…KIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

# ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

## TOME I. i Dodatek do Rocznika

ANNÉE 1922.

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LA RÉDACTION S'ADRESSER
A M. STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE, XVI, RUE ŻYTNIA, 6

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P

KRAKÓW 1922
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

# ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

## TOME I.

ANNÉE 1922.

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LA RÉDACTION S'ADRESSER À M. STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE, XVI, RUE ŻYTNIA, 6

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.



KRAKÓW 1922
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

# Table des matières

Str.

S. Zaremba. Les fonctions réelles non analytiques et les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre . . . . . . 1—28

W. Wilkosz. Sull' insieme dei valori che annullano una funzione analitica a più variabili complesse . . . . . . . . . . . . . . . 29—34

F. Leja. Sur la distribution des valeurs des fonctions analytiques dans leurs domaines d'existence . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35—57

Ed. Stamm. Connexione inter operationes arithmetica et logica . . . . 58—69

A. Hoborski. Remarque relative aux transformations linéaires, orthogonales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70—71

S. Kempisty. Sur les trois classifications des fonctions représentables analytiquement . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72—73

F. Leja. Sur les surfaces singulières des fonctions analytiques de deux variables complexes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74—84

W. Wilkosz. Aspetto integrale delle curve inviluppi . . . . . . . . . 85—97

# Les fonctions réelles non analytiques et les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre

par

S. Zaremba.

§ 1. Désignons par $f(x, y, u)$ une fonction des trois variables $x, y, u$ définie sans ambiguité dans un certain domaine $(D)$ et définissons les symboles $f_i(x, y, u)$ $(i = 1, 2, 3)$ par les égalités

$$(1) \qquad f_1(x, y, u) = f'_x, \quad f_2(x, y, u) = f'_y, \quad f_3(x, y, u) = f'_u.$$

Cela posé considérons l'équation différentielle

$$(2) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

L'intégrale singulière de cette équation est, comme on le sait, par définition, une integrale qui vérifie, en dehors de cette équation, encore la suivante

$$f_3\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Par conséquent, lorsque l'equation (2) admet une intégrale singulière, celle-ci a pour image géométrique la courbe ou une portion de la courbe $(s)$ dont l'équation est le resultat de l'élimination de la variable $u$ entre les équations

$$(3) \qquad f(x, y, u) = 0 \text{ et } f_3(x, y, u) = 0.$$

Déjà Lagrange avait remarqué que, pour qu'un arc $(s_1)$ de la courbe $(s)$ soit une courbe intégrale de l'équation (2), il faut qu'en chaque point de $(x, y)$ de cet arc, les équations (3) soient compatibles avec l'équation.

$$(4) \qquad f_1(x, y, u) + u f_2(x, y, u) = 0.$$

Cela aurait dû l'amener à la conclusion que, normalement, une équation différentielle du premier ordre ne doit pas admettre d'intégrale singulière. Néanmoins la théorie des enveloppes avait, comme on le sait, fait adopter à Lagrange l'opinion contraire. Il y avait là un paradoxe apparent que Darboux [1]) le premier a expliqué en démontrant que, normalement, la ligne $(s)$ est le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales de l'équation (2) et que, par conséquent, Lagrange avait fait une application illégitime de la théorie des enveloppes dans sa démonstration de l'existence des solutions singulières des équations différentielles. Depuis M. Picard [2]) a établi d'une autre manière le résultat précédent.

Toutefois les considérations de Darboux comme celles de M. Picard ne se rapportent qu'au cas où la fonction $f(x, y, u)$ est une fonction analytique des trois variables dont elle dépend. Nous nous proposons de démontrer que le théorème fondamental de Darboux subsiste aussi dans le cas où la fonction $f(x, y, u)$ n'est pas une fonction analytique et satisfait seulement à quelques conditions très générales de régularité. A cette occasion, on constatera une fois de plus la grande fécondité de la méthode des approximations successives de M. Picard.

Il va sans dire que nous envisageons *exclusivement* des quantités *réelles*.

§ 2. Voici l'hypothèse dans laquelle nous allons nous placer.

1. Hypothèse. Nous admettrons que les circonstances suivantes sont vérifiées:

1° La fonction $f(x, y, u)$ est déterminée sans ambiguité dans un certain domaine $(D)$ et admet, à l'intérieur de ce domaine des dérivées partielles continues jusqu'au 3-me ordre inclusivement.

2° En un point 0, intérieur au domaine $(D)$ et défini par le système de valeurs.

$$(5) \qquad x = a, \quad y = b, \quad u = b'$$

de $x, y$ et $u$, l'on a:

[1]) Bulletin des sciences mathématiques 1873.

[2]) E. Picard. Traité d'Analyse t. III, Paris 1896 p. 44 et suivantes.

$$(6) \qquad f(a, b, b') = 0, \quad f_3(a, b, b') = 0$$

$$(7) \qquad f_1(a, b, b') + b' f_2(a, b, b') \neq 0$$

où les caractéristiques $f_1$, $f_2$ et $f_3$ sont définies par les formules (2).

3° On a encore l'inégalité suivante:

$$(8) \qquad \left( \frac{\partial^2 f(x, y, u)}{\partial u^2} \right)_0 \neq 0,$$

où l'indice 0 indique que l'on considère la valeur que prend l'expression enfermée dans la parenthèse au point 0.

Voici maintenant quelques indications destinées à prévenir tout malentendu. Désignons par $x_0$ une borne d'un intervalle $(I)$ dans lequel une fonction $\varphi(x)$ est définie. Pour $x = x_0$ la fonction $\varphi(x)$ ne peut pas avoir de dérivée proprement dite; elle ne peut avoir, pour cette valeur de $x$, qu'une dérivée unilatérale du côté duquel l'intervalle $(I)$ est situé par rapport à $x_0$. Toutefois, pour simplifier le langage, nous conviendrons d'appeler cette dérivée unilatérale de $\varphi(x)$, dérivée de cette fonction pour $x = x_0$. D'après cela l'assertion qu'une fonction $\varphi(x)$, définie dans un intervalle fermé $(I)$, admet une dérivée déterminée dans tout cet intervalle, exprimera qu'en tout point intérieur à l'intervalle $(I)$, la fonction $\varphi(x)$ admet une dérivée et qu'en outre, en chacune des bornes de l'intervalle considéré, elle possède une dérivée unilatérale du côté duquel se trouve l'intervalle $(I)$ par rapport à la borne considérée. Voici une seconde convention que nous allons encore adopter: l'assertion qu'une fonction $\varphi(x)$ est une intégrale de l'équation (2) la vérifiant dans un certain intervalle $(I)$, exprimera non seulement que, dans toute l'étendue de l'intervalle $(I)$, l'égalité

$$(9) \qquad y = \varphi(x)$$

entraîne l'équation (2), mais encore que la dérivée $\varphi'(x)$ de $\varphi(x)$ est une fonction *continue* de $x$ dans l'intervalle considéré. Envisageons maintenant le problème suivant.

**2. Problème.** L'hypothèse 1 étant vérifiée, déterminer une fonction (bien entendu réelle) $\varphi(x)$ de la variable $x$ pour toutes les valeurs de cette variable appartenant à un intervalle fermé de la forme $(a, a + l)$, de telle sorte que la valeur (9) de $y$ satisfasse à l'équation (2) dans tout l'intervalle $(a, a + l)$ et que l'on ait en outre:

$$(10) \qquad \varphi(a) = b \text{ et } \varphi'(a) = b'.$$

Le résultat principal de cet article peut être énoncé sous la forme du théorème suivant:

3. **Théorème**. Pour que le problème 2 soit possible, il faut que l'on ait

$$(11) \qquad l \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right)_0 \cdot \{f_1(a, b, b') + b' f_2(a, b, b')\} < 0,$$

(où à cause de (7) et (8) les deux derniers facteurs du premier membre sont différents de zéro); lorsque cette condition est remplie et lorsqu'en outre la valeur absolue du nombre $l$ est assez petite, le problème 2 a précisément *deux* solutions; si on les désigne par $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$, on a, pour toute valeur de $x$ appartenant à l'intervalle $(a, a + l)$ *non* égale à $a$ et assez petite en valeur absolue

$$\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x).$$

Il est à peine utile de faire remarquer que le théorème précédent constitue l'extension aux équations différentielles non analytiques, du résultat fondamental établi successivement par Darboux et M. Picard pour les équations analytiques.

§ 3. Le lemme suivant va nous permettre de simplifier beaucoup l'écriture:

4. **Lemme.** On peut, sans nuire à la généralité, admettre dans la démonstration du théorème 3 que l'on ait

$$(12) \qquad a = b = b' = 0$$

et qu'en outre l'on ait encore.

$$(13) \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0\\u=0}} < 0.$$

En effet, désignons par $\varepsilon$ le nombre défini par l'ensemble des relations

$$\varepsilon^2 = 1 \text{ et } \varepsilon(f_1(a, b, b') + b' f_2(a, b, b')) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right)_0 < 0$$

Le nombre $\varepsilon$ existera et sera déterminé sans ambiguité par les relations précédentes ainsi que cela résulte de (7) et (8). Posons

$$(14) \qquad \left| \begin{aligned} x_1 &= \varepsilon(x - a) \\ y_1 &= y - b - b'(x - a) \\ u_1 &= \varepsilon(u - b') \end{aligned} \right.$$

Cette substitution transformera la fonction $f(x, y, u)$ en une fonction $F(x_1, y_1, u_1)$ des variables $x_1, y_1, u_1$. Si l'on regarde $y$ comme une fonction dérivable de $x$, les équations (14) définiront $y_1$ comme une fonction de $x_1$ et l'on aura

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \varepsilon\left(\frac{dy}{dx} - b'\right)$$

Donc en vertu de (14), on aura identiquement:

$$F\left(x_1, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right) = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

et l'équation (2) équivaudra à la suivante:

$$F\left(x_1, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right) = 0$$

D'ailleurs les égalités (14) et la définition de la fonction $F(x_1, y_1, u_1)$ donnent :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial x} + b' \frac{df}{dy}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

Or les équations (14) font correspondre des valeurs nulles de $x_1, y_1$, et $u_1$ aux valeurs $a$, $b$ et $b'$ de $x$, $y$ et $u$. Il est donc aisé de voir que, après avoir effectué la substitution (14), il suffirait de faire le changement de notations qui consiste à remplacer les symboles $x_1, y_1, u_1$ et $F$ par $x, y, u$ et $f$ pour ramener le cas général du théorème 3 au cas particulier où les relations (12) et (13) sont vérifiées. En résumé le lemme 4 est complètement démontré.

Nous adopterons donc l'hypothèse suivante:

**5. Hypothèse.** Les égalités (12) et l'inégalité (13) sont vérifiées.

Pour rendre les considérations ultérieures plus faciles à suivre, observons explicitement que l'ensemble des hypothèses **1** et **5** équivaut à la suivante:

6. **Hypothèse.** On admet ce qui suit:

1° La fonction $f(x, y, u)$ est définie sans ambiguité dans un certain domaine $(D)$ et admet, à l'intérieur de ce domaine des dérivées partielles continues jusqu'au 3-me ordre inclusivement.

2° Le point 0 défini par les égalités

(15) $$x = y = u = 0$$

est situé à l'intérieur du domaine $(D)$.

3° Étant convenu de représenter d'une façon générale par $(\Phi)_0$ la valeur que prend une fonction $\Phi$ des variables $x, y, u$ pour les valeurs nulles de ces variables, nous avons:

(16) $$f(0, 0, 0,) = 0, \left(\frac{df}{du}\right)_0 = 0$$

ainsi que

(17) $$\left(\frac{df}{dx}\right)_0 . \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right)_0 < 0.$$

En vertu de l'hypothèse précédente, le problème 2 prend la forme suivante:

7. **Problème.** L'hypothèse 6 étant vérifiée, déterminer une fonction (réelle) $\varphi(x)$ de la variable $x$ dans un intervalle fermé de la forme $(0, l)$ de telle sorte que la valeur

(18) $$y = \varphi(x)$$

de $y$ satisfasse à l'équation (2) dans tout l'intervalle $(0, l)$ et que l'on ait en outre

(19) $$\varphi(0) = 0$$

ainsi que

(20) $$\varphi'(0) = 0.$$

§ 4. Avant d'aborder le problème 7, notons quelques conséquences de l'hypothèse 6.

Il existera évidemment un nombre positif $d$ tel que l'ensemble des relations

(21) $$|x| \leqq d, \quad |y| \leqq d, \quad |u| \leqq d$$

constitue une condition suffisante pour que le point $(x, y, u)$ soit intérieur au domaine $(D)$ considéré dans l'hypothèse 6. Dans tout ce qui va suivre, nous regarderons le nombre $d$ comme donné et nous n'envisagerons que les valeurs de $x, y, u$ vérifiant les conditions (21).

Eu égard aux égalités (16), on pourra déterminer des constantes $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$, telles que la fonction $R(x, y, u)$, définie par la formule

$$(22) \qquad R(x, y, u) = f(x, y, u) - (a_1 x + a_2 y + b_1 x^2 + b_2 y^2 + b_3 u^2 + \\ + 2c_1 yu + 2c_2 ux + 2c_3 xy)$$

s'annule avec toutes ses dérivées partielles jusqu'au 2-me ordre inclusivement pour

$$x = y = u = 0$$

J' ajoute qu'en vertu de (17), on aura,

$$(23) \qquad a_1 \cdot b_3 < 0.$$

Il résulte encore de l'hypothèse 6 que, dans le domaine défini par les relations (21), les dérivées partielles d'ordre 3 de la fonction $R(x, y, u)$ (identiques évidemment à celles de la fonction $f(x, y, u)$) seront bornées. Si l'on désigne par $C$ une limite supérieure commune des valeurs absolues de ces dérivées, on aura.

$$(24) \qquad |R(x, y, u)| \leqq \tfrac{1}{6} C(|x| + |y| + |u|)^3$$

ainsi que

$$(25) \qquad \left|\frac{\partial R}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial R}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial R}{\partial u}\right| \leqq \tfrac{1}{2} C(|x| + |y| + |u|)^2$$

dans tout le domaine (21); c' est ce qui résulte immédiatement du théorème de Taylor et de ce que, pour

$$x = y = u = 0,$$

la fonction $R(x, y, u)$ s'annule avec toutes ses dérivées jusqu'au 2-me ordre inclusivement.

§ 5. En abordant le problème 7, posons pous abréger l'écriture

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

et observons qu'en remplaçant $f(x, y, u)$ par sa valeur tirée de (22), on pourra mettre l'équation (2) sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}(26)\quad b_3 y'^2 + 2(c_2 x + c_1 y) y' + a_1 x + a_2 y + b_1 x^2 + b_2 y^2 + 2c_3 xy + \\ + R(x, y, y') = 0.\end{aligned}$$

8. **Lemme.** Lorsque le problème 7 est possible, on a

$$\lim_{x=0} \frac{y'^2}{x} = -\frac{a_1}{b_3} \tag{27}$$

en supposant que $x$ tende vers zéro en restant intérieur à l'intervalle $(0, l)$.

En effet, par les conditions mêmes du problème 7, nous avons

$$\lim_{x=0} y' = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x=0} y = 0, \tag{28}$$

lorsque $x$ tend vers zéro par valeurs intérieures à l'intervalle $(0, l)$. Donc, dans les mêmes conditions, nous avons

$$\lim_{x=0} \frac{y}{x} = 0 \tag{29}$$

Il résulte de (28) qu'il existera un nombre positif $\delta$ tel que pour toute valeur de $x$ intérieure à l'intervalle $(0, l)$ et vérifiant la condition:

$$|x| \leqq \delta,$$

les relations (21) soient satisfaites au cas où l'on poserait:

$$u = y'$$

Nous admettrons dorénavant que la variable $x$ satisfasse aux conditions précédentes. Cela nous permettra d'appliquer la relation (24) au cas où $y$ est défini par la formule (18) et $u$ par

$$u = y' = \varphi'(x).$$

Nous aurons donc:

$$|R(x\, y\, y')| = \tfrac{1}{6}\, \Theta\, C(|x| + |y| + |y'|)^3 \tag{30}$$

où $\Theta$ représente une fonction qui vérifie la condition

$$|\Theta| \leqq 1 \tag{31}$$

Posons

$$(31,1)\qquad \Phi = (|x|+|y|)^2 + 3(|x|+|y|)y' + 3y'^2.$$

La formule (30) pourra s'écrire comme il suit:

$$(32)\qquad R(x, y, y') = \tfrac{1}{6}\,\Theta\, C(|x|+|y|)\,\Phi + \tfrac{1}{6}\,\Theta C y'^3$$

Portons la valeur (32) de $R(x, y, y')$ dans l'équation (26) et divisons ensuite l'équation obtenue par $x$. Le résultat pourra s'écrire de la façon suivante:

$$(33)\ (b_3 + \tfrac{1}{6}\,\Theta C y')\frac{y'^2}{x} + 2\left(c_2 + c_1\frac{y}{x}\right)y' + a_1 + a_2\frac{y}{x} + b_1 x + b_2 y\frac{y}{x} + \\ + 2c_3 y + \tfrac{1}{6}\,\Theta C\left(\frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{x}\right)\Phi = 0.$$

Or il résulte de (28) et (31,1) que l'on a:

$$\lim_{x=0} \Phi = 0.$$

Cela posé, il suffit de se reporter aux égalités (28) et (29) ainsi qu' à la relation (31) pour déduire de (33) que l'égalité (27) a bien lieu comme il s'agissait de le démontrer.

9. **Lemme.** Pour que le problème 7 soit possible, il faut que l'on ait

$$(34)\qquad l > 0$$

En effet, supposons que le problème en question soit possible. En vertu du lemme 8 nous aurons l'égalité (27) en supposant que $x$ tende vers zéro par valeurs intérieures à l'intervalle $(0, l)$. Or. à cause de (23), on a

$$-\frac{a_1}{b_3} > 0.$$

Donc c'est par valeurs positives que $x$ doit tendre vers zéro dans (27). Cela prouve que l'on a bien l'inégalité (34) comme nous voulions l'établir.

10. **Lemme.** Lorsqu'une fonction $y$ de $x$ représente une solution du problème 7, il lui correspond une constante positive $A$ telle que, pour toute valeur de $x$ appartenant à l'intervalle $(0, l)$, où [lemme 9] on a nécessairement $l > 0$), l'on ait:

$$(35)\qquad \begin{cases} |y'| \leq Ax^{\frac{1}{2}} \\ |y| \leq \frac{2}{3}Ax^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

On déduira ce lemme avec la plus grande facilité des lemmes 8 et 9.

**11. Remarque.** Lorsqu'une fonction $y$ de $x$, définie dans un intervalle $(0, l)$ est une solution du problème 7 et vérifie par conséquent dans cet intervalle l'équation différentielle (26), il correspond à toute valeur de $x$ appartenant à l'intervalle $(0, l)$ un nombre $\varepsilon$ vérifiant l'équation

$$(35,1)\qquad \varepsilon^2 = 1,$$

tel que, pour la valeur considérée de $x$, l'on ait

$$(35,2)\qquad y' = \alpha_1\, x + \beta_1\, y + \varepsilon \sqrt{Q\,(x, y, y')}$$

où l'on doit prendre la valeur non négative du radical, la fonction

$$\alpha_1\, x + \beta_1\, y$$

et la caractéristique $Q$ étant définies par les formules:

$$(35,3)\qquad \alpha\, x + \beta\, y = -\frac{c_2 x + c_1 y}{b_3}$$

et

$$(35,4)\qquad Q\,(x, y, u) =$$

$$= \frac{(c_2 x + c_1 y)^2 - b_3 \{a_1 x + a_2 y + b_1 x^2 + b_2 y^2 + 2c_3 xy + R\,(x, y, u)\}}{b_3^2} =$$

$$= -\frac{a_1}{b_3}\, x + \frac{(c_2 x + c_1 y)^2 - b_3 \{a_2 y + b_1 x^2 + b_2 y^2 + 2c_3 xy + R\,(x, y, u)\}}{b_3^2}$$

§ 6. Avant de continuer l'étude du problème 7, il est utile d'établir quelques propositions auxiliaires.

**12. Lemme.** La caratéristique $Q$ étant définie par la formule (35,4) regardons pour un moment la lettre $u$ comme représentant une fonction de $x$ continue avec sa dérivée première $y'$ dans un intervalle fermé $(0, l)$ où $l$ représente un nombre positif et posons $u = y'$; supposons en outre que l'on ait:

$$(35,5)\qquad (y)_{x=0} = 0$$

et que. dans tout l'intervalle $(0, l)$, la dérivée $y'$ de $y$ satisfasse à la relation

(35,6) $$|y'| \leqq Ax.^{\frac{1}{2}}$$

Je dis que l'on aura

(36) $$\lim_{x=0} \frac{Q(x, y, y')}{x} = -\frac{a_1}{b_3}$$

lorsque $x$ tendra vers zéro par valeurs positives.

En effet, en vertu de l'équation (35,4) servant de définition à la caractéristique $Q$, nous avons

(37) $$\frac{(Q x, y, y')}{x} = -\frac{a_1}{b_3} + \frac{1}{b_3^2}(c_2 x + c_1 y)\left(c_2 + c_1 \frac{y}{x}\right) +$$
$$-\frac{1}{b_3}\left\{b_1 x + 2c_3 y + (a_2 + b_2 y)\frac{y}{x}\right\} +$$
$$-\frac{1}{b_3} \frac{R(x, y, y')}{x}$$

D'autre part, il résulte de (35,5) et (35,6) que dans tout l'intervalle $(0, l)$ l'on aura:

(38) $$|y| \leqq \tfrac{2}{3} A x^{\frac{3}{2}}.$$

Il résulte de (35,6) et (38) qu'il existera un nombre positif $\delta$, non supérieur à $l$, tel que les relations

(39) $$0 \leqq x \leqq \delta$$

entraînent les relations

(40) $$|x| \leqq d, \quad |y| \leqq d, \quad |y'| \leqq d$$

où $d$ représente le second membre des relations (21). Mais ces dernières entraînent la relation (24). Par conséquent les relations (39) entraîneront la suivante

$$|R(x, y, y')| \leqq \tfrac{1}{6} C(|x| + |y| + |y'|)^3,$$

d'où, en s'appuyant sur (35,6) et (38), l'on déduit que

(41) $$\lim_{x=0} \frac{R(x, y, y')}{x} = 0$$

lorsque $x$ tend vers zéro par valeurs positives. Mais il résulte de (38) que, dans les mêmes conditions, l'on a:

$$\lim_{x=0} \frac{y}{x} = 0. \tag{42}$$

En s'appuyant sur (41) et (42), on conclut immédiatement de (37) à l'existence de (36) lorsque $x$ tend vers zéro par valeurs positives. C'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

13. **Lemme**. La fonction $y$ de $x$ vérifiant les hypothèses du lemme 12, il correspondra au nombre $A$, figurant au second membre de (35,6) et à tout système de deux nombres $g$ et $G$, assujettis seulement à vérifier les relations:

$$o < g < -\frac{a_1}{b_3} < G \tag{43}$$

un nombre positif $\delta$, non supérieur au second membre $d$ des relations (21) et indépendant de $l$, tel que l'ensemble des relations

$$o \leqq x \leqq \delta \quad \text{et} \quad o \leqq x \leqq l \tag{44}$$

entraîne les suivantes

$$gx \leqq Q(x, y, y') \leqq Gx \tag{45}$$

Pour s'assurer de l'exactitude de ce lemme, il suffit de se rappeler qu'en vertu de (23) l'on aura

$$-\frac{a_1}{b_3} > 0, \tag{46}$$

de se rapporter au lemme 12 et de considérer que la valeur de $\delta$ qui conviendrait au cas où l'on aurait $l = d$ conviendrait aussi à tous les autres cas.

14. **Lemme**. Continuons à supposer qu'une fonction $y$ de $x$ satisfasse aux hypothèses du lemme 12, désignons par $\varepsilon$ une constante vérifiant l'équation

$$\varepsilon^2 = 1, \tag{47}$$

par $c$ le nombre défini par les relations

$$c^2 = -\frac{a_1}{b_3}, \quad c > 0. \tag{48}$$

nombre qui existera à cause de (46), et soit $v$ la fonction définie par la formule:

$$v = \alpha_1 x + \beta_1 y + \varepsilon \sqrt{Q(x, y, y')} \tag{49}$$

où le radical doit être pris avec la détermination non négative et où la fonction linéaire $\alpha_1 x + \beta_1 y$ de $x$ et $y$ est définie par la formule (35.3). Dans ces conditions les circonstances suivantes vont se présenter:

1° Il existe un nombre positif $\delta$, non supérieur au second membre $d$ des relations (21) et indépendant de $l$, tel que la formule (49) définisse la fonction $v$ de $x$ comme une fonction réelle et continue de $x$ dans l'intervalle fermé commun aux intervalles $(0, l)$ et $(0, \delta)$.

2° Lorsque $x$ tend vers zéro par valeurs positives, on a

$$\lim \frac{v}{x^{\frac{1}{2}}} = \varepsilon c \tag{50}$$

En effet, il résulte du lemme 13 qu'il existera un nombre positif $\delta$, indépendant de $l$, tel que l'ensemble des relations (44) entraîne la suivante:

$$Q(x, y, y') \geqq 0. \tag{51}$$

D'autre part, en diminuant au besoin le nombre $\delta$, sans pourtant l'annuler et sans avoir à tenir compte de la valeur de $l$, on pourra encore faire en sorte que (44) entraînent non seulement (51) mais encore (40). Le nombre $\delta$ vérifiant les conditions précédentes, la formule (49) définira la fonction $v$ comme une fonction réelle et continue de $x$ dans l'intervalle fermé $(0, \delta)$ commun aux intervalles $(0, \delta)$ et $(0, l)$ car, dans cet intervalle, on aura (51) ce qui assure la réalité de $v$ et, d'autre part, comme dans l'intervalle $(0, \delta)$ on a (40) et comme dans le domaine (21) la fonction $R(x, y, u)$ est continue, il résulte de la continuité des fonctions $y$ et $y'$ dans l'intervalle $(0, \delta)$ qu'il en sera de même de $R(x, y, y')$ et par suite aussi de la fonction $v$. En résumé la 1-re partie du lemme est établie.

Pour reconnaitre l'exactitude de la 2-me partie du lemme, il suffit de se reporter à la formule (49), à la relation (38) ainsi qu' aux relations (48) qui définissent le nombre $c$ et de considérer qu'en vertu du lemme 12, on a la relation (36). En résumé le lemme est complètement démontré.

15. **Remarque.** Conservons les hypothèses et les notations du lemme précédent et désignons par $B$ un nombre donné arbitrairement à cela près que l'on ait

$$B > c,$$

on pourra alors, comme cela résulte de l'égalité (50), assurée par le lemme **14**, donner au nombre positif $\delta$, considéré dans ce lemme, une valeur non nulle et indépendante de $l$ mais assez petite pour que, dans l'intervalle fermé $(0, \delta')$, commun aux intervalles $(0, \delta)$ et $(0, l)$, la fonction $v$ définie par la formule (49) avec n'importe laquelle des deux valeurs de $\varepsilon$ vérifiant (47), soit non seulement réelle et continue mais qu'en outre, dans tout cet intervalle, l'on ait

$$|v| \leqq Bx^{\frac{1}{2}};$$

j'ajoute que pour calculer une valeur de $\delta$ satisfaisant aux conditions précédentes, il suffit évidemment de connaître en dehors du nombre $B$ et de la constante $A$ figurant au second membre de (35,6), encore la valeur du second membre $d$ des relations (21), les valeurs des constantes $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ entrant au second membre de l'équation (22) ainsi que la valeur de la constante $C$ qui entre dans le second membre des relations (24) et (25).

16. **Lemme.** Lorsque deux fonctions $y$ et $z$ de la variable $x$, définies sans ambiguité dans un intervalle fermé $(0, l)$ dont la borne $l$ est positive, sont continues avec leurs dérivées respectives $y'$ et $z'$ dans l'intervalle $(0, l)$ et s'annulent l'une et l'autre pour $x = 0$, lorsqu'il existe en outre une constante positive $A$ telle que dans tout l'intervalle $(0, l)$ l'on ait

$$(51) \qquad |y'| \leqq Ax^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad |z'| \leqq Ax^{\frac{1}{2}},$$

lorsqu' enfin, après avoir désigné par $\varepsilon$ une constante vérifiant l'équation

$$(52) \qquad \varepsilon^2 = 1,$$

l'on aura adopté pour définitions respectives des fonctions $v$ et $w$ de $x$, la formule (49) et la formule:

$$(53) \qquad w = \alpha_1 x + \beta_1 z + \varepsilon \sqrt{Q(x, z, z')}$$

où, comme dans la formule (49), c'est avec la détermination non négative que le radical doit être pris, il sera possible de faire correspondre au nombre $A$, deux nombres positifs $\delta$ et $B_1$, indépendants de la valeur de $l$ et du signe de $\varepsilon$, jouissant de la propriété suivante: si l'on désigne par $r$ un nombre positif choisi arbitrairement dans l'intervalle $(0, \delta')$ commun aux intervalles $(0, \delta)$ et $(0, l)$, et par $M'$ la borne supérieure de la fonction

$$(54) \qquad |y' - z'|$$

dans l'intervalle $(0, r)$, l'on aura

$$(55) \qquad |v - w| \leqq B_1 r^{\frac{1}{2}} M'$$

dans tout l'intervalle $(0, r)$.

En effet, les relations (51) étant verifiées dans l'intervalle $(0, l)$ et les fonctions $y$ et $z$ s'annulant pour $x = 0$, on aura aussi dans le même intervalle

$$(56) \qquad |y| \leqq \tfrac{2}{3} A x^{\frac{3}{2}}, \quad |z| \leqq \tfrac{2}{3} A x^{\frac{3}{2}},$$

on pourra donc faire correspondre au nombre $A$ une valeur positive de $\delta$, indépendante de $l$, telle que l'ensemble des relations

$$(57) \qquad 0 \leqq x \leqq \delta \quad \text{et} \quad 0 \leqq x \leqq l$$

entraîne à la fois les deux systèmes de relations

$$(58) \qquad |x| \leqq d, \quad |y| \leqq d, \quad |y'| \leqq d,$$

et

$$(59) \qquad |x| \leqq d, \quad |z| \leqq d, \quad |z'| \leqq d.$$

Supposons que $\delta$ satisfasse à la condition précédente et donnons-nous un nombre $g$ vérifiant les inégalités (43).

On pourra {lemme **13**}, en diminuant au besoin le nombre $\delta$, sans pourtant l'annuler et sans tenir compte de la valeur de $l$, faire en sorte que les relations (57) entraînent, en dehors des relations (58) et (59), encore les deux suivantes

$$(60) \qquad \begin{cases} Q(x, y, y') \geqq gx, \\ Q(x, z, z') \geqq gx, \end{cases}$$

Le nombre $\delta$ vérifiant cette condition, les formules (49) et

(53) définiront, pour les valeurs de $x$ vérifiant l'ensemble des relations (57), les fonctions $v$ et $w$ comme fonctions réelles et continues de $x$; pour les valeurs de $x$ vérifiant, en dehors des relations (57), encore la condition

$$x > 0, \tag{60.1}$$

l'on aura:

$$v - w = \beta(y - z) + \varepsilon \frac{Q(x, y, y') - Q(x, z, z')}{\sqrt{Q(x, y, y')} + \sqrt{Q(x, z, z')}} \tag{61}$$

En se reportant à la formule (35,4) qui sert de définition à la caractéristique $Q$, on trouve:

$$Q(x, y, y') - Q(x, z, z') = \frac{c_1 \{2c_2 x + c_1(y + z)\}(y - z)}{b_3^2} + \tag{62}$$

$$- \frac{1}{b_3} \left\{ [a_2 + 2c_3 x + b_2(y + z)](y - z) + R(x, y, y') - R(x, z, z') \right\}$$

Regardons pour un moment le symbole $x$ comme représentant quelque nombre déterminé vérifiant (57). Les relations (57) entraînant à la fois (58) et (59), les deux suites de trois nombres:

$$x, y, y' \quad \text{et} \quad x, z, z'$$

représenteront deux points du domaine défini par les relations (21). Nous pourrons donc appliquer à la différence

$$R(x, y, y') - R(x, z, z')$$

le théorème des accroissements finis sous sa forme classique. Les caractéristiques $R_2$ et $R_3$ étant définies par les formules

$$R_2(x, y, u) = R'_y(x, y, u), \; R_3(x, y, u) = R'_u(x, y, u),$$

nous trouverons:

$$R(x, y, y') - R(x, z, z') = R_2(x, \eta, \eta')(y - z) + R_3(x, \eta, \eta')(y' - z') \tag{63}$$

en posant:

$$\eta = y + \Theta(z - y), \; \eta' = y' + \Theta(z' - y') \tag{64}$$

où $\Theta$ représente un nombre intérieur à l'intervalle (0, 1). Il résulte de (58) et (59) que l'on aura

$$|x| \leq d, \quad |\eta| \leq d, \quad |\eta'| \leq d.$$

Donc, en vertu de (25) on aura:

$$(65) \qquad |R_3(x, \eta, \eta')| \leqq |\tfrac{1}{2} C\{|x| + |\eta| + |\eta'|\}^2$$

et si l'on désigne par $M_2$ une limite supérieure de la fonction

$$|R_2(x, y, u)|$$

lorsque le point $(x, y, u)$ varie dans le domaine (21), on aura

$$(66) \qquad |R_2(x, \eta, \eta')| \leqq M_2$$

D'autre part, comme $\theta$ est compris dans l'intervalle $(0, 1)$ il résulte de (51), (56) et (64) que l'on aura:

$$(67) \qquad |\eta| \leqq \tfrac{2}{3} A x^{\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad |\eta'| \leqq A x^{\frac{1}{2}}$$

En s'appuyant sur (65) et (67) et en tenant compte de (57), on constatera qu'il est aisé de calculer au moyen des nombres $A$, $C$ et $\delta$ un nombre positif $M_3$, indépendant de $l$, tel que l'on ait:

$$(68) \qquad |R_3(x, \eta, \eta')| \leqq M_3 x$$

pour toute valeur de $x$ vérifiant (57).

Les relations (63), (66) et (68) nous donneront:

$$|R(x, y, y') - R(x, z, z')| \leqq M_2 |y - z| + M_3 x |y' - z'|.$$

En s'appuyant sur cette relation et en tenant compte de (56) et de (51) on déterminera aisément au moyen des constantes qui entrent dans le second membre de (62) et des nombres $\delta$, $A$, $M_2$ et $M_3$, deux nombres positifs $M_2'$ et $M_3'$ tels que (57) entraîne la relation:

$$(69) \qquad |Q(x, y, y') - Q(x, z, z')| \leqq M_2' |y - z| + M_3' x |y' - z'|.$$

Mais (61) a lieu pour toute valeur de $x$ vérifiant à la fois (57) et (60,1) et d'autre part, pour toute valeur de $x$ vérifiant l'ensemble des relations (57), on a les relations (60). Par conséquent, il résulte de ce que les relations (57) entraînent (69) que l'ensemble des relations (57) et (60,1) entraîne la suivante:

$$|v-w| \leqq |\beta|\,|y-z| + \frac{M_2'|y-z_1| + M_3'x|y'-z'|}{2\sqrt{g}\,x^{\frac{1}{2}}}.$$

Il suit de là que les relations (57) et (60,1) entraîneront a fortiori la suivante:

(71) $$|v-w| \leqq B_3\frac{|y-z|}{x^{\frac{1}{2}}} + B_2 x^{\frac{1}{2}}|y'-z'|$$

où l'on a posé

$$B_2 = \frac{2\sqrt{g}\,|\beta|\,\delta^{\frac{1}{2}} + M_3'}{2\sqrt{g}}, \quad B_3 = \frac{M_2'}{2\sqrt{g}}.$$

Soit maintenant $r$ un nombre positif choisi arbitrairement dans la partie commune aux intervalles $(0, \delta)$ et $(0, l)$ et $M'$ la borne supérieure de l'expression

$$|y'-z'|$$

dans l'intervalle $(0, r)$. Les fonctions $y$ et $z$ s'annulant pour $x = 0$, la relation

$$|y-z| \leqq M'x$$

sera vérifiée dans tout l'intervalle $(0, r)$. Par conséquent, pour les valeurs de $x$ vérifiant les relations

$$0 < x \leqq r,$$

la relation (71) nous donnera:

(72) $$|v-w| \leqq B_1 M' x^{\frac{1}{2}}$$

en posant

(73) $$B_1 = B_3 + B_2.$$

En réalité, la relation (72) subistera dans tout l'intervalle $(0, r)$ parce que, pour $x = 0$, les fonctions $v$ et $w$, ainsi que cela résulte de (49) et (53), s' annulent l'une et l'autre. Or puisque (72) a lieu dans tout l'intervalle $(0, r)$, on a, dans tout cet intervalle, a fortiori la relation (55).

En résumé, il suffit de déterminer le nombre $\delta$ de façon que les relations (57) entraînent à la fois (58), (59) et (60), en ayant soin de calculer le nombre $B_1$ au moyen de (73), opérations qui pourront toutes être effectuées sans que le nombre $l$ soit connu mais à condition que le nombre $A$ soit donné, pour que les nombres $\delta$ et $B_1$ jouissent de la propriété énoncée dans le lemme; celui-ci est donc démontré.

§ 7. Revenons à l'étude du problème 7.

17. **Lemme.** Lorsqu'une fonction $y$ de $x$ est une solution du problème 7, il lui correspond une constante $\varepsilon$ parfaitement déterminée, vérifiant dans tous les cas l'équation

$$\varepsilon^2 = 1, \tag{74}$$

telle qu'il soit possible de déterminer une constante positive de $\delta$ de façon que, pour l'ensemble de toutes les valeurs de $x$ vérifiant les relations

$$0 < x \leqq \delta, \tag{75}$$

la fonction $y$ satisfasse à l'équation (35,2) et que l'on ait, en outre, dans tout l'intervalle $(0, \delta)$:

$$|x| \leqq d, \quad |y| \leqq d, \quad |y'| \leqq d \tag{76}$$

où $d$ est le second membre des relations (21).

En effet, la fonction $y$ de $x$ ne pouvant être une solution du problème 7 {lemme 9} que dans un intervalle de la forme $(0, l)$, où $l$ représente un nombre positif, il résulte du lemme 13 ainsi que de la continuité de la fonction $y$ et de sa dérivée $y'$ dans l'intervalle $(0, l)$ et de ce que chacune des fonctions $y$ et $y'$ s'annule pour $x = 0$, qu'il existera un nombre positif $\delta$, appartenant bien entendu à l'intervalle $(0, l)$, tel que les relations (75) entraînent à la fois les relations (76) et l'inégalité

$$Q(x, y, y') > 0. \tag{77}$$

D'autre part {remarque 11}, il correspondra à toute valeur de $x$ vérifiant (75) une valeur de $\varepsilon$ satisfaisant à l'équation (74) et telle que, pour la valeur considérée de $x$, l'équation (35,2) soit vérifiée. Reste à prouver que cette valeur de $\varepsilon$ reste la même pour toutes les valeurs de $x$ vérifiant (75) lorsque $\delta$ est déterminé de la façon indiquée plus haut. Or, la fonction $y$ de $x$ étant donnée et (75) entraînant (77), l'équation (35,2) définira $\varepsilon$ comme une fonction continue de $x$ pour toutes celles des valeurs de cette variable qui satisfont à (75); mais on a dans tous les cas l'équation (74). Donc, la fonction $\varepsilon$ de $x$ se réduira bien à une constante et notre lemme est démontré.

18. **Définition.** Les notations du lemme précédent étant conservées, la constante $\varepsilon$ s'appellera *indice* de la solution $y$ du problème 7.

19. **Théorème.** Supposons qu'une fonction donnée $y$ de $x$ soit une solution du problème 7, désignons par $\varepsilon$ l'indice {déf. **18**} de cette solution et soit $\delta$ le nombre positif dont l'existence est assurée par le lemme **17**

Lorsqu'une seconde fonction $z$ de $x$ est aussi une solution du problème **7**, de même indice $\varepsilon$ que la solution $y$, elle se confond avec cette dernière dans l'intervalle $(0, \delta')$ constitué par l'ensemble des points communs à l'intervalle $(0, \delta)$ et à l'intervalle $(J)$ dans lequel la fonction $z$ de $x$ vérifie les conditions du problème **7**. Pour démontrer ce théorème, observons {lemme **9**} que l'intervalle $(J)$ sera nécessairement de la forme $(0, m)$ où $m$ représente un nombre positif. Cela prouve que l'ensemble des points communs aux intervalles $(0, \delta)$ et $(J)$ constituera, comme l'implique l'énoncé du théorème, un intervalle de la forme $(0, \delta')$ où $\delta'$ représente un o mbre positif. Les solutions $y$ et $z$ du problème 7 étant de même indice $\varepsilon$ {déf. **18**}, il résulte du lemme **17** qu'il se trouvera un nombre positif $\delta''$, non supérieur à $\delta'$, tel que, dans l'intervalle $(0, \delta'')$, la fonction $y$ vérifie l'équation (35,2) et la fonction $z$ la suivante:

$$z' = \alpha_1 x + \beta_1 z + \varepsilon \sqrt{Q(x, z, z')}. \tag{78}$$

Cela posé, il résulte du lemme **10** que les fonctions $y$ et $z$ considérées actuellement, satisfont aux hypothèses du lemme **16**. Donc, en vertu de ce lemme, il existera un système de deux nombres positifs $\delta'''$ et $B_1$ jouissant de la propriété suivante: si l'on désigne par $r$ un nombre positif quelconque appartenant à l'intervalle $(0, \delta''')$ et par $M'$ la borne supérieure de l'expression

$$|y' - z'|$$

dans l'intervalle $(0, r)$, la valeur absolue de la différence des seconds membres des équations (35,2) et (78) ne deviendra supérieure à l'expression

$$B_1 r^{\frac{1}{2}} M'$$

pour aucune valeur de $x$ appartenant à l'intervalle $(0, r)$. Par conséquent, il résulte des équations (35,2) et (78) que, dans tout cet intervalle, on aura

$$(79) \qquad |y' - z'| \leqq B_1 r^{\frac{1}{2}} M'$$

Mais la fonction

$$|y' - z'|$$

est continue dans l'intervalle $(0, r)$. Elle atteindra donc sa borne supérieure $M'$ dans cet intervalle pour une certaine valeur $x_0$ de $x$ dans l'intervalle considéré. En écrivant la relation (79) pour le point $x_0$ de l'intervalle $(0, r)$ on trouvera

$$M' \leqq B_1 r^{\frac{1}{2}} M'$$

ou bien

$$(80) \qquad M' (1 - B_1 r^{\frac{1}{2}}) \leqq 0.$$

Donnons à $r$, ce qui est permis, une valeur assez petite pour avoir

$$1 - B_1 r^{\frac{1}{2}} > 0.$$

La relation (80) nous donnera

$$M' = 0.$$

On aura donc

$$y' - z' = 0$$

dans tout l'intervalle $(0, r)$ et, puisque les fonctions $y$ et $z$ s'annulent pour $x = 0$, on aura par conséquent aussi

$$y - z = 0$$

dans tout l'intervalle $(0, r)$. Nous arrivons donc à la conclusion suivante: il existe un ensemble $(E)$ de nombres positifs constitué par l'ensemble de tous les nombres positifs tels que si $r$ est l'un quelconque d'entre eux, il jouit des deux propriétés suivantes:

1° On a

$$r \leqq \delta'''$$

et par suite aussi

$$r \leqq \delta'$$

2° Dans l'intervalle $(0, r)$ les fonctions $y$ et $z$ se confondent. Soit $R$ la borne supérieure des nombres appartenant à l'ensemble $(E)$. Le nombre $R$ appartiendra à l'intervalle $(0, \delta')$ et à cause de la continuité des fonctions $y$ et $z$, il appartiendra lui-même à l'ensemble $(E)$. D'autre part, lorsqu'un nombre $x_0$, intérieur à l'intervalle $(0, \delta')$ fait partie de l'ensemble $(E)$, il n'est pas une borne superiéure des nombres de cet ensemble. En effet supposons que le nombre $x_0$ soit intérieur à l'intervalle $(0, \delta')$ et fasse partie de l'ensemble $(E)$. Il existera alors un nombre positif $\eta$ tel que les fonctions $y$ et $z$ satisfassent respectivement aux équations (35,2) et (78) dans l'intervalle $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ et qu'en outre l'on ait:

$$(y)_{x=x_0} = (z)_{x=x_0}$$
$$(y')_{x=x_0} = (z')_{x=x_0}$$

Donc, en vertu du théorème classique relatif à la détermination de l'intégrale d'une équation différentielle du 1-er ordre par sa valeur initiale, on aura

$$y = z$$

dans tout l'intervalle $(x_0 - \eta, \ x_0 + \eta)$, du moins lorsque $\eta$, sans être nul, sera assez petit.

Cele prouve bien qu'un nombre intérieur à l'intervalle $(0, \delta')$ ne peut pas constituer la borne supérieure $R$ de l'ensemble $E$. Mais

$$R > 0,$$

donc $R$ se confond avec $\delta'$ et notre théorème est démontré.

20. Théorème. Il existe un nombre positif $l$ tel que, à chacun des deux nombres

(81) $$+1 \quad \text{et} \quad -1,$$

il corresponde une solution du problème 7, admettant ce nombre pour indice {déf. 18} et vérifiant dans l'intervalle $(0, l)$ les conditions du problème considéré.

Pour démontrer ce théoréme, désignons par $\varepsilon$ l'un des nombres (81).

Nous aurons à prouver que, pour une valeur assez petite mais indépendante du signe de $\varepsilon$ et positive de $l$, l'équation (35,2), c'est à dire l'équation différentielle

$$y' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \varepsilon \sqrt{Q(x, y, y')}, \tag{82}$$

admet une intégrale vérifiant cette équation dans l'intervalle $(0, l)$ et s'annulant avec sa dérivée première pour $x = 0$. Pour établir l'existence du nombre $l$, nous allons nous servir d'une forme appropriée de la méthode des approximations successives.

**21. Lemme**. Ayant choisi un nombre $A$ vérifiant l'inégalité

$$A > c, \tag{83}$$

où $c$ représente le nombre défini par les relations (48), on pourra lui faire correspondre un nombre positif $\delta$ tel qu'il existe une suite infinie

$$y_1, y_2, y_3 \ldots . \tag{84}$$

de fonctions réelles de $x$, définies dans l'intervalle formé $(0, \delta)$, jouissant des propriétés suivantes:

1° chacune des fonctions $y_n$ ainsi que sa dérivée première $y'_n$ sont continues dans l'intervalle fermé $(0, \delta)$.

2° Chacune des fonctions $y_n$ s'annule pour $x = 0$.

3° Dans tout l'intervalle $(0, \delta)$ on a

$$|y'_n| \leqq A x^{\frac{1}{2}} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots .) \tag{85}$$

4° La fonction $y_1$ satisfait dans l'intervalle $(0, \delta)$ à l'équation

$$y'_1 = \alpha_1 x + \varepsilon \sqrt{Q(x, 0, 0)} \tag{86}$$

5° Pour toute valeur entière et positive de $n$, on a

$$y'_{n+1} = \alpha_1 x + \beta_1 y_n + \varepsilon \sqrt{Q(x, y_n, y'_n)} \tag{87}$$

dans tout l'intervalle $(0, \delta)$.

Pour démontrer ce lemme, faisons l'observation suivante: le nombre $A$ vérifiant l'inégalité (83), il existera une valeur de $\delta$ vérifiant les conditions de la remarque **15**, en particulier dans le cas où l'on prendrait

$$B = A. \tag{88}$$

Supposons que le nombre $\delta$ ait une valeur satisfaisant aux conditions de la remarque **15** pour la valeur (88) de $B$.

Je dis que cette valeur de $\delta$ satisfera aussi aux conditions du lemme **21** qu'il s'agit précisément de démontrer. En effet, appliquons la remarque **15** au cas où l'on aurait posé

$$y = y' = 0$$

dans tout l'intervalle $(0, \delta)$. On aura $l = \delta$, et la fonction $v$, définie par la formule (49), se confondra alors comme cela résulte de (86), avec la fonction $y_1'$. Par conséquent, la formule (86) définira la fonction $y_1'$, dans tout l'intervalle $(0, \delta)$, comme une fonction réelle et continue de $x$, vérifiant dans cet intervalle la relation

$$|y_1'| \leqq Ax^{\frac{1}{2}}$$

Donc la fonction $y_1$ satisfera à toutes les conditions du lemme.

Supposons provisoirement que tous les termes de la suite (84) jusqu'au terme $y_n$ inclusivement, satisfassent aux conditions du lemme. **21**. La fonction $y_n'$, dérivée première de la fonction $y_n$, sera réelle et continue dans l' intervalle $(0, \delta)$; en outre, on aura

$$|y_n'| \leqq Ax^{\frac{1}{2}} \tag{88,1}$$

dans tout cet intervalle. Donc, puisque la fonction $y_n$ s'annule pour $x = 0$, on aura

$$|y_n| \leqq \tfrac{2}{3} Ax^{\frac{3}{2}} \tag{88,2}$$

dans tout l'intervalle $(0, \delta)$. Nous pourrons dès lors appliquer la remarque **15** au cas où $l = \delta$ et où l'on a (87), la fonction $y$ étant remplacée par $y_n$. En se reportant à la formule (87), on constatera de cette façon que, conjointement avec la condition

$$(y_{n+1})_{x=0} = 0,$$

cette formule définit la fonction $y_{n+1}$ comme une fonction vérifiant les conditions du lemme dans tout l'intervalle $(0, \delta)$. Donc, en définitive, le lemme (21) est vrai en vertu du principe d'induction mathématique.

Supposons que le nombre $\delta$ ait une valeur vérifiant toutes les conditions du lemme **21**. En appliquant le lemme **16** au cas où l'on substituerait les fonctions $y_{n+1}$ et $y_n$ aux fonctions $y$ et $z$, on s'assurera aisément qu'en diminuant au besoin la valeur précédente de $\delta$, on pourra attribuer à ce nombre une valeur positive vérifiant la condition suivante: si l'on désigne par $r$ un nombre positif appartenant à l'intervalle $(0, \delta)$ et par $M_k$ la borne supérieure de l'expression

$$|y'_{k+1} - y'_k|$$

dans l'intervalle $(0, r)$, l'on aura:

$$M'_{n+1} \leqq B_1 r^{\frac{1}{2}} M'_n \tag{89}$$

pour toute les valeurs entières et positives de $n$ avec une valeur constante et positive de $B_1$. Désignons par $\theta$ un nombre positif mais plus petit que l'unité et choisissons le nombre positif $r$, dans l'intervalle $(0, \delta)$, de façon à avoir

$$B_1 r^{\frac{1}{2}} \leqq \theta.$$

La relation (89) nous donnera

$$M'_{n+1} \leqq \theta M'_n$$

pour toutes les valeurs entières et positives de $n$. Mais nous avons

$$0 < \theta < 1.$$

Donc la série

$$y'_1 + \sum_{k=1}^{\varphi} (y'_{k+1} - y'_k) \tag{90}$$

est absolument et uniformément convergente dans tout l'intervalle $(0, r)$. Mais on a

$$(y_n)_{x=0} = 0$$

pour toute valeur entière et positive de $n$. Par conséquent la série.

$$y_1 + \sum_{u=1}^{\varphi} (y_{n+1} - y_n \tag{91}$$

est aussi absolument et uniformément convergente dans l'intervalle $(0, r)$. Il résulte de la convergence uniforme des séries (90) et (91) qu'il existe une fonction $y$ de $x$ continue avec sa dérivée première $y'$ dans tout l'intervalle $(0, r)$ telle que

$$(92) \qquad \left| \begin{array}{l} y' = \lim\limits_{\frac{1}{n}=0} y'_n \\ y = \lim\limits_{\frac{1}{n}=0} y_n \end{array} \right.$$

la convergence étant uniforme dans tout l'intervalle $(0, r)$.

Il résulte des relations (88,1) et (88,2) que l'on peut attribuer au nombre positif $r$ une valeur assez petite, pour que pour toute valeur entière et positive de $n$ l'on ait, dans tout l'intervalle $(0, r)$:

$$(93) \qquad |x| \leqq d, \quad |y_n| \leqq d, \quad |y'_n| \leqq d,$$

où $d$ est le second membre des relations (21).

Supposons que $r$ satisfasse aussi à cette condition. A cause de (92) on aura alors

$$(94) \qquad |x| \leqq d, \quad |y| \leqq d, \quad |y'| \leqq d$$

dans tout l'intervalle $(0, r)$ et les égalités (92) et (87) entraîneront la conséquence suivante: la fonction $y$ définie par la seconde des équations (92), continue avec sa dérivée première $y'$ dans l'intervalle fermé $(0, r)$, satisfait à l'équation différentielle (82) dans tout cet intervalle et, pour $x = 0$, elle s'annule ainsi que sa dérivée première $y'$. Donc la valeur

$$l = r$$

de $l$ satisfait à toutes les conditions du théorème **20** lequel, par conséquent, est complétement démontré.

22. Remarque Si l'on désigne par $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ les deux intégrales de l'équation (82) qui ont les nombres $+1$ et $-1$ pour indices (déf. **18**) respectifs et dont l'existence est assurée par le théorème **20**, on a:

$$\lim \frac{\varphi_1'(x)}{x^{\frac{1}{2}}} = c \quad \text{et} \quad \lim \frac{\varphi_2'(x)}{x^{\frac{1}{2}}} = -c$$

lorsque $x$ tend vers zéro par valeurs positives, comme on le démontre très aisément au moyen du lemme **14**; par conséquent, pour des valeurs positives mais assez petites de $x$, on a certainement

$$\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x).$$

§ 8. Actuellement il est trés aisé de démontrer le théorème **3**. En effet, les théorèmes **19** et **20**, conjointement avec la remarque **22**, entraînent l'exactitude du théorème **3** dans le cas particulier où l'on a

$$a = b = b' = 0.$$

Or, en vertu du lemme **4**, cette circonstance entraîne l'exactitude du théorème **3** lui-même. Celui-ci est donc démontré.

Pour terminer indiquons rapidement comment le théorème **3** permet de localiser avec précision le défaut du raisonnement par lequel Lagrange a cru avoir prouvé que, normalement, une équation différentielle du 1-er ordre devait admettre une intégrale singulière. A cet effet, supposons qu'une fonction $f(x, y, u)$ des trois variables $x, y, u$ satisfasse à l'hypothèse 1. En général le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(f, f'_u)}{D(x, y)} \tag{93}$$

ne s'annulera pas au point défini par les valeurs (5) des variables $x, y, u$. On pourra donc trouver un nombre positif $\varrho$ tel que, dans le domaine

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (u-b')^2 \leqq \varrho^2, \tag{94}$$

le système d'équations

$$f(x, y, u) = 0$$
$$f'_u(x, y, u) = 0$$

définisse $x$ et $y$ sans ambiguité comme fonctions de $u$ dans un certain intervalle $(u_1 . u_2)$ comprenant à son intérieur le nombre $b'$. Ces fonctions, soit $\lambda(u)$ et $\mu(u)$, seront continues dans l'intervalle $(u_1, u_2)$ et chacune d'elles aura une dérivée première continue. Si donc on rapporte le plan à un système de coordonnées cartésiennes $(x, y)$, les équations

$$x = \lambda(u), \quad y = \mu(u) \tag{95}$$

définiront un certain arc $(S)$. Supposons ce qui, à cause de (7) et (8) est permis, que le nombre $\varrho$, sans être nul, soit assez petit pour que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial x} + u\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \neq 0 \tag{92}$$

en tout point de l'arc $(S)$.

La seconde de ces inégalités entraînera cette conséquence que les dérivées $\lambda'(u)$ et $\mu'(u)$ ne s'annuleront à la fois en aucun point de l'arc $(S)$. Cet arc admettra donc une tangente déterminée en chacun de ses points.

Cela posé, le raisonnement de Lagrange implique les deux hypothèses suivantes:

1° Si $x_0$, $y_0$ et $u_0$ représentent les valeurs de $x$, $y$ et $u$ en un point de l'arc $(S)$, il existe une branche de courbe intégrale particulière $(C)$ de l'équation (2) passant par le point $(x_0, y_0)$ et telle que, en ce point, l'on ait

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = u_0.$$

2° Il résulterait de la théorie des enveloppes que l'arc $(C)$ serait tangent au point $(x_0, y_0)$ à l'arc $(S)$.

La première hypothèse est confirmée par le théorème 3 car, dans l'énoncé de ce théorème, on pourra substituer, comme cela résulte de l'existence des inégalités (92) en chaque point de l'arc $(S)$, les nombres $x_0, y_0, u_0$ aux nombres $a$, $b$ et $b'$. La deuxième hypothèse au contraire est contredite par le théorème 3, car la branche $(C)$ de courbe intégrale se compose de deux arcs dont l'ensemble donne lieu à un point de rebroussement au point $(x_0, y_0)$. C'est donc l'adoption de cette hypothèse illégitime qui constitue le défaut du raisonnement de Lagrange.

# Sull' insieme dei valori che annullano una funzione analitica a più variabili complesse.

Nota di

W. Wilkosz (Cracovia).

Un fatto caratteristico per la teoria delle funzioni analitiche a più variabli complesse è ben noto: i teoremi semplicissimi nel loro ennunciato sono in molti casi dimostrati male o non dimostrati del tutto.

Ecco una quistione di tal genere suggerita a me dal dott. Leja:

Consideriamo una $f(x_1 \ldots x_n)$ analitica nelle variabili complesse $x_1 \ldots x_n$ — non identicamente nulla. Sia $(D)$ il suo campo totale d'esistenza (cioè insieme di tutti i punti di regolarità in distanza finita); $(D)$ com'è noto, è un campo connesso, ogni punto di cui è interno relativamente allo spazio delle variabili. Sia $E$ insieme di tutti i punti di $(D)$ per le quali

$$f(x_1 \ldots x_n) = 0.$$

Occupiamoci soltanto delle funzioni monodrome. — Ne sorge la domanda: Insieme $E$ taglia $(D)$ in pezzi distinti o no? La risposta data in questa nota è negativa. È vero un teorema ancora più ampio:

Teor.: Sia $(D)$ un campo[1]) connesso, contenuto in $(D)$. Sia $(E)$ la parte di $E$ contenuta in $(D)$ — Allora $E$ non taglia $(D)$ — cioè: ogni due punti distinti di $(D)$ — $(E)$ si possono far congiungere con una curva continua passante in $(D)$ lungo la quale $f(x_1 \ldots x_n)$ non s'annulla mai.

---

[1]) Un campo nel senzo di Weierstrass — soli punti interni!

§ 1. Incomincio con $n = 1$ — ciò ch'è il caso semplice e già noto:

Sia $$f(x_1) \neq 0 \qquad f(x_2) \neq 0 \qquad x_1 \neq x_2 \qquad \text{in } (\bar{D}).$$

Giungo $x_1$ con $x_2$ per mezzo di una curva continua passante in $(\bar{D})$ del resto arbitraria.

Sia $$x = \varphi(t)$$
la sua equazione ove:

(1) $\varphi(t)$ continua in $[0, 1]$

(2) $\varphi(0) = x_1 \qquad \varphi(1) = x_2$

(3) $\varphi(t)$ cade in $(\bar{D})$ per $0 \leqq t \leqq 1$.

Esiste (se in tutto) soltanto un insieme discreto dei valori:
$$t_1 \dots t_p.$$
tali che $f(\bar{x}_i) = 0$ per $\bar{x}_i = \psi(t_i)$ $i/1 \dots p$.

Bisogna modificare (se necessario) leggermente la $\varphi(t)$ per evitare i punti $\bar{x}_1 \dots x_p$ non sorgendo dal campo $(\bar{D})$ ciò che è evidentemente possibile.

Il teorema viene in tal modo dimostrato per $n = 1$.

§ 2. Passiamo al caso $n = 2$.

Sieno: $M_1(x_1 y_1)$ $M_2(x_2 y_2)$ due punti distinti in $(\bar{D})$ non appartenenti alla $E$.

Dimostreremo un lemma che dà la soluzione della quistione quasi immediatamente.

**Lemma**: Sia $A(x_A, y_A)$ un punto di $(D)$ — allora ogni campo cilindrico (Poincaré)
$$\Delta\varrho \begin{cases} |x - x_A| < \varrho \\ |y - y_A| < \varrho \end{cases} \varrho < 0.$$

(1) contenuto in $(\bar{D})$ col suo limite

(2) ove l'elemento corrispondente al centro $A$, della $f(xy)$ è convergente in modo assoluto,

gode le seguenti proprietà:

Ogni due punti di $\Delta\varrho$ ove $f \neq 0$ si possono giungere per mezzo d'una curva continua, passante in $\Delta\varrho$, lungo la quale $f(xy)$ non s'annulla.

Dim: Consideriamo
$$F(y) = f(x_p, y) \quad \text{ove} \quad P(x_p y_p),\ Q(x_q y_q)$$
sono due tali punti $\{P \neq Q\}$

Abbiamo qui una funzione analitica per $|y-y_A| < \varrho$ — sieno

$$y_{o_1} \dots y_{o_k}$$

gli zeri della $F(y)$ in $|y-y_A| < \varrho$ — quelli esistono soltanto in numero finito — oppure $F(y)$ non s'annulla in $|y-y_A| < \varrho$.

Distinguo due casi

(1) $f(x_p y_q) \neq 0$
(2) $f(x_p y_q) = 0$.

Nel caso $f(x_p y_q) \neq 0$ sia $\varphi(t)$ una funzione continua di $t$ in $[0,1]$

(1) $|\varphi(t)-y_A| < \varrho$ in $[0,1]$
(2) $\varphi(0) = \varphi_p$ $\quad \varphi(1) = y_q$
(3) $\varphi(t) \neq y_{o_m}$ $\quad m/1 \dots k$ in $[0,1]$.

La sua esistenza è sicura per quello che precede.

Allora arco continuo:

$$(L_1) \begin{cases} x = x_p \\ y = \varphi(t) \qquad \text{in} \qquad [0,1] \end{cases}$$

cade in $\Delta\varrho$ e lungo $(L_1)$ abbiamo $f \neq 0$.

Quest' arco trasporta $P$ in $S(x_p y_q)$ caminando in $\Delta\varrho$ ed evitando la $E$.

Sia poi $G(x) = f(xy_q)$ ch'è analitica in $|x-x_A| < \varrho$.

Sieno

$$x_{r_1} \dots x_{r_s}$$

i suoi zeri in $|x-x_A| < \varrho$ {numero finito!}.

Prendiamo $\psi(t) = x$ tale che:

(1) $\psi(t)$ continua in $[0,1]$
(2) $\psi(0) = x_p$ $\quad \psi(1) = x_q$
(3) $|\psi(t)-x_A| < \varrho$ in $|x-x_A| < \varrho$
(4) $\psi(t) \neq x_{r_m}$ $\quad m/1 \dots s$; $t$ in $[0,1]$.

Allora arco:

$$(L_2) \left\{ \begin{aligned} x &= \psi(t) \\ y &= y_p \end{aligned} \right\} \text{continuo in } [0,1]$$

transporta $S$ in $Q$ evitando $E$ e passando in $\Delta\varrho$. Quindi arco composto di $L_1$ e $L_2$ trasmette $P$ i $Q$ in modo desiderato.

Passiamo al caso $f(x_p y_q) = 0$.

Si può trovare una $\varepsilon_0 > 0$ tale, che per ogni $y = y_q - \varepsilon$ ove $|\varepsilon| < \varepsilon_0$

abbiamo:

(1) $F(y_q - \varepsilon) \neq 0$.
(2) $|y_q - \varepsilon - y_\Delta| < \varrho$
(3) $f(x_q y_q - \varepsilon) \neq 0$.

Allora passiamo dal $(x_p y_p)$ al $(x_p y_q - \varepsilon)$ d'onde al $(x_q, y_q - \varepsilon)$ e finalmente dal $(x_q, y_q - \varepsilon)$ al $(x_q y_q)$ direttamente.

Il lemma è gia dimostato.

Torniamo al teorema primitivo:

Osserviamo che in ogni campo $(D')$ contenuto in $(D)$ vi sono infiniti punti ove $f(xy) \neq 0$, perchè $\Sigma$ non ha punti interni se $f(xy) \mathrel{=\!|\!=} 0$.

Giungo adesso $M_1(x_1 y_1)$ e $M_2(x_2 y_2)$ con un arco $(C)$ arbitrario in $(D)$ — per ogni punto di $(C)$ facciamo corrispondere un campo $\Delta\varrho$ definito come di sopra il cui centro cade in questo punto. — Secondo il teorema di Heine-Borel, un numero finito

$$\Delta_0 \ldots \Delta_k$$

delle $\Delta$ esiste, le quali

(1) riccoprono tutta la $(C)$
(2) $\Delta_0$ ha per centro $M_1$; $\Delta_k$ il punto $M_2$
(3) la parte comune alle

$$\Delta_{i-1},\ \Delta_i \quad (i|1 \ldots k)$$

che indico con $\vartheta_i$ è un campo connesso cadente in $(D)$.

Scelgo da ogni $\vartheta_i$ un punto $P_i$ ove $f(P_i) \neq 0$. — Allora servendosi del lemma

(1) giungo $M_1$ con $P_1$ per mezzo d'un arco continuo evitante $E$
(2) poi $P_1$ con $P_1 \ldots P_{k-1}$ con $P_k$
(3) e finalmente $P_k$ con $M_2$ nello stesso modo.

L'arco composto congiunge $M_1$ con $M_2$ in modo richiesto.

§ 3. Passiamo adesso al caso **g e n e r a l e**. La dimostrazione sia fatta per induzione. Poniamo il teorema vero per $n$, e dimostriamo la sua esattezza per $n+1$. — Basta evidentemente generalizzare soltanto il nostro lemma. Il resto si dimostra facilmente.

$$\text{Sia} \qquad \Delta_\varrho^{(n+1)} \left| \begin{array}{l} |x_1 - x_1^A| < \varrho \\ \vdots \\ |x_{n+1} - x_{n+1}^{(A)}| < \varrho \end{array} \right| \quad \varrho > 0.$$

analogo al $\Delta_\varrho$ in § 2 ma formato per $f(x_1 \ldots x_{n+1})$.

Sieno $P(x_1^p \ldots x_{n+1}^p)$, $Q(x_1^q \ldots x_{n+1}^q)$ i punti distinti da congiungere.

Sia $g(x_1 \ldots x_n) \equiv f(x_1 \ldots x_n x_{n+1}^p)$.

Allora:

$$\Delta_\varrho^{(n)} \left| \begin{array}{l} |x_1 - x_1^A| < \varrho \\ \\ |x_n - x_n^A| < \varrho \end{array} \right| (\varrho \text{ la stessa!})$$

costituisce un campo analogo per $g(x_1 \ldots x_n)$.

$$\text{Se} \qquad g(x_1^q \ldots x_n^q) \neq 0$$

allora trasporto

$$(x_1^p \ldots x_n^p) \quad \text{in} \quad (x_1^q \ldots x_n^q)$$

per mezzo d'una via in $\Delta_\varrho^{(n)}$ non annullante; quindi:

$$(x_1^{(p)} \ldots x_{n+1}^p) \quad \text{in} \quad (x_1^q \ldots x_n^q x_{n+1}^p).$$

per $f(x_1 \ldots x_{n+1})$ in $\Delta_\varrho^{n+1}$.

Poi $(x_1^q \ldots x_n^q x_{n+1}^p)$ in $(x_1^q \ldots x_{n+1}^q)$.

Ma se $g(x_1^q \ldots x_n^q) = 0$

allora trasporto

$$(x_1^p \ldots x_{n+1}^p)$$

in qualche:

$$(x_1^q \ldots x_n^q - \varepsilon, x_{n+1}^p) \text{ opportuno}$$
$$\text{ove} \quad g = f \neq 0; \quad \text{d'onde in}$$
$$(x_1^q \ldots x_{n+1}^q x_n^q - \varepsilon, \quad x_{n+1}^q)$$

— e scelta la $\varepsilon$ convenientemente

$$\text{in} \quad (x_1^q \ldots x_{n+1}^q).$$

Il lemma, e quindi il teorema stesso, viene per ciò completamente dimostrato.

Abbiamo omesso la considerazione dei cosidetti „punti in infinito“, perché ci vorrebbe dapprima fissare il senso del teorema in diversi spazî usati nella teoria in quistione (Cf. M. Bôcher: Infinite regions of various geometries, Bull. Amer. Math. Soc. v 20 (1914) o W. F. Osgood: Selected topics in the theory of functions of several complex variables. Madison Colloquium 1914). Il teorema è ancora vero, almeno, nel cosidetto „spazio d'analisi“.

# Sur la distribution des valeurs des fonctions analytiques dans leurs domaines d'existence.

Par

F. Leja

§ 1. Pour énoncer avec précision les résultats de ce travail, j'adopterai les définitions suivantes:

1° L'expression domaine ouvert, ou plus brièvement domaine, désignera comme ordinairement un ensemble de points intérieurs d'un espace, deux points quelconques de cet ensemble pouvant être réunis par une courbe régulière appartenant à l'ensemble.

Une courbe, image univoque et continue d'un intervalle, sera dite régulière, si elle est rectifiable. Une courbe régulière peut se couper, ou non.

2° Je dirai qu'un ensemble $(X)$ de points d'un espace est un domaine semi-ouvert, s'il se compose d'un domaine $(X')$ au sens de la définition précédente et encore de certains de ceux de ses points-frontière dont chacun est l'origine d'une courbe régulière dont tout autre point appartient au domaine $(X')$ [1].

3° Soit $(X)$ un domaine ouvert ou semi-ouvert et $(\xi)$ un ensemble de points appartenant à $(X)$ et jouissant des propriétes suivantes:

*a*) L'ensemble $(\xi)$ est fermé sur $(X)$, c'est-à-dire qu'il contient tous ceux de ses points-limite qui appartiennent au domaine $(X)$.

---

[1]) Il existe des domaines ouverts ayant des points-frontière dépourvus de cette propriéte. Voir: Encyklop. d. Math. Wiss. II B. 1. Osgood: *Analyt. Funktionen* p. 56.

$\beta$) Dans chaque voisinage d'un point quelconque de l'ensemble $(\xi)$, il y a des points de $(X)$ qui n'appartiennent pas à l'ensemble $(\xi)$.

$\gamma$) Lorsque $(X_0)$ est un domaine quelconque ouvert ou semi-ouvert mais contenu dans le domaine $(X)$, deux points quelconques de $(X_0)$ qui ne font pas partie de l'ensemble $(\xi)$ peuvent être réunis par une courbe régulière dont tout point autre que ses extrémités est un point intérieur du domaine $(X_0)$ et dont aucun point ne fait partie de l'ensemble $(\xi)$.

L'ensemble $(\xi)$ jouissant de ces trois propriétés sera dit é v i t a b l e dans le domaine $(X)$.

Cela posé, considérons $n$ fonctions analytiques uniformes

$$f_i(x_1 \ldots x_p) \quad i=1,\ldots,n$$

de $p \geqq n$ variables complexes $x_1,\ldots,x_p$, et supposons que leurs domaines d'existence aient un point commun pour lequel la matrice

$$\frac{\partial (f_1 \ldots f_n)}{\partial (x_1 \ldots x_p)}$$

soit de rang $n$. Désignons par $(X)$ un domaine ouvert qui soit un domaine commun aux domaines d'existence de ces $n$ fonctions et posons

(1) $$y_i = f_i(x_1 \ldots x_p) \quad i=1,\ldots,n.$$

Ces équations font correspondre au domaine $(X)$ à $2p$ dimensions, un certain ensemble $(Y)$ des points $(y_1,\ldots y_n)$, situé dans l'espace arithméthique à $2n$ dimensions.

Voici le résultat principal du travail actuel:

Après avoir établi que l'ensemble $(Y)$ constitue un domaine ouvert ou semi-ouvert au sens des définitions 1° et 2°, je prouve que, si $(\eta)$ e s t u n e n s e m b l e é v i t a b l e d a n s l e d o m a i n e $(Y)$, l ' e n s e m b l e $(\xi)$ d e s p o i n t s d u d o m a i n e $(X)$ auxquels correspondent en vertu de (1) les points de l'ensemble $(\eta)$, e s t a u s s i é v i t a b l e d a n s l e d o m a i n e $(X)$.

Dans un travail inséré dans ce volume[1]) M. W. W i l k o s z a démontré un remarquable théorème sur les zéros d'une fonction analytique. En se servant de la notion d'un ensemble é v i t a b l e, défini plus haut, on peut l'énoncer comme il suit:

---

[1]) P. 29. *Sull' insieme dei valori che annullano una funzione analitica a più variabili complesse.*

Les zéros d'une fonction analytique non nulle identiquement forment un ensemble évitable dans le domaine d'existence de cette fonction.

La propriété des fonctions analytiques que je démontre ici est une généralisation considérable de ce théorème. Elle peut être, je crois, utile dans certains problèmes d'analyse dits non locaux [1]) et surtout dans ceux que l'on rencontre dans la théorie des groupes de Lie.

On doit remarquer que la propriéte en question n'est pas du tout caractéristique pour les fonctions analytiques. Une fonction définissant une correspondance biunivoque et continue entre deux domaines jouit de la même propriété. On verra plus loin à quelles fonctions la démonstration du théorème principal peut être étendue.

§ 2. Dans ce qui va suivre, j'aurai à m'appuyer sur le lemme suivant: Soit

$$\Delta(x_1 x_2 \dots x_p) \tag{1}$$

une fonction analytique uniforme de $p$ variables complexes $x_1, x_2 \dots, x_p$, non nulle identiquement dans son domaine d'existence $(X)$ [2]).

**Lemme I.** Deux zéros de la fonction (1) peuvent toujours être réunis dans son domaine d'existence par une courbe régulière ne passant, abstraction faite de ses extrémités, par aucun zéro de cette fonction.

Soit

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_p \tag{2}$$

un point, où la fonction (1) s'annule. Je vais d'abord montrer qu'il existe une courbe régulière ayant son origine au point (2) et passant par le domaine $(X)$, aucun point de cette courbe autre que son origine, n'étant zéro de la fonction (1).

On voit que la fonction d'une variable complexe $x_1$

$$\Delta(x_1 a_2 \dots a_p) \tag{3}$$

s'annule au point $x_1 = a_1$. Supposons qu'elle ne soit pas identiquement nulle. Les zéros d'une telle fonction étant isolés, il existe un nombre positif $\delta$ tel que, dans le voisinage

---

[1]) Expression due à M. S. Zaremba.

[2]) Les points à l'infini ne seront pas compris dans le domaine d'existence, c'est-à-dire dans le domaine des points réguliers.

$$|x_1 - a_1| < \delta,$$

il existe un zéro unique de la fonction (3).

Soit $a_1'$ nn nombre différent de $a_1$ et satisfaisant à la dernière inégalité. Le segment

$$(4) \qquad \begin{array}{ll} x_1 = a_1 + t(a_1' - a_1) & , t \to <0,1> \\ x_2 = a_2 & \\ \cdots\cdots & \\ x_p = a_p & \end{array}$$

joint les deux points

$$a_1 a_2 \ldots a_p \quad \text{et} \quad a_1' a_2 \ldots a_p$$

et ne contient aucun zéro de la fonction (1) à l'exception de son origine

Supposons maintenant que la fonction (3) soit identiquement nulle. Il suffit dans ce cas de faire tourner les axes des coordonnées pour établir de la même manière l'existence d'un segment tel que (4), ayant son origine au point (2) et ne renfermant aucun zéro de la fonction (1) autre que l'origine de ce segment.

Soit

$$(5) \qquad a_1 \ldots a_p \quad \text{et} \quad \alpha_1 \ldots \alpha_p$$

deux zéros de la fonction (1). Nous avons vu qu'il existe deux points du domaine $(X)$

$$(6) \qquad a_1' \ldots a_p' \quad \text{et} \quad \alpha_1' \ldots \alpha_p'$$

tels que les deux segments, dont l'un joint les points

$$a_1 \ldots a_p \quad \text{et} \quad a_1' \ldots a_p'$$

et l'autre les points

$$\alpha_1 \ldots \alpha_p \quad \text{et} \quad \alpha_1' \ldots \alpha_p',$$

ne renferment aucun zéro de la fonction (1) autre que leurs origines.

D'autre part, les points (6) n'étant pas zéros de la fonction (1) peuvent être réunis, d'après le théorème de M. Wilkosz, par une courbe régulière qui ne renferme aucun zéro de la fonction (1). Donc, les deux segments précédents forment avec la dernière courbe une nouvelle courbe régulière qui joint les points (5) et satisfait aux conditions du lemme.

§ 3. Soit

$$f_i(x_1\, x_2 \dots x_p) \qquad i = 1, \dots, n$$

un système de $n$ fonctions analytiques uniformes de $p \geqq n$ variables complexes, les domaines d'existence de ces fonctions ayant un point commun

(1) $$x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0$$

tel qu'en ce point la matrice

(2) $$M = \frac{\partial (f_1 f_2 \dots f_n)}{\partial (x_1\, x_2 \dots x_p)}$$

soit de rang $n$.

Pour plus de simplicité je désignerai par

$$(x)$$

le point

$$x_1, x_2, \dots, x_p$$

et par

$$f_i(x)$$

la fonction $f_i(x_1 \dots x_p)$, $i = 1, \dots, n$. Désignons encore comme plus haut:

par $(X)$ la partie commune et d'un seul tenant des domaines d'existence des fonctions $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, renfermant le point $(x^0)$,

par $(Y)$ l'ensemble des points

$$(y) = (y_1\, y_2 \dots y_n)$$

tels que l'on ait

(3) $$y_i = f_i(x_1 \dots x_n) \qquad i = 1, \dots, n$$

aux points de l'ensemble $(X)$.

On sait que l'ensemble $(X)$ forme un domaine ouvert dans l'espace à $2p$ dimensions. Quand à $(Y)$, je vais établir le théorème suivant:

Théorème I. L'ensemble $(Y)$ forme un domaine ouvert ou semi-ouvert dans l'espace à $2n$ dimensions.

Démonstration: Désignons par $(X')$ l'ensemble des points du domaine $(X)$ pour lesquels la matrice $M$ est de rang $n$ et soit $(Y')$ la partie de $(Y)$ correspondant à $(X')$. Il est facile de montrer que les ensembles

$$(X') \text{ et } (Y')$$

forment des domaines ouverts, le premier dans l'espace à $2p$, le second dans l'espace à $2n$ dimensions.

On voit que le point (1) appartient à $(X')$ et que chaque point de $(X')$ est intérieur à cet ensemble. Supposons que les deux points

$$(a) \text{ et } (a')$$

appartiennent à $(X')$. Il existe donc deux jacobiens de rang $n$, que je désignerai par $\Delta(x)$ et $\Delta'(x)$, appartenant à la matrice (2), tels que l'on ait

$$\Delta(a) \neq 0, \quad \Delta'(a') \neq 0.$$

Ces deux jacobiens peuvent être différents ou identiques.

Considérons la fonction $\Delta(x)$. Elle est analytique et non nulle identiquement dans le domaine $(X)$, donc ses zéros forment un ensemble évitable dans $(X)$. Il en résulte que, si $(a')$ n'est pas zéro pour $\Delta(x)$, les deux points $(a)$ et $(a')$ peuvent être réunis par une courbe régulière ne passant par aucun point où $\Delta(x)$ s'annulle, c'est-à-dire passant par l'ensemble $(X')$.

Supposons que l'on ait $\Delta(a') = 0$. $\Delta'(a')$ étant différent de zéro, il existe un voisinage du point $(a')$, dans lequel le jacobien $\Delta'(x)$ est partout différent de zéro. Or, dans ce voisinage il existe des points pour lesquels le premier jacobien $\Delta(x)$ est différent de zéro. Considerons l'un d'eux; on peut le joindre d'une part avec $(a)$ par une courbe régulière ne passant par aucun zéro de $\Delta(x)$ et d'autre part avec $(a')$ par une courbe régulière ne passant par aucun zéro de $\Delta'(x)$. Ces deux courbes forment une seule courbe régulière joignant les deux points $(a)$ et $(a')$ et passant par l'ensemble $(X')$. Il en résulte que $(X')$ est un domaine ouvert.

Passons à l'ensemble $(Y')$. Chacun de ses points est intérieur, ce qui résulte des théorèmes sur l'existence des fonctions inverses. D'autre part, le point $(y^0)$ correspondant, d'après (3), au point (1) appartient effectivement à l'ensemble $(Y)$.

Soit

$$(b) \text{ et } (b')$$

deux points de $(Y')$. Ils sont les images de deux points $(a)$ et $(a')$ du domaine $(X)$. On a vu qu'il existe une courbe régulière

$$x_j = \varphi_j(t) \qquad , j = 1, \ldots, p; \ t \rightarrow \langle 0,1 \rangle, \tag{4}$$

où les $\varphi_i(t)$ désignent des fonctions complexes du paramètre réel $t$, telle qu'elle joigne les points $(a)$ et $(a')$ et passe par le domaine $(X')$. Donc la courbe

$$y_i = f_i(\varphi(t)) \qquad , i = 1, \dots n; \ t \rightarrow < 0, 1 >$$

évidemment aussi régulière, joint les points

$$(b) \quad \text{et} \quad (b')$$

et passe par l'ensemble $(Y')$. $(Y')$ est donc un domaine ouvert.

Considérons maintenant l'ensemble $(Y)$. Il renferme tous les points du domaine $(Y')$. Soit

$$(b)$$

un des points de $(Y)$ qui n'appartiennent pas à $(Y')$, si de tels points existent. Je dis qu'il est frontière pour le domaine $(Y')$. Soit

$$(a)$$

son correspondant, ou l'un de ses correspondants s'il y en a plusieurs, dans le domaine $(X)$. Le point $(a)$ est limite des points appartenant à $(X')$, donc $(b)$ est limite des points appartenant à $(Y')$.

Il reste à démontrer qu'un point $(b)$ de $(Y)$ qui n'appartient pas au domaine $(Y')$ peut être réuni avec un autre point quelconque $(b')$ de $(Y)$ par une courbe régulière passant par le domaine $(Y')$, abstraction faite de ses extrémités.

Soit

$$(a) \quad \text{et} \quad (a') \tag{6}$$

les points du domaine $(X)$ qui correspondent aux points

$$(b) \quad \text{et} \quad (b') \tag{7}$$

de $(Y)$. Il existe en vertu du lemme du paragraphe précédent une courbe de la forme (4) qui joint les points (6), chaque point de cette courbe, autre que l'une ou les deux de ses extrémités, appartenant au domaine $(X')$. Donc la courbe (5) qui correspond à la précédente dans l'ensemble $(Y)$ joint les points (7), et tous ses points, autres que (7) appartiennent au domaine $(Y')$.

L'ensemble $(Y)$ forme donc un domaine semi-ouvert. Il peut se réduire à un domaine ouvert, si tous ses points, et en particulier ceux qui n'appartiennent pas à $(Y')$ sont intérieurs [1]).

§ 4. Reprenons les domaines $(X)$ et $(Y)$ du paragraphe précédent et considérons un ensemble quelconque

$$(\eta)$$

de points $(y)$ du domaine $(Y)$. Désignons par

$$(\xi)$$

l'ensemble de tous les points $(x)$ du domaine $(X)$ te's que, si le correspondant $(y)$ d'un point $(x)$ où l'on a

$$y_i = f_i(x_1 \ldots x_p) \qquad , i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

appartient à l'ensemble $(\eta)$, le point $(x)$ appartienne à l'ensemble $(\xi)$.

Théorème II. Si l'ensemble $(\eta)$ est évitable dans le domaine $(Y)$, l'ensemble $(\xi)$ est évitable dans le domaine $(X)$.

Démonstration : On doit prouver que l'ensemble $(\xi)$ jouit des trois propriétés des ensembles évitables.

$\alpha$) Il est fermé sur $(X)$. Considérons une suite convergente des points $(x)$ de l'ensemble $(\xi)$.

$$x_j^{(1)},\ x_j^{(2)}, \ldots\ldots\ x_j^{(\nu)} \rightarrow x_j^{(0)} \qquad , j = 1, \ldots, p, \tag{2}$$

et supposons que sa limite

$$x_j^{(0)} \qquad , j = 1, \ldots, p \tag{3}$$

appartienne au domaine $(X)$. Soit

$$y_j^{(1)},\ y_j^{(2)}, \ldots\ldots, y_j^{(\nu)} \ldots\ldots \qquad , i = 1, \ldots, n \tag{4}$$

la suite des points $(y)$ l'ensemble $(\eta)$ correspondant à la suite (2) d'après (1).

---

[1]) L'ensemble $(Y)$ peut n'être pas un domaine ouvert comme le montre l'exemple suivant:

$$y_1 = x_1(x_2 + 1)$$
$$y_2 = x_1(x_2 - 1).$$

Aucun point $(y_1 y_2)$ où l'on a

$$y_1 = y_2 \neq 0,$$

n'appartient à l'ensemble $(Y)$. Le point $(0, 0)$ qui fait évidemment partie de $(Y)$ n'est donc pas intérieur, à moins qu' on n'ait pas étendu la notion du domaine d'existence en y comptant des points à l'infini, définis d'une manière convenable et de certains points singuliers.

La suite (4) est convergente, en vertu de la continuité des fonctions $f_i(x)$; soit

(5) $$y_i^{(0)} \qquad , i = 1, \ldots, n$$

sa limite. On a

$$y_i^{(0)} = f_i(x^0) \qquad , i = 1, \ldots, n.$$

Le point (3) appartient à $(X)$, donc le point (5) appartient à $(Y)$ et de même à l'ensemble $(\eta)$, cet ensemble étant fermé sur $(Y)$. Le point (3) appartient donc à l'ensemble $(\xi)$ parce que son correspondant (5) appartient à $(\eta)$. L'ensemble $(\xi)$ est donc fermé sur $(X)$.

$\beta$) Soit $(x')$ un point quelconque de l'ensemble $(\xi)$. Je vais prouver qu'en chaque voisinage de ce point, il y a des points de $(X)$ qui n'appartiennent pas à $(\xi)$.

Supposons que la proposition soit fausse, alors il existera un voisinage du point $(x')$

(6) $$|x_j - x_j'| < \delta \qquad , j = 1, \ldots, p,$$

dont tous les points appartiendront à $(\xi)$. Les points $(y)$ qui leur correspondent d'après (1) appartiendront tous à l'ensemble $(\eta)$.

Considérons un jacobien d'ordre $n$ contenu dans la matrice $M$ et non nul identiquement dans le domaine $(X)$. Un tel jacobien existe d'après l'hypothèse; désignons le par

$$\Delta(x).$$

C'est une fonction analytique définie dans le domaine entier $(X)$, donc il existe un point $(x^0)$ du voisinage (6) en lequel

$$\Delta(x^0) \neq 0.$$

D'autre part, il existe un voisinage

$$|x_j - x_j^{(0)}| < \varepsilon \qquad , j = 1, \ldots, p$$

du point $(x^0)$ tel que, en ce voisinage, $\Delta(x)$ soit différent de zéro et tel que chacun de ses points appartienne au voisinage (6). Posons

$$y_i^{(0)} = f_i(x^0) \qquad , i = 1, \ldots, n$$

Le système des équations

$$y_i = f_i(x) \qquad , i = 1, \ldots, n$$

peut être résolu dans un certain voisinage du couple des points $(x^0)$ et $(y^0)$. Il en résulte q'un certain voisinage du point $(y^0)$ appartiendrait à l'ensemble $(\eta)$, contrairement à l'hypothèse. L'ensemble $(\xi)$ ne peut donc pas avoir des points intérieurs.

$\gamma$) Considérons deux points quelconques

$$(7) \qquad (a) \quad \text{et} \quad (a')$$

du domaine $(X)$ qui n'appartiennent pas à l'ensemble $(\xi)$. Il reste à prouver qu'ils peuvent être réunis dans chaque domaine partiel du domaine $(X)$ par une courbe règulière dont aucun point ne fait partie de l'ensemble $(\xi)$.

Désignons par

$$(X_0)$$

un domaine partiel de $(X)$, ouvert ou semi-ouvert, mais renfermant les deux points (7) et par

$$\Delta(x)$$

un des jacobiens contenus dans la matrice $M$ et supposés non nuls identiquement dans le domaine $(X)$. Supposons p. ex. que l'on ait

$$\Delta(x) = \frac{\partial(f_1 \ldots f_n)}{\partial(x_1 \ldots x_n)}.$$

Je vais m'occuper d'abord du cas, où le domaine $(X_0)$ est o u v e r t et où l'on a

$$\Delta(a) \neq 0, \quad \Delta(a') \neq 0.$$

L'ensemble des zéros de la fonction $\Delta(x)$ étant évitable dans le domaine $(X_0)$, il existe une courbe régulière

$$(8) \qquad x_j = \varphi_j(t) \qquad , j = 1, \ldots, p; \ t \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$$

joignant les points (7)

$$\varphi_j(0) = a_j \qquad , \varphi_j(1) = a'_j \qquad , j = 1, \ldots, p,$$

passant par le domaine $(X_0)$ et ne renfermant aucun zéro du jacobien $\Delta(x)$. D'autre part, $(X_0)$ étant ouvert, il existe un nombre positif $\varrho$ tel que, si l'on désigne par

$$x_j^{(t)} \qquad , j = 1, \ldots, p,$$

le point de la courbe (8) correspondant à la valeur $t$ du paramètre, tous les points $(x)$ du voisinage

$$(9) \qquad |x_j - x_j^{(t)}| < \varrho \qquad , j = 1, \ldots, p$$

appartiennent au domaine $(X_0)$ quel que soit le nombre $t$.

Posons (8) dans le système (1)

$$y_i = f_i(x) \qquad , i = 1, \ldots, n;$$

on obtient

$$(10) \qquad y_i = f_i(\varphi_i(t)) = \psi_i(t) \qquad , i = 1, \ldots n; t \to < 0, 1 >.$$

Ces équations répresentent une courbe régulière du domaine $(Y)$, joignant les deux points

$$b_i = \psi_i(0), \quad b'_i = \psi_i(1), \quad i = 1, \ldots, n,$$

qui peuvent se confondre ou non mais ne font pas partie de l'ensemble $(\eta)$.

La courbe (10) peut se réduire à un point unique

$$(b) = (b')$$

et dans ce cas (8) est la courbe cherchée; aucun point de la courbe (8) ne peut dans le cas considéré faire partie de l'ensemble $(\xi)$, parce que les points $(y)$ qui leur correspondent dans le domaine $(Y)$ ne font pas partie de l'ensemble $(\eta)$.

De même, si aucun point de la courbe (10) ne fait partie de l'ensemble $(\eta)$, (8) est la courbe cherchée.

Il reste à examiner le cas où la courbe (10) ne se réduit pas à un point et passe par des points de l'ensemble $(\eta)$.

Reprenons le système (1)

$$y_i = f_i(x_1 \ldots x_p) \qquad , i = 1, \ldots, n.$$

J' écrirai les équations (8) et (10) sous la forme suivante:

$$(11) \qquad \begin{array}{ll} x_j^{(t)} = \varphi_j(t) & j = 1, \ldots, p \\ y_i^{(t)} = \psi_i(t) & i = 1, \ldots, n. \end{array}$$

On sait que chaque couple des points

$$x_j^{(t)} \qquad , y_i^{(t)}$$

appartenant à la même valeur du paramètre $t$ satisfait au système (1) et que le long de la courbe (8), le jacobien est différent de zéro.

Il en résulte d'après les théorèmes sur l'existence des fonctions implicites que, pour chaque valeur de $t \to < 0,1 >$. il existe un et un seul système inverse

$$(12) \qquad x_i = F_i^{(t)}(y_1 \dots y_n x_{n+1} \dots x_p) \qquad , i = 1, \dots, n$$

tel que

1° Pour chaque valeur de $t \to < 0,1 >$ il existe un nombre positif

$$\delta_t$$

tel que les fonctions $F_i^{(t)}$ soient holomorphes dans le voisinage

$$(13) \qquad \begin{aligned} |y_i - y_i^{(t)}| &< \delta_t \qquad , i = 1, \dots, n \\ |x_k - x_k^{(t)}| &< \delta_t \qquad , k = n+1, \dots, p \end{aligned}$$

du point

$$(14) \qquad y_1^{(t)} \dots y_n^{(t)} x_{n+1}^{(t)} \dots x_p^{(t)},$$

en lequel elles se réduisent respectivement à

$$x_i^{(t)} \qquad , i = 1, \dots, n.$$

2° Le système (12) satisfait identiquement au système (1) dans le voisinage (13).

Pour simplifier le langage je dirai „voisinage $\delta_t$“ au lieu de dire „voisinage (13) du point (14) dans lequel les fonctions $F_i^{(t)}$ sont holomorphes“. De plus, je désignerai plus brièvement par

$$z_j \qquad , j = 1, \dots, p$$

un point quelconque

$$y_1 \dots y_n x_{n+1} \dots x_p$$

et par

$$z_j^{(t)} \qquad , j = 1, \dots, p$$

le point (14).

En se servant de cette notation, on peut écrire le système (12) comme il suit:

$$(12) \qquad x_i = F_i^{(t)}(z_1 \dots z_p) \qquad , i = 1, \dots, n,$$

les fonctions $F_i^{(t)}$ étant holomorphes dans le voisinage

$$(13) \qquad |z_j - z_j^{(t)}| < \delta_t \qquad , j = 1, \dots, p$$

du point

$$z_j^{(t)} \qquad ,j=1,\ldots,p.$$

On a évidemment

$$(15) \qquad \begin{aligned} z_j^{(t)} &= \psi_j(t) \qquad ,j=1,\ldots,n \\ z_j^{(t)} &= \varphi_j(t) \qquad ,j=n+1,\ldots,p, \end{aligned}$$

les fonctions $\varphi$ et $\psi$ étant identiques à celles qui définissent les courbes (8) et (10).

Cela posé, je vais établir deux lemmes sur lesquels je m'appuyerai pour achever la démonstration du théorème.

§ 5. Les notations étant les mêmes que dans le paragraphe précédent. soit

$$(16) \qquad F_i^{(t)} \quad , \quad F_i^{(t_0)} \qquad ,i=1,\ldots,n$$

deux systèmes de fonctions telles que (12) qui correspondent aux deux nombres $t$ et $t_0$ de l'intervalle $< 0,1 >$. Considérons en outre la courbe

$$(17) \qquad z_j = z_j^{(t)} \qquad ,j=1,\ldots,p;\ t \rightarrow < 0,1 >.$$

**Lemme II.** Supposons que l'arc de la courbe (17) correspondant à l'intervalle

$$(18) \qquad t \rightarrow < t_1, t_2 > \qquad ,0 \leqq t_1 \quad , \quad t_2 \leqq 1$$

soit situé entièrement dans le voisinage $\delta_{t_0}$ et qu'il contienne le centre $z_j^{(t_0)}$, $j=1,\ldots,p$, de ce voisinage. Dans ce cas:

1° On a les identités

$$x_i^{(t)} = F_i^{(t_0)}(z_1^{(t)} \ldots z_p^{(t)}) \qquad ,i=1,\ldots,n$$

pour chaque valeur de $t$ prise de l'intervalle (18).

2° $t$ étant un nombre quelconque de l'intervalle (18), les deux voisinages

$$\delta_t \quad \text{et} \quad \delta_{t_0}$$

ont une partie commune dans laquelle les deux systèmes des fonctions (16) sont identiques.

La première partie de ce lemme est une conséquence des théorèmes sur l'existence de fonctions implicites.

Soit $t$ un nombre quelconque de l'intervalle (18). Le centre $z_j^{(t)}$, $j=1,\ldots,p$, du voisinage $\delta_t$

$$|z_j - z_j^{(t)}| < \delta_t \qquad ,j=1,\ldots,p$$

appartient, d'après l'hypothèse, au voisinage $\delta_{t_0}$, donc les deux voisinages $\delta_t$ et $\delta_{t_0}$ ont une partie commune.

Le premier système des fonctions (16) se réduit à

$$x_i^{(t)} \qquad , i=1,\ldots. n$$

au centre du voisinage $\delta_t$, d'après la définition même de ce système et on a vu que le second système (16) s'y réduit au même système de valeurs.

Il en résulte que les deux systèmes (16) doivent être identiques dans un certain voisinage du point $z_j^{(t)}$, et par cela dans la partie commune de $\delta_t$ et $\delta_{t_0}$, parce qu'il existe un système unique des fonctions holomorphes qui satisfont au système (1) et vérifient les mêmes conditions initiales.

§ 6. A chaque valeur de $t$ prise de l'intervalle $< 0,1 >$, nous avons fait correspondre un nombre positif $\delta_t$. Il reste à établir la proposition suivante.

**Lemme III.** Les nombres $\delta_t$, $t \rightarrow < 0,1 >$, peuvent être choisis de telle manière que les deux conditions soient satisfaites:

1° Soit

$$x_i \quad \text{et} \quad x_i^{(t)} \qquad i=1,\ldots,n$$

deux systèmes de valeurs que prennent les fonctions $F_i^{(t)}$, $i=1,\ldots,n$ dans un point quelconque et au centre

$$z_j \quad \text{et} \quad z_j^{(t)} \qquad j=1,\ldots,p$$

du voisinage $\delta_t$. On a, quel que soit $t \rightarrow < 0,1 >$, les inégalités

$$(19) \qquad |x_i - x_i^{(t)}| < \varrho \qquad , i=1,\ldots,n$$

où $\varrho$ désigne le même nombre positif que dans l'inégalité (9).

2° L'ensemble des nombres $\delta_t$, $t \rightarrow < 0,1 >$, a une limite inférieure positive.

Observons que les fonctions $F_i^{(t)}$, $t=1,\ldots,n$ correspondant à un certain nombre $t$ de l'intervalle $< 0,1 >$ sont des prolongements analytiques, le long de la courbe (17), d'un autre système $F_i^{(t')}$, $i=1,\ldots,n$, qui correspond à un autre nombre quelconque $t'$ de l'intervalle $< 0,1 >$; c'est une conséquence immédiate du lemme précédent.

Il est donc presque évident que les deux conditions du lemme actuel peuvent toujours être satisfaites. Néanmoins je donnerai une démonstration rigoureuse de ce fait.

La condition 1° peut être satisfaite parce que les fonctions $F_i^{(t)}$ sont continues dans le voisinage $\delta_t$; il suffit de diminuer convenablement les nombres $\delta_t$.

Supposons que l'on ait choisi les nombres $\delta_t$ de sorte que la condition 1° soit satisfaite et désignons par

$$u$$

la limite inférieure de l'ensemble des nombres $\delta_t$, $t \to < 0,1 >$. Elle n'est pas négative, les nombres $\delta_t$ étant tous positifs. Supposons que l'on ait

$$u = 0$$

Il existe donc une suite convergente des points de l'intervalle $< 0,1 >$

(20) $$t_1\, t_2 \ldots t_\nu \to t_0$$

tels que la limite de la suite

(21) $$\delta_{t_1}\, \delta_{t_2} \ldots \delta_{t_\nu} \to 0\,.$$

soit zéro.

Je dis que l'on peut augmenter les nombres de la suite (21) de telle manière qu'ils soient tous plus grands qu'un nombre positif, sans que les systèmes des fonctions

$$F_i^{(t_1)}, \quad F_i^{(t_2)}, \quad \ldots\ldots, F_i^{(t_\nu)} \ldots \qquad , i = 1, \ldots, n$$

cessent d'être holomorphes et de satisfaire au système (1) dans les voisinages ainsi augmentés et sans que la condition 1° du lemme cesse d'être satisfaite.

Remarquons que la suite des centres des voisinages (21) est convergente

(22) $$z_j^{(t_1)}, \ z_j^{(t_2)} \ldots\ldots, z_j^{(t_\nu)} \to z_j^{(t_0)} \qquad , j = 1, \ldots, p,$$

sa limite étant le centre du voisinage $\delta_{t_0}$, en vertu de la continuité de la courbe (17). D'autre part, il existe un nombre positif

$$\sigma$$

tel que tous les points $z_j^{(t)}$ de la courbe (17) pour lesquels on a

$$|t - t_0| < \sigma$$

appartiennent au voisinage $\delta_{t_0}$. Soit

$$\delta$$

un autre nombre positif qui sera fixé plus tard. Les suites (20), (21) et (22) étant convergentes, il existe un indice $N$ tel que l'inegalité

$$\nu > N$$

entraîne les trois inégalités

$$
\begin{aligned}
&|t_\nu - t_0| < \sigma \\
(23) \qquad &\delta_{t_\nu} \leqq \delta \\
&|z_j^{(t_\nu)} - z_j^{(t_0)}| < \delta \qquad , j = 1, \ldots, p.
\end{aligned}
$$

Fixons le nombre $\delta$ de façon suivante:
Les fonctions

$$(24) \qquad F_i^{(t_0)}(z_1 \ldots z_p) \qquad , i = 1, \ldots, n,$$

satisfont, d'après la première partie du lemme, aux inégalités

$$|x_i - x_i^{(t_0)}| < \varrho \qquad , i = 1, \ldots, n,$$

dans le voisinage $\delta_{t_0}$ du point $z_j^{(t_0)}$, $j = 1, \ldots, p$. Supposons que l'on ait

$$(25) \qquad 2\delta < \delta_{t_0}$$

et que les fonctions (24) satisfassent aux inégalités

$$(26) \qquad |x_i - x_i^{(t_0)}| < \tfrac{1}{2}\varrho \qquad , i = 1, \ldots, n$$

dans le „voisinage $2\delta$“ du point $z_j^{(t_0)}$, j $= 1, \ldots, p$. Un tel nombre positif $\delta$ existe, les fonctions (24) étant continues.

Revenons aux inégalités (23). La première d'elles montre, d'après le lemme II, que les fonctions du système

$$F_i^{(t_\nu)} \qquad , i = 1, \ldots, n; \ \nu > N$$

sont respectivement identiques aux fonctions (24) dans la partie commune des voisinages

$$\delta_{t_\nu} \quad \text{et} \quad \delta_{t_0}.$$

Les deux dernières inégalités (23) montrent en vertu de l'inégalité (25) que tous les voisinages

$$\delta_{t_\nu} \qquad , \text{pour } \nu > N$$

appartiennent entièrement au voisinage

$$\delta_{\iota_0};$$

car, $z_j$, $j=1,\ldots,p$, étant un point quelconque du voisinage $\delta_{\iota_\nu}$ pour $\nu > N$, on a

$$|z_j - z_j^{(\iota_\nu)}| < \delta_{\iota_\nu} \leqq \delta \qquad , j=1,\ldots,p$$

d' où il résulte, à cause de la dernière des inégalités (23) que l'on a

$$|z_j - z_j^{(\iota_0)}| < 2\delta < \delta_{\iota_0} \qquad , j=1,\ldots,p.$$

De plus, il en résulte que les voisinages $\delta_{\iota_\nu}$, $\nu > N$, ne cessent pas d'appartenir au voisinage $\delta_{\iota_0}$ et même au „voisinage $2\delta$“ du point $z_j^{(\iota_0)}$, $j=1,\ldots,p$, quand on les augmente tous en égalant les nombres

$$\delta_{\iota_\nu} = \delta \qquad , \nu = N+1,\ N+2,\ldots$$

Donc, $\nu$ étant plus grand que $N$, les fonctions du système

(27) $$F_i^{(\iota_\nu)}(z_1\ldots z_p) \qquad , i=1,\ldots,n$$

restent holomorphes et ne cessent pas de satisfaire au système (1) dans le voisinage augmenté

(28) $$|z_j - z_j^{(\iota_\nu)}| < \delta \qquad , j=1,\ldots,p.$$

Je dis que, $\nu$ étant toujours plus grand que $N$, les fonctions (27) satisfont à la condition (19) du lemme dans le voisinage augmenté (28), c'est-à-dire que l'on a

(29) $$|x_i - x_i^{(\iota_\nu)}| < \varrho \qquad . i=1,\ldots,n$$

où

(30) $$x_i \quad \text{et} \quad x_i^{(\iota_\nu)} \qquad , i=1,\ldots,n$$

sont deux systèmes de valeurs des fonctions (27), l'un dans un point quelconque et l'autre au centre du voisinage (28).

En effet, les systèmes (24) et (27) sont identiques dans le voisinage (28), donc les fonctions (27) doivent satisfaire dans ce voisinage aux inégalités (26), parce que le voisinage (28) fait partie du „voisinage $2\delta$“ de centre $z_j^{(\iota_0)}$. $j=1,\ldots,p$. On peut donc poser les points (30) dans des inégalités (26), d'où l'on obtient les inégalités

$$|x_i - x_i^{(t_0)}| < \tfrac{1}{2}\varrho$$
$$|x_i^{(t_\nu)} - x_i^{(t_0)}| < \tfrac{1}{2}\varrho$$

qui entraînent (29).

Nous voyons que, à partir de l'indice $\nu = N$, les termes de la suite (20) peuvent être augmentés de sorte qu'ils soient tous égaux à un nombre positif $\delta$, sans que les fonctions

$$F_i^{(t_1)},\ F_i^{(t_2)},\ \ldots..,\ F_i^{(t_\nu)},\ldots..$$

cessent de satisfaire aux conditions demandées.

Les nombres positifs $\delta_t,\ t \to <0,1>$, peuvent donc être choisis de telle sorte que chacun de leurs points-limite soit positif. La limite inférieure de l'ensemble de ces nombres sera dans ce cas positive. Le lemme est donc démontré.

§ 7. Revenons à notre théorème. Les notations étant toujours les mêmes, supposons que les nombres $\delta_t,\ t \to <0,1>$, aient été choisis de telle sorte que les conditions du lemme III soient satisfaites. On a donc

$$0 < \mu \leqq \delta_t \qquad , t \to <0,1>.$$

Soit $\varepsilon$ un nombre positif plus petit que $\mu$

$$\varepsilon < \mu.$$

La courbe (17)

$$z_j = z_j^{(t)} \qquad , j = 1,\ldots,p;\ t \to <0,1>$$

a une longueur déterminée et finie, donc il existe une suite finie de points de cette courbe

(31) $$z_j^{(t_1)},\ z_j^{(t_2)},\ \ldots..,\ z_j^{(t_\nu)}$$

correspondant aux valeurs croissantes

(32) $$0 = t_1\ ,\ t_2\ ,\ \ldots..,\ t_\nu = 1$$

du paramètre $t$ et tels que l'arc de cette courbe compris entre deux points consécutifs de la suite (31) ait une longueur plus petite que $\varepsilon$. On a donc

(33) $$|z_j^{(t)} - z_j^{(t_\alpha)}| < \varepsilon \quad , j = 1,\ldots,p;\ t \to <t_\alpha, t_{\alpha+1}>$$

pour chaque valeur de l'indice

$$\alpha = 1, 2, \ldots, \nu - 1.$$

Considérons la suite de $\nu - 1$ systèmes des fonctions

(34) $$F_i^{(\alpha)}(z_1 \dots z_p) \quad , i = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, \nu - 1$$

et la suite de $\nu - 1$ voisinages

(35) $$|z_j - z_j^{(\alpha)}| < \varepsilon \quad , j = 1, \dots, p; \alpha = 1, \dots, \nu - 1$$

ayant leurs centres aux points (31), en excluant le dernier. Le nombre $\varepsilon$ étant plus petit que $\delta_t$, pour chaque $t \to < 0,1 >$, les fonctions du système (34) d'indice $\alpha$ sont holomorphes dans le voisinage (35) du même indice.

D'autre part, deux voisinages succesifs (35) d'indice $\alpha$ et $\alpha + 1$ ont, d'après (33), une partie commune à laquelle appartient entièrement la partie

$$z_j = z_j^{(t)} \quad , j = 1, \dots, p; t \to < t_\alpha, t_{\alpha+1} >$$

de la courbe (17). Il en résulte, d'après le lemme II, que les deux systèmes

(36) $$F_i^{(\alpha)}, F_i^{(\alpha+1)} \quad , i = 1, \dots, n$$

ont les mêmes valeurs dans la partie commune des voisinages

(37) $$|z_j - z_i^{(\alpha)}| < \varepsilon, |z_j - z_j^{(\alpha+1)}| < \varepsilon \quad , j = 1, \dots, p.$$

Cela posé, considérons une suite de $\nu$ points

(38) $$z_j^{(1)}, z_j^{(2)}, \dots\dots, z_j^{(\nu)} \quad , j = 1, \dots, p$$

dont le premier et le dernier sont identiques au premier et le dernier point de la suite (31), tandis que les points

(39) $$z_j^{\,\alpha+1)} \quad , j = 1, \dots, p; \alpha = 1, \dots, \nu - 2$$

appartiennent successivement à la partie commune de deux voisinages tels que (37). Les points successifs

$$z_j^{(\alpha)} \text{ et } z_j^{(\alpha+1)} \quad , j = 1, \dots, p$$

de la suite (38) appartiennent tous les deux au voisinage (35) d'indice $\alpha$. Joignons-les par une courbe régulière

(40) $$z_j = v_j(t) \quad , j = 1, \dots, p; t \to < t_\alpha, t_{\alpha+1} >$$

qui passe par ce voisinage, les nombres $t_\alpha$ et $t_{\alpha+1}$ appartenant à la suite (32). Cette dernière courbe et les points (39) seront fixés prochainement d'une façon plus précise.

A la courbe (40) correspond, d'après le système

$$x_i = F_i^{(\iota_\alpha)}(z_1 \ldots z_\nu) \qquad , i = 1, \ldots, n$$

une certaine courbe régulière

(41) $$x_i = u_i^{(\alpha)}(t) \quad , i = 1, \ldots n \,;\, t \to < t_\alpha, t_{\alpha+1} >$$

définie dans la même partie $< t_\alpha, t_{\alpha+1} >$ de l'intervalle $< 0, 1 >$.

Observons que, si l'on pose $\alpha = 1, \ldots, \nu - 1$, les $\nu - 1$ courbes (40) forment une seule courbe régulière

(42) $$z_j = v_j(t) \quad , j = 1, \ldots, p \,;\, t \to < 0, 1 >$$

définie dans l'intervalle $< 0, 1 >$ et joignant le premier point de la suite (31) avec le dernier. De même, les $\nu - 1$ courbes (41) correspondant successivement à la suite $\alpha = 1, \ldots, \nu - 1$, forment une seule courbe régulière

(43) $$x_i = u_i(t) \quad , i = 1, \ldots, n \,;\, t \to < 0, 1 >$$

où l'on a posé pour chaque $\alpha = 1, \ldots, \nu - 1$

$$u_i(t) = u_i^{(\alpha)}(t) \quad , i = 1, \ldots, n \,;\, t \to < t_\alpha, t_{\alpha+1} >.$$

Cela résulte de ce fait que l'extrémité d'une de ces courbes est identique à l'origine de la courbe d'indice plus grand d'unité, parce que les deux systèmes de fonctions (36) ont les mêmes valeurs dans la partie commune de deux voisinages (37), pour chaque $\alpha = 1, \ldots, \nu - 1$.

Fixons les points (39) et les courbes (40) comme il suit: On sait que

$$\begin{aligned} z_j &= y_j & j &= 1, \ldots, n \\ z_j &= x_j & j &= n+1, \ldots, p \end{aligned}$$

donc, si on ne considère que les $n$ premières des coordonnées $z_j$, la suite (35) représente $\nu - 1$ voisinages dans le domaine $(Y)$

(44) $$| y_i - y_i^{(\iota_\alpha)} | < \varepsilon \quad , i = 1, \ldots, n ; \alpha = 1, \ldots, \nu - 1.$$

Supposons que les $n$ coordonnés premières

(45) $$y_i^{(\alpha+1)} \qquad , i = 1, \ldots, n \,;\, \alpha = 1, \ldots, \nu - 2$$

des points (39) et les $n$ fonctions $v_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, définissant les courbes (40) soient telles que les points (45) ne fassent pas partie de l'ensemble $(\eta)$ et telles que la courbe

$$y_j = v_j(t) \qquad , j = 1, \ldots, n; t \to < 0,1 >,$$

ne passe pas par des points de l'ensemble $(\eta)$. Il est possible de satisfaire à ces conditions, l'ensemble $(\eta)$ étant évitable dans des domaines (44). Posons en outre

$$\begin{array}{ll} z_j^{(\alpha+1)} = x_j^{(\iota\alpha+1)} & , j = n+1, \ldots p; \alpha = 1, \ldots, v-1 \\ v_j(t) = x_j^{(\iota)} & , j = n+1, \ldots, p; t \to < 0,1 >. \end{array}$$

La courbe (42) peut donc être écrite, d'après (11), comme il suit:

$$\left. \begin{array}{ll} y_i = v_i(t) & i = 1, \ldots, n \\ x_k = \varphi_k(t) & k = n+1, \ldots, p \end{array} \right\} t \to < 0,1 >.$$

Je dis que la courbe

$$\left. \begin{array}{ll} x_i = u_i(t) & i = 1, \ldots, n \\ x_k = \varphi_k(t) & k = n+1, \ldots, p \end{array} \right\} t \to < 0,1 > \tag{46}$$

passant par le domaine $(X)$ satisfait aux conditions demandées, c'est-à-dire qu'elle joint les points (7), passe par le domaine ouvert $(X_0)$ et ne passe par aucun point de l'ensemble $(\xi)$.

La première de ces conditions est satisfaite, parce que la courbe (43) joint les points

$$a_i \quad \text{et} \quad a_i' \qquad , i = 1, \ldots, n$$

et parce que l'on a

$$\varphi_k(0) = a_k, \quad \varphi_k(1) = a_k' \qquad , k = n+1, \ldots, p$$

d'àprés la définition des fonctions $\varphi_k(t)$. La deuxième est satisfaite, parce que les fonctions $F_i^{(\iota)}$ vérifient, d'après le lemme III, les $n$ premières inégalités (9) On a donc d'une part

$$| u_i(t) - x_i^{(\iota)} | < \varrho \quad , i = 1, \ldots, n; t \to < 0,1 >$$

et d'autre

$$| \varphi_k(t) - x_k^{(\iota)} | < \varrho \quad , k = n+1, \ldots, p; t \to < 0,1 >$$

en vertu de (11). La troisième condition est de même satisfaite parce que le système

$$y_i = f_i(x_1 \ldots x_p) \qquad , i = 1 \ldots, n$$

fait correspondre à la courbe (46) du domaine $(X)$ la courbe

$$y_i = v_i(t) \qquad i = 1, \ldots, n; t \to < 0, 1 >$$

du domaine $(Y)$ qui ne passe par aucun point de l'ensemble $(\eta)$.

La démonstration du théorème est donc achevée dans le cas particulier où le domaine $(X_0)$ qui contient les deux points (7) est ouvert à condition qu'il existe un jacobien $\Delta(x)$ qui ne s'annule pas aux points (7).

Considérons le cas général et désignons par $(X_0')$ le domaine ouvert qui contient tous les points intérieurs du domaine $(X_0)$ et ces points seulement. Distinguons deux cas:

1° Les deux points (7) appartiennent à $(X_0')$. Quand ils n'annulent pas le jacobien $\Delta(x)$, on est conduit au cas considéré plus haut.

Supposons que l'on ait

$$\Delta(a) = 0.$$

Il existe un voisinage du point $(a)$

(47) $$|x_j - a_j| < \delta \qquad , j = 1, \ldots, p$$

dont chaque point appartient à $(X_0')$ et dont aucun ne fait partie de l'ensemble $(\xi)$. Soit

$$\alpha_j \qquad , j = 1, \ldots, p$$

un point de ce voisinage qui n'annule pas $\Delta(x)$; de tels points existent parce que l'on suppose que le jacobien $\Delta(x)$ ne s'annule pas identiquement. Les deux points $(a)$ et $(\alpha)$ peuvent être réunis par un segment qui ne contient aucun point de l'ensemble $(\xi)$ et on est conduit au cas considéré.

2° Supposons qu' au moins un des points (7) n'appartienne pas à $(X_0')$.

Soit $(a)$ un tel point. Joignons-le avec un point quelconque de $(X_0')$ par une courbe régulière dont chaque point différent de $(a)$ appartient à $(X_0')$, ce qui est toujours possible d'après la définition des domaines semi-ouverts. Un arc de cette courbe suffisamment voisin du point $(a)$ ne contient aucun point de l'ensemble $(\xi)$. Soit $(\alpha)$ un point quelconque de cet arc. Il appartient au domaine $(X_0')$, on est donc conduit au cas précédent, parce que les points $(a)$ et $(\alpha)$ peuvent être réunis par une courbe passant par $(X_0)$ qui ne renferme pas de points de l'ensemble $(\xi)$. Le théorème est donc démontré.

Observons que, dans la démonstration précédente, on n'a pas fait un usage immédiat de ce fait que les fonctions $f_i(x)$ sont analytiques. Le dernier théorème est donc valable pour une classe de fonctions beaucoup plus étendue que celle des fonctions analytiques.

Soit

$$g_i(x_1 \ldots x_p) \qquad , i = 1, \ldots, n \tag{48}$$

$n$ fonctions réelles de $p$ variables réelles définies dans un domaine $(X)$ d'un espace arithmétique à $p$ dimensions. Supposons que le domaine $(X)$ soit ouvert ou semi ouvert et que les fonctions $g_i(x)$ satisfassent aux conditions suivantes :

1° Elles ont toutes des dérivées premières continues dans le domaine $(X)$.

2° Il existe un jacobien $\Delta(x)$ d'ordre $n$ contenu dans la matrice

$$\frac{\partial(g_1 \ldots g_n)}{\partial(x_1 \ldots x_p)}$$

qui n'est pas identiquement nul et tel que ses zéros forment un ensemble évitable dans le domaine $(X)$.

3° Deux points quelconques qui annulent $\Delta(x)$ peuvent être réunis par une courbe régulière passant par $(X)$ dont aucun point autre que ses extrémités n'est zéro pour $\Delta(x)$.

En changeant très peu les démonstrations précédentes on pourrait montrer que les fonctions (48) jouissent elles-mêmes des propriétés énoncées dans les deux théorèmes ci-dessus.

# Connexione inter operationes arithmetica et logica [1].

Per

Edward Stamm.

Nos vol in presente dissertatione demonstra, in que modo pote esse operationes de *algebra de logica reducta in dominio de numeros ad* operationes *arithmetica.* Pro id es necessaria demonstratione de possibilitate *applica operationes logica ad numeros.*

Pro intellige ce tractatu suffice notitia de elementare algebra de logica [2].

*Significatione:*

$a \cup b$ summa logica de $a$ et $b$, $a \cap b$ producto logico de $a$ et $b$ (etiam significato per $ab$),

---

[1]) Ce dissertatione es scripta in lingua internationale „*interlingua*" inventa per mathematico G. Peano. Interlingua es „latino sine flexione". Illa es *intelligibile ad primo visu*, quia adopta omne vocabulo internationale et omne vocabulo latino-anglo. Omne vocabulo internationale, que existe in latino habe forma de thema latino. Formas irregulare es mutata in regulare. Omne elemento grammaticale non necessario es suppresso — Plurale habe suffixo -s in casu, quando es necessario. Casu resulta ex positione aut per prepositiones de, ad, ab etc. Si tempore non pote esse intellecto ex textu, es expresso: preterito per — ba, futuro per i aut vol (me vol scribe, me i scribe). Modo conjunctivo es significato per si, que, ut, participio presente per -nte, participio passivo per -to. Pronomines es latino; thema de hic, haec, hoc: „ce" — isto. — In casu dubio de significatione suffice vocabulario latino. Cf. etiam „Vocabulario commune" de G. Peano, Torino 1915.

[2]) Cf. p. e. A N. Whitehead, A treatise on universal algebra, I, 1898. L. Couturat, L'algèbre de la logique, 1915. — E. Stamm, Zasady algebry logiki, 1913 (in lingua polonica).

$Z$ zero logico (modulo de additione logica), $T$ totalitate (modulo de multiplicatione logica),

$a'$ negatione de $a$,

$a \between b$ declinatione de $a$ et $b$, id es $ab' \cup a'b$, $a\,)(\,b$ negatione de declinatione de $a$ et $b$, id es $ab \cup a'b'$,

$a \subset b$ subsumtione „$a$ sub $b$“.

Nos obtine operatione $a \circ b = c$ inter duo numero $a$, $b$, si nos combina in modo definito omne cifra de $a$ cum correspondente cifras de $b$. Nos vol stude sequente operationes: 1) $a$ et $b$ es numero scripto in systema dyadico, 2) nos combina omne cifra de $a$ cum cifra de $b$, que sta in idem loco, 3) resultatu de combinatione de correspondente cifras nihil vale pro resultatu de combinatione de alia cifras, 4) operationes, que nos stude debe esse symmetrica [1]. In ista conditiones es possibile sequente 3 combinatione:

$$0 - 0, \quad 0 - 1 \text{ sive } 1 - 0, \quad 1 - 1.$$

Resultatu de combinatione pote esse solum 0 aut 1. Nos obtine quare tabula de operationes:

| Nr de combinatione | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Operatione 1 et 8, in que omne resultatu es equale 0 aut 1 pote esse neglecta. In operatione 2 da $0 - 0$ cifra 0, $0 - 1$ $(1 - 0)$ cifra 0 et $1 - 1$ cifra 1. P. e.

$$101 \cdot 1001 \circ 1011 \cdot 0011 = 1 \cdot 0001.$$

Ista operatione da quare elementos commune, es ergo identica cum *multiplicatione logica*. — In operatione [illegible] corresponde ad $0 - 0$ cifra 0,

[1]) Demonstratione referente ad applicatione de operationes logica ad numeros es excepta ex meo tractatu de algebra de logica, que i esse publicato in proximo tempore in interlingua.

ad 0—1 (1—0) cifra 1, ad 1—1 cifra 0; operatione da ad nos elementos differente, es ergo identica cum *declinatione.* In operatione 4 nos scribe in resultatu cifras, que non existe in ambo correspondente loco. Operatione es identica cum *negatione de additione logica.* Simili nos pote verifica, quod operatione 5 es identica cum *additione logica.* 6 cum *negatione de declinatione* et 7 cum *negatione de multiplicatione logica.*

*Nos pote* ergo *exprime omne nostro algorithmo in acceptata conditiones per operationes logica.* Isto facto es identico cum possibilitate de applica operationes logica ad numeros scripto in systema dyadico, ergo ad numeros in generale [1]).

Dominio logico es in ce casu formato per *zero logico*

$$Z = 0, \tag{1}$$

*totalitate*

$$T = \sum_{i=0}^{p} 2^i + \sum_{k=1}^{q} 2^{-k}, \tag{1 a}$$

ubi $p$ et $q$ es constante et finito, aut $q$ constante et finito et $p$ infinito, et omne *numero positivo*

$$l = \sum_{i=0}^{m} \mu_i 2^i + \sum_{k=1}^{n} \nu_k 2^{-k}, \tag{1 b}$$

ubi $\mu_i$ et $\nu_k$ habe valore 0 aut 1, $n$ es finito et $m$ finito aut fi infinito. Tamen debe esse $n \leqq q$, $m \leqq p$ in (1 a). $n$ (et $q$) non pote esse infinito, quia nos habe in isto casu

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1,$$

---

[1]) Ce numeros debe esse semper pro calculatione scripto in systema dyadico. Si nos vol applica operationes logica directum ad numeros scripto in alio systema, tunc nos debe modifica uno de axiomas, id es ce, que defini negatione, sive in logica symbolica exprime principio de excluso medio et non — contradictione. In ce modo nos obtine una serie de algebras $L_i$, ex que $L_i$ es applicabile ad numeros scripto in systema $i+1$. $L_1$ es identica cum algebra de logica, $L_2$ permitte applicatione ad logica symbolica cum 3 valore logico „falsum". „verum" „probabile". Auctore spera pote in breve tempore publica algebra $L_2$.

et quare non univoco producto logico

$$1 \frown 1 = 1$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\right) \frown 1 = 0.$$

*Negatione l′* habe forma

$$l' = \sum_{\iota=1}^{m} \mu_{\iota c} 2^{\iota} + \sum_{k=1}^{n} \nu_{kc} 2^{-k}, \tag{1 c}$$

ubi $\mu_{\iota c}$ et $\nu_{kc}$ habe valore 0 si $\mu_\iota$ et $\nu_k$ in (1 b) habe valore 1, et valore 1, si $\mu_\iota$ et $\nu_k$ in (1 b) habe valore 0.

*Summa logica* $a \smile b$ de

$$\left|\begin{aligned} a &= \sum_{\iota=0}^{m} \mu_{\iota 1} 2^{\iota} + \sum_{k=1}^{n} \nu_{k1} 2^{-k} \\ b &= \sum_{\iota=0}^{r} \mu_{\iota 2} 2^{\iota} + \sum_{k=0}^{s} \nu_{k2} 2^{-k} \end{aligned}\right. \tag{1 d}$$

ubi $r$ habe proprietates de $m$ et $s$ de $n$ es definita per

$$a \smile b = \sum_{\iota=0}^{t} \mu_{\iota 3} 2^{\iota} + \sum_{k=0}^{u} \nu_{k3} 2^{-k}, \tag{1 e}$$

ubi $\mu_{\iota 3}$ es equale ad 0 si $\mu_{\iota 1}$ et $\mu_{\iota 2}$ es equale ad 0, et equale 1 si $\mu_{\iota 1}$ aut $\mu_{\iota 2}$ aut ambo es equale 1. Idem pertine ad $\nu_{k3}$.

*Producto logico* $a \frown b$ habe valore (1 e), ubi $\mu_{\iota 3}$ es equale 0, si $\mu_{\iota 1}$ et $\mu_{\iota 2}$ es equale 0, aut si uno de $\mu_{\iota 1}$, $\mu_{\iota 2}$ es equale 0 et altero 1; $\mu_{\iota 3}$ habe tamen valore 1, si $\mu_{\iota 1}$ et $\mu_{\iota 2}$ habe valore 1. Idem pertine ad $\nu_{k3}$.

Possibilitate de applica operationes logica ad numeros (1 b) seque etiam ex conditiones de dominio logico, que habe designato H u n t i n g t o n[1]).

Per id, quod nos habe facto numeros (1 b) pro objectos logico habe nos etiam acceptato novo axiomas, pertinente ad fundamentale proprietates de numeros (1 b). Ante alio nos habe posito *in ordine* objectos de nostro dominio, id es in ordine *lineare*.

---

[1]) Sets of indep. postulates, Trans. Amer. Math. Soc., V. 1904. p. 308 s.

Nos nomina *coefficiente declinare* symbolo

$$\Phi_1(n\,,\,k) \tag{4}$$

et valore de ce symbolo, ubi $n$ et $k$ es numeros naturale et valore es significato per equationes

$$\Phi_1(n+1\,,k) = \Phi_1(n,k) \between \Phi_1(n\,,k-1) \tag{4a}$$

$$\Phi_1(n\,,0) = T, \quad \Phi_1(n\,.\,n) = T. \tag{4b}$$

Coefficiente declinare es objecto logico. Valores de illo pote esse facile calculato per *triangulo analogo ad ce de Pascal*:

$$\begin{array}{llllllllll}
T \\
T & T \\
T & 0 & T \\
T & T & T & T \\
T & 0 & 0 & 0 & T \\
T & T & 0 & 0 & T & T \\
T & 0 & T & 0 & T & 0 & T \\
T & T & T & T & T & T & T & T \\
T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T \\
T & T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T & T \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array} \tag{5}$$

Secundum (4a) et (4b) et proprietate de operatione $\between$ pote nos facile demonstra sequente relationes:

$$\Phi_1(n,k) = \Phi_1(n\,.\,n-k) \tag{6}$$

$$\Phi_1(n+1\,,k) = \Phi_1(n+1\,,k+1) \between \Phi_1(n+2,k+1) \tag{6a}$$

$$\Phi_1(n+1\,,k) = \Phi_1(n+1\,,k-1) \between \Phi_1(n+2,k), \tag{6b}$$

et pro $n < k$

$$\Phi_1(n\,,k) = 0\,. \tag{6c}$$

Nos verifica facile, quod coefficiente declinare accipe solum valores $T$ et 0. In ce ratione nos demonstra propositione:

*Coefficiente declinare*

$$\Phi_1(n\,,k) \tag{7}$$

*es tunc et solum tunc equale T, si es*

(7a) $$k \subset n.$$ [1])

Propositione vale pro $n = 2$. Nos pone, quod propositione es vera pro $n = n$ et i significa valore de $\Phi_1(n+1, k+1)$.

Secundum (4a) es

$$\Phi_1(n+1, k+1) = \Phi_1(n, k) \between \Phi_1(n, k+1),$$

et nos pote discerne 4 casu:

(7b)

$\Phi_1(n, k) = T,\ \Phi_1(n, k+1) = T$ ; $\Phi_1(n, k) = T,\ \Phi_1(n, k+1) = 0$;
$\Phi_1(n, k) = 0,\ \Phi_1(n, k+1) = T$ ; $\Phi_1(n, k) = 0,\ \Phi_1(n, k+1) = 0$.

In primo casu es, ut nos habe posito

$$k \subset n, \quad k+1 \subset n.$$

Ex ce relatione seque, quod $n$ non pote in nostro primo casu esse pari, quia uno de numero $k, k+1$ es dispari et numero dispari non pote esse sub numero pari. Ergo es $n$ dispari.

Si nos nunc pone, quod $k$ es pari, tunc non pote esse

($\alpha$) $$k+1 \subset n+1,$$

quia $k+1$ es dispari et $n+1$ pari. Si nos pone $k$ dispari, tunc etiam in ce casu non pote vale ($\alpha$). Nam si in $k$ es primum coefficiente de potentia $2^i$ in explicatione (1b) equale 0 et omne coefficientes de $2^k$ pro $k < i$ equale 1, tunc idem vale etiam pro $n$, quia nos habe posito $k \subset n$. Nos habe tamen etiam $k+1 \subset n$. Si nos adde ad $k$ numero 1, tunc fi coefficiente de $2^i$ in $k$ equale 1, et quare es secundum $k+1 \subset n$ et coefficiente de $2^i$ in $n$ equale 1. Nunc si nos adde ad $n$ numero 1 fi coefficiente de $2^i$ in $n$ equale 0, que demonstra impossibilitate de subsumtione ($\alpha$). In secundo casu (7b) si es $n$ pari et $k$ pari et nos habe secundum (7b)

($\beta$) $$k \subset n, k+1 \text{ non } \subset n,$$

es etiam $k+1 \subset n+1$. Combinatione $n$ pari, $k$ dispari, es ob $k \subset n$ impossibile. Impossibile es etiam combinatione $n$ dispari,

---

[1]) Es manifestum, quod es $k \subset n$, si omne potentia de 2, que compone $k$ es inter potentias de 2, que compone $n$, et solum in ce casu.

$k$ pari, quia tunc i esse secundum $k \subset n$ etiam $k+1 \subset n$ contra $(\beta)$. Si es $n$ dispari et $k$ dispari et in $k$ coefficiente de $2^i$ equale 0 et omne coefficiente de $2^k$ pro $k < i$ equale 1, tunc idem vale et pro $n$. quia in casu contrario seque ex $k \subset n$ et $k+1 \subset n$ contra $(\beta)$. Ce posito nos deriva ex $k \subset n$ subsumtione $k+1 \subset n+1$. — In tertio casu nos habe

$$(\gamma) \qquad k \text{ non } \subset n, k+1 \subset n.$$

In ce casu non pote esse $n$ pari et $k$ pari, quia tunc es $k+1$ dispari et $k+1 \subset n$. Nunc es $n$ pari, ex que nos deriva $k \subset n$ contra $(\gamma)$. Si $n$ es pari et $k$ dispari tunc seque ex $k+1 \subset n$ etiam

$$(\delta) \qquad k+1 \subset n+1.$$

Post non pote esse $n$ dispari, $k$ pari, quia in ce casu nos conclude ex $k+1 \subset n$ etiam $k \subset n$ contra $(\gamma)$. Si es $n$ dispari et $k$ dispari, tunc nos deriva ex prima equatione $(\gamma)$, quod in $k$ existe potentias de 2, que non es in $n$. Quia $2^1$ es in $k$ et in $n$ existe ce potentias secundum $k+1 \subset n$ inter $2^1$ et $2^k$. ubi coefficiente de $2^k$ es equale 0 et omne coefficiente de $2^l$ pro $l < k$ es equale 1 ($k$ es non identico cum $k$ in $(\delta)$). Ce potentias evanesce per additione de 1 ad $k$, ut seque ex secunda equatione $(\gamma)$. Quare si nos adde 1 ad $n$, tunc es mutata solum potentias de 2 in supra citato locos et nos habe $(\delta)$. — In quarto casu es

$$(\varepsilon) \qquad k \text{ non } \subset n, k+1 \text{ non } \subset n.$$

Si es $n$ pari et $k$ pari, tunc non pote esse $(\delta)$, quia ex $(\delta)$ nos deriva in ce casu $k \subset n$ contra $(\varepsilon)$. Si $n$ es pari et $k$ dispari et si nos pone $(\delta)$, tunc seque ex $(\delta)$ $k+1 \subset n$ contra $(\varepsilon)$. Post non pote esse $n$ dispari et $k$ pari, si debe vale $(\delta)$, quia tunc es $k+1$ dispari et $n+1$ pari, et numero dispari non pote esse sub numero pari. Si es $n$ dispari et $k$ dispari, tunc es $n+1$ et $k+1$ pari. Si nos in ce casu pone $(\delta)$, tunc nos conclude ex ce relatione, quod es aut 1) in $k+1$ et $n+1$ coefficientes de potentias $2^i$ pro $i = 1, 2, \ldots, l$ equale 0, aut 2) in $n+1$ coefficientes de $2^i$ pro $i = 1, 2, \ldots, l$ equale 0 et in $k+1$ pro $i = 1, 2, \ldots, l+m$. In primo casu per subtractione de 1 ab $k+1$ coefficientes de $2^i$ pro $i = 1, 2, \ldots, l-1$ equale 1 et coefficiente de $2^l$ equale 1; idem vale pro $n+1$, et nos pote deriva ex $(\delta)$ etiam $k \subset n$ contra $(\varepsilon)$.

In secundo casu fi per subtractione de 1 ab $n+1$ coefficiente de $2^l$ equale 0 et de $2^i$ pro $i=1, 2, \ldots, l-1$ equale 1. Tunc seque ex ($\delta$) etiam $k+1 \subset n$ contra ($\varepsilon$). In ce modo nos habe demonstrato propositione (7), (7 a) pro $n+1$ ergo in generale.

Ce propositione permitte generaliza notione de coefficiente declinare pro omne numeros positivo de typo (1 b). Nos defini:

*Coefficiente declinare*

$$(8) \qquad \Phi_1(n, k)$$

*es equale* $T$ *si vale*

$$(8\,\mathrm{a}) \qquad k \subset n,$$

*et equale* 0, *si ce relatione non vale.* Numeros $n$ et $k$ habe forma (1 b)

Functione $\Phi_1$ es ergo matrice de relatione $\subset$ in dominio de numeros (1 b).

Coefficiente declinare posside pro certa theorias in algebra de logica analogo valore, quam coefficiente binomiale in arithmetica commune [1]).

Nunc nos vol defini in *arithmetica* notione de *coefficiente logico*, que es pro nostro studio maxim valente.

Nos nomina *coefficiente logico* symbolo

$$(9) \qquad \varphi_1(n, k)$$

et valore de ce symbolo, ubi $n$ et $k$ es numeros naturale et valore es significato per equationes

$$(9\,\mathrm{a}) \qquad \varphi_1(n+1, k) = [\varphi_1(n, k) - \varphi_1(n, k-1]^2$$

$$(9\,\mathrm{b}) \qquad \varphi_1(n, 0) = 1, \quad \varphi_1(n, n) = 1.$$

Valores de coefficiente logico pote esse facile significato per triangulo analogo ad (5):

---

[1]) Auctore prepara editione de correspondente dissertatione.

$$
(10)\qquad
\begin{array}{cccccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

Ex comparatione de (9 a) et (9 b) cum (4 a) et (4 b) seque quod si $\Phi_1(n, k)$ es equale $T$, tunc es $\varphi_1(n, k)$ equale 1 et viceversa et si $\Phi_1(n, k)$ es equale 0. tunc es $\varphi_1(n, k)$ equale 0 et viceversa. Ex id nos conclude, quod *coefficiente logico es tunc et solum tunc equale* 1, *si es* $k \subset n$; *si ce relatione non vale, tunc es coefficiente logico equale* 0.

Quare pote notione de coefficiente logico esse generalizato in modo analogo, quam notione de coefficiente declinare etiam pro omne $n$ et $k$ de forma (1 b), tamen debe esse ex rationes arithmetica $m$ in (1 b) finito. *Coefficiente logico*

$$(11)\qquad \varphi_1(n, k)$$

*habe pro omne positivo et finito $n$ et $k$ de forma (1 b) valore 1, si es*

$$(11\,a)\qquad k \subset n,$$

*et si ce subsumtione non vale valore* 0.

Per coefficiente logico pote nos in dominio de numeros (1 b), si $m$ es finito *reduce operationes logica* in sequento modo *ad operationes arithmetica*:

$$(12)\qquad a \frown b = \sum_{i=-n}^{m} \varphi_1(a, 2^i)\, \varphi_1(b, 2^i)\, 2^i$$

(13)

$$a \between\ = \sum_{i=-n} \varphi_1(a, 2^i)\,[1 - \varphi_1(b, 2^i)]\,2^i + \sum_{k=-n}^{m} \varphi_1(b, 2^k)\,[1 - \varphi_1(a, 2^k)]\,2^k,$$

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} a \cup b = &\sum_{i=-n}^{m} \varphi_1(a, 2^i)\,\varphi_1(b, 2^i)\,2^i + \sum_{k=-n}^{m} \varphi_1(a, 2^k)\,[1 - \varphi_1(b, 2^k)]\,2^k + \\ &+ \sum_{i=-n}^{m} \varphi_1(b, 2^i)\,[1 - \varphi_1(a, 2^i)]\,2^i, \end{aligned}\right.$$

$$(15)\qquad a' = \sum_{i=-n}^{m} [1 - \varphi_1(a, 2^i)]\,2^i.$$

Nam

$$(16)\qquad \varphi_1(u, a)\, a$$

es equale $a$ si omne potentias de 2 in explicatione dyadica de $a$ es inter potentias de 2 in explicatione dyadica de $u$, id es si nos habe

$$a \subset u.$$

In casu contrario es (16) equale 0. Post es

$$(17)\qquad \varphi_1(u, a)\,\varphi_1(v, a)\, a$$

equale $a$ si es

$$(\alpha)\qquad a \subset u, \quad a \subset v,$$

et equale 0, sin non vale $(\alpha)$. Id demonstra relatione (12).

Expressione

$$(18)\qquad [1 - \varphi_1(u, a)]\, a$$

es equale $a$, si es $a$ non $\subset u$ et equale 0, si es $a \subset u$. Id demonstra relatione (15).

Expressione

$$(19)\qquad \varphi_1(u, a)\,[1 - \varphi_1(v, a)]\, a$$

es equale $a$ si es $a \subset u$ et $a$ non $\subset v$, et equale 0 in casu contrario. Id demonstra relatione (13) et (14).

Ex id nos conclude, quod *summa logica* pote esse scripta etiam

$$(19\text{a})\qquad a \cup b = \sum_{i=-n}^{m} [\varphi_1(a, 2^i) + \varphi_1(b, 2^i) - \varphi_1(a, 2^i)\,\varphi_1(b, 2^i)]\,2^i.$$

Pro $b = 2^m$ reduce se equationes (12)—(14) in

(20) $$a \frown 2^m = \varphi_1 (a, 2^m)\, 2^m,$$

(20 a) $$a \between 2^m = \sum_i \varphi_1 (a, 2^i)\, [1 - \varphi_1 (2^m, 2^i)]\, 2^i + [1 - \varphi_1 (a, 2^m)]\, 2^m,$$

(20 b) $$a \smile b = a + [1 - \varphi_1 (a, 2^m)]\, 2^m.$$

Ce relationes pote esse expressa etiam in forma:

(20 c) $$a \frown 2^m = \begin{cases} 2^m \\ 0 \end{cases}$$

(20 d) $$a \between 2^m = a \mp 2^m$$

(20 e) $$a \smile 2^m = a + \begin{cases} 0 \\ 2^m \end{cases}$$

ubi valores superiore $(2^m, a - 2^m\ a + 0)$ vale, si vale subsumtione

(20 f) $$2^m \subset u,$$

et valores inferiore in casu contrario.

Equatione (20 a) es equivalente cum equatione

(21) $$a \between 2^m = a + (-1)^{\varphi_1 (a, 2^m)}\, 2^m,$$

quia $(-1)^{\varphi_1 (a, 2^m)}$ es equale $-1$ si es $2^m \subset a$ et equale $+1$ si es $2^m$ non $\subset a$.

Nos vol demonstra etiam duo simplice relationes inter additione, multiplicatione et declinatione logica ex uno parte et additione, subtractione et divisione arithmetica ex altera.

Pro forma summa logica de duo numero (1 b) nos scribe 1, si in correspondente locos de summandos es cifras 0 et 1, 1 et 0, 1 et 1. Nos obtine tamen summa arithmetica de duo numero (1 b), si nos scribe pro 0 et, 1 et 0 cifra 1, et pro 1 et 1 cifra 0 et adde correspondente potentia de 2 ad cifras in parte sinistro. Producto logico contine cifras 1 solum in locos, in que summandos habe cifras 1 et 1. Ergo si nos adde in modo arithmetico producto logico ad summa logica, tunc nos obtine summa arithmetica:

(22) $$a + b = (a \smile b) + (a \frown b).$$

Declinatione de duo numero contine cifras de uno et altero summando, que non es in ambo. Nos obtine ce cifras, si nos subtrahe ab summa logica, continente extra illa cifras et cifras commune, ista ultima, sive producto logico:

$$a \between b = (a \smile b) - (a \frown b). \tag{23}$$

Systema (22), (23) da post additione et divisione, et post subtractione et divisione supra citata relationes in forma:

$$\left\{\begin{aligned} a \smile b &= \frac{a+b}{2} + \frac{a \between b}{2} \\ a \frown b &= \frac{a+b}{2} - \frac{a \between b}{2}. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Relationes (12)—(15) demonstra, quod *si nos elige pro dominio logico dominio de numeros (1 b), tunc es algebra de logica un parte de arithmetica.* Omne operatione logica pote esse tunc expressa per operationes arithmetica additione, subtractione, multiplicatione et potentia.

Cracovia, Februario 1922.

# Remarque relative aux transformations linéaires, orthognales.

Par

A. Hoborski.

Le théorème suivant est bien connu: si les nombres $a_{ik} (i, k = 1, 2, 3)$ satisfont aux égalités:

(1)
$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik}^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

(2)
$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik} a_{jk} = 0 \qquad (i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3),$$

le déterminant:

(3)
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}$$

vérifie la relation:

(4)
$$\Delta^2 = 1 .$$

Mais on n'a peut-être pas encore remarqué l'existence du théorème que voici: lorsque les nombres $a_{ik} (i, k = 1, 2, 3)$ sont réels, les équations (1) et (4) entraînent les relations (2).

En effet, si l'on pose:

(5)
$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} a_{jk} \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

l'équation (4) peut s'écrire:

$$\begin{vmatrix} 1, & b_{12}, & b_{13} \\ b_{12}, & 1, & b_{23} \\ b_{13}, & b_{23}, & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

d'où

$$b_{12}^2 + b_{13}^2 + b_{23}^2 - 2b_{12}\, b_{13}\, b_{23} = 0$$

ou encore

$$(b_{13} - b_{12}\, b_{23})^2 + (1 - b_{12}^2)\, b_{23}^2 + b_{12}^2 = 0. \tag{6}$$

Or l'une des formules (5) et l'inégalité de Schwarz donnent

$$b_{12}^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{3} a_{1k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{3} a_{2k}^2\right),$$

donc, à cause de (1), on a

$$b_{12}^2 \leqq 1. \tag{7}$$

Les relations (6) et (7) donnent:

$$b_{12} = b_{23} = b_{13} = 0,$$

C. Q. F. D.

Cracovie le 1-er avril 1922.

# Sur les trois classifications des fonctions représentables analytiquement.

Par

S. Kempisty.

(Résumé d'un mémoire publié en langue polonaise dans le supplément au présent numéro des Annales de la Société mathématique polonaise).

A côté de la classification de Baire, je considère celles de Young et de Sierpiński. On les obtient en se limitant soit aux suites monotonnes (cl. de Young) soit aux séries absolument convergentes (cl. de Sierpiński). Les definitions exactes se trouvent dans ma Note „Sur les séries itérées de fonctions continues“ [1]).

Au sujet de toutes ces classes d'espèces différentes je demontre les trois nouveaux théorèmes suivants, en étendant les théorèmes de M. M. Sierpiński [2]), Hahn [3]) et Mazurkiewicz [4]) aux classes supérieures:

I. Pour qu' une fonction soit de la classe $\alpha$ de Sierpiński il faut et il suffit qu' elle soit une différence de deux fonctions de classe $\leqslant \alpha$ de Young et du même type.

II. Soit $g(x)$ et $h(x)$ deux fonctions de la classe $\alpha+1$ de Young la première étant du type $l$, la seconde du type $u$. Si

$$g(x) > h(x),$$

[1]) S. Kempisty: Fund. Math. II (1920) p. 64.

[2]) W. Sierpiński: Sur les fonctions développables... F. M. II (1920) p. 18.

[3]) H. Hahn: Über halbstetige u. unstetige Funktionen Bericht. Akad. 126 (1912) p. 103.

[4]) S. Markiewicz: Sur les fonctions de la classe 1... F. M. II (1920) p. 32.

il existe une fonction $f(x)$ qui est la différence de deux fonctions de la classe $\leqq \alpha$ de Young du même type et remplit la condition

$$g(x) \geqslant f(x) \geqslant h(x).$$

III. Si $F(x)$ est une fonction de la classe $\alpha$ de Baire et $\varepsilon$ un nombre positif, il existe une fonction $f(x)$ qui est la différence de deux fonctions de la classe $\leqslant \alpha$ de Young du même type et qui est égale à $F(x)$ à moins de $\varepsilon$ près.

Comme conséquence immédiate j'obtiens le théorème.

IV. Pour qu' une fonction soit de la classe $\alpha$ de Baire il faut et il suffit qu'elle soit développable en une série uniformément convergente de fonctions de la classe $\alpha$ de Sierpiński.

De plus je donne une nouvelle démonstration d'uu théorème de M. Young, étendu par Hahn[1]) aux classes d'ordre transfini.

V. Toute fonction de la classe $\alpha$ de Young des deux types appartient à la classe $\leqslant \alpha$ de Baire.

C'est la réciproque d'un autre théorème de M. Young que j'ai genéralisé dans la note citée et qui n'était demontré qu'au moyen des ensembles de Borel par M. M. Young[2]) et Hahn[3]).

Wilno, janvier 1922.

---

[1]) H. Hahn: Théorie d. reellen Functionen (1921) p. 346.

[2]) W. H. Young: On functions and their associated sets of points. Proc. Lond. Math. Soc. 12 (1913) p. 260.

[3]) H. Hahn loc. cit. p. 347 (généralisation de la démonstration de Young aux classes transfinies).

# Sur les surfaces singulières des fonctions analytiques de deux variables complexes.

Par

F. Leja.

(Une nouvelle démonstration d'un théorème de M. F. Hartogs).

§ 1. Il y a une différence essentielle entre les fonctions analytiques d'une variable et celles de plusieurs variables au point de vue de leurs singularités. Etant donné un domaine quelconque connexe du plan, il existe une fonction analytique uniforme d'une variable, régulière aux points intérieurs de ce domaine et ne pouvant pas être prolongée analytiquement au delà de sa frontière.

Au contraire, pour qu'un domaine connexe de l'espace à $2n$ dimensions puisse être le domaine d'existence d'une fonction analytique de $n \geqq 2$ variables complexes, sans que la fonction puisse être prolongée analytiquement au delà de la frontière du domaine considéré, il faut que ce domaine soit d'une nature très particulière.

Des résultats remarquables sur ce sujet ont été publiés par M. H. Kistler[1]), F. Hartogs[2]) et E. Levi[3]). Je m'occupe ici d'une question, traitée par M. F. Hartogs.

Envisageons le problème suivant: Soit $G(xyx'y')$ et $H(xyx'y')$ deux fonctions réelles de 4 variables réelles qui jouissent des propriétées suivantes:

1° Elles sont définies dans un domaine ayant le point $0\,(x_0\,y_0\,x_0'\,y_0')$ à son intérieur et s'anullent en ce point.

---

[1]) H. Kistler: *Über Funktionen von mehr. kompl. Veränderlichen.* Dissertation. Basel 1905.

[2]) F. Hartogs: *Einige Folgerungen aus der Cauchy-schen Integralformel.* Münchener Ber. t. 36 (1906). — *Über die aus sing. Stellen einer anal. F. mehr. Veränd. bestehenden Gebilde.* Acta mat. t. 32 (1909).

[3]) E Levi: *Studii sui punti sing. essenz. delle f. anal. di due variabili complesse.* Annali di mat (3) t. 17 (1910) et t. 18 (1911).

2° Elles ont des dérivées partielles continues du second ordre dans ce domaine.

3° La matrice

$$\frac{\partial (G.\ H)}{\partial (x y\ x' y')}$$

est de rang 2 au point 0.

Les équations

$$G(xy\,x'y') = 0, \quad H(xy\,x'y') = 0 \tag{1}$$

représentent une surface à deux dimensions passant par le point 0 de l'espace à 4 dimensions. Une telle surface sera dite *singulière isolée* pour une fonction analytique uniforme $f(zz')$ de deux variables complexes $z$ et $z'$, où l'on a

$$z = x + iy, \quad z' = x' + iy',$$

lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites:

$\alpha$) Étant donné un point quelconque de la surface (1) il existe un voisinage de ce point dans lequel la fonction $f(zz')$ est régulière à l'exception des points de la surface même.

$\beta$) Les points de la surface (1) sont des points singuliers pour $f(zz')$.

Cela posé, cherchons à déterminer les conditions qui doivent être vérifiées, pour qu'il existe une fonction analytique $f(zz')$ pour laquelle la surface (1) soit singulière isolée.

M. F. Hartogs[1]) a prouvé qu'une telle surface ne peut pas être quelconque; il a montré que, si les deux jacobiens

$$\frac{\partial (G\,H)}{\partial (xy)}, \quad \frac{\partial (G\,H)}{\partial (x'y')} \tag{$\alpha$}$$

ne sont pas identiquement nuls, la surface (1) doit nécessairement être susceptible d'une représentation par une seule équation de la forme

$$\varphi(zz') = 0,$$

$\varphi(zz')$ étant une fonction analytique, mais la méthode de M. Hartogs ne s'applique pas au cas, où chacun des déterminants ($\alpha$) serait nul.

Je vais exposer une solution de notre problème par une voie différente de celle suivie par M. Hartogs. Cette méthode ne laisse

[1]) Voir *Acta mat.* t. 32 (1909).

pas échapper le cas particulier précédent et si, dans les autres cas, elle repose sur des hypothèses plus restrictives que celles de M. Hartogs, elle n'exige pas les developpements préliminaires compliquées que necessite la méthode de M. Hartogs.

§ 2. Je m'appuie sur un lemme, dont la démonstration, due à M. Hartogs, est bien simple.

**Lemme I.** *Soit $f(zz')$ une fonction analytique régulière et uniforme aux points*

$$(z.\, z') \quad , \text{ où } 0 < |z| < \varrho, \quad z' = 0$$

*et supposons que le point $z = z' = 0$ est un point singulier pour cette fonction. Dans ces conditions, à chaque $\varepsilon > 0$ il correspondra un nombre $\delta > 0$ tel que sur chaque plan $z' = z'_0$, où $z'_0$ est un nombre complexe de module plus petit que $\delta$, il existe au moins un point*

$$(z_0.\, z'_0) \quad , \text{ où } |z_0| < \varepsilon$$

*singulier pour $f(zz')$.*

Démonstration[1]): Soit $\varepsilon$ un nombre positif quelconque et $\eta$ un autre nombre positif plus petit que $\frac{\varrho}{2}$ et que $\varepsilon$.

La fonction $f(zz')$ étant régulière aux points de la circonference

$$|z| = \eta, \quad z' = 0$$

il existe un nombre positif $\delta > \eta$ tel que $f(zz')$ soit régulière dans le domaine

$$\eta - \delta < |z| < \eta + \delta \quad , \; |z'| < \delta \tag{2}$$

et que, par conséquent, elle puisse être représentée, dans le domaine (2), par une série de Laurent

$$f(zz') = \sum_{-\infty}^{+\infty} s_n(z')\, z^n, \tag{3}$$

dont les coëfficients $s_n(z')$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ sont des séries entières par rapport à $z'$, absolument convergentes pour $|z'| < \delta$.

Je dis que le nombre $\delta$ satisfait aux conditions du lemme. En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi, il existerait alors un point $z'_0$ tel que $|z'_0| < \delta$ et tel que la fonction $f(zz')$ soit régulière en tout point

$$(z, z'_0) \quad , \text{ où } |z| < \varepsilon.$$

[1]) Cette démonstration se trouve dans les *Acta mat.* t. 32, p. 68. Une autre démonstration, à l'aide de l'intégrale de Cauchy est insérée dans *Münchener Ber.* t. 36.

Il s'ensuit qu'il existe un nombre positif $\varrho'$ tel que $f(zz')$ soit regulier dans le domaine

(4) $$|z| < \eta < \varepsilon, \quad |z' - z_0'| < \varrho'$$

et puisse y être représenté par une série entière

(5) $$f(zz') = \sum_0^\infty \sigma_n(z' - z_0') z^n,$$

dont les coëfficients $\sigma_n(z' - z_0')$ sont des séries entières par rapport à $z' - z_0'$, absolument convergentes pour $|z' - z_0'| < \varrho'$.

Mais les domaines (2) et (4) ont une partie commune dans laquelle les développements (3) et (5) doivent être identiques, donc on a les identités

$$s_n(z') \equiv \sigma_n(z' - z_0') \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$s_n(z') \equiv 0 \qquad\qquad n = -1, -2, \ldots$$

dans la partie commune des cercles

$$|z'| < \delta, \quad |z' - z_0'| < \varrho'.$$

Il s'ensuit que les coëfficients d'indices négalifs de la série (3) sont identiquement nuls; mais dans ce cas la série (3) serait absolument convergente dans le domaine

$$|z| < \eta + \delta, \quad |z| < \delta$$

et la fonction $f(zz')$ serait régulière au point $(0, 0)$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Le lemme est donc démontré.

Considérons une fonction analytique d'une variable complexe $\varphi(z)$, régulière et uniforme dans le voisinage du point $z = 0$ et s'annulant en ce point. L'équation

(6) $$z' - \varphi(z) = 0$$

représente une surface, dite *caractéristique*[1]), passant par l'origine des coordonnées, de l'espace à *4* dimensions. Par chaque point d'un certain voisinage de l'origine des coordonnées passe une surface et une seule de la famille

(7) $$z' - \varphi(z) = t,$$

$t$ étant un paramètre complexe.

---

[1]) Cette expression est due à M. T. Levi-Civita. *Rend. della Acc. dei Lincei* t. 14, 1905.

Cela posé, on peut étendre le lemme précédent comme il suit.

**Lemme II.** *Soit $f(zz')$ une fonction analytique régulière et uniforme aux points*

$$(z, \varphi(z)) \quad , \text{ où } 0 < |z| < \varrho,$$

*de la surface (6), le point $z = z' = 0$ étant singulier pour cette fonction. Dans ces conditions, à chaque $\varepsilon > 0$ il correspondra un nombre $\delta > 0$ tel que sur chaque surface de la famille (7), où*

$$|t| < \delta$$

*il existe au moins un point*

$$(z_0, z_0') \quad . \text{ où } |z_0| < \varepsilon, \quad z_0' = \varphi(z_0) + t,$$

*singulier pour $f(zz')$.*

Démonstration. Posons dans la fonction $f(zz')$

$$z' = \varphi(z) + t,$$

$t$ désignant une nouvelle variable complexe. On trouve

$$f(z, \varphi(z) + t) = F(z, t),$$

$F(z, t)$ étant une fonction analytique de deux variables complexes $z, t$, régulière et uniforme aux points $(z, t)$, où $t = 0$ et $0 < |z| < \varrho$, mais admettant le point $z = t = 0$ pour point singulier.

On peut donc appliquer le lemme précédent, d'où il résulte qu'à chaque $\varepsilon > 0$ il correspondra un $\delta > 0$ tel que sur chaque plan

$$t = t_0 \quad , \text{ où } |t_0| < \delta$$

il existe au moins un point $(z_0 t_0)$ singulier pour $F(zt)$, $z_0$ étant de module plus petit que $\varepsilon$. Cela posé, il suffit d'effectuer la substitution

$$t = z' - \varphi(z)$$

pour reconnaître l'exactitude de notre lemme.

§ 3. En appliquant ce lemme on peut démontrer le théorème suivant:

**Théorème**: *Pour que la surface (1) puisse être singulière isolée dans un certain voisinage du point 0, en lequel la matrice $\dfrac{\partial(GH)}{\partial(xyx'y')}$ est de rang deux, il est nécessaire que 1° l'un de deux jacobiens*

$$\frac{\partial(GH)}{\partial(xy)}, \quad \frac{\partial(GH)}{\partial(x'y')}$$

*soit différent de zéro au point 0, 2° si c'est le second qui est différent de zéro et si le système (1), résolu par rapport à $x'$ et $y'$ est de la forme*

$$x' = g(xy), \quad y' = h(xy), \tag{8}$$

*on doit avoir*

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}$$

*au point 0.*

Démonstration: Je supposerai pour plus de simplicité que le point 0 soit l'origine de coordonnées.

Par hypothèse, le système (1) peut être résolu par rapport aux variables qui forment l'un de six systèmes suivants:

$$xy,\ xx',\ xy',\ yx',\ yy',\ x'y'.$$

Je dis qu'il suffit de ne considérer que les deux derniers cas, car le premier cas se réduit au dernier si l'on échange les variables complexes $z$ et $z'$ et les trois autres cas se réduisent successivement au 5-ième par la substitution à $z$ et $z'$ de $iz$ et $iz'$, de $iz$ et $z'$ et enfin de $z$ et $iz'$.

$\alpha$) Examinons d'abord le dernier cas où le système (1) est, dans un voisinage du point 0, équivalent au système (8). En appliquant la formule de Taylor, on peut écrire ce dernier système sous la forme

$$\begin{aligned} x' &= g_1 x + g_2 y + g_{11} x^2 + 2g_{12} xy + g_{22} y^2 \\ y' &= h_1 x + h_2 y + h_{11} x^2 + 2h_{12} xy + h_{22} y^2, \end{aligned} \tag{9}$$

où l'on a posé

$$g_1 = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad g_2 = \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$g_{11} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \quad g_{12} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}, \quad g_{22} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2},$$

les dérivées prémières étant calculées pour $x = y = 0$ et les dérivées secondes se rapportant au point $\theta x$ et $\theta y$, où $\theta$ est un nombre de l'intervalle ouvert $(0, 1)$; les symboles $h_i$, $h_{ik}$ ont une signification analogue.

Considerons la surface caractéristique du second degré

$$z' = az + bz^2, \tag{10}$$

$a$ et $b$ étant des nombres complexes, dont

$$a = h_2 + ih_1$$

tandis que $b = b_1 + ib_2$ sera déterminé plus tard. Les équations réelles de la surface (10) ont la forme suivante

$$\begin{aligned} x' &= h_2 x - h_1 y + b_1(x^2 - y^2) - 2b_2 xy \\ y' &= h_1 x + h_2 y + b_2(x^2 - y^2) + 2b_1 xy. \end{aligned} \tag{11}$$

donc les coordonnées $(xy)$ d'un point $(xy\, x'y')$ commun aux surfaces (9) et (10) satisfont au système

$$\begin{aligned} (g_1 - h_2)x + (g_2 + h_1)y + (g_{11} - b_1)x^2 + 2(g_{12} - b_2)xy + (g_{22} + b_1)y^2 &= 0 \\ (h_{11} - b_2)x^2 + 2(h_{12} - b_1)xy + (h_{22} + b_2)y^2 &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Supposons que la surface (9) soit singulière isolée pour une fonction analytique $f(zz')$. Je dis que l'on doit avoir

$$g_1 = h_2, \quad g_2 = -h_1.$$

En effet, supposons le contraire et soit par exemple $g_2 + h_1 \neq 0$. La première des équations (12) peut être écrite, dans le voisinage du point $x = 0$, sous la forme

$$y = \alpha x + \beta x^2, \tag{13}$$

$\alpha$ étant le nombre suivant

$$\alpha = -\frac{g_1 - h_2}{g_2 + h_1}$$

et $\beta$ étant une fonction de $x$, continue dans le voisinage de $x = 0$.

Désignons par $K(xy)$ le premier membre de la deuxième des équations (12) et portons-y la valeur (13) de $y$; il vient

$$K(x, \alpha x + \beta x^2) = Ax^2 + Bx^3 = 0,$$

$A$ et $B$ étant des fonctions de $x$, continues dans le voisinage de $x = 0$; on a en particulier

$$A(x) = \bar{h}_{11} - b_2 + 2\alpha(\bar{h}_{12} - b_1) + \alpha^2(\bar{h}_{22} + b_2),$$

les symboles $\bar{h}_{ik}$ désignant les valeurs des $h_{ik}$ pour la valeur (13) de $y$.

Il est évident qu'on peut choisir les nombres $b_1$ et $b_2$ de telle sorte que l'on ait $A(o) > 0$. Le choix de ces nombres étant arrêté de façon à satisfaire à la condition précédente, il existera un nombre positif $\sigma$ tel que l'on ait

$$Ax + Bx^3 > 0 \qquad \text{pour } 0 < |x| < \sigma, \tag{14}$$

comme cela résulte de la continuité des fonctions $A$ et $B$.

Soit $\varrho$ un nombre positif plus petit que $\sigma$ et tel que la fonction $f(zz')$ n'ait dans le domaine

$$|x| < \varrho,\ |y| < \varrho,\ |x'| < \varrho,\ |y'| < \varrho, \tag{15}$$

aucun point singulier non situé sur la surface (9). Il suit de l'inégalité (14) que la surface caractéristique (10) ou (11) n'a dans le domaine (15) qu'un point unique 0 commun avec la surface (9), donc $f(zz')$ est régulier en tout point de la surface

$$z' = az + bz^2 \qquad \text{, où } 0 < |z| < \varrho, \tag{16}$$

le point $z = z' = 0$ étant un point singulier pour $f(zz')$.

On peut donc appliquer le lemme II à la surface (16). En conservant les notations de ce lemme, désignons par $\varepsilon$ un nombre positif plus petit que $\varrho$ et tel que l'inégalité

$$|az + bz^2| < \frac{\varrho}{2} \qquad \text{, pour } |z| < \varepsilon \tag{17}$$

soit satisfaite. Je dis que, si petit que soit $\delta > 0$, il existe des surfaces de la famille

$$z' = az + bz^2 + t \qquad \text{, où } |t| < \delta \tag{18}$$

qui ne contiennent aucun point $(zz')$, pour lequel on ait $|z| < \varepsilon$, et qui soit un point singulier pour $f(zz')$.

En effet, soit $\delta > 0$ aussi petit que l'on voudra et $\theta$ un nombre réel satisfaisant aux inégalités

$$0 < \theta < \delta, \quad \theta < \frac{\varrho}{2}.$$

La surface

$$z' = az + bz^2 + i\theta \tag{19}$$

appartient à la famille (18) et l'inégalité (17) montre que tout point

$$(z, z') \qquad \text{, où } |z| < \varepsilon, \tag{20}$$

qui est situé sur cette surface, appartient au domaine (15); donc les seuls de ces points qui pourraient être des points singuliers pour $f(zz')$ doivent être en même temps situés sur la surface (9).

Mais les surfaces (9) et (19) ne se coupent pas dans le domaine (15), parce que, $|z|$ devant être $< \varepsilon$, on doit avoir $|x| < \varepsilon < \delta$ et la coordonnée $x$ d'un point $(xy\,x'y')$ commun aux surfaces (9) et (19) doit satisfaire, d'après ce qu'on a vu, à l'équation

$$Ax^2 + Bx^3 + \theta = 0;$$

or, cette équation n'a, en vertu de (14) et de l'inégalité $\theta > 0$, aucune solution $x$, plus petite que $\varepsilon$ en valeur absolue.

Donc le cas, où $g_2 + h_1 \neq 0$ et pareillement celui où $g_1 - h_2 \neq 0$ sont incompatibles avec le lemme II, ce qui prouve la seconde partie du théorème.

$\beta$) Il reste à examiner le cas, où les deux premiers des jacobiens

$$\frac{\partial(GH)}{\partial(xy)}, \quad \frac{\partial(GH)}{\partial(x'y')}, \quad \frac{\partial(GH)}{\partial(yy')}$$

sont nuls au point 0, tandis que le troisième est différent de zéro.

Le système (1) peut être écrit sous la forme

$$y = g(xx'), \quad y' = h(xx'), \tag{21}$$

où l'on a

$$\frac{\partial g}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

au point 0, ou bien, en appliquant la formule de Taylor, sous la forme

$$\begin{aligned} y &= g_1 x + g_{11} x^2 + 2 g_{12} x x' + g_{22} x'^2 \\ y' &= h_2 x' + h_{11} x^2 + 2 h_{12} x x' + h_{22} x'^2 \end{aligned} \tag{22}$$

où les symboles $g_i$, $h_i$, $g_{ik}$, $h_{ik}$ ont une signification tout à fait analogue à celle qu'ils ont dans le système (9).

Considerons la surface caractéristique

$$z' = bz^2 \tag{23}$$

dont les équations réelles sont les suivantes

$$\begin{aligned} x' &= b_1(x^2 - y^2) - 2b_2\, xy \\ y' &= b_2(x^2 - y^2) + 2b_1\, xy. \end{aligned} \tag{24}$$

Les coordonnées $x$ et $x'$ d'un point commun aux surfaces (22) et (24) satisfont au système d'équations

$$
(25) \qquad \begin{aligned} & x' - b_1(x^2 - g(xx')^2) + 2b_2 xg(xx') = 0 \\ & -h(xx') + b_2(x^2 - g(xx')^2) + 2b_1 xg(xx') = 0 \end{aligned}
$$

dont la première peut être résolue, dans le voisinage de $x = x' = 0$, par rapport à $x'$ au moyen de la formule

$$
(26) \qquad x' = \alpha(x) . x^2,
$$

$\alpha(x)$ étant une fonction de $x$, continue dans le voisinage de $x = 0$ et se rédnisant à

$$
\alpha(0) = b_1(1 - g_1^2) - 2b_2 g_1
$$

au point $x = 0$.

Désignons par $R(xx')$ le premier membre de la deuxième des équations (25) et portons-y la valeur (26) de $x'$; il vient

$$
R(x. \alpha x^2) = Ax^2 + Bx^3,
$$

$A$ et $B$ étant des fonctions de $x$, continues dans le voisinage de $x = 0$; on a en particulier

$$
A(x) = -h_2 \alpha(x) + b_2(1 - g_1^2) + 2b_1 g_1,
$$

donc

$$
A(0) = b_1[2g_1 - (1 - g_1^2)h_2] + b_2[2g_2h_2 + (1 - g_1^2)].
$$

On peut choisir les nombres $b_1$ et $b_2$ de façon que l'on ait

$$
A(0) > 0;
$$

c'est possible quel que soit $g_1$ et $h_2$, parce que les deux équations

$$
2g_1 - (1 - g_1^2)h_2 = 0, \quad 2g_2h_2 + (1 - g_1^2) = 0
$$

n'ont aucune solution réelle commune. D'autre part, $b_1$ et $b_2$ étant choisis de la façon voulue, il existe un nombre positif $\sigma$ tel que l'on ait

$$
Ax^2 + Bx^3 > 0 \quad , \text{ pour } 0 < |x| < \sigma;
$$

donc il existe un domaine susceptible d'être défini par des inégalités de la forme (15), dans lequel la surface caractéristique (23) n'a qu'un point unique 0 commun avec la surface (21).

Il n'y aurait plus qu'à reproduire le raisonnement exposé plus haut pour prouver que la surface (21) ne peut pas être une surface singulière isolée. Le théorème est donc démontré.

Appellons point *régulier* de la surface (1) chacun de ses points, pour lesquels la matrice $\frac{\partial (G, H)}{\partial (xy\,x'y')}$ est de rang 2. Notre théorème montre que:

*S'il existe une fonction analytique de deux variables complexes, pour laquelle la surface (1) serait une surface singulière isolée, cette surface doit être nécessairement caractéristique dans le voisinage de chacun de ses points réguliers, c'est-à dire que son équation doit avoir l'une de deux formes*

(27) $$z' = \varphi(z), \quad z = \varphi(z')$$

*les fonctions $\varphi$ étant analytiques.*

Ajoutons qu'à chacune de telles surfaces correspond effectivement une fonction analytique, par exemple

$$f(zz') = [z' - \varphi(z)]^{-1},$$

pour laquelle cette surface est une surface singulière isolée.

# Aspetto integrale delle curve inviluppi

Nota del

Dr. Witold Wilkosz.

Cracovia.

In un lavoro recente „Un problema integrale nella teoria delle funzioni implicite [1]) ho cercato di esaminare il modo di comportarsi della soluzione delle funzioni implicite in tutto il campo prescritto a priori (sotto certe condizioni), ed ho introdotto un metodo di esporre la quistione in modo che il raggionamento là usato potrebbe esser facilmente applicato alle quistioni analoghe. Nel lavoro presente voglio studiare in modo simile il comportamento integrale („im Großen") delle curve inviluppi di una famiglia ad un parametro. Incomincio colla esposizione elaborata delle idee dovute al prof. G. Peano [2]) — ma colle modificazioni necessarie conformi al nostro problema. Quella parte del lavoro non contiene quasi niente di nuovo — la posizione stessa della ricerca rimane ancora „locale" („im Kleinen"). Ne segue la seconda parte ove incominciano le ricerche mie in guisa da far vedere la forma delle curve inviluppi (della quali gli elementi furono dati per mezzo dei teoremi della prima parte), in tutto il campo prescritto a priori. Un caso particolare, ma del tutto interessante, quello di periodicità chiude la memoria.

## § 1. Punti limiti di una famiglia degli insiemi ad un parametro.

[1]) Bull. de l'Acad. Polonaise 1920. Cracovie.

[2]) Applicazioni geometriche del Calcolo. Torino 1887.

Consideriamo una famiglia degli insiemi data in modo, che ad ogni $t$ soddisfacente alla condizione

$$\alpha \leqq t \leqq \beta$$

corrisponde un insieme determinato $E(t)$, composto di punti posti in uno spazio aritmetico a $n$ dimensioni delle variabili reali $(S_n)$

$$x_1, \ldots x_n$$

$[E(t)$ può essere anche vuoto per certi valori di $t$ !].

Sia $P$ un punto generico dello spazio $S_n$,

di cui le coordinate sono:

$$x_1^{(P)} \ldots x_n^{(P)}$$

Indico con $\Delta(P, E(t)$ la distanza cioè il limite inferiore delle distanze di $P$ da un punto qualunque di $E(t)$ — ad eccezione del caso ove $E(t)$ fosse vuoto. $\Delta(P, E(t))$ è un numero non negativo perfettamente determinato.

Df. Diremo $A(x_1^{(A)} \ldots x_n^{(A)})$ punto di $S_n$, punto limite della famiglia $\{E(t)\}_{t=\alpha}^{t=\beta}$ con tendente verso $\gamma$ $(\alpha \leqq \gamma \leqq \beta)$ se:

$$\lim_{t/\gamma} \Delta(A t) = 0.$$

Df. Insieme di tutti i punti limiti per $\gamma$ fisso indico con $D(\gamma)$.

§ 2. **Risultante ed eliminante della famiglia delle curve reali ad un parametro.**

I. Sia una funzione a tre variabili reali

$$F(x y a)$$

avente la proprietà di essere continua colle sue derivate parziali d'ordine primo [1]) nel parallelepipedo seguente:

$$(R) \left| \begin{matrix} a_1 \leqq a \leqq a_2 \\ x_1 \leqq x \leqq x_2 \\ y_1 \leqq y \leqq y_2 \end{matrix} \right|$$

**[condizione $\alpha$].**

[1]) Diremo con Bolza che $F$ è di Classe $C'$. cf. Lectures on Calculus of Variations.

Con $\mathcal{C}_a$ indico la figura composta di tutti i punti $P(\xi\eta)$ tali, che
(1) $(\xi, \eta, a)$ cade in $R$
(2) $F(\xi, \eta, a) = 0$.
[Diremo curva $\mathcal{C}_a$].
Per ogni $a$ in $[a_1\, a_2]$ (chiuso!) consideriamo la seguente famiglia.

$$\{E_a(h)\}_{h=a-a_1}^{h=a_2-a}$$

ove $E_a(h)$ indica la figura totale dei punti soddisfacenti al sistema:

$$(1) \qquad \begin{cases} F(xya) = 0 \\ F(xya+h) = 0. \end{cases}$$

Abbiamo adesso per ogni $a$ in $[a_1\, a_2]$ la figura $D_a(0)$ composta dei punti limiti — ed anche insieme di tutti i punti appartenenti a qualunque delle $D_a(0)$, che io denoto con $L$ e chiamo la risultante della famiglia $\{\mathcal{C}_a\}_{a_1}^{a_2}$ nel campo $R$.

II. Teor 1. Ogni punto di $L(a)$ soddisfa il sistema

$$(S) \qquad \begin{matrix} F(xya) = 0. \\ F_a(xya) = 0. \end{matrix}$$

Dim: Sia $P(x_p y_p)$ un tale, allora
(1) in un certo intorno $|h| \leqq \delta$
$\Delta(P, E_a(h))$ deve avere il senso — donde $E_a(h)$ non nullo.
(2) $\lim\limits_{h/0} \Delta(P, E_a(h)) = 0$.
(3) Sott la condizione $(\alpha)$ dev'essere $E_a(h)$ un insieme chiuso — quindi esiste almeno un punto $A$ appartenente alla $E_a(h)$ tale che:

$$\text{dist. } (AP) = \Delta(P, E_a(h));$$

questi punti formano anche un insieme chiuso — ne prendiamo quello che ha le coordinate minime — sia $B_h(x(h),\, y(h))$.

Ne segue:

$$\begin{cases} \lim\limits_{h/0}\; x(h) = x_p \\ \lim\limits_{h/0}\; y(h) = y_p \end{cases}$$

ma anche:

$$(2) \qquad \begin{cases} F(x(h), y(h), a+h) = 0 \\ F(x(h), y(h), a) = 0 \end{cases}$$

---

[1]) Jordan. Cours d'Analyse v. 1.

donde:

$$\begin{cases} F(x(h), y(h), a) = 0 \\ \dfrac{F(x(h), y(h), a+h) - F(x(h), y(h), a)}{h} = 0 \end{cases}$$

ovvero:

$$(3) \qquad \begin{cases} F(x(h), y(h), a) = 0 \\ F_a(x(h), y(h), a + \theta(h) \,.\, h) = 0 \end{cases}$$

con $0 < \theta(h) < 1$ {perchè $R$ è un campo convesso}

Passando al limite abbiamo:

$$\begin{aligned} F(x_P y_P a) &= 0 \\ F_a(x_P y_P a) &= 0 \end{aligned}$$

ciò che dimostra il teorema.

Se chiameremo la eliminante della famiglia, insieme di tutti i punti $(xy)$ tali che per qualche $a$

sistema $(x, y, a)$

annulla $(S)$ [1]), il nostro teorema ci dice in tal caso:

Ogni punto della risultante fa parte della eliminante di nostra famiglia.

III. Poniamo, che non solo $F$ ma anche $F_a$ siano di classe $(C')$ **[condizione $\alpha^{bis}$]** nel campo $(R)$.

Sia $(x_0 y_0 a_0)$ un sistema annullante $(S)$ ed ancora

(1) $(x_0 y_0 a_0)$ un punto interno di $(R)$

(2) $I(xya) = \dfrac{\partial(F, F_a)}{\partial(x, y)}$ sia diverso dallo zero nel punto $(x_0 y_0 a_0)$ quindi, anche in un certo intorno di questo.

I teoremi noti della teoria delle funzioni implicite vi danno:

Esiste un sistema delle funzioni

$$\lambda(h), \quad \mu(h)$$

ed un numero $\sigma > 0$ tali che:

$$(1) \qquad \begin{cases} f(\lambda(h), \mu(h), a_0 + h = 0 \\ f(\lambda(h), \mu(h), a_0) = 0 \end{cases}$$

per $|h| \leqq \sigma$ e $a_1 \leqq a_0 + h \leqq a_2$

---

[1]) Diremo: $a$ appartiene al punto $(xy)$ della eliminante.

(2) $\lambda(h), \mu(h)$ è di classe $C'$ per $|h| \leqq \sigma$

(3) ogni punto $(xya)$ annullante $(S)$

ha per $|a - a_0| \leqq \sigma$ la forma

$$x = \lambda(a - a_0),\ y = \mu(a - a_0),\ a$$

(4) $$\lambda(0) = x_0,\ \mu(0) = y_0.$$

Dimostreremo il teorema:

**Teor. 2.** Ogni punto $(\lambda(h), \mu(h))$ è un punto limite, ed appartiene allora alla $L$ se $|h| \leqq \sigma' \leqq \sigma$ per qualche $\sigma'$ opportuno.

Dim. Vogliamo risolvere il sistema (1)

(1) $$\begin{gathered} F(xya_0 + h) = 0 \\ F(xya_0) = 0 \end{gathered}$$

in vicinanza del sistema $x = x, y_0 = y_0, h = 0$ per $x$ e $y$.

Il Jacobiano di quelle è infelicemente nullo nel punto sopradetto, bisogna adoperare un artificio: Al posto di (1) poniamo il sistema seguente:

$$\left.\begin{aligned} &F(xya_0) = 0 \\ &\frac{F(xya_0 + h) - F(xya_0)}{h} \end{aligned}\right| \quad (1') \text{ per } h \neq 0$$

$$\left.\begin{aligned} F(xya_0) &= 0 \\ F_a(xya_0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1'') \text{ per } h = 0.$$

od ancora:

(5) $$\left|\begin{aligned} &F(xya_0) = 0 \\ &F(xya_0 + \theta(h, xy) \,.\, h) = 0 \end{aligned}\right.$$

con $0 < \theta < 1$ risultante dal teorema della media — il quale è anche di classe $(C')$ com'è facile a confermarsi, calcolando le derivate di $(1')$ e $(1'')$ direttamente; il suo Jacobiano per $x$ e $y$

$$I(xyh) = \begin{vmatrix} f_{ax}(xya_0 + \theta h), & f_{ay}(xya_0 + \theta h) \\ f_x(xya_0) & f_y(xya_0) \end{vmatrix}$$

è diverso da zero per $x = x_0\, y = y_0, h = 0$ perchè:

$$I(x_0\, y_0\, 0) = I(x_0 y_0 a_0) \neq 0.$$

E possibile trovare una $0 < \sigma'' \leqq \sigma$ tale, che:

Esistono due funzioni $l(h)$, $m(h)$ per $|h| \leqq \sigma''$ tali che

(1) $$l(h),\ m(h) \text{ di classe } C' \text{ è per } |h| \leqq \sigma''$$

(2) $$\left.\begin{array}{l} f(l(h),\ m(h),\ a_0 + h) \equiv 0 \\ f(l(h),\ m(h),\ a_0) \equiv 0 \end{array}\right\} \text{per } |h| \leqq \sigma''$$

(3) ogni punto $(xya)$ con $|a - a_0| \leqq \sigma''$, che soddisfa le (5) ha la forma

$$x = l(a - a_0)$$
$$y = m\,(a - a_0)$$

(4) $$l(0) = x_0 \quad m(0) = y_0.$$

(5) Quel sistema $l(h)$, $m(h)$, soddisfa anche le (1) — ed è unico di tal genere.

Allora per $|h| \leqq \sigma''$ le curve $\mathcal{C}_{a_0-h}$ e $\mathcal{C}_{a_0}$ hanno un punto unico in comune nella vicinanza di $(x_0 y_0)$ — donde:

$$\varDelta(P_{0,} E_{a_0}(h)) = \sqrt{[x_0 - l(a)]^2 + [y_0 - m(h)]^2} \quad \{P_0 = (x_0 y_0)\}$$

quindi:

$$\lim_{h/0} \varDelta(P_0 E_{a_0}(h)) = 0$$

ne segue, che $(x_0 y_0)$ è un punto limite.

Le stesse condizioni, che valgono per $(x_0 y_0)$ hanno, luogo anche per ogni $(\lambda(h),\ \mu(h))$ in vicinanza di $(x_0 y_0)$ se, solo $|h| \leqq \sigma'$ è opportunamente piccolo — Il teorema viene allora dimostrato.

Mostreremo ancora che:

**Teor. 3**: Se $F_{aa}(x_0 y_0 a_0) \neq 0$.
allora esiste una $0 < \sigma''' \leqq \sigma$ tale che
per $|h''| \leqq \sigma'''$ la curva $\mathcal{C}_{a_0+h}$
è tangente alla curva

(6) $$\left.\begin{array}{l} X = \lambda(h) \\ Y = \mu(h) \end{array}\right\} |h| \geqq \sigma'''$$

Dim: Cerchiamo $\sigma''' > 0$ tale, che

$$F_{aa}(\lambda(h),\ \mu(h),\ a_0 + h) \neq 0 \quad \text{con} \quad |h| \leqq \sigma'''$$

Considero $\mathcal{C}_{a_0}$ — Ivi $I(x_0 y_0 a_0) \neq 0$
quindi $|F'_x| + |F'_y| \neq 0$ in $(x_0 y_0 a_0)$

— la curva ha dunque un elemento regolare

$$x(t),\ y(t) \qquad |t| \leqq \tau$$

tale che

$$x(0) = x_0 \qquad y(0) = y_0$$

è di classe $C'$. Per la tangente di $\mathcal{C}_{a_0}$ in $(x_0 y_0)$ abbiamo:

(7) $$F_x(x_0 y_0 a_0) \,.\, x'(0) + F_y(x_0 y_0 a_0) \,.\, y'(0) = 0$$

ma contemporaneamente

(8) $$f_{ax}(x_0 y_0 a_0) \,.\, \lambda'(0) + f_{ay}(x_0 y_0 a_0) \,.\, \mu'(0) + f_{aa}(x_0 y_0 a_0) = 0$$

ciò che segue dal

$$\begin{cases} f_a(\lambda(h),\ \mu(h),\ a_0 + h) = 0 \\ f(\lambda(h),\ \mu(h),\ a_0) = 0 \end{cases}$$

Donde:

(1) $$|\lambda'(0)| + |\mu'(0)| \neq 0$$

(2) $$x'(0) \,.\, \mu'(0) - y'(0) \,.\, \lambda'(0) = 0$$

cioè: $\mathcal{C}_{a_0}$ è tangente alla (6).

In vicinanza di $|h| \leqq \sigma'''$ ogni punto $(\lambda(h),\ \mu(h))$ è nella stessa posizione che $P_0$, quindi il teorema susiste ancora per essi.

IV. Addendo adesso due nuove condizioni possiamo proseguire un poco avanti:

**[Condizione $\beta$]** Sia per ogni punto $(x_0 y_0 a_0)$ soddisfacente la $(S)$

$$\frac{\partial(F, F_a)}{\partial(xy)} \neq 0.$$

**[Condizione $\gamma$]**. Sia per ogni $(x_0 y_0 a_0)$ annullante la $(S)$

$$F_{aa}(x_0 y_0 a_0) \neq 0.$$

allora sotto le condizioni $(\alpha) \rightarrow (\gamma)$ abbiamo il:

**Teor. 4.** (1) Ogni punto $(xy)$ della eliminante, che con sua $a$ appartenente ad esso dà un sistema $(xya)$ cadente dentro di $(R)$, fa parte della risultante e viceversa.

(2) Ogni punto della eliminante, che colle sue $a$ cade nell' interno di $(R)$, appartiene con ogni tale $a$ ad un elemento della eliminante il quale in ogni punto è tangente alla $\mathcal{C}$ determinata — poi esso è punto limite delle intersezioni di $\mathcal{C}$ colle curve in vicinanza (in rispetto di $a$). Diremo brevemente, che in tal caso ogni quel punto appartiene per ogni $a$ corrispondente ad un arco del' l'inviluppo.

§ 3. **Prolungazione dell' elemento inviluppante.**

I. Le condizioni sopradette ci danno, che

$$I(xya) = \frac{\partial(F,F_a)}{\partial(xy)}$$

ammette sulla eliminante il limite inferiore dei valori assoluti $(\nu > 0)$. Tutte le derivate $F_x$ $F_y$ $F_{ax}$ $F_{ay}$ $F_a$ $F_{aa}$ hanno il limite superiore dei valori assoluti, che indico con $N\,(> 0)$.

Consideriamo un punto $M_0\,(x_0 y_0 a_0)$, annullante $(S)$ ed interno di $(R)$ — esso fa parte dell' arco inviluppante

$$x(a),\; y(a)$$

dato in un certo intervallo $(a_0 - \sigma, a_0 + \sigma)$.

Per mezzo del metodo esposto completamente nel mio lavoro citato, possiamo prolungare quell' arco in due lati — sia $(\sigma_M\ \tau_M)$ intervallo massimale d'esistenza per quell' arco prolungato. Naturalmente: $a_1 \leqq \sigma_M < \tau_M \leqq a_2$.

Abbiamo pero:

$$\left.\begin{array}{l} F(x(a), y(a), a) = 0 \\ F_a(x(a), y(a), a) = 0 \end{array}\right| (S) \text{ in } (\sigma_M, \tau_M)$$

quindi:

$$\left.\begin{array}{l} x'(a) \,.\, F_x + y'(a)\, Fy = 0 \\ x'(a) \,.\, F_{ax} + y'(a)\, F_{ay} = f_{aa} \end{array}\right| \text{ in } (\sigma_M\ \tau_M)$$

donde:

$$\left.\begin{array}{l} x'(a) = \dfrac{F_y F_{aa}}{I} \\[2ex] y'(a) = -\dfrac{F_x F_{aa}}{I} \end{array}\right| \; I = \frac{\partial(F, F_a)}{\partial(xy)}$$

allora:

$$|x'(a)| \leqq \frac{N}{\nu}$$

$$|y'(a)| \leqq \frac{N}{\nu} \quad \text{in } (\sigma_M \tau_M)$$

ma quello ci dimostra, che esistono i limiti:

$$\lim_{a/\sigma_M} x(a) = \bar{x}_M \qquad \lim_{a/\sigma_M} y(a) = \bar{y}_M$$

$$\lim_{a/\tau_M} x(a) = \bar{\bar{y}}_M \qquad \lim_{a/\tau_M} y(a) = \bar{\bar{y}}_M$$

I punti $\bar{M}(\bar{x}_M, \bar{y}_M)$ ed $\bar{\bar{M}}(\bar{\bar{x}}_M, \bar{\bar{y}}_M)$ annullando $(S)$ appartengono alla eliminante.

II. Un punto $(x_0\, y_0)$ della eliminante potrebbe avere più che una $a$ corrispondente, ma:

Teor. 5. Il numero delle $a$ corrispondenti è finito.

Dim. Altrimenti esisterebbe una successione convergente delle tali:

$$a_0^{(1)} \ldots \qquad a_0^{(n)} \ldots$$

con

$$\lim_{n/\infty} a_0^{(n)} = a_0$$

così che

(1) $\quad a_0^{(n)} \quad n|1, 2 \ldots$ diversi fra loro

(2) $\quad (x_0\, y_0\, a_0^{(n)})$ soddisfa $(S)$

quindi $(x_0\, y_0\, a_0)$ farebbe lo stesso.

Ma se

$$f_a(x_0\, y_0\, a_0^{(n)}) = 0 \qquad n|1 \ldots$$

$$f_a(x_0\, y_0\, a_0) = 0$$

allora sarebbe

$$f_{aa}(x_0\, y_0\, a_0) = 0$$

ciò che contradice la $(\gamma)$.

Da un punto determinato della eliminante, cadente dentro di $(R)$ non esce che un numero finito degli archi inviluppanti:

## § 4. Il carattere topologico degli archi integrali.

I. Ancora una condizione restringente ci permette andare più avanti.

**[Condizione** $\delta$**]**. Esiste per lo più, un numero finito di punti della eliminante sulla frontiera del quadrato

$$R\ \begin{Bmatrix} x_1 \leqq x \leqq x_2 \\ y_1 \leqq y \leqq y_2 \end{Bmatrix}$$

e da ogni tale esce per una $a$ uno ed unico elemento della eliminante.

Il metodo accennato di sopra, vi permette per ogni sistema $M(xya)$ soddisfacente la $(S)$, attaccare una curva nello spazio

$$\{x(a), y(a), a\} \quad \text{in} \quad [\sigma_M, \tau_M]$$

che io indico con $W_M$.

Se $M'$ fa parte di $W_n$ allora

$$W_M = W_{M'}$$

perchè in vicinanza di $P$ le $W_M$ e $W_{M'}$ coincidono — ne segue la identita totale di ambedue.

**Teor.** 6. Il numero delle $W$ diverse in $(R)$ è finito.

Supponiamo che vi esiste un numero infinito delle $W$ — quindi anche una sequenza:

$$W_1\ W_2 \dots \qquad W_n \dots$$

e da ogni $W_n$ io scelgo qualche punto determinato $P_{(n)}$ — Questi ammettono almeno un punto limite, sia $P$ — e supponiamo, ciò che è lecito:

$$\lim P_{(n)} = P \qquad P_n(x_n y_n a_n) = P_n$$

Il punto $P$ appartiene alla sua $W_P$.

Tutti i punti della eliminante in vicinanza di $P$ cadono sulla $W_P$ — quindi $W_{(n)}$ non possono essere diverse.

**Corr.** Ad ogni curva $W(x(a)'y(a).a)$ corrisponde un arco della eliminante $Z_w(x(a), y(a))$.

Il numero delle $Z_w$ diverse è dunque finito.

II. La questione dei punti multipli di $Z_W$ o punti comuni fra due $Z_W$ e $Z_{W'}$ rimane ancoro aperta — vi possono darsi casi diversissimi. Ma per poter dire qualche cosa più precisa ammetto una restizione ancora più forte:

**[Condizione** $\delta^{bis}$**]**. Sulla frontiera di $R$ non esistono punti della eliminante.

Abbiamo in tal caso.

**Teor. 7.** Sul mantello di $(R)$ [superficie laterale, se $(R, a_1)$ e $(R_1 a_2)$ ne sono le basi] non esistono punti annullanti la $(S)$ — sulle basi soltanto un numero finito.

Dim. Se p. es. sulla $(R_1 a_1)$ vi esistessero infiniti, allora anche una serie convergente:

$$(x_1 y_1) \dots \qquad (x_n y_n) \dots \qquad \rightarrow \qquad (x_0 y_0)$$

quindi:

$$f(x_n y_n a_1) = 0 \qquad f_a(x_n y_n a_1) = 0$$
$$f(x_0 y_0 a_1) = 0 \qquad f_a(x_0 y_0 a_1) = 0$$

donde:

$$f_x(\theta_n)(x_n - x_0) + f_y(\theta_n)(y_n - y_0) = 0$$
$$f_{ax}(\vartheta_n)(x_n - x_0) + f_{ay}(\vartheta_n)(y_n - y_0) = 0$$

ove

$$f(\theta) = f(x_0 + \theta(x_n - x_0), y_0 + \theta(y_n - y_0), a) \dots .$$
$$|\theta_n| < 1, |\vartheta_n| < 1$$

ma in un certo intorno:

$$\begin{vmatrix} f_x(\theta_n) & f_y(\theta_n) \\ f_{ax}(\vartheta_n) & f_{ay}(\vartheta_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

donde: $x_n = x_0 \quad y_n = y_0$ da un certo $n$.

**Teor. 8.** Ogni $Z_W(x(a), y(a))$ è definita in $[a_1 a_2]$ e il numero delle tali è finito.

Dim. Prolungazione d'un elemento, che dà $W(x(a), y(a))$ non può arrestarsi se non $a$ viene in $a_1$ ed $a_2$ od anche $x(a), y(a)$ al contorno di $R$ — ma quello è già escluso per la $(\delta^{bis})$.

La curva $W$ esce dal punto interno della base inferiore giunge alla base superiore — la $W_z$ corrispondente esce dall' interno di $R$ è finisce in qualche punto dentro di $R$.

III. Addiamo ancora:

**[Condizione ε]:** Se (1) $f(xya) = f(xya')$ in $R$

(2) $|a - a'| < a_2 - a_1$

allora $$a = a'.$$

**Teor. 9.** Sotto quella ultima condizione le $Z_W$ non hanno punti multipli ed alle diverse $W$ e $W'$ corrispondono $Z_W$ e $Z_{W'}$ che non hanno punti interni in comune neanche i punti finali dell' una coincidono con punti interni dell' altra.

Le curve $Z$ esistono in numero finito — e sono gli archi di Jordan aperti o chiunsi (cicli) — tutti i punti interni hanno la derivata dell' ordine primo continua — nei punti finali hanno le derivate almeno unilaterali. Se un punto finale d'una coincide con tale d'altra, quello può essere un punto angolare. Gli altri non sono singolari. È possibile, che due $Z$ e $Z'$ siano giunte una con altra per mezzo dei punti finali — il punto di coincidenza può essere angolare. Se consideriamo come diversi solo quegli archi che non sono giunti insieme, allora sull' ogni arco della inviluppante può darsi solo un numero finito dei punti angolari.

IV. Bisogna avere almeno una delle $Z$; per quello scopo ammettiamo:

**[Condizione $\xi$]**. Esiste almeno un punto dentro di $R$, ove la $(S)$ viene essere soddisfatta.

§ 5. **Il caso della $F$ periodica.**

Ancora un caso interessante:

Sotto le condizioni $(\alpha - \xi)$ ammettiamo ancora che

$$F(xya_1) = F(xya_2)$$

in tutto $(\bar{R})$ cioè, che $F$ sia periodica.

Dilatando la definizione di $F$ in modo che:

$$F(xya) = F(xy\bar{a})$$

ove

$$\bar{a} = a - E\left(\frac{\bar{a} - a_1}{a_2 - a_1}\right)(a_2 - a_1)$$

per $a > a_2$ [$E(x)$ funzione numerica nota]

ed analogo per $a < a_1$

avremo in

$$\left|\begin{array}{c} -\infty < a < +\infty \\ x_1 \leqq x \leqq x_2 \\ y_1 \leqq y \leqq y_2 \end{array}\right|$$

una funzione continua.

Consideriamo adesso tutti gli archi $Z$ in $\bar{R}$ corrispondenti alle $W$ in $R$

$$Z_1 \ldots \qquad Z_p \qquad p \geqq 1.$$

Supponiamo la $R_\infty$ divisa in parallelepipedi per mezzo dei piani paralleli al piano di $(xy)$ e di altezza $a_2 - a_1$, in tal modo che $R$

facendo parte di essi, viene essere indicata con $R_0$ — numeriamo gli altri succesivamente

$$R_{+1}\ R_{-1}\ R_2\ R_3 \dots$$

Tutti gli archi $W$ in $R_0$ vengono ad essere riprodotti in ogni

$$R_n \quad n\,|\,0, 1, -1, +2, -3 \dots$$

e danno in proiezione sul piano di $(xy)$ le stesse:

$$Z_1 \dots \qquad Z_p.$$

Se $Z_1$ non è chiusa, allora dal punto finale di essa esce qualche altra — la proiezione di qualche $W$ in $R_1$ — quella è quindi qualche

$$Z_m.$$

Raggionando in questo modo avremo la certezza, che le curve

$$Z_1 \dots \qquad Z_p$$

devono essere parteggiate in cicli, diversi fra loro.

**[Condizione $\eta$].** Se ancora la periodicità di $F$ è anche $(\eta)$ nelle sue derivate $F_x\ F_y\ F_n\ F_{xx}\ F_{xy}$ allora i punti di coincidenza non possono essere angolari. Possiamo al fine conchiudere:

Sotto le condizioni $[\alpha - \eta]$ la eliminante (o risultante od inviluppante) è composta di un numero finito (non nullo) di curve di Jordan, chiuse, di classe $C'$, senza punti singolari.