Bulletin

de

l'Observatoire astronomique

de

Vilno.

I. ASTRONOMIE

№ 6.

Biuletyn

Obserwatorjum astronomicznego

w Wilnie.

1925

Wydano z zasiłku Ministerstwa W. R. i O. P.

Drukarnia „ZNICZ" Wilno, Ś-to Jańska 1.

F. KĘPIŃSKI.

Sur la libration des périhélies de petites planètes.

Il y a environ vingt cinq ans, M. Charlier[1]) avait signalé, pour la première fois paraît-il, quelques petites planètes, dont les périhélies semblaient être en libration avec le périhélie de Jupiter. Ses calculs effectués rapidement ne concernèrent que quatre à cinq centaines d'objets, — l'inventaire planétaire d'alors.

Plus tard, en vertu d'une analyse plus succinte, M. Charlier[2]) s'arrêta définitivement sur les planètes (147), (189) et (205), comme ayant la propriété en question.

Dès lors, le nombre des petites planètes a largement doublé et nous avons jugé intéressante la recherche de simples moyens, aidant à retrouver facilement des planètes pour ainsi dire libratoires, sans le recours d'une analyse succinte de chaque cas spécial.

Dans ce but, nous avons, à l'aide des tables de MM. Norén et Raab[3]), construit une table contenant les coefficients des variations séculaires des grandeurs de $e \cos \pi$ et $e \sin \pi$, comme fonctions des valeurs équidistantes du demi grand axe, et par une simple discussion de la même table nous sommes arrivés aux limites des valeurs initiales de e_0 et de π_0, entre lesquelles il est possible de rencontrer une libration du périhélie.

L'inspection des nouvelles planètes, découvertes pendant le siècle courant, nous a permis d'ajouter quatre nouveaux cas de libration, aux trois cas connus depuis les recherches de M. Charlier. Ce sont les planètes: (447), (514), (589) et (702).

Rappelons, en quelques mots, comment on arrive à representer les variations séculaires des éléments elliptiques d'une petite planète, se trouvant sous l'action du Soleil et des huit grandes planètes.

En signifiant l'excentricité et le périhélie par e resp. π et posant

$$\left.\begin{aligned}\xi &= e \cos \pi \\ \eta &= e \sin \pi\end{aligned}\right\} \text{(petite planète)} \qquad \begin{aligned}\xi_i &= e_i \cos \pi_i \\ \eta_i &= e_i \sin \pi_i\end{aligned} \left(\begin{matrix}\text{grandes planètes} \\ i = 1, \ldots . 8\end{matrix}\right)$$

---

[1]) C. V. L. Charlier. Einige Fälle von Librationsbewegungen in dem Planetensystem. Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium, Nr. 12.

[2]) C. L. Charlier. Die Mechanik des Himmels, Bd. I, Abschnitt 7, § 11.

[3]) G. Norén u. S. Raab. Hülfstafeln zur Berechnung der säkularen Störungen der kleinen Planeten. Meddel. f. Lunds Astr. Obs., Serie II, Nr. 2.

on donne habituellement aux équations des dites variations — en se bornant aux développements à secondes puissances près — la forme suivante

$$\frac{d\xi}{dt} = -b\eta + \sum_{i=1}^{8} [O.\,i]\,\eta_i$$

$$\frac{d\eta}{dt} = +b\xi + \sum_{i=1}^{8} [O.\,i]\,\xi_i \qquad 1)$$

où on a

$$b = \sum_{i=1}^{8} (O.\,i)$$

$$(O.\,i) = \tfrac{1}{4}\, m_i\, n\, a\, B_1 = \frac{m_i}{\sqrt{1+m_i}}\, n_i\, P_1(\alpha) \text{ resp. } \frac{m_i}{\sqrt{1+m_i}}\, n_i\, Q_1(\alpha)$$

$$[O.\,i] = \tfrac{1}{4}\, m_i\, n\, a\, B_2 = \frac{m_i}{\sqrt{1+m_i}}\, n_i\, P_2(\alpha) \text{ resp. } \frac{m_i}{\sqrt{1+m_i}}\, n_i\, Q_2(\alpha) \qquad 2)$$

$$\alpha = \frac{a}{a_i}\ \begin{matrix}\text{plan. ext.}\\ (5,6,7,8)\end{matrix} \text{ resp. } \alpha = \frac{a_i}{a}\ \begin{matrix}\text{plan. int.}\\ (1,2,3,4)\end{matrix}$$

B_1 et B_2 sont les coefficients du développement

$$\frac{aa_i}{(a^2 + a_i^2 - 2aa_i \cos\varphi)^{3/2}} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} B_i \cos i\varphi$$

Quant aux autres grandeurs et ses valeurs numériques, on en trouvera une explication suffisante dans les oeuvres de la Mécanique Céleste [4]) et dans la préface du mémoire de G. Norén et S. Raab: „Hülfstafeln zur Berechnung der säkularen Störungen der kleinen Planeten“ [5]) dont nous fîmes ici même un large profit.

Il nous reste encore à citer les développements des grandeurs de ξ_i et η_i que nous empruntons au travail de J. Stockwell: „Memoir on the secular variations of the elements of the orbits of the eight principal planets...“ — ce que nous faisons dans le tableau suivant [6]).

---

[4]) F. Tisserand. Traité de Méc. Cél., t. I, chap. XXVI. Voir aussi [2]).

[5]) Voir [3]).

[6]) Dans le tableau pareil de M. Charlier (Die Mech. d. H., I, pg. 387) il faut changer les signes des termes M_8^{VI} et M_6^{VIII}. Il est évident qu'il faut aussi altérer le signe du premier terme de N_5^{VII} en Stockwell (pg. 98), en vertu des valeurs citées pg. 36 et suiv.

I. TABLE

des variations séculaires des ξ_i et η_i des grandes planètes pour 1850.0 ($t = 0$).

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$	$j = 8$
g_j	5.″463803	7.″248427	17.″014373	17.″784456	0.″616685	2.″727659	3.″716607	22.″460848
β_j	88° 0′ 38″	20° 50′ 19″	335° 11′ 31″	137° 6′ 36″	67° 56′ 35″	105° 3′ 53″	28° 8′ 46″	307° 56′ 50″
$N_j^{(1)}$	+ 0.1766064	+ 0.0268838	+ 0.0014673	+ 0.0015934	+ 0.0000077	+ 0.0005685	+ 0.0244939	— 0.0000975
$N_j^{(2)}$	+ 0.0085906	— 0.0201444	— 0.0112171	— 0.0131892	+ 0.0000117	+ 0.0005571	+ 0.0166053	+ 0.0003175
$N_j^{(3)}$	+ 0.0054825	— 0.0153619	+ 0.0113105	+ 0.0162641	+ 0.0000136	+ 0.0005832	+ 0.0163413	— 0.0023780
$N_j^{(4)}$	+ 0.0008418	— 0.0025451	+ 0.0225719	— 0.0790650	+ 0.0000219	+ 0.0007765	+ 0.0187954	— 0.0150371
$N_j^{(5)}$	— 0.0000090	+ 0.0000106	— 0.0000011	+ 0.0000011	+ 0.0000636	+ 0.0019436	+ 0.0431601	+ 0.0156383
$N_j^{(6)}$	— 0.0000080	+ 0.0000109	— 0.0000064	+ 0.0000110	+ 0.0000717	+ 0.0017694	+ 0.0341011	— 0.0483504
$N_j^{(7)}$	+ 0.0000035	— 0.0000027	+ 0.0000004	— 0.0000006	+ 0.0015578	+ 0.0297330	— 0.0448614	+ 0.0018058
$N_j^{(8)}$	+ 0.0000001	— 0.0000001	+ 0.0000000	— 0.0000000	+ 0.0100389	— 0.0029105	+ 0.0014205	+ 0.0001365

D'après ce tableau, on a pour une grande planète quelconque

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{8} N_j^{(i)} \cos (g_j t + \beta_j)$$
$$\eta_i = \sum_{j=1}^{8} N_j^{(i)} \sin (g_j t + \beta_j) \qquad 3)$$

la sommation n'étant étendue que sur l'indice j.

En substituant les expressions (3) dans les équations (1), on obtient

$$\frac{d\xi}{dt} = - b\eta + \sum_{j=1}^{8} E_j \sin (g_j t + \beta_j)$$
$$\frac{d\eta}{dt} = + b\xi - \sum_{j=1}^{8} E_j \cos (g_j t + \beta_j) \qquad 4)$$

où l'on a désigné

$$E_j = \sum_{i=1}^{8} [O.\ i]\ N_j^{(i)} \qquad 5)$$

L'intégration des équations (4) se fait immédiatement et conduit aux variations séculaires de ξ et η

$$\xi = A \cos (bt + B) + \sum_{j=1}^{8} G_j \cos (g_j t + \beta_j)$$
$$\eta = A \sin (bt + B) + \sum_{j=1}^{8} G_j \sin (g_j t + \beta_j) \qquad 6)$$

où

$$G_j = \frac{E_j}{b - g_j} \qquad 7)$$

et A, B sont des constantes d'intégration.

On peut les destiner en vertu des conditions

$$\xi_0 = e_0 \cos \pi_0 = A \cos B + \sum_{j=1}^{8} G_j \cos \beta_j = A \cos B + \varepsilon \cos \Pi$$
$$\eta_0 = e_0 \sin \pi_0 = A \sin B + \sum_{j=1}^{8} G_j \sin \beta_j = A \sin B + \varepsilon \sin \Pi \qquad 8)$$

qui résultent des expressions (6) en y posant $t = 0$.

Les conditions (8) comportent une interprétation géométrique, si on les écrit sous la forme

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = A^2 \qquad 9)$$

en posant

$$\begin{array}{ll} x = e_0 \cos \pi_0 & p = \varepsilon \cos \Pi \\ y = e_0 \sin \pi_0 & q = \varepsilon \sin \Pi \end{array} \qquad 10)$$

En effet, l'équation (9) représente un cercle ayant son centre dans un point (p, q) et dont le rayon est egal à A. Ajoutons que les points d'intersection de son diamètre, passant par le commencement des coordonnées x et y, sont éloignés du même commencement des grandeurs $\varepsilon - A$ resp. $\varepsilon + A$ et que le dit diamètre forme avec chacune des deux tangentes au cercle, issues du commencement $(0,0)$ un angle φ tel que $\sin \varphi = \frac{A}{\varepsilon}$.

D'après ce que nous venons de dire, on comprend qu'il serait bien facile d'interpréter géométriquement la possibilité d'une libration en π, si nous connaissions la limite supérieure de A, au delà de laquelle une libration n'est plus possible.

Admettons que cette limite de A nous soit donnée, et désignons la par A_0.

Nous aurions alors avancé: une libration a lieu pour tous les points intérieurs (x, y) d'un cercle ayant son centre en (p, q) et dont le rayon est A_0.

Ceci serait identique à l'affirmation suivante: une libration en π a lieu, si e_0 et π_0 satisfont les conditions

$$\begin{array}{c} \varepsilon - A_0 < e_0 < \varepsilon + A_0 \\ \Pi - \arcsin \frac{A_0}{\varepsilon} < \pi_0 < \Pi + \arcsin \frac{A_0}{\varepsilon} \end{array} \qquad 11)$$

Il s'agit donc d'établir la valeur de A_0.

Pour y arriver, rappelons les conditions d'existence d'une libration en π, dans le cas, où nous ne nous préoccupions que des librations par rapport au périhélie de Jupiter ou à celui de Saturne.

Ces conditions consistent, comme l'on sait, à satisfaire une des inégalités, à savoir

$$\begin{array}{ll} |G_7| > |A| + |G_1| + \ldots + |G_6| + |G_8| & \text{libration par rapport à Jupiter} \\ \text{ou } |G_8| > |A| + |G_1| + \ldots + |G_6| + |G_7| & \text{libration par rapport à Saturne} \end{array} \qquad 12)$$

Dans le premier de ces cas, l'angle $|\pi - g_7 t - \beta_7|$ et dans le second, l'angle $|\pi - g_8 t - \beta_8|$ n'atteignent jamais 90^0 en éprouvant ainsi des oscillations autour de la ligne d'apsides de Jupiter resp. de Saturne. On dit alors que le périhélie π d'une petite planète a un moyen mouvement annuel de $g_7 = 3''.717$ resp. $g_8 = 22''.461$. Ajoutons que, puisque G_7 et G_8 dans le domaine des petites planètes sont toujours positifs, ces oscillations ne peuvent s'effectuer qu'autour des périhélies de Jupiter resp. de Saturne.

D'après les inégalités (12), la possibilité de la libration considérée exclue toutes les valeurs de A telles que

$$\left.\begin{array}{ll} A \geqq 2\,|G_7| - \sum\limits_{j=1}^{8} |G_j| & \text{libration par rapport à Jupiter} \\ A \geqq 2\,|G_8| - \sum\limits_{j=1}^{8} |G_j| & \text{libration par rapport à Saturne.} \end{array}\right\} \quad 13)$$

Les seconds membres des inégalités (12) représentent donc les limites cherchées de A_0.

Nous étant proposé de faciliter un prompt discernement des petites planètes susceptibles de la libration en question, nous avons songé utile de recalculer tous les coefficients G_j pour de différentes valeurs du demi grand axe a, d'autant plus que ceux de M. Charlier (d'après Newcomb) furent basés sur les anciennes valeurs de Leverrier [7]).

Comme le demi grand axe des orbites des petites planètes, à quelques exceptions près, exigeant d'ailleurs un procédé individuel, reste entre les limites $2.0 < a < 3.5$, et ayant d'un autre côté recherché une solution rapide du problème ici posé, il nous a paru pleinement suffisant d'avancer les valeurs numériques de l'argument de a de 0.1, à partir de $a = 2.0$ jusqu'à $a = 3.5$.

Voici le tableau des coefficients G_j calculés, en vertu de la table I et des expressions de (5) ainsi que de (7), à l'aide des bien souvent citées tables de Norén et Raab, d'où nous avons tiré les valeurs de b (table VI) et de [0.i] (table VII) [8]).

---

[7]) Malheureusement l'important mémoire de Newcomb: „on the secular variations of the orbits of the Asteroids" nous a été inaccessible.

[8]) Mentionnons une correction dans la table VII: la valeur de [O. 6] pour a = 2.00 devrait être 0.2555.

II. TABLE

des valeurs de b et des G_j

a	b	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
2.0	27.″114	+ 0.000 104	— 0.000 306	+ 0.000 886	— 0.002 088	+ 0.000 030	+ 0.000 984	+ 0.022 724	+ 0.036 142
2.1	29.814	+ 0.000 068	— 0.000 200	+ 0.000 469	— 0.001 077	+ 0.000 031	+ 0.001 025	+ 0.023 553	+ 0.027 059
2.2	32.882	+ 0.000 045	— 0.000 133	+ 0.000 268	— 0.000 532	+ 0.000 033	+ 0.001 066	+ 0.024 369	+ 0.022 375
2.3	36.327	+ 0.000 029	— 0.000 090	+ 0.000 162	— 0.000 301	+ 0.000 034	+ 0.001 105	+ 0.025 174	+ 0.019 595
2.4	40.180	+ 0.000 019	— 0.000 061	+ 0.000 102	— 0.000 180	+ 0.000 036	+ 0.001 144	+ 0.025 974	+ 0.017 802
2.5	44.490	+ 0.000 012	— 0.000 041	+ 0.000 066	— 0.000 111	+ 0.000 037	+ 0.001 182	+ 0.026 768	+ 0.016 581
2.6	49.319	+ 0.000 007	— 0.000 028	+ 0.000 044	— 0.000 071	+ 0.000 039	+ 0.001 220	+ 0.027 558	+ 0.015 723
2.7	54.744	+ 0.000 003	— 0.000 018	+ 0.000 030	— 0.000 047	+ 0.000 040	+ 0.001 257	+ 0.028 342	+ 0.015 108
2.8	60.864	+ 0.000 001	— 0.000 011	+ 0.000 021	— 0.000 031	+ 0.000 041	+ 0.001 294	+ 0.029 122	+ 0.014 666
2.9	67.797	— 0.000 001	— 0.000 006	+ 0.000 014	— 0.000 021	+ 0.000 043	+ 0.001 331	+ 0.029 898	+ 0.014 348
3.0	75.692	— 0.000 002	— 0.000 003	+ 0.000 010	— 0.000 015	+ 0.000 044	+ 0.001 367	+ 0.030 669	+ 0.014 124
3.1	84.734	— 0.000 004	+ 0,000 000	+ 0.000 007	— 0.000 010	+ 0.000 045	+ 0.001 403	+ 0.031 432	+ 0.013 973
3.2	95.160	— 0.000 005	+ 0.000 002	+ 0.000 005	— 0.000 007	+ 0.000 046	+ 0.001 439	+ 0.032 189	+ 0.013 879
3.3	107.263	— 0.000 006	+ 0.000 004	+ 0.000 003	— 0.000 005	+ 0.000 048	+ 0.001 474	+ 0.032 939	+ 0.013 831
3.4	121.425	— 0.000 006	+ 0.000 005	+ 0.000 002	— 0.000 003	+ 0.000 049	+ 0.001 509	+ 0.033 679	+ 0.013 820
3.5	138.146	— 0.000 006	+ 0.000 006	+ 0.000 001	— 0.000 002	+ 0.000 050	+ 0.001 543	+ 0.034 411	+ 0.013 840

III. T A B L E

des limites de $\varphi_0 = \text{arc sin } e_0$ et de π_0

						Limites de φ_0		Limites de π_0	
a	$\frac{G_8}{G_7}$	$\frac{\Sigma \lvert G_j \rvert - G_8}{\Sigma \lvert G_j \rvert - G_7}$	A_0	ε	Π	arc sin $(\varepsilon - A_0)$	arc sin $(\varepsilon + A_0)$	Π — arc sin $\frac{A_0}{\varepsilon}$	Π + arc sin $\frac{A_0}{\varepsilon}$
2.0	0.036 142	0.027 122	0.009 020	0.047 834	—22° 53.′1	2° 13.′5	3° 15.′6	— 33° 45.′3	— 12° 0.′9
2.1	0.027 059	0.026 353	0.000 706	0.039 446	— 14 49.7	2 13.2	2 18.1	— 25 8.3	— 4 31.1
2.2	0.024 369	0.024 452	—	0.035 927	— 8 54.7	—	—	—	—
2.3	0.025 174	0.021 316	0.003 858	0.034 368	— 4 35.8	1 44.9	2 11.4	— 11 2.5	+ 1 50.9
2.4	0.025 974	0.019 344	0.006 630	0.033 743	— 1 23.1	1 33.2	2 18.8	— 12 43.0	+ 9 56.8
2.5	0.026 768	0.018 030	0.008 738	0.033 616	+ 1 3.6	1 25.5	2 25.6	— 14 0.4	+ 16 7.6
2.6	0.027 558	0.017 132	0.010 426	0.033 777	+ 2 57.7	1 20.3	2 32.0	— 15 1.1	+ 20 56.5
2.7	0.028 342	0.016 503	0.011 839	0.034 118	+ 4 28.1	1 16.6	2 38.0	— 15 50.2	+ 24 46.4
2.8	0.029 122	0.016 065	0.013 057	0.034 578	+ 5 41.2	1 14.0	2 43.8	— 16 29.9	+ 27 52.3
2.9	0.029 898	0.015 764	0.014 134	0.035 118	+ 6 41.3	1 12.1	2 49.4	— 17 2.7	+ 30 25.3
3.0	0.030 669	0.015 565	0.015 104	0.035 713	+ 7 31.1	1 10.9	2 54.8	— 17 30.0	+ 32 32.2
3.1	0.031 432	0.015 442	0.015 990	0.036 346	+ 8 12.7	1 10.0	3 0.0	— 17 53.3	+ 34 18.7
3.2	0.032 189	0.015 383	0.016 806	0.037 008	+ 8 47.9	1 9.5	3 5.1	— 18 12.6	+ 35 48.4
3.3	0.032 939	0.015 371	0.017 568	0.037 689	+ 9 17.9	1 9.2	3 10.1	— 18 29.1	+ 37 4.9
3.4	0.033 679	0.015 394	0.018 285	0.038 382	+ 9 43.6	1 9.1	3 14.9	— 18 43.4	+ 38 10.6
3.5	0.034 411	0.015 448	0.018 963	0.039 082	+10 5.5	1 9.2	3 19.7	— 18 56.1	+ 39 7.1

En comparant cette table (II) des valeurs des coefficients de G_j à une table analogue de M. Charlier [9]), nous constatons entre elles des différences, facilement explicables par les raisons données plus haut.

Au moyen de la table II, nous sommes en état d'évaluer successivement toutes les grandeurs nécessaires pour reconnaître entre quelles limites de e_o et de π_o une libration en périhélie peut avoir lieu, et si c'est avec Jupiter ou Saturne.

L' inspection de la table III nous conduit aux réflexions suivantes.

Une écrasante majorité de petites planètes possède un assez fort mouvement séculaire des apsides, caracterisé par la grandeur b.

Le domaine de l'influence libratoire de Saturne est très étroit et s'élargit à mesure que nous nous en éloignons (moyen mouvement de π : 22.″461). Par contre, celui de Jupiter est considérable et croît à mesure que nous nous en approchons, mais cet accroissement ralentit peu à peu (moyen mouvement de $\pi = 3.''717$). On ne peut présumer jusqu'où se prolongerait cet élargissement des limites de e_o et π_o pour les valeurs $a < 2.0$ et $a > 3.5$.

Ne tenant compte que de l'influence de Jupiter, et admettant ses éléments elliptiques comme constants, M. Charlier dans son mémoire „Einige Fälle von Librationsbewegungen . . . .“ a soumis à une analyse toutes les petites planètes de son temps qui satisfaisaient les conditions

$$\varphi < 5.^\circ 55 \qquad \text{et} \qquad [\pi_0 - \pi_6'] < 90^\circ$$

Les résultats de cette analyse ont fait pressentir que ces limites avaient été dressées trop amplement, ce qui a été d'ailleurs prouvé par le calcul présent: les limites de φ_o et de π_o sont relativement très restreintes et une libration ne pourrait s'y présenter que dans un cas excessivement rare.

Il ne faut pas aussi oublier que les valeurs de φ_o et de π_o, dont nous disposons généralement et auxquelles nous attribuons un rôle décisif dans le critérium de la libration, peuvent porter l'influence perturbatrice périodique, et dissimuler le vrai caractère du mouvement séculaire des apsides.

En restant dans cet ordre d'idées, nous mentionnons encore la possibilité d'un cas, où aucune des grandeurs de $|A|$, $|G_1|$ . . . . $|G_8|$ ne surpasserait la somme de toutes les autres. Mais le moyen

---

[9]) Die Mech. d. Himmel, I, pg 423.

mouvement existe-t-il alors? et quel est-il? Cette question n'a été positivement résolue par M. Cavallin [10]), que dans la première partie. Elle a été reprise par M. Terkán [11]), sans trop de succès pourtant.

Terminons par une liste des petites planètes satisfaisant plus ou moins les conditions d'une libration, en vertu des valeurs de φ_0 et de π_0, données dans la publication récente „Kleine Planeten, Jahrgang 1925, Bahnelemente und Oppositionsephemeriden, bearb. von dem Astr. Rech.-Institut zu Berlin-Dahlem".

IV. LISTE

des petites planètes libratoires et presque libratoires.

planète	log a	a	φ_0	π_0	circonstances
(40)	0.35550	2.2673	2.°670	1.°768	assez près des cond. de libration (Jup.)
(147)	0.49642	3.1363	2.036	14.331	libration (Jup.)
(189)	0.3893	2.4508	2.10	10.18	libration (Jup.)
(205)	0.44388	2.7789	1.915	24.932	libration (Jup.)
(215)	0.44181	2.7657	2.021	—20.212	près des cond. de libration (Jup.)
(447)	0.47511	2.9861	2.576	31.980	libration (Jup.)
(514)	0.48428	3.0499	2.074	20.6 9	libration (Jup.)
(589)	0.49632	3.1356	2.581	28.582	libration (Jup.)
(702)	0.50451	3.1953	1.420	— 9.968	libration (Jup.)
(799)	0.40495	2.5407	1.416	37.608	assez près des cond. de libration (Jup.)
(813)	0.34695	2.2231	1.481	3.157	assez près des cond. de libration (Jup.)
(837)	0.36137	2.2981	2.357	11.666	assez près des cond. de libration (Jup.)
(891)	0.45661	2.8616	1.514	40.075	assez près des cond. de libration (Jup.)
1916 ZF	0.42996	2.6913	2.545	25.664	tout près des cond. de libration (Jup.)

Nous complétons cette liste par les remarques suivantes. A la rigueur nous aurions dû prendre pour π_0 des valeurs se rap-

---

[10]) C. B. S. Cavallin. Contributions to the theory of the secular perturbations of the planets. Medd. från. Lunds Astr. Obs. Nr 19.

[11]) Dr. L. Terkán. Die saekularen Störungen der kleinen Planeten L'auteur s'égare sur une voie où il croit nécessaire d'introduire une espèce de libration temporaire.

portant à l'époque et à l'équinoxe de 1850.0, conformément aux données relatives des grandes planètes, tandis que les valeurs de π_0, données ci-dessus se rapportent aux différentes époques d'osculation et à l'équinoxe de 1925.0. Cependant cette réduction serait peu importante pour l'analyse générale du cas de libration.

Nous avons écarté de notre analyse toutes les planètes des types de Hilda, de Thulé et d'Achille ainsi que les planètes Eros et Hungaria qui exigent une discussion spéciale.

La libration des planètes (147), (189) et (205) fut déjà signalée par M. Charlier.

En vertu de notre analyse, les planètes (447), (514), (589) et (702) s'associent incontestablement à ces dernières, comme planètes libratoires.

Nous citons aussi quelques planètes qui, quoique n'accomplissant pas rigoureusement les conditions d'une libration, se trouvent dans des circonstances proches d'une libration.

Parmi plus de mille petites planètes prises ici en considération, il ne s'en est pas trouvé une seule qui aurait eu des conditions plus ou moins proches de la libration par rapport à Saturne, ce qui n'est pas d'ailleurs étonnant, vu le petit nombre de planètes découvertes à une distance moyenne du Soleil $a < 2.0$.

Ajoutons enfin que nous avons soumis à une analyse particulière la planète (1019):

$$a = 1.9107, \quad \varphi_0 = 4^\circ 095, \quad \pi_0 = 5^0.579$$

pour laquelle on n'a

$$\text{ni } A > \sum_{j=1}^{8} |G_j| \quad \text{ni } 2\,|G_j| > \sum_{j=1}^{8} |G_j| + A$$

— cas singulier dont nous avons parlé plus haut.

Varsovie, mars 1925.

Wl. DZIEWULSKI.

On the Systematic Motions of Stars.

First paper.

It is known, that in the distribution of velocities of stars there are some favoured directions of the movement of stars, viz. the vertices of Kapteyn. Two theories represent this distribution: the two-drift theory of Kapteyn and the ellipsoidal theory of Schwarzschild, and we know, that the vertices lie nearly in the galactic plane. According to Schwarzschild's hypothesis we can realize the system of stars as turning in the galactic plane around the axis vertical to the galaxy with the stars moving in both directions. Supposing the Sun to lie out of the center of our system and taking into consideration, that the proper motions are known mostly for the nearest stars, we can conclude, that the stars move in two opposite directions along this favoured direction.

If this assumption be correct, than we can expect, that for more distant stars this symmetry possibly disappears, i. e. that the line vertex-antivertex changes its direction for stars of different distances. It seems interesting to see, whether the favoured direction of the movement of stars depends on the distribution of stars in space. With the view stars from different catalogues have may been investigated.

I. Stars from the Catalogue of Boss.

I have determined some years ago the position of apex and vertex from the stars of Boss's Preliminary General Catalogue (the results were not published). In this determination the method of Schwarzschild was applied and the coordinates of the vertex were found to be: $\alpha = 89^0$ and $\delta = +14^0$. I have used in this case the division of the stars in groups of Eddington[1]), who determined the position of vertex on the two drifts hypothesis.

[1]) Monthly Notices of the R. A. S. Vol. 71. 1910.

Eddington divides the sky into 34 areas; treating together as one region each pair of opposite areas, he gets 17 areas and investigates the distribution of the proper motions according to the positionangles in the tangent plane at the centres of the corresponding areas. To these areas correspond the cones from the centre of the sphere.

If we take a plane perpendicular to the line of vertices, we divide our system of stars into two groups: one part will be found on the vertex side of the sphere, the other one — on the anti-vertex side. Finally a part of the cones will be cut by this plane. Excluding from our investigations the stars, lying in these cut cones, we receive two groups, which are at some distance from one another. It would be possible to determine approximately the distance of these two groups of stars by introducing the parallaxes, but the result is of little interest.

If we keep the numeration of the areas of Eddington, then the plane in question will divide the areas in such a manner, that on the vertex-side following areas will be found:

from the north hemisphere	III, IV.
„ „ „ „	VIII, IX, XI, XII.
from the south hemisphere	XIV, XV, XVI.

and on the side of the antivertex — the areas:

from the north hemisphere	XIV, XV, XVI.
from the south hemisphere	VIII, IX, XI, XII.
„ „ „ „	III, IV.

The areas on the antivertex-side are opposite to those surrounding the vertex. The omitted areas are those cut by the plane and left out of consideration. Treating now each of the two groups of stars separately and calculating the direction of the vertex by Schwarzschild's method, we get for the stars, situated on the side of the vertex the coordinates of the vertex: $\alpha = 88^{\circ}.6$ $\delta = +10^{\circ}.7$

and for those on the antivertex-side: $\alpha = 90.^{\circ}9$ $\delta = +13.^{\circ}8$

The mean errors of these determinations are respectively:

$$\mu_{\alpha} = \pm 4^{\circ}_{.}1 \qquad \mu_{\delta} = \pm 3^{\circ}_{.}7$$
$$\mu_{\alpha} = \pm 3^{\circ}_{.}7 \qquad \mu_{\delta} = \pm 3^{\circ}_{.}3$$

These errors are rather large and our results obtained are uncertain. Therefore it is necessary to verify on the other way, if the direction of the movement of the stardrifts changes really.

Using the tables of O. R. Walkey[1]), these two directions of the vertices in galactic coordinates are as follows:

$$l = 164^\circ\!.3 \qquad b = -6^\circ\!.7$$
$$l = 162^\circ\!.5 \qquad b = -3^\circ\!.1$$

II. Stars with Known Peculiar Movements.

We use now these stars, whose parallaxes, proper motions and radial velocities are known. We determine the apex of the solar motion and then the direction of the vertices according to the hypothesis of the three-axis ellipsoid[2]). Now we have repeated the calculation of the direction of the vertices and received the following galactic coordinates (this result was unpublished):

$$l = 167^\circ\!.5 \qquad b = -5^\circ\!.7$$

Now we take a plane vertical to the direction of vertex-antivertex and we divide the stars again into two groups: those on the side of the vertex and those on the opposite side. It matters little, at what point of the line vertex-antivertex we choose the perpendicular plane. We have choosen it so as to make the number of stars on both sides of the plane equal.

For the stars, situated on the vertex side, following coordinates of the direction of the vertex have been found:

$$l = 162^\circ\!.9 \qquad b = -5^\circ\!.4 \qquad (\alpha = 88^\circ\!.8 \qquad \delta = +12^\circ\!.7)$$

whereas for the stars on the side of the antivertex:

$$l = 168^\circ\!.1 \qquad b = -6^\circ\!.7 \qquad (\alpha = 90^\circ\!.3 \qquad \delta = +7^\circ\!.4)$$

Comparing these figures with those of chapter I we see, that the results are divergent. The alteration of the longitude of the movement of the stars is not in agreement with the results of chapter I.

III. Stars from the Catalogue of Porter.

We tried to use the proper motions of Porter's catalogue. S. Beljawsky[3]) used these stars to calculate the vertices according to the method of Schwarzschild and divided the sphere into areas. As we take the perpendicular plane to the line vertex-antivertex, we had to omit the areas cut by the plane. We took

[1]) Monthly Notices of the R. A. S. Vol. 74. 1914.

[2]) Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie. 1916.

[3]) Astronomische Nachrichten. Bd. 179. 1909.

nto consideration the areas (in accordance with the notation of Beljawsky) on the side of the vertex: A, B_1, B_2, B_3, C_1, C_3, C_4, D_2, D_3, E and on the side of the antivertex: B_5, C_6, C_7, D_5, D_8, E_5, F. In this manner we get two groups of stars and determine the vertices independently for each group. We receive the following coordinates:

on the side of the vertex

$l = 152\overset{\circ}{.}4 \qquad b = +1\overset{\circ}{.}0 \qquad (\alpha = 89\overset{\circ}{.}4 \qquad \delta = +24\overset{\circ}{.}8)$

on the side of the antivertex

$l = 154\overset{\circ}{.}8 \qquad b = +1\overset{\circ}{.}2 \qquad (\alpha = 90\overset{\circ}{.}9 \qquad \delta = +22\overset{\circ}{.}8)$

These results are in agreement with those of chapter II, i. e. they give the alteration of the longitude of the movement of the stars in the same direction.

The obtained results prove, that the question of the alteration of the direction of the movement of the stars is not solved. The calculations referred to above were carried out some years ago. They will be repeated now for the recently calculated peculiar motions of stars, as the spectroscopic parallaxes are known for a greater number of stars.

Wilno, 1925. IV. 15.