alpha_2^1 & a_3^1 + \alpha_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 + \alpha_2^2 & a_3^2 + \alpha_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 + \alpha_2^3 & a_3^3 + \alpha_3^3 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \alpha_1^1 & a_2^1+\alpha_2^1 & a_3^1+\alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & a_2^2+\alpha_2^2 & a_3^2+\alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & a_2^3+\alpha_2^3 & a_3^3+\alpha_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1+\alpha_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2+\alpha_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3+\alpha_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1 & \alpha_2^1 & a_3^1+\alpha_3^1 \\ a_1^2 & \alpha_2^2 & a_3^2+\alpha_3^2 \\ a_1^3 & \alpha_2^3 & a_3^3+\alpha_3^3 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \alpha_1^1 & a_2^1 & a_3^1+\alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & a_2^2 & a_3^2+\alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & a_2^3 & a_3^3+\alpha_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & a_3^1+\alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & a_3^2+\alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & a_3^3+\alpha_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \alpha_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \alpha_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & \alpha_3^3 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_1^1 & \alpha_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & \alpha_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & \alpha_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ a_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ a_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ \alpha_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ \alpha_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & a_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & a_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & a_2^3 & \alpha_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & a_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & a_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{vmatrix}.$$

10. Obliczanie wyznaczników.

Wyrachowanie wartości wyznacznika wyższego niż drugi stopnia jest zwykle uciążliwe. Na to można użyć wzorów

$$\text{A)} \ldots W = a_1^r W_1^r + a_2^r W_2^r + a_3^r W_3^r + \ldots + a_n^r W_n^r.$$
$$\text{B)} \ldots W = a_s^1 W_s^1 + a_s^2 W_s^2 + a_s^3 W_s^3 + \ldots + a_s^n W_s^n.$$

Najłatwiej dochodzimy do celu, przerabiając wyznacznik na inny rzędu niższego, a ten znowu na niższy i t. d. i t. d. aż dojdziemy do wyznacznika rzędu drugiego. Przerabianie uskutecznia się na zasadzie twierdzenia 10, które wyrażają wzory

$$\text{a)} \ldots a_1^r W_1^r + a_2^r W_2^r + a_3^r W_3^r + \ldots + a_n^r W_n^r +$$
$$\pm\, m\,(a_1^w W_1^r + a_2^w W_2^r + a_3^w W_3^r + \ldots + a_n^w W_n^r).$$
$$\text{b)} \ldots a_s^1 W_s^1 + a_s^2 W_s^2 + a_s^3 W_s^3 + \ldots + a_s^n W_s^n +$$
$$\pm\, m\,(a_v^1 W_s^1 + a_v^2 W_s^2 + a_v^3 W_s^3 + \ldots + a_v^n W_s^n).$$

przez dodawanie albo odejmowanie linij albo kolumn pomnożonych, jeśli trzeba, przez jakąś liczbę w celu otrzymania wyznacznika tę samę mającego wartość, którego wyrazy jednej linii albo kolumny są zerami prócz jednego. Tak coraz dalej postępując, przywodzimy dany wyznacznik do wieloczynu jednego wyrazu przez wyznacznik niższy z przynależnym znakiem.

Tok postępowania okaże się na przykładach następujących.

Przykład 1.

$$\begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 6 & 28 & 33 & 8 \\ 10 & 40 & 54 & 13 \\ 8 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix}$$

W tym wyznaczniku pierwszą linią mnożymy przez 2. i odciągamy od linii drugiej, przez co przyprowadzamy wyznacznik do formy

$$\begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 10 & 40 & 54 & 13 \\ 8 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix}$$

W tej nowej postaci wyznacznika wyrazy kolumny trzeciej mnożymy przez 2, dodajemy do wyrazów kolumny drugiej i otrzymujemy:

$$\begin{vmatrix} 3 & 47 & 17 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & 148 & 54 & 13 \\ 8 & 129 & 46 & 11 \end{vmatrix}$$

A teraz przesuńmy kolumnę trzecią na miejsce pierwszej, następnie linią drugą na miejsce pierwszej, przez co zmieniamy znak wyznacznika i przyprowadzamy do formy:

$$-\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & 3 & 47 & 4 \\ 54 & 10 & 148 & 13 \\ 46 & 8 & 129 & 11 \end{vmatrix}$$

z której bez zmiany wartości otrzymujemy wyznacznik trzeciego stopnia:

$$1. \begin{vmatrix} 3 & 47 & 4 \\ 10 & 148 & 13 \\ 8 & 129 & 11 \end{vmatrix}$$

Pierwszy wiersz tego wyznacznika mnożymy przez 3 i odejmujemy od drugiego, przez co otrzymujemy:

$$\begin{vmatrix} 3 & 47 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \\ 8 & 129 & 11 \end{vmatrix}$$

Teraz w tej postaci nowej drugi wiersz mnożymy przez 8 — i odejmujemy go od trzeciego, przez co wartość się nie zmienia:

$$\begin{vmatrix} 3 & 47 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \\ 0 & 73 & 3 \end{vmatrix}$$

Pomnożywszy drugi wiersz przez 4 — i odjąwszy go od pierwszego, mamy nową postać wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} -1 & 19 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \\ 0 & 73 & 3 \end{vmatrix}$$

a dodawszy pierwszą linię do drugiej, otrzymujemy ostatecznie:

$$\begin{vmatrix} -1 & 19 & 0 \\ 0 & 26 & 1 \\ 0 & 73 & 3 \end{vmatrix} = -1. \begin{vmatrix} 26 & 1 \\ 73 & 3 \end{vmatrix} = -5.$$

Uwaga. Każdego wyznacznika mniejszego, jaki się wyłania przy obliczaniu sposobem wskazanym, oznaczamy znak podług prawidła, które podaliśmy przy porządkowaniu wyznacznika.

Wszelako łatwiej osiągniemy cel zamierzony postępowaniem następującem: Trzeba naprzód linią, w której się znajduje wyraz mający być współczynnikiem wyznacznika mniejszego, przesunąć na miejsce pierwszej; następnie kolumnę, w której ów wyraz jest umieszczony, przenieść na miejsce pierwszej i policzyć ilość przesunięć (przestawień) linii i kolumny, które nastąpić musiały, aby się rzeczony wyraz znalazł w pierwszej linii i w pierwszej kolumnie. Parzysta ilość przestawień takich według twierdzenia trzeciego, ogólniej wysłowionego, znaku nie zmienia, nieparzysta znak wyznacznika zmienia, bez względu na znak wynikający z wykonania działań algebraicznych na wyrazach.

Tak n. p. w przerobionym wyznaczniku

$$\begin{vmatrix} 3 & 47 & 17 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & 148 & 54 & 13 \\ 8 & 129 & 46 & 11 \end{vmatrix}$$

kolumnę trzecią przesunęliśmy na miejsce pierwszej, wykonawszy dwa przestawienia; następnie wiersz drugi, w którym się znajduje wyraz — 1 przesunęliśmy na miejsce pierwszego: więc razem wykonaliśmy 3 przestawienia, dlatego wyznacznik musi mieć znak odjemny, zatem

$$-\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & 3 & 47 & 4 \\ 54 & 10 & 148 & 13 \\ 46 & 8 & 129 & 11 \end{vmatrix} = +1. \begin{vmatrix} 3 & 47 & 4 \\ 10 & 148 & 13 \\ 8 & 129 & 11 \end{vmatrix}$$

Przykład 2.

$$\begin{vmatrix} 13 & -11 & 34 & -54 \\ 6 & -5 & 16 & -25 \\ -16 & 4 & -16 & 64 \\ 10 & -8 & 17 & -40 \end{vmatrix}$$

Wyrazy pierwszej linii dodajemy do wyrazów linii trzeciej i otrzymujemy nową formę

$$\begin{vmatrix} 13 & -11 & 34 & -54 \\ 6 & -5 & 16 & -25 \\ -3 & -7 & 18 & 10 \\ 10 & -8 & 17 & -40 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 13 & 11 & 34 & -54 \\ 6 & 5 & 16 & -25 \\ -3 & 7 & 18 & 10 \\ 10 & 8 & 17 & -40 \end{vmatrix}$$

Teraz mnożymy przez 2 wiersz drugi i odejmujemy od pierwszego: więc

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 6 & 5 & 16 & -25 \\ -3 & 7 & 18 & 10 \\ 10 & 8 & 17 & -40 \end{vmatrix}$$

Znowu mnożymy wyrazy pierwszej linii naprzód przez 10 i odejmujemy od wyrazów linii czwartej; następnie mnożymy tę samę linię przez 3 i dodajemy do trzeciej; ostatecznie pierwszą linią pomnożoną przez 6 odejmujemy od drugiej i takim sposobem przerabiamy wyznacznik na następujący:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 10 & 24 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -1. \begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 10 & 24 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

W tym wyznaczniku trzeciego stopnia mnożymy wiersz pierwszy przez 2 i odejmujemy od drugiego. przez co sprowadzamy go do formy

$$-\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 12 & 16 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = +1. \begin{vmatrix} 12 & 16 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -4.$$

Rozwiązywanie równań pierwszego stopnia o wielu niewiadomych nastręcza sposobność do obliczania wyznaczników. Weźmy więc na uwagę równania o trzech niewiadomych

$$\begin{aligned} a_1^1 x + a_2^1 y + a_3^1 z &= \alpha^1 \\ a_1^2 x + a_2^2 y + a_3^2 z &= \alpha^2 \ldots .1). \\ a_1^3 x + a_2^3 y + a_3^3 z &= \alpha^3. \end{aligned}$$

Spółczynniki niewiadomych ustawmy w kwadrat wyznacznikowy i rozwińmy wyznacznik na sumę algebraiczną.

$$W = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_1^1 W_1^1 + a_1^2 W_1^2 + a_1^3 W_1^3 = \\ = \; & a_2^1 W_2^1 + a_2^2 W_2^2 + a_2^3 W_2^3 = \\ & a_3^1 W_3^1 + a_3^2 W_3^2 + a_3^3 W_3^3. \end{aligned}$$

Pomnożywszy pierwsze równanie układu 1) przez W_1^1, drugie przez W_1^2, trzecie przez W_1^3 dodajmy razem, przez co otrzymujemy

$$(a_1^1 W_1^1 + a_1^2 W_1^2 + a_1^3 W_1^3).x + (a_2^1 W_1^1 + a_2^2 W_1^2 + a_2^3 W_1^3).y$$
$$+ (a_3^1 W_1^1 + a_3^2 W_1^2 + a_3^3 W_1^3) z = \alpha^1 W_1^1 + \alpha^2 W_1^2 + \alpha^3 W_1^3.$$

Na mocy twierdzenia 9. są

$$a_2^1 W_1^1 + a_2^2 W_1^2 + a_2^3 W_1^3 = 0.$$
$$a_3^1 W_1^1 + a_3^2 W_1^2 + a_3^3 W_1^3 = 0.$$

dlatego powyższe równanie przywodzi się do następującej formy:

$$\alpha) \ldots (a_1^1 W_1^1 + a_1^2 W_1^2 + a_1^3 W_1^3).x = \alpha^1 W_1^1 + \alpha^2 W_1^2 + \alpha^3 W_1^3.$$

którego druga strona wyraża to, czem staje się wyznacznik W, gdy w nim wyrazy pierwszej kolumny zastąpimy drugimi stronami równań układu 1).

Z pomnożenia pierwszego równania układu 1) przez W_2^1, drugiego przez W_2^2 a trzeciego przez W_2^3 i dodania tychże równań wyłoni się wzór:

$$(a_1^1 W_2^1 + a_1^2 W_2^2 + a_1^3 W_2^3).x + (a_2^1 W_2^1 + a_2^2 W_2^2 + a_2^3 W_2^3) y +$$
$$+ (a_3^1 W_2^1 + a_3^2 W_2^2 + a_3^3 W_2^3) z = \alpha^1 W_2^1 + \alpha^2 W_2^2 + \alpha^3 W_2^3$$

w którym także

$$a_1^1 W_2^1 + a_1^2 W_2^2 + a_1^3 W_2^3 = 0$$
$$a_3^1 W_2^1 + a_3^2 W_2^2 + a_3^3 W_2^3 = 0.$$

przeto

$$\beta)\ldots(a_2^1 W_2^1 + a_2^2 W_2^2 + a_2^3 W_2^3)\,y = \alpha^1 W_2^1 + \alpha^2 W_2^2 + \alpha^3 W_2^3.$$

Ostatecznie pomnóżmy pierwsze równanie układu 1) przez W_3^1, drugie przez W_3^2, a trzecie przez W_3^3 i zbierzmy razem te równania, a otrzymamy

$$(a_1^1 W_3^1 + a_1^2 W_3^2 + a_1^3 W_3^3)\,x + (a_2^1 W_3^1 + a_2^2 W_3^2 + a_2^3 W_3^3)\,y$$
$$+ (a_3^1 W_3^1 + a_3^2 W_3^2 + a_3^3 W_3^3)\,z = \alpha^1 W_3^1 + \alpha^2 W_3^2 + \alpha^3 W_3^3.$$

a że $a_1^1 W_3^1 + a_1^2 W_3^2 + a_1^3 W_3^3 = 0.$

$a_2^1 W_2^1 + a_2^2 W_3^2 + a_2^3 W_3^3 = 0.$

dlatego:

$$\gamma)\ldots(a_3^1 W_3^1 + a_3^2 W_3^2 + a_3^3 W_3^3)\,z = \alpha^1 W_3^1 + \alpha^2 W_3^2 + \alpha^3 W_3^3.$$

Z równań α) β) γ) wynikają

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\alpha^1 W_1^1 + \alpha^2 W_1^2 + \alpha^3 W_1^3}{a_1^1 W_1^1 + a_1^2 W_1^2 + a_1^3 W_1^3.} \\ y &= \frac{\alpha^1 W_2^1 + \alpha^2 W_2^2 + \alpha^3 W_2^3}{a_2^1 W_2^1 + a_2^2 W_2^2 + a_2^3 W_2^3.} \\ z &= \frac{\alpha^1 W_3^1 + \alpha^2 W_3^2 + \alpha^3 W_3^3}{a_3^1 W_3^1 + a_3^2 W_3^2 + a_3^3 W_3^3.} \end{aligned}\right\} \ldots 2).$$

Do tych samych wypadków dojdziemy inną drogą. W tym celu pomnóżmy wyznacznik nie uporządkowany W. naprzód przez x. mnożąc kolumnę pierwszą:

$$W.x = \begin{vmatrix} a_1^1 x & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 x & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 x & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

Wyznacznik ten nie zmienia się, jeżeli drugą kolumnę pomnożoną przez „y“ i trzecią przez „z“ dodamy do pierwszej; więc

$$W.x = \begin{vmatrix} a_1^1 x + a_2^1 y + a_3^1 z & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 x + a_2^2 y + a_3^2 z & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 x + a_2^3 y + a_3^3 z & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ \alpha^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ \alpha^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

Mnożymy teraz wyznacznik W. przez „y.“, mnożąc drugą kolumnę

$$W.y = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 y & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 y & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 y & a_3^3 \end{vmatrix}$$

Pomnożywszy pierwszą kolumnę przez „x" a trzecią przez „z" i dodawszy do drugiej, przywodzimy wyznacznik W.y do wzoru:

$$W.y = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^1x + a_2^1y + a_3^1z & a_3^1 \\ a_1^2 & a_1^2x + a_2^2y + a_3^2z & a_3^2 \\ a_1^3 & a_1^3x + a_2^3y + a_3^3z & a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \alpha^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & \alpha^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & \alpha^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

Podobnem postępowaniem dochodzimy do

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1z \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2z \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_1^1x + a_2^1y + a_3^1z \\ a_1^2 & a_2^2 & a_1^2x + a_2^2y + a_3^2z \\ a_1^3 & a_2^3 & a_1^3x + a_2^3y + a_3^3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \alpha^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \alpha^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & \alpha^3 \end{vmatrix}$$

Porządkując wyznaczniki W.x; W.y; W.z i drugie strony równań wyznacznikowych według wyrazów, które składają kolumny, pierwszy według wyrazów pierwszej, drugi według drugiej, a trzeci według wyrazów trzeciej kolumny, otrzymujemy wzory α) β) γ) a z nich niewiadome x y z.

Takim samym sposobem rozwiązuje się równania o czterech, pięciu i więcej niewiadomych.

Jeśli naprzykład dane są

$$\begin{aligned} a_1^1x + a_2^1y + a_3^1z + a_4^1v &= \alpha^1. \\ a_1^2x + a_2^2y + a_3^2z + a_4^2v &= \alpha^2. \quad \ldots A). \\ a_1^3x + a_2^3y + a_3^3z + a_4^3v &= \alpha^3. \\ a_1^4x + a_2^4y + a_3^4z + a_4^4v &= \alpha^4. \end{aligned}$$

wtedy

$$B) \ldots \quad \begin{aligned} x &= \frac{\alpha^1W_1^1 + \alpha^2W_1^2 + \alpha^3W_1^3 + \alpha^4W_1^4}{a_1^1W_1^1 + a_1^2W_1^2 + a_1^3W_1^3 + a_1^4W_1^4.} \\ y &= \frac{\alpha^1W_2^1 + \alpha^2W_2^2 + \alpha^3W_2^3 + \alpha^4W_2^4}{a_2^1W_2^1 + a_2^2W_2^2 + a_2^3W_2^3 + a_2^4W_2^4.} \\ z &= \frac{\alpha^1W_3^1 + \alpha^2W_3^2 + \alpha^3W_3^3 + \alpha^4W_3^4}{a_3^1W_3^1 + a_3^2W_3^2 + a_3^3W_3^3 + a_3^4W_3^4.} \\ v &= \frac{\alpha^1W_4^1 + \alpha^2W_4^2 + \alpha^3W_4^3 + \alpha^4W_4^4}{a_4^1W_4^1 + a_4^2W_4^2 + a_4^3W_4^3 + a_4^4W_4^4.} \end{aligned}$$

Ztąd ogólne prawidło: „Pierwiastki n. równań pierwszego stopnia z równą liczbą niewiadomych, wyrażają się ułamkami mającymi za wspólny mianownik wyznacznik współczynników ilości niewiadomych, a za liczniki wyznaczniki powstające z wyznacznika danego, jeżeli w nim zastąpimy kolumnę współczynników niewiadomej wyrachować się mającej przez kolumnę, utworzoną z drugich stron równań danych“.

Aby rozwiązanie równań było możliwe, wyznacznik

$$W = a_1^1 W_1^1 + a_1^2 W_1^2 + a_1^3 W_1^3 + \ldots + a_1^n W_1^n$$
$$W = a_2^1 W_2^1 + a_2^2 W_2^2 + a_2^3 W_2^3 + \ldots + a_2^n W_2^n.$$
$$W = a_3^1 W_3^1 + a_3^2 W_3^2 + a_3^3 W_3^3 + \ldots + a_3^n W_3^n.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$W = a_n^1 W_n^1 + a_n^2 W_n^2 + a_n^3 W_n^3 + \ldots + a_n^n W_n^n.$$

współczynników niewiadomych musi być różny od zera, jak również jego wyznaczniki mniejsze

$$\begin{array}{l} W_1^1 \; W_1^2 \; W_1^3 \ldots\ldots \\ W_2^1 \; W_2^2 \; W_2^3 \ldots\ldots \\ W_3^1 \; W_3^2 \; W_3^3 \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

albo nie wszystkie równe zeru.

Jeśliby drugie strony danych równań były wszystkie zerami prócz jednej n. p. α^1, natenczas

$$x = \frac{\alpha^1 W_1^1}{W}; \quad y = \frac{\alpha^1 W_2^1}{W}; \quad z = \frac{\alpha^1 W_3^1}{W}$$

$$v = \frac{\alpha^1 W_4^1}{W}; \quad u = \frac{\alpha^1 W_5^1}{W} \quad \text{i t. d.}$$

t. z. wartości niewiadomych są proporcyonalne do wyznaczników mniejszych, czyli

$$\frac{x}{W_1^1} = \frac{y}{W_2^1} = \frac{z}{W_3^1} = \ldots = \frac{\alpha^1}{W}.$$

Teraz rozwiążmy kilka układów równań.

Przykład 1.

$$10x + 15y - 24z = 41.$$
$$15x - 12y + 16z = 10.$$
$$18x - 14y - 7z = -13.$$

$$W = \begin{vmatrix} 10 & 15 & -24 \\ 15 & -12 & 16 \\ 18 & -14 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 & 15 & -24 \\ 3 & -12 & 16 \\ 4 & -14 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 99 & 18 \\ 3 & -12 & 16 \\ 4 & -14 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 99 & 18 \\ 0 & -309 & -38 \\ 0 & -410 & -79 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 309 & 38 \\ 410 & 79 \end{vmatrix} = 8831.$$

$$W.x = \begin{vmatrix} 41 & 15 & -24 \\ 10 & -12 & 16 \\ -13 & -14 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 41 & 15 & -24 \\ 10 & -12 & 16 \\ -3 & -26 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 2. \begin{vmatrix} 41 & 15 & -24 \\ 5 & -6 & 8 \\ -3 & -26 & 9 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 56 & -3 & 0 \\ 5 & -6 & 8 \\ -8 & -20 & 1 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 56 & -3 & 0 \\ 69 & 154 & 0 \\ -8 & -19 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2. \begin{vmatrix} 56 & -3 \\ 69 & 154 \end{vmatrix} = 2.\ 8831 = W.x.$$

$$W.y = \begin{vmatrix} 10 & 41 & -24 \\ 15 & 10 & 16 \\ 18 & -13 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 41 & -24 \\ 5 & -31 & 40 \\ 8 & -54 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 103 & -104 \\ 5 & -31 & 40 \\ 3 & -23 & -23 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 103 & -104 \\ -1 & 15 & 86 \\ 3 & -23 & -23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 103 & -104 \\ -1 & 15 & 86 \\ 0 & 22 & 235 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 103 & -104 \\ 22 & 235 \end{vmatrix} =$$

$$= 3.\ 8831 = W.y.$$

$$W.z = \begin{vmatrix} 10 & 15 & 41 \\ 15 & -12 & 10 \\ 18 & -14 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 15 & 41 \\ 15 & -12 & 10 \\ 3 & -2 & -23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 15 & 41 \\ 0 & -2 & 125 \\ 3 & -2 & -23 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 21 & 110 \\ 0 & -2 & 125 \\ 3 & -2 & -23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 21 & 110 \\ 0 & -2 & 125 \\ 0 & -65 & -353 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 125 \\ 65 & 353 \end{vmatrix} = 8831.$$

Zatem: $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$.

Przykład 2.

$$x - 2y + z - 3.u = 1.$$
$$-2x + 7y - 4z + 12.u = 4.$$
$$3x + y - 3z + u = 9.$$
$$-x - y + 2z + 7.u = 6.$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & 7 & -4 & 12 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 7 & -6 & 10 \\ 0 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 7 & -6 & 10 \\ -3 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 1 & -6 & 10 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -28.$$

$$W.x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & 7 & -4 & 12 \\ 9 & 1 & -3 & 1 \\ 6 & -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 15 & -8 & 24 \\ 0 & 19 & -12 & 28 \\ 0 & 11 & -4 & 25 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 15 & 8 & 24 \\ 19 & 12 & 29 \\ 11 & 4 & 25 \end{vmatrix} = -4. \begin{vmatrix} 15 & 2 & 24 \\ 19 & 3 & 28 \\ 11 & 1 & 25 \end{vmatrix} = -4. \begin{vmatrix} -7 & 0 & -26 \\ -14 & 0 & -47 \\ 11 & 1 & 25 \end{vmatrix} =$$

$$= +4. \begin{vmatrix} 1 & 11 & 25 \\ 0 & 7 & 26 \\ 0 & 14 & 47 \end{vmatrix} = 4.\ 7 \begin{vmatrix} 1 & 26 \\ 2 & 47 \end{vmatrix} = -28.\ 5.$$

$$W.y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & -4 & 12 \\ 3 & 9 & -3 & 1 \\ -1 & 6 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 6 \\ 3 & 9 & -3 & 1 \\ -1 & 6 & 2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 2. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -6 & 10 \\ 0 & 7 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 6 & -6 & 10 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -12 & 0 & -8 \\ 16 & 0 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= -2. \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 16 & 13 \end{vmatrix} = -2.\ 28.$$

$$W.z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & 7 & 4 & 12 \\ 3 & 1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 7 & 6 & 10 \\ 0 & -3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & 10 \\ -3 & 7 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 13 & 10 \end{vmatrix} = -3. \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 13 & 10 \end{vmatrix} = -3.\ 28.$$

$$W.u = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 7 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -3 & 9 \\ -1 & -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 7 & -6 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 7 & -6 & 6 \\ -3 & 3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 1 & -6 & 6 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -28.$$

więc $x = 5$, $y = 2$, $z = 3$, $u = 1$.

11. Porządkowanie wyznacznika według mniejszych jego wyznaczników.

Wyznacznik stopnia wyższego, począwszy od czwartego, możemy także przedstawić jako sumę algebraiczną iloczynów, które powstają, jeżeli pomnożymy co dwa wyznaczniki mniejsze różnego w ogólności stopnia. W tym celu weźmy na uwagę wyznacznik czwartego stopnia, uporządkowany wedle wyrazów, wiersz pierwszy stanowiących:

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{Vmatrix} = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} - a_2^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix}$$

$$+ a_3^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_4^4 \end{vmatrix} - a_4^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 \end{vmatrix}$$

i każdy jego wyznacznik mniejszy trzeciego stopnia, uporządkujmy wedle wyrazów wiersza pierwszego; co uczyniwszy otrzymujemy

$$a_1^1 a_2^2 \begin{vmatrix} a_3^3 & a_4^3 \\ a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} - a_1^1 a_3^2 \begin{vmatrix} a_2^3 & a_4^3 \\ a_2^4 & a_4^4 \end{vmatrix} + a_1^1 a_4^2 \begin{vmatrix} a_2^3 & a_3^3 \\ a_2^4 & a_3^4 \end{vmatrix}$$

$$- a_2^1 a_1^2 \begin{vmatrix} a_3^3 & a_4^3 \\ a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} + a_2^1 a_3^2 \begin{vmatrix} a_1^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_4^4 \end{vmatrix} - a_2^1 a_4^2 \begin{vmatrix} a_1^3 & a_3^3 \\ a_1^4 & a_3^4 \end{vmatrix}$$

$$+ a_3^1 a_1^2 \begin{vmatrix} a_2^3 & a_4^3 \\ a_2^4 & a_4^4 \end{vmatrix} - a_3^1 a_2^2 \begin{vmatrix} a_1^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_4^4 \end{vmatrix} + a_3^1 a_4^2 \begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{vmatrix}$$

$$- a_4^1 a_1^2 \begin{vmatrix} a_2^3 & a_3^3 \\ a_2^4 & a_3^4 \end{vmatrix} + a_4^1 a_2^2 \begin{vmatrix} a_1^3 & a_3^3 \\ a_1^4 & a_3^4 \end{vmatrix} - a_4^1 a_3^2 \begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{vmatrix}$$

a zebrawszy wyznaczniki podobne, mamy $\Sigma \pm a_1^1 \, a_2^2 \, a_3^3 \, a_4^4 =$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3^3 & a_4^3 \\ a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2^3 & a_4^3 \\ a_2^4 & a_4^5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_4^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2^3 & a_3^3 \\ a_2^4 & a_3^4 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_4^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2^1 & a_4^1 \\ a_2^2 & a_4^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1^3 & a_3^3 \\ a_1^4 & a_3^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3^1 & a_4^1 \\ a_3^2 & a_4^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{vmatrix}.$$

Przypatrzywszy się temu wynikowi, zaraz poznamy, że mniejsze wyznaczniki mnożne powstały z wyrazów dwie pierwsze linie danego wyznacznika składających, przez kombinacye dwójkowe jego kolumn bez powtarzania wykonane; zaś mnożniki są wyznacznikami mniejszymi, które są mnożnych odpowiednimi uzupełnieniami algebraicznymi.

Jakie mają mieć znaki te mnożniki, łatwo dojdziemy; trzeba tylko ustawić obok siebie wyrazy przekątni głównej obu czynników i baczyć, ile przestawień na skazówkach wykonać należy, aby one wróciły do naturalnego szeregu.

Parzysta ilość przestawień oznajmia, że mnożnikowi należy się znak dodatni, nieparzysta, że mnożnik powinien mieć znak odjemny.

Wyznacznik piątego stopnia uporządkowany według mniejszych wyznaczników drugiego stopnia będzie miał postać taką:

$$\Sigma \pm a_1^1\, a_2^2\, a_3^3\, a_4^4\, a_5^5 =$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ a_3^4 & a_4^4 & a_5^4 \\ a_3^5 & a_4^5 & a_5^5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ a_2^4 & a_4^4 & a_5^4 \\ a_2^5 & a_4^5 & a_5^5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_4^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2^3 & a_3^3 & a_5^3 \\ a_2^4 & a_3^4 & a_5^4 \\ a_2^5 & a_3^5 & a_5^5 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} a_1^1 & a_5^1 \\ a_1^2 & a_5^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \\ a_2^5 & a_3^5 & a_4^5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ a_1^4 & a_4^4 & a_5^4 \\ a_1^5 & a_4^5 & a_5^5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2^1 & a_4^1 \\ a_2^2 & a_4^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1^3 & a_3^3 & a_5^3 \\ a_1^4 & a_3^4 & a_5^4 \\ a_1^5 & a_3^5 & a_5^5 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_2^1 & a_5^1 \\ a_2^2 & a_5^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_3^4 & a_4^4 \\ a_1^5 & \alpha_3^5 & a_4^5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_3^1 & a_4^1 \\ a_3^2 & a_4^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 & a_5^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_5^4 \\ a_1^5 & a_2^5 & a_5^5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_3^1 & a_5^1 \\ a_3^2 & a_5^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_4^4 \\ a_1^5 & a_2^5 & a_4^5 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_4^1 & a_5^1 \\ a_4^2 & a_5^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 \\ a_1^5 & a_2^5 & a_3^5 \end{vmatrix}.$$

Ten wzór wskazuje także, że wyznacznik można uważać za uporządkowany wedle mniejszych wyznaczników trzeciego stopnia, które utworzone zostały z trzech wydzielonych wierszy: trzeciego, czwartego i piątego przez kombinowanie trójkowe bez powtarzania kolumn danego wyznacznika.

Ztąd również nasuwa się wniosek, że porządkując wyznaczniki stopni wyższych, możemy wydzielać dwie, trzy, cztery i t. d. którekolwiek linie poziome i z nich tworzyć wyznaczniki mniejsze porządkujące drugiego, trzeciego, czwartego... rzędu przez kombinowanie dwójkowe, trójkowe, czwórkowe i t. d. bez powtarzania.

Rozumie się samo przez się, że można zamiast wierszy w dowolnej ilości wydzielać kolumny i z nich kombinowaniem wierszy tworzyć wyznaczniki porządkujące, których stopień wskazuje ilość wydzielonych kolumn z danego wyznacznika.

Twierdzenie, że wyznacznik przedstawić się może jako suma algebraiczna iloczynów, wynikających z pomnożenia co dwóch nawzajem się uzupełniających wyznaczników mniejszych, wyrażamy wzorem:

$$W = K_1^r U_1^r + K_2^r U_2^r + K_3^r U_3^r + \dots + K_m^r U_m^r$$

w którym K_1^r K_2^r $K_3^r \dots K_m^r$ są wyznaczniki mnożne powstające z r. wierszy wydzielonych przez kombinacye r. klasy kolumn danego wyznacznika, a mianowicie K_1^r wyznacznik kombinacyi pierwszej, K_2^r drugiej; K_3^r trzeciej i t. d.; zaś U_1^r U_2^r $U_3^r \dots U_m^r$ mnożniki będące odpowiednimi każdej kombinacyi uzupełnieniami algebraicznymi.

Jeżeli kolumny, w ilości r. wydzielone zostały, wtedy

$$W = K_r^1 U_r^1 + K_r^2 U_r^2 + K_r^3 U_r^3 + K_r^4 U_r^4 + K_r^5 U_r^5 + K_r^6 U_r^6 + \dots + K_m^r U_m^r.$$

Jeżeli wyznaczniki porządkujące są wszystkie zerami, wyznacznik przedstawiony powyższymi wzorami jest także zerem; aby zaś rzeczone wyznaczniki porządkujące stały się zerami, wyrazy stanowiące kolumny wydzielonych wierszy muszą być zerami z wyjątkiem jednej, dwóch, trzech, czterech..... kolumn według tego, czy dwa, trzy, cztery, pięć..... wydzielono wierszy z danego wyznacznika. Zatem wyłania się twierdzenie analogiczne szóstemu:

„Wyznacznik wyższego stopnia jest zerem, jeżeli w r. wierszach lub w r kolumnach ilość linij drugiego nazwania, które nie są zerami, jest mniejsza od r“.

Twierdzenie drugie, analogiczne siódmemu, które łatwo sprawdzić można, tak opiewa:

„Jeżeli w r wierszach (albo w r kolumnach) ilość kolumn (ilość wierszy) różnych od zera jest r, wtedy dany wyznacznik równy jest iloczynowi wyznacznika mniejszego rgo stopnia, utworzonego z owych kolumn (wierszy) i wyznacznika będącego jego uzupełnieniem algebraicznem“.

12. Iloczyn dwóch wyznaczników tego samego stopnia.

Mając dwa układy wyznaczników

$$\left\|\begin{matrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & a^1_4 \ldots a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & a^2_4 \ldots a^2_n \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 & a^3_4 \ldots a^3_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^n_1 & a^n_2 & a^n_3 & a^n_4 \ldots a^n_n \end{matrix}\right\| \ldots 1. \qquad \left\|\begin{matrix} b^1_1 & b^1_2 & b^1_3 & b^1_4 \ldots b^1_n \\ b^2_1 & b^2_2 & b^2_3 & b^2_4 \ldots b^2_n \\ b^3_1 & b^3_2 & b^3_3 & b^3_4 \ldots b^3_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b^n_1 & b^n_2 & b^n_3 & b^n_4 \ldots b^n_n \end{matrix}\right\| \ldots 2.$$

starajmy się zbadać, czem jest względem nich wyznacznik trzeci tego samego stopnia

$$\left\|\begin{matrix} c^1_1 & c^1_2 & c^1_3 & c^1_4 \ldots c^1_n \\ c^2_1 & c^2_2 & c^2_3 & c^2_4 \ldots c^2_n \\ c^3_1 & c^3_2 & c^3_3 & c^3_4 \ldots c^3_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c^n_1 & c^n_2 & c^n_3 & c^n_4 \ldots c^n_n \end{matrix}\right\| \ldots 3.$$

w którym jakikolwiek wyraz c^i_k jest sumą iloczynów z pomnożenia odpowiednich wyrazów i^{tej} linii pierwszego i k^{tej} linii drugiego układu t. j.

$$c^i_k = a^i_1 b^k_1 + a^i_2 b^k_2 + a^i_3 b^k_3 \ldots + a^i_n b^k_n \ldots 4.$$

Rozpocznijmy badanie, biorąc na uwagę dwa wyznaczniki drugiego stopnia

$$\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix} \ldots \alpha). \qquad \begin{vmatrix} b^1_1 & b^1_2 \\ b^2_1 & b^2_2 \end{vmatrix} \ldots \beta).$$

Według założenia jakikolwiek układu

$$\begin{vmatrix} c^1_1 & c^1_2 \\ c^2_1 & c^2_2 \end{vmatrix} \ldots \gamma).$$

wyraz daje związek

$$c^i_k = a^i_1 b^k_1 + a^i_2 b^k_2 \ldots \delta).$$

Otóż

$$c^1_1 = a^1_1 b^1_1 + a^1_2 b^1_2; \quad c^2_1 = a^2_1 b^1_1 + a^2_2 b^1_2.$$
$$c^1_2 = a^1_1 b^2_1 + a^1_2 b^2_2; \quad c^2_2 = a^2_1 b^2_1 + a^2_2 b^2_2.$$

dlatego

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 + a_2^1 b_2^1 & a_1^1 b_1^2 + a_2^1 b_2^2 \\ a_1^2 b_1^1 + a_2^2 b_2^1 & a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 & a_1^1 b_1^2 + a_2^1 b_2^2 \\ a_1^2 b_1^1 & a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_2^1 b_2^1 & a_1^1 b_1^2 + a_2^1 b_2^2 \\ a_2^2 b_2^1 & a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 & a_1^1 b_1^2 \\ a_1^2 b_1^1 & a_1^2 b_1^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 & a_2^1 b_2^2 \\ a_1^2 b_1^1 & a_2^2 b_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^1 b_2^1 & a_1^1 b_1^2 \\ a_2^2 b_2^1 & a_1^2 b_1^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_2^1 b_2^1 & a_2^1 b_2^2 \\ a_2^2 b_2^1 & a_2^2 b_2^2 \end{vmatrix}.$$

W tej sumie wyznaczników pierwszy i czwarty są zerami, albowiem w każdym z nich dwie linie równoległe są w stosunku statecznym. Z tej to przyczyny mamy ostatecznie, przestawiwszy kolumny w pozostałym wyznaczniku trzecim

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} .\ b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1 .\ \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{vmatrix}$$

t. z. wyznacznik γ) jest wieloczynem dwóch pierwszych α) β) tego samego stopnia.

Przejdźmy teraz do wyznaczników trzeciego stopnia

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \ldots \alpha). \qquad \begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{vmatrix} \ldots \beta).$$

Jeżeli wyznacznik trzeciego stopnia jest taki:

$$\gamma) \ldots \begin{vmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{vmatrix}$$

w którym którykolwiek wyraz daje następujący związek:

$$c_k^i = a_1^i b_1^k + a_2^i b_2^k + a_3^i b_3^k \ldots \delta).$$

to

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 + a_2^1 b_2^1 + a_3^1 b_3^1 & a_1^1 b_1^2 + a_2^1 b_2^2 + a_3^1 b_3^2 & a_1^1 b_1^3 + a_2^1 b_2^3 + a_3^1 b_3^3 \\ a_1^2 b_1^1 + a_2^2 b_2^1 + a_3^2 b_3^1 & a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 & a_1^2 b_1^3 + a_2^2 b_2^3 + a_3^2 b_3^3 \\ a_1^3 b_1^1 + a_2^3 b_2^1 + a_3^3 b_3^1 & a_1^3 b_1^2 + a_2^3 b_2^2 + a_3^3 b_3^2 & a_1^3 b_1^3 + a_2^3 b_2^3 + a_3^3 b_3^3 \end{vmatrix}.$$

Oznaczając sumy stanowiące drugą kolumnę głoskami B^1; B^2; B^3; a sumy tworzące trzecią głoskami C^1 C^2 C^3, otrzymujemy naprzód

$$\begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 & B^1 & C^1 \\ a_1^2 b_1^1 & B^2 & C^2 \\ a_1^3 b_1^1 & B^3 & C^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^1 b_2^1 & B^1 & C^1 \\ a_2^2 b_2^1 & B^2 & C^2 \\ a_2^3 b_2^1 & B^3 & C^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3^1 b_3^1 & B^1 & C^1 \\ a_3^2 b_3^1 & B^2 & C^2 \\ a_3^3 b_3^1 & B^3 & C^3 \end{vmatrix} \ldots A).$$

A teraz pierwszy składnik tej to sumy wyznaczników rozkładamy na sumę

$$\begin{vmatrix} a_1^1b_1^1 & a_1^1b_1^2 & a_1^1b_1^3 \\ a_1^2b_1^1 & a_1^2b_1^2 & a_1^2b_1^3 \\ a_1^3b_1^1 & a_1^3b_1^2 & a_1^3b_1^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1b_1^1 & a_1^1b_1^2 & a_2^1b_2^3+a_3^1b_3^3 \\ a_1^2b_1^1 & a_1^2b_1^2 & a_2^2b_2^3+a_3^2b_3^3 \\ a_1^3b_1^1 & a_1^3b_1^2 & a_2^3b_2^3+a_3^3b_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1b_1^1 & a_2^1b_2^2+a_3^1b_3^2 & C^1 \\ a_1^2b_1^1 & a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2 & C^2 \\ a_1^3b_1^1 & a_2^3b_2^2+a_3^3b_3^2 & C^3 \end{vmatrix}$$

w której wyznaczniki pierwszy i drugi są zerami, albowiem mają po dwie kolumny proporcyonalne; zaś trzeci rozpada się na

$$\begin{vmatrix} a_1^1b_1^1 & a_2^1b_2^2 & C^1 \\ a_1^2b_1^1 & a_2^2b_2^2 & C^2 \\ a_1^3b_1^1 & a_2^3b_2^2 & C^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1b_1^1 & a_3^1b_3^2 & C^1 \\ a_1^2b_1^1 & a_3^2b_3^2 & C^2 \\ a_1^3b_1^1 & a_3^3b_3^2 & C^3 \end{vmatrix}$$

a te dalej na sumę sześciu następujących wyznaczników:

$$\begin{vmatrix} a_1^1b_1^1 & a_2^1b_2^2 & a_1^1b_1^3 \\ a_1^2b_1^1 & a_2^2b_2^2 & a_1^2b_1^3 \\ a_1^3b_1^1 & a_2^3b_2^2 & a_1^3b_1^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1b_1^1 & a_2^1b_2^2 & a_2^1b_2^3 \\ a_1^2b_1^1 & a_2^2b_2^2 & a_2^2b_2^3 \\ a_1^3b_1^1 & a_2^3b_2^2 & a_2^3b_2^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1b_1^1 & a_2^1b_2^2 & a_3^1b_3^3 \\ a_1^2b_1^1 & a_2^2b_2^2 & a_3^2b_3^3 \\ a_1^3b_1^1 & a_2^3b_2^2 & a_3^3b_3^3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1^1b_1^1 & a_3^1b_3^2 & a_1^1b_1^3 \\ a_1^2b_1^1 & a_3^2b_3^2 & a_1^2b_1^3 \\ a_1^3b_1^1 & a_3^3b_3^2 & a_1^3b_1^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1b_1^1 & a_3^1b_3^2 & a_2^1b_2^3 \\ a_1^2b_1^1 & a_3^2b_3^2 & a_2^2b_2^3 \\ a_1^3b_1^1 & a_3^3b_3^2 & a_2^3b_2^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1b_1^1 & a_3^1b_3^2 & a_3^1b_3^3 \\ a_1^2b_1^1 & a_3^2b_3^2 & a_3^2b_3^3 \\ a_1^3b_1^1 & a_3^3b_3^2 & a_3^3b_3^3 \end{vmatrix}.$$

W tej sumie wyznaczników są zerami pierwszy, drugi, czwarty i szósty, gdyż mają po dwie kolumny proporcyonalne; zaś trzeci i piąty są różne od zera

$$\begin{vmatrix} a_1^1b_1^1 & a_2^1b_2^2 & a_3^1b_3^3 \\ a_1^2b_1^1 & a_2^2b_2^2 & a_3^2b_3^3 \\ a_1^3b_1^1 & a_2^3b_2^2 & a_3^3b_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1b_1^1 & a_3^1b_3^2 & a_2^1b_2^3 \\ a_1^2b_1^1 & a_3^2b_3^2 & a_2^2b_2^3 \\ a_1^3b_1^1 & a_3^3b_3^2 & a_2^3b_2^3 \end{vmatrix} = b_1^1b_2^2b_3^3. \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} -$$

$$- b_1^1b_3^2b_2^3 \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}.$$

Drugi składnik sumy A) jest sumą

$$\begin{vmatrix} a_2^1b_2^1 & a_1^1b_1^2 & C^1 \\ a_2^2b_2^1 & a_1^2b_1^2 & C^2 \\ a_2^3b_2^1 & a_1^3b_1^2 & C^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^1b_2^1 & a_2^1b_2^2 & C^1 \\ a_2^2b_2^1 & a_2^2b_2^2 & C^2 \\ a_2^3b_2^1 & a_2^3b_2^2 & C^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^1b_2^1 & a_3^1b_3^2 & C^1 \\ a_2^2b_2^1 & a_3^2b_3^2 & C^2 \\ a_2^3b_2^1 & a_3^3b_3^2 & C^3 \end{vmatrix}$$

w której wyznacznik drugi jest zeru równy, a pierwszy i trzeci dają sumę następującą:

$$\begin{vmatrix} a^1_2b^1_2 & a^1_1b^2_1 & a^1_2b^3_2 \\ a^2_2b^1_2 & a^2_1b^2_1 & a^2_2b^3_2 \\ a^3_2b^1_2 & a^3_1b^2_1 & a^3_2b^3_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^1_2b^1_2 & a^1_1b^2_1 & a^1_3b^3_3 \\ a^2_2b^1_2 & a^2_1b^2_1 & a^2_3b^3_3 \\ a^3_2b^1_2 & a^3_1b^2_1 & a^3_3b^3_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^1_2b^1_2 & a^1_2b^2_2 & a^1_1b^3_1 \\ a^2_2b^1_2 & a^2_2b^2_2 & a^2_1b^3_1 \\ a^3_2b^1_2 & a^3_2b^2_2 & a^3_1b^3_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a^1_2b^1_2 & a^1_3b^2_3 & a^1_1b^3_1 \\ a^2_2b^1_2 & a^2_3b^2_3 & a^2_1b^3_1 \\ a^3_2b^1_2 & a^3_3b^2_3 & a^3_1b^3_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^1_2b^1_2 & a^1_3b^2_3 & a^1_2b^3_2 \\ a^2_2b^1_2 & a^2_3b^2_3 & a^2_2b^3_2 \\ a^3_2b^1_2 & a^3_3b^2_3 & a^3_2b^3_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^1_2b^1_2 & a^1_3b^2_3 & a^1_3b^3_3 \\ a^2_2b^1_2 & a^2_3b^2_3 & a^2_3b^3_3 \\ a^3_2b^1_2 & a^3_3b^2_3 & a^3_3b^3_3 \end{vmatrix}.$$

w której są zerami: wyznacznik pierwszy, trzeci, piąty i szósty; zaś drugi i czwarty

$$\begin{vmatrix} a^1_2b^1_2 & a^1_1b^2_1 & a^1_3b^3_3 \\ a^2_2b^1_2 & a^2_1b^2_1 & a^2_3b^3_3 \\ a^3_2b^1_2 & a^3_1b^2_1 & a^3_3b^3_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^1_2b^1_2 & a^1_3b^2_3 & a^1_1b^3_1 \\ a^2_2b^1_2 & a^2_3b^2_3 & a^2_1b^3_1 \\ a^3_2b^1_2 & a^3_3b^2_3 & a^3_1b^3_1 \end{vmatrix} = b^1_2b^2_3b^3_1 \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} -$$

$$- b^1_2b^2_1b^3_3 . \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix}.$$

Trzeci składnik sumy A) jest sumą trzech wyznaczników:

$$\begin{vmatrix} a^1_3b^1_3 & a^1_1b^2_1 & C^1 \\ a^2_3b^1_3 & a^2_1b^2_1 & C^2 \\ a^3_3b^1_3 & a^3_1b^2_1 & C^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^1_3b^1_3 & a^1_2b^2_2 & C^1 \\ a^2_3b^1_3 & a^2_2b^2_2 & C^2 \\ a^3_3b^1_3 & a^3_2b^2_2 & C^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^1_3b^1_3 & a^1_3b^2_3 & C^1 \\ a^2_3b^1_3 & a^2_3b^2_3 & C^2 \\ a^3_3b^1_3 & a^3_3b^2_3 & C^3 \end{vmatrix}$$

z ktorych ostatni schodzi do zera, zaś pierwszy i drugi dają się rozłożyć na:

$$\begin{vmatrix} a^1_3b^1_3 & a^1_1b^2_1 & a^1_1b^3_1 \\ a^2_3b^1_3 & a^2_1b^2_1 & a^2_1b^3_1 \\ a^3_3b^1_3 & a^3_1b^2_1 & a^3_1b^3_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^1_3b^1_3 & a^1_1b^2_1 & a^1_2b^3_2 \\ a^2_3b^1_3 & a^2_1b^2_1 & a^2_2b^3_2 \\ a^3_3b^1_3 & a^3_1b^2_1 & a^3_2b^3_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^1_3b^1_3 & a^1_1b^2_1 & a^1_3b^3_3 \\ a^2_3b^1_3 & a^2_1b^2_1 & a^2_3b^3_3 \\ a^3_3b^1_3 & a^3_1b^2_1 & a^3_3b^3_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a^1_3b^1_3 & a^1_2b^2_2 & a^1_1b^3_1 \\ a^2_3b^1_3 & a^2_2b^2_2 & a^2_1b^3_1 \\ a^3_3b^1_3 & a^3_2b^2_2 & a^3_1b^3_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^1_3b^1_3 & a^1_2b^2_2 & a^1_2b^3_2 \\ a^2_3b^1_3 & a^2_2b^2_2 & a^2_2b^3_2 \\ a^3_3b^1_3 & a^3_2b^2_2 & a^3_2b^3_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^1_3b^1_3 & a^1_2b^2_2 & a^1_3b^3_3 \\ a^2_3b^1_3 & a^2_2b^2_2 & a^2_3b^3_3 \\ a^3_3b^1_3 & a^3_2b^2_2 & a^3_3b^3_3 \end{vmatrix}$$

W tej to sumie składnik pierwszy, trzeci, piąty i szósty są zerami, a drugi i czwarty

$$\begin{vmatrix} a^1_3b^1_3 & a^1_1b^2_1 & a^1_2b^3_2 \\ a^2_3b^1_3 & a^2_1b^2_1 & a^2_2b^3_2 \\ a^3_3b^1_3 & a^3_1b^2_1 & a^3_2b^3_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^1_3b^1_3 & a^1_2b^2_2 & a^1_1b^3_1 \\ a^2_3b^1_3 & a^2_2b^2_2 & a^2_1b^3_1 \\ a^3_3b^2_3 & a^3_2b^2_2 & a^3_1b^3_1 \end{vmatrix} = b^1_3b^2_2b^3_1 \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} -$$

$$- b^1_3b^2_1b^3_2 \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix}.$$

Zbliżywszy tedy do siebie wyniki nie schodzące do zera sumy A), otrzymujemy ostatecznie sumę algebraiczną równoważną z wyznacznikiem zadanym

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{vmatrix} \text{ następującą:}$$

$$b_1^1 b_2^2 b_3^3 . \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} - b_1^1 b_3^2 b_2^3 \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} - b_2^1 b_1^2 b_3^3 \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} +$$

$$+ b_2^1 b_3^2 b_1^3 \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} + b_3^1 b_1^2 b_2^3 \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} - b_3^1 b_2^2 b_1^3 \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{vmatrix}$$

Więc wieloczyn dwóch wyznaczników trzeciego stopnia jest także wyznacznikiem takiegoż stopnia. Te dwa przykłady prowadzą do wniosku, że wieloczyn dwóch wyznaczników któregokolwiek stopnia wyższego jest takiegoż stopnia wyznacznikiem.

Z wieloczynu

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^1b_1^1 + a_2^1b_2^1 + a_3^1b_3^1; & a_1^1b_1^2 + a_2^1b_2^2 + a_3^1b_3^2; & a_1^1b_1^3 + a_2^1b_2^3 + a_3^1b_3^3 \\ a_1^2b_1^1 + a_2^2b_2^1 + a_3^2b_3^1; & a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2; & a_1^2b_1^3 + a_2^2b_2^3 + a_3^2b_3^3 \\ a_1^3b_1^1 + a_2^3b_2^1 + a_3^3b_3^1; & a_1^3b_1^2 + a_2^3b_2^2 + a_3^3b_3^2; & a_1^3b_1^3 + a_2^3b_2^3 + a_3^3b_3^3 \end{vmatrix}$$

wysnuwamy prawidło mnożenia następujące:

„Mnoży się wyraz po wyrazie pierwszej linii wyznacznika pierwszego przez odpowiednie wyrazy pierwszej linii wyznacznika drugiego, a iloczyny się dodaje, przez co otrzymujemy pierwszy wyraz linii pierwszej; następnie mnoży się wyraz po wyrazie tej samej linii pierwszego przez odpowiednie wyrazy drugiej linii drugiego wyznacznika i iloczyny się dodaje: ich suma jest drugim wyrazem pierwszej linii nowego wyznacznika; dalej mnożymy wyraz po wyrazie pierwszej linii pierwszego wyznacznika przez odpowiadające wyrazy trzeciej linii drugiego wyznacznika, a iloczyny dodajemy, aby mieć trzeci wyraz pierwszej linii nowego wyznacznika. Takim samym sposobem wyznaczymy dalsze wyrazy tego samego wiersza.

Aby otrzymać wyrazy drugiej linii szukanego wyznacznika, mnożymy wyraz po wyrazie drugiej linii pierwszego wyznacznika przez odpowiednie wyrazy pierwszej linii drugiego, a iloczyny dodajemy: ich suma jest pierwszym wyrazem drugiej linii; potem mnożymy wyraz po wyrazie tej samej linii pierwszego przez odpowiednie wyrazy drugiej linii wyznacznika drugiego: suma tych iloczynów jest drugim wyrazem linii drugiej; następnie mnożymy wyraz po wyrazie tej samej linii pierwszego wyznacznika przez odpowiadające wyrazy trzeciej linii wyznacznika drugiego, dodajemy iloczyny i tak otrzymujemy trzeci wyraz drugiej linii nowej i t. d. i t. d.

Chcąc wyznaczyć linią trzecią, mnożymy naprzód wyraz po wyrazie linii trzeciej wyznacznika pierwszego przez odpowiadające wyrazy pierwszej linii drugiego: suma iloczynów jest wyrazem pierwszym linii trzeciej; następnie mnoży się wyraz po wyrazie tej samej linii pierwszego przez odpowiednie wyrazy drugiej linii drugiego wyznacznika, a dodawszy iloczyny otrzymujemy wyraz drugi; dalej mnożymy wyraz po wyrazie tej samej linii wyznacznika pierwszego przez odpowiadające sobie wyrazy linii trzeciej drugiego wyznacznika, a iloczyny dodajemy przez co uzyskujemy wyraz trzeci linii trzeciej szukanego wyznacznika i t. d. i t. d.

Tak postępując wyznaczymy każdą następną linię.

Wyrazy szukanego wyznacznika łatwo oznaczyć zapomocą wzoru

$$c_k^1 = a_1^1 b_1^k + a_2^1 b_2^k + a_3^1 b_3^k + \ldots + a_n^1 b_n^1.$$

Jeśli n. p. mamy wyznaczyć

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 & b_4^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & b_4^3 \\ b_1^4 & b_2^4 & b_3^4 & b_4^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 & c_4^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & c_4^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 & c_4^3 \\ c_1^4 & c_2^4 & c_3^4 & c_4^4 \end{vmatrix}$$

użyjemy wzoru

$$c_k^1 = a_1^1 b_1^k + a_2^1 b_2^k + a_3^1 b_3^k + a_3^1 b_3^k + a_4^1 b_4^k$$

który daje

$$
\begin{aligned}
c^1_1 &= a^1_1 b^1_1 + a^1_2 b^1_2 + a^1_3 b^1_3 + a^1_4 b^1_4. \\
c^1_2 &= a^1_1 b^2_1 + a^1_2 b^2_2 + a^1_3 b^2_3 + a^1_4 b^2_4. \\
c^1_3 &= a^1_1 b^3_1 + a^1_2 b^3_2 + a^1_3 b^3_3 + a^1_4 b^3_4. \\
c^1_4 &= a^1_1 b^4_1 + a^1_2 b^4_2 + a^1_3 b^4_3 + a^1_4 b^4_4. \\
c^2_1 &= a^2_1 b^1_1 + a^2_2 b^1_2 + a^2_3 b^1_3 + a^2_4 b^1_4. \\
c^2_2 &= a^2_1 b^2_1 + a^2_2 b^2_2 + a^2_3 b^2_3 + a^2_4 b^2_4. \\
c^2_3 &= a^2_1 b^3_1 + a^2_2 b^3_2 + a^2_3 b^3_3 + a^2_4 b^3_4. \\
c^2_4 &= a^2_1 b^4_1 + a^2_2 b^4_2 + a^2_3 b^4_3 + a^2_4 b^4_4. \\
c^3_1 &= a^3_1 b^1_1 + a^3_2 b^1_2 + a^3_3 b^1_3 + a^3_4 b^1_4. \\
c^3_2 &= a^3_1 b^2_1 + a^3_2 b^2_2 + a^3_3 b^2_3 + a^3_4 b^2_4. \\
c^3_3 &= a^3_1 b^3_1 + a^3_2 b^3_2 + a^3_3 b^3_3 + a^3_4 b^3_4. \\
c^3_4 &= a^3_1 b^4_1 + a^3_2 b^4_2 + a^3_3 b^4_2 + a^3_4 b^4_4. \\
c^4_1 &= a^4_1 b^1_1 + a^4_2 b^1_2 + a^4_3 b^1_3 + a^4_4 b^1_4. \\
c^4_2 &= a^4_1 b^2_1 + a^4_2 b^2_2 + a^4_3 b^2_3 + a^4_4 b^2_4. \\
c^4_3 &= a^4_1 b^3_1 + a^4_2 b^3_2 + a^4_3 b^3_3 + a^4_4 b^3_4. \\
c^4_4 &= a^4_1 b^4_1 + a^4_2 b^4_2 + a^4_3 b^4_3 + a^4_4 b^4_4.
\end{aligned}
$$

Zobaczmy teraz, czem jest iloczyn z pomnożenia wyznacznika przez wyznacznik jego wyznaczników mniejszych.

W tym celu weźmy naprzód na uwagę wyznacznik trzeciego stopnia i wyznacznik wyznaczników jego mniejszych, który jest także trzeciego stopnia, i pomnóżmy je przez siebie

$$
\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} . \quad \begin{vmatrix} W^1_1 & W^1_2 & W^1_3 \\ W^2_1 & W^2_2 & W^2_3 \\ W^3_1 & W^3_2 & W^3_3 \end{vmatrix} .
$$

Wyrazy wyznacznika, będącego wieloczynem, otrzymujemy według poznanego prawidła:

$$
\begin{aligned}
c^1_1 &= a^1_1 W^1_1 + a^1_2 W^1_2 + a^1_3 W^1_3 = W. \\
c^1_2 &= a^1_1 W^2_1 + a^1_2 W^2_2 + a^1_3 W^2_3 = 0. \\
c^1_3 &= a^1_1 W^3_1 + a^1_2 W^3_2 + a^1_3 W^3_3 = 0. \\
c^2_1 &= a^2_1 W^1_1 + a^2_2 W^1_2 + a^2_3 W^1_3 = 0. \\
c^2_2 &= a^2_1 W^2_1 + a^2_2 W^2_2 + a^2_3 W^3_3 = W. \\
c^2_3 &= a^2_1 W^3_1 + a^2_2 W^3_2 + a^2_3 W^3_3 = 0. \\
c^3_1 &= a^3_1 W^1_1 + a^3_2 W^1_2 + a^3_3 W^1_3 = 0. \\
c^3_2 &= a^3_1 W^2_1 + a^3_2 W^2_2 + a^3_3 W^2_3 = 0. \\
c^3_3 &= a^3_1 W^3_1 + a^3_2 W^3_2 + a^3_3 W^3_3 = W.
\end{aligned}
$$

Więc iloczyn jest wyznacznikiem

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3^3 \end{vmatrix} = c_1^1 c_2^2 c_3^3 = W(^3).$$

czyli

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} W_1^1 & W_2^1 & W_3^1 \\ W_1^2 & W_2^2 & W_3^2 \\ W_1^3 & W_2^3 & W_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} (^3)$$

Z tego równania wynika jeszcze

$$\begin{Vmatrix} W_1^1 & W_2^1 & W_3^1 \\ W_1^2 & W_2^2 & W_3^2 \\ W_1^3 & W_2^3 & W_3^3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{Vmatrix} (^2)$$

Wyznaczmy teraz wieloczyn wyznacznika stopnia czwartego i wyznacznika jego wyznaczników mniejszych.

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} W_1^1 & W_2^1 & W_3^1 & W_4^1 \\ W_1^2 & W_2^2 & W_3^2 & W_4^2 \\ W_1^3 & W_2^3 & W_3^3 & W_4^3 \\ W_1^4 & W_2^4 & W_3^4 & W_4^4 \end{Vmatrix} .$$

Wyrazy nowego wyznacznika są następujące:

$$c_1^1 = a_1^1 W_1^1 + a_2^1 W_2^1 + a_3^1 W_3^1 + a_4^1 W_4^1 = W.$$
$$c_2^1 = a_1^1 W_1^2 + a_2^1 W_2^2 + a_3^1 W_3^2 + a_4^1 W_4^2 = 0.$$
$$c_3^1 = a_1^1 W_1^3 + a_2^1 W_2^3 + a_3^1 W_3^3 + a_4^1 W_4^3 = 0.$$
$$c_4^1 = a_1^1 W_1^4 + a_2^1 W_2^4 + a_3^1 W_3^4 + a_4^1 W_4^4 = 0.$$

$$c_1^2 = a_1^2 W_1^1 + a_2^2 W_2^1 + a_3^2 W_3^1 + a_4^2 W_4^1 = 0.$$
$$c_2^2 = a_1^2 W_1^2 + a_2^2 W_2^2 + a_3^2 W_3^2 + a_4^2 W_4^2 = W.$$
$$c_3^2 = a_1^2 W_1^3 + a_2^2 W_2^3 + a_3^2 W_3^3 + a_4^2 W_4^3 = 0.$$
$$c_4^2 = a_1^2 W_1^4 + a_2^2 W_2^4 + a_3^2 W_3^4 + a_4^2 W_4^4 = 0.$$

$$c_1^3 = a_1^3 W_1^1 + a_2^3 W_2^1 + a_3^3 W_3^1 + a_4^3 W_4^1 = 0.$$
$$c_2^3 = a_1^3 W_1^2 + a_2^3 W_2^2 + a_3^3 W_3^2 + a_4^3 W_4^2 = 0.$$
$$c_3^3 = a_1^3 W_1^3 + a_2^3 W_2^3 + a_3^3 W_3^3 + a_4^3 W_4^3 = W.$$
$$c_4^3 = a_1^3 W_1^4 + a_2^3 W_2^4 + a_3^3 W_3^4 + a_4^3 W_4^4 = 0.$$

$$c_1^4 = a_1^4 W_1^1 + a_2^4 W_2^1 + a_3^4 W_3^1 + a_4^4 W_4^1 = 0.$$
$$c_2^4 = a_1^4 W_1^2 + a_2^4 W_2^2 + a_3^4 W_3^2 + a_4^4 W_4^2 = 0.$$
$$c_3^4 = a_1^4 W_1^3 + a_2^4 W_2^3 + a_3^4 W_3^3 + a_4^4 W_4^3 = 0.$$
$$c_4^4 = a_1^4 W_1^4 + a_2^4 W_2^4 + a_3^4 W_3^4 + a_4^4 W_4^4 = W.$$

Więc

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} W_1^1 & W_2^1 & W_3^1 & W_4^1 \\ W_1^2 & W_2^2 & W_3^2 & W_4^2 \\ W_1^3 & W_2^3 & W_3^3 & W_4^3 \\ W_1^4 & W_2^4 & W_3^4 & W_4^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{vmatrix} W_1^1 & W_2^1 & W_3^1 & W_4^1 \\ W_1^2 & W_2^2 & W_3^2 & W_4^2 \\ W_1^3 & W_2^3 & W_3^3 & W_4^3 \\ W_1^4 & W_2^4 & W_3^4 & W_4^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix}^{(3)}$$

Szukając iloczynu z pomnożenia wyznacznika piątego stopnia przez wyznacznik jego wyznaczników, przekonamy się, że wieloczyn ten równy jest danemu wyznacznikowi spotęgowanemu przez 5. t. j. przez liczbę wyrażającą stopień wyznacznika; zaś wyznacznik wyznaczników mniejszych jest równy czwartej potędze tegoż wyznacznika danego.

Ztąd nasuwa się *twierdzenie 12.* „Wieloczyn z pomnożenia wyznacznika jakiegokolwiek stopnia przez wyznacznik jego wyznaczników mniejszych jest potęgą danego wyznacznika, której wykładnikiem jest liczba wskazująca stopień danego wyznacznika; zaś wyznacznik jego wyznaczników mniejszych jest także potęgą danego wyznacznika, lecz o jeden stopień niższego rzędu“.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \dots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \dots & a_n^4 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n \dots & a_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} W_1^1 & W_2^1 & W_3^1 \dots & W_n^1 \\ W_1^2 & W_2^2 & W_3^2 \dots & W_n^2 \\ W_1^3 & W_2^3 & W_3^3 \dots & W_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ W_1^n & W_2^n & W_3^n \dots & W_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \dots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \dots & a_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n \dots & a_n^n \end{vmatrix}^{(n)}$$

$$\begin{vmatrix} W_1^1 & W_2^1 & W_3^1 \dots & W_n^1 \\ W_1^2 & W_2^2 & W_3^2 \dots & W_n^2 \\ W_1^3 & W_2^3 & W_3^3 \dots & W_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ W_1^n & W_2^n & W_3^n \dots & W_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \dots & a_n^1 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \dots & a_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n \dots & a_n^n \end{vmatrix}^{(n-1)}$$

13. Wyrażenie niektórych twierdzeń geometrycznych zapomocą wyznaczników.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{vmatrix}.$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ \sin\beta & \cos\beta\end{vmatrix}.$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\beta & \cos\beta\end{vmatrix}.$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{vmatrix}.$$

$$\mathrm{tang}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tang}\alpha+\mathrm{tang}\beta}{1-\mathrm{tang}\alpha\,\mathrm{tang}\beta}=$$

$$\mathrm{tang}(\alpha+\beta)=\begin{vmatrix}\mathrm{tang}\alpha & -1\\ \mathrm{tang}\beta & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & \mathrm{tang}\alpha\\ \mathrm{tang}\beta & 1\end{vmatrix}.$$

$$\mathrm{tang}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tang}\alpha-\mathrm{tang}\beta}{1+\mathrm{tang}\alpha\,\mathrm{tang}\beta}=$$

$$\mathrm{tang}(\alpha-\beta)=\begin{vmatrix}\mathrm{tang}\alpha & 1\\ \mathrm{tang}\beta & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & \mathrm{tang}\alpha\\ -\mathrm{tang}\beta & 1\end{vmatrix}.$$

Twierdzenie wstaw $a:b=\sin\alpha:\sin\beta$.

$$a\sin\beta-b\sin\alpha=\begin{vmatrix}a & b\\ \sin\alpha & \sin\beta\end{vmatrix}=0.$$

Twierdzenie Carnot'a

$$c^2=a^2+b^2-2ab.\cos\gamma=\begin{vmatrix}0 & -a & -b\\ a & 1 & \cos\gamma\\ b & \cos\gamma & 1\end{vmatrix}.$$

Trzy linie proste wyrażone w układzie współrzędnych prostokątnym równaniami

$$a_1^1x+a_2^1y+a_3^1=0\ \ldots\ldots\ 1).$$
$$a_1^2x+a_2^2y+a_3^2=0\ \ldots\ldots\ 2).$$
$$a_1^3x+a_2^3y+a_3^3=0\ \ldots\ldots\ 3).$$

przecinają się w jednym punkcie, jeżeli wyznacznik współczynników $\Sigma\pm a_1^1a_2^2a_3^3=0$.

Jakoż drugie równanie pomnóżmy przez jakąś ilość dowolną δ. i dodajmy do pierwszego, przez co otrzymujemy równanie

$$(a_1^1x+a_2^1y+a_3^1)+\delta(a_1^2x+a_2^2y+a_3^2)=0. \;.\;.\;.\;.\;.\; 4).$$

które przedstawia linią prostą, albowiem jest pierwszego stopnia; ta prosta przechodzi przez punkt wspólny dwom pierwszym, gdyż z jej równania wywieść możemy równanie 1) i równanie 2).

Pierwsze wyłoni się z 4) za podstawieniem $\delta=0$; nadając zaś ilości dowolnej δ formę ułamka $\delta=\frac{m}{n}$ otrzymujemy naprzód, uwolniwszy od ułamka:

$$n(a_1^2x+a_2^1y+a_3^1)+m(a_1^2x+a_2^2y+a_3^2)=0$$

a gdy uczynimy $n=0$ uzyskamy, podzieliwszy przez m równanie 2).

$$a_1^2x+a_2^2y+a_3^2=0.$$

Zebrawszy w 4) wyrazy co do zmiennych podobne sprowadzamy je do postaci

$$(a_1^1+\delta a_1^2)x+(a_2^1+\delta a_2^2)y+(a_3^1+\delta a_3^2)=0. \;.\;.\;.\;.\;.\; 5).$$

Jeśli linią prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia się linij 1) i 2) ma być linia równaniem 3) wyrażona, wtedy współczynniki prostej 5) muszą być ze współczynnikami prostej 3) w statecznym stosunku:

$$\frac{a_1^1+a_2^1\delta}{a_1^3}=\frac{a_2^1+a_2^2\delta}{a_2^3}=\frac{a_3^1+a_3^2\delta}{a_3^3}=k.$$

Z tych równań otrzymujemy:

$$a_1^2\delta-a_1^3k=-a_1^1. \;.\;.\;.\;.\;.\; \alpha).$$
$$a_2^2\delta-a_2^3k=-a_2^1. \;.\;.\;.\;.\;.\; \beta).$$
$$a_3^2\delta-a_3^3k=-a_2^1. \;.\;.\;.\;.\;.\; \gamma).$$

Wyznaczywszy z α) i β) ilości δ i k a wartości ich podstawiwszy w γ), otrzymujemy

$$a_3^1(a_1^2a_2^3-a_1^3a_2^2)-a_3^2(a_1^1a_2^3-a_1^3a_2^1)+a_3^3(a_1^2a_2^1-a_1^1a_2^2)=0.$$

albo

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}=0.$$

Podwójną powierzchnię trójkąta, którego wierzchołki są dane przez współrzędne

$$A\ldots x_1\ y_1.\quad B\ldots x_2\ y_2.\quad C\ldots x_3\ y_3,$$

przedstawia

$$2ABC = x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2) =$$

$$= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Gdy wyznacznik ten schodzi do zera, wtedy trzy punkty A B C są w linii prostej:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Jeżeli boki trójkąta są wyrażone równaniami

$$a_1^1 x + a_2^1 y + a_3^1 = 0.$$
$$a_1^2 x + a_2^2 y + a_3^2 = 0.$$
$$a_1^3 x + a_2^3 y + a_3^3 = 0.$$

trzeba naprzód obliczyć współrzędne wierzchołków rozwiązując układy równań:

$$\begin{aligned} a_1^1 x + a_2^1 y + a_3^1 &= 0. \ldots\ldots \alpha). \\ a_1^2 x + a_2^2 y + a_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1^1 x + a_2^1 y + a_3^1 &= 0. \ldots\ldots \beta). \\ a_1^3 x + a_2^3 y + a_3^3 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1^2 x + a_2^2 y + a_3^2 &= 0. \ldots\ldots \gamma). \\ a_1^3 x + a_2^3 y + a_3^3 &= 0. \end{aligned}$$

Wartości współrzędnych są następujące:

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = \frac{W_1^3}{W_3^3}.$$

$$y_1 = -\begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_3^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = \frac{-W_2^3}{W_3^3}.$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix} = \frac{W_1^2}{W_3^2}.$$

$$y_2 = -\begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix} = \frac{W_2^2}{W_3^2}.$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix} = \frac{W_1^1}{W_3^1}.$$

$$y_3 = -\begin{vmatrix} a_1^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix} = \frac{W_2^1}{W_2^1}.$$

Podstawiając wyznaczone wartości w:

$$2ABC = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

otrzymujemy wzór

$$2ABC = \begin{vmatrix} W_1^1 & W_2^1 & W_3^1 \\ W_1^2 & W_2^2 & W_3^2 \\ W_1^3 & W_2^3 & W_3^3 \end{vmatrix} : W_3^1\, W_3^2\, W_3^3.$$

Uporządkowawszy wyznacznik wyznaczników mniejszych, które powstały z

$$W = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

według wyrazów kolumny pierwszej, przywróciwszy im wartości i wykonawszy naznaczone działanie, otrzymujemy

$$\begin{vmatrix} W_1^1 & W_2^1 & W_3^1 \\ W_1^2 & W_2^2 & W_3^2 \\ W_1^3 & W_2^3 & W_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}^2 = (W)^2.$$

Zatem

$$2ABC = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}^2 : \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix}.$$

Korzystałem z dzieł: Teorya wyznaczników, kurs uniwersytecki M. A. Baranieckiego, Paryż 1879 r. i: Algebra przez G. H. Niewęgłowskiego, część pierwsza, Paryż 1879.

CZĘŚĆ URZĘDOWA.

I.

SKŁAD GRONA NAUCZYCIELSKIEGO

przy końcu roku szkolnego 1892.

A) Dla nauki obowiązkowej.

1. Skuba Tadeusz, dyrektor, uczył języka greckiego w klasie VII — 4 godziny tygodniowo.

2. Krókowski Leon, profesor, uczył języka polskiego w kl. IV*b*, VI, VII i VIII, logiki w kl. VII i psychologii w kl. VIII — 16 godzin tygodniowo

3. Rozwadowski Józef, prof., uczył języka łacińskiego w kl. IV*a*+*b* i języka niemieckiego w kl. II*a* — 17 godzin tygodniowo.

4. Stodolak Stanisław, dr. filoz., prof., otrzymał dla poratowania zdrowia urlop na przeciąg drugiego półrocza.

5. Korczyński Jan prof., uczył matematyki w kl. I*b*, III*a*+*b*, IV*b*, V, VI — 19 godzin tygodniowo.

6. Tułasiewicz Józef, prof., gospodarz kl. II*a*, uczył geografii w kl. I*a*+*b*, historyi powszechnej w kl. II*a*, III*b*, V i VII — 19 godzin tygodniowo.

7. Baczakiewicz Feliks, prof., zawiadowca czytelni niemieckiej dla uczniów, uczył języka niemieckiego w kl. IV*a*+*b*, V i VI — 16 godzin tygodniowo.

8. Alexandrowicz Włodzimierz, prof., zawiadowca zbioru historyczno-geograficznego, gospodarz kl. IV*a*, uczył historyi powszechnej w kl. III*a*, IV*a*+*b*, VI i VIII — 18 godzin tygodniowo.

9. Polak Sebastyan, prof, zawiadowca czytelni polskiej dla uczniów, gospodarz kl. V, uczył języka łacińskiego w kl. V, greckiego w kl. IV*a* i polskiego w kl. III*b* i V — 16 godzin tygodniowo.

10. Taborski Józef, prof., zawiadowca biblioteki nauczycielskiej, gospodarz kl. VI, uczył języka łacińskiego w kl. VI i greckiego w kl. VI i VIII — 16 godzin tygodniowo.

11. Kulczyński Władysław, prof., zawiadowca gabinetu historyi naturalnej, uczył matematyki w kl. IV*a*, historyi naturalnej w kl. I*a*+*b*, II*a*+*b*, III*a*+*b*, V i VI — 19 godzin tygodniowo.

12. Charkiewicz Edward, prof., przydzielony czasowo do Wys. c. k. Ministerstwa W. i O w Wiedniu.

13. Siedlecki Wojciech, ks. prof, exhortator dla uczniów klas wyższych, uczył religii w kl. II*a*, III*a*+*b*, IV*a*+*b*, V, VI, VII i VIII — 18 godzin tygodniowo.

14. Kawecki Antoni Medard, zawiadowca gabinetu fizykalnego, gospodarz kl. VII, uczył matematyki w kl. VII, VIII, fizyki w kl, IV*a*+*b*, VII i VIII — 17 godzin tygodniowo.

15. Krasnosielski Teofil, prof., uczył języka łacińskiego w kl. VI, VIII i greckiego w kl. V — 15 godzin tygodniowo.

16. Karaś Zygmunt, ks. dr., zastępca nauczyciela, exhortator dla klas niższych, uczył religii w kl I*a*+*b*, II*b* — 6 godzin tygodniowo.

17. Służewski Włodzimierz, zastępca nauczyciela, gospodarz kl. I*b*, uczył języka łacińskiego w kl. II*b*, polskiego w kl. III*a*, niemieckiego w kl. I*b* — 17 godzin tygodniowo.

18. Szafran Tomasz, zastępca nauczyciela, gospodarz kl. IV*b*, uczył języka greckiego w kl. III*a*+*b*, IV*b*, polskiego w kl. II*a* — 17 godzin tygodniowo.

19. Kannenberg Józef, zastępca nauczyciela, gospodzarz kl. VIII, uczył języka niemieckiego w kl. I*a*, VII, VIII, matematyki w kl I*a* — 17 godzin tygodniowo.

20. Bartunek Jan, zastępca nauczycieia, gospodarz kl. III*b*, uczył języka łacińskiego w kl. II*a*, III*a*+*b* — 20 godzin tygodniowo.

21. Grzegorzewicz Wojciech, zastępca nauczyciela, gospodarz kl. II*b*, uczył języka polskiego w kl I*a*+*b*, II*b*, IV*a*, matematyki w kl. II*a*+*b* — 18 godzin tygodniowo.

22. Jakiel Kazimierz, zastępca nauczyciela, gospodarz kl.

III*a*, uczył języka niemieckiego w kl. II*b*, III*a*+*b*, historyi powszechnej w kl. II*b* — 17 godzin tygodniowo.

23. Ptaszyk Michał, zastępca nauczyciela, gospodarz kl. I*a*, uczył języka łacińskiego w kl. I*a*+*b* — 16 godzin tygodniowo.

B) Dla nauki nadobowiązkowej.

1. Alexandrowiez Włodziwierz, j. w., uczył historyi kraju rodzinnego w kl. III*a*, IV*a*+*b*, w każdej po jednej godzinie tygodniowo.

2. Tułasiewicz Józef, j. w., uczył historyi kraju rodzinnego w kl. III*b* i VII, w każdej po jednej godzinie tygodniowo.

3. Szafran Tomasz, j. w., uczył kaligrafii w trzech oddziałach, po jednej godzinie tygodniowo w każdym.

4. Dec Walenty, nauczyciel prywatny, uczył śpiewu w dwóch oddziałach, w każdym po dwie godziny tygodniowo.

5. Trnka Teodor, nauczyciel szkoły wydziałowej w Krakowie, uczył rysunków w dwóch oddziałach, w każdym po dwie godziny tygodniowo.

6. Rongier Paweł, nauczyciel prywatny, uczył języka francuskiego w trzech oddziałach, w każdym po dwie godziny tygodniowo

7. W Towarzystwie „Sokoł krakowski“ pobierała młodzież gimnazyalna naukę gimnastyki w dwóch oddziałach, w każdym po dwie godziny tygodniowo.

8. Landau Samuel, dr., kaznodzieja synagogi izraelickiej, uczył religii mojżeszowej w trzech oddziałach, t. j. w I, V i XI, w każdym po jednej godzinie tygodniowo; reszta młodzieży wyznania mojżeszowego, przydzielona do oddziałów II, III, IV, VI, VII, VIII, IX i X, pobierała naukę religii w trzech innych szkołach średnich krakowskich.

II.

PLAN NAUK

w roku szkolnym 1892.

KLASA I.

L.	Przedmiot nauki	Godzin tygodn.	Treść nauki	Autor książki szkolnéj
1	Religia	2	Nauka wiary i obyczajów.	Katech. Szustera (Zielińskiego).
2	J. łaciński	8	Nauka o formach prawidłowych. Co tydzień wypracowanie szkolne.	Zwięzła Gram. Samolewicza. Przykł. Samolew.-Sołtysik.
3	J. polski	3	Elementarna nauka odmiany imienia i słowa; nauka o zdaniu pojedyńczém i złożoném. Czytanie, opowiadanie i wyuczanie się na pamięć ustępów. Co tydzień ćwiczenie ortograficzne.	Gram. Małeckiego wyd. VIII. Wypisy tom I. 1875.
4	J. niemiecki	6	Elementarna nauka odmiany imion i czasowników i o zdaniu pojedyńczém, pisownia przy danej sposobności. Co tydzień wypracowanie szkolne.	L. German i K. Petelenz, Ćwiczenia niemieckie.
5	Geografia	3	Wstępne pojęcia o kosmografii i geografii matematycznéj, opis powierzchni ziemi według jej naturalnych własności, wiadomości najważn. z politycznej geografii, czyt. i rys. map.	Benoni i Tatomir Geografia V.
6	Matematyka	3	Arytmetyka i geometrya na przemian. Cztery działania liczbami całkowitémi, podzielność liczb, ułamki; linia prosta, koło, kąty, linie równoległe, trójkąt z wyjątkiem o przystawaniu, konstrukcye zasadnicze. Co miesiąc zadanie szkolne, ćwiczenia domowe na każdą lekcyę.	Arytmetyka Zajączkowskiego w. II. Geometrya Močnika (Maryniaka) I.
7	Historya naturalna	2	Ssawce i bezkręgowce.	Zoologia obrazowa Nowickiego wyd. VI.
		27		

KLASA II.

L.	Przedmiot nauki	Godzin tygodn.	Treść nauki	Autor książki szkolnéj
1	Religia	2	Dzieje starego zakonu.	Dąbrowski T. Historya biblijna.
2	J. łaciński	8	Formy nieprawidłowe z powtórzeniem prawidłowych. Części mowy nieodmienne.	Gram. i Przykłady Samolewicza, 1887.
3	J. polski	3	Gramatyka i czytanie jak w klasie 1szej. Wypracowania piśmienne 3 na miesiąc.	Gram. jak w kl. I. Wypisy tom II.
4	J. niemiecki	5	Powtórzenie i uzupełnienie nauki o formach w połączeniu z główniejszémi prawidłami składni i rządu, tłomaczenie, pisownia. Czytanie, opowiadanie i wyuczanie się na pamięć łatwych ustępów z wypisów. Wypracowania piśm. jak w kl. I.	L. German i K. Petelenz, Ćwiczenia niemieckie, II.
5	Geografia	4	1. Geogr. fizyczna i polityczna Azyi i Afryki. Oro i hydrografia Europy, szczegółowy opis południowéj i zachodniej Europy. 2. Dzieje starożytne, sposobem biograficznym.	Geogr. Wiślickiego (Baranowskiego i Dziedzickiego wyd. V.) Welter (Sawczyński) I, w. V.
6	Matematyka	3	Arytmetyka i geometrya na przemian; skrócone mnożenie i dzielenie, pojedyńcza reguła trzech; stosunki i przystawanie trójkątów, koło, czworobok i wielobok. Zadania jak w kl. I.	Arytmetyka Zajączkowskiego Geometrya Močnika (Maryniaka).
7	Historya naturalna	2	W I półroczu zoologia: ptaki, gady, płazy i ryby, w II półroczu: botanika.	Zoologia jak w kl. I. Botanika Rostafińskiego.
		27		

KLASA III.

L.	Przedmiot nauki	Godzin tygodn.	Treść nauki	Autor książki szkolnéj
1	Religia	2	Dzieje nowego zakonu.	Dąbrowski T. Szuster (Rodecki) Historya biblijna.
2	J. łaciński	6	Składnia zgody i przypadków: Czytanie z Korneliusza Neposa: żywoty Miltyadesa, Temistoklesa, Arystydesa, Lisandra, Pelopidasa, Hannibala i Katona. Co dni 14 praca domowa, co miesiąc zadanie szkolne.	Gram. Samolewicz-Sołtysik. Kornelius Nepos (Patocki). Ćwiczenia Próchnickiego w. II.
3	J. grecki	5	Odmiana prawidłowa imion i czasowników. W II półr. co dni 14 zadanie domowe a co miesiąc szkolne.	Gram. Curtius-Ćwikliński. Ćwiczenia Lewickiego i Parylaka.
4	J. polski	3	Systematyczna nauka deklinacyi i składnia rządu; czyt. jak w kl. I. Co dni 14 praca piśmienna.	Wypisy tom III.
5	J. niemiecki	4	Systematyczna nauka deklinacyi i konjugacyi. Czytanie jak w klasie II. Co dni 15 praca piśmienna.	Gram. Petelenza. German i Petelenz Ćwiczenia niemiec.
6	Geografia i historya	3	Szczegółowy opis Europy północnéj, wschodniéj i środkowéj z wyjątkiem Austryi. Ameryka i Australia. Dzieje wieków średnich.	Welter (Sawczyński) t. 2.
7	Matematyka	3	Rozkład godzin jak w kl. II. cztery działania literami, potęgi, pierwiastki, skrócenia, przemiany. Podobieństwo figur, nauka o kole.	Aryt. Zajączkowskiego II; geometrya Močnik-Maryniak.
8	Nauki przyrodnicze	2	W I półroczu mineralogia. W II półroczu początki fizyki.	Łomnicki M. Mineralogia. Fizyka Soleskiego.
		28		

KLASA IV.

L.	Przedmiot uauki	Godzin tygodn.	Treść nauki	Autor książki szkolnéj
1	Religia	2	Wykłady obrzędów i zwyczajów religijnych.	Liturgia ks. Jachimowskiego
2	J. łaciński	6	Nauka o czasach i trybach; oratio obliqua. supinum; gerundium. Caesar de bello gallico 80 rozdziałów.	Gram. Samolewicza; Cezar w. Prammera; Ćw. Próchnickiego.
3	J. grecki	4	Odmiana czasowników na „ω“ począwszy od perf. act.; odmiana czasowników na „μι“, odmiana niewzorowa czasownika.	Gram. Curtius-Samolewicz, ćwiczenia Schenkel-Samolewicz.
4	J. polski	3	Systematyczna nauka konjugacyi i o zdaniach złożonych i okresach; wierszowanie. Czytanie i wyprac. piśmienne jak w klasie III.	Wypisy t. IV. 1874.
5	J. niemiecki	4	Ukończenie i powtórzenie gramatyki. Czytanie jak w klasie II. Wypracowania piśm. jak w kl. III	Gram. Petelenza. Ćwiczenia niemieckie Germana i Petelenza.
6	Geografia i historya	4	I. półr. Nowsze dzieje z uwzględnieniem związku ich z dziejami Austryi. Powtórzenie geografii Europy. II. półr. Szczegółowa geografia monarchii austro-węgierskiéj.	I. Sawczyński t. 3. II. Dr. Szaraniewicza geografia.
7	Matematyka	3	Stosunki i proporcye składane z zastósowaniem do rachunków praktycznych, równanie 1 go stopnia, Stereometrya.	Arytm. Zajączkowskiego, II, geometr. Močnik-Maryniak.
8	Fizyka	3	Mechanika, akustyka, magnetyzm, elektryczność, optyka.	Soleski.
		29	Wszystkie prace piśmienne jak w klasie III.	

KLASA V.

L.	Przedmiot nauki	Godzin tygodn.	Treść nauki	Autor książki szkolnéj
1	Religia	2	Apologetyka i dogmatyka ogólna.	Martin. (Jachimowski).
2	J. łaciński	6	Liwiusz I, XXII. Owidyusz 1400—1500 wierszy. Prozodya i metryka. Powtórzenie gramatyki o przypadkach. Co miesiąc zadanie szkolne.	Liwiusz Zingerlego i Owidyusz wyd. Skupniewicza. Przyk. Trzaskowskiego, część I. Gramatyka Samolewicza.
3	J. grecki	5	Nauka o przypadkach. Lektura Ksenofonta i Homera Iliady ks. I. 4 zadania szkolne na półrocze.	Gram. Curtius-Samolewicz. Chrestomatya Fiderera. Ilias Sołtysika.
4	J. polski	3	Głosownia, etymologia; o tropach i figurach, o rodzajach stylu i gatunkach prozy i poezyi. Sprawozdanie z lektury prywatnéj. Co trzy tygodnie wypracowanie piśm.	Wypisy polskie Próchnickiego.
5	J. niemiecki	4	Czytanie w połączeniu z objaśnieniem gramatycznem i stylistycznem, memorowanie celniejszych ustępów. Sprawozdanie z lektury prywatnéj. Co dni 20 wypracowanie piśmienne.	Wypisy Jandaurka.
6	Geografia i historya	3	Dzieje starożytne w połączeniu z geografią.	Zakrzewski, Historya powszechna.
7	Matematyka	4	Algebra: Wstęp, 4 działania, ułamki, stosunki i proporcye. Geometrya: longimetrya i planimetrya. Co miesiąc wypracowanie szkolne, częste ćwiczenia domowe.	Algebra Dziwińskiego. Geometrya Močnika w tłómaczeniu Staneckiego, wyd. III.
	Historya naturalna	2 29	W I półroczu mineralogia. W II półroczu botanika.	Łomnicki. Rostafiński.

KLASA VI.

L.	Przedmiot nauki	Godzin tygodn.	Treść nauki	Autor książki szkolnej
1	Religia	2	Dogmatyka szczegółowa.	Jak w kl. V.
2	J. łaciński	6	Sallusti bellum Jugurthinum. Cic. in Cat. I., Virgili z Eneidy ks. I. Eccl. I. Georg. I. Obeznanie się z formą listów. Powtarzanie gramatyki o czasach i trybach. Zadania jak w kl. V.	Wyd. Sołtysika; wyd. Eichlera. Ćwicz. jak w kl. V. Gram. Samolewicza.
3	J. grecki	5	Nauka o czasach i trybach Hom. Ilias II, V, VII, XVIII. Z Herodota VIII. Zadania jak w kl. V.	Ilias, Sołtysik; Herodot, Lauczicky.
4	J. polski	3	Lektura szkolna i prywatna Dzieje literatury od początku do Stanisława Augusta. Zadania jak w kl. V.	Wypisy polskie St. Tarnowski i Próchnicki.
5	J. niemiecki	4	Jak w kl. V.	Jandaurek dla kl. VI.
6	Historya	4	Dokończenie historyi rzymskiej (od Augusta). Dzieje średnich wieków.	Gindely-Markiewicz. Hist. powsz. t. II.
7	Matematyka	3	Z algebry: potęgi, pierwiastki, logarytmy; równania I stopnia o jednej i kilku niewiadomych; z geometryi: stereometrya i trygonometrya.	Algebra, Močnik-Bodyński, w. II; Geom. jak w kl. V.
8	Historya naturalna	8	Zoologia.	Nowicki.
			Wszystkie ćwiczenia piśmienne jak w kl. V.	

KLASA VII.

L.	Przedmiot nauki	Godzin tygodn.	Treść nauki	Autor książki szkolnej
1	Religia	2	Etyka.	Martin (Solecki).
2	J. łaciński	5	Powtarzanie gramatyki. Vergil Aeneid. II, III, VI, Cicero in Cat. II, III, „pro Archia“, Laelius. Zadania jak w kl. V.	Gram. jak w kl. VI. wydanie szkolne. Ćwiczenia Próchnickiego. Eichler, Sołtysik.
3	J. grecki	4	Demostenes Olinth. I, fil. I i o „pokoju“. Uzupełnienie gramatyki. Hom. Odys. I, V, VI, XI, XII. Zadania jak w kl. V.	Gram. jak w kl. V. wydanie szkolne. Pauly et Wotke.
4	J. polski	3	Lektura szkolna i prywatna. Historya literatury, ciąg dalszy do Mickiewicza. Co miesiąc wypracowanie piśmienne.	Jak w kl. VI.
5	J. niemiecki	4	Lektura szkolna i domowa. Co miesiąc wypracowanie piśm.	Harwoth, Wypisy niemieck.
6	Historya i geografia	3	Dzieje nowożytne.	Gindely t. III. wyd. Markiewicza.
7	Matematyka	3	Z algebry: Równania logarytmiczne, szeregi, rachunek procentu złożonego, kombinacye, potęgi dwumianu. Z geometryi: Zastosowanie algebry do geometr. geometrya analityczna w płaszczyźnie.	Jak w kl. VI.
8	Fizyka	3	Własności ciał, ciepło, chemia. Mechanika ciał stałych i ciekłych.	Soleski, Fizyka.
9	Propedeutyka filozofii	2	Logika.	Kozłowski.
		29		

KLASA VIII.

L.	Przedmiot nauki	Godzin tygodn.	Treść nauki	Autor książki szkolnéj
1	Religia	2	Historya kościelna.	Robitsch (Jachimowski).
2	J. łaciński	5	Horacego 20 ód, 2 sat., 2 epod., 1 list. Taciti, Annal. I, II. Pogląd na literaturę rzymską. Zadania jak w kl. V.	Grysar. Mueller Ćwicz. jak w kl. VII.
3	J. grecki	5	Plato, Apologia, Laches, Sophocles, Electra. Pogląd na literaturę grecką. Zadania jak w kl. V.	Wyd. Krala, Wyd. Majchrowicza
4	J. polski	3	Czytanie dalszego ciągu arcydzieł literatury narodowej wieku XIX. Historya literatury w. XIX. Zadania jak w kl. VII.	Mecherzyński tom II, wyd. 2.
5	J. niemiecki	4	Podobnie jak w kl. VII. Pogląd na literaturę niemiecką. Ustne wykłady. Co miesiąc wypracowanie.	Jak w kl. VII. Deutsche Nationalliteratur, Strzemcha.
6	Historya i geografia	3	Dzieje i statystyka monarchii austro-węgierskiéj w zestawieniu z innymi państwami.	Hannak w tłóm. Sternala.
7	Matematyka	2	Zwięzłe powtórzenie całego przedmiotu. Częste ćwiczenia.	—
8	Fizyka	3	Mechanika ciał lotnych, uzupełn. i dokończ., elektryczność, magnetyzm, ruch drgający i falowy, akustyka i optyka.	Soleski, Fizyka.
	Propedeutyka filozofii	2 29	Psychologia.	Zarys psychologii Crügera, p. Z. Sawczyńskiego.

Zmiany na rok szkolny 1892/93.

Wykaz książek szkolnych, zatwierdzonych przez Wys. c. k. Radę szk. krajową dla gimnazyum św. Jacka w Krakowie na rok szkolny 1892/93.

Dla klasy I.: Schuster-Zieliński, Katechizm religii chrześcijańsko-katolickiej. Wydanie I. i II. Gródek 1888. — Samolewicz, Zwięzła gramatyka języka łacińskiego. Wyd. II. Lwów 1891; Samolewicz-Sołtysik, Przykłady łacińskie na I. kl. Wyd. V. Lwów 1891. — Małecki, Gramatyka języka polskiego szkolna. Wyd. VIII. Lwów 1891; Próchnicki i Wójcik, Wypisy polskie dla I. kl. Lwów 1890. — L. German i K. Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla I. kl. Wyd. III. Lwów 1891. — Benoni i Tatomir, Krótki rys geografii. Wyd. V. Lwów 1890. — Zajączkowski, Początki arytmetyki. Część I. Wyd. III Lwów 1891; Močnik-Maryniak, Geometrya poglądowa. Część I. Wyd. VI. Lwów 1889. — Nowicki, Zoologia. Wyd. VI. Kraków 1890

Dla klasy II.: Ks. Dąbrowski, Historya biblijna zakonu starego. Wyd. I. i II. Stanisławów 1888. — Samolewicz, Zwięzła gramatyka języka łacińskiego. Wyd. II. Lwów 1891; Samolewicz, Przykłady łacińskie. Część II. Wyd. I—III. Lwów 1887. — Małecki, Gramatyka języka polskiego szkolna. Wyd. VIII. Lwów 1891; Próchnicki i Wójcik, Wypisy polskie dla II. kl. Lwów 1892. — L. German i K. Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla II. kl. Wyd. II. Lwów 1891. — Baranowski i Dziedzicki, Geografia powszechna. Wyd. II. Lwów 1892; Welter-Sawczyński, Dzieje powszechne skrócone. Część I. Wyd. V. Kraków 1886. — Zajączkowski, Początki arytmetyki. Część I. Wyd. II. Lwów 1891; Močnik-Maryniak, Geometrya poglądowa. Część I. Wyd. VI. Lwów 1889. — Nowicki, Zoologia. Wyd. VI. Kraków 1890; Rostafiński, Botanika szkolna na klasy niższe. Wyd. nowe. Kraków 1892.

Dla klasy III.: Ks. Dąbrowski, Historya biblijna zakonu nowego. Wyd. I. i II. Stanisławów 1889. — Samolewicz-Sołtysik, Gramatyka języka łacińskiego. Część II. Wyd. V. Lwów 1891; Próchnicki, Ćwiczenia łacińskie dla III kl. Wyd. II. Lwów 1891; Cornelius Nepos, wyd. Patočki-Zawilińskiego V. — Curtius-Hartel-Ćwikliński, Gramatyka języka greckiego. Wyd. II.; Schenkl-Lewicki-Parylak, Ćwiczenia greckie. Praga 1891. — Małecki, Gramatyka języka polskiego. Wyd. poprzednio używane; Wypisy polskie na III. kl. Wyd. V. Lwów 1889. — L. German i K. Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla III. kl. Lwów, II. wydanie; Petelenz, Deutsche Grammatik. Kraków 1890. — Baranowski i Dziedzicki, Geografia powszechna. Wyd. V. Lwów 1891; Welter-Sawczyński, Dzieje powszechne skrócone. Część II. Wyd. V. Kraków 1888; K. Rawer, Dzieje ojczyste. — Zajączkowski, Początki arytmetyki i algebry. Część II. Wyd. II. Lwów 1891; Močnik-Maryniak, Geometrya poglądowa. Część II. Wyd. IV. Lwów 1891. — Soleski, Nauka fizyki. Wyd. II. Lwów 1890. — Łomnicki, Mineralogia dla niższych klas. Wyd. II. Lwów 1888.

Dla klasy IV.: Jachimowski, Liturgika katolicka. Wyd. I. i II. Praga 1882. — Samolewicz-Sołtysik, Gramatyka języka łacińskiego. Część II. Wyd. V. Lwów 1891; Próchnicki, Ćwiczenia łacińskie dla kl. IV. Lwów 1888. Caesar, Commentarii de bello gallico. Wyd. Prammer-Bednarski; Ovidius, Wyd. Ziwsa-Skupniewicza. — Curtius-Hartel Ćwikliński, Gramatyka języka greckiego. Praga 1890; Schenkl-Lewicki-Parylak, Ćwiczenia greckie. Praga 1891. — Małecki, Gramatyka języka polskiego. Wyd. poprzednio używane; Wypisy polskie na kl. IV. Wyd. II. Lwów 1888. — L. German i K. Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla kl. IV. Lwów 1891; Petelenz, Deutsche Grammatik. Kraków 1890. — Welter-Sawczyński, Dzieje powszechne skrócone. Część III. Wyd. V. Kraków 1891. Szaraniewicz, Opis geograficzny monarchii austr.-węg. Wyd. III. Lwów 1886. — Zajączkowski, Początki arytmetyki i algebry. Część II. Wyd. II. Lwów 1891. Močnik-Maryniak, Geometrya poglądowa. Część II.

Wyd. III. Lwów 1891. — Soleski, Nauka fizyki. Wyd. II. Lwów 1890.

Dla klasy V.: Ks. Jachimowski, Dogmatyka ogólna. Wyd. I. i II. Lwów 1889. — Livius. Wyd. Zingerlego; Ovidius. Wyd. Ziwsa-Skupniewicz; Samolewicz, Gramatyka języka łacińskiego. Wyd. IV. Lwów 1884. — Fiderer, Chrestomatya z pism Xenofonta. Lwów 1888; Homera Iliada, część I. Wyd. Scheindler-Sołtysik; Curtius-Samolewicz, Gramatyka języka greckiego; Schenkl-Samolewicz, Ćwiczenia greckie. — Próchnicki, Wypisy polskie dla kl. V. Lwów 1889. — Petelenz und Werner, Deutsches Lesebuch für die fünfte Classe. — Zakrzewski, Historya powszechna. Część I. Kraków 1891. — Dziwiński, Zasady algebry. Lwów 1891; Močnik-Stanecki, Geometrya dla wyższych klas. Wyd. III. Lwów 1889. — Łomnicki, Mineralogia i geologia. Wyd. III. Lwów 1891; Rostafiński, Botanika szkolna dla klas wyższych. Kraków 1886.

Dla klasy VI.: Ks. Jachimowski, Dogmatyka szczegółowa. Wyd. I. i II. Lwów 1889. — Sallustius, Linker-Sołtysik; Vergilius Eichlera; Cicero, Kornitzer-Sołtysik; Samolewicz, Gramatyka języka łacińskiego. Wyd. IV. Lwów 1884. — Fiderer, Chrestomatya z pism Xenofonta. Lwów 1888; Homera Iliada, część I. i II. Wyd. Scheindler-Sołtysik; Herodot. Wyd. Lauczicky; Samolewicz, Gramatyka języka greckiego. Wyd. III. Lwów; Schenkl-Samolewicz, Ćwiczenia greckie. Wyd. IV. Lwów. — Wypisy polskie Stan. Tarnowskiego i J. Wójcika. Część I. Lwów 1890. — Petelenz und Werner, Deutsches Lesebuch für die sechste Classe. — Zakrzewski, Historya powszechna. Część I. Kraków 1891; Zakrzewski, Historya powszechna. Część II. Kraków 1892. — Dziwiński, Zasady algebry. Lwów 1891; Močnik-Stanecki, Geometrya dla wyższych klas. Wydanie III. Lwów 1889; Logarytmy Močnika. — Petelenz, Zoologia dla klas wyższych szkół średnich. Lwów 1892.

Dla klasy VII.: Martin-Solecki, Etyka katolicka. Wyd. I. i II. Przemyśl 1885. — Cicero, Kornitzer-Sołtysik; Vergilius Eichlera; Samolewicz, Gramatyka języka łacińskiego. Wyd. IV. Lwów 1884. — Homera Odyssea, Pauly et Wotke. 1887; Demostenes, Wotke-Schmidt. 1889; Fiderer, Chrestomatya z pism Xenofonta. Lwów 1888; Samolewicz, Gramatyka języka greckiego. Wyd. III. Lwów. — Wypisy polskie Stan. Tarnowskiego i J. Wójcika. Część I. Lwów 1890; Wypisy polskie Stan. Tarnowskiego i Fr. Próchnickiego. Część II. Lwów 1891; Ewentualnie następujące dzieła w całości: Marya Malczewskiegc. Wyd. Mrówki, Zemsta Fredry. — Harwot, Deutsches Lehr- und Lesebuch für die Oberclassen. I. Band. II. Aufl. Przemyśl 1887; Strzemcha, Geschichte der deutschen Nationalliteratur. V. Auflage. Brünn 1891; Następujące dzieła w wydaniu Graesera, aprobowane przez c. k. Radę Szkolną krąjową: Hermann und Dorothea, Wilhelm Tell, Jungfrau v. Orleans. – Gindely-Markiewicz, Dzieje nowożytne. Wyd. II. Rzeszów 1886; Lewicki, Zarys dziejów Polski i krajów ruskich z nią połączonych. Wyd. II. Kraków 1888. — Dziwiński, Algebra; Močnik-Stanecki, Geometrya dla wyższych klas. Wyd. III. Lwów 1889; Logarytmy Močnika. — Kawecki i Tomaszewski, Fizyka dla wyższych klas szkół średnich. Kraków 1892. — Kozłowski, Logika elementarna. Lwów 1891.

Dla klasy VIII.: Horatius, Grysar; Tacitus, Müller. — Samolewicz, Gramatyka języka łacińskiego. Wyd. IV. Lwów 1884. — Plato, Kral; Sofokles, Schubert Majchrowicz; Homera Odyssea, Pauly et Wotke; Samolewicz, Gramatyka języka greckiego. Wyd. III Lwów. — Wypisy polskie Stan. Tarnowskiego i Fr. Próchnickiego. Część II. Lwów 1881; Ewentualnie następujące dzieła w całości: Słowackiego Baladyna. Wyd. Mrówki. – Harwot, Deutsches Lehr- und Lesebuch für die Oberclassen. II. Band. Przemyśl 1882; Strzemcha, Geschichte der deutschen Nationalliteratur. IV. Auflage. Brünn 1891; następujące dzieła w wydaniu Graesera, aprobowane przez c. k. Radę Szkolną krajową: Egmont v. Goethe, Wallenstein v. Schiller. — Tomek-Markiewicz, Dzieje monarchii austr.-węg. Rzeszów 1887; Lewicki, Zarys dziejów Polski i krajów ruskich z nią połączonych. Wyd. I. i II. Kraków 1888; Szaraniewicz, Opis monarchii austr.-węg. Wyd. III. Lwów 1886. — Močnik-Bodyński, algebra; Močnik-Stanecki, Geometrya dla wyższych klas. Wyd. III. Lwów 1889; Logarytmy Adama. — Soleski, Wykład nauki fizyki. Lwów 1883. — Crüger-Sawczyński, Zarys psychologii.

Lektura łacińska.

W kl. V.: Liv. I., XXI.; z pism Owidyusza wybór.
W kl. VI.: Sallustii Jugurtha; Cic. in Cat. I.; Virg. Buc. i Geor. (wybór), Aen. I.
W kl. VII.: Virg. II., VI., XII.; Cic. pro Milone, Cato maior.
W kl. VIII.: Horat. (wybór); Tac. Annal. I., II.

Lektura grecka.

W kl. V.: Xenof. Chrest. wybór z Anab.; Hom. Il. I., III.
W kl. VI.: Hom. III., IV., V., VI.; Herodot VIII.
W kl. VII.: Demost. olyn. III., filip. II., III.; Hom. Odys I., VI., VII., VIII., XIII.
W kl. VIII.: Plato: Apologia, Crito, Laches; Sophocles: Antigone.

III.

Tematy wypracowań piśmiennych.

---

a) W języku polskim.

W klasie V.

1. Kopiec Kościuszki. (Opis.)
2. W jaki sposób Eneasz po wyjściu z ojczyzny założył i utrwalił nowe siedziby w Italii? (Opowiadanie według r. 1. ks. I. Liwiusza.)
3. Widok na Wisłę z mostu pod Wawelem w stronę Zwierzyńca. (Opis.)
4. Śmierć Grażyny. (Opis na podstawie poematu Ad. Mickiewicza.)
5. Wizerunek Rymwida w „Grażynie“ Ad. Mickiewicza.
6. Walka Horacyuszów z Kuryacyuszami. (Opowiadanie na podstawie Liwiusza.)
7. Przedstawić powstanie i rozrost miasta Rzymu na podstawie ks. I. Liwiusza.
8. Z jakich powodów wybuchła kłótnia między Hrabią a Sędzią i jakie były jej skutki? („Pan Tadeusz“, ks. V.).
9. Skreślić przebieg i wynik narady u Maćka Dobrzyńskiego. („Pan Tadeusz“, ks. VI.)
10. Podanie o Faetonie. (Opowiadanie według Owidyusza.)
11. W jaki sposób w „Wiesławie“ Brodzińskiego odzyskali rodzice utraconą córkę? (Opowiadanie.)

12. Opowiedzieć za Owidyuszem, jak przyjęli bogów Filemon i Baucyda i jaką za to otrzymali nagrodę.

Seb. Polak.

W klasie VI.

1. Rzeka prawdziwym obrazem życia ludzkiego.
2. Oszczędny a skąpy.
3. W jaki sposób ukoiła się boleść Jana Kochanowskiego po stracie Urszulki?
4. Jak należy czytać książki, aby z nich prawdziwą odnieść korzyść?
5. Znaczenie wynalazku sztuki drukarskiej w dziejach oświaty.
6. Jaki był cel reformy państwa Rzymskiego przez Dyoklecyana?
7. Jakie mamy korzyści z nauki języków żyjących?
8. Przyjemności wsi i miasta.
9. Rozbiór Opalińskiego satyry II. 7.
10. Dzisiejsze środki komunikacyjne i ich znaczenie.
11. Ze słabością łamać uczmy się za młodu.
12. Jakie znaczenie ma w historyi Francyi wystąpienie dziewicy Orleańskiej?

L. Krókowski.

W klasie VII.

1. Próżniactwo początkiem wszystkiego złego.
2. Dlaczego wspomnienia z młodości są najprzyjemniejsze?
3. Rozbiór elegii Karpińskiego „Powrót z Warszawy na wieś“.
4. Wykazać, skąd to poszło, że język łaciński stał się językiem uczonych.
5. Stanowisko Gustawa Adolfa w wojnie trzydziestoletniej.
6. Kto jest naszym prawdziwym nieprzyjacielem?
7. Majątek nie zawsze uszczęśliwia.
8. Charakter miecznika w „Maryi“ Malczewskiego.
9. Czytanie żywotów sławnych mężów jest pobudką do cnoty.
10. Przyczyny rewolucyi francuskiej.

L. Krókowski.

W klasie VIII.

1. Rolnictwo jest środkiem bogactwa krajowego.
2. Jakie zalety ludu polskiego przedstawia Brodziński w „Wiesławie“?
3. Co zyskali ludzie przez rozpowszechnienie żeglugi?
4. Jakie jest zadanie wszystkich sztuk pięknych, a osobliwie poezyi?
5. Wpływ wzroku i słuchu na duchowy rozwój człowieka.
6. Charakterystyka Halbana w „Wallenrodzie“ Mickiewicza.
7. Wykazać zwykłe przyczyny upadku państw na przykładach z historyi.
8. Wykazać doniosłość słów: Poznaj siebie samego.

L. Krókowski.

b) W języku niemieckim.

W klasie V.

1. Die Gründung der Stadt Aachen. (Nacherzählung.)
2. Der Nutzen des Feuers. (Nacherzählung.)
3. Andreas Hofer. (Nacherzählung.)
4. Das gestohlene Pferd. (Nacherzählung.)
5. Der Sänger von Goethe. (Nacherzählung.)
6. Johanna Sebus. (Nacherzählung.)
7. Erlkönig von Goethe. (Nacherzählung.)
8. Rudolf von Habsburg. (Freie Erzählung.)
9. Der Ring des Polykrates (Inhaltsangabe.)
10. Der getreue Eckart. (Nacherzählung.)
11. Das Schlangenhalsband. (Inhaltsangabe.)
12. Der Schwanenritter. (Freie Erzählung.)
13. Beschreibung der Stadt Krakau. (Auf Grund des Lesestückes.)
14. Schiller's Taucher. (Inhaltsangabe.)

Feliks Baczakiewicz.

W klasie VI.

1. Das Begräbnis eines Reichen und eines Armen.
2. Ursachen des zweiten punischen Krieges.

3. Höfische Sitten und Gebräuche im ersten Theile des Nibelungenliedes.
4. „Durch wiederholte Streiche
Fällt auch die grösste Eiche“. (Reproduction einer Erklärung.)
5. „Morgenstunde
Hat Gold im Munde“. (Reproduction einer Erklärung.)
6. „Wer nicht hören will, muss fühlen“. (Nacherzählung.)
7. Die wiedergefundenen Söhne von Herder. (Freie Erzählung.)
8. Der Schatzgräber von Goethe. (Gedankengang.)
9. Die Theilung der Erde von Schiller (Freie Erzählung.)
10. Der Handschuh von Schiller. (Freie Erzählung.)
11. Der Geiger zu Gmünd. (Freie Erzählung.)
12. Das Leben im Flusse. (Disposition des Lesestückes.)
13. Das Glöcklein des Glückes. (Gedankengang des Gedichtes.)
14. Der Geizige und der Verschwender. (Eine Vergleichung nach gegebener Disposition).

Feliks Baczakiewicz.

W klasie VII.

1. Geld ist ein guter Diener, aber ein schlechter Herr.
2. Kriemhild und Gudrun. (Parallele.)
3. Jeder ist seines Glückes Schmied.
4. Ursachen der Veränderungen auf der Erdoberfläche.
5. Lebenslauf des spanischen Nationalhelden Cid.
6. Die Wohnug des Landmannes und des Städters. (Vergleichung.)
7. Was kündigt uns den herannahenden Frühling an?
8. Durch viele Streiche fällt selbst die schwerste Eiche.
9. Welche Kunst, Poesie oder Malerei, kann auf das menschliche Gemüth besser einwirken?
10. Charakteristik Hermanns, nach Goethes Hermann und Dorothea.

J. Kannenberg.

W klasie VIII.

1. Tapfer ist der Löwensieger,
   Tapfer ist der Weltbezwinger,
   Tapfrer wer sich selbst bezwang. (Herder.)
2. Der Wirt zum goldenen Löwen und seine Frau, nach Goethes Hermann und Dorothea.
3. Karl der Grosse und Rudolf I. von Habsburg.
4. Wallenstein und Max Piccolomini. (Der Realist und der Idealist.)
5. Maria Stuarts Begegnung mit Elisabeth.
6. Wie gelangte Rom zur Weltherrschaft?
7. Handelte der unschuldig zum Tode verurtheilte Sokrates recht, das er aus dem Gefängnisse nicht entfloh, obwohl er konnte?
8. Es stürzt den Sieger oft sein eigenes Glück.

J. Kannenberg.

c) Tematy dla piśmiennego egzaminu dojrzałości.

1. Zadanie polsko-łacińskie:
   Przekład ustępu z „Dziejów Weltera" na język łaciński.
2. Zadanie łacińsko-polskie:
   Przełożyć na język polski: „Ciceronis de oratore, I. cap. XIII.".
3. Zadanie greckie:
   Przełożyć na język polski: „Plat. Menexenos cap. X. od słów: Αἰτιασάμενος δὲ... do Μαραθῶνι γενόμενοι".
4. Zadanie polskie:
   „Jaki wpływ wywarła literatura klasyczna na rozwój literatury polskiej"?
5. Zadanie niemieckie:
   „Inwiefern ist Rudolf von Habsburg als Begründer der österreichischen Monarchie zu bezeichnen"?
6. Zadanie matematyczne:

a) $(xy)^{\log x} = 1000$

$(xy)^{\log y} = 10$

b) „Promień koła, na trójkącie opisanego, R = 18 cm.; oddalenie środka tego koła od boków *a* i *b* $d_1 = 7$ cm., $d_2 = 9$ cm.; znaleźć długość boków, wielkość kątów i powierzchnię trójkąta“.

c) „Jak wielka jest objętość 10 stopni, z których każdy jest 30 cm. wysoki, jeżeli najwyższy stopień jest 3 m. długi, 60 cm. szeroki, a szerokość każdego następnego jest o 60 cm. większa od szerokości poprzedniego“?

IV.

ZBIORY NAUKOWE.

---

a) Biblioteka nauczycielska.

1. Biblioteka miała z końcem r. szk. 1891 2152 dzieł w 4103 tomach i 41 zeszytach.

W r. bieżącym:

a) zakupiono 47 dzieł w 67 tomach

b) otrzymano w darze 37 dzieł w 40 tomach.

Z końcem r. szk. 1892 ma 2236 dzieł w 4210 tomach i 41 zeszytach.

2. Zakład prenumeruje następujące czasopisma:

1. Muzeum, 2. Przewodnik bibliograficzny, 3. Przewodnik higieniczny, 4. Przewodnik naukowy i literacki, 5. Ateneum, 6. Przegląd polski, 7. Kwartalnik historyczny, 8. Zeitschrift für d. österr. Gymnasien, 9. Lehrproben und Lehrgänge, 10. Zeitschrift f. d. physikalischen und chemischen Unterricht, 11. Inventions les nouvelles, 12. Naturwissenschaftliche Rundschau.

3. *a)* Dzieła zakupione:

1. Słownik geograficzny (zesz. 129—136). 2. Die österr-ung. Monarchie in Wort und Bild (2 egz.). 3. Strzemcha, Geschichte der deutschen Literatur. 4. Aristoteles, Πολιτεία Ἀθηναίων ed. Kaibel et Willamowitz Moellendorf. 5. Aristoteles, vom Staatswesen der Athener übers. v. Kaibel und Kiesslieng. 6. Müller-Pfaundler, Lehrbuch der Physik. 7. Schuchhardt, Schliemanns Ausgrabungen in Troia etc. 2 Aufl. 8. Autenrieth, Wörterbuch zu den hom. Gedichten 6 Aufl. 9. Homers Ilias erkl. v. Stier, 7 u. 8 Heft. 10. Vergili Aeneis von Brosin, 5 B. 11. Dzieje lite-

ratury powszechnej t. III. 12. Bobrzyński, Dzieje Polski, wyd. 3. 13. Pawlicki, Historya filozofii greckiej t. I. 14. Zaleski, Dzieła pośmiertne. 15. Booch-Arkossy, Nowy dokładny słownik polsko-niemiecki i niemiecko-polski. 16. Sienkiewicz, Ta trzecia. 17. Sienkiewicz, Bez dogmatu. 18. Wężyk, Wergilego Enejda. 19. Schiller, Handbuch der praktischen Pädagogik. 20. Cicero, Reden gegen Catilina v Hachtmann. 21. Cicero, Laelins v. Strelitz. 22. Wohlrab, Die altclassischen Realien. 23. Plüss, Sophocles' Electra. 24. Wypisy polskie, T. III. wyd. 5. 25. Samolewicz-Sołtysik, Gramatyka j. łacińskiego Cz. 2. wyd. 5 (2 egz.). 26. German-Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla kl. czwartej (2 egz.). 27. Próchnicki, Ćwiczenia łacińskie dla kl. III. wyd. 2 (2 egz.). 28. Małecki, Gramatyka j. polskiego wyd. 8 (2 egz.). 29. Soleski, Fizyka na klasy niższe, wyd. drugie. 30. Zakrzewski. Historya powszechna na klasy wyższe T. I. (2 egz.). 31. Tarnowski i Próchnicki, Wypisy polskie dla klas wyższych Cz. II. 32. Kozłowski, Logika. 33. Benoni i Tatomir, Rys geografii, wyd. 5 (2 egz.). 34. Schenkl-Lewicki-Parylak, Ćwiczenia greckie (2 egz.) 35. Curtius-Hartel-Ćwikliński, Gramatyka j. greckiego. 36. Samolewicz-Sołtysik, Ćwiczenia łacińskie na I kl., wyd. 5 (2 egz.). 37. Baranowski i Dziedzicki, Geografia, wyd. 5 (1 egz.).

b) Otrzymano w darze:

1. Wydawnictwa Akademii umiej. w Krakowie z r. 1891 i 1892, tomów 31, dar tejże Akad. 2. Taciti Annales erkl. von Pfitzner, dar prof. Lityńskiego. 3. Sprawozdanie Towarz. pedagogicznego 1890—1891, dar tegoż Tow. 4. Dickstein, Geometrya elementarna, dar autora. 5. Sallusti Bellum Catilinae et Jugurth. wyd. Scheindler-Lewicki (dar Tempskiego). 6. Pilat, Wiadomości statystyczne o stosunkach kraj. T. XII, dar Wys. Wydziału kraj. 7. Akta grodzkie i ziemskie T. XV, dar Wys. Wydz. kraj. 8. Sprawozdanie o stanie szkół średnich w 1890/91, dar Wys. Rady Szk. kraj.

b) Biblioteka uczniów.

1. Z końcem roku szkolnego 1891 liczyła:
dzieł polskich 413 w 635 tomach.

2. W roku szkolnym 1892 przybyło:
dzieł polskich 34 w 77 tomach.
Z końcem roku szkolnego 1892 liczyła 447 dzieł w 712 t.

a) Biblioteka polska:

Zakupiono: 1. Marol Szajnocha: Dwie wojny. 2. Calderon: Książę niezłomny. 3. K. Wodzicki: Jaskółka. 4. Shakespeare: Juliusz Cezar. 5. Rostafiński: Szkice i opowiadania. 6. Teresa Jadwiga: Obrazki dziejowe. 7. Z przeszłości. 8. Z lat minionych. 9. Mayne Reid: Ziemia ognista. 10. Dolina bez wyjścia. 11. Pobyt w pustyni. 12. Zaleska: Mieszkaniec puszczy. 13. Przygody młodego podróżnika w Tatrach. 14. Żeleńska: Znakomite niewiasty. 15. Anczyc: Opisy i przygody. 16. Grajnert: Złota księga. 17. Dr. Antoni J. Opowiadania historyczne Ser. 3—5. 18. J. Korzeniowski: Kollokacya. 19. Spekulant. 20. Garbaty. 21. Z. Kaczkowski: Dzieła. 22. Orzeszkowa: Nad Niemnem. 23. Z różnych sfer. 24. J. I. Kraszewski: Powieść bez tytułu. 25. Dyabeł. 26. Złote jabłko. 27. Kordecki. 28. Dziwadła. 29. Boża czeladka. 30. Ign. Krasicki, jego życie i dzieła. 31. Gawędy o literaturze i sztuce. 32. Zacharyasiewicz: Święty Jur. 33, Henryk Rzewuski: Listopad. 34. Bełza: Maryla.

Seb. Polak.

b) Biblioteka niemiecka.

1. Z końcem roku szkolnego 1891 liczyła:
dzieł 176 w 289 tomach.
2. W roku szkolnym 1892 przybyło:
dzieł 19 w 43 tomach.
Z końcem roku szkolnego 1892 liczyła 195 dzieł w 332 tomach.

I. Graeser's Schulausgaben classischer Werke w 4 exemplarzach: 1. Lessing. Emilia Galotti. 2. Tenże. Nathan der Weise. 3. Wieland. Oberon. 4. Schiller. Don Carlos. 5. Tenże. Maria Stuart. 6. Tenże. Wallenstein. 7. Voß. Luise. 8. Körner. Zriny. II. 9. A. Groner. In Ritterburgen und unter Fahrenden Leuten. 10. Tenże. Erzählungen aus der Geschichte Österreich Ungarn. 11. Ferdinand Zöhrer. Österreichisches Sagen- und Märchenbuch. 12. Tenże. Österreichische Alpengeschichten. 13. J. Kern. Freuden und Leiden auf offener See. 14. W. Hauff. Märchen. 15. Richard Baron. Das Christfeld in der Familie Frommhold. 16. Tenże. Der Schulmeister in Tannenrode. 17. Tenże. Aus dem Leben zweier Schüler. 18. Das Buch vom Vater Radetzky (dar Wys. Ministeryum). 19. Die österreichisch-ungarische Monarchie in Wort und Bild. Das Küstenland.

Feliks Baczakiewicz.

c) Zbiór historyczno-geograficzny.

Kupiono w roku szkolnym 1892:

1. B. Kozenn's. Geografischer-Schul-Atlas. Wien. 1891. 2. F. W. Putzger's. Historischer-Schul-Atlas. Leipzig 1891. 3 H. Kiepert. Wandkarte des römischen Reiches. Berlin. 4. R. Kiepert. Politische Wandkarte v. Frankreich. Berlin 1881. 5. H. Kiepert. Neue Wandkarte v. Palaestina. Berlin 1890. 6. R. Kiepert. Politische Wandkarte der Balkan-Halb-Insel. Berlin 1883. 7. R. Kiepert. Politische Wandkarte v. Afrika. Berlin 1891. 8. H. Kiepert Politische Schul-Wandkarte v. Europa. Berlin 1889. 2 egz. 9. H. u. R. Kiepert's. Politische Wandkarte v. Asien. Berlin 1891. 10. Dr. H. Wagner. Wandkarte des deutschen Reichs u. seiner Nachbargebiete. Gotha 1886. 11. H. Kiepert. Latii veteris et finitimarum regionum tabula. Berolini 1888. — Otrzymano w darze: 12. Mapa Rzplitej polskiej (praca i dar byłego ucznia c. k. gimnazyum św. Jacka Stanisława Srokowskiego). 13. Uebersichts-Karte der k. k. Oesterr. Staatsbahnen mit dem Stande v. Jänner 1890 (dar ucznia VIII kl. c. k. gimn. św. Jacka Tadeusza Berezowskiego).

d) Gabinet fizyczny.

Kupiono w r. 1892 następujące przyrządy:

1. Przyrząd do okazania ciśnienia cieczy na dno naczynia. 2. Pyrometr o sześciu sztabach metalowych. 3. Przyrząd Riessa do influencyi elektrycznej. 4. Baterya wodna. 5. Figury stereometryczne.

A. M. Kawecki.

e) Gabinet historyi naturalnej.

W r. szk. 1892 przybyły okazy wypchane: Plecotus auritus, Foetorius ermineus, Spermophilus guttatus, Luscinia maior, Columba palumbus, Anas boschas; kalcyt skrystalizowany, dar ucznia kl. VI L. Bobrzyka, gips skrystalizowany, dar ucznia kl. III*b* W. Filipkiewicza, ozokeryt, dar ucznia kl. V T. Polaka; ciąg dalszy tablic ściennych do zoologii Leuckarta i Nitschego; 4 gabloty ścienne i 5 ram oszklonych na rośliny.

W. Kulczyński.

f) Zbiór wzorów rysunkowych.

W roku szk. 1892 zakupiono: 1. Modeli z masy papierowej 4 serye. 2. Modeli gipsowych 12 sztuk. 3. Deditiusa „Wzory kolorowe“, 12 tablic. 4. Schoopa „Kolorowy ornament“, 24 tablic. 5. Kolstera „Wzory“, 5 zeszytów.

T. Trnka.

V.

Ważniejsze rozporządzenia Władz szkolnych

z roku szkolnego 1892.

---

1. Wys. c. k. Rada Szk. kraj. reskr. z 10 października 1891 l. 810/Pr. określa zakres wiadomości, jakich od abituryenta gimnazyalnego przy egzaminie dojrzałości żądać należy.
2. Wys. c. k. Prezydyum Rady Szk. kraj. reskr. z 10 października 1891 l. 783 wzywa nauczycieli nauk przyrodniczych, by Wydziały powiatowe w zakładaniu i urządzaniu powiatowych zbiorów mineralogiczno-geologicznych pomocą swą wspierali.
3. JE. Pan Minister W. i O. reskr. z 28 września 1891 l. 19954 rozporządził, by nauka religii dla uczniów mojżeszowego wyznania wszystkich czterech zakładów średnich krakowskich odbywała się wspólnie, począwszy od 1 lutego 1892, i poruczył rzeczoną naukę tutejszemu kaznodziei, drowi Samuelowi Landauowi.
4. JE. Pan Minister W. i O. reskr. z 25 września 1891 l. 20029 rozszerzył rozporządzenie swe o udzielaniu wyższych remuneracyj w razie braku suplentów i rozebrania godzin naukowych przez grono nauczycielskie, na dalsze dwa lata tj. na r. 1892 i 1893.
5. Wys. c. k. Rada Szk. kraj. okól. z 17 października 1891 l. 20300 komunikuje reskrypt JE. Pana Ministra W. i O. z 30 września 1891 l. 1786, znoszący piśmienne wypracowania domowe z języka łacińskiego i greckiego, oraz normujący ostatecznie lekturę autorów łacińskich i greckich w klasach wyższego gimnazyum.

6. Wys. c. k. Rada Szk. kraj. okól. z 15 listopada 1891 l. 21593 komunikuje reskrypt JE. Pana Ministra W. i O. z 27 października 1891 l. 1926 w sprawie wydawania legitymacyj c. k. urzędnikom państwowym, upoważniających ich do korzystania z jazdy na kolei północnej po zniżonych cenach.
7. Wys. c. k. Rada Szk. kraj. okól. z 4 lutego 1892 l. 1023 oznajmia o wydaniu przez c. k. Ministerstwo handlu reskryptu z 5 grudnia 1891 l. 55483 zawierającego „normale“, dotyczące ułatwień dla c. k. urzędników czynnych tak w jeździe jak i w przesyłkach na liniach austryackich kolei państwowych.
8. Wys. c. k. Rada Szk. kraj. okól. z 22 lutego 1892 l. 2054 oznajmia, iż stosownie do ministeryalnego reskryptu z 29 grudnia 1891 l. 2273 legitymacye kolejowe wydawać będą urzędnikom państwowym odtąd c. k. Namiestnictwo i wszystkie c. k. Starostwa.
9. Wys c. k. Rada Szk. kraj okól z 11 lutego 1892 l. 2162 oznajmia, że Wys. c. k. Ministerstwo W. i O. reskr. z 15 grudnia 1891 l. 26765 wydało dodatkowo do rozporządzenia z 17 czerwca 1891 l. 9139 wykazy: 1) aprobowanych środków do nauki rysunków odręcznych, 2) godnych polecenia środków do kształcenia się dla nauczycieli rysunków i 3) aprobowanych przyrządów i modeli do nauki rysunków w gimnazyach.
10. JE. Pan Minister W. i O. reskr. z 9 grudnia 1891 l. 17947 rozporządził, by nauka rysunków, począwszy od przyszłego roku szk. 1893, odbywała się według nowego planu lekcyjnego, ogłoszonego reskr. z 17 czerwca 1891 l. 9193.
11. Wys. c. k. Rada Szk. kraj. okól. z 21 maja 1892 l. 10122 wydaje przepisy, dotyczące nauki języka łacińskiego w gimnazyach, jako uzupełnienie reskr. JE. Pana Ministra W. i O. z 17 października 1891 l. 20300.
12. Wys. c. k. Rada Szk. kraj. okól. z 5 maja 1892 l. 4405 wydaje „Prawidła pisowni polskiej“, obowiązującej odtąd we wszystkich szkołach krajowych tak przy nauce języka polskiego, jakoteż w korespondencyi urzędowej.
13. Wys. c. k. Rada Szk. kraj. okól. z 16 czerwca 1892 l. 581 wydaje plan oraz instrukcyę dla nauki języka niemieckiego

w szkołach średnich z językiem wykładowym polskim i ruskim.

14. Wys. c. k. Rada Szk. kraj. zaliczyła w poczet książek szkolnych:

a) okól. z 17 lipca 1891 l. 12722: „Historya powszechna dla klas wyższych szkół średnich, część I., przez W. Zakrzewskiego, Kraków 1891“;

b) okól. z 21 lipca 1891 l. 13255: „Logika elementarna, przez Wł. Kozłowskiego, Lwów 1891“;

c) okól. z 17 lipca 1891 l. 10885: „Stylistyka polska, przez Andrzeja Glińskiego“;

d) okól. z 5 sierpnia 1891 l. 12699: „Początki arytmetyki dla szkół średnich, przez Wł. Zajączkowskiego, część I., wyd. III., Lwów 1891, część II., wyd., II., Lwów 1891“;

e) okól z 27 sierpnia 1891 l. 15807: „Zoologia dla klas wyższych, napisał dr. Ign. Petelenz, Lwów 1892“;

f) okól. z 31 sierpnia 1891 l. 16561: „Zasady algebry dla klas wyższych, przez dra Dziwińskiego, Lwów 1891“;

g) okól. z 31 sierpnia 1891 l. 15850: „Dra Samolewicza Przykłady łacińskie, cz. I., dla kl. I., wyd. V., opracował Sołtysik, Lwów 1891“;

h) okól. z 2 września 1891 l. 16640: „Mineralogia i geologia dla kl. V. gimn., ułożył M. Łomnicki, wyd. III. Lwów 1891“;

i) okól. z 8 września 1891 l. 16021: „Zeszyty kaligraficzne do nauki pisma polskiego, ułożył Kazimierz Nowicki, Lwów 1891“;

j) okól. z 16 września 1891 l. 17590: „Ćwiczenia łacińskie dla kl. III., ułożył Fr. Próchnicki, wyd. II., Lwów 1891“;

k) okól. z 15 września 1891 l. 17801: „L. Germann i K. Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla kl. IV., Lwów 1891“;

l) okól. z 31 października 1891 l. 21136: „Dra Samolewicza Gramatyka języka łacińskiego, część II., zawierająca składnię, wyd. V., opracował T. Sołtysik, Lwów 1891“;

m) okól. z 1 grudnia 1891 l 21026: „Wybór pieśni łatwych“ i „Zbiór mszy łatwych“, wydał F. Fuk“;

n) okól. z 6 stycznia 1892 l. 22427: „Synonimika i frazeologia niemiecka dra A. Pechnika, Lwów 1891“ (jako książkę pomocniczą);

o) okól. z 27 stycznia 1892 l. 1521: „Botanika szkolna na klasy niższe przez dra Józefa Rostafińskiego, wyd. nowe, Kraków 1892";

p) okól. z 29 stycznia 1892 l. 24971: „Sofoklesa Elektra i Ajax przez Schuberta i Majchrowicza, wyd. II., Praga 1891";

r) okól. z 4 marca 1892 l. 1972: „Korneliusza Neposa Żywoty znakomitych wodzów, przez Patočkę, z słowniczkiem Zawilińskiego, Praga 1892";

s) okól. z 4 marca 1892 l. 2669: „Wypisy polskie dla klas wyższych gimnazyów i szkół realnych, część II., przez Stanisława Tarnowskiego i Franciszka Próchnickiego, Lwów 1891";

t) okól. z 17 maja 1892 l. 9601: „Wykład fizyki, ułożył Józef Soleski, wyd. II., Lwów 1892".

15. Wys. c. k. Rada Szk. kraj. poleciła do bibliotek szkolnych:

a) okól. z 30 października 1891 l. 20520: „Biblioteka polska dla młodzieży, wydawnictwo Towarzystwa nauczycieli szkół wyższych";

b) okól. z 7 listopada 1891 l. 21609: „Wykład chemii ogólnej, przez dra Ernesta Bandrowskiego, część I., chemia nieorganiczna, Kraków 1891".

*
* *

W sprawie fizycznego rozwoju młodzieży szkolnej odbyło grono nauczycielskie z udziałem nauczyciela gimnastyki, p. Haczewskiego, konferencyę w dniu 10 stycznia 1892. Wnioski tej konferencyi zatwierdziła Wys. c. k. Rada Szk. krajowa reskryptem z d. 26 stycznia l. 987, przeznaczając na urządzenie boiska gimnastycznego w podwórzu gimnazyalnem 160 złr. Z kwoty tej sprawiono i ustawiono na podwórzu gimnazyalnem następujące przyrządy gimnastyczne: 1) krążnik sześcioramienny, 2) rusztowanie z belek z drabiną sznurową, dwoma żerdziami pochyłemi i linką do spinania, 3) skocznię w dal, 4) skocznię na wysokość i 5) dwie równoważnie. Miejsca około przyrządów gimnastycznych wysypano grubą warstwą drobnej kory garbarskiej, zabezpieczając w ten sposób ćwiczącą młodzież od wypadków cięższego potłuczenia się. W ten sposób zyskała młodzież szkolna tutejszego zakładu sposobność korzystnego spędzenia chwil wolnych od nauki pod okiem i nadzorem nauczycieli zakładu.

W porze zimowej korzystała młodzież z toru łyżwiarskiego na stawie w parku Krakowskim, którego właściciel zniżył cenę wstępu dla młodzieży szkolnej, w mniejszej liczbie aniżeli spodziewać się można było. Powodem tego była głównie trudność, jaka się okazała w urządzaniu nadzoru; tak bowiem zakład jak i rodzice uczniów najczęściej nie mogli podjąć się obowiązku nadzorowania młodzieży na torze łyżwiarskim.

Również urządzanie częstszych wspólnych wycieczek z młodzieżą poza miasto napotykało trudności w braku czasu wolnego od zajęć szkolnych; to też oprócz wspólnej wycieczki, przedsięwziętej w maju z młodzieżą wszystkich klas zakładu na Bielany, wycieczki klasowe stosunkowo odbywały się rzadko.

VI.

KRONIKA ZAKŁADU.

Rok szkolny 1891/2 rozpoczął się uroczystem nabożeństwem dnia 3 września.

Egzamina wstępne do klasy I. odbyły się częścią z końcem roku szkolnego 1891, częścią zaś z początkiem r. 1891/2 w dniach 1 i 2 września.

Zakład obchodził uroczyście imieniny Najjaśniejszych Państwa w dniach 4 października i 19 listopada; również brał udział w nabożeństwach żałobnych za dusze ś. p. Cesarzowej Maryi Anny i Cesarza Ferdynanda I.

Wys. c. k. Rada Szk. kraj. reskr. z 7 września 1891 l. 17046 zezwala na utworzenie czterech klas równorzędnych na rok szk. 1891/2 w c. k. gimnazyum św. Jacka.

JE. Pan Minister W. i O. reskr. z 24 czerwca 1891 l. 11961 przenosi profesora Sebastyana Polaka z c. k. gimnazyum drohobyckiego w tym samym charakterze służbowym do tutejszego zakładu.

JE. Pan Minister W. i O. mianuje tutejszych zastępców nauczycieli, dra Antoniego Karbowiaka i Franciszka Vogla, rzeczywistymi nauczycielami i przydziela pierwszego z nich reskr. z 4 lipca 1891 l. 14049 do gimnazyum wadowickiego, drugiego zaś reskr. z 21 sierpnia 1891 l. 16796 do gimnazyum w Jarosławiu.

Wys. c. k. Rada Szk. kraj. reskr. z 27 sierpnia 1891 l. 16273 przenosi z tutejszego zakładu zastępcę nauczyciela Michała Lityńskiego do c. k. IV. gimnazyum lwowskiego, a reskr.

z 3 września 1891 l. 16403 zastępcę katechety ks. dra Jana Fijałka w tym samym charakterze służbowym do c. k. gimnazyum św. Anny w Krakowie, przydziela natomiast zastępcę katechety, ks. dra Zygmunta Karasia, w tym samym charakterze służbowym z wyższej szkoły realnej w Krakowie do tutejszego zakładu.

Wys. c. k. Rada Szk. kraj. mianuje kandydatów stanu nauczycielskiego, Wojciecha Grzegorzewicza i Kazimierza Jakla, zastępcami nauczycieli i przydziela obydwóch dekr. z 27 sierpnia 1891 l. 13724 i 594 do tutejszego zakładu.

Wys. c. k. Rada Szk. kraj. reskr. z 1 września 1891 l. 16154 udziela profesorowi Feliksowi Baczakiewiczowi urlopu na miesiąc wrzesień celem poratowania zdrowia.

Wys. c k. Rada Szk. kraj. przyznaje profesorom, Józefowi Rozwadowskiemu i drowi Stanisławowi Stodolakowi czwarty dodatek, pierwszemu dekr. z 26 czerwca 1891 l. 10783, drugiemu dekr. z 1 września 1891 l. 14726, zaś profesorowi Władysławowi Kulczyńskiemu dekr. z 15 września 1891 l. 17592 drugi dodatek pięcioletni.

Wys. c. k. Rada Szk. kraj. reskr. z 24 grudnia 1891 l. 24367 przydziela celem zastąpienia chorego profesora, Stanisława Stodolaka, zastępcę nauczyciela gimnazyum św. Anny, Wojciecha Cachla, do tutejszego zakładu na miesiąc styczeń r. 1892.

JE. Pan Minister W. i O. reskr. z 21 stycznia 1892 l. 812 udziela profesorowi drowi Stanisławowi Stodolakowi celem poratowania zdrowia urlopu do końca roku szkolnego 1892, a na jego miejsce mianuje Wys. c. k. Rada Szk. kraj. dekr. z 16 stycznia 1892 l. 812 kandydata nauczycielskiego, Michała Ptaszyka, zastępcą nauczyciela w tutejszym zakładzie.

W dniu 30 stycznia zakończono pierwsze półrocze r. szk. 1892 drugie zaś rozpoczęto dnia 3 lutego.

JW. Pan Wiceprezydent c. k. Rady Szk. kraj. dr. Michał Bobrzyński, przybywszy w dniu 23 kwietnia do zakładu, przysłuchiwał się lekcyom języka niemieckiego w klasie IIb i języka greckiego w kl. V.

Pisemny egzamin dojrzałości odbył się w dniach od 9—13 maja, ustny zaś pod przewodnictwem c k. dyrektora gimnazyum św. Anny, WP. dra Leona Kulczyńskiego, w czasie od 20—25 czerwca. Wynik egzaminu dojrzałości podaje się pod koniec niniejszego sprawozdania.

W ciągu roku szkolnego przystępowała młodzież katolicka trzy razy do św. Sakramentów spowiedzi i komunii; nadto odprawiła w wielkim tygodniu trzydniowe rekolekcye.

Rok szkolny zakończono dnia 30 czerwca uroczystem nabożeństwem i rozdaniem świadectw.

Statystyka uczniów.

Tytuły	I		II		III		IV		V	VI	VII	VIII	Razem
	a	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*					
1. Liczba uczniów:													
Z końcem roku szk. 1891 .	46^{1}	40	35^{2}	34^{3}	35^{1}	34	33^{1}	33	42	39	29	42^{2}	442^{10}
Z początkiem r. szk. 1892 .	52	51	40	37	38	39	36	32	50	40	38	33	486
Przyjęto w ciągu r. s. 1892 .	3	—	—	1	—	—	—	1	—	—	1	—	6
Ogółem przyj. w r. s. 1692 .	55	51	40	38	38	39	36	33	50	40	39	33	492
a mianowicie:													
Z obcych zakładów:													
a) z promocyą	46	44	4	3	3	3	4	3	4	2	3	2	121
b) repetentów	3	2	3	3	2	2	1	2	—	—	1	—	19
Z tutejszego zakładu:													
a) z promocyą	—	—	30	29	29	27	27	26	43	37	33	26	307
b) repetentow	6	5	3	3	4	7	4	2	3	1	2	5	45
W ciągu roku wystąpiło . .	16	11	4	3	6	9	2	2	3	1	1	2	60
L. ucz. z końcem r. s. 1892 .	39	40	36	35	32	30	34	31	47	39	38	31	432
a mianowicie:													
a) publicznych . . . , .	38	39	35	34	30	29	32	31	46	38	36	31	419
b) prywatnych	1	1	1	1	2	1	2	—	1	1	2	—	13
2. Według miejsca urodzenia:													
Z W. Ks. Krakowskiego . .	11^{1}	17^{1}	18^{1}	16	11	12	13^{1}	15	16	9	15^{2}	13	166^{6}
Z Galicyi	23	18	16	17^{1}	14^{2}	16	18^{1}	15	23^{1}	27^{1}	19	16	222^{5}
Z innych krajów koron. . .	—	—	—	—	1	1^{1}	1	—	3	-	2	1	9^{1}
Z poza Austryi	4	4	1	1	4	—	—	1	4	2	—	1	22
Razem .	38^{1}	39^{1}	35^{1}	34^{1}	30^{2}	29^{1}	32^{2}	31	46^{1}	38^{1}	36^{2}	31	419^{13}
3. Według narodowości było:													
Polaków	38^{1}	39^{1}	34^{1}	34^{1}	29^{2}	29^{1}	32^{2}	30	44^{1}	38^{1}	36^{2}	29	412^{13}
Rusinów	—	—	1	—	1	—	—	1	2	—	—	1	6
Niemców	—	—	—	—	—	—	—	—		—	—	1	1
Razem .	38^{1}	39^{1}	35^{1}	34^{1}	30^{2}	29^{1}	32^{2}	31	46^{1}	38^{1}	36^{2}	31	419^{13}
4. Według wyznania:													
rzymsko-katolickiego . . .	27	25	21	22	22^{1}	20	23^{1}	17	36^{1}	29^{1}	27^{2}	16	285^{6}
grecko-katolickiego . . .	—	—	1	—	1	—	$—^{1}$	1	2	—	—	1	6^{1}
ewangelickiego	2^{1}	—	1	—	—	—	—	1	-	—	—	1	5^{1}
mojżeszowego	9	14^{1}	12^{1}	12^{1}	7^{1}	9^{1}	9	12	8	9	9	13	123^{5}
Razem .	38^{1}	39^{1}	35^{1}	34^{1}	30^{2}	29^{1}	32^{2}	31	46^{1}	38^{1}	36^{2}	31	419^{13}
5. Wiek uczniów:													
11 lat liczyło	9	5^{1}	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	14^{1}
12 „ „	10^{1}	12	12^{1}	11	—	—	—	-	—	—	—	—	45^{2}
13 „ „	10	15	7	11	10	9^{1}	—	—	—	—	—	—	62^{1}
14 „ „	4	5	11	4^{1}	8^{2}	6	8^{2}	4	—	—	—	—	50^{5}
15 „ „	4	1	4	6	8	7	8	10	10	2	—	—	60
16 „ „	—	1	1	2	—	3	7	8	11	12	—	—	45
17 „ „	1	—	—	—	2	4	5	6	12	13	11^{2}	1	55^{2}
18 „ „	—	-	—	—	1	—	4	3	11	4	4	10	37
19 „ „	—	—	—	—	1	—	—	—	1	4^{1}	8	9	23^{1}
20 „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	6	7	14
21 „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	4	3	9
22 „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	1	3
23 „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
24 „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	$—^{1}$	—	—	—	$—^{1}$
27 „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
Razem .	38^{1}	39^{1}	35^{1}	34^{1}	30^{2}	29^{1}	32^{2}	31	46^{1}	38^{1}	36^{2}	31	419^{16}

Tytuły	I		II		III		IV		V	VI	VII	VIII	Razem
	a	b	a	b	a	b	a	b					
6. Klasyfikacya uczniów za 2 półr.													
Stopień celujący otrzymało .	—	2	2	2	2	—	1	1	4	5	2	2	23
" I. " .	30^1	26^1	29^1	23^1	25	19^1	26^1	22	30	26^1	20^1	24	300^8
" II. " .	2	3	2	1	1	4	2	1	2	2	6	1	27
" III. " .	2	4	—	1	1	4	1	3	5	—	—	1	22
Do egz. popr. przypuszcz. .	4	3	2	7	1	2	2^1	4	4	5	8	3	45^1
Nieklasyfikowani	—	1	—	—	$—^2$	—	—	—	1^1	—	$—^1$		2^4
Razem .	38^1	39^1	35^1	34^1	30^2	29^4	32^2	31	46^1	38^1	36^2	31	419^{13}
7. Opłaty szkolne:													
Opłatę szkolną płaciło:													
w I półroczu	30^1	40	17^1	14	12^1	17^1	12^2	15	15^1	15	13	15	215^7
w II półroczu	13^1	18^1	12^1	11	22	21^1	12^2	15	22	11	17^1	15	189^7
Od połowy uwolniono:													
w I półroczu	—	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	2
w II półroczu	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Od całej opł. uwolniono:													
w I półroczu	12	7	22	21	19	19	20	17	32	25	23	18	235
w II półroczu	25	21	23	23	8	8	20	16	24	27	19	16	230
Opłata szkolna wynosiła:													
w I półroczu	620	800	360	280	280	360	280	300	320	300	260	300	4460
w II półroczu	280	380	260	220	440	440	280	300	440	220	360	300	3920
Razem .	900	1180	620	500	720	800	560	600	760	520	620	600	8380
Taksy wstępne wynosiły .	102·90	92 40	14.70	12.60	10.50	10.50	10.50	10.50	10.50	4.20	10.55	4.20	294
Datki na środki naukowe .	55	51	40	38	38	39	36	33	50	40	39	33	492
Taksy za dupl. świadectw .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	19
8. Frekwencya na naukę przedmiotów nadobowiązkowych:													
Historya kraju rodzinnego .	—	—	—	—	30	29	32	31	—	—	36	—	158
Język francuski	—	—	—	—	1	1	6	1	5	5	4	2	25
Kaligrafia	12	15	22	14	—	—	—	—	—	—	—	—	63
Rysunki	9	5	5	4	2	1	4	—	6	1	—	—	37
Śpiew	10	5	10	2	4	4	5	2	11	2	2	2	59
Religia mojżeszowa . . .	9	14	12	11	7	9	9	12	8	9	9	13	122
Gimnastyka	22	19	10	12	16	17	20	20	24	16	15	—	191
9. Stypendya.													
Stypendya pobierało . . .	1	—	1	1	—	-	1	1	—	3	2	1	11
Łączna kwota pobr. styp. .	30	—	150	100	—	—	300	100	—	457_{50}	202	157_{50}	1497

VIII.

Pomoc koleżeńska.

W r. szkolnym 1892 wpłynęło dobrowolnych datków na rzecz ubogich uczniów 53 złr. 30 cnt., którą to kwotę wydano w ciągu roku w całości na sprawienie ubioru dla najuboższych kilku uczniów zakładu.

Ks. Wojciech Siedlecki.

IX.

KLASYFIKACYA UCZNIÓW

za drugie półrocze r. szk. 1892.

Klasa I. A.

1. Altendorf Szymon
2. Bański Alfred
3. Buchala Stanisław
4. Eminowicz Ludwik
5. Faust Eliasz
6. Filipkiewicz Stefan.
7. Fischer Stanisław
8. Gabryś Adam
9. Gottlieb Samuel
10. Góra Stefan
11. Horaczek Józef
12. Iossé Tadeusz
13. Kalisz Alfred
14. Kała Józef
15. Krzyżanowski Wac.
16. Kurzawa Franciszek
17. Kuźnik Antoni
18. Landau Levy Izaak
19. Luberdowicz Jan
20. Maj Jan
21. Mornof Józef
22. Pardyak Ferdynand
23. Pasławski Roman
24. Pietrzak Franciszek
25. Radwański Wład.
26. Sim Alfred
27. Simon Michał
28 Stroński Ferdynand
29. Willer Bernard
30. Zakrzewski Stan.

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 4, stopień II otrzymało 2, stopień III 2 uczniów.

Klasa I. B.

1. **Kondraczek Stefan**
2. **Solarski Julian**
3. Cukrowicz Jan
4 Domański Wład.
5. Dorula Bolesław
6. Dulski Witold
7. Fleischman Jan
8. Friedman Samuel
9. Gargul Józef
10. Goldberger Ure v. Ul.
11. Goldschütz Joachim
12. Gołąbek Józef
13. Halpern Edward
14. Landau Jakób
15. Lehrfreund Zygm.
16. Leuchter Wolf
17. Lustgarten Maksym.
18. Madej Sebastyan
19. Makary Andrzej
20. Merklinger Henryk
21. Molkner Stanisław
22. Opidowicz antoni
23. Paszek Wojciech
24. Samborski Ludwik
25. Smyczyński Józej
26. Stuglik Wojciech
27. Szybowski Stanisław
28. Wachtel Józef.

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 3. stopień II. otrzymało 3 stopień III 4 uczniów.

Klasa II. A.

1. **Fränkel Jonasz**
2. **Kampf Izydor**
3. Dąbrowski Maryan
4. Dębski Franciszek
5 Droździkowski Alfr.
6. Eichhorn Fryderyk
7. Filimowski Stan.
8. Gębarowski Jan
9. Grünzweig Natan
10 Gutman Maurycy
11 Haber Mojżesz
12. Herz Markus
13. Jakób Ferdynand
14. Jarczyk Stanisław
15. Juszkiewicz Józef
16. Kowalski Józef
17. Kroebel Adam
18. Landau Izaak
19. Landau Jonasz
20. Liszka Jan
21. Ochmański Adam
22. Pajor Zygmunt
23. Ringer Jozue
24. Słomka Jan
25. Śmieszkiewicz Jan
26. Sobolewski Seweryn
27. Steiner Zygmunt
28. Stohandel Władysł.
29. Szarek Mieczysław.
30. Szybalski Michał
31 Uziembło Henryk.

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 2, stopień II otrzymało 2 uczniów.

Klasa II. B.

1. **Błachociński Stan.**	10. Fink Saul	18. Menschek Henryk
2. **Piotrowski Jan**	11. Grünzweig Bernard	19. Pańczewicz Hugo
3. Ader Zygmunt	12. Gut Izydor	20. Rapaport Bertold
4. Armhaus Adolf	13. Kostyra Jan.	21. Schek Julian
5. Blachut Jan	14. Krzanowski Antoni	22 Tomaszewski Jan
6. Buchenholz Maur.	15. Kudelski Maksymil.	23. Unger Hugo
7. Deiches Maksym.	16. Lustgarten Władys.	24. Weigel Ferdynand
8. Dominik Marcin	17. Majkowski Stanis.	25. Wójcicki Julian.
9. Filipek Józef		

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 7, stopień II otrzymał 1, stopień III 1 uczeń.

Klasa III. A.

1. **Kaufman Hugo**	10. Gutmann Maksym.	19. Romański Wiktor
2 **Kozik Michał**	11. Korczyński Antoni	20. Rosenstrauch Zyg.
3. Dallet Józef	12. Krzyżanowski Bron.	21. Rudolphi Adam
4. Dunin Stefan	13. Kus Józef	22. Sawczyński Longin
5. Fischlowitz Józef	14. Midowicz Julian	23. Soldinger Henryk
6. Flessler Józef	15. Midowicz Tadeusz	24. Szymczykiewicz Karol
7. Gaertner Eustachy	16. Niwicki Zygmunt	25. Taborski Franciszek
8. Gargul Karol	17. Ostrowski Kazimierz	26. Wihnanek Maryan
9. Gorgoń Franciszek	18. Rajski Ferdynand	27. Winnicki Włodzimierz.

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 1, stopień II otrzymał 1, stopień III 1 uczeń.

Klasa III. B.

1. Bilski Klemens	8. Krókowski Roman	14. Schönwetter Henryk
2. Cieślik Antoni	9. Lauer Samuel	15. Supiński Stanisław
3 Hajdo Teofil	10. Mirtenbaum Leon	16. Szafrański Feliks
4. Haraschin Józef	11. Płonka Ludwik	17. Wcisło Franciszek
5 Hermann Leon	12. Prokesz Joachim	18. Wyporek Szczepan
6. Janiczek Otton	13. Rajski Władysław	19. Zapoth Emil.
7. Korngold Józef		

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 2, stopień II otrzymało 4, stopień III 4 uczniów.

Klasa IV. A.

1. **Reiner Ryszard**	10. Gulkowski Stanisł.	19. Rapoport Leon
2. Arzt Władysław	11. Kaczmarczyk Józef	20. Reiner Pinkus
3. Borowczyk Władysł	12. Kannenberg Tadeusz	21. Salawa Wojciech
4. Chrzan Bogusław	13. Korzeniowski Alfred	22. Seweryn Józef
5. Cybulski Teodor	14. Tremler Hirsch	23. Siedlecki Leon
6. Einäugler Juliusz	15. Krupiński Józef	24. Skuba Stanisław
7. Feuereisen Leopold	16. Lieberman Wendel	25. Szmaciarz Francisz.
8. Fruchthändler Chaim	17. Maciąga Władysław	26. Wierzejski Stanisł.
9. Gawalewicz Adolf	18. Nowacki Tadeusz	27. Zakrzeński Karol.

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 2, stopień drugi otrzymało 2, stopień III 1 uczeń.

Klasa IV. B.

1. **Krzęciosz Jan**
2. Bułat Jan
3. Byczkowski Roman
4. Cyfer Samuel
5. Dorfner Maksymilian
6. Faust Szymon
7. Filimowski Ludwik
8. Friedmann Maurycy
9. Gajda Bronisław
10. Goldgart Maurycy
11. Gołąb Stanisław
12. Grygloski Karol
13. Gutwiński Fran.
14. Karabiński Feliks
15. Kasprzyk Bronisław
16. Kiszka Stanisław
17. Krawczyński Fran.
18. Kuliński Józef
19. Prochaska Emil
20. Soldinger Emanuel
21. Süsskind Dawid
22. Woźniczka Ignacy

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 4, stopień II otrzymał 1, stopień III 3 uczniów.

Klasa V.

1. **Kucik Paweł**
2. **Mięsowicz Wład.**
3. **Mika Wincenty**
4. **Teufel Salomon**
5. Barberowski Karol
6. Batko Józef
7. Bodzioch Piotr
8. Buchała Franciszek
9. Buzała Kazimierz
10. Chmurski Antoni
11. Clossmann Juliusz
12. Duchowicz Bronisław
13. Grabowski Antoni
14. Groblicki Błażej
15. Gryglewski Miecz.
16. Hanusz Stanisław
17. Kowar Antoni
18. Leinkram Michał
19. Leonhard Stanisław
20. Lewicki Emilian
21. Macheles Zygmunt
22. Nadel Mendel
23. Narowski Augustyn
24. Polak Szymon
25. Polak Tadeusz
26. Romański Adam
27. Rychłowski Kazimierz
28. Siegel Samuel
29. Sławikowski Józef
30. Staszewski Miecz.
31. Swierczewski Emil
32. Szybowski Józef
33. Tułasiewicz Stanisław
34. Wasserberg Leon

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 4, stopień II otrzymało 2, III stopień otrzymało 5, nieklasyfikowany 1 uczeń.

Klasa VI.

1. **Bobrowski Emil**
2. **Hanusiak Wład.**
3. **Jachimczak Fran.**
4. **Krókowski Konrad**
5. **Sandacz Józef**
6. Berger Arnold
7. Błachociński Antoni
8. Brason Ludwik
9. Garfunkel Leib
10. Gawęda Stanisław
11. Grüner Izaak
12. Haduch Ludwik
13. Janczy Wojciech
14. Jelonek Brunon
15. Kahane Max
16. Kopijasz Józef
17. Korczyński Edward
18. Matula Jan
19. Nowotny Jan
20. Nowotny Julian
21. Nycz Michał
22. Owsiński Józef
23. Pelz Salem
24. Schauer Jakób
25. Supiński Leopold
26. Święcicki Jan
27. Wadowski Stefan
28. Willer Max
29. Wnęk Józef
30. Wolff Eugeniusz
31. Zimmerspitz Peisech

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 5, stopień II otrzymało 2 uczniów

Klasa VII.

1. **Szmaciarz Stanisław**
2. **Wyrwiński Maryan**
3. Closmann Karol
4. Fragner Izajasz
5. Furko Julian
6. Gawor Błażej
7. Goldwasser Łazarz
8. Herz Teodor
9. Janik Wojciech
10. Josse Alfred
11. Junger Markus
12. Jüttner Maryan
13. Król Ignacy
14. Landau Saul
15. Laskowski Wład.
16. Mięsowicz Erwin
17. Silberstein Józef
18. Skibniewski Ludwik
19. Szurek Jan
20. Szymczykiewicz Stan.
21. Weinsberg Jakób
22. Schneider Józef

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 8, stopień II otrzymało 6.

Klasa VIII.

Stopień celujący otrzymało	2
Stopień I otrzymało	24
Stopień II otrzymał	1
Stopień III otrzymał	1
Do egzaminu popraw. przeznaczono . .	3
Razem . .	31

Wynik egzaminu dojrzałości.

Do egzaminu dojrzałości zgłosiło się:

a) uczniów publicznych	26
b) externista	1
Razem . .	27

Od ustnego egzaminu odstąpił 1 uczeń publiczny.

Egzamina dojrzałości z odznaczeniem złożyli:

1. **Göllner Rudolf** z Przerowa ur. 23 lutego 1873 r.
2. **Josse Ferdynand** z Krakowa, ur 6 lutego 1873 r.
3. **Kannenberg Stanisław** z Brodów, ur. 8 maja 1873 r.

Za dojrzałych uznani zostali:

4. Alexandrowicz Jerzy ze Lwowa, ur. 14 lipca 1872 r.
5. Berezowski Tadeusz z Sambora, ur. 1 kwietnia 1873.
6. Bocheński Kazimierz z Jordanowa, ur. 16 września 1871.
7. Friedmann Ludwik z Krakowa, ur. 9 lutego 1873.
8. Grünhut Berel z Krakowa, ur. 19 stycznia 1873.
9. Huppenthal Karol ze Lwowa, ur. 1 lutego 1874.
10. Jąkała Wojciech z Wysokiej, ur. 5 stycznia 1872.
11. Krupiński Rudolf z Oświęcima, ur. 17 kwietnia 1872.
12. Liebermann Samuel z Borynicz ur. 11 października 1873.
13. Merz Alfred z Krakowa, ur. 6 maja 1874.
14. Paczowski Jan z Chrzanowa, ur. 18 października 1874.
15. Popiel Bronisław z Zielonek, ur. 8 września 1874.
16. Prysak Bolesław z Wadowic, ur. 15 października 1874.
17. Scharf Mojżesz z Kalwaryi, ur. 23 grudnia 1874.
18. Schudmak Auschel z Krakowa, ur. 1 listopada 1872.
19. Sokołowski Witołd z Brzeźna, ur. 1 kwietnia 1871.
20. Springer Jakób z Ciężkowic, ur. 1872 r.
21. Wierzbicki Stanisław z Krakowa ur. 26 stycznia 1873.

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 3 ucz. publ. i 1 extern., reprobowano na rok 1 publ.

Do Rodziców i Opiekunów.

Wpisy uczniów na rok szkolny 1892/3 odbędą się d. 29, 30 i 31 sierpnia. Późniejsze zgłoszenie się do zapisu tylko w wyjątkowych wypadkach może być uwzględnione.

Uczniowie mają się zgłaszać do wpisu osobiście w towarzystwie rodziców lub opiekunów i przedłożyć świadectwo z ostatniego półrocza.

Uczniowie nowo do zakładu wstępujący mają przedłożyć: *a)* metrykę urodzenia, *b)* świadectwo szkolne i *c)* złożyć taksę wpisową w kwocie 2 złr. 10 ct. w. a.

Każdy uczeń ma złożyć przy wpisie 1 złr. na pomnożenie środków naukowych

Opłata szkolna, która ma być złożoną w pierwszych sześciu tygodniach każdego półrocza, wynosi 20 złr. w. a. na jedno półrocze.

Rodzice i opiekunowie zechcą przy wpisie oświadczyć dyrekcyi, czy sobie życzą, aby ich synowie lub pupile pobierali naukę w przedmiotach nadobowiązkowych. Kto naukę tę rozpocznie, temu nie wolno jej przerywać przed końcem roku bez zezwolenia dyrekcyi.

Egzamina wstępne do I. klasy odbywają się w dwóch terminach, tj. pierwszy termin przypada 30 czerwca i 1 lipca, drugi termin 1 i 2 września.

Egzamina poprawcze ze wszystkich klas odbędą się w dniach 30 i 31 sierpnia; na egzamina wstępne do klas wyższych przeznacza się dzień 1, 2 i 3 września.

Nabożeństwo wstępne odbędzie się dnia 3 września, a dnia 4 września rozpocznie się regularna nauka szkolna.

W Krakowie dnia 30 czerwca 1892 r.

Tadeusz Skuba
dyrektor.