ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME III

ANNÉE 1924

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LA RÉDACTION S'ADRESSER
A M. STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE XVI, RUE, ŻYTNIA 6

33

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW 1925

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

Les publications de la Société polonaise de mathématique ont paru pour première fois en 1921 sous le titre de „Rozprawy Polskiego Towarzystwa matematycznego“ en un volume comprenant aussi bien des mémoires de langue polonaise que des mémoires rédigés en d'autres langues. Depuis 1922 l'organe de la Société porte le titre d'Annales de la Société polonaise de mathématique; les travaux de langue polonaise paraissent dans un Supplément, le corps du volume étant réservé aux travaux de langues française, anglaise, italienne et allemande.

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME III

ANNÉE 1924

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LA RÉDACTION S'ADRESSER À M. STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE XVI, RUE, ŻYTNIA 6

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW 1925
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

Sur l'aire des surfaces polyédrales.

Par

Maurice Fréchet (Université de Strasbourg).

On doit à Schwartz (voir le cours d'Analyse de Hermite) un exemple montrant qu'une surface polyédrale variable inscrite dans un cylindre droit peut converger vers ce cylindre sans que l'aire de cette surface polyédrale converge vers l'aire du cylindre ou même reste finie.

Il y a lieu de remarquer que le cylindre est une surface courbe et que son aire est définie d'une façon différente de celle des polyédres. La remarque suivante n'est donc peut-être pas dénuée d'intérêt bien qu'il suffise d'y penser pour qu'elle saute aux yeux:

On peut dans l'exemple de Schwartz remplacer le cylindre par une surface de même nature que les surfaces approchées qu'on lui compare. En d'autres termes:

Etant donnée une surface polyédrale quelconque P [1]), *on peut construire des surfaces polyédrales inscrites dans la première, qui convergent vers P et dont les aires peuvent converger vers toute valeur supérieure ou égale à celle de P.*

Considérons en effet une surface polyédrale quelconque P c'est à dire une surface formée par un certain nombre (fini) de polygones accolés le long de leurs arêtes [1]).

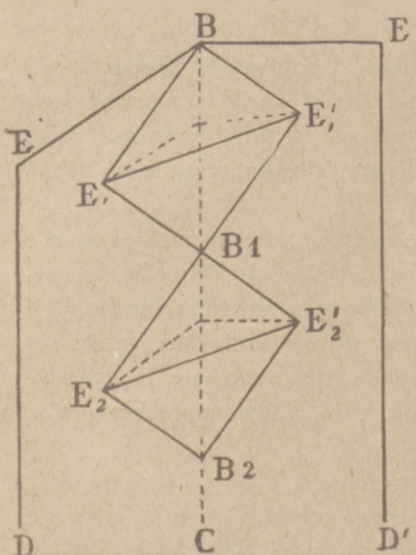
Considérons une de ces arêtes et deux des faces de P qui y aboutissent sans être dans un même plan. On pourra toujours découper dans chacune de ces deux faces un rectangle ayant l'arête considérée ou une partie de cette arête pour base et assez petit pour que ce rectangle soit tout entier dans la face.

[1]) Nous supposons naturellement que les faces de P ne sont pas toutes dans un même plan.

On a ainsi délimité deux rectangles $BCDE$, $BCD'E'$. Nous construirons alors un polyèdre $P_{m,n}$ approché de P de la façon suivante: $P_{m,n}$ sera constitué 1° de la partie de P qui n'appartient pas à la surface polyédrale ouverte Q consistant dans les deux rectangles $BCDE$ et $BCD'E'$ et 2° d'une surface polyédrale ouverte $Q_{m,n}$ inscrite dans la surface polyédrale Q.

Tout revient alors à résoudre le problème pour le cas simple où la surface polyédrale donnée est constituée par deux rectangles non dans un même plan.

Il nous suffit alors d'altérer légèrement la construction de Schwartz pour arriver au résultat annoncé.



Divisons la longueur $BC = h$ en n parties égales. Par le premier, le troisième, ... point de division menons des parallèles à BE et BE' et de longueurs m fois plus petite que la longueur b de ces côtés BE et BE' que nous pourrons supposer égaux.

Joignons les extrémités E_1, E_1', $E_2, E_2', \ldots$ de ces segments aux points de division pairs B, B_1, B_2 ... de BC, les plus voisins. La surface polyédrale $Q_{m,n}$ sera constituée par les triangles BE_1E_1', $B_1E_1E_1'$, $B_1E_2E_2'$, $B_2E_2E_2'$, ... et par les polygones $EBE_1B_1E_2B_2 \ldots D$, $E'BE_1'B_1E_2' \ldots D'$. Lorsque m et n croissent indéfiniment à la fois, il est manifeste que $Q_{m,n}$ converge vers Q. (Si l'on veut préciser, il est possible d'établir entre les points de Q et de $Q_{m,n}$ une correspondance bunivoque et bicontinue telle que le maximum de la distance de deux points correspondants tend vers zéro en même temps que $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$). En outre la somme des aires des deux polygones dentelés communs à Q et $Q_{m,n}$ converge vers l'aire A de Q. L'aire de la partie restante de Q tend vers zéro. Il reste à voir ce que devient l'aire de la partie restante de $Q_{m,n}$; c'est-à-dire ce que devient l'aire $A'_{m,n}$ somme des aires des triangles BE_1E_1', $B_1E_1E_1'$, ... On voit facilement que chacun a pour aire:

$$\frac{b}{m}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{h^2}{n^2}+\frac{b^2}{m^2}\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

où θ représente l'angle des plans $BEDC$ et $BE'D'C$. Donc

$$A'_{m,n}=\frac{n}{m}\,b\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{h^2}{n^2}+\frac{b^2}{m^2}\cos^2\frac{\theta}{2}}=b\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{h^2}{m^2}+\frac{n^2}{m^4}\,b^2\cos^2\frac{\theta}{2}}.$$

La variation de $A'_{m,n}$ lorsque m et n croissent indéfiniment dépend essentiellement de la façon dont on fait varier $\frac{n^2}{m^4}$. On peut faire tendre $A'_{m,n}$ vers n'importe quel nombre positif ou nul λ. Il suffit de prendre:

$$b\sin\frac{\theta}{2}\cdot\frac{n}{m^2}\,b\cos\frac{\theta}{2}=\lambda' \quad \text{ou} \quad \frac{n}{m^2}=\frac{2\,\lambda'}{b^2\sin\theta}$$

λ' étant voisin de λ; par exemple on peut prendre (quand m est assez grand) pour n la partie entière de $\frac{2\,m^2\,\lambda}{b^2\sin\theta}$.

Alors $$n=\frac{2\,m^2\,\lambda}{b^2\sin\theta}-\varrho \quad \text{avec} \quad 0\leq\varrho<1$$

d'où:

$$A'_{m,n}=\sqrt{\left(\lambda-\frac{b^2}{2\,m^2}\,\varrho\sin\theta\right)^2+\frac{h^2b^2}{n^2}\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Donc lorsque m et par conséquent n croissent indéfiniment de la manière indiquée, $A'_{m,n}$ tend vers λ. Ainsi on peut construire $Q_{m,n}$ de sorte que la mesure de son aire tende vers n'importe quel nombre $A+\lambda$ au moins égal à l'aire A de Q. On peut aussi en prenant par exemple $n=m^3$ faire tendre vers l'infini l'aire de $Q_{m,n}$.

23 Octobre 1923.

Sur la distance de deux surfaces.

Par

Maurice Fréchet (Université de Strasbourg).

Table des matières.

1. **Introduction.** J'ai donné dans ma Thèse (Rendiconti del Circ. Mat. Palermo, 1906, f. 22, p. 53) une définition de la distance[1]) de deux courbes de Jordan qui m'a permis d'étendre à la classe des courbes de Jordan un grand nombre de propriétés des ensembles linéaires. J'indiquai aussi qu'il serait possible moyennant quelques précautions de donner une définition analogue pour la distance de deux surfaces. Je me propose d'indiquer ici cette définition et les principales propriétés de cette nouvelle notion.

2. **Surfaces de Jordan.** On peut concevoir de plusieurs façons la notion de surface. Si on néglige les questions de sens et d'orientation, si deux surfaces composées des mêmes points sont considérées comme identiques, une surface n'est qu'un ensemble de points, ensemble d'ailleurs satisfaisant à certains conditions (par exemple de coïncider avec sa frontière). Dans cette conception, on peut adopter pour la distance de deux surfaces une définition analogue à la définition ordinaire de la distance de deux ensembles ponctuels quelconques.

Nous tenons au contraire ici à faire intervenir d'une façon essentielle dans la définition d'une surface non seulement la position des points qui la composent, mais l'ordre relatif de ces points. Nous

[1]) J'appelle maintenant distance ce que j'appelais alors écart.

aurons alors une conception analogue à celle des courbes de Jordan, que certains appellent des „trajectoires“ pour bien marquer qu'une courbe de Jordan est définie non seulement par la position de ses points mais par l'ordre dans lequel ils sont parcourus.

C'est pourquoi nous proposons d'appeler surfaces de Jordan les ensembles ponctuels orientés que nous allons définir.

Une surface de Jordan est l'ensemble orienté S des points M qui correspondent aux points m d'une aire plane σ (contour compris) par une transformation univoque et continue — que nous désignerons par la notation

$$M = f(m), \quad (m \text{ sur } \sigma). \tag{1}$$

C'est à dire que cette relation fait correspondre à tout point m de σ un point déterminé M et que si m' de σ tend vers m le point $M' = f(m')$ tend vers le point $M = f(m)$. Cette notation abrégée remplace avantageusement l'ensemble équivalent des relations

$$X = a(x, y), \quad Y = b(x, y), \quad Z = c(x, y) \tag{2}$$

qui font correspondre à tout point m de σ, de coordonnées x, y, un point M de S de coordonnées X, Y, Z, les fonctions a, b, c, étant supposées uniformes et continues sur σ.

Pour simplifier, nous nous limiterons au cas où σ est une aire limitée par une courbe plane de Jordan sans point multiple, c'est à dire où σ est homéomorphe d'une aire circulaire s. Autrement dit, nous supposons que l'on peut établir entre σ et s une correspondance biunivoque et bicontinue.

Il est évident qu'il existe une infinité de transformations univoques et continues $M = f(m)$ d'aires planes telles que σ qui font correspondre à leurs domaines de représentation σ le même ensemble de points de l'espace. Mais deux d'entre elles ne correspondent pas nécessairement à la même surface de Jordan puisque les points dont se composent cet ensemble peuvent être à chaque fois rangés dans un autre ordre.

C'est un problème qui exigerait quelques développements de définir exactement ce qu'on entend par ordre ou orientation des points d'une surface de Jordan et de déduire de définitions purement géométriques les conditions analytiques pour l'identité de deux surfaces de Jordan S, données par leurs représentations paramétriques

(1) $$M = f(m) \quad m \text{ dans } \sigma$$
(3) $$\mu = \varphi(m') \quad m' \text{ dans } \sigma'.$$

Pour plus de brièveté nous nous contenterons de poser ici ces conditions comme définition de l'identité de S, Σ.

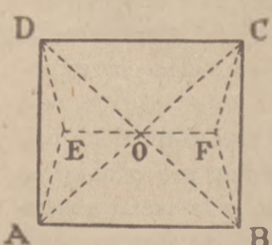
3. **Identité de deux surfaces de Jordan.** Si l'on peut établir entre σ et σ' une homéomorphie telle que les points M de S, μ de Σ — correspondant à deux points m de σ, m' de σ' qui se correspondent dans cette homéomorphie, — soient toujours en coïncidence, nous considérons les surfaces S et Σ comme non distinctes.

Analytiquement, cette condition s'exprime ainsi: il existe une transformation biunivoque $m' = \alpha(m)$ de σ en σ', telle que

$$f(m) \equiv \varphi(\alpha(m)), \qquad (m \text{ sur } \sigma).$$

Mais il est évident qu'une telle condition n'est pas nécessaire pour l'identité des surfaces S et Σ. Pour le faire mieux voir donnons un exemple.

Prenons pour σ et σ' un même carré $ABCD$ et définissons S par la relation identique $M = m$ dans σ; c'est à dire que S est aussi ce même carré $ABCD$, dont les points sont rangés dans le même ordre sur S et sur σ. D'autre part traçons dans $ABCD$ un segment EF de longueur l, parallèle à AB et symétrique par rapport au centre 0. Faisons correspondre à $AEFB$, $DEFC$, BFC, AED considérés comme appartenant à σ' les triangles AOB, DOC, BOC, AOB considérés comme appartenant à Σ. (On pourra supposer que chaque segment de σ' parallèle à AB correspond à un segment de Σ situé sur la même parallèle à AB et que la transformation respecte le rapport des distances parallèles à AB, à l'intérieur de chacune des 4 aires partielles).



Ceci étant, Σ est encore formé des points du carré $ABCD$ lequel a subi des contractions par ci, des dilatations par là, qui n'ont pas altéré la disposition respective des points. Autrement dit, il n'y a pas lieu de considérer S et Σ comme des surfaces distinctes. Pourtant si on fait coïncider un point M de S et un point μ de Σ correspondant aux points m de σ, m' de σ', il est impossible de considérer la correspondance entre m et m' comme une homéomorphie: cette correspondance est une transformation univoque et continue de m' en m mais non biunivoque.

Cependant s'il est impossible d'établir entre m et m' une homéomorphie telle que M et μ coïncident, il existe des homéomorphies de m et m' telles que M et μ soient aussi voisins qu'on le veut. Remplaçons en effet EF par un segment ef semblablement placé mais de longueur ε. Et établissons entre m et m' une homéomorphie du carré sur lui même où ef est transformé en EF de sorte que $AefB$, $DefC$, BfC, AeD se transforment en $AEFB$, $DEFC$, BFC, AED par des dilatations ou contractions parallèles à AB. Alors M et μ sans coïncider en général sont sur une parallèle à AB à une distance inférieure à ε. Par conséquent il existe quelque soit ε une homéomorphie entre m de σ et m' de σ' telle que les points correspondants de S et de Σ restent à une distance inférieure à ε. Ceci va nous conduire à la définition générale de l'identité de deux surfaces de Jordan, par l'intermédiaire de la notion de convergence d'une suite de surfaces.

4. **Limite d'une suite de surfaces de Jordan.** On dit qu'une suite des surfaces de Jordan S_1, S_2, ... S_n, ... converge vers une surface de Jordan S si l'on peut établir entre S et S_n une homéomorphie telle que la distance de deux points correspondants M, M_n, converge vers zéro avec $\frac{1}{n}$ et cela uniformément quand M parcourt S. Nous entendons par là que si

$$M_n = f_n(m_n) \qquad (m_n \text{ dans } \sigma_n)$$
$$M = f(m) \qquad (m \text{ dans } \sigma)$$

sont des représentations quelconques de S_n et de S, il existe pour chaque valeur de n une homéomorphie

$$m_n = \alpha_n(m) \qquad (m \text{ dans } \sigma)$$

entre σ et σ_n, telle que la distance des points correspondants

$$M'_n = f_n(\alpha_n(m)) \qquad \text{de } S_n$$
$$M = f(m) \qquad \text{de } S$$

converge vers zéro avec $\frac{1}{n}$ et cela uniformément quand m parcourt σ. C'est ce que nous entendrons en disant que $F_n(m)$ converge vers $f(m)$ uniformément sur σ, en posant $F_n(m) \equiv f_n(\alpha_n(m))$.

Pour que cette définition soit conforme à la notion générale de limite, il faut que dans le cas particulier où S_1, S_2, ... sont identiques, elles soient identiques à leur limite. Si donc on suppose les $f_n \equiv \varphi$ et par suite les S_n identiques à Σ, c'est à dire si l'on suppose qu'il existe pour chaque valeur de n une homéomorphie $m' = \alpha_n(m)$ telle que $\varphi(\alpha_n(m))$ converge vers $f(m)$, les surfaces S et Σ seront identiques. C'est bien entendu ce qui a lieu en particulier s'il existe une certaine homéomorphie $m' = \alpha(m)$ telle que $f(m) \equiv \varphi(\alpha(m))$. Il suffira de prendre dans ce cas $\alpha_n(m) \equiv \alpha(m)$ quel que soit n. De sorte que le cas particulier où nous avions admis comme évidente l'identité des deux surfaces rentre comme cas particulier dans la définition générale suivante:

Pour que deux surfaces de Jordan S et Σ données par leurs représentations paramétriques

$$M = f(m) \qquad (m \text{ dans } \sigma)$$
$$\mu = \varphi(m') \qquad (m' \text{ dans } \sigma')$$

ne soient pas distinctes, il faut et il suffit que l'on puisse établir entre leurs points une homéomorphie où la distance de deux points correspondants soit aussi petite que l'on veut. Autrement dit, il faut que quelque soit ε il existe une homéomorphie $m' = \gamma_\varepsilon(m)$, entre σ et σ', telle que la distance des points

$$f(m), \qquad \varphi(\gamma_\varepsilon(m))$$

reste inférieure à ε quand m parcourt σ.

Il est à peine utile de remarquer que si S est identique à Σ et aussi à la surface Θ définie par

$$M'' = \varphi(m'') \qquad (m'' \text{ dans } \sigma'')$$

les deux surfaces Σ et Θ sont bien identiques d'après cette définition. Car il existe une homéomorphie $m'' = \delta_\varepsilon(m)$ telle que la distance des points

$$f(m), \qquad \varphi(\delta_\varepsilon(m))$$

reste inférieure à ε; donc les points

$$\varphi(\gamma_\varepsilon(m)) \qquad \text{et } \varphi(\delta_\varepsilon(m))$$

restent à distance inférieure à 2ε et alors si $m = h_\varepsilon(m')$ est la représentation en sens inverse de l'homéomorphie $m' = \gamma_\varepsilon(m)$ on voit qu'il y a une homéomorphie $m'' = \delta_\varepsilon(h_\varepsilon(m'))$ entre σ et σ'' telle que la distance entre les points correspondants m', m'' de Σ et de Θ soit inférieure au nombre arbitraire 2ε.

5. **Distance de deux surfaces de Jordan.** Nous sommes maintenant en mesure de définir la „distance" entre deux surfaces de Jordan quelconques S et Σ.

Etablissons entre S et Σ une homéomorphie H quelconque. La distance de deux points correspondants, soit $M\mu$, a une borne supérieure finie, soit d_H. Nous appellerons distance de S et de Σ la borne inféreure de d_H (qui est ≥ 0) quand H varie de façon quelconque. Comme cette borne ne dépend pas de l'ordre dans lequel se présentent S et Σ, on pourra la désigner par la notation (S, Σ) ou (Σ, S).

Pour la calculer on pourra opérer de la façon suivante: on considère deux représentations arbitraires de S et Σ

$$M = f(m) \qquad \text{dans } \sigma$$
$$\mu = \varphi(m') \qquad \text{dans } \sigma'.$$

On réalise l'homéomorphie H entre M et μ par l'intermédiaire d'une homéomorphie h, soit $m' = h(m)$ entre σ et σ' et on fait correspondre à $M = f(m)$ le point $M' = \varphi(h(m))$ de Σ. On calcule la borne supérieure d_H de la distance des points $f(m)$, $\varphi(h(m))$ — distance que nous représenterons par $\overline{f(m), \varphi(h(m))}$ — et on prend pour (S, Σ) la borne inférieure de d_H quand l'homéomorphie $m' = h(m)$ varie de toutes les façons possibles.

On en déduit facilement que pour trois surfaces de Jordan quelconques S, S_1, S_2, on a

$$(S_1, S_2) \leq (S, S_1) + (S, S_2).$$

On a vu que pour deux surfaces de Jordan quelconques (S, Σ), on a $(S, \Sigma) \geq 0$. Il est manifeste que si S et Σ sont identiques, leur distance sera nulle. Peut-elle être nulle pour deux surfaces distinctes? Dire que $(S, \Sigma) = 0$, c'est dire que quel soit ε, il existe une homéomorphie $m' = h_\varepsilon(m)$ de σ et σ' telle que la distance des deux points correspondants de S et Σ reste inférieure à ε. C'est à dire précisement que S et Σ ne sont pas distinctes.

Enfin il est bien manifeste que cette définition de la distance a les relations que comporte cette notion avec la définition usuelle de la limite préalablement rappelée. En d'autres termes, la condition nécessaire et suffisante pour que la surface S_n converge vers la surface Σ quand n croit indéfiniment est que la distance (Σ, S_n) converge vers zéro.

Remarque. Si S_n tend vers S, il y a pour chaque valeur de

n une homéomorphie H_n entre les points M_n de S_n et M de S telle que la distance $M_n M$ converge vers zéro avec $\frac{1}{n}$ et cela uniformément quand M parcourt S. En serait-il de même si on substituait à H_n une autre homéomorphie K_n prise arbitrairement? En adoptant les notations du § 2, page 5, c'est à dire en supposant que $F_n(m)$ converge uniformément vers $f(m)$ sur σ, et en désignant par $m = \lambda_n(p)$ une homéomorphie quelconque de σ sur lui même, est-ce que $F_n(\lambda_n(p))$ va converger uniformément vers $f(p)$ quel que soit le point p de S?

L'exemple suivant montre immédiatement que cela n'a pas lieu nécessairement. Nous avons vu qu'on peut toujours supposer que σ soit un cercle de rayon égal à l'unité. Admettons qu'il en soit ainsi et prenons $\lambda_n(p)$ de sorte que dans l'homéomorphie $m = \lambda_n(p)$, m et p soient alignés avec le centre 0 de σ et que $\overline{0m} = \overline{0p}\, e^{n(\overline{0p}-1)}$.

Si p est sur le contour de σ, $F_n(\lambda_n(p)) = F_n(p)$ de sorte que le contour de S_n tend encore vers le contour de S. Mais si p est un point intérieur à σ, on voit facilement que le point $F_n(\lambda_n(p))$ tend vers le point $f(0)$: l'intérieur de S_n tend non pas vers l'intérieur de S mais vers un seul point $f(0)$ intérieur à S,

6. **Propriétés de la classe des surfaces de Jordan.** 1° Nous avons appelé ailleurs d'une façon générale *classe* (D)[1]) toute classe d'éléments où la limite d'une suite d'éléments peut être définie par l'intermédiaire d'une „distance". Autrement dit, la classe doit être telle qu'à tout couple d'éléments S, Σ on peut faire correspondre un nombre $(S, \Sigma) = (\Sigma, S) \geq 0$ satisfaisant aux trois conditions suivantes — et qui sera pour cette raison appelée la distance de ces deux éléments:

1° (S, Σ) est positif si S et Σ sont distincts et nul dans le cas contraire.

2° la condition nécessaire et suffisante pour que S_n tende vers S est que (S_n, S) tende vers zéro.

3° pour trois éléments quelconques S, S_1, S_2 de la classe on a

$$(S_1, S_2) \leq (S, S_1) + (S, S_2).$$

L'utilité de cette notion de classe (D) consiste en ce qu'un grand nombre de raisonnements faits pour établir certaines proprié-

---

[1]) M. Hausdorf, en reproduisant notre définition, donne à une telle classe le nom d'espace métrique.

tés de certaines classes d'éléments peuvent être faits une fois pour toutes quand on a reconnu que ces classes sont des classes (D). Ceci au point de vue pratique. Au point de vue philosophique cette manière de procéder a l'avantage de permettre de distinguer parmi les propriétés d'une classe (D) particulière celles qui résultent simplement du fait que c'est une classe (D) de celles qui tiennent véritablement à la nature particulière de la classe envisagée.

D'autre part il est important de remarquer que si les plus simples des classes d'éléments sont des classes (D), il en existe d'autres parmi celles dont le développement de l'Analyse a amené la considération pour lesquelles aucune définition de la distance satisfaisant aux conditions 1⁰ et 3⁰ n'est compatible moyennant la condition 2⁰ avec la définition de la limite usuellement admise dans ces classes.

C'est donc pour une classe d'éléments une propriété très importante et fertile en conséquences que d'être une classe (D): nous venons de démontrer que *la classe des surfaces de Jordan est une classe* (D).

2⁰ Nous avons appelé ailleurs *classe séparable* une classe d'éléments de laquelle on peut extraire une suite N d'éléments $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ telle que tout élément S de la classe appartienne à la suite N ou soit limite d'une suite convenablement extraite de N. Nous avons prouvé que certaines classes assez simples ne sont pas séparables, mais que les classes séparables jouissent de nombreuses propriétés généralisant celles de l'espace géométrique.

La classe des surfaces de Jordan est aussi une classe séparable.

En effet représentons une surface de Jordan S sous la forme (2) du § 2, page 5. On sait que toute fonction continue de 2 variables x, y peut être représentée approximativement par un polynome en x, y. D'autre part en remplaçant les coefficients de ce polynome par des valeurs rationnelles suffisamment approchées, on modifiera peu l'approximation. Par conséquent, quel que soit n, il existe des polynomes $a_n(x, y)$, $b_n(x, y)$, $c_n(x, y)$ à coefficients rationnels tels que la distance de la surface S à la surface Σ_n

$$X = a_n(x, y), \quad Y = b_n(x, y), \quad Z = c_n(x, y)$$

soit inférieure à $\frac{1}{n}$.

Or l'ensemble des surfaces dont les coordonnées peuvent être représentées par des polynomes en x, y à coefficients rationnels est évidemment dénombrable, c'est à dire peut s'ordonner suivant une suite $S_1, S_2, \ldots$ Et la surface Σ_n est l'une S_{k_n} des surfaces de cette suite. *Ainsi on peut tracer une fois pour toutes dans l'espace une suite N de surfaces de Jordan $S_1, S_2, \ldots$ telle que toute surface de Jordan, S, soit limite d'une suite extraite de N.* Et on peut même supposer comme nous venons de le voir que les surfaces de la suite N sont algébriques à coefficients rationnels. On pourait aussi supposer que les surfaces de N sont des surfaces polyédrales dont les sommets ont des coordonnées rationnelles.

Le raisonnement précédent montre que non seulement la classe des surfaces de Jordan est séparable mais encore *qu'elle est parfaite* — c'est à dire que chaque élément S de la classe est limite d'une suite d'éléments de la classe.

3° Nous avons aussi distingué parmi les classes (D), les classes (D) *complètes*. Pour une classe où la définition de la limite est donnée, si cette définition peut s'exprimer par l'intermèdiaire d'une distance, elle peut l'être de plusieurs façons. Par exemple si (S, Σ) est une distance, $2\,(S, \Sigma)$ ou $\dfrac{(S, \Sigma)}{1 + (S, \Sigma)}$ sont aussi, comme il est facile de s'en assurer, des distances qni conduisent à la même définition de la limite. Nous dirons que la classe est *compléte* si parmi les définitions possibles de la distance il en est une qui satisfait au critère de convergence de Cauchy: la condition nécessaire et suffisante pour que la suite $S_1, S_2, \ldots S_n \ldots$ soit convergente est que la plus grande des distances de S_n aux surfaces de rang suivant converge vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

On conçoit immédiatement que le fait pour une classe (D) d'être compléte simplifie de beaucoup son étude. D'autre part M. Chittenden a montré qu'une classe (D) n'est pas nécessairement complète. Il est donc intéressant de prouver comme nous allons le faire que la classe des surfaces de Jordan est complète.

4° Nous allons même montrer que le critère de Cauchy s'applique à la définition même de la distance de deux surfaces que nous avons adoptée ci dessus.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de surfaces de Jordan $S_1, S_2, \ldots$ soit convergente est que, quel que soit $\varepsilon > 0$, la distance de S_n à chacune des surfaces suivantes soit inférieure à ε pour n assez grand.

La condition est évidemment nécessaire en vertu de la propriété 2° de la distance.

Inversement supposons la condition vérifiée. Si l'on peut extraire de la suite des S_n une suite convergente $S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots$ la distance de S_{n_i} à la limite S de cette suite partielle sera inférieure au nombre positif arbitraire ε pour n_i assez grand: $n_i > k'$. Si d'autre part on a $(S_n, S_r) < \varepsilon$ pour $r > n > k''$, on aura pour $n_i > n$ et $n_i > k'$

$$(S_n, S_{n_i}) < \varepsilon \quad \text{et} \quad (S, S_{n_i}) < \varepsilon.$$

D'où
$$(S, S_n) < 2\varepsilon \quad \text{pour } n > k''.$$

Donc toute la suite $S_1, S_2 \ldots$ converge aussi vers la même limite S.

Reste à établir l'existence de la suite partielle convergente $S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots$

Observons que par hypothèse on peut choisir les n_i croissant de sorte que $(S_{n_i}, S_{n_{i+1}}) < \frac{1}{2^i}$ et rappelons que si l'on a choisi une représentation paramétrique

$$M_i = f_i(m), \qquad (m \text{ dans } s)$$

de S_{n_i}, on peut toujours choisir celle

$$M_{i+1} = f_{i+1}(m), \qquad (m \text{ dans } s)$$

de $S_{n_{i+1}}$ de sorte que la distance des deux points $f_i(m), f_{i+1}(m)$ soit inférieure ou aussi peu supérieure à la distance $(S_{n_i}, S_{n_{i+1}})$ que l'on veut. En particulier, on pourra supposer que la distance $\overline{f_i(m), f_{i+1}(m)} < \frac{1}{2^{i+1}}$. En opérant ainsi de proche en proche, on définira $f_1, f_2, \ldots$ de sorte que quels que soient les entiers i, j:

$$\overline{f_i(m), f_{i+j}(m)} \leq \overline{f_i\, f_{i+1}} + \overline{f_{i+1}, f_{i+2}} + \ldots \overline{f_{i+j-1}, f_{i+j}} \leq \frac{1}{2^i}.$$

Si la représentation $M_i = f_i(m)$ est explicitée sous la forme

$$X_i = a_i(x, y), \quad Y_i = b_i(x, y), \quad Z_i = c_i(x, y);$$

on voit qu'on aura quels que soient les entiers i, j:

$$| a_i(x, y) - a_{i+j}(x, y - | \leq \overline{f_i(m), f_{i+j}(m)} \leq \frac{1}{2^i}.$$

Par suite les fonctions $a_i(x, y)$ convergent uniformément vers une fonction continue; de même pour les b_i et les c_i. Donc la suite S_{n1}, S_{n2}, ... est convergente.

7. En résumé la classe des surfaces de Jordan est une classe (D) parfaite séparable et complète. C'est donc ce que j'ai appelé ailleurs (Thèse) une classe normale. Or on peut dire en gros que ces classes possèdent toutes celles des propriétés des ensembles à 1, 2, 3 dimensions qui ne dépendent pas du nombre de dimensions.

8. **Ensembles compacts de surfaces de Jordan.** D'après un théorème bien connu de Weierstrass la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de points de l'espace soit borné est que cet ensemble comporte un nombre fini de points ou que de tout sous ensemble infini de points de cet ensemble on puisse extraire une suite convergente.

Appelons ensemble compact un tel ensemble. S'il est formé de points de l'espace, il n'y a aucune différence entre un ensemble borné et un ensemble compact. Il n'en est plus de même s'il s'agit d'ensembles appartenant à des classes de nature plus compliquée. Or nous avons montré ailleurs que la généralisation qui importe c'est celle de la notion d'ensemble compact, non celle d'ensemble borné, qu'en effet les propriétés des ensembles bornés de points de l'espace ordinaire qui s'étendent à celles d'ensembles d'éléments de classes plus complexes supposent ces ensembles compacts et non seulement bornés.

Il est donc important de définir et de savoir reconnaître les *ensembles compacts de surfaces de Jordan.* On appellera encore ainsi tout ensemble E de surfaces de Jordan composé d'un nombre fini de ces surfaces ou tel que de tout sous ensemble infini de E on puisse extraire une suite convergente.

Pour qu'un ensemble de surfaces soit compact il faut que cet ensemble soit borné, c'est à dire que l'on puisse enfermer toutes ces surfaces dans un domaine borné, par exemple dans une même sphère. Mais cette condition n'est pas suffisante comme le montre l'exemple des morceaux de cylindres:

$$x = 2\Pi t; \quad y = \sin 2^n \Pi t; \quad z = z$$
$$0 \leq t \leq 1; \quad 0 \leq z \leq 1$$

qui forment un ensemble borné non compact.

C'est Arzela qui a obtenu la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de fonctions continues soit compact.

Elle s'obtient en exigeant de ces fonctions d'être non seulement bornées dans leur ensemble mais encore également continues c'est à dire telles que l'on puisse rendre aussi petite que l'on veut l'oscillation de l'une quelconque d'entre elles dans un intervalle de longueur inférieure à une quantité choisie la même pour toutes ces fonctions.

Il ne faudrait pas en déduire que les représentations paramétriques d'un ensemble compact de surfaces sont également continues, car une surface n'a pas une seule représentation paramètrique. Nous pouvons seulement dire: la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de surfaces de Jordan soit compact est qu'il existe un système de représentations paramétriques de ces surfaces tel que les fonctions définissant ces représentations soient bornées et également continues.

9. **Forme géométrique de la condition de compacité.** Le fait qu'un ensemble de surfaces est compact est une propriété de cet ensemble indépendante du mode de représentation adoptée. Il y a donc intérêt à exprimer cette condition sous une forme géométrique également indépendante du choix de la représentation paramétrique des surfaces de l'ensemble. La condition qu'un ensemble de surfaces est borné satisfait déjà à ce desideratum. On va montrer que la condition analytique d'égale continuité peut être remplacé par la condition d'égale divisibilité.

Nous dirons que des surfaces de Jordan sont *également divisibles* si quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut les diviser en un même nombre de morceaux semblablement disposés et dont les oscillations sont inférieures à ε.

Chaque morceau est une surface de Jordan, c'est à dire que si la surface S est l'image d'une aire plane σ limite par une courbe de Jordan sans points multiples, chaque morceau de S est la partie de S qui correspond à la partie de σ limitée extérieurement par une nouvelle courbe de Jordan sans point multiple.

D'autre part, l'oscillation d'une surface est la longueur de la plus grande corde de cette surface.

Il faut remarquer que si on considère deux surfaces divisées en n morceaux, il est possible d'établir entre les deux surfaces une correspondance telle qu'à l'intérieur d'un morceau de l'un corresponde l'intérieur d'un morceau de l'un corresponde l'intérieur d'un morceau de l'autre et inversement et ceci de façon que ces correspondances partielles soient bicontinues.

Mais si les n morceaux sont disposés de façon quelconque cette correspondance ne sera pas bicontinue pour la surface entière; elle sera discontinue le long de certaines frontières de morceaux.

En disant que les morceaux sont semblablement disposés, nous entendrons qu'on peut établir entre les deux surfaces une homéomorphie dans lesquelles à un morceau de l'une correspond un morceau de l'autre et inversement.

10. **Condition nécessaire.** Si un ensemble de surfaces de Jordan est compact, ces surfaces sont bornées dans leur ensemble et également divisibles.

Il est manifeste que les surfaces de l'ensemble considéré E sont toutes comprises dans une même sphère; autrement il y aurait au moins une surface S_n de E non comprise dans une sphère T_n de centre fixe 0, rayon n. Or on peut de la suite $S_1, S_2, \ldots$ extraire une suite convergente et la limite S devrait être à la fois une surface continue limitée et n'appartenir à aucune des sphères T_n.

Les surfaces de l'ensemble E sont également divisibles.

Nous allons même construire un mode de division des surfaces S qui montre qu'on peut choisir une disposition régulière des morceaux.

Considérons une quelconque, soit S, des surfaces de E et soit

$$M = \varphi(m') \qquad (m' \text{ dans } \sigma)$$

une représentation paramétrique déterminée de S sur une aire σ que nous supposerons un carré indépendant de S. Une infinité d'autres représentations paramétriques de S seront de la forme

$$M = \varphi(\alpha(m)) \qquad (m \text{ dans } \sigma)$$

où $m' = \alpha(m)$ est une homéomorphie de σ sur lui même. Décomposons maintenant le carré σ par un carrelage de côté ω. Quand m décrit chacun de ces carreaux, le point $\varphi(\alpha(m))$ décrit une certaine région de S et si le carré σ contient n carreaux, à ces n carreaux correspondent une division de S en n morceaux. Appelons $\Theta(S, \alpha, \omega)$ la plus grande des oscillations de S dans chacun de ces morceaux et $\theta(S, \omega)$ la borne inférieure de $\Theta(S, \alpha, \omega)$ quand on substitue à $m' = \alpha(m)$ toutes les homéomorphies de σ sur lui-même. Observons que quelle que soit la fonction α choisie pour chaque surface S de E, on obtient une division de chaque surface de E en un même nombre de morceaux semblablement disposés.

Appelons $\Delta(\omega)$ la borne supérieure de $\theta(S, \omega)$ quand S parcourt E. Il est manifeste que si on prend pour ω, la moitié ω_1 le quart ω_2, ... du côté du carré σ, $\Delta(\omega)$ ne peut croître quand ω décroit. Soit δ sa limite quand ω tend vers zéro. Nous allons montrer que $\delta = 0$. Il en résultera que les surfaces de S sont également divisibles. Car si $\delta = 0$, et si ε est un nombre positif arbitraire on pourra prendre ω_k assez petit pour que $\Delta(\omega_k) < \varepsilon$. Et alors $\theta(S, \omega_k) < \varepsilon$ quel que soit S de E. Donc il existe pour chaque S une homéomorphie $m' = \alpha_s(m)$ telle que $\Theta(S, \alpha_s, \omega_k) < \varepsilon$. Or ω_k correspond à un nombre n_k de carreaux indépendants de S. Donc on peut définir par l'intermédiaire des α_s une division de toutes les surfaces S de E en un même nombre n_k de morceaux dont les oscillations sont $< \varepsilon$.

Reste à montrer que $\delta = 0$. Si $\delta > 0$, on aurait $\Delta(\omega_i) \geq \delta > 0$ quel que soit ω_i; il serait donc possible de trouver une surface S_i de E, telle que $\theta(S_i, \omega_i) > \frac{\delta}{2}$.

Or, de la suite $S_1, S_2, \ldots$ de surfaces de l'ensemble compact E on pourrait extraire une suite convergente que nous pouvons appeler $S'_1, S'_2, \ldots$ Soient $\omega'_1, \omega'_2, \ldots$ la suite correspondante extraite de $\omega_1, \omega_2, \ldots$ et soit Σ la surface limite de $S'_1, S'_2, \ldots$ et

$$M' = f(m) \qquad (m \text{ dans } s)$$

sa représentation paramétrique. On a vu (§ 4) que si la représentation primitivement choisie pour S'_i est

$$M_i = \varphi_i(m' \varphi) \qquad (m' \text{ dans } s)$$

il existe une homéomorphie $m' = \alpha_i(m)$ de s sur lui même telle que $\varphi_i(\alpha(m))$ converge uniformément dans s vers $f(m)$. Pour i assez grand , la distance $(\Sigma, S'_i) < \frac{\delta}{6}$ et l'oscillation de $f(m)$ sur un des carreaux de côtés ω' est $< \frac{\delta}{6}$. Donc l'oscillation de $\varphi_i(\alpha_i(m))$ sur un de ces carreaux est inférieure à $\frac{\delta}{2}$. Par suite $\Theta(S'_i, \alpha_i, \omega'_i) \leq \frac{\delta}{2}$ d'où finalement $\theta(S'_i, \omega'_i) \leq \frac{\delta}{2}$, qui conduit à la contradiction annoncée.

11. **Condition suffisante.** Si des surfaces sont bornées dans leur ensemble et également divisibles, l'ensemble E de ces surfaces est compact.

Prenons au hasard dans E une suite infinie de surfaces distinctes, $S_1, S_2, \ldots$ et soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ une suite de nombres positifs convergeant vers zéro. Il y a par hypothèse une division de chaque surface S de l'ensemble E en un même nombre fini n_i de morceaux dont les oscillations sont toutes $< \varepsilon_i$. De plus on peut supposer les morceaux de chaque S semblablement disposés. C'est à dire qu'on peut supposer l'existence d'une homéomorphie de l'une S_1 des surfaces S avec chacune des autres telle que chaque morceau se corresponde. Prenons alors un point dans chacun des n_i morceaux de S_1, la première surface, soient les points $A^i_{1,1}$; $A^i_{2,1}$; $\ldots$ $A^i_{n_i,1}$. Et prenons dans chacun des n_i morceaux de S_k les points correspondants $A^i_{1,k}$; $A^i_{2,k}$; $A^i_{n_i,k}$. Considérons alors la suite T^k des points de S_k

$$A^1_{1,k};\ \ldots\ A^1_{n_1,k};\ \ldots\ A^2_{1,k};\ \ldots\ A^2_{n_2,k};\ \ldots\ A^i_{1,k};\ \ldots\ A^i_{n_i,k};\ \ldots$$

Puisque les surfaces de E sont contenues dans un domaine borné fixe, il en est de même des points de toutes les suites T^1, $T^2, \ldots$ Par conséquent on peut extraire de la suite des T^k une suite telle que les points d'un rang fixe dans chaque T^k forment une suite convergente. Substituons à la suite des S_k la suite extraite des S_k qui correspond à la suite convergente des T^k. Cela reviendra pour simplifier les notations à supposer que la suite des T^k elle-même converge. Il s'agit de montrer que la suite des S_k converge uniformément, ou encore d'après le § 6, 3° , qu'elle satisfait au critère de Cauchy.

Or soit ε un nombre positif arbitraire. En prenant i assez grand, on aura $\varepsilon_i < \frac{\varepsilon}{3}$; i étant fixe en prenant k assez grand ($k > k_0$) les distances $A^i_{h,k}$, $A^i_{h,k+j}$ seront toutes inférieures à $\frac{\varepsilon}{3}$ pour tout entier j et pourtout entier $h < n_i$.

Prenons maintenant un point B_k quelconque de S_k et le point correspondant B_{k+j} de S_{k+j} dans l'homéomorphie qui par hypothèse fait correspondre les n_i morceaux de ces deux surfaces morceau par morceau. B_k se trouve dans au moins un des morceaux de S_k, soit par exemple celui qui contient $A^i_{h,k}$; alors B_{k+j} se trouve dans le morceau de S_{k+j} qui contient $A^i_{h,k+j}$.

Par suite

$$B_k, B_{k+j} \leq B_k, A^1_{h,k} + A^1_{h,k}, A^1_{h,k+j} + A^1_{h,k+j}, B_{k+j}$$
$$\leq \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon}{3} + \varepsilon_1 \leq \varepsilon.$$

quelle que soit la position de B_k sur S_k. Finalement on a bien $(S_k, S_{k+j}) \leq \varepsilon$ pour $k > k_0$ et j quelconque.

En résumé nous avons complètement démontré que:

la condition nécessaire et suffisante pour que des surfaces de Jordan forment un ensemble compact de surfaces est que ces surfaces soient également divisibles et contenues dans un domaine borné.

Le 27 Décembre 1923.

Bemerkungen über das Prinzip der virtuellen Verrückungen in der Hydrodynamik inkompressibler Flüssigkeiten.

Von

Leon Lichtenstein in Leipzig.

1. Sei T irgendein von einer inkompressiblen homogenen oder heterogenen Flüssigkeit erfüllter Bereich, dessen Begrenzung S etwa aus einer endlichen Anzahl Stücke analytischer und regulärer Flächen besteht. Ein Teil der Oberfläche, S', sei von starren Wänden gebildet, der übrige Teil, S'', sei frei. Es möge ϱ die als abteilungsweise stetig vorausgesetzte Dichte, $d\tau$ das Volumen-, $d\sigma$ das Flächenelement bezeichnen. Die betrachtete Flüssigkeit möge sich unter der Wirkung der Volumkräfte $\varrho X d\tau$, $\varrho Y d\tau$, $\varrho Z d\tau$ sowie der Oberflächenkräfte $X_\sigma\, d\sigma$, $Y_\sigma\, d\sigma$, $Z_\sigma\, d\sigma$ im Gleichgewicht befinden. Die Einheitskräfte X, Y, Z werden als stetige Ortsfunktionen im Innern und auf dem Rande von T, kürzer in $T + S$, X_σ, Y_σ, Z_σ als ebensolche Ortsfunktionen auf S'' vorausgesetzt.

Es seien jetzt ξ, η, ζ irgendwelche in $T + S$ erklärte stetige Funktionen, die daselbst stetige oder doch abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben und der Gleichung

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

genügen und überdies die Beziehung

$$\xi \cos(n, x) + \eta \cos(n, y) + \zeta \cos(n, z) = 0 \tag{2}$$

erfüllen. In (2) bezeichnet (n) die Richtung der Innennormale. Diese Gleichung besagt, daß der Vektor ξ, η, ζ in die Tangentialebene der Fläche S' fällt. In etwaigen Kanten ist er tangential zu diesen gerichtet, in körperlichen Ecken gleich Null.

Sei ε ein reeller Parameter. Wir setzen $\delta x = \varepsilon \xi$, $\delta y = \varepsilon \eta$, $\delta z = \varepsilon \zeta$. Durch die Transformation

$$x^* = x + \delta x,\ y^* = y + \delta y.\ z^* = z + \delta z, \tag{3}$$

eine „virtuelle Verrückung", wird T für alle hinreichend kleinen $|\varepsilon|$, wie sich leicht zeigen läßt, ein Bereich T^* umkehrbar eindeutig und stetig zugeordnet. Aus (1) und (2) folgen die Beziehungen

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

in T,

$$\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta z \cos(n, z) = 0 \tag{5}$$

auf S'.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen besagt nun, daß, sofern, wie vorausgesetzt wurde, die Volum- und Oberflächenkräfte das Gleichgewicht halten, ihre Arbeit für alle virtuellen Verrückungen verschwindet,

$$\int_T \varrho (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, d\tau + \int_{S''} (X_\sigma \delta x + Y_\sigma \delta y + Z_\sigma \delta z)\, d\sigma = 0. \tag{6}$$

Aus dieser Beziehung pflegt man mit Lagrange die Gleichgewichtsbedingungen abzuleiten, indem man, unter Hinweis auf die in der Mechanik der Massenpunktsysteme übliche Verwendung Lagrangescher Multiplikatoren, unter λ eine in $T + S$ stetige Funktion verstehend, die daselbst abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat, die Bedingungen dafür aufstellt, daß

$$\begin{aligned} &\int_T \left\{ \varrho (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + \lambda \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right) \right\} d\tau + \\ &\qquad + \int_{S''} (X_\sigma \delta x + Y_\sigma \delta y + Z_\sigma \delta z)\, d\sigma = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

gilt. Die teilweise Integration ergibt in bekannter Weise

$$\begin{aligned} &\int_T \left\{ \left(\varrho X - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \delta x + \left(\varrho Y - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) \delta y + \left(\varrho Z - \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) \delta z \right\} d\tau + \\ &\quad + \int_{S''} \{ (X_\sigma - \lambda \cos(n, x))\, \delta x + (Y_\sigma - \lambda \cos(n, y))\, \delta y + \\ &\qquad + (Z_\sigma - \lambda \cos(n, z))\, \delta z \} = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

woraus dann die Gleichgewichtsbedingungen

(9) $$\varrho X = \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \ \varrho Y = \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \ \delta Z = \frac{\partial \lambda}{\partial z}$$

in T,

(10) $$\lambda \cos(n, x) = X_\sigma, \ \lambda \cos(n, y) = Y_\sigma, \ \lambda \cos(n, z) = Z_\sigma$$

auf S'' folgen. Der Multiplikator λ hat die Bedeutung des Flüssigkeitsdruckes.

Eine direkte Begründung der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode bietet gewisse Schwierigkeiten. Durch die vorstehenden Überlegungen wird, wenn man von den Gleichungen (9) und (10) zu den Formeln (7) und (6) aufsteigt, bewiesen, daß die Beziehungen (9) und (10) für das Verschwinden der virtuellen Arbeit (6) bei Erfülltsein der Bedingungsgleichungen (4) und (5) hinreichen, nicht aber auch, daß sie hierzu notwendig sind. Daß dies tatsächlich der Fall ist, mithin daß das System der Gleichungen (9) und (10) und die Aussage des Prinzips der virtuellen Verrückungen vollkommen äquivalent sind, läßt sich ohne Schwierigkeit zeigen, sobald vorausgesetzt wird, daß ϱX, ϱY, ϱZ stetige Ableitungen erster Ordnung haben. Etwas weniger nahe liegt der Beweis, wenn diese Voraussetzung fallen gelassen wird. Hier liefert ein Hilfssatz von Herrn Haar, für den am Schluß dieses Aufsatzes ein sehr einfacher Beweis gegeben wird, die erforderlichen Hilfsmittel.

2. Sei (x_0, y_0, z_0) irgendein Punkt in T, in dem $\varrho X, \varrho Y, \varrho Z$ sich stetig verhalten, und sei K ein Würfel, dessen Kanten die Länge $2h$ haben und zu den Koordinatenachsen parallel sind, um (x_0, y_0, z_0) als Mittelpunkt ganz im Innern von T; h wird dabei so klein gewählt, daß $\varrho X, \varrho Y, \varrho Z$ in K stetig sind. Wir nehmen jetzt die Funktionen δx, δy, δz, die, wie vorhin, in $T + S$ stetig sind, in T abteilungsweise stetige Ableitungen erster Ordnung haben und den Gleichungen (4) und (5) genügen, speziell in $T - K$ gleich Null an. Dann muß

(11) $$\int_K \varrho\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, d\tau = 0$$

sein.

Sei nunmehr δx und δy irgendein Paar unendlich kleiner, in dem Quadrate Q,

(12) $$x_0 - h \leqq x \leqq x_0 + h, \ y_0 - h \leqq y \leqq y_0 + h,$$

nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetiger Funktionen, die den Bedingungen

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} = 0 \tag{13}$$

genügen und auf seinem Umfange verschwinden. Wir behaupten, es ist für alle z in

$$z_0 - h \leqq z \leqq z_0 + h \tag{14}$$

$$\int\limits_Q \varrho\,(X\delta x + Y\delta y)\,dx dy = 0. \tag{15}$$

Es möge, im Gegensatz zu dieser Behauptung, für einen Wert z_1 in (14) und ein bestimmtes Paar den vorstehenden Bedingungen genügender Fuuktionen δx, δy etwa

$$\int\limits_Q \varrho\,(X\delta x + Y\delta y)\,dx dy > 0 \tag{16}$$

sein. Wir wählen dann in dem Intervalle

$$z_1 - \varepsilon \leqq z \leqq z_1 + \varepsilon \qquad (\varepsilon < h) \tag{17}$$

$$\delta x = \widetilde{\delta x}\left(1 - \frac{|z - z_1|}{\varepsilon}\right),\ \delta y = \widetilde{\delta y}\left(1 - \frac{|z - z_1|}{\varepsilon}\right), \tag{18}$$

für alle anderen z in (14) dagegen $\delta x = \delta y = 0$. Die vorstehenden Funktionen δx, δy sowie die Funktion $\delta z = 0$ bilden wegen (13) ein System virtueller Verrückungen. Für hinreichend kleine ε wird wegen (16)

$$\int\limits_K \varrho\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,d\tau > 0, \tag{19}$$

was nicht möglich ist. Also gilt in der Tat die Beziehung (15).

Die Gleichung (13) ist offenbar die Bedingung dafür, daß es eine im Innern und auf dem Rande von Q nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion Θ gibt, so daß

$$\delta x = \frac{\partial \Theta}{\partial y},\ \delta y = -\frac{\partial \Theta}{\partial x} \tag{20}$$

gilt. Sei (x^0, y^0) irgendein Punkt auf dem Rande von Q. Man kann

$$\Theta = -\int\limits_{(x^0, y^0)}^{(x, y)} (\delta y dx - \delta x dy) \tag{21}$$

setzen. Wegen (20) ist auf dem Rande

$$\Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0. \tag{22}$$

In (15) eingesetzt, liefert dies

$$\int\limits_Q \left(\varrho X \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \varrho Y \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) dx dy = 0, \tag{23}$$

oder, falls ϱX und ϱY stetige oder allenfalls abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben, nach einer teilweisen Integration wegen (22)

$$\int\limits_Q \left\{ \frac{\partial}{\partial y}(\varrho X) - \frac{\partial}{\partial x}(\varrho Y) \right\} \Theta dx dy = 0. \tag{24}$$

Hieraus folgt aber

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varrho X) - \frac{\partial}{\partial x}(\varrho Y) = 0. \tag{25}$$

Wäre nämlich der Klammerausdruck in (24) in einem Punkte (x_1, y_1) in Q etwa > 0, so könnte man gewiß Θ, allen vorhin eingeführten Bedingungen genügend, in einer Umgebung von (x_1, y_1) positiv, sonst gleich Null wählen, so daß das Integral (24) positiv ausfallen würde. Es gilt also in K

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varrho X) = \frac{\partial}{\partial x}(\varrho Y) \tag{26}$$

und analog

$$\frac{\partial}{\partial z}(\varrho X) = \frac{\partial}{\partial x}(\varrho Z), \quad \frac{\partial}{\partial y}(\varrho Z) = \frac{\partial}{\partial z}(\varrho Y). \tag{27}$$

Die Formeln (26) und (27) gelten in der Umgebung jedes Stetigkeitspunktes in T. Aus Gründen der Stetigkeit gelten sie im Innern und auf dem Rande eines jeden Bereiches, in dem $\varrho X, \varrho Y, \varrho Z$ sich stetig verhalten, insbesondere also auch auf S. Also gibt es eine, bis auf eine additive Konstante bestimmte, in $T + S$ stetige Funktion $\bar{p}$, die stetige, oder doch abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat, so daß

$$\varrho X = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \quad \varrho Y = \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \quad \varrho Z = \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \tag{28}$$

gilt.

Die Gleichung (6) geht wegen

$$\int_T \varrho\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,d\tau = \int_T \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}\,\delta z\right) d\tau.$$

$$= -\int_S \bar{p}\,(\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta x \cos(n, z))\,d\sigma$$

$$= -\int_{S''} \bar{p}\,(\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta z \cos(n, z))\,d\sigma$$

über in

$$\text{(29)}\qquad \int_{S''} \{(X_\sigma - \bar{p}\cos(n, x))\,\delta x + (Y_\sigma - \bar{p}\cos(n, y))\,\delta y + (Z_\sigma - \bar{p}\cos(n, z))\,\delta z\,\}\,d\sigma = 0.$$

Diese Formel gilt für alle $\delta x, \delta y, \delta z$ auf S'', die sich dort stetig verhalten und überdies so beschaffen sind, daß

$$\text{(30)}\qquad \int_{S''} [\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta z \cos(n, z)]\,d\sigma = 0$$

ist. Man gewinnt die Beziehung (30) aus (4) durch Integration über T

$$\int_T \left[\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right] d\tau$$

$$\text{(31)}\qquad = -\int_S [\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta z \cos(n, z)]\,d\sigma$$

$$= -\int_{S''} [\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta z \cos(n, z)]\,d\sigma = 0.$$

Nach bekannten Sätzen folgt aus (29) und (31)

$$\text{(32)}\qquad X_\sigma = (\bar{p} + \alpha)\cos(n,x),\ Y_\sigma = (\bar{p} + \alpha)\cos(n,y),\ Z_\sigma = (\bar{p} + \alpha)\cos(n,z)$$
$$(\alpha \text{ konstant}).$$

Diese Formel bringt erneut zum Ausdruck, daß der Druck bislang nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Bekanntlich pflegt man den Wert des Druckes dadurch festzulegen, daß man ihn in denjenigen Punkten der Oberfläche, in denen $X_\sigma^2 + Y_\sigma^2 + Z_\sigma^2 = 0$ ist, verschwinden läst [1]). Setzt man jetzt $\bar{p} + \alpha = p$, so findet man

---

[1]) Man denke an den klassischen Versuch von Torricelli.

$$\varrho X = \frac{\partial p}{\partial x}, \; \varrho Y = \frac{\partial p}{\partial y}, \; \varrho Z = \frac{\partial p}{\partial z} \tag{33}$$

und

$$X_\sigma = p \cos(n, x), \; Y_\sigma = p \cos(n, y), \; Z_\sigma = p \cos(n, z) \tag{34}$$

aus S''. Die Formeln (33) und (34) sind die Grundgleichungen der Hydrostatik.

Die Beziehungen (20) sind in den bekannten allgemeinen Formeln

$$\delta x = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \; \delta y = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, \; \delta z = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \tag{35}$$

für die Komponenten eines Vektors $\delta x, \delta y, \delta z$, dessen Divergenz $\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}$ verschwindet, für $U = 0$, $V = 0$ enthalten. Man könnte natürlich zu den Formeln (33) und (34) auch dadurch gelangen, daß man für $\delta x, \delta y, \delta z$ in (11) die Ausdrücke (35) einsetzt und, wie vorstehend, teilweise integriert. Auf einem ähnlichen Wege gewinnt Herr Herglotz in einer schon länger zurückliegenden Arbeit die Bewegungsgleichungen eines Elektrons aus dem Hamiltonschen Prinzip [1]. Die Methode versagt, sobald $\varrho X, \varrho Y, \varrho Z$ nicht abteilungsweise stetige Ableitungen erster Ordnung haben. Diese Voraussetzung kann man entbehren, wenn man sich eines Hilfssatzes des Herrn Haar bedient, der folgenden Wortlaut hat [2].

Sei F irgendein beschränkter einfach zusammenhängender ebener Bereich, dessen Begrenzung C abteilungsweise stetige Tangente hat. Es seien U und V zwei in $F + C$ stetige Funktionen, und sei

$$\int_F \left(U \frac{\partial \Psi}{\partial x} + V \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) dx dy = 0 \tag{36}$$

für alle Ψ, die in $F + C$ stetig sind, auf C verschwinden und in F stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Alsdann ist das längs einer beliebigen geschlossenen stetig gekrümmten Kurve Γ in F erstreckte Integral

---

[1] Vgl. G. Herglotz, Zur Elektronentheorie, Gött. Nachrichten 1903, S. 357—382.

[2] A. Haar, Über die Variation der Doppelintegrale. Journal für Mathematik 149 (1919), S. 1—18.

$$\int_{\Gamma} (Udy - Vdx) = 0. \tag{37}$$

Es gibt also eine in $F + C$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion $\omega(x, y)$, so daß

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \; V = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \tag{38}$$

ist. Dieser Satz gilt, wie weiter unten gezeigt wird, auch wenn bezuglich der Funktionen U und V lediglich vorausgesetzt wird, daß sie in $F + C$ abteilungsweise stetig sind.

Es genügt offenbar für U, V, Ψ und ω entsprechend $-\varrho Y, \varrho X, \Theta, -p$ einzusetzen, um die Beziehungen (33) zu gewinnen und damit die Aequivalenz der Gleichgewichtsbedingungen (33) und der Aussage des Prinzips der virtuellen Verrückungen unter Zugrundelegung abteilungsweise stetiger $\varrho X, \varrho Y, \varrho Z$ darzutun.

Nun ein einfacher Beweis des Haarschen Hilfssatzes. Sei Γ eine geschlossene, doppelpunktfreie, stetig gekrümmte Kurve in F, Γ_1 eine zu dieser im Abstande ε parallele Kurve, D der von Γ, D_1 der von Γ_1 begrenzte endliche Bereich. Es möge übrigens Γ in D_1 liegen. Sei ferner $\chi(h)$ irgendeine nebst ihrer Ableitung in $< 0\,\varepsilon >$ stetige Funktion, die folgenden Bedingungen genügt,

$$\chi(0) = 1, \; \chi(\varepsilon) = 0, \; \chi'(0) = 0, \; \chi'(\varepsilon) = 0, \; \chi'(h) < 0 \quad \text{für } 0 < h < \varepsilon. \tag{39}$$

Wir nehmen $\Psi = 1$ in D, gleich 0 in $F - D_1$, auf jeder Parallelkurve Γ_h zu Γ in $D_1 - D$, deren Abstand von Γ den Wert $h \leqq \varepsilon$ hat, gleich $\chi(h)$. Sei (n) eine beliebige nach außen gerichtete Normale zu Γ und α der von (n) mit der x-Achse eingeschlossene Winkel. Sei schließlich P_h der Schnittpunkt von (n) mit Γ_h. Man überzeugt sich fast unmittelbar, daß in P_h

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \cos\alpha\, \chi'(h), \; \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \sin\alpha\, \chi'(h) \tag{40}$$

ist. Führt man jetzt die Bogenlänge s von Γ und den Abstand h als neue unabhängige Variablen ein, so erhält man wegen (40) für alle hinreichend kleinen ε

$$\int_{\Gamma}\int_0^{\varepsilon} ds\, (U\cos\alpha + V\sin\alpha)\, \chi'(h) \left(1 + \frac{h}{\mathfrak{r}}\right) dh = 0. \tag{41}$$

unter $\mathfrak{r}$ den Krümmungsradius der Kurve Γ im Punkte s verstanden. Wegen

$$(42)\quad \sin\alpha = -\frac{dx}{ds},\ \cos\alpha = \frac{dy}{ds},\ \left|\int_0^\varepsilon \chi'(h)\, h dh\right| < \varepsilon \left|\int_0^\varepsilon \chi'(h)\, dh\right| = \varepsilon$$

gibt (41) für $\varepsilon \to 0$ die gesuchte Formel

$$\int_\Gamma (U dy - V dx) = 0.$$

6. II. 1924.

Sur quelques propriétés des systèmes algébriques d'espaces à k dimensions contenus dans un espace linéaire à r dimensions.

Par

Alfred Rosenblatt.

1. Espaces linéaires de la variété de Grassmann.

1. Envisageons un espace linéaire S_r et rapportons ses points à une pyramide fondamentale $A^0, A^1, \ldots A^r$ au moyen de $r+1$ coordonnées $x_0, x_1, \ldots x_r$ projectives, ainsi que ses hyperplans au moyen des coordonnées projectives $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_r$. Soient $P^0, P^1, \ldots P^k$ $k+1$ points linéairement indépendants de cet espace. Ces points déterminent un espace linéaire S_k. Envisageons la matrice M à $r+1$ colonnes et à $k+1$ lignes formée par les coordonnées de ces points

$$(1) \qquad M = \begin{vmatrix} x_0^0, \ldots & x_r^0 \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \\ x_0^k, \ldots & x_r^k \end{vmatrix}.$$

Nous désignerons par $X_{i_0, i_1 \ldots i_k}$ ou bien par $(i_0, i_1, \ldots i_k)$ le mineur d'ordre $k+1$ de cette matrice formé de colonnes de numéros $i_0 < i_1 < \ldots < i_k$. Si l'on regarde ces mineurs comme des coordonnées projectives d'un espace linéaire à $R = \binom{r+1}{k+1} - 1$ dimensions rapporté à une pyramide fondamentale on obtient une variété algébrique dite *variété de Grassmann* V_d à d dimensions telle que les points Q de cette variété sont en correspondance uni-univoque avec les espaces S_k. Les nombres $X_{i_0, i_1 \ldots i_k}$ sont les *coordonnées de Grassmann* de l'espace S_k. On a $d = (r-k)(k+1)$.

La variété V_d de Grassmann est l'intersection *complète* des quadriques qui correspondent aux équations dites de D'Ovidio

$$(2) \qquad X_{i_0, i_1, \dots i_k} X_{j_0, j_1, \dots j_k} = \sum_{s=0}^{k} X_{j_s, i_1 \dots i_k} X_{j_0, \dots j_{s-1}, i_0, j_{s+1}, \dots j_k}$$

où $i_0, i_1, \dots i_k$ et $j_0, j_1, \dots j_k$ sont deux combinaisons de $k+1$ nombres parmi les nombres $0, 1, \dots r$; $i_0 < i_1 < \dots < i_k$; $j_0 < j_1 < \dots < j_k$. Ces équations ne sont pas des identités dans le cas et seulement dans le cas où les deux combinaisons diffèrent d'au moins deux nombres. A une combinaison $i_0, i_1, \dots i_k$ fixe correspondent

$$R - d = \binom{r+1}{k+1} - (r-k)(k+1) - 1$$

quadriques. La variété de Grassmann est une intersection *partielle* [1]) de ces quadriques, irréductible et appartenant à l'espace S_R, l'intersection résiduelle étant située dans l'espace S_{R-1}

$$X_{i_0, i_1 \dots i_k} = 0.$$

2. Aux faisceaux linéaires d'espaces S_k correspondent, sur la variété V_d des lignes droites. En effet, choisissons les points $P^0, P^1, \dots P^{k-1}$ sur l'axe S_{k-1} du faisceau. et soient P'^k et P''^k deux points qui déterminent deux S_k: S'_k et S''_k du faisceau. Un espace général du faisceau est déterminé par le point P^k de coordonnées

$$\lambda x'^k + \mu x''^k.$$

Donc on a

$$X_{i_0, i_1 \dots i_k} = \lambda X'_{i_0, i_1 \dots i_k} + \mu X''_{i_0, i_1 \dots i_k},$$

désignant par $X', X''. X$ les coordonnées de Grassmann des espaces S'_k, S''_k, S_k.

Réciproquement [2]), on a le

Théorème 1: „Aux droites de la variété de Grassmann V_d correspondent des faisceaux linéaires d'espaces S''_k.

Soient Q^1, Q^2, Q^3 trois points de la V_d situés sur le droite l. Ces trois points sont *linéairement dépendants* c'est à dire que l'on a entre les coordonnées X^1, X^2, X^3 de ces points les relations

$$(3) \qquad X^3 = \lambda X^1 + \mu X^2.$$

---

[1]) Severi: „Sulla varicta che rappesenta gli spazi subordinati di data dimensione immersi in uno spazio lineare". Annali di Mat. 3. Ser. Tom. 24. 1915.

[2]) Cf. Segre: „Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni". Annali di Matematica Ser. III. T. XXVII. 1917.

Donc on a les équations bilinéaires

$$X^1_{i_0,\dots i_k} X^2_{j_0,\dots j_k} + X^1_{j_0,\dots j_k} X^2_{i_0,\dots i_k} = \tag{4}$$
$$\sum_{s=0}^{k} (X^1_{j_s, i_1, \dots i_k} \cdot X^2_{j_0,\dots j_{s-1}, i_0, j_{s+1}, \dots j_k} + X^1_{j_0,\dots j_{s-1}, i_0, j_{s+1} \dots j_k} \cdot X^2_{j_s, i_1, \dots i_k}).$$

Réciproquement, si l'on a entre les coordonnées de Grassmann de deux points Q^1, Q^2 les relations (4), alors la droite $l = \overline{Q^1 Q^2}$ qui relie ces deux points est située sur la variété V_d.

Tout espace $S_{k'}$ à k' dimensions qui s'appuie sur les deux espaces S_k^1 et S_k^2 qui correspondent aux points Q^1 et Q^2 s'appuie en conséquence sur tous les espaces S_k qui correspondent aux points Q linéairement dépendants des points Q^1 et Q^2. En effet, envisageons la matrice

$$\overline{M} = \begin{vmatrix} x_0'^0 & \dots & x_r'^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_0'^{k'} & \dots & x_r'^{k'} \\ x_0^0 & \dots & x_r^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_0^k & \dots & x_r^k \end{vmatrix} \tag{5}$$

dont les $k'+1$ premières lignes forment la matrice M' de l'espace $S_{k'}$ et dont les $k+1$ derniéres lignes forment la matrice M de l'espace S_k. Dévelloppons la matrice $\overline{M}$ suivant les mineurs de la matrice M'. On a

$$\Sigma \pm X'_{i_0',\dots i_{k'}'} X_{i_0,\dots i_k} = 0, \tag{6}$$

$i_0, \dots i_k$ et $i_0', \dots i_{k'}'$ étant deux combinaisons complémentaires de nombres de la suite de nombres $j_0, \dots j_{k+k'+1}$ qui appartient à la suite $0, 1, \dots r$. On a $i_0 < \dots < i_k$; $i_0' < \dots < i_{k'}'$, le signe $+$ convient à une permutation $i_0', \dots i_{k'}', i_0, \dots i_k$ paire et le signe $-$ à une permutation impaire. Le nombre des équations (6) est $\binom{k+k'+2}{k'+1} = \binom{k+k'+2}{k+1}$. Si les coordonnées X^1 et X^2 des espaces S_k^1 et S_k^2 satisfont aux équations (6) il en est de même des coordonnées X de tout espace S_k linéairement dependant des espaces S_k^1 et S_k^2.

Envisageons donc trois espaces S_k^1, S_k^2, S_k^3 linéairement dépendants. Toute droite l qui passe par un point P^1 de l'espace S_k^1 et qui s'appuie sur l'espace S_k^2 s'appuie en conséquence sur l'espace S_k^3. Donc les deux espaces S_k^2, S_k^3 sont dans un S_{k+1}, auquel appartient par conséquence l'espace S'_k. Soit $S^{1,2}_{k-1}$ l'espace commun aux espaces S^1_k, S^2_k et $P^0, P^1, \ldots P^{k-1}$ soient k points linéairement indépendants de cet espace S_{k-1}. Soient P'^k et P''^k deux points de coordonnées x'^k et x''^k l'un situé sur l'espace S'_k l'autre sur l'espace S^2_k. Le point P^k de coordonnées $\lambda x'^k + \mu x''^k$ est situé sur l'espace S^3_k, donc cet espace passe par l'espace $S^{1,2}_{k-1}$ et appartient au *faisceau linéaire* déterminé par les espaces S^1_k et S^2_k.

3. Il est dès lors facile de déterminer tous les *espaces linéaires* de la variété de Grassmann. Envisageons un plan Π de cette variété et trois points Q^1, Q^2, Q^3 linéairement indépendants de ce plan. Les trois espaces S^1_k, S^2_k, S^3_k se coupent deux à deux en deux espaces S_{k-1}. Donc ou bien l'espace S^3_k passe par l'axe $S^{1,2}_{k-1}$ et alors les trois espaces S^1_k, S^2_k, S^3_k sont situés dans un espace S_{k+2}, où bien l'espace S^3_k est déterminé par les deux espaces $S^{1,3}_{k-1}$ et $S^{2,3}_{k-1}$ suivant lesquels il coupe les espaces S^1_k, S^2_k donc il est situé dans l'espace S_{k+1} déterminé par les espaces S^1_k, S^2_k.

Il y a donc deux espèces de plans Π de la variété de Grassmann. Les uns correspondent aux étoiles ∞^2 d'espaces S_k ayant un S_{k-1} en commun et situés dans un S_{k+1}. Les autres correspondent aux $\infty^2 S_k$ d'un espace S_{k+1} qui ont en commun un S_{k-2}.

Envisageons maintenant un espace S_m à m dimensions situé sur la variété V_d. Les espaces S_k qui correspondent aux points Q de S_m ont deux à deux en commun un S_{k-1}. Donc ou bien tous ces espaces passent par un axe S_{k-1}, donc ils forment une étoile ∞^m et ils remplissent un espace S_{k+m}. Ou bien il y a au moins trois espaces S_k linéairement indépendants et n'ayant pas en commun un espace S_{k-1} et alors les espaces S_k appartiennent à un espace S_{k+1} et ils ont en commun un S_{k-m}.

Nous pouvons donc énoncer le

Théorème 2[1]: „Il y a sur la variété de Grassmann V_d deux familles d'espaces linéaires. L'une est composée d'espaces S_{k+1} qui correspondent aux S_k des espaces S_{k+1} de l'espace S_r. L'autre est composée d'espaces S_{r-k} qui correspondent aux étoiles d'axe S_{k-1} de l'espace S_r.

La première famille est composée de

$$\infty^{(r-k-1)(k+2)}$$

[1]) Cf. Segre: „Mehrdimensionale Raüme". Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften T. III. 2. Cah. 7. N° 3.

S_{k+1}. La seconde famille est composée de

$$\infty^{(r-k+1)k}$$

S_{r-k}".

4. Deux espaces S_{k+1} de la variété V_d ont en commun un point au plus. Il y a ∞^{r-k-1} espaces S_{k+1} qui passent par un point Q de la variété de Grassmann

Deux espaces S_{r-k} de la variété de Grassmann ont toujours un point en commun si l'on a $k=1$, et n'ont en général aucun point en commun, si l'on a $k>1$. car on a alors

$$2(k-1)+1>k.$$

Par un point Q de la variété V_d il passe ∞^k espaces S_{r-k}.

Si un S_{k+1} de variété V_d et un S_{r-k} ont en commun un point Q alors ils ont en commun toute une droite, car alors l'axe S_{k-1} de l'étoile représenté par l'espace S_{r-k} est situé dans l'espace S_{k+1} représenté par l'espace S_{k+1} de la variété V_d.

2. Espaces tangents à la variété de Grassmann.

1. Une droite l de l'espace S_R d'équations

$$X=\lambda X^1+\mu X^2, \tag{7}$$

où X^1 et X^2 sont les coordonnées de deux points Q^1, Q^2 de l'espace S_R est une *tangente* de la variété V_d, si elle a en commun avec cette variété deux points coïncidant en un point Q^0 de cette variété. Si l'on choisit ce point comme point Q^1, alors les équations en λ, μ que l'on obtient en remplaçant les coordonnées X dans les équations de D'Ovidio par les expressions (7) ont la racine double $\mu=0$. Le point Q^2 satisfait donc aux équations (4). Donc si l'on regarde ce point Q^2 comme variable, les points de droites l tangentes à V_d satisfont à $R-d$ équations linéaires homogènes qui représentent autant d'hyperplans de l'espace S_R.

Les équations (4) sont linéairement indépendantes. Donc il y a en un point Q^0 de la variété V_d de Grassmann $R-d$ *hyperplans tangents* linéairement indépendants. Un hyperplan Π est tangent à la variété V_d au point Q^0, s'il contient les tangentes l, donc s'il passe par *l'espace tangent* S_d déterminé par les $R-d$ hyperplans d'équations (4). Donc l'équation d'un hyperplan tangent est une combinaison linéaire et homogène des équations des $R-d$ hyperplans (4).

L'espace tangent S_d coupe la variété V_d de Grassmann en une variété V composée de droites tangentes l situées sur la variété V_d. Ces droites représentent les faisceaux linéaires de l'espace S_r auxquels appartient l'espace S_k^1 représenté par le point Q^1 de V_d. Donc la variété V est une variété *conique* V_r à r dimensions.

La variété V_r est composée des droites des ∞^{r-k-1} espaces S_{k+1} passant par le point Q^1 ainsi que des droites des ∞^k espaces S_{r-k} passant par ce point. Chaque espace S_{k+1} et chaque espace S_{r-k} ont en commun une droite qui représente le faisceau des S_k situé dans l'S_{k+1} de l'espace S_R représenté par l'S_{k+1} envisagé et qui appartient à l'étoile d'axe S_{k-1} situé sur l'espace S_k^1 représentée par l'S_{r-k} envisagé.

D'après un résultat général de M. Severi[1]) tout complexe linéaire d'espaces S_k est donné par une équation linéaire

$$\Sigma A_{i_0, \ldots i_k} X_{i_0, \ldots i_k} = 0. \tag{8}$$

Cette équation est représentée dans l'espace S_R par un hyperplan Π.

Aux hyperplans Π tangents à la variété V_d au point Q^0 correspondent des complexes linéaires qui contiennent tous les S_k de l'espace S_r qui coupent l'S_k^1 fixe suivant des espaces S_{k-1}.

Un complexe linéaire est dit *singulier* et l'espace $S_{k'}$, $k' \geqq k$ de l'espace S_r est dit son *espace singulier* s'il contient tous les S_k qui coupent cet espace singulier en un espace S_{k-1} (au moins).

Nous avons le

Théorème 1: „Condition nécessaire et suffisante pour que le complexe linéaire (8) ait l'espace singulier S_k^1 est que l'hyperplan qui correspond à ce complexe soit tangent à la variété V_d au point Q^0 qui représente l'espace S_k^1".

Nous démontrerons la nécessité de la condition en montrant que la variété V_r *appartient* à l'espace S_d tangent au point Q^0. En effet, supposons que les points $A^0, A^1, \ldots A^k$ fondamentaux de l'espace S_r soient situés dans l'espace S_k^1. L'unique coordonnée grassmannienne de l'espace S_k^1 différente de zéro est alors $X^1_{0, 1, \ldots k}$. Les équa-

[1]) „Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione immersi in uno spazio lineare". Anneli di Matematica pura ed applicata Ser. 3. T. 24. 1915.

tions (4) ont alors la forme

(9) $$X_{j_0, j_1, \dots j_k} = 0,$$

où deux indices j au moins diffèrent des nombres 0, 1,... k.

Soit alors (8) l'équation d'un complexe linéaire qui possède l'espace singulier S^1_k. Cette équation est donc satisfaite par les coordonnées de l'espace S^1_k ainsi que par les coordonnées des espaces fondamentaux

$$A^{i_0} A^{i_1} \dots A^{i_{k-1}} A^l,$$

où $i_0, i_1, \dots i_{k-1}$ sont k nombres de la suite 0, 1,... k de nombres et où l est $> k$. Donc on a

$$A_{0, 1, \dots k} = 0$$
$$A_{i_0, i_1, \dots i_{k-1}, l} = 0.$$

Donc l'équation (8) est une combinaison linéaire homogène des équations (9) ce qui démontre le théorème.

Un espace S_k qui n'a en commun avec S^1_k qu'un espace S_m, $m < k - 1$ ne peut satisfaire aux équations (9). On peut, en effet, choisir $m+1$ points A^0. $A^1, \dots A^m$ fondamentaux dans l'espace S_m et $k - m \geqq 2$ points fondamentaux $A^{k+1}, \dots A^{2k-m}$ en dehors de S^1_k. L'espace fondamental

$$A^0, A^1, \dots A^m A^{k+1} \dots A^{2k-m}$$

a l'unique coordonnée $X_{0\ 1, \dots m, k+1, \dots 2k-m}$ différente de zéro. Cela démontre d'une autre manière le théorème 1 du chapitre 1.

2. L'espace linéaire S_d tangent à la variété V_d au point Q^0 ne peut pas être tangent à cette variété en un autre point Q'^0. En effet, supposons que les espaces S^0_k, S'^0_k qui correspondent à ces points se coupent suivant un S_ϱ, $(\varrho \geqq -1)$. Choisissons les points fondamentaux $A^0, A^1, \dots A^\varrho$ dans l'S_ϱ, les points $A^{\varrho+1}, \dots A^k$ dans l'S^0_k et les points $A^{k+1} \dots A^{2k-\varrho}$ dans l'S'^0_k. Les points Q de l'espace S_d satisfont à deux systèmes d'équations linéaires, savoir au système (9) et au système correspondant au point Q'^0

(10) $$X_{j'_0, j'_1, \dots j'_k} = 0,$$

où deux indices j', au moins, n'appartiennent pas aux nombres $0, \dots \varrho; k+1, \dots 2k - \varrho$. Si l'on a $\varrho < k - 1$, on devrait avoir en raison des équations (10) pour l'espace S^0_k

$$X_{0\ 1, \dots k} = 0,$$

ce qui n'est pas vrai. Si l'on a $\varrho = k - 1$, l'espace fondamental

$$A^0 \dots A^{k-2} A^k A^l, \; l > 2k - \varrho = k + 1$$

est représenté par un point de la variété V_r appartenant au point Q^0. Les points A^k, A^l n'appartiennent pas à l'espace S_k^0, donc on devrait avoir

$$X_{0,\dots k-2, k, l} = 0$$

ce qui n'est pas vrai. On a donc le

Théorème 2: „Les espaces S_d tangents aux points Q de la variété V_d ne sont tangents qu'en un point de cette variété".

3. Systèmes particuliers d'espaces S_k.

1. *Système linéaire d'espaces contenus dans un espace S_ϱ.*

Si l'on choisit les points fondamentaux $A^0, \dots A^\varrho$ dans l'espace S_ϱ, alors la matrice d'un espace S_k contenu dans l'S_ϱ a nulles ses colonnes d'ordres $\varrho + 1, \dots r$, Donc on a

(11) $$X_{i_0, \dots i_k} = 0$$

si un indice i au moins est supérieur à ϱ. La variété V qui représente sur la V_d ce système d'espaces appartient à l'espace donné par les équations (11) en nombre de

$$\binom{r+1}{k+1} - \binom{\varrho+1}{k+1}$$

c'est donc un espace à $\binom{\varrho+1}{k+1} - 1$ dimensions, dont l'intersection complète avec la V_d est la variété V de $(\varrho - k)(k+1)$ dimensions.

2. *Système d'espaces qui s'appuient sur un espace S_ϱ.*

Choisissons encore les points fondamentaux $A^0, \dots A^\varrho$ dans l'S_ϱ. Les espaces S_k du système ont des matrices dont une ligne (au moins) a les éléments d'ordre $\varrho + 1, \dots r$ égaux à zéro. Donc a les équations (11) pour toutes les combinaisons $i_0, \dots i_k$ d'indices choisis parmi les nombres $\varrho + 1, \dots r$. Au système appartiennent tous les espaces fondamentaux dont un point fondamental au moins est dans l'espaee S_ϱ, espaces qui ont toutes les coordonnées X égales à zéro à l'exception d'une. Donc le système *appartient* à l'espace linéaire donné par les équations (11) en nombre de

$$\binom{r-\varrho}{k+1},$$

donc la dimension de cet espace est

$$\binom{r+1}{k+1} - \binom{r-\varrho}{k+1} - 1.$$

La variété correspondante V est de dimension

$$\varrho + (r-k)k.$$

3. *Système d'espaces qui s'appuient sur un espace S_{ϱ_1} et qui sont contenus dans un espace S_ϱ contenant S_{ϱ_1}.*

Choisissons les points fondamentaux $A^0, \ldots A^{\varrho_1}$ dans S_{ϱ_1}, $A^{\varrho_1+1}, \ldots A^\varrho$ dans S_ϱ. La matrice d'un espace du système a égales à zéro les colonnes d'ordres $\varrho+1, \ldots r$, et une ligne au moins est composée depuis la place d'ordre ϱ_1+1 de zéros. Donc on a les équations (11) 1° pour toutes les combinaisons d'indices choisis parmi les nombres $\varrho+1, \ldots r$, 2° pour toutes les combinaisons contenant au moins un nombre supérieur à ϱ. Un espace fondamental dont au moins un point fondamental a l'indice $\leqq \varrho_1$ et dont tous les points fondamentaux ont des indices $\leqq \varrho$ a une seule coordonnée X différente de zéro. Donc le nombre d'équations (10) est

$$\binom{r+1}{k+1} - \binom{\varrho+1}{k+1} + \binom{\varrho-\varrho_1}{k+1}$$

et l'espace S correspondant a la dimension

$$\binom{\varrho+1}{k+1} - \binom{\varrho-\varrho_1}{k+1} + 1.$$

La variété V correspondante appartient à S et elle est de dimension

$$\varrho_1 + (\varrho-k)k.$$

4. *Système d'espaces qui ont au moins un S_m en commun avec un espace S_ϱ.*

Choisissons encore les points fondamentaux $A^0, \ldots A^\varrho$ comme auparavant. La matrice d'un tel espace a dans au moins $m+1$ lignes des zéros depuis la place d'ordre $\varrho+1$. Donc tous les X sont égaux à zéro pour lesquels *plus* de $k+1-(m+1)=k-m$ indices sont $>\varrho$, donc pour lesquels *au moins* $k-m+1$ indices sont $>\varrho$, donc au plus m indices sont $\leqq \varrho$. Ce nombre est égal à

$$(12) \qquad (\varrho, m) = \sum_{i=0}^{m} \binom{r-\varrho}{k+1-i}\binom{\varrho+1}{i}.$$

Les autres X peuvent avoir des valeurs arbitraires. Donc l'espace S correspondant a la dimension

$$d_{\varrho, m} = \binom{r+1}{k+1} - (\varrho, m) - 1. \tag{13}$$

Désignons le système par $K_{\varrho, m}$. Les systèmes

$$K_{\varrho, 0}, K_{\varrho, 1}, \ldots K_{\varrho, k}$$

sont contenus chacun dans son précédent, et les espaces

$$S_{\varrho, 0}, S_{\varrho, 1}, \ldots S_{\varrho, k}$$

correspondants sont contenus de même chacun dans son précédent. On a

$$d_{\varrho, m} - d_{\varrho, m+1} = (\varrho, m+1) - (\varrho, m) = \binom{r-\varrho}{k-m}\binom{\varrho+1}{m+1}$$

La dimension $\delta_{\varrho, m}$ du système $K_{\varrho, m}$ est égale à l'infinité des espaces S_m contenus dans l'espace S_ϱ augmentée de l'infinité des espaces S_{k-m-1} contenus dans un espace S_{r-m-1}. Donc on a

$$\delta_{\varrho, m} = (\varrho - m)(m+1) + [r - m - 1 - (k - m - 1)](k-m),$$

donc

$$\delta_{\varrho, m} = (\varrho - m)(m+1) + (r-k)(k-m). \tag{14}$$

4. Complexes linéaires spéciaux d'espaces S_k.

1. Un complexe linéaire C d'espaces S_k représenté par une équation (8) est dit *spécial*, s'il est composé des espaces S_k qui s'appuient sur un espace S_{r-k-1} dit *espace directeur* du complexe. Si cet espace est donné par $r-k$ points linéairement indépendants $P_0'^0, \ldots P'^{r-k-1}$ dont la matrice M' est

$$M' = \left\| \begin{matrix} x_0'^0 & , \ldots & x_r'^0 \\ x_0'^{r-k-1} & , \ldots & x_r'^{r-k-1} \end{matrix} \right\|. \tag{15}$$

on obtient l'équation du complexe en annullant le déterminant D

$$D = \begin{vmatrix} x_0'^0 & \ldots & x_r'^0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_0'^{r-k-1} & \ldots & x_r'^{r-k-1} \\ x_0^0 & \ldots & x_r^0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_0^k & \ldots & x_r^k \end{vmatrix} \tag{16}$$

On obtient ainsi l'équation

$$\Sigma \pm X'_{i'_0, \dots i'_{k'}} X_{i_0, \dots i_k} = 0, \; k' = r - k - 1, \tag{17}$$

où la somme est étendue à toutes les paires de combinaisons complémentaires de $k' + 1$ et de $k + 1$ nombres tirées de la suite 0, $1, \dots r$; $i'_0 < \dots < i'_{k'}$; $i_0 < \dots < i_k$ et où le signe est $+$ où $-$ suivant que la permutation $i'_0 < \dots < i'_{k'}$, $i_0, \dots i_k$ est paire ou impaire.

Il est avantageux de se servir d'une autre forme de l'équation d'un complexe spécial. Regardons à cet effet l'espace S_{r-k-1} comme déterminé par l'intersection de $k+1$ espaces linéaires S_{r-1} indépendants de l'espace S_r à équations

$$\sum_{i=1}^{r} \xi_i^j x_i = 0, \; j = 0, 1, \dots k \tag{18}$$

L'espace directeur est ainsi déterminé par une matrice à $k+1$ lignes et à $r+1$ colonnes

$$N = \left| \begin{matrix} \xi_0^0, \dots & \xi_r^0 \\ \dots & \dots \\ \xi_0^k, \dots & \xi_r^k \end{matrix} \right|. \tag{19}$$

Un espace S_k s'appuie sur l'espace directeur en ce cas et seulement en ce cas que le déterminant d'ordre $k+1$

$$\left| \begin{matrix} \sum_{i=0}^{r} \xi_i^0 x_i^0, \dots & \sum_{i=0}^{r} \xi_i^0 x_i^k \\ \dots & \dots \\ \sum_{i=0}^{r} \xi_i^k x_i^0, \dots & \sum_{i=0}^{r} \xi_i^k x_i^k \end{matrix} \right| \tag{20}$$

est égal à zéro. On obtient, en dévelloppant, l'équation

$$\Sigma\, \Xi_{i_0, \dots i_k} X_{i_0, \dots i_k} = 0 \tag{21}$$

où la sommation est étendue à toutes les combinaisons $i_0, \dots i_k$; $i_0 < \dots < i_k$ de $k+1$ nombres parmi les indices $0, 1, \dots r$ et où $\Xi_{i_0, \dots i_k}$ est le mineur de la matrice N qui correspond au mineur $X_{i_0, \dots i_k}$ de la matrice M.

2. On peut donner à la matrice N la signification géométrique suivante[1]). Envisageons, dans l'espace S_r, la quadrique Q_2 de cet

[1]) Cf. Comessatti: „Osservazioni di geometria della retta in un S_r". Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti". T. LXXX.

espace définie par l'équation

$$\sum_{i=0}^{r} x_i^2 = 0. \tag{22}$$

Les équations (18) représentent alors $k+1$ hyperplans *polaires* par rapport à la quadrique Q_2 des $k+1$ points $P^{0,\xi}, \ldots P^{k,\xi}$ de coordonnées $\xi_0^i, \ldots \xi_r^i$, $i = 0, 1, \ldots k$. Donc on peut envisager la matrice Ξ comme matrice d'un espace S_k^ξ à k dimensions polaire de l'espace directeur S_{r-k-1} par rapport à la quadrique Q_2.

Aux espaces S_k du complexe spécial C' correspondent, dans la polarité envisagée, des espaces S_{r-k-1} situés dans des hyperplans passant par l'espace S_k^ξ, donc des espaces S_{r-k-1} qui s'appuient sur cet espace et réciproquement.

3 On peut représenter les complexes linéaires d'espaces S_k dans l'espace S_R d'une façon analogue à celle envisagée au n⁰ précédent [1]. Envisageons la quadrique F_2 de l'espace S_R d'équation

$$\Sigma X^2_{i_0, \ldots i_k} = 0. \tag{23}$$

L'hyperplan Π dont l'équation (8) représente un complexe linéaire de l'espace S_r est *polaire* par rapport à cette quadrique du point R de coordonnées $A_{i_0, \ldots i_k}$.

Aux complexes spéciaux C' correspondent ainsi des points R situés sur la variété V_d de Grassmann de coordonnées $\Xi_{i_0, \ldots i_k}$. Les hyperplans polaires de ces points passent par les points Q de la variété V_d qui représentent les espaces S_k qui s'appuient sur l'espace directeur S_{r-k-1} représenté par le point R.

4 Envisageons un système algébrique K_t d'espaces linéaires S_k de dimension t et supposons le contenu dans $l = R - h$ complexes linéaires indépendants d'équations

$$\Sigma A^i_{i_0, \ldots i_k} X_{i_0, \ldots i_k} = 0, \; i = 1, \ldots R - h. \tag{24}$$

La variété V_t qui représente sur la V_d le système K_t est contenue dans l'espace S_h à $h = R - l$ dimensions représenté par les équations (24) Envisageons l'espace S_{l-1} *polaire* de l'espace S_h par rapport à la quadrique F_2, déterminé par les points A^i de coordonnées $A^i_{i_0, \ldots i_k}$.

[1] Comessati l. c.

L'espace S_{l-1} coupe la variété V_d en une variété W dont les points R sont les pôles des hyperplans Π spéciaux qui passent par la variété V_l. Donc les points R représentent les complexes linéaires spéciaux qui contiennent le système algébrique K_l et qui appartiennent au système linéaire (24) de complexes linéaires. Ces points R *existent certainement*, si l'on a l'inégalité

$$R - h - 1 + d \geqq R,$$

donc si l'on a

$$l \geqq \binom{r+1}{k+1} - (r-k)(k+1). \tag{25}$$

On peut donc énoncer le

Théorème 1: „Un système algébrique d'espaces S_k contenu dans l complexes linéaires linéairement indépendants est contenu dans *au moins*

$$\infty^{l-\binom{r+1}{k+1}+(r-k)(k+1)}$$

complexes linéaires spéciaux ($\infty^0 = 1$), si l'inégalité (25) est satisfaite".

5. Nous envisagerons maintenant des systèmes linéaires de complexes assujettis à contenir les systèmes d'espaces S_k dont il a été question au Chap. 3.

Supposons donc que le système linéaire donné par les équations (24) contienne tous les S_k du premier des systèmes envisagés au Chap. 3. L'espace linéaire S_n contient alors la variété $V_{(\varrho-k)(k+1)}$ à $(\varrho-k)(k+1)$ dimensions qui réprésente le système envisagé. L'espace polaire S_{l-1} coupe V_d en une variété dont les points représentent les complexes spéciaux du système linéaire, donc les espaces directeurs du système, et en même temps ils représentent les S^{ξ}_k polaires de ces espaces directeurs. Aux espaces S_k de l'espace S_ϱ correspond, dans la polarité par rapport à la quadrique Q_2, des espaces S_{r-k-1} qui passent par l'espace $S_{r-\varrho-1}$ polaire de l'espace S_ϱ et qui ont avec un espace S^{ξ}_k un point en commun. Puisqu'un espace S_{r-k-1} directeur a en commun avec l'espace S_ϱ un espace $S_{\varrho-k}$, donc l'espace S^{ξ}_k polaire est situé avec l'espace $S_{r-\varrho-1}$ dans un espace $S_{r-\varrho+k-1}$ polaire de l'espace $S_{\varrho-k}$. Donc S^{ξ}_k a un point en commun avec l'espace $S_{r-\varrho-1}$. Réciproquement, un espace S^{ξ}_k qui a un point (au moins) en commun avec l'espace $S_{r-\varrho-1}$ a comme polaire un S_{r-k-1} qui a avec l'espace S_ϱ en commun un espace $S_{\varrho-k}$ en commun un espace $S_{\varrho-k}$ au moins, donc qui s'appuie sur tous les S_k de S_ϱ.

Appellons *conjugués* deux points Q et R de l'espace S_R si l'hyperplan polaire de chaque point passe par l'autre point. Appellons *pôle* d'une variété V située sur la variété V_d de Grassmann tout point R dont l'hyperplan polaire passe par V. L'ensemble des points R forme une variété W. L'hyperplan polaire d'un point Q arbitraire de la variété V passe par la variété W. Les variétés V et W sont des variétés *conjuguées* dans la polarité, ou bien *polaires* l'une de l'autre. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant

„La variété $V_{(\varrho-k)(k+1)}$ qui représente les S_k d'un espace $S_\varrho (\varrho \geqq k)$ de l'espace S_r admet comme variété polaire W la variété qui représente les espaces S_k^ξ qui s'appuient sur l'espace $S_{r-\varrho-1}$ polaire de l'espace S_ϱ par rapport à la quadrique Q_2 de l'espace S_r“.

Envisageons les espaces $\overline{S}$ et $\overline{\overline{S}}$ auxquels appartiennent les variétés V et W. L'espace $\overline{S}'$ polaire de l'espace $\overline{S}$ est déterminé par un certain nombre d'hyperplans indépendants polaires des points linéairement indépendants de l'espace $\overline{S}$ que l'on peut supposer tous sur la variété V. Donc l'espace $\overline{S}'$ contient la variété W donc il contient l'espace $\overline{\overline{S}}$. De même l'espace $\overline{\overline{S}}'$ polaire de l'espace $\overline{\overline{S}}$ contient l'espace $\overline{S}$.

Or l'espace $\overline{S}$ est à

$$\binom{\varrho+1}{k+1}-1$$

dimensions et l'espace $\overline{\overline{S}}$ est à

$$\binom{r+1}{k+1}-\binom{\varrho+1}{k+1}-1$$

dimensions. Donc $\overline{S}$ et $\overline{\overline{S}}$ sont polaires réciproques, donc $\overline{S}'$ coïncide avec $\overline{\overline{S}}$ et $\overline{\overline{S}}'$ avec $\overline{S}$.

L'espace $\overline{\overline{S}}$ est situé dans l'espace S_{R-l} determiné par les équations (8). Donc l'espace $\overline{S}$ polaire contient l'espace S_{l-1} polaire de l'espace S_{R-l}. La variété W est à

$$r-\varrho-1+(r-k)k$$

dimensions et elle appartient à l'espace $\overline{\overline{S}}$.

Donc l'espace S_{l-1} coupe la variété W en au moins un point, si l'on a l'inégalité

$$r-\varrho-1+(r-k)k+l-1 \geqq \binom{r+1}{k+1}-\binom{\varrho+1}{k+1}-1,$$

donc si l'on a l'inégalité

$$(26) \quad l \geqq \binom{r+1}{k+1} - \binom{\varrho+1}{k+1} - (r-k)(k+1) - k + \varrho + 1.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème

Théorème 2: „Le système linéaire K déterminé par $l = K - h$ complexes linéaires indépendants qui contiennent tous tous les espaces S_k d'un espace S_ϱ à $\varrho \geqq k$ dimensions contient *au moins* ∞^{l-m} complexes linéaires spéciaux, si l'on a l'inégalité $l \geqq m$, m étant l'expression

$$(27) \quad m = \binom{r+1}{k+1} - \binom{\varrho+1}{k+1} - (r-k)(k+1) - k + \varrho + 1.$$

Le résultat reste valable pour $\varrho < k$, pourvu que l'on remplace dans (26) et (27) ϱ par $k-1$ $\left(\binom{\varrho+1}{k+1} \text{ par } 0\right)$.

Pour que le système K puisse contenir l'espace S_ϱ il faut que l'on ait

$$h \geqq \binom{\varrho+1}{k+1} - 1$$

donc

$$(28) \qquad l \leqq \binom{r+1}{k+1} - \binom{\varrho+1}{k+1},$$

inégalité compatible avec l'inégalité (16) puisque l'on a

$$(r-k)(k+1) + r - \varrho \geqq 1.$$

Si l'on détermine le système linéaire K en choisissant l points généraux de la variété W, donc un envisageant les l complexes spéciaux correspondants, alors l'espace S_{l-1} coupe la variété W *exactement* en ∞^{l-m} points. Si l'on a $l = m$ le nombre des points d'intersection est fini et égal à l'ordre de la variété W. Cet ordre n est égal au nombre d'espaces S_k qui s'appuient sur un espace linéaire $S_{r-\varrho-1}$ (ce qui donne $d - [r - \varrho - 1 + (r-k)k] = \varrho - k + 1$ conditions) et sur $r - \varrho - 1 + (r-k)k$ espaces S_{r-k-1}, ce qui donne ensemble d conditions.

Or ce nombre n est donné par une formule célèbre de Schubert[1]) qui donne le nombre d'espaces S_k qui satisfont à une condition $[a_0, a_1, \ldots a_k]$, c'est à dire qui coupent un espace S_{a_0} en 1 point

---

[1]) Cf. Segre: „Mehrdimensionale Raüme etc." l. c. N° 7.

un espace S_{a_1} passant par l'espace S_{a_0} en une droite etc. et qui s'appuient, en outre, sur

$$H = \sum_{i=0}^{k} a_i - \tfrac{1}{2} k(k+1)$$

espaces linéaires S_{r-k-1}. La première condition est de dimension

$$\sum_{i=0}^{k} (r - k - a_i + i) = (r-k)(k+1) - H.$$

La formule de Schubert est

$$n = \frac{H!\,D}{\prod\limits_{i=0}^{k} a_i!} \tag{29}$$

où D est le produit $\Pi(a_j - a_i)$ des différences *positives* $a_j - a_i$.

Dans notre cas on a

$$[a_0, \ldots a_k] = [r - \varrho - 1, r - k + 1, \ldots r],$$
$$D = (k-1)! \ldots 2!(\varrho + 1)\varrho \ldots (\varrho - k + 2),$$
$$H = r - \varrho - 1 + (r-k)k + \tfrac{1}{2}k(k+1) - \tfrac{1}{2}k(k+1).$$

Nous avons donc

$$n = \frac{[(r-k)(k+1) + k - \varrho - 1]!\,1!\,2!\,(k-1)!\,(\varrho+1)!}{r! \ldots (r-k+1)!\,(\varrho - k + 1)!\,(r - \varrho - 1)!}. \tag{30}$$

Si l'on a $\varrho < k$, il faut poser $\varrho = k - 1$. ($H = d$, $W \equiv V_4$). On a alors

$$n = \frac{[(r-k)(k+1)]!\,1! \ldots k!}{r! \ldots (r-k)!}. \tag{31}$$

Nous avons donc le

Théorème 3: „Tous les espaces S_k qui s'appuient sur $l \geqq m$ espaces directeurs S_{r-k-1}, où le nombre m est donné par la formule (27), espaces directeurs assujettis à couper tous les espaces S_k d'un espace S_ϱ, mais choisis du reste *généralement*, s'appuient en conséquence sur ∞^{l-m} espaces directeurs analogues en cas de *l'inégalité* $l > m$ et sur $n - m$ *autres* espaces directeurs analogues, ou n est donné par la formule (30) en cas de *l'égalité* $l = m$".

Comme exemple envisageons le cas de $k = 2$. On a alors

$$n = \frac{[3(r-2)]!\,2!}{(r-2)!\,(r-1)!\,r!}, \quad m = \binom{r+1}{3} - 3(r-2).$$

On a p. ex. pour $r=5$

$$n=42, \quad m=11.$$

6. Nous assujettirons maintenant le système linéaire (8) à contenir le second système d'espaces S_k envisagé au Chap. 3, c'est à dire le système d'espaces qui s'appuient sur un espace S_ϱ. Soit W' la variété à $\varrho+(r-k)k$ dimensions qui représente ce système sur la V_d. W' appartient à l'espace $\overline{S}$ de

$$\binom{r+1}{k+1}-\binom{r-\varrho}{k+1}-1$$

dimensions. L'espace S_{R-l} représenté par les équations (8) contient l'espace $\overline{S}$. Donc son espace polaire S_{l-1} est contenu dans l'espace $\overline{\overline{S}}$ polaire de l'espace $\overline{S}$. La variété V polaire de la variété W et qui représente les espaces S_k contenus dans un espace $S_{r-\varrho-1}$ appartient à l'espace $\overline{\overline{S}}$ de $\binom{r-\varrho}{k+1}-1$ dimensions.

Donc si l'on a l'inégalité

$$l-1+(r-\varrho-k-1)(k+1)\geqq\binom{r-\varrho}{k+1}-1,$$

donc l'inégalité

$$l\geqq\binom{r-\varrho}{k+1}-(r-k-\varrho-1)(k+1) \tag{32}$$

il y a dans le système (8) *au moins* ∞^{l-m_1} complexes linéaires spéciaux, où

$$m_1=\binom{r-\varrho}{k+1}-(r-k-\varrho-1)(k+1). \tag{33}$$

Nous avons donc le

Théorème 4: „Si l'on a l'inégalité (32), alors le système envisagé de complexes linéaires contient *au moins* ∞^{l-m_1} complexes spéciaux, où m_1 est donné par l'expression (33).

Pour que l'espace S_R contienne l'espace $\overline{S}$ il faut que l'on ait

$$R-l\geqq\binom{r+1}{k+1}-\binom{r-\varrho}{k+1}-1,$$

donc que l'on ait

$$l\leqq\binom{r-\varrho}{k+1}, \tag{34}$$

inégalité compatible avec l'inégalité (32). Si l'on a $\varrho>r-k-1$, il faut remplacer ϱ par -1.

Choisissons, comme auparavant, l complexes linéaires *spéciaux* qui déterminent le système (8), en choisissant l points *généraux* de la variété V. L'espace S_{l-1} coupe alors la variété V *exactement* en ∞^{l-m_1} points, si l'on a $l>m_1$ et en n_1-m_1 points, si l'on a $l=m_1$, n_1 étant donné par la formule

$$(35) \qquad n_1=\frac{[(r-\varrho_1-k-1)(k+1)]!\,1!\ldots k!}{(r-\varrho_1-k-1)!\ldots(r-\varrho_1-1)!},$$

qui donne l'ordre de la variété V. On a donc le

Théorème 5: „Envisageons $l\geqq m_1$ espaces directeurs S_{r-k-1} qui satisfont à la condition de couper tous les S_k du système des S_k qui s'appuient à leur tour sur un espace S_ϱ (donc qui passent par cet espace), mais qui sont, du reste, choisis *généralement*. Tous les S_k qui s'appuient sur ces espaces directeurs s'appuient en conséquence sur ∞^{l-m_1} espaces directeurs analogues, si l'on a *l'inégalité* $l>m_1$, et sur n_1-m_1 *autres* espaces directeurs S_{r-k-1} analogues, où n_1 est donné par la formule (5) en cas de *l'égalité* $l=m_1$“.

7. Nous généraliserons maintenant les résultats précédents en envisageant un système linéaire de l complexes qui contiennent tous les S_k qui coupent un S_ϱ donné en (au moins) un espace S_m.

Dans la polarité par rapport à la quadrique Q_2 il correspond à l'espace S_ϱ un espace $S_{r-\varrho-1}$ et aux espaces S_k qui coupent S_ϱ en un espace S_m (au moins) correspondent des espaces S_{r-k-1} situés avec l'$S_{r-\varrho-1}$ polaire dans un espace S_{r-m-1} (au plus). Soit V l'image du système des S_k envisagé, et W son polaire par rapport à la quadrique F_2 de l'S_N. Un point R de la variété W est l'image d'un S_{r-k-1} auquel s'appuient les S_k du système, donc qui coupe l'espace S_ϱ en (au moins) un espace $S_{\varrho-m}$, puisque l'espace S_{r-k-1} doit couper tout espace S_m de l'espace S_ϱ. Donc l'S_k^ξ polaire de l'espace S_{r-k-1} par rapport à la quadrique Q_2 est situé avec l'espace $S_{r-\varrho-1}$ dans un espace d'au plus $r-\varrho+m-1$ dimensions $S_{r-\varrho+m-1}$, donc l'S_k^ξ coupe $S_{r-\varrho-1}$ en un espace S_{k-m} (au moins) puisque l'on a

$$r-\varrho+m-1+(k-m)=k+r-\varrho-1.$$

Donc la variété W polaire de V par rapport à la quadrique F_2 représente les S_k qui coupent l'$S_{r-\varrho-1}$ en des espaces S_{k-m} (au moins). La dimension de W est donc

$$\delta_{r-\varrho-1,\,k-m}=(r-\varrho-1-k+m)(k-m+1)+(r-k)m,$$

et elle appartient à un espace S de

$$d_{r-\varrho-1,\,k-m} = \binom{r+1}{k+1} - (r-\varrho-1,\, k-m) - 1$$

dimensions. On a d'ailleurs

$$(r-\varrho-1,\, k-m) + (\varrho, m) = \binom{r+1}{k+1};$$

donc

(37) $$d_{r-\varrho-1,\,k-m} = (\varrho, m) - 1.$$

Donc l'espace S_{l-1} coupe la variété W, si l'on a l'inégalité

$$l-1+(r-\varrho-k+m-1)(k-m+1)+(r-k)m \geqq (\varrho, m) - 1,$$

donc l'inégalité

(38) $$l \geqq (\varrho, m) - (r-\varrho-k+m-1)(k-m+1) - (r-k)m.$$

Nous avons donc le

Théorème 6: „Le système linéaire d'espaces déterminé par les l équations de complexes (8) qui contient tous les espaces S_k coupant un espace S_ϱ en au moins un espace S_m contient au moins ∞^{l-s_m} complexes spéciaux, s_m étant donné par la formule

(39) $$s_m = (\varrho, m) - (r-\varrho-k+m-1)(k-m+1) - (r-k)m\text{“}.$$

L'ordre n_m de la variété W^r est, d'après la formule de Schubert égal au nombre des S_k qui satisfont à la condition

$$[r-\varrho-k+m-1, \ldots r-\varrho-1, r-m+1, \ldots r]$$

et qui s'appuient, en outre, sur

$$H = \sum_{i=0}^{k-m}(r-\varrho-1-i) + \sum_{i=1}^{m}(r-m+i) - \frac{1}{2}k(k+1) =$$

$$= (r-\varrho-1)(k-m+1) - \frac{(k-m)(k-m+1)}{2} +$$

$$+ (r-m)m + \frac{m(m+1)}{2} - \frac{1}{k}k(k+1) =$$

$$= (r-\varrho-k-1)(k-m+1) + m(r-m+1)$$

espaces directeurs S_{r-k-1}. Donc on a

$$D = (m-1)!\ldots 2!\,(k-m)!\ldots 2!\,(\varrho+k-m+1)\ldots(\varrho+1).$$

$$(\varrho+k-m)\ldots\varrho\ldots(\varrho+k-2m+2)\ldots(\varrho-m+2) =$$

$$= \frac{(m-1)!\ldots 2!\,(k-m)!\ldots 2!\,(\varrho+k-m+1)!\ldots(\varrho+k-2m+2!)}{\varrho!\,(\varrho-1)!\ldots(\varrho-m+1)!}.$$

Donc a

$$(40)\quad n_m = \frac{[(r-\varrho-k-1)(k-m+1)+m(r-m+1)]!\,(m-1)!\ldots 2!}{(r-\varrho-k+m-1)!\ldots(r-\varrho-1)]!\,(r-m+1)!\ldots r!}\,\frac{(k-m)!\ldots 2!\,(\varrho+k-m+1)!\ldots(\varrho+k-2m+2)!}{\varrho!\ldots(\varrho-m+1)!}.$$

Nous obtenons en raisonnant comme auparavant le théorème

Théorème 7: Tous les espaces S_k qui s'appuient sur l espaces généraux S_{r-k-1} assujettis seulement à s'appuier sur tous les S_k qui coupent un espace fixe S_ϱ en un espace S_m (au moins) (ou bien coupent S_ϱ en un $S_{\varrho-m}$) s'appuient en conséquence sur ∞^{l-s_m} espaces directeurs analogues, si l'on a $l > s_m$, et sur $n_m - s_m$ *autres* espaces directeurs analogues, si l'on a $l = s_m$, s_m et n_m étant donnés par les formules (39) et (40)".

8. Nous envisagerons encore un autre système linéaire ∞^{l-1} de complexes linéaires, savoir un système qui contient à la fois tous les S_k d'un espace S_ϱ et tous les S_k qui s'appuient sur un espace S_{ϱ_1} contenu dans l'espace $S_\varrho (\varrho \geqq \varrho_1)$.

Soient V et V_1 les variétés qui représentent, sur V_d, les deux systèmes. Ces deux variétés sont de dimensions

$$(\varrho-k)(k+1) \text{ et } \varrho_1+(r-k)k$$

et elles ont en commun la variété W de

$$\varrho_1+(\varrho-k)k$$

dimensions qui représente les espaces S_k contenus dans l'espace S_ϱ et qui s'appuient sur l'S_{ϱ_1}.

Les trois variétés V, V_1, W appartiennent à trois espaces S_1, S_2, S_3 de

$$\binom{\varrho+1}{k+1}-1,\ \binom{r+1}{k+1}-\binom{r-\varrho_1}{k+1}-1,\ \binom{\varrho+1}{k+1}-\binom{\varrho-\varrho_1}{k+1}-1$$

dimensions. L'espace S_{1+2} somme des deux espaces S_1, S_2 est de

$$\binom{r+1}{k+1}-\binom{r-\varrho_1}{k+1}+\binom{\varrho-\varrho_1}{k+1}-1$$

dimensions. Les espaces $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{S}_3$ polaires des espaces S_1, S_2, S_2 sont de

$$\binom{r+1}{k+1}-\binom{\varrho+1}{k+1}-1,\ \binom{r-\varrho_1}{k+1}-1,\ \binom{r+1}{k+1}-\binom{\varrho+1}{k+1}+\binom{\varrho-\varrho_1}{k+1}-1$$

dimensions et l'espace S_{1+2} polaire de l'espace S_{1+2} est de

$$\binom{r-\varrho_1}{k+1}-\binom{\varrho-\varrho_1}{k+1}-1$$

dimensions. L'espace S_3 est l'espace somme des espaces S_1 et S_2, et l'espace S_{1+2} est l'espace commun des espaces S_1 et S_2.

L'espace S_{k-l} qui correspond au système linéaire de complexes contient les espaces S_1 et S_2, donc son polaire S_{l-1} est contenu dans les espaces S_1 et S_2, donc il est contenu dans l'espace S_{1+2} commun des espaces S_1 et S_2.

Les variétés V, V_1, W polaires des variétés V, V_1, W représentent les S_k suivants:

Ceux qui s'appuient sur l'espace $S_{r-\varrho-1}$ polaire de l'espace S_ϱ.

Ceux qui appartiennent à l'espace $S_{r-\varrho_1-1}$ polaire de l'espace S_{ϱ_1}.

Ceux qui s'appuient sur l'espace $S_{r-\varrho-1}$ et ceux qui appartiennent à l'espace $S_{r-\varrho_1-1}$.

Les deux variétés V et V_1 ont en commun une variété W_2 qui represente les S_k qui s'appuient sur l'espace $S_{r-\varrho-1}$ et qui appartiennent en même temps à l'espace $S_{r-\varrho_1-1}$. En effet, les points de W_2 sont en même temps des pôles des deux variétés de V et de V_1.

Les variétés V, V_1, W_2 sont de dimensions

$$r-\varrho-1+(r-k)k,\ (r-\varrho_1-k-1)(k+1),$$
$$r-\varrho-1+(r-\varrho_1-k-1)k.$$

La variété W_2 est contenue dans l'espace S_{1+2} et elle appartient évidemment à cet espace. Donc l'espace S_{l-1} coupe la variété W_2, si l'on a l'inégalité

$$l-1+r-\varrho-1+(r-\varrho_1-k-1)k \geqq$$
$$\geqq\binom{r-\varrho_1}{k+1}-\binom{\varrho-\varrho_1}{k+1}-1,$$

donc si l'on a l'inégalité

$$(41)\quad l\geqq\binom{r-\varrho_1}{k+1}-\binom{\varrho-\varrho_1}{k+1}-(r-\varrho_1-k-1)k-r+\varrho+1.$$

Cette inégalité contient celles (26) et (32) comme cas particuliers, la première pour $\varrho_1=-1$, la seconde pour $\varrho=\varrho_1+k$ (dans ce cas tous les S_k de l'espace S_ϱ s'appuient sur l'espace S_{ϱ_1}).

Nous pouvons donc énoncer le

Théorème 8: „Si l'on a l'inégalité (41), alors il y a dans le système (8) de complexes *au moins* ∞^{l-m_2} complexes spéciaux où l'on a

$$(42)\quad m_2 = \binom{r-\varrho_1}{k+1} - \binom{\varrho-\varrho_1}{k+1} - (r_1-\varrho_1-k-1)k - r + \varrho + 1\text{“}.$$

L'ordre n_2 de la variété W_2 est égal au nombre des S_k qui coupent un espace $S_{r-\varrho-1}$ situé dans un espace $S_{r-\varrho_1-1}$, qui sont situés dans l'espace $S_{r-\varrho_1-1}$ et qui coupent en outre H espaces S_{r-k-1}, où H est égal à la dimension de W_2.

La condition de Schubert $[a_0, \ldots a_k]$ est

$$[r-\varrho-1, r-\varrho_1-k, r-\varrho_1-k+1, \ldots r-\varrho_1-1]$$

Donc on a

$$D = (k-1)! \ldots 2!\,(\varrho-\varrho_1) \ldots (\varrho-\varrho_1-k+1).$$

Nous avons donc la formule

$$(43)\quad n_2 = \frac{[(r-\varrho_1-k-1)k+r-\varrho-1]!\; 1!\; 2! \ldots (k-1)!\; (\varrho-\varrho_1)!}{(r-\varrho-1!)\; (\varrho-\varrho_1-k)!\; (r-\varrho_1-k)! \ldots (r-\varrho_1-1)!}$$

qui coïncide avec la formule (30), si l'on pose $\varrho_1 = -1$ et avec la formule (35), si l'on pose $\varrho = \varrho_1 + k$.

Nous avons donc le

Théorème 9: „Tous les espaces S_k qui s'appuient sur l espaces directeurs généraux assujettis seulement à couper tous les S_k qui s'appuient sur un S_{ϱ_1} et tous ceux qui sont contenus dans un S_ϱ qui passe par S_{ϱ_1}, s'appuient en conséquence sur ∞^{l-m_2} espaces directeurs semblables, si l'on a $l > m_2$, et sur $n_2 - m_2$ autres espaces directeurs semblables, si l'on a $l = m_2$, les nombres n_2 et m_2 étant donnés par les expressions (42), (43)“.

Cracovie, Mai 1924.

Sulle Funzioni Duhameliane

Parte I.

Le Funzioni Esattamente Misurabili o Sommabili.

Nota di

W. Wilkosz. Cracovia.

§ I.

Diremo come al solito un insieme E dei sistemi

$$x_1\, x_2 \dots x_n$$

ove $x_1 \dots x_n$ sono numeri reali, insieme a n-dimensioni ed i suoi elementi (sistemi particolari appartenenti alla E) chiameremo punti.

Nel caso $n = 2$ od $n = 3$ imaginiamo i punti di E nel sistema delle coordinate Cartesiane ortogonali.

Sia E un insieme a due dimensioni o piano.

Indicheremo con $E'(x_0)$ la sezione di E colla retta $x = x_0$ (x_0 costante) cioè insieme di tutti i numeri y tali che

$$(x_0, y)$$

fa parte di E.

Analogamente $E''(y_0)$ indica la sezione del codesto insieme colla retta $y = y_0$. È chiaro che E' od E'' possono essere anche vuoti, in tal caso sono sempre misurabili (L) e di misura nulla.

Se $\varphi(xy)$ è definita in E piano, indicheremo con $f_{y_0}(x)$ e $g_{x_0}(y)$ le funzioni definite rispettivamente in $E''(y_0)$ e $E'(x_0)$ mediante relazioni

$$f_{y_0}(x) \equiv \varphi(x, y_0)$$
$$g_{x_0}(y) \equiv \varphi(x_0\, y)$$

$f_{y_0}(x)$ o $g_{x_0}(y)$ può essere anche vuota se è tale E'' o E' — in tal caso è sempre misurabile e sommabile (L).

Def. I Insieme piano e limitato E sarà detto esattamente misurabile, se (1) E è misurabile (L) superficialmente (2) ogni $E'(x_0)$ (3) ed ogni $E''(y_0)$ sono linearmente misurabili.

Def. II, III. Funzione $\varphi(xy)$ definita in un E piano e limitato sarà detta esattamente misurabile (sommabile) in E se

(1) $\varphi(xy)$ è misurabile (sommabile) superficialmente in E

(2) ogni $f_{y_0}(x)$ in $E''(y_0)$

(3) ed ogni $g_{x_0}(y)$ in $E'(x_0)$

sono linearmente misurabili (sommabili).

Teor. 1. Se $\varphi(xy)$ è misurabile esattamente in E allora di E si può dire lo stesso.

Dim: (1) $\varphi(xy)$ essendo misurabile in E implica la misurabilità ordinaria di E

$$\begin{matrix} (2) & f_{y_0}(x) \\ (3) & g_{x_0}(y) \end{matrix} \Bigg\} \text{ essendo misurabili in } \Bigg\{ \begin{matrix} E''(y_0) \\ E'(x_0) \end{matrix}$$

implicano la misurabilità lineare dei rispettivi aggregati.

Teor. 2. Una $\varphi(xy)$ esattamente misurabile e limitata in E è anche esattamente sommabile in E.

Teor. 3. Una $\varphi(xy)$ esattamente sommabile in E è anche esattamente misurabile in E.

Teor. 4. Se $\varphi'(xy)$ e $\varphi''(xy)$ sono esattamente misurabili (sommabili) in E, lo stesso si può dire del loro aggregato lineare cioè

$$\varphi(xy) = c_1\varphi'(xy) + c_2\varphi''(xy)$$

[c_1 e c_2 costanti].

Teor. 5. Se (1) $\varphi(xy)$ è esattamente misurabile (sommabile) in E
(2) A è piano e contenuto in E ed anche esattamente misurabile,

allora $\varphi(xy)$ considerata soltanto in A è esattamente misurabile (sommabile) in A.

Teor. 6 Se $\varphi^{(1)}$ e $\varphi^{(2)}$ sono esattamente misurabili in E anche $\varphi = \varphi^{(1)} . \varphi^{(2)}$ è tale.
[Ma non si potrebbe dire lo stesso della loro sommabilità!].

Teor. 7. Se 1. $\varphi^{(1)}$ e $\varphi^{(2)}$ sono esattamente misurabili in E
2. limitati in E,

allora:

$$\varphi = \varphi^{(1)}.\varphi^{(2)} \text{ è esattamente sommabile in } E.$$

Le dimostrazioni dei sopradetti teoremi si fanno facilmente colle note proprietà delle funzioni misurabili o sommabili in modo indicato nella demostrazione del teor 1

Com'è noto se la funzione del punto analitico $\varphi(P)$ è definita in un insieme a qualunque dimensioni (E)

e (1) $\varphi^2(P)$ sommabile in E
(2) $\varphi(P)$ misurabile.

Allora $\varphi(P)$ è sommabile anche in E. In tal caso diremo che $\varphi(P)$ è sommabile con quadrato in E.

[Dim. v. De la Vallée Poussin Cours d'Analyse III^{ed} v. I]

Teor. 8. Se 1. $\varphi^2(xy)$ sommabile esattamente in E.
2. $\varphi(xy)$ misurabile esattamente in E.

allora $\varphi(xy)$ esattamente sommabile in E.

Dim: (1) $\varphi(xy)$ è sommabile in E dal Teor. precedente
(2) $f_{y_0}^2$ sommabile in $E''(y_0)$ e f_{y_0} misurabile allora f_{y_0} sommabile in $E''(y_0)$
(3) lo stesso per $g_{x_0}(y)$.

Diremo in tal caso la funzione $\varphi(xy)$ sommabile esattamente con quadrato.

È noto che la sommabilità di $\varphi^{(1)}(P)$ e $\varphi^{(2)}(P)$ in E implica la sommabilità del prodotto

$$\varphi = \varphi^{(1)}.\varphi^{(2)},$$

ne segue il teorema:

Teor. 9. Se 1. $\varphi^{(1)}(xy)$ ed $\varphi^{(2)}(xy)$ sono esattamente sommabili con quadrato in E
anche

$$\varphi(xy) = \varphi^{(1)}.\varphi^{(2)}$$

è sommabile in E esattamente.

Def. Indicheremo con $R(ab)$ il quadrato formato con tutti i sistemi (xy)
per le quali
$$\left.\begin{array}{l} a \leqq x \leqq b \\ a \leqq y \leqq b \end{array}\right\}$$

Con $T(ab)$ indichiamo il triangolo di tutte le coppie (xy) per le quali

$$a \leqq y \leqq x \leqq b$$

$R(ab)$ e $T(ab)$ sono evidentemente misurabili in modo esatto.

Se 1. $\varphi(xy)$ e definita in E piano
2. E contenuto in $R(ab)$

allora la funzione

$$\begin{aligned} \Phi(xy) &= \varphi(xy) \text{ in } E \\ &= 0 \text{ in } R - E \end{aligned}$$

chiameremo la estensione di $\varphi(xy)$ al quadrato $R(ab)$.

Teor. 10. Se (1) $\varphi(xy)$ esattamente misurabile (sommabile) in E
(2) E contenuto in $R(ab)$
allora $\Phi(xy)$ esattamente misurabile in $R(ab)$.

Dim: 1° La estensione $\Phi(xy)$ è misurabile nel senso ordinario (v. Caratheodory Vorl. üb. reelle Funkt.).

2° F_{y_0} e la estensione lineare di f_{y_0} al $[ab]$ quindi misurabile (sommabile) con essa.

3° lo stesso per ogni g_{x_0}.

Senza restringere la generalità dei risultati possiamo prendere sempre le funzioni definite in $R(ab)$ nelle quistioni ove si tratta di sommabilità o misurabilità di quelle.

Cercando la modificazione del teorema ora classico del Fubini, riccordiamo dapprima il suo enunciato ordinario per due e tre variabili [v. Caratheodory op. cit. p. 621].

I. Se $\varphi(xy)$ sommabile in $R(ab)$
allora

1° Insieme dei y_0 in $[ab]$ ove f_{y_0} sommabile è $[ab] - V_1$ ove V_1 è di misura nulla.

2° Insieme dei x_0 in $[ab]$ ove g_{x_0} sommabile è uguale al

$$[ab] - V_2$$

ove V_2 di misura nulla

3° $F(y_0) = \int_a^b f_{y_0} dx$ definita e sommabile in $[ab] - V_1$

4⁰ $g(x_0) = \int_a^b g_{x_0}\, dy$ definita è sommabile in $[ab] - V_2$

5⁰ $\int\limits_{[ab]-V_1} F(y)\, dy = \int\limits_{[ab]-V_2} G(x)\, dx = \iint\limits_R \varphi(xy)\, dx\, dy.$

Un cubo $S(ab)$ sia dato da tutti i sistemi (x, y, z) soddisfaceuti:

$$a \leqq x \leqq b$$
$$a \leqq y \leqq b$$
$$a \leqq z \leqq b$$

In modo analogo consideriamo le sezioni di $S(xy)$.

Sezione di $S(ab)$ col piano $x = x_0$ è $R(ab)$, colla retta $x = x_0$. $y = y_0$ è $[ab]$.

II. Se $\varphi(x\,y\,z)$ sommabile in $S(ab)$
allora
1. Insieme dei y_0 fra a e b ove $f_{y_0} = \varphi(x\,y_0\,z)$ sarebbe sommabile è:

$$[a\,b] - V_2$$

ove V_2 di misura nulla

2. $F(y) = \iint\limits_R f_y(x\,z)\, dx\, dz$ definita e sommabile in $[ab] - V_2$

3. $\int\limits_{[ab]-V_2} F(y)\, dy = \iiint\limits_S \varphi x(yz)\, dx\, dy\, dz$

4. Insieme dei punti ove $f_{x_0 z_0} = \varphi(x_0\, y\, z_0)$ sarebbe sommabile in $[ab]$
è $R[ab] - V_{13}$ ove V_{13} di misura (piana) nulla.

5. $\Pi(xz) = \int_a^b f_y\, dy$ definita e sommabile in $R - V_{13}$

6. $\iint\limits_{R-V_{13}} \Pi\, dx\, dz = \iiint\limits_S \varphi\, dx\, dy\, dz.$

Teor. 11. [„Fubini“ esatto per due variabili].
Se $\varphi(xy)$ è sommabile esattamente in $R(ab)$
allora:

1. $F(y) = \int_a^b f_y\, dx$ definita e sommabile in $[ab]$

2. $G(x) = \int_a^b g_x \, dy$ definita e sommabile in $[ab]$

3. $\int_a^b F(y)\, dy = \int_a^b G(x)\, dx = \int_R\int \varphi(xy)\, dx\, dy$

Dim: (1) f_y e g_x sommabili sempre perchè $\varphi(xy)$ esattamente sommabile

(2) quindi V_1 e V_2 nulli

(3) il resto segue dal teorema I di Fubini. Analogo valga anche per le tre variabili.

Teor. 12. [formola dello Dirichlet esatta].

Se $\varphi(xy)$ esattamente sommabile in $T(ab)$ allora:

$$\int_T\int \varphi\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_a^x g_x dy = \int_a^b dy \int_y^b f_y\, dx.$$

Dim: Sia $\Phi(xy)$ la estenzione al $R(ab)$ di φ — allora Φ sunè esattamente sommabile in $R(ab)$. [teor. 10].

Avremmo: [teor. 11]

$$\int_R\int \Phi\, dx\, dy = \int_a^b\int_a^b F_y dx\, dy = \int_a^b\int_a^b G_x dy\, dx$$

ma (1)
$$\int_R\int \Phi\, dx\, dy = \int_T\int \varphi\, dx\, dy$$

(2)
$$\left.\begin{aligned} F_y &= f_y \text{ in } [y,b] \\ &= 0 \text{ in } [ay) \end{aligned}\right\} \text{ quindi } \int_a^b F_y\, dx = \int_y^b f_y\, dx$$

(3)
$$\left.\begin{aligned} G_x &= g_x \text{ in } [ax] \\ &= 0 \text{ in } [xb] \end{aligned}\right\} \text{ quindi } \int_a^b G_x dy = \int_a^b g_x\, dy$$

(4) sostituendo, abbiamo la formola.

Teor. 13. Sia

(1) $\varphi(xy)$ sommabile esattamente con quadrato in R

(2) $f(y)$ sommabile in $[ab]$ con quadrato

allora
$$F(x) = \int_a^b \varphi(xy)\, f(y)\, dy$$

definita e sommabile in $[ab]$.

Dim: (1) per ogni x_0 in $[ab]$ $g_{x_0}(y) = \varphi(x_0 y)$ è sommabile con quadrato in $[ab]$ quindi $g_{x_0}(y) \cdot f(y)$ sommabile in $[ab]$.

$$\text{allora} \quad F(x) = \int_a^b \varphi(xy)\, f(y) dy \quad \text{definita in } [ab]$$

$\varphi(xy)\, f(y) = \psi(xy)$ è superficialmente sommabile in R, quindi secondo Fubini: [teor. 11).

$$F(x) \text{ sommabile in } [ab].$$

Ammettiamo un corrollario facile:
se $\varphi(xy)$ sommabile in $R(ab)$
allora posto

$$\psi(xyz) = \varphi(xy) \quad \text{in } S(ab)$$

abbiamo ψ sommabile in $S(ab)$.

Teor. 14. Se $\varphi(xy)$ e $\psi(xy)$ sono esattamente sommabili con quadrato in $R(ab)$, allora la loro composizione di seconda specie (di Fredholm) è sommabile in $R(ab)$ esattamente.

$$\text{Dem:} \quad (1) \quad \text{sia} \quad \Phi(xsy) = \varphi(xs) \quad \text{in} \quad S(ab)$$
$$\Psi(xsy) = \psi(sy) \quad \text{in} \quad S(ab)$$

allora Φ e Φ sommabili con quadrato in S [corr. di sopra].
quindi

$$\Phi(xsy) \,.\, \Psi(xsy) = \varphi(xs)\, \psi(sy)$$

sommabile in S.

(2) Per ogni x_0, y_0 in $[ab]$
$\varphi(x_0 s)$ e $\psi(s y_0)$
sommabili con quadrato
quindi

$\varphi(x_0 s) \,.\, \psi(s y_0)$ sommabile e definita in $[ab]$ come funzione di s

$$F(x_0 y_0) = \int_a^b \varphi(x_0 s)\, \psi(s y_0)\, ds$$

definita in $R(ab)$.

(3) secondo Fubini F è sommabile in R.

$$(4)\quad F(xy_0) = \int_a^b \varphi(xs)\,\psi(sy_0)\,ds \quad [y_0 \text{ in } [ab]]$$

Ma $\psi(sy_0)$ sommabile con quadrato in $[ab]$.

$\varphi(xs)$ esattamente sommabile con quadrato in R

quindi

$F(xy_0)$ sommabile in $[ab]$ { Fubini }

(5) analogo por $F(x_0y)$.

Dunque $F(xy)$ sommabile esattamente.

Teor. 15. Se $\varphi(xy)$ e $\psi(xy)$ sommabili esattamente con quadrato in $T[ab]$ allora la loro composizione di prima specie [di Volterra] cioè:

$$F(xy) = \int_y^x \varphi(xs)\,\psi(sy)\,ds$$

è sommabile in T.

Dim: per estensione al $R(ab)$

Teor. 16. Se $\varphi(xy)$ e $\varphi(xy)$ esattamente sommabili con quadrato in R

allora la composizione

$$F(xy) = \int_a^b \varphi(xs)\,\psi(sy)\,ds$$

è sommabile esattamente con quadrato in R.

$$\text{Dim: (1)}\quad F^2 = \left[\int_a^b \varphi\psi\,ds\right]^2 \leqq \int_a^b \varphi^2 ds \int_a^b \psi^2 ds = K(xy)$$

[disugualianza dello Schwarz].

$$\text{Ma:}\quad \left.\begin{array}{l} \Phi(x) = \int_a^b \varphi^2 ds \\[2ex] \Psi(y) = \int_a^b \psi^2 ds \end{array}\right| \text{ sommabili in } [ab] \text{ secondo Fubini}$$

quindi $\Phi(x)\,.\,\Psi(y) = K(xy)$

sommabile in R esattamente.

$K(xy)$ essendo una „majorante de la sommabilitè“ di De la Vallée Poussin implica la sommabilità esatta di $F^2(xy)$.

Ma $F(xy)$ sommabile socondo il teor. 14 quindi anche con quadrato.

Teor. 17. Se $\varphi(xy)$ e $\psi(xy)$ sommabili esattamente in $T(ab)$ con quadrato — allora la composizione

$$\Phi(xy) = \int_y^x \varphi(xs)\, \psi(sy)\, ds$$

è sommabile essattamente c o n q u a d r a t o in T.

Dim: Usando la formola dello Dirichlet ed il teor 16.

§ II.

G. Vitali ha introdotto nella sua memoria nelle Rend. di Palermo di 1907 il concetto della equi assoluta continuità Ripproduco due definizioni del lavoro citato:

Def. I. Una progressione delle funzioni

$$\{f_n\} \qquad n = 1 . 2 \ldots$$

h a g l i i n t e g r a l i e q u i - a s s o l u t a m e n t e c o n t i n u i i n u n i n s i e m e (D) l i m i t a t o [scriveremo EAC]

se

(1) per ogni $\varepsilon > o$ esiste $\delta > o$ tale che

per ogni (α) T. insieme contenuto in D

di cui (β) $m(T) < \delta$

abbiamo
$$\left|\int_T f_n d\tau\right| < \varepsilon \qquad n = 1 . 2 \ldots$$

Def. II. Una $\{f_n\}$, ove f_n definite in D, è c o m p l e t a m e n t e i n t e g r a b i l e p e r i t e r m i n i {scriveremo CIT} se:

$$(1) \quad \lim_{n \mid \infty} f_n = f \quad \text{in } D$$

$$(2) \quad \lim \int_A f_n d\tau = \int_A f d\tau$$

per ogni A misurabile, contenuto in (D).

Vitali ci da il teorema sequente:

Condizione necessaria e sufficiente perchè $\{f_n\}$ definita in D sia CIT

è:

$$(1)\quad f_n \text{ sommabile in } D \qquad n = 1, 2, \ldots$$
$$(2)\quad \lim f_n = f$$
$$(3)\quad \{f_n\} \text{ è } EAC \text{ in } D$$

In tal caso f è già sommabile in D!]

Introduco una modificazione adatta al nostro scopo presente:

Def. III. La $\{f_n\}$ delle funzioni definite in E piano e limitato è esattamente EAC in E se

$$(1)\quad \{f_n(xy)\} \text{ è } EAC \text{ in } E$$
$$(2)\quad \{f_n(xy_0)\} \text{ è } EAC \text{ in } E''(y_0) \quad \text{per ogni } y_0$$
$$(3)\quad \{f_n(x_0y)\} \text{ è } EAC \text{ in } E'(x_0) \quad \text{per ogni } (x_0).$$

Def. IV. La $\{f_n\}$ delle f_n definite in E piano e limitato è CIT esattamente se

1° $$\lim f_n = f \text{ in } E$$

2° $$\lim_{n \mid \infty} \int\int_A f_n \, dx\, dy = \int_A f dx dy$$

per ogni A misurabile, contenuto in E

3° $$\lim_{n \mid \infty} \int_F f_n(xy_0) dx = \int_F f(xy_0) dx$$

per ogni F misurabile, contenuto in $E''(y_0)$ e per ogni y_0.

3° $$\lim_{n \mid \infty} \int_K f_n(x_0y) dy = \int_K f(x_0y)$$

per ogni K misurabile, contenuto in $E'(x_0)$ e per ogni x_0.

Teor. 1. Condizione necessaria e sufficiente perchè $\{f_n\}$ sia CIT esattamente in E è seguente:

(1) $f_n(xy)$ sono sommabili esattamente in E $n = 1, 2 \ldots$

(2) $$\lim_{n \mid \infty} f_n(xy) = f \text{ in } E$$

(3) $\{f_n(xy)\}$ è EAC esattamente in E.

Dim: Le nostre condizioni ci danno

CIT per (1) $\{f_n(xy)\}$

(2) $\{f_n(x_0y)\}$ per ogni x_0

(3) $\{f_n(xy_0)\}$ per ogni y_0.

Quindi danno anche esatta CIT.
Il reciproco è analogo.

Diamo adesso parecchi criterî della CIT, usati in prattica (soltanto sufficienti).

Teor. 2. Se 1° esiste M tale che

$$|f_n| < M \quad \text{per} \quad n = 1 . 2 \ldots$$
$$\text{in } E$$

2° $f_n(xy)$ esattamente misurabili in E

3° $\lim f_n = f$ in D

allora

(1) $\{f_n\}$ è CIT esattamente in E

(2) f esattamente sommabile in E

Dim: (α) (1) (2) danno la sommabilità esatta delle f_n in E {§ I teor }.

(β) se Γ piano, misurabile e contenuto in E allora:

$$\left| \int_\Gamma \int f_n dx dy \right| \leqq m(\Gamma) M$$

allora se
$$m(\Gamma) < \delta = \frac{\varepsilon}{M+1}$$

abbiamo:
$$\left| \int_\Gamma \int f_n \right| < \varepsilon \qquad n = 1 . 2 \ldots$$

(γ) se F lineare, misurabile, contenuto in $E''(y_0)$

$$\left| \int_F f_n(xy_0) dx \right| \leqq m(F) M$$

(δ) analogo per $\left| \int_K f_n(x_0 y) dy \right|$

quindi abbiamo EAC esatta in E cio che da il resto.

Teor. 3. Se esiste $\psi(xy)$

(1) esattamente sommabile in E

(2) tale che $|f_n(xy)| \leqq \psi(xy)$ in E

(3) se ancora $f_n(xy)$ sono esattamente misurabili in E

(4) $\lim_{n=\infty} f_n = f$ in E

allora

$$\{f_n\} \text{ è } CIT \text{ esattamente}$$
$$f(xy) \text{ esattamente sommabile.}$$

Dim: (α) 1° e 4° danno in ogni dimensione la sommabilità esatta di $f_n(xy)$ e di $f(xy)$

$$(\beta) \qquad \left| \int_\Gamma \int f_n \, dx \, dy \right| \leqq \int_\Gamma \psi \, dx \, dy$$

$$(\gamma) \qquad \left| \int_F f_n(xy_0) dx \right| \leqq \int_F \psi(xy_0) \, dx$$

$$(\delta) \qquad \left| \int_K f_n(x_0 y) dx \right| \leqq \int_K \psi(x_0 y) \, dy$$

e siccome gli integrali di $\psi(xy)$ sono assolutamente continui, quindi per maggiorazione valga lo stesso delle f_n $n = 1 . 2 \ldots$

Sur la transformation du p-ème degré d'une fonction automorphe.

Par

C. Abramowicz

Dans son mémoire „Sur les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique" Poincaré[1]) a envisagé la possibilité de la transformation des fonctions automorphes. Les idées de Poincaré ont été reprises par Fricke qui a consacré des recherches étendues au cas de transformation du 3-ème degré[2]) de la fonction automorphe appartenant au groupe (0, 3; 2, 4, 5). Outre ces recherches de Fricke et deux cas spéciaux conduisant aux groupes G_{60} et G_{168} envisagés par lui[3]), nous ne trouvons pas d'autres résultats dans la théorie de la transformation des fonctions automorphes. Dans le travail actuel nous nous occupons du cas général de transformation de la fonction automorphe appartenant au groupe (0, 3; 2, 4, 5).

Pour énoncer les résultats du travail actuel remarquons qu'on définit le groupe (0, 3; 2, 4, 5) comme l'ensemble de toutes les substitutions de la forme

$$(1) \qquad z' = \frac{(a+b\sqrt{j})\,z + c + d\sqrt{j}}{(-c+d\sqrt{j})\,z + a - b\sqrt{j}}$$

où j désigne la racine positive de l'équation $j^2+j-1=0$, les nombres a, b, c, d sont des nombres entiers du corps quadratique $K(j)$ et le déterminant $a^2+c^2-j(b^2+d^2)$ des substitutions est égal à 4 ou 2; on a en outre $a \equiv c$, $b \equiv d$ (mod 2).

---

1) Journal de mathématiques, IV, t. 3, p. 405.

2) Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen, t. II, p. 553.

3) Acta mathematica, t. 17, p. 345.

La fonction automorphe $\varphi(z)$ appartenant au groupe (0, 3; 2, 4, 5) remplit donc la condition $\varphi(z') = \varphi(z)$.

Si l'on désigne maintenant par $z' = T(z)$ une substitution de la forme (1) au déterminant

$$a^2 + c^2 - j\,(b^2 + d^2) = p,$$

où p désigne un nombre naturel différent de 4 et 2, on dira avec Poincaré[1]) que la transformation du p-ème degré de la fonction automorphe appartenant au groupe (0, 3; 2, 4, 5) consiste dans la détermination de la relation entre la fonction $\varphi(z)$ et la fonction transformée $\varphi(Tz)$. Cette relation, comme l'a montré Poincaré, ne sera algébrique que dans le cas où le groupe (0, 3; 2, 4, 5) et le groupe $T^{-1}(0,\ 3;\ 2,\ 4,\ 5)\ T$ sont commensurables.

Il est évident qu'on peut pour la transformation du p-ème degré de la fonction automorphe employer chaque substitution $T(z)$ de la forme (1) ayant le déterminant égal au nombre p. Mais nous faisons la restriction $b = d = 0$ et nous ne regarderons que les substitutions de la forme

$$T(z) \frac{Pz + Q}{-Qz + P}$$

au déterminant $P^2 + Q^2 = p$, les nombres P et Q étant entiers dans le corps $K(j)$.

En prenant la substitution $T(z)$ nous obtenons les résultats suivants: 1) nous démontrons la commensurabilité des groupes (0, 3; 2, 4, 5) et $T^{-1}(0,\ 3;\ 2,\ 4,\ 5)\ T$, 2), nous déterminons l'indice du groupe de substitutions au déterminant 1 contenu dans le groupe (0, 3; 2, 4, 5), 3) en s'appuyant sur ce résultat nous déterminons l'ordre du groupe de Galois de l'équation algébrique à laquelle satisfait la fonction automorphe transformée, 4) nous montrons enfin que le degré de cette équation est égal à $p^2 + 1$; nous appliquons les résultats obtenus à la transformation du 7-ème degré.

§ 1. La commensurabilité des groupes (0. 3: 2. 4. 5) et T^{-1}(0. 3; 2, 4, 5) T.

Nous désignerons les substitutions (1) du groupe (0, 3; 2, 4, 5) par $(a,\ b,\ c,\ d)$; la substitution $T(z)$ aura alors la forme

$$T = (P,\ 0,\ Q,\ 0).$$

---

[1]) Oeuvres, t. II, p. 463

Calculons les substitutions (A, B, C, D) du groupe transformé $T^{-1}(0, 3; 2, 4, 5)\, T$. En appliquant les formules

$$\begin{aligned} \alpha' &= ms\alpha - nr\delta + rs\beta - mn\gamma, \\ \beta' &= ns(\alpha - \beta) + s^2\beta - n^2\gamma, \\ \gamma' &= mr(\delta - \alpha) - r^2\beta + m^2\gamma, \\ \delta' &= ms\delta - nr\alpha - rs\beta + mn\gamma \end{aligned}$$

donnant les coefficients $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ de la substitution qui s'obtient en transformant la substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \text{ à l'aide de } \begin{pmatrix} m, n \\ r, s \end{pmatrix},$$

nous trouvons pour les coefficients A, B, C, D de la substitution (A, B, C, D) du groupe transformé $T^{-1}(0, 3; 2, 4, 5)\, T$ les valeurs

$$(2) \qquad \begin{aligned} A &= pa, \quad B = b(P^2 - Q^2) - 2PQd, \\ C &= pc, \quad D = d(P^2 - Q^2) + 2PQb. \end{aligned}$$

Pour démontrer la commensurabilité des groupes $(0, 3; 2, 4, 5)$ et $T^{-1}(0, 3; 2, 4, 5)\, T$ il suffira de montrer l'existence du sous-groupe commun à ces groupes.

L e m m e I: Le sous-groupe commun aux groupes $(0, 3; 2, 4, 5)$ et $T^{-1}(0, 3; 2, 4, 5)\, T$ ne pourra contenir d'autres substitutions du groupe $T^{-1}(0, 3; 2, 4, 5)\, T$ que celles qui s'obtiennent de substitutions (a, b, c, d) satisfaisant à la congruence

$$(3) \qquad 2PQd \equiv (P^2 - Q^2)\, b \pmod{p}.$$

En effet, les formules (2) montrent que le déterminant de la substitution (A, B, C, D) est

$$A^2 + C^2 - j(B^2 + D^2) = p^2 \{a^2 + c^2 - j(b^2 + d^2)\};$$

afin que cette substitution (A, B, C, D) puisse appartenir au groupe $(0, 3; 2, 4, 5)$ son déterminant devra être égal à 4 ou 2; les nombres A, B, C, D doivent donc être divisibles par p; les quotients

$$(4) \qquad \begin{aligned} a' &= \frac{A}{p} = a, \qquad b' = \frac{B}{p} = \frac{1}{p}\left\{ b(P^2 - Q^2) - 2PQd \right\}, \\ c' &= \frac{C}{p} = c, \qquad d' = \frac{D}{p} = \frac{1}{p}\left\{ d(P^2 - Q^2) + 2PQb \right\} \end{aligned}$$

doivent être des nombres entiers du corps $K(j)$. Le nombre b' est entier si la condition (3) est remplie; mais on déduit de (3)

$$2PQd(P^2-Q^2)=b(P^4+Q^4-2P^2Q^2)=b\{(P^2+Q^2)^2-4P^2Q^2\},$$

d'où, en vertu de l'égalité $P^2+Q^2=p$ on a

$$d(P^2-Q^2)\equiv-2PQb(\mathrm{mod}\,p)$$

et la congruence obtenue montre que la valeur pour d'est aussi entière.

Lemme II: Les substitutions (a', b', c', d') du groupe $T^{-1}(0, 3; 2, 4, 5)T$ qui pourront entrer dans le groupe (0. 3; 2, 4. 5) doivent remplir la condition

$$Pd'\equiv Qb'(\mathrm{mod}\,p).$$

En effet, le lemme I montre qu'une telle substitution (a', b', c', d') doit s'obtenir par la transformation d'une substitution (a, b, c, d) dont les termes a, b, c, d s'obtiennent en résolvant par rapport à $a, b. c, d$ les congruences (4); ce sont des nombres

$$a=a', \quad b=\frac{1}{p}\Big\{(P^2-Q^2)b'+2PQd'\Big\},$$

$$c=c', \quad d=\frac{1}{p}\Big\{(P^2-Q^2)d'-2PQb'\Big\};$$

mais, afin que les nombres b et d soient entiers il faudra qu'on ait la congruence

$$(P^2-Q^2)d'\equiv 2PQb'(\mathrm{mod}\,p).$$

qui pourra s'écrire

$$(2P^2-p)d'\equiv 2PQb'(\mathrm{mod}\,p)$$

ou encore

$$Pd'\equiv Qb'(\mathrm{mod}\,p), \ c.\,q.\,f.\,d.$$

Après ces remarques nous avons le théorème:

Théorème I: Le plus grand sous-groupe commun aux groupes

$$(0, 3; 2, 4, 5), \ T^{-1}(0, 3; 2. 4. 5)T$$

se compose de toutes les substitutions (a, b, c, d) satisfaisant à la condition

(5) $$Pd\equiv Qb(\mathrm{mod}\,p).$$

En effet toutes ces substitutions entrent dans le groupe $(0, 3; 2, 4, 5)$; mais, en vertu du lemme II, ce sont en même temps les seules substitutions du groupe transformé $T^{-1}(0, 3; 2, 4, 5)T$ qui peuvent entrer dans le sous-groupe cherché.

Ainsi nous avons démontré l'existence du sous-groupe, défini par la congruence (5). Mais il sera utile pour ce qui va suivre de donner une autre forme à la congruence (5). Nous déterminerons dans ce but un nombre $E + Hj$ du corps $K(j)$ qui satisfasse à la congruence

$$(E + Hj)^2 \equiv -1 \pmod p;$$

alors l'une des deux congruences

$$P(E + Hj) + Q \equiv 0,$$
$$P(E + Hj) - Q \equiv 0$$

sera satisfaite parce que le produit de leurs premiers membres

$$P^2(E + Hj)^2 - Q^2$$

sera, en vertu de l'égalité $P^2 + Q^2 = p$, divisible par p.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème II: Si l'on désigne par $E + Hj$ le nombre satisfaisant à la congruence

$$(E + Hj)^2 \equiv -1 \pmod p \tag{6}$$

et si l'on transforme le groupe $(0, 3; 2, 4, 5)$ à l'aide d'une substitution arbitraire

$$T = \frac{Pz + Q}{-Qz + P}$$

au déterminant $P^2 + Q^2 = p$, le sous-groupe commun aux groupes $(0, 3; 2, 4, 5)$ et $T^{-1}(0, 3; 2, 4, 5)T$ sera déterminé par la congruence

$$\pm d \equiv (E + Hj)b \pmod p.$$

Nous avons supposé l'existence du nombre $E + Hj$ satisfaisant à la congruence (6): cette congrunce est équivalente aux deux suivantes

$$E^2 + H^2 \equiv -1, \quad 2E \equiv H \pmod p$$

d'où nous obtenons

$$5E^2 + 1 \equiv 0 \pmod p.$$

On voit que le nombre $E+Hj$ n'existe que dans la cas où le nombre premier p remplit la condition

$$\left(\frac{-5}{p}\right)=1.$$

Nous avons le théorème:

Théorème III: Etant donné un nombre premier p satisfaisant à la condition

$$\left(\frac{-5}{p}\right)=1,$$

la transformation du p-ème degré de la fonction automorphe $\varphi(z)$ appartenant au groupe $(0,3;2,4,5)$ conduit à la fonction $\varphi(Tz)$ qui satisfait à une équation algébrique dont le degré est égal à l'indice du sous-groupe défini par la congruence

$$d\equiv(E+Hj)b\ (mod\ p)$$

où $E+Hj$ vérifie la congruence $(E+Hj)^2+1\equiv 0\ (mod\ p)$.

La détermination de cet indice qui est le but principal de notre travail, s'appuyera sur une propriété du groupe de Galois de l'équation algébrique à laquelle satisfait la fonction transformée $\varphi(Tz)$; nous appelons cette équation l'équation de transformation.

§ 2. Les substitutions du groupe (0. 3; 2. 4, 5) au déterminant 1.

Pour déterminer l'ordre du groupe de Galois de l'équation de transformation, observons que ce groupe sera isomorphe avec le groupe fini G auquel se réduit le groupe $(0,3;2,4,5)$ suivant le module p. Mais, comme le groupe $(0,3;2,4,5)$ ne contient que les substitutions aux déterminants égaux à 4 ou à 2, l'ensemble G ne pourra contenir que les substitutions (a,b,c,d) aux déterminants $\equiv 4$ ou $\equiv 2 (mod\ p)$, les nombres a, b, c, d étant des nombres entiers du corps $K(j)$ incongrus par rapport au module p; le problème consiste à déterminer le nombre de ces substitutions. Mais nous pouvons simplifier les calculs en montrant qu'on peut se borner aux substitutions au déterminant 1 du groupe $(0,3;2,4,5)$; dans l'ensemble G ces substitutions auront les déterminants congrus à 1 $(mod\, p)$. Nous démontrons le théorème suivant

Théorème IV: L'ensemble de toutes les substitutions (a, b, c, d) du groupe $(0, 3; 2, 4, 5)$ dont le déterminant $a^2 + c^2 - j(b^2 - d^2)$ est égal à 1 constitue un sous-groupe du groupe $(0, 3; 2, 4, 5)$ avec l'indice 10.

Pour démontrer ce théorème désignons par Γ le groupe considéré de substitutions (a, b, c, d) au déterminant 1 et cherchons le champ fondamental de ce groupe. Nous adjoignons dans ce but au groupe Γ la substitution $z' = -\bar{z}$, où $\bar{z}$ désigne le nombre conjugué avec z; le groupe nouveau Γ se composera de substitutions (a, b, c, d) et de toutes les substitutions de la forme

$$z' = \frac{(a + b\sqrt{j})\bar{z} - c - d\sqrt{j}}{(-c + d\sqrt{j})\bar{z} - a + b\sqrt{j}}. \tag{7}$$

La frontière du champ fontamental se composera de lignes de symétrie du groupe Γ. Mais les lignes de symétrie sont caractérisées par l'égalité $b = 0$, ce seront donc des cercles

$$(-c + d\sqrt{j})(x^2 + y^2) - 2ax + c + d\sqrt{j} = 0. \tag{8}$$

Nous remarquons en outre que le groupe Γ ne peut contenir que des substitutions elliptiques à la période égale à 2.

En effet, la substitution (a, b, c, d) étant elliptique, on $a < 1$, mais le nombre $\bar{a}$ conjugué dans le corps $K(j)$ avec a doit aussi remplir la relation $\bar{a} < 1$; il sera donc $a\bar{a} < 1$, autrement dit, la norme du nombre a est plus petite que 1; mais si l'on a $N(a) < 1$, alors $N(a) = 0$ et l'on a $a = 0$; la période de la substitution elliptique est 2.

Il résulte de là que toutes les lignes de symétrie du groupe Γ se coupent sous des angles droits, autrement dit, les cercles (8) forment sur le plan un réseau de polygones avec les angles droits. Il reste à choisir parmi ces polygones celui qui est le champ fondamental du groupe Γ.

Nous allons procéder de la manière suivante: 1) nous cherchons sur l'axe d'ordonnées le point elliptique du groupe Γ le plus prochain du point i; sur la ligne de symétrie qui passe par ce point nous cherchons le point elliptique le plus prochain, etc.; en procédant de telle manière nous retournons au point i et nous obtenons un certain polygone circulaire. Si le groupe Γ contient encore des substitutions transformant ce polygone en lui-même, ces substitutions formeront un certain groupe qui devra être cyclique à une période q, alors la q-ème partie du polygone obtenu sera le champ fondamental du groupe Γ; 2) nous cherchons une telle substitution elliptique V n'appartenant pas au groupe Γ qui transformerait le groupe Γ en lui-même; c'est à dire vérifierait la relation $\Gamma = V^{-1}\Gamma V$.

Déterminons dans le corps du 4-ème degré obtenu par l'adjonction au corps $K(j)$ de la racine quadratique $\sqrt{j}$, une telle unité

$$\varepsilon = \alpha + \beta j + \sqrt{j}\,(\gamma + \delta j),$$

qu'on ait $\varepsilon\bar{\varepsilon} = 1$, $\bar{\varepsilon}$ étant égal à $\alpha + \beta j - \sqrt{j}\,(\gamma + \delta j)$ et que le nombre 2ε soit un carré parfait dans ce corps du 4-ème degré; les calculs montrent qu'on peut prendre pour l'unité ε le nombre

$$\varepsilon = 1 + j + \sqrt{j}\,(1 + j),$$

et l'on aura

$$2\,\varepsilon = (1 + j + \sqrt{j}\,)^2 = k^2,$$

où $k = 1 + j + \sqrt{j}$.

Envisageons maintenant la substitution

$$V = \frac{k}{\bar{k}} \cdot \frac{z + 1}{-z + 1} \tag{9}$$

transformant le point i en $ki : \bar{k}$, où $\bar{k} = 1 + j - \sqrt{j}$; le déterminant $2k\bar{k}$ de cette substitution est, d'après les calculs précédents, égal à 4.

Cette substitution possède les propriétés suivantes:

1) elle n'entre pas dans le groupe Γ, car son déterminant est égal à 4,

2) elle transforme le groupe Γ en lui-même, ce qu'on vérifie directement en calculant les substitutions $V^{-1}\Gamma V$.

3) elle est une substitution elliptique à la période 5 parce que l'équation donnant la période m de cette substitution est

$$k + \bar{k} = 4 \cos \frac{\pi}{m},$$

ce qu'on peut écrire

$$1 + j = 2 \cos \frac{\pi}{m},$$

d'où résulte $m = 5$.

4) ses points fixes z_1 et z_2 sont situés sur le cercle $x^2 + y^2 + 2x = 1$, parce que les valeurs de ces points sont

$$z_1, z_2 = \frac{-\sqrt{j} \pm i \sqrt{2 - j}}{1 + j - \sqrt{j}}$$

et l'on vérifie cette propriété immédiatement.

D'après ces remarques nous voyons facilement quel effet produit l'application de la substitution V au point fixe i; ce point va du cercle passant par les points fixes z_1 et z_2 sur le cercle passant par ces mêmes points et le coupant sous l'angle $2\pi : 5$; puis il va de ce cercle sur le suivant incliné sous l'angle $2\pi : 5$ etc. En effectuant les constructions nous obtenons un pentagone circulaire dont le centre sera situé sur le cercle

$$x^2 + y^2 + 2x = 1$$

et représentera le nombre

$$\frac{-\sqrt{j} + i \sqrt{2 - j}}{1 + j - \sqrt{j}}$$

point fixe de la substitution V.

Le pentagone obtenu sera le champ fondamental du groupe Γ.

En effet, ce pentagone se transforme en lui-même à l'aide de substitutions

$$V, V^2, V^3, V^4,$$

mais le déterminant de toutes ces substitutions est égal à 4, elles n'appartiennent donc pas au groupe Γ; ce pentagone se transforme encore en lui même par l'inversion dans chacune de ses 5 diagonales, mais toutes ces inversions n'appartiennent pas au groupe Γ.

Le pentagone obtenu avec sa réflexion dans l'axe d'ordonnées sera le champ fondamental du groupe Γ.

Pour démontrer maintenant le théorème énoncé nous raisonnerons de la manière suivante. Comme la substitution

$$V = \frac{k}{k} \cdot \frac{z + 1}{-z + 1}$$

transforme le groupe Γ en lui-même, nous adjoignons au groupe Γ les substitutions V, V^2, V^3, V^4; l'ensemble de substitutions

$$\Gamma, \ \Gamma V^k, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

constituera alors un groupe nouveau que nous désignerons par $\Gamma_{(5)}$; le champ fondamental de ce groupe sera la cinquième partie du champ fondamental du groupe Γ avec le sommet au centre du pentagone. Le pentagone fondamental se transformant en lui-même par l'inversion dans chacune de ses diagonales, nous choisirons une telle inversion, p. e.

$$z' = \frac{-z+1}{\bar{z}+1}$$

et nous l'adjoindrons au groupe $\Gamma_{(5)}$; nous obtenons un groupe nouveau que nous désignerons par $\Gamma_{(10)}$ et dont le champ fondamental sera la moitié du triangle antérieur.

Nous montrerons que

1) le groupe $\Gamma_{(5)}$ se compose exclusivement de substitutions (a, b, c, d) au déterminant $a^2 + c^2 - j(b^2 + d^2) = 4$,

2) le groupe $\Gamma_{(10)}$ se compose exlusivement de substitutions (a, b, c, d) au déterminant $a^2 + c^2 - j(b^2 + d^2) = 4$ ou 2.

De cette manière il sera démontré que le groupe $\Gamma_{(10)}$ ne diffère pas du groupe $(0, 3; 2, 4, 5)$, parce que ce dernier, par définition, se compose exlusivement des substitutions (a, b, c, d) aux déterminants 4 ou 2; il sera en même temps démontré que l'indice du groupe Γ composé des substitutions (a, b, c, d) au déterminant 1 est par rapport au groupe $(0, 3; 2, 4, 5)$ égal à 10, parce que 10 quadrilatères équivalents constituent le champ fondamental du groupe Γ.

1) En effet, il est d'abord évident que le groupe $\Gamma_{(5)}$ ne contient d'autres substitutions que celles au déterminant 4 (y compris les substitutions au déterminant 1); il reste seulement à montrer que le groupe $\Gamma_{(5)}$ épuise toutes les substitutions au déterminant 4. En effet, s'il y avait des substitutions au déterminant 4 qui n'appartiennent pas au groupe $\Gamma_{(5)}$, il y aurait aussi de nouvelles lignes de symétrie n'appartenant pas au groupe $\Gamma_{(5)}$; soit le cercle

$$(-c + d\sqrt{j})(x^2 + y^2) - 2ax + c + d\sqrt{j} = 0$$

une telle ligne de symétrie; de l'égalité $b = 0$ il résulterait alors

$d \equiv 0 \ (mod\ 2)$ et puis, en vertu de l'égalité $a^2 + c^2 - jd^2 = 4$, il résulterait $a^2 + c^2 \equiv 0 \ (mod\ 2)$; mais nous avons de plus $a \equiv c \ (mod\ 2)$, d'où $a \equiv 0 \ (mod\ 2)$; tous les nombres a, c, d seraient divisibles par 2 et la substitution correspondante entrerait dans le groupe $\Gamma_{(5)}$ parce qu'elle entrerait dans le groupe Γ. Il n'y a donc pas de nouvelles lignes de symétrie; le réseau des polygones correspondant au groupe $\Gamma_{(5)}$ et le réseau correspondant à l'ensemble des substitutions (a, b, c, d) au déterminant 4 sont identiques. Le groupe $\Gamma_{(5)}$ contient donc toutes les substitutions (a, c, b, d) au déterminant 4 satisfaisant aux conditions $a \equiv c$, $b \equiv d \ (mod\ 2)$ et n'en contient aucune autre.

2) Pour démontrer que le groupe $\Gamma_{(5)}$ ne contient d'autres substitutions que celles au déterminant $a^2 + c^2 - j\,(b^2 + d^2) = 4$ ou 2, il suffira de montrer que s désignant une substitution au déterminant 2, S une substitution au déterminant 4 et U la substitution

$$U = \frac{z + 1}{-z + 1}$$

le produit sU sera une snbstitution au déterminant 4 et le produit $U^{-1}S$ une substitution au déterminant 2.

En effet, nous calculons

$$sU = \begin{pmatrix} a - c + (b - d)\sqrt{j}, & a + c + (b + d)\sqrt{j} \\ -a - c + (b + d)\sqrt{j}, & a - c - (b - d)\sqrt{j} \end{pmatrix}$$

et vérifions immédiatement que, d'aprés la relation $a^2 + c^2 - j\,(b^2 + d^2) = 2$, cette substitution a le déterminant 4.

Nous trouvons de même

$$U^{-1}S = \begin{pmatrix} a + c + (b + d)\sqrt{j}, & -a + c + (-b + d)\sqrt{j} \\ a - c + (-b + d)\sqrt{j}, & a + c - (b + d)\sqrt{j} \end{pmatrix}$$

d'où, en vertu des relations $a \equiv c$, $b \equiv d \ (mod\ 2)$, nous constatons que les coefficients de la substitution $U^{-1}S$ sont divisibles par 2; après la réduction de ce facteur nous obtenons la substitution au déterminant 2.

Le théorème énoncé est démontré.

En nous appuyant sur ce théorème nous pouvons dans le calcul de l'ordre du groupe de Galois nous borner aux substitutions au déterminant $= 1$.

§ 3. Détermination de l'ordre du groupe de Galois de l'équation de transformation.

Nous admettons que le nombre p est premier dans le corps $K(j)$; alors la congruence

$$j^2 + j - 1 \equiv 0 \,(mod\ p)$$

n'a pas de racine réelle.

Cela posé, nous déterminons le nombre des solutions de la congruence

$$a^2 + c^2 - j\,(b^2 + d^2) \equiv 1 \,(mod\ p)$$

dans le corps $K(j)$.

Observons d'abord qu'il y a $\frac{1}{2}(p^2 - 1)$ restes quadratiques parmi les $p^2 - 1$ nombres entiers $(mod\ p)$ différents de zéro du corps $K(j)$; ces restes sont des nombres qui peuvent se représenter comme les carrés d'un autre nombre du corps $K(j)$.

Pour représenter ces restes, désignons par g une racine primitive[1]) du nombre p dans le corps $K(j)$, c'est à dire un nombre g satisfaisant à la congruence

$$g^{p^2-1} \equiv 1 \,(mod\ p).$$

alors la suite de $p^2 - 1$ nombres

$$1, g, g^2, g^3, \ldots g^{p^2-2}$$

représentera le système des nombres du corps $K(j)$ incongrus par rapport au module p.

Les puissances paires

(10) $$1, g^2, g^4, \ldots g^{p^2-3}$$

seront les restes quadratiques.

Observons aussi la congruence

(11) $$g^{\frac{p^2-1}{2}} \equiv -1 \,(mod\ p).$$

Après ces préliminaires nous avons le théorème:

Théorème V: La congruence

$$x^2 + y^2 \equiv 0 \,(mod\ p)$$

dans le corps $K(j)$ a $2p^2 - 1$ solutions distinctes.

---

[1]) Serret: Cours d'algèbre supérieure, t. II. p, 175.

En effet, nous pouvons réunir les $\frac{1}{2}(p^2-1)$ restes quadratiques (10) en $\frac{1}{4}(p^2-1)$ paires suivantes

$$
\begin{array}{ll}
1, & g^{\frac{p^2-1}{2}} \\
g^2, & g^{\frac{p^2-1}{2}+2} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
g^{\frac{p^2-1}{2}-2}, & g^{\frac{p^2-1}{2}2-2};
\end{array}
$$

les sommes de chaque paire, en vertu de la congruence (11), sont $\equiv 0 \ (mod\ p)$. Chaque paire nous donnera 8 valeurs pour x et y vérifiant la congruence $x^2+y^2\equiv 0\ (mod\ p)$; en définitive, nous avons (y compris 0)

$$\frac{p^2-1}{4}8+1=2p^2-1.$$

solutions.

Théorème VI: Si l'on désigne par $\alpha+\beta j$ l'un des p^2-1 nombres entiers différents de zéro du corps $K(j)$, la congruence

$$x^2+y^2\equiv \alpha+\beta j\ (mod\ p)$$

a dans le corps $K(j)$ précisément p^2-1 solutions distinctes.

En effet, réunissons les restes (10), y compris 0, en $(p^2-1)^2$ paires; nous obtenons des sommes de la forme

$$g^{2r}+g^{2s}\equiv g^{2r}\{1+g^{2(s-r)}\},$$

où $s,r=0,1,2,\ldots\frac{1}{2}(p^2-3)$. Pour chaque valeur donnée arbitrairement de r nous recevrons une moitié des nombres $\alpha+\beta j$; mais il est facile de voir que pour chaque valeur $r+\frac{1}{4}(p^2-1)$ nous recevrons une autre moitié des nombres $\alpha+\beta j$, car autrement il résulterait $g^{\frac{p^2-1}{2}}\equiv 1\ (mod\ p)$. Chaque nombre $\alpha+\beta j$ sera donc $\frac{1}{4}(p^2-1)$ fois représenté $(mod\ p)$ dans la forme x^2+y^2, ce qui donne p^2-1 solutions distinctes.

Après la démonstration de ces théorèmes, revenons à la détermination du nombre des solutions de la congruence

$$(12)\qquad a^2+c^2-j(b^2+d^2)\equiv 1\ (mod\ p).$$

Examinons d'abord les valeurs $a=0$ et $a=1$; ensuite les autres.

Si $a \equiv 0$ et $c \equiv 0$ nous obtenons la congruence

$$- j(b^2 + d^2) \equiv 1 \ (mod\ p)$$

qui, en vertu de l'égalité $1 = j(1 + j)$, pourra s'écrire $b^2 + d^2 \equiv -1 - j\ (mod\ p)$; cette congruence a $\frac{1}{2}(p^2 - 1)$ solutions (théorème VI) parce que les valeurs b et d qui diffèrent par le signe ne donneront pas des substitutions différentes (a, b, c, d); pour les valeurs $a \equiv 0$, $c \equiv 1$ nous obtenons $2p^2 - 1$ solutions (théorème V); chacune des $\frac{1}{2}(p^2 - 3)$ valeurs restantes pour c donnera $p^2 - 1$ solutions; dans le cas $a \equiv 0$ nous obtenons en définitive

$$\frac{p^2 - 1}{2} + 2p^2 - 1 + \frac{p^2 - 3}{2}(p^2 - 1) = \frac{p^2 + 1}{2} p^2$$

solutions.

Pour les valeurs $a \equiv 1$, $c \equiv 0$ nous obtenons $2p^2 - 1$ solutions; chacune des $p^2 - 1$ valeurs restantes pour c donnera $p^2 - 1$ solutions; en somme nous aurons dans le cas $a \equiv 1$

$$2p^2 - 1 + (p^2 - 1)^2 = p^4$$

solutions.

Si nous passons maintenant aux valeurs restantes pour a, nous remarquons qu'il y en a parmi elles certaines qui vérifient la congruence $a^2 + c^2 \equiv 1$ et d'autres qui ne la vérifient pas. Mais, comme cette congruence a $p^2 - 1$ solutions (théorème VI) il y aura $\frac{1}{2}(p^2 - 1) - 2$ valeurs du premier genre, car les valeurs $a \equiv 0$, $a \equiv 1$ étaient déjà envisagées. Pour chacune de ces valeurs il existera deux valeurs c telles que $a^2 + c^2 \equiv 1$, donc chaque fois deux valeurs parmi p^2 valeurs pour c donneront la congruence $b^2 + d^2 \equiv 0$, c'est à dire, d'après le théorème V, $2p^2 - 1$ solutions; chacune de $p^2 - 2$ valeurs restantes pour c donnera seulement $p^2 - 1$ solutions. Nous aurons ainsi dans les cas mentionnés

$$\frac{p^2 - 5}{4}\{2(2p^2 - 1) + (p^2 - 2)(p^2 - 1)\} = \frac{p^2 - 5}{4} p^2(p^2 + 1)$$

solutions.

Chacune de $\frac{1}{2}(p^2 - 1)$ valeurs pour a qui ne sont pas racines de la congruence $a^2 + c^2 \equiv 1$ nous donnera $p^2(p^2 - 1)$ solutions; toutes ces valeurs donneront $\frac{1}{2}p^2(p^2 - 1)^2$ solutions.

Nous aurons en définitive la somme

$$p^2 \frac{p^2+1}{2} + p^4 + \frac{p^2-5}{4} p^2(p^2+1) + \tfrac{1}{4} p^2 (p^2-1)^2 = \tfrac{1}{2} p^2 (p^4-1)$$

exprimant le nombre des solutions de la congruence (12).

Nous pouvons énoncer le théorème:

Théorème VII: Si l'on effectue la transformation T du p-ème degré sur la fonction automorphe $\varphi(z)$ appartenant au groupe $(0, 3; 2, 4, 5)$ le groupe de Galois de l'équation algébrique à laquelle satisfait la fonction transformée $\varphi(Tz)$ est isomorphe avec un groupe d'ordre $\frac{1}{2} p^2 (p^4 - 1)$.

§ 4. Détermination du degré de l'équation de transformation.

Désignons le groupe dont nous avons déterminé le degré par G; notre but principal est de montrer que ce grroupe G contient un sous groupe d'ordre $\frac{1}{2} p^2 (p^2 - 1)$.

Observons en premier lieu le groupe cyclique

$$G_p = (1, 1, 0. E + Hj)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots p - 1$$

composé des puissances différentes de la substitution

$$S = (1, 1, 0. E + Hj)$$

ayant la propriété

$$S^p \equiv 1 \ (mod\ p);$$

on vérifie aisément cette propriété en observant que généralement chaque substitution U de la forme $U = (1, b, c, d)$ ayant son premier terme 1, a la période p; on a, en effet les formules

$$(13) \qquad \begin{aligned} A &= a\alpha + jb\beta - c\gamma + jd\delta, \\ B &= a\beta + b\alpha + c\delta - \gamma d, \\ C &= a\gamma + jb\delta + c\alpha - jd\beta, \\ D &= a\delta + d\alpha + b\gamma - c\beta \end{aligned}$$

donnant les coefficients A, B, C, D du produit

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d)\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta);$$

ces formules donnent

$$U^2 = (1, 2b, 2c, 2d),$$
$$U^3 = (1, 3b, 3c, 3d),$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$U^p = (1, pb, pc, pd) = (1, 0, 0, 0) = 1.$$

Nous démontrons le théorème:

Théorème VIII: L'ensemble de p^2 substitutions de la forme

$$(1, b, 0, (E + Hj)\, b)$$

où b parcourt le système complet des nombres entiers du corps $K(j)$ incongrus par rapport au module p, constitue un groupe G_{p^2} pour lequel le groupe G_p est un diviseur normal.

Déterminons dans ce but toutes les substitutions du groupe G qui transforment le groupe cyclique G_p en lui-même.

Nous aurons la condition

$$(-a, b, c, d)\,(1, 1, 0, E + Hj)\,(a, b, c, d) = (1, 1, 0, E + Hj)$$

parce qu'il est facile de voir que la substitution $(-a, b, c, d)$ est l'inverse de (a, b, c, d).

Si l'on désigne la première partie de cette congruence par (a', b', c', d') on obtient, ayant égard à la congruence

$$a^2 + c^2 - j\,(b^2 + d^2) \equiv 1 \ (mod\ p), \tag{14}$$

les relations

$$\begin{aligned}
a' &\equiv -1,\\
b' &\equiv -2a^2 + 2jb^2 + 1 + 2\,(E + Hj)\,(ca + bdj),\\
c' &\equiv -2adj + 2j\,(E + Hj)\,(dc + ab),\\
d' &\equiv -2ac + 2jbd + (E + Hj)\,(1 + 2d^2j - 2a^2),
\end{aligned}$$

nous aurons donc (après la réduction de 2) les congruences suivantes

$$\begin{aligned}
& c^2 - jd^2 + (E + Hj)\,(ca + bdj) \equiv 0,\\
& ad - (E + Hj)\,(ab + dc) \equiv 0,\\
& jbd - ac + (E + Hj)\,(c^2 - b^2j) \equiv 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Multipliant la première par b et la troisième par d et les additionnant nous obtenons la relation

$$bc^2 + c\,[(E + Hj)\,(ab + dc) - ad] \equiv 0 \ (mod\ p)$$

qui, en vertu de la deuxième congruence (15), s'écrira

$$bc^2 \equiv 0 \ (mod\ p);$$

il résulte de là: 1) $b \equiv 0$, ou 2) $c \equiv 0 \ (mod\ p)$.

La condition $b \equiv 0$ est impossible parce que la troisième congruence (15) se changerait alors en

$$c\,[-a + c\,(E + Hj)] \equiv 0 \ (mod\ p)$$

et donnerait $a \equiv c\,(E + Hj)$; la deuxième donnerait alors $-jd^2 \equiv 0$ ou $d \equiv 0$; mais les valeurs

$$b \equiv 0,\ a \equiv c\,(E + Hj),\ d \equiv 0$$

ne vérifieraient pas la congruence (14).

Reste la condition $c \equiv 0$; alors la troisième congruence (15) se change en

$$jb\,[d - b\,(E + Hj)] \equiv 0 \ (mod\ p)$$

ce qui donne

$$d \equiv b\,(E + Hj) \ (mod\ p).$$

Les congruences (15) se vérifient immédiatement; la relation (14) donne pour a la valeur $\equiv \pm 1$.

Les substitutions (a, b, c, d) transformant le groupe G en lui-même seront donc de la forme

$$(1, b, 0, (E + Hj)\,b);$$

le nombre b pourra prendre toutes les valeurs entières du corps $K(j)$ incongrues par rapport au module p. Le théorème énoncé est démontré.

Il est facile de montrer l'existence d'au moins $p^2 + 1$ groupes du type G_{p^2}. En effet, le nombre de substitutions (a, b, c, d) avec le premier terme $a \equiv 1$ (la substitution $(1, 0, 0, 0)$ exclue) est, d'après le théorème V, égal à $p^4 - 1$. Si l'on transforme le groupe G_{p^2} à l'aide d'une substitution arbitraire V prise parmi ces $p^4 - 1$ substitutions ayant la période p, on obtiendra un nouveau groupe d'ordre p^2 qui de même sera composé de substitutions à période p. Chaque substitution ayant la période p n'entrera qu'une seule fois dans un groupe déterminé du type G_{p^2}. En effet, si l'on désigne par U_1 et U_2 deux substitutions quelconques du groupe G_{p^2} dont la première U_1 pourrait entrer dans un nouveau groupe obtenu de G_{p^2} par la transformation à l'aide d'une substitution S, il serait

$$U_1 = S^{-1} U_2 S,$$

d'où résulterait $SU_1 = U_2 S$, ce qui est impossible. Si donc chaque substitution à période p dont le nombre est $p^4 - 1$ n'entre qu'une seule fois dans un certain groupe déterminé d'ordre p^2 contenant $p^2 - 1$ substitutions différentes de l'unité, le nombre de groupes obtenus sera $(p^4 - 1):(p^2 - 1) = p^2 + 1$.

Après ces remarques montrons que le groupe trouvé G_{p^2} est un diviseur normal avec l'indice $\frac{1}{2}(p^2 - 1)$ d'un certain groupe d'ordre $\frac{1}{2} p^2 (p^2 - 1)$

Nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème IX: L'ensemble de $\frac{1}{2} p^2 (p^2 - 1)$ substitutions de la forme

$$(17) \qquad (a, b, c, (E + Hj) b)$$

dans lesquelles b parcourt le système complet des nombres entiers du corps $K(j)$ incongrus par rapport au module p et les nombres a et c vérifient la congruence

$$a^2 + c^2 \equiv 1 \pmod p.$$

constitue un groupe pour lequel le groupe G_{p^2} est un diviseur normal.

Pour la démonstration adjoignons aux p^2 substitutions du groupe G_{p^2} toutes les substitutions de la forme

$$(a, b, c, (E + Hj) b).$$

Nous aurons $\frac{1}{2}(p^2 - 1)$ systèmes de p^2 substitutions pareilles, car nous avons

$$a^2 + c^2 - jb^2 [1 + (E + Hj)^2] \equiv 1 \pmod p.$$

d'où, ayant égard à la congruence

$$(18) \qquad (E + Hj)^2 + 1 \equiv 0 \pmod p,$$

nous obtenons $a^2 + c^2 \equiv 1 \pmod p$ pour déterminer a et c; mais, comme, d'après le théorème VI, la congruence $a^2 + c^2 \equiv 1 \pmod p$ a $p^2 - 1$ solutions distinctes dans le corps $K(j)$, nous obtenons

$\frac{1}{2}(p^2-1)$ paires (a, c) pour a et c; il sera superflu de prendre d'autres systèmes de la forme

$$(-a, b, -c, (E+Hj)b)$$

parce que ces substitutions peuvent s'écrire

$$(a, -b, c, -(E+Hj)b)$$

et il est évident qu'elles ne donneront pas des substitutions nouvelles.

Il suffira pour démontrer le théorème énoncé d'écrire le produit

$$(a, b, c, (E+Hj)b) \cdot (a_1, b_1, c_1, (E+Hj)b_1)$$

de deux substitutions

$$(a, b, c, (E+Hj)b) \text{ et } (a_1, b_1, c_1, (E+Hj)b_1)$$

vérifiant les relations

$$a^2+c^2 \equiv 1, \; a_1^2+c_1^2 \equiv 1 \; (mod\ p).$$

En désignant ce produit par (A, B, C, D) nous obtenons

$$\begin{aligned}
&A \equiv aa_1 - cc_1,\\
&B \equiv ab_1 + ba_1 + (E+Hj)(cb_1 - c_1b),\\
&C \equiv ac_1 + ca_1,\\
&D \equiv bc_1 - cb_1 + (E+Hj)(ab_1 + ba_1).
\end{aligned}$$

Ayant égard à la congruence (18) nous vérifions immédiatement la relation

$$D \equiv (E+Hj)\, B \; (mod\ p) \tag{19}$$

Nous obtenons ensuite

$$\begin{aligned}A^2+C^2 \equiv a^2a_1^2+c^2c_1^2+a^2c_1^2+c^2a_1^2 \equiv (a^2+c^2)a_1^2+c^2c_1^2+\\ +c_1^2(1-c^2) \equiv a_1^2+c_1^2 \equiv 1,\end{aligned}$$

ce qui montre que l'ensemble des substitutions (17) forme effectivement un groupe.

Pour montrer que le groupe G_{p^2} est un diviseur normal du groupe ci-dessus, observons que ce groupe, d'après la définition, ne peut contenir que p^2 sustitutions avec le premier terme $a \equiv 1$; ce sont toutes les substitutions du groupe G_{p^2}. Si nous transformons maintenant le groupe G_{p^2} à l'aide d'une substitution arbitraire

$$S = (a', b', c', d')$$

nous calculerons facilement (d'après les formules du § 1) que le premier terme de chaque substitution du groupe $S^{-1} G_{p^2} S$ sera

$$a'^2 + c'^2 - j(b'^2 + d'^2) \equiv 1 \ (mod\ p).$$

nombre congru à 1 par rapport au module p.

Il sera donc

$$S^{-1} G_{p^2} S \equiv G_{p^2}$$

pour chaque S, c. q. f. d.

L'existence du groupe d'ordre $\frac{1}{2}p^2(p^2-1)$ nous permet de démontrer le théorème suivant:

Théorème X: L'ensemble de toutes les substitutions

$$(20) \qquad \frac{(a+b\sqrt{j})\,z + c + d\sqrt{j}}{(-c+d\sqrt{j})\,z + a - b\sqrt{j}}$$

du groupe $(0, 3; 2, 4, 5)$ vérifiant la congruence

$$(21) \qquad d \equiv (E + Hj)\, b \ (mod\ p),$$

où le nombre $E + Hj$ satisfait à la relation

$$(E + Hj)^2 \equiv -1 \ (mod\ p),$$

forme un sous-groupe du groupe $(0, 3; 2, 4, 5)$ avec l'indice $p^2 + 1$.

Désignons l'indice de ce sous-groupe par la lettre i, désignons par Γ_1 le sous-groupe des substitutions (20) vérifiant la condition (21) et ayant le déterminant $\equiv 1\ (mod\ p)$; le groupe Γ, envisagé au § 2, composé de substitutions (20) avec déterminant 1 peut être représenté sous la forme

$$\Gamma \equiv (\Gamma_1, S_2\Gamma_1, S_3\Gamma_1, \ldots S_i\Gamma_1),$$

où les lettres S_k désignent certaines substitutions (20) ne vérifiant pas la congruence (21).

Si nous considérons maintenant le groupe fini G auquel se réduit le groupe Γ par rapport au module p, nous remarquerons que par rapport au module p les substitutions du groupe Γ_1 se réduiront à celles des substitutions du groupe G qui vérifient la congruence (21); autrement dit, le groupe Γ_1 se réduira à l'ensemble

$$(a, b, c, (E+Hj)\, b)$$

qui, d'après le théorème IX, constitue un groupe d'ordre $\frac{1}{2}p^2(p^2-1)$

L'indice i sera donc égal au quotient $\frac{1}{2}p^2(p^4-1):\frac{1}{2}p^2(p^2-1)=$ $=p^2+1$.

Mais, comme nous l'avons déjà observé auparavant, le degré de l'équation algébrique à laquelle satisfait la fonction transformée $\varphi(Tz)$ doit être égal à l'indice du sous-groupe commun du groupe $(0, 3; 2, 4, 5)$ et du groupe transformé $T^{-1}(0, 3; 2, 4, 5)\,T$, nous avons, en nous appuyant sur le théorème III, le résultat suivant:

Théorème XI: Etant donné un nombre naturel p premier dans le corps $K(j)$ satisfaisant à la condition

$$\left(\frac{-5}{p}\right)=1,$$

si nous effectuons la transformation

$$T(z)=\frac{Pz+Q}{-\bar{Q}z+\bar{P}}$$

du p-ème degré sur la fonction automorphe $\varphi(z)$ appartenant au groupe $(0, 3; 2, 4, 5)$ la fonction transformée $\varphi(Tz)$ satisfait à une équation algébrique du degré p^2+1.

§ 5. Application à la transformation du 7-ème degré.

Les nombres p satisfaisant à la seconde condition du théorème XI sont de la forme

$$20\,k+1, \quad 20\,k+3, \quad 20\,k+7, \quad 20\,k+9;$$

nous avons donc la suite

$$3,\ 7,\ 23,\ 29,\ 41,\ 43,\ 47,\ 61, \ldots$$

Après le nombre $p=3$, envisagé par Fricke, nous avons le nombre [1]) $p=7$ qui est premier dans le corps $K(j)$; appliquons nos résultats généraux à ce cas.

[1]) Le cas du nombre 5 qui n'est pas premier dans le corps $K(j)$ a fait l'objet du mémoire déjà cité de Fricke dans les Acta Mathematica, 17; il conduit au groupe d'icosaèdre.

Nous voyons d'abord que le nombre de substitutions de la forme

$$z' = \frac{Pz + Q}{-Qz + P}$$

au déterminant $P^2 + Q^2 = p$ ne surpasse pas le nombre $8(p+1)$. En effet, si nous posons

$$P = \alpha + \beta j, \quad Q = \gamma + \delta j,$$

où les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers rationnels, nous voyons facilement que ces nombres doivent satisfaire à l'égalité

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = p,$$

mais, comme on sait, le nombre premier p peut être[1]) de $8(p+1)$ manières décomposé en somme de 4 carrés.

Dans le cas de $p = 7$ nous obtenons

$$2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 7,$$

d'où, ayant égard à la condition

$$2(\alpha\beta + \gamma\delta) = \beta^2 + \delta^2$$

que les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ doivent vérifier, nous n'obtenons que les quatre systèmes suivants des valeurs pour les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$\begin{array}{rrrr} 2, & 1, & -1, & 1 \\ 1, & -1, & 2, & 1 \\ 2, & 1, & 1, & -1 \\ -1, & 1, & 2, & 1 \end{array}$$

Nous voyons que, pour la transformation du 7-ème degré de la fonction automorphe $\varphi(z)$ ne peuvent être employés que les quatre substitutions suivantes

$$T_1 = \begin{pmatrix} 2+j, & -1+j \\ 1-j, & 2+j \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1-j, & 2+j \\ -2-j, & 1-j \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 2+j, & 1-j \\ 1+j, & 2+j \end{pmatrix}, \quad T_4 = \begin{pmatrix} 1-j, & -2-j \\ 2+j, & 1-j \end{pmatrix}$$

au déterminant 7.

Il est facile de voir que dans le cas considéré, le nombre $E + Hj$ sera $5 + 3j$ parce qu'on vérifie immédiatement la congruence $(5+3j)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{7}$.

---

[1]) Sierpiński: Teorja liczb, 1914, p. 357.

Nous vérifions ensuite que dans le cas des transformations T_1 et T_2 le sous-groupe commun du groupe $(0, 3; 2, 4, 5)$ et du groupe transformé, sera défini par la congruence

$$d \equiv (5 + 3j)\, b \,(mod\, d).$$

dans le cas des substitutions T_3 et T_4 les sous-groupes correspondants seront

$$d \equiv (2 + 4j)\, b \,(mod\, 7).$$

Les substitutions $(1, b, 0, (5 + 3j)\, b)$, transformant la substitution $(1, 1, 0, 5 + 3j)$ en lui-même, constituent un groupe G_{49} d'ordre 49. Ce groupe est un diviseur normal d'un certain G_{1176} d'ordre 1176. Les fonctions transformées $\varphi(T_1 z)$, $\varphi(T_2 z)$, $\varphi(T_3 z)$, $\varphi(T_4 z)$ seront racines des équations algébriques du degré 50.

Nous pouvons encore remarquer un fait intéressant qui rapproche le cas de transformation du 7 ème degré de la fonction automorphe $\varphi(z)$ avec celui de transformation du 7 ème degré des fonctions modulaires; nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème XII: Dans le cas de transformation du 7-ème degré de la fonction automorphe appartenant au groupe $(0, 3; 2, 4, 5)$ le groupe de Galois de l'équation de transformation contient un sous groupe G_{168} d'ordre 168.

Pour démontrer ce théorème remarquons qu'on a pour chaque substitution

$$S = (a, b, c, d)$$

les formules suivantes $(mod\ 7)$:

$$S^2 \equiv (5a^2 + 1,\ 5ab,\ 5ac,\ 5ad)$$
$$S^3 \equiv (3a^3 + 3a,\ 3a^2 b + b,\ 3a^2 c + c,\ 3a^2 d + d),$$

qui permettent de déterminer les périodes des diverses substitutions du groupe de Galois. Nous savons déjà que pour $a \equiv 1$, la substitution S a la période 7; nous calculons aisément qu'on a pour $a \equiv 0$ la période 2 et pour $a \equiv 3$ la période 3; pour $a \equiv 2$ on a la période 4 et pour $a \equiv 5 + 3j$ la période 6; les valeurs $a \equiv 3j$, $3 + 3j$ donnent la période 5, les valeurs $a \equiv 4 + j$, $1 + 2j$ la période 8, les valeurs $a \equiv 3 + j$, $5 + j$ la période 12, les valeurs $a \equiv 2 + j$, $6 + j$, $1 + 3j$, $2 + 3j$ la période 24 et les valeurs $a \equiv j$, $4 + 2j$, $5 + 2j$, $2j$, $6 + 2j$, $4 + 3j$, $1 + j$, $2 + 2j$, $6 + 3j$, $3 + 2j$ la période 25.

Après ces remarques, prenons la substitution

$$V = (0, b, 1, (5 + 3j)\, b)$$

et déterminons une substitution

$$U = (1, \beta, \gamma, \delta), \quad \gamma^2 - j\,(\beta^2 + \delta^2) \equiv 0 \; (mod\; 7)$$

à période 7, telle que le produit UV ait la période 3.

Observons auparavant qu'on ne peut pas avoir $\gamma = 0$ parce que la substitution U aurait alors la forme $(1, \beta, 0, (5 + 3j)\, \beta)$ et le produit UV n'aurait pas la période 3. En effet, si l'on calcule pour le produit

$$(1, \beta, 0, (5 + 3j)\, \beta) \, . \, (0, b, 1, (5 + 3j)\, b)$$

le premier terme A, on trouve

$$A \equiv j\beta b\,[1 + (5 + 3j)^2] \equiv 0 \; (mod\; 7).$$

ce qui donne la substitution avec période 2.

Prenons donc le produit

$$(1, \beta, \gamma, \delta) \, . \, (0, b, 1, (5 + 3j)\, b);$$

son premier terme A doit vérifier la condition $a \equiv 3$; nous aurons donc

$$A \equiv -\gamma + b\,j\,[\beta + \delta\,(5 + 5j)] \equiv 3 \; (mod\; 7).$$

En posant $\gamma \equiv 1$ nous obtenons la congruence

$$b\,j\,[\beta + \delta\,(5 + 3j)] \equiv 4 \; (mod\; 7),$$

ou

(22) $$b[(3 + 2j)]\,\delta + j\beta] \equiv \text{[illegible]} \; (mod\; 7)$$

et la condition $j\,(\beta^2 + \delta^2) \equiv 1$ pour β et δ.

En vertu de l'égalité $1 = j\,(1 + j)$ la dernière congruence s'écrira

$$\beta^2 + \delta^2 \equiv 1 + j \; (mod\; 7).$$

et nous trouvons les solutions suivantes de cette congruence

$$(1 + j,\; 5 + 3j), \quad (5 + j,\; 6 + 3j), \quad (4 + 3j,\; 2),$$
$$(2 + j,\; 3 + j), \quad (2 + 3j,\; 3j), \quad (3 + 2j,\; 3).$$

Nous vérifions aisément que seulement la solution $(3 + 3j,\; 3)$ satisfaira à la congruence (22); nous aurons

$$j\beta + \delta\,(3 + 2j) \equiv j\,(3 + 2j) + 3\,(3 + 2j) \equiv 4 \; (mod\; 7).$$

La substitution cherchée U aura donc la forme

$$U = (1, 3 + 2j, 1, 3).$$

La substitution U et la substitution V satisferont aux congruences suivantes

$$(23) \qquad U^7 = 1, \quad V^2 = 1, \quad (UV)^3 = 1 \ (mod\ 7).$$

En s'appuyant sur les recherches de Dyck[1] nous constatons que les substitutions U et V vérifiant les relations (23) conduisent à un groupe G_{168} d'ordre 168; l'existence d'un tel groupe est donc démontrée.

[1]) Gruppentheoretische Studien. Mathem. Annalen. Bd. 20, p. 1.

Sur les fonctions dérivées bornées.

(Résumé).

Par

Stefan Kempisty.

Toute fonction dérivée est mesurable, étant de première classe de Baire. Par conséquent une fonction $f(x)$ dérivée bornée dans l'intervalle (a, b) est toujours sommable dans cet intervalle. De plus l'intégrale de Lebesgue

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\, d\xi$$

admet pour dérivée la fonction $f(x)$

Or, en invertissant l'ordre de deux passages à la limite qui nous conduisent à $F'(x)$, on arrive aux proprietés de l'ensemble des valeurs limites d'une fonction dérivée bornée.

Soient

$$l_0,\ l_1, \ldots l_n$$

des nombres divisant l'intervalle de variation de $f(x)$. Désignons par $\underset{x_0}{\overset{x}{mes}}(E_i)$ la mesure de la partie commune de l'ensemble

$$E_i = E\,[l_i \leqq_x f(x) < l_{i+1}]$$

et de l'intervalle (x_0, x_1), lorsque $x_0 \leqslant x$, au cas contraire nous poserons

$$\underset{x_0}{\overset{x}{mes}}(E_i) = -\underset{x}{\overset{x_0}{mes}}(E_i).$$

D'aprés la définition de l'intégrale de Lebesgue, si

$$l_{i+1} - l_i \leqslant \varepsilon.$$

on a

$$0 \leqslant \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(\xi) d(\xi) - \frac{1}{x - x_0} \sum_{i=0}^{n} l_i \, \underset{x_0}{\overset{x}{mes}} (E_i) < \varepsilon$$

ou

$$0 \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \sum_{i=0}^{n} l_i \frac{\underset{x_0}{\overset{x}{mes}} (E_i)}{x - x_0} < \varepsilon.$$

Quand chacun des ensembles E_i possède une densité déterminée en x_0 [1]), soit $d_{x_0}(E_i)$, on obtient, en passant à la limite, la relation

$$0 \leqslant F'(x_0) - \sum_{i=0}^{n} l_i \, d_{x_0}(E_i) < \varepsilon.$$

Or il existe des fonctions telles que l'ensemble

$$E[\alpha < f(x) < \beta]$$

peut être dépourvu de la densité définie. Mais, le nombre d'ensembles E_i étant fini nous pouvons toujours déterminer un passage à la limite qui conduit aux densités définies relativement à ce passage.

Ainsi, en désignant ces densités par $\delta_{x_0}(E_i)$, nous avons

$$0 \leqslant f(x_0) - \sum_{i=0}^{n} l_i \, \delta_{x_0}(E_i) < \varepsilon.$$

en tout point x_0 de (a, b), lorsque $f(x)$ est une fonction dérivée et $l_{i+1} - l_i \leqslant \varepsilon$.

Afin de déduire de ce théorème général les propriétés des valeurs limites d'une fonction dérivée, j'introduis la notion de la valeur limite appraximative. Nous dirons que β est une valeur limite approximative de $f(x)$ en un point x_0 lorsque la densité supérieure [2]) de l'ensemble E, définie par la condition

$$|f(x) - \beta| < \varepsilon,$$

est positive en x_0, quelque soit $\varepsilon > 0$.

---

[1]) La densité de E, c'est la dérivée de la fonction $\underset{a}{\overset{x}{mes}}(E)$, la notion est due à M. Lebesgue, Annales de l'Éc. Norm. XXVII. p. 406.

[2]) c. à d. la dérivée supérieure de la fonction $\underset{a}{\overset{x}{mes}}(E)$ en x_0.

L'influence de ces nombres sur la valeur de la somme $\sum_{i=0}^{n} l_i \delta_{x_0}(E_i)$ consiste en ce q'on a

$$\delta_{x_0}(E_i) = 0,$$

quand l'intervalle

$$l_i \leqslant y < l_{i+1}$$

ne contient pas de valeurs limites approximatives.

Comme l'ensemble de nombres β en x_0 est borné et fermé, on en distingue la plus grande des limites approximatives $L(x_0)$ et la plus petite $l(x_0)$.

Or je démontre que, $f(x)$ étant dérivée bornée dans (a, b), on a

$$l(x) \leqslant f(x) \leqslant L(x).$$

Si

$$l(x_0) = f(x_0) = L(x_0),$$

la fonction $f(x)$ est approvimativement continue en x_0, d'après la définition de M. Denjoy, c'est à dire la densité de l'ensemble

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

est égale à un, quelque soit ε positif[1]).

En choisissant convenablement les nombres l_i pour $f(x)$ approximative on peut arriver à réduire la somme $\sum_{i=0}^{n} l_i \delta_{x_0}(E_i)$ à un seul terme qui tend vers $f(x_0)$ quand ε décroit infiniment. Alors $f(x)$ est égale en x_0 à la dérivée de son intégrale. On obtient ainsi un théorème de M. Denjoy[2]).

Ensuite je démontre que, $f(x)$ étant une fonction dérivée bornée dans (a, b), l'égalité

$$f(x) = L(x)$$

implique que $f(x)$ est la seule valeur limite principale en x ou, ce qui revient au même, $f(x)$ est approximativemet continue.

Or cette égalité a lieu quand $f(x)$ est approximativement semicontinue supérieurement, puisque alors

$$f(x) \geqslant L(x).$$

Ainsi une fonction dérivée bornée ne peut pas être approximativement semicontinue sans être approximativement continue.

---

[1]) A. Denjoy, Sur les fonctions dérivées sommables, Bull. de la Soc. Math de France 1915, p. 165.

[2]) loc. cit. p. 172.

En particulier, pour qu'une fonction semicontinue bornée soit dérivée, il faut et il suffit qu'elle soit approximativement continue.

Les théorèmes généraux énoncés plus haut sur les fonctions dérivées subsistent pour les nombres dérivés. Pour généraliser les théorèmes sur les fonctions approximativement continues il suffit de remplacer dans la définition de cette classe de fonctions le terme „densité“ par „densité supérieure“.

On arrive alors à la notion de la continuité „quasi-approximative“. Cette dernière peut être considérée comme une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction semicontinue supérieurement soit une fonction dérivée supérieure d'une fonction continue.

Comme, d'après M. Young[1]), une fonction dérivée supérieure d'une fonction continue est semicontinue supérieurement en chaque point d'un ensemble E partout dense sur tout ensemble parfait, on voit que cette dérivée est quasi-approximativement continue dans les points de E, dès qu'elle est bornée. Il en est de même de toute fonction dérivée de Dini.

---

[1]) W. N. Young. A new method in the theory of integration, Proc. Lond. Math. Soc. 1911.

Wilno, décembre 1922.

The Theory of Constructive Types.

(Principles of Logic and Mathematics).

Part II.

Cardinal Arithmetic.

By

Leon Chwistek.

V. Complements of Part I.

A. Extension and Intension.

The Theory of Types, as explained in Part I, may be called the Pure Theory of Types, as it is based on the most general idea of logical types, and as it does not assume any other propositions, than the axioms of the Logical Calculus. This method enables us to get a system of Mathematics which appears to be a part of Logic, and as such may be called Pan-Mathematics. This system is more general than Classical Mathematics, as it does not enable us to prove that there is a class of inductive numbers other than the null-class, which does not contain the greatest element Nevertheless, if we assume the axiom of infinity as a hypothesis, we get a special system, which is as a matter of fact the same thing as what is called Classical Mathematics,— Cantor's theory appears then as a hypothetical system that we can get, if we assume the existence of alephs. Conformably to the hypotheses which we assume, we can get many special systems of Mathematics. As the Pure Theory of Types does not assume any existence-axiom and does not lead to Richard's paradox, it is a natural base for rational Semeiotics, a science whose importance can scarcely be denied. Note that the simplified theory of types, as expounded on p. 12 of Part I, may be used in Mathematics without any risk of getting a contradiction. To avoid such paradoxes as Richard's or König's, it is quite sufficient to assume a direction excluding from the scope of the system any function which is not constructed with the symbols of the system itself. An analogous method is used by mathematicians dealing with the system of axioms of Zermelo[1]). Such a method, though very convenient, is nevertheless inconsistent with certain fundamental problems of Logic and Semeiotics. Moreover the simplified theory of types implies the existence of functions which cannot be built up, unless we assume that all functions are extensional functions (the Axiom of Extension).

Now, a purely formal system of Logic ought never to imply the existence of such functions; otherwise it might be asked why the axiom of infinity, or other existence-axioms are not to be assumed as primitive propositions.

The practical elimination of the Leibnizian idea of identity is an essential simplification of Logic, this idea being of no use in Mathematics, as we have no means to prove with it the identity of objects given by two different expressions.

Now, here is a most interesting metaphysical problem: Can an object be denoted by two different expressions?

This problem cannot be discussed in a system of formal Logic, as such a system does not contain the primitive idea „expression". On the other hand it is easy to see that such a problem cannot be solved at all, as we always get two contradictory solutions.

If you suppose that two different expressions denote two different objects, you cannot prove that two equivalent classes are identical. To prove that any equivalent classes are identical, we ought to suppose that there are objects denoted by two different expressions. The first hypothesis may form the base of a N o m i n a l i s t i c system of Metaphysics (Ontology), the other of a R e a l i s t i c system. The Realistic Hypothesis, i. e the a x i o m o f e x t e n s i o n would be formulated as follows:

$$.(\overline{x}) . \alpha\{\overline{x}\} = \beta\{\overline{x}\} . \supset . f\{\alpha\} = f\{\beta\}:$$

This axiom seems to have had great success in recent years I never should care to discuss its truth. I am convinced we never get a contradiction from using this axiom, but I am also convinced

[1]) Cf. Fraenkel: Der Begriff »definit« und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms. Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften, Berlin 1922.

that its negation is consistent with the primitive propositions of the Logical Calculus and with the directions of the Pure Theory of Types.

Moreover, there are other general hypotheses which imply the negation of the axiom of extension, yet are at the same time very fruitful.

To see this, let us assume the following definition of the α-order Leibnizian identity, the definition of complete Leibnizian identity being in the Pure Theory of Types impossible.

We have:

$$13{\cdot}001 \quad (x \underset{L}{=} y)_\alpha \underset{df}{=} (\bar{u}) : \bar{u}\{x\} \equiv \bar{u}\{y\} : \mathfrak{C}\{\bar{u}, \alpha\}.$$

With this definition we build up the theory of the α-order Leibnizian identity, just as in Principia. E. g. we have the following propositions:

$$13{\cdot}11 \quad \vdash . (x \underset{L}{=} y)_\alpha \equiv (\bar{u}) : \bar{u}\{x\} \supset \bar{u}\{y\} : \mathfrak{C}\{\bar{u}, \alpha\}:$$

$$13{\cdot}13 \quad \vdash .: \beta\{x\} . (x \underset{L}{=} y)_\alpha : \mathfrak{C}\{\beta, \alpha\} . \supset \beta\{y\}.$$

$$13{\cdot}15 \quad \vdash (x \underset{L}{=} x)$$

$$13{\cdot}16 \quad \vdash . (x \underset{L}{=} y) \equiv (y \underset{L}{=} x)_\alpha.$$

$$13{\cdot}17 \quad \vdash : (x \underset{L}{=} y)_\alpha . (y \underset{L}{=} z)_\alpha . \supset (x \underset{L}{=} z)_\alpha.$$

For the $\omega''''_{(v)}$-order Leibnizian identity of classes we have the following definition:

$$13{\cdot}0011 \quad (\alpha \underset{L}{=} \beta) \underset{df}{=} (\bar{k}) : \bar{k}\{\alpha\} \supset \bar{k}\{\beta\} : \mathfrak{C}\{\bar{k}, \omega''''_{(v)}\}.$$

We have now the following propositions:

$$20{\cdot}14 \quad \vdash . (\alpha \underset{L}{=} \beta) \supset . \alpha = \beta:$$

Dem. $\vdash 12{\cdot}312 . (0{\cdot}271) . \supset$

$$\vdash \mathfrak{C}\{\omega''''_{(v)}, \hat{v}[. \hat{v}\{x\} : \omega''''_{(v)}\{\hat{v}\} \vee \sim \omega''''_{(v)}\{\hat{v}\} :]\} \quad (1)$$

$\vdash . (1) . (13{\cdot}0011) \supset \vdash Hp \supset$

$$. \hat{v}[. \hat{v}\{x\} : \omega''''_{(v)}\{\hat{v}\} \vee \sim \omega''''_{(v)}\{\hat{v}\} :]\{\alpha\} \equiv$$
$$\hat{v}[. \hat{v}\{x\} : \omega''''_{(v)}\{\hat{v}\} \vee \sim \omega''''_{(v)}\{\hat{v}\} :]\{\beta\}.$$

$$[(0{\cdot}16)] \supset : \alpha\{x\} : \omega''''_{(v)}\{\alpha\} \vee \sim \omega''''_{(v)}\{\alpha\} : \equiv$$
$$. \beta\{x\} : \omega''''_{(v)}\{\beta\} \vee \sim \omega''''_{(v)}\{\beta\} : .$$

$$\supset \alpha\{x\} \equiv \beta\{x\}.$$

$$\supset \vdash Prop$$

We see that the $\omega'''''_{(\nu)}$-order Leibnizian identity of two classes implies their identity (equivalence).

I shall use the following abbreviations:

13·0012 $\Psi \underset{df}{=} \hat{u}\hat{z}[.:\hat{u} = V:\hat{u}\{\hat{x}\}:\mathfrak{C}\{\hat{u}, V\}.]$

13·00121 $W \underset{df}{=} \hat{R}\,|\,.\,\sigma'''\{\hat{R}\}.\,\mathfrak{C}\{\hat{R}, \Psi\}.]$

13·0013 $(R \underset{i}{=} P) \underset{df}{=} (\overline{\tau}):\overline{\tau}\{R\} \supset \overline{\tau}\{P\}.\,\mathfrak{C}\{\overline{\tau}, W\}.$

The definition of the Axiom of Intension, i. e. Intax, is as follows:

13·002 Intax $\underset{df}{=} .\,(\hat{x}[.\beta\{\hat{x}\}|\gamma\{\hat{x}\}.] \underset{L}{=} \hat{x}[.\beta'\{\hat{x}\}|\gamma\{\hat{x}\}.])$

$$\supset (\beta \underset{L}{=} \beta').$$

We have now the proposition:

13·4 $\vdash$. Intax $\supset (\exists\,\overline{u}, \overline{v}).:\sim(\overline{u} = \overline{v}):\overline{u} = \overline{v}:\mathfrak{C}\{\overline{u}, V\}:\mathfrak{C}\{\overline{v}, V\}.$

Dem. $\left| 13\cdot002 \; \dfrac{-\beta, V}{\beta', \gamma} \,.\, 10\cdot24 \right|$

Thus it is obvious that the Intax is not consistent with the Axiom of Extension. Now, it is possible to prove, as we shall see below, that Intax implies Infinax (i. e. the Axiom of Infinity)[1]).

On the contrary there seems to be no real simplification of Arithmetic, if we assume the axiom of extension — The problem of the Leibnizian identity of two equivalent classes or relations can be eliminated by simply dealing with extensional classes or relations, as we have seen in Part I. The axiom of extension would be needed only in the simplified theory of types, to avoid the proof of the existence of classes, which can never be explicitly given. This proof is as follows:

In the simplified theory of types we have the complete Leibnizian identity. which is to be defined as follows:

$$(x \underset{L}{=} y) \underset{df}{=} (\overline{\psi}).\,\overline{\psi}\{x\} \supset \overline{\psi}\{y\}.$$

Now let us assume the following definition, using α, β as variable class-letters:

$$G \underset{df}{=} \hat{\alpha}\hat{x}[(\exists\overline{f}).(\hat{z}[(\exists\overline{\beta})\,\overline{f}\{\overline{\beta}, \hat{z}\}] \underset{L}{=} \alpha).\sim\overline{f}\{\hat{\alpha}, \hat{x}\}.]$$

[1]) The possibility of such a proof was suggested to me by Mr Greniewski.

We have the following proposition:

$$(A)\quad (\exists \bar{f}).(\hat{z}[(\exists \bar{\beta})\,\bar{f}\{\bar{\beta}, z\}] \underset{L}{=} \hat{z}[(\exists \bar{\beta}) G\{\bar{\beta}, z\}]).\sim \bar{f}\{\hat{z}[(\exists \bar{\beta})\, G\{\bar{\beta}, z\}], x\}.$$

To see this, suppose we have: $\sim G\{\hat{z}[(\exists \bar{\beta})\, G\{\bar{\beta}, z\}], x\}$, i. e.

$$(\bar{f}).(\hat{z}[(\exists \bar{\beta})\,\bar{f}\{\bar{\beta}, z\}] \underset{L}{=} \hat{z}[(\exists \bar{\beta})\, G\{\bar{\beta}, z\}]) \supset \bar{f}\{\hat{z}[(\exists \bar{\beta})\, G\{\bar{\beta}, z\}], x\}.$$

This proposition being true for every f, it is true for G. Therefore we have:

$$.(\hat{z}[(\exists \bar{\beta})\, G\{\bar{\beta}, z\}] = \hat{z}[(\exists \bar{\beta})\, G\{\bar{\beta}, z\}]) \supset G\{\hat{z}[(\exists \bar{\beta})\, G\{\bar{\beta}, z\}], x\}.$$

Here, the hypothesis being true by 13·15, we have:

$$G\{\hat{z}[(\exists \bar{\beta})\, G\{\bar{\beta}, z\}], x\}, \text{ i e. the proposition } (A).$$

Now, it is obvious that the function f, whose existence is proved by (A), cannot be equivalent to G Therefore we never shall have such a function. unless we assume the axiom of extension. As a system containing such an axiom in no longer one of pure logic, we see that there is no system of pure logic to be based on the simplified theory of types.

I do not know whether an adequate definition of the hypothesis of Nominalism is to be found in a system of Ontology using no other primitive ideas than purely logical ones. At any rate the Intax is a part of the hypothesis of Nominalism. Another constituent of this hypothesis would be the following axiom, which, as is at once to be seen, is inconsistent with Proposition (A):

$$(\hat{x}[(\exists \bar{v})\, f_v\{\bar{v}, x\}] \underset{L}{=} \hat{x}[(\exists \bar{v})\, G_v\{\bar{v}, x\}]) \supset$$
$$(\hat{u}\hat{x}[f_v\{u, x\}] \underset{L}{=} \hat{u}\hat{x}[G_v\{u, x\}])$$

This axiom enables us to prove that the class of functions of the type W is similar to the class of classes $\hat{x}[(\exists \bar{v})\, f_v\{\bar{v}, x\}]$, where $\hat{u}\hat{x}[f_v\{u,x\}]$ is a function of the type W. The proof of this proposition is a trivial application of our axiom. We should then have in any type the same cardinal numbers in spite of Cantor's theory. Nevertheless the axiom in question seems unfruitful, if used in a system of Mathematics. To obtain a satisfactory one, we ought to suppose that any type is similar to a class of inductive numbers. We shall call this hypothesis the A x i o m o f N o m i n a l i s m [1]). Note

[1]) Cf. Zasady czystej teorji typów. Przegląd fil. 1922 p. 28.

that this hypothesis, not less inconsistent with Cantor's theory than with the simplified Theory of Types, is nevertheless very natural and quite simple. It conforms to Poincaré's postulate, stating that there are no other mathematical objects than those we can build up into a given system. It is interesting to note that with the Axiom of Nominalism, we can prove the axiom of Zermelo [1]), and we have nevertheless to do with a continuum conceived as an ambiguous symbol (Cf. Part I, p. 19).

The researches concerning this subject seem to be very important, many interesting theorems of modern Mathematical Analysis being based on Zermelo's axiom. Note that with the axiom of Nominalism we prove, e. g. that a limit point of a class of points is a limit point of a progression of points, contained in the given class. As the Intax enables us to prove the Axiom of Infinity, it is obvious that a system based on the Axiom of Nominalism and on Intax should embody modern Mathematical Analysis.

B. Types.

It is to be remarked that the use of primitive letters is very limited. As a matter of fact, they are only used to build up the expression $\mathcal{T}\{x, y\}$ Now, there is another method of obtaining an equivalent expression. Let us expunge the primitive letters from our system and assume the following definitions:

12·001 $\quad \mathcal{T}'_\alpha(x) \underset{df}{=} . \alpha\{x\} \equiv \alpha\{x\}.$

12·002 $\quad \mathcal{T}_\alpha(x, y) \underset{df}{=} . \mathcal{T}'_\alpha(x) \, \mathcal{T}'_\alpha(y).$

It is obvious that the symbol $\mathcal{T}_\alpha(x, y)$ denotes the proposition „x is of the same type as y" as much as the symbol $\mathcal{T}\{x, y\}$ The elimination of primitive letters would be an essential simplification of the Pure Theory of Types. If we omit the primitive letters, we can have a very simple direction for the construction of functions of the same type, i. e:

D Two functional expressions, containing no primitive letters, denote functions of the same type,

1° if they denote at the same time functions with I variable (or with II, or with III, or with IV), their corresponding variables

[1]) Cf. Trzy odczyty odnoszące się do pojęcia istnienia. Przegląd fil. 1917.

being determined by the same functional expressions, or being individual letters; and

2° if they contain the same elementary letters, and the same undetermined variables occurring in both as constituents of the same functional or propositional expression.

With this direction we can write significantly $\mathfrak{C}_{\alpha}(E. G)$, without using the directions 0·2, by simply looking on the letters occurring in the expressions E, G.

In consequence of our direction, an intuitive use of the pure Theory of Types appears to be possible. Nevertheless I still keep to directions 0·2, as being more convenient in symbolic practice.

Note that by the direction D, we have:

$$\mathfrak{C}_{\sigma}\{\hat{u}\,[.\,\mathfrak{C}_{\omega}\{\hat{u}, a\} \mid (\overline{v})\,\mathfrak{C}_{\omega}\{\overline{v}, a\}.], \hat{u}\,[\mathfrak{C}_{\omega}\{\hat{u}, a\}]\},$$

a formula impossible to attain by the directions 0·2. We see at once that this difference is not essential. The first method is most in harmony with practice; the second with the primitive idea of a logical type. In Principia we have an analogous difference between first-order matrices and first-order functions.

The pure Theory of Types does not enable us to prove the existence of functions of a given property, without having an instance of such a function. Nevertheless, it enables us to prove the existence of individuals, without having any instance of them. Now, Prof. Wilkosz has remarked that a purely formal system of Logic ought not to be of any use in proving the existence of objects which are not explicitly given in the system. To have such a system, it is sufficient to deal with individuals in conformity with the method we have applied to classes. We begin with introducing the letters l, m, n, which shall be called i n d i v i d u a l c o n s t a n t s. We suppose that these letters denote individuals; and we agree that these letters can never be used as noted or apparent variables. As there are metaphysical reasons to admit the existence of individuals of different types, we shall never use such expressions as $\mathfrak{C}_{\alpha}\{l, m\}$; or similarly as $\hat{x}\,[f\{\hat{x}\}]$ or $(\overline{x})\,f\{\overline{x}\}$. To have noted or apparent variables, we shall be obliged to begin with such expression as $.f\{x\}.\,\mathfrak{C}_{\alpha}\{x, m\}.$[1]), where the real variable x is determined

[1]) Mr Skarżeński, has remarked that we get a serious simplification of the system, if we use $f_{(m)}\{x\}$ as a fundamental idea. I see that this method would be most conformable to the real meaning of the idea of a propositional function.

by the constant m. Then the fundamental Principles of the Calculus of Functions will be:

I. The Principle of Deduction:

10·01 $\vdash . (\bar{x}) f_m \{\bar{x}\} \supset f_m \{y\}.$

II. The Principle of Disjunction:

10·02 $\vdash . (\bar{x}) . p \vee f_m \{\bar{x}\} . \supset . p \vee (\bar{x}) f_m \{\bar{x}\}:$

With these Principles we can prove that there is an individual of the same type as m, we having the proposition:

$$(\exists \bar{x})\ \bar{C}_2 \{\bar{x}, m\}$$

but we cannot prove that there is an individual.

Such a modification of the Pure Theory of Types will be made in the complete system of Logic and Mathematics which I intend to publish later.

The theory of functions of the same type, as expounded in Part I, is far from being complete. To have a full theory of functions of the same type, occurring in a system, it would be necessary to write a very big book, — as a matter of fact a commonplace one. It is therefore more reasonable to prove no other propositions than those which are to be used immediately. In this paper we shall use the following propositions, which do not occur in Part I:

12·31 $\vdash \bar{C} \{\hat{x}\, \hat{y} [. f \{\hat{x}\} \mid g \{\hat{y}\} .], \hat{x}\, \hat{y} [. f \{\hat{x}\} \vee g \{\hat{y}\} .]\}$

[12·2421 . (0·34)]

12·3121 $\vdash \bar{C} \{\hat{x}\, \hat{y} [. f \{\hat{x}\} \mid g \{\hat{y}\} .], \hat{x}\, \hat{y} [. f \{\hat{x}\} \supset g \{\hat{y}\} .]\}$

[Constr. as in 12·312]

12·3122 $\vdash \bar{C} \{\hat{x}\, \hat{y} [. f \{\hat{x}\} \mid g \{\hat{y}\} .], \hat{x}\, \hat{y} [. f \{\hat{x}\} . g \{\hat{y}\} .]\}$

Constr. $\vdash$ 12·22 . 3·01. $\supset$

$\vdash \bar{C} \{\hat{x}\, \hat{y} [. f \{\hat{x}\} . g \{\hat{y}\} .], \hat{x}\, \hat{y} [. \sim f \{\hat{x}\} \vee \sim g \{\hat{y}\} .]\}$

[0·43·44 14·15] $\supset \vdash \bar{C} \{\hat{x}\, \hat{y} [. f \{\hat{x}\} . g \{\hat{y}\} .], \hat{x}\, \hat{y} [. \sim f \{\hat{x}\} \vee g \{\hat{y}\} .]\}$

[12·3121 . 1·01] $\supset \vdash$ Prop.

12·4 $\vdash \bar{C} \{\hat{x} [(\bar{y}) . p . f \{\bar{y}, \hat{x}\} .], \hat{x} [. p . (\bar{y}) f \{\bar{y}, \hat{x}\} .]\}$

[0·27 . 12·3122.]

12·41 $\vdash \bar{C} \{\hat{x} [(\bar{y}) . p \supset f \{\bar{y}, \hat{x}\} .], \hat{x} [. p \supset (\bar{y}) f \{\bar{y}, \hat{x}\} .]\}$

[0·27 . 12·3121.]

12·42 $\vdash \bar{C} \{\hat{x} [(\bar{y}) . f \{\bar{y}, \hat{x}\} \mid p .], \hat{x} [. (\bar{y}) f \{\bar{y}, \hat{x}\} \mid p .]\}$ [0·27·24]

12·421 $\vdash \bar{C} \{\hat{x} [(\bar{u}) . f_a \{\bar{u}, \hat{x}\} \mid p .], \hat{x} [. (\bar{u}) f_a \{\bar{u}, \hat{x}\} \mid p .]\}$ [0·27·24]

12·43 $\vdash \mathfrak{C}\{\hat{x}[(y).f\{\bar{y},x\}\supset p.],\ \hat{x}[.(\bar{y})f\{\bar{y},\hat{x}\}\supset p]\}$

[12·42·3121]

12·5 $\vdash \mathfrak{C}\{z[(\bar{x},\bar{y})f\{\hat{x},\bar{y},\hat{z}\}],\ \hat{z}[(\bar{x})f\{\bar{x},y',\hat{z}\}]\}$

Constr. $\vdash .\ 12\cdot1\,.\,0\cdot441\,.\supset\ \vdash \mathfrak{C}\{\hat{z}[f\{x,y',\hat{z}\}],\ \hat{z}[f\{x',x,\hat{z}\}]\}$

[0·25·4] $\supset\ \vdash \mathfrak{C}\{\hat{z}[(\bar{x})f\{\bar{x},y',\hat{z}\}],\ \hat{z}[(\bar{y})f\{x',\bar{y},\hat{z}\}]\}$

[0·252] $\supset \mathfrak{C}\{\hat{z}[(\bar{x})f\{\bar{x},y',\hat{z}\}],\ \hat{z}[.(\bar{x})f\{\bar{x},y',\hat{z}\}\,|\,(\bar{y})f\{x'.\bar{y},\hat{z}\}.]\}$ (1)

$\vdash .\ 12\cdot1\,.\,0\cdot252\cdot412\,.\supset\ \vdash \mathfrak{C}\{\hat{z}[f\{x,y,\hat{z}\}],\ \hat{z}[.f\{x,y',\hat{z}\}\,|\,f\{x'y,\hat{z}\}.]\}$

[0·252] $\supset\ \vdash \mathfrak{C}\{\hat{x}[(\bar{x},\bar{y})f\{\bar{x},\bar{y},\hat{z}\}].\ \hat{z}[(\bar{x},\bar{y}).f\{\bar{x},y',\hat{z}\}\,|\,f\{x'.\bar{y},\hat{z}\}.]\}$ (2)

$\vdash .(1).(2).\supset\ \vdash$ Prop.

12·51 $\vdash \mathfrak{C}\{\hat{y}[(\bar{x},\bar{u})f_a\{\bar{u},\bar{x},\hat{y}\}]\ \hat{y}[(\bar{u},\bar{x})f_a\{\bar{u},\bar{x},\hat{y}\}]\}$

Constr. $\vdash 12\cdot1\,.\,0\cdot242\cdot261\cdot26\cdot4\supset$

$\vdash \mathfrak{C}\{\hat{y}(\bar{x},\bar{u})f_a\{\bar{u},\bar{x}.\hat{y}\}],\ \hat{y}[(\bar{x}.\bar{u}).f_a\{\bar{u}\,x'.y'\}\,|\,f_a\{v,\bar{x},\hat{y}\}.]\}$

[12·421 . 0 26 261 .] $\supset$

$\vdash \mathfrak{C}\{\hat{y}[(\bar{x}.\bar{u})f_a\{\bar{u}.\bar{x}.\hat{y}\}],\ \hat{y}[(\bar{x}).(\bar{u})f_a\{\bar{u},x',y'\}\,|\,f_a\{\bar{v},\bar{x},\hat{y}\}.]\}$

[0·27] $\supset\ \vdash \mathfrak{C}\{\hat{y}[(\bar{x},\bar{u})f_a\{\bar{u},\bar{x},\hat{y}\}].\ \hat{y}[.(\bar{u})f_a\{\bar{u},x',y'\}\,|\,(\bar{x})f_a\{v,\bar{x},\hat{y}\}.]\}$

[12·421 . 0·26 · 261 .] $\supset$

$\vdash \mathfrak{C}\{\hat{y}[(\bar{x},\bar{u})f_a\{\bar{u},\bar{x}.\hat{y}\}].\ \hat{y}[(\bar{u}).f_a\{\bar{u},x',y'\}\,|\,(\bar{x}).f_a\{v,\bar{x},\hat{y}\}]\}$

[0·27] $\supset\ \vdash \mathfrak{C}\{\hat{y}[(\bar{x},\bar{u})f_a\{\bar{u}.\bar{x},\hat{y}\}]\ \hat{y}[(\bar{u},\bar{x}).f_a\{\bar{u},x',y'\}\,|\,f_a\{v,\bar{x},\hat{y}\}.]\}$

[0·252] $\supset\ \vdash$ Prop.

We shall use the following abbreviations:

12·011 $\mathfrak{C}\{x,y,z\} =_{\mathfrak{c}} .\ \mathfrak{C}\{x,z\}.\ \mathfrak{C}\{y,z\}.$

12·012 $\mathfrak{C}\{x,y,z.z'\} =_{\mathfrak{c}} :\ \mathfrak{C}\{x,z'\}.\ \mathfrak{C}\{y.z'\}:\ \mathfrak{C}\{z.z'\}.$

Note that, if we take $f_a\{v\}$ for $\hat{u}\,|\,f_a\{\hat{u}\}|\,\{v\}$, this is by no means effected by the simple application of 0·16 :but we first take by 12·01·02

$\hat{u}[.f\{\hat{u}\}.(\bar{\varphi}):\bar{\varphi}\{\hat{u}\}\supset\bar{\varphi}\{\hat{u}\}.\supset.\bar{\varphi}\{a\}\supset\bar{\varphi}\{a\}:.]$ for $\hat{u}\,|\,f_a\{\hat{u}\}|$

and then we apply the direction 0·16 to this function.

. Automatical construction of assertions.

It is to be remarked that the number of definitions needed in practice is very great. In this paper we shall not give all definitions explicitly in cases from which any ambiguity is excluded. We shall also use some simplifications in our construction of expressions which are by no means an essential modification of our directions, and may without any difficulty be omitted in a complete system. E. g. we shall omit one external dot on both sides of our assertions; likewise the brackets in defined symbols, in cases excluding any ambiguity; we shall also omit the letter *a* in defined symbols, by a proceeding to be explained later.

VI. Prolegomena to Cardinal Arithmetic.

This chapter contains certain definitions and propositions to be explicitly used in Cardinal Arithmetic. In spite of the general method expounded in Part I., we shall have to deal with definitions built up for special types.

a. Complements of the Theory of Deduction:

3·02 $\quad .p.q.r. \underset{df}{=} :p.q:r.$

3·021 $\quad .p.q.r.s. \underset{df}{=} :p.q.r:s.$

3·022 $\quad .p.q.r.s.p'. \underset{df}{=} :p.q.r.s:p'.$

3·44 $\quad \vdash :q \supset p :. r \supset p : \supset : q \vee r . \supset p.$

3·47 $\quad \vdash :p \supset r :. q \supset s : \supset : p.q. \supset .r.s:$

4·1 $\quad \vdash .p \supset q. \equiv .\sim q \supset \sim p.$ [to be called: Transp]

5·5 $\quad \vdash p \supset :p \supset q. \equiv q.$

5·75 $\quad \vdash :r \supset \sim q :. p \equiv .q \vee r :. \supset :p.\sim q. \equiv r.$

10·28 $\quad \vdash (\overline{x}) \, f\{\overline{x}\} \supset g\{\overline{x}\}. \supset .(\exists \overline{x}) f\{\overline{x}\} \supset (\exists \overline{x}) g\{\overline{x}\}.$

10·34 $\quad \vdash (\overline{x}).g\{\overline{x}\} \supset p. \equiv .(\exists \overline{x}) g\{\overline{x}\} \supset p.$

b. Classes and Relations.

We shall use the following abbreviations:

20·04 $\quad \text{extens}_a \, (\varkappa) \underset{df}{=} (\overline{u}. \overline{v}) : \overline{u} \underset{n,\,a}{=} \overline{v}. \supset . \varkappa\{u\} \equiv \varkappa\{\overline{v}\}:$

20·041 $\quad \text{extens} \, (\varkappa) \underset{df}{=} \text{extens}_a \, (\varkappa)$

21·04 $\quad \text{extens}_a (R) \underset{df}{=} (\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{t}) :. \overline{u} \underset{n,\,a}{=} \overline{v} :. \overline{w} \underset{n,\,a}{=} \overline{t} : \supset . R\{\overline{u}, \overline{w}\} \equiv R\{\overline{v}. \overline{t}\}:$

21·041 $\quad \text{extens} \, (R) \underset{df}{=} \text{extens}_a (R)$

The difference between the use of $\text{extens}_a (\varkappa)$ and $\text{extens} \, (\varkappa)$, (or $\text{extens}_a (R)$ and $\text{extens} (R)$), is that the first symbol can be automatically applied to higher types, so as to have e. g. $\text{extens}_{P'_{(a)}}(\varkappa)$ for $(\overline{P}.\overline{Q}):\overline{P} \underset{P'_{(a)}, P'_{(a)}}{=} \overline{Q}. \supset . \varkappa_{(P'_{(a)})}\{\overline{P}\} \equiv \varkappa_{(P'_{(a)})}\{\overline{Q}\}$.

The second symbol i. e. extens $(\varkappa)$ stands simply for $\text{extens}_a(\varkappa)$. Such simplified symbols as extens $(\varkappa)$ will be used below without being expressly defined, in conformity with the remark on p. 14.

I pass now to the following list of definitions, which are built up for special types to be used in Cardinal Arithmetic.

Definitions:

20·042 $u\,\varepsilon_a\,\varkappa \underset{df}{=} . \varkappa\{u\} . \text{extens}_a(\varkappa) . \mathfrak{C}\{u, a\}$.

20·0421 $u, v\,\varepsilon_a\,\varkappa \underset{df}{=} . u\,\varepsilon_a\,\varkappa . v\,\varepsilon_a\,\varkappa$.

20·0422 $u, v, w\,\varepsilon_a\,\varkappa \underset{df}{=} . u\,\varepsilon_a\,\varkappa\ \ v, w\,\varepsilon_a\,\varkappa$.

20·043 $\text{extens}_a(\varkappa, \omega) \underset{df}{=} . \text{extens}_a(\varkappa) . \text{extens}_a(\omega)$.

22·06 $. \varkappa \underset{a}{\subset} \omega . \underset{df}{=} (\overline{u}) . \varkappa_{(a)}\{\overline{u}\} \supset \omega_{(a)}\{\overline{u}\}$.

22·061 $. \varkappa \underset{a}{=} \omega . \underset{df}{=} . \varkappa_{(a)} = \omega_{(a)}$.

22·062 $. \varkappa \underset{a}{\neq} \omega . \underset{df}{=} . \varkappa_{(a)} \neq \omega_{(a)}$.

22·07 $(\varkappa \cap_a \omega) \underset{df}{=} \hat{u}[. \hat{u}\,\varepsilon_a\,\varkappa . \hat{u}\,\varepsilon_a\,\omega .]$

22·071 $(\varkappa \cup_a \omega) \underset{df}{=} \hat{u}[. \hat{u}\,\varepsilon_a\,\varkappa \vee \hat{u}\,\varepsilon_a\,\omega .]$

22·072 $(\varkappa \underset{a}{-} \omega) \underset{df}{=} (\varkappa \cap_a - \omega_{(a)})$

22·08 $(\underset{a}{-} \omega) \underset{df}{=} \hat{u}[\sim \hat{u}\,\varepsilon_a\,\omega]$

51·01 $\iota^{\epsilon}{}_a u \underset{df}{=} \hat{v}[. \hat{v} \underset{a}{=} u .]$

22·09 $K \underset{df}{=} (\varkappa''' \cup_a \iota^{\epsilon}{}_a u)$

21·042 $u[R]_a v \underset{df}{=} . R\{u, v\} . \text{extens}_a(R) . \mathfrak{C}\{u, v, a\}$.

21.06 $. P \underset{a}{\subset} Q . \underset{df}{=} (\overline{u}, \overline{v}) . P_{(a)}\{\overline{u}, \overline{v}\} \supset Q_{(a)}\{\overline{u}, \overline{v}\}$.

21·061 $. P \underset{a}{=} Q . \underset{df}{=} . P_{(a)} = Q_{(a)}$.

21·062 $. P \underset{a}{\neq} Q . \underset{df}{=} . P_{(a)} \neq Q_{(a)}$.

21·07 $(P \cap_a Q) \underset{df}{=} \hat{u}\hat{v}[. \hat{u}[P]_a \hat{v} . \hat{u}[Q]_a \hat{v} .]$

21·071 $(P \cup_a Q) \underset{df}{=} \hat{u}\hat{v}[. \hat{u}[P]_a \hat{v} \vee \hat{u}[Q]_a \hat{v} .]$

21·072 $(P \underset{a}{-} Q) \underset{df}{=} (P \cap_{\circ} - Q_{(a)})$

21·08 $(\underset{a}{-} P) \underset{df}{=} \hat{u}\hat{v}[\sim \hat{u}[P]_a \hat{v}]$

21·081 $A \underset{df}{=} \hat{u}\hat{v}[(\exists \overline{\varkappa}) . \hat{u}, \hat{v}\, \varepsilon_c\, \overline{\varkappa} . \mathfrak{C}\{\overline{\varkappa}, K\}.]$

21·09 $\text{extens}_a^A(R) \underset{df}{=} (\overline{u}, \overline{v})(\overline{P}, \overline{Q}) : . \overline{u} \underset{a,a}{=} \overline{v} : \overline{P} \underset{A,A}{=} \overline{Q} : \supset . R\{\overline{u}, \overline{P}\} \equiv$

$\equiv R\{\overline{v}, \overline{Q}\}:$

31·013 $Cnv_a R \underset{df}{=} Cnv' R_{(a,a)}$

31·014 $Cnv_a^A R \underset{df}{=} \hat{P}\hat{u}[R_{(a,A)}\{\hat{u}, \hat{P}\}]$

31·015 $Cnv_A^a R \underset{df}{=} \hat{u}\hat{P}[R_{(A,a)}\{\hat{P}, \hat{u}\}]$

21·091 $u[R]_a^A Q \underset{df}{=} . R\{u, Q\} . \text{extens}_a^A(R) . \mathfrak{C}\{u, a\} . \mathfrak{C}\{Q, A\}.$

21·092 $Q[R]_a^A u \underset{df}{=} . R\{Q, u\} . \text{extens}_A^a(Cnv_A^a R) . \mathfrak{C}\{u, a\} . \mathfrak{C}\{Q, A\}.$

24·04 $\exists_a \varkappa \underset{df}{=} (\exists \overline{u})\, \overline{u}\, \varepsilon_a\, \varkappa$

25·04 $\exists_a R \underset{df}{=} (\exists \overline{u}, \overline{v})\, \overline{u}[R]_a \overline{v}$

25·041 $\exists_a^A R \underset{df}{=} (\exists \overline{u})(\exists \overline{P})\, \overline{u}[R]_a^A \overline{P}$

25·042 $\exists_A^a R \underset{df}{=} (\exists \overline{u})(\exists \overline{P})\, \overline{P}[R]_A^a \overline{u}$

33·05 $D_a R \underset{df}{=} \hat{u}[(\exists \overline{v})\, \hat{u}[R]_a \overline{v}]$

33·051 $D_a^A R \underset{df}{=} \hat{u}[(\exists \overline{P})\, \hat{u}[R]_a^A \overline{P}]$

33·052 $D_A^a R \underset{df}{=} \overline{P}[(\exists \hat{u})\, \overline{P}[R]_A^a \hat{u}]$

33·06 $\mathfrak{q}_a R \underset{df}{=} \hat{v}[(\exists \overline{v})\, \overline{v}[R]_a \overline{u}]$

33·061 $\mathfrak{q}_a^A R \underset{df}{=} \hat{P}[(\exists \overline{v})\, \overline{v}[R]_a^A \hat{P}]$

33·062 $\mathfrak{q}_A^a R \underset{df}{=} \hat{u}[(\exists \overline{P})\, \overline{P}[R]_A^a \hat{u}]$

37·001 $\vartheta \underset{df}{=} \sigma''''$

37·0011 $\vartheta' \underset{df}{=} \sigma'''''$

37·002 $\pi \underset{df}{=} \tau''''$

37·0021 $\pi' \underset{df}{=} \tau'''''$

37·01 $[R^{\epsilon\epsilon}]_a \varkappa \underset{df}{=} \hat{u}[(\exists \overline{v}) . \hat{u}[R]_a \overline{v} . \overline{v}\, \varepsilon_a\, \varkappa .]$

37·011 $[R^{\epsilon\epsilon}]_a^A \pi \underset{df}{=} \hat{u}[(\exists \overline{P}) . \hat{u}[R]_a^A \overline{P} . \overline{P}\, \varepsilon_A\, \pi .]$

37·012 $[R^{\epsilon\epsilon}]_A^a \varkappa \underset{df}{=} \hat{P}[(\exists \overline{u})\, \hat{P}[R]_A^a \overline{u} . \overline{u}\, \varepsilon_a\, \pi .]$

40·01 $\mathfrak{p}'\sigma \underset{d'}{=} \hat{u}\{(\overline{x}).\overline{x}\,\varepsilon_K\,\sigma \supset \hat{u}\,\varepsilon_a\,\overline{x}.\}$

50·01 $\mathrm{I} \underset{d'}{=} \hat{u}\,\hat{v}[.\hat{u} \underset{u,u}{=} \hat{v}.]$.

Propositions:

24·23 $\vdash (x \cap_u \wedge_{(a)}) \underset{a}{=} \wedge_{(a)}$

24·24 $\vdash$ extens $(x) \supset .(x \cup_u \wedge_{(a)}) \underset{a}{=} x.$

22·42 $\vdash x \underset{a}{\subset} x$

22·43 $\vdash (x \cap_u \omega) \underset{u}{\subset} x$

22·44 $\vdash : x \underset{a}{\subset} \omega :. \omega \underset{a}{\subset} \omega' : \supset . x \underset{a}{\subset} \omega'.$

22·621 $\vdash$ extens $(x, \omega) \supset : x \underset{a}{\subset} \omega . \equiv . (x \cap_u \omega) \underset{a}{=} x:$

22·68 $\vdash ((x \cap_u \omega) \cup_u (x \cap_u \omega')) \underset{a}{=} (x \cap_u (\omega \cup \omega'))$

22·81 $\vdash$ extens $(x, \omega) \supset : x \underset{a}{\subset} \omega . \underset{a}{\equiv} . \underset{a}{-} \omega \underset{a}{\subset} \underset{a}{-} x:$

22·87 $\vdash$ extens $(x, \omega) \supset .(\underset{a}{-} x \cap_u \underset{a}{-} \omega) \underset{a}{\equiv} \underset{a}{-} (x \cup_u \omega).$

25·4 . extens$_u(P)$. extens$_u(Q)$. $\supset : (P \cap_u Q) \underset{u}{=} \wedge_{(u,u)} .$
$\equiv . ((P \cup_a Q) \underset{u}{-} P) \underset{a}{=} Q :$

37·2 $\vdash$. extens $(x, \omega): x \underset{a}{\subset} \omega : \supset . [R^{ee}]_u\, x \underset{a}{\supset} [R^{ee}]_u\, \omega .$

37·51 $\vdash$ extens $(x) \supset : x \underset{a}{\subset} q_a R . \equiv . x \underset{a}{\subset} [Cnv_a\, R^e]_u [R^{ee}]_u\, x .$

40·12 $\vdash x\, \varepsilon_K\, \sigma \supset . \mathfrak{p}'\sigma \underset{a}{\subset} x .$

51·36 $\vdash$ extens $(x) \supset . \sim u\, \varepsilon_a\, x \equiv . x \underset{u}{\subset} \underset{u}{-} \iota' u:$

C. Theory of Relations.

Relative products of two relations.

34·01 $(R \overset{u}{\underset{u}{|}} S) \underset{d'}{=} \hat{u}\,\hat{v}[(\exists \overline{w}) . \hat{u}[R]_u \overline{w} . \overline{w}[S]_u \hat{v}\,]$

34·011 $(R \mid S) \underset{d'}{=} (R \overset{a}{\underset{u}{|}} S)$

34·012 $(R \overset{A}{\underset{u}{|}} S) \underset{d'}{=} \hat{u}\,\hat{v}[(\exists \overline{P}) . \hat{u}[R]^A_u \overline{P} . \overline{P}[S]^u_A \hat{v}.]$

34·013 $(R \overset{u}{\underset{u,A}{|}} S) \underset{d'}{=} \hat{u}\,\hat{P}[(\exists \overline{w}) . \hat{u}[R]_u \overline{w} . \overline{w}[S]^A_a \hat{P}.]$

34·014 $(R \overset{a}{\underset{A}{|}} S) \underset{d'}{=} \hat{P}\,\hat{Q}[(\exists \overline{w}) . \hat{P}[R]^a_A \overline{w} . \overline{w}[S]^A_a \hat{Q}.]$

34·015 $(R \overset{A}{\underset{u,A}{|}} S) \underset{d'}{=} \hat{u}\,\hat{P}[(\exists \overline{Q}) . \hat{u}[R]^A_a \overline{Q} . \overline{Q}[S]_A \hat{P}.]$

34·016 $(R \overset{a}{\underset{A\cdot a}{|}} S) \underset{d'}{=} \hat{P}\hat{u}[(\exists \bar{w}) . \hat{P}[R]^{a}_{A} \bar{w} . \bar{w}[S]_{''} \hat{u} .]$

34·017 $(R \overset{A}{\underset{A\cdot a}{|}} S) \underset{d'}{=} \hat{P}\hat{u}[(\exists \bar{Q}) . \hat{P}[R]_{A} \bar{Q} . \bar{Q}[S]^{a}_{A} \hat{u} .]$

34·04 $(R \overset{''}{\underset{''}{|}} S \overset{a}{\underset{a}{|}} T) \underset{d'}{=} ((R \overset{a}{\underset{''}{|}} S) \overset{''}{\underset{''}{|}} T)$

34·041 $(R | S | T) \underset{d'}{=} (R \overset{a}{\underset{''}{|}} S \overset{a}{\underset{''}{|}} T)$

Analogous abbreviations will be used for relative products of relations of any type.

34·21 $\vdash (R \overset{a}{\underset{''}{|}} S \overset{''}{\underset{''}{|}} T) \underset{a}{=} (R \overset{''}{\underset{''}{|}} (S \overset{''}{\underset{''}{|}} T))$

Analogous propositions for other types are here tacitly assumed.

Limited domains and converse domains.

35·01 $(\varkappa \overset{''}{\underset{''}{\urcorner}} R) \underset{d'}{=} \hat{u}\hat{v}[. \hat{u}\, \varepsilon_{''}\, \varkappa . \hat{u}[R]_{''} \hat{v} .]$

35·011 $(\varkappa \overset{A}{\underset{''}{\urcorner}} R) \underset{d'}{=} \hat{u}\hat{P}[. \hat{u}\, \varepsilon_{''}\, \varkappa . \hat{u}[R]^{A}_{a} \hat{P} .]$

35·012 $(\pi \overset{''}{\underset{A}{\urcorner}} R) \underset{d'}{=} \hat{P}\hat{u}[. \hat{P}\varepsilon_{A}\pi . \hat{P}[R]^{''}_{A} \hat{u} .]$

35·02 $(R \overset{''}{\underset{''}{\upharpoonright}} \varkappa) \underset{d'}{=} \hat{u}\hat{v}[. \hat{u}[R]_{''} \hat{v} . \hat{v}\, \varepsilon_{''}\, \varkappa .]$

35·021 $(R \overset{''}{\underset{A}{\upharpoonright}} \varkappa) \underset{d'}{=} \hat{P}\hat{u}[. \hat{P}[R]^{a}_{A} \hat{u} . \hat{u}\, \varepsilon_{''}\, \varkappa .]$

35·022 $(R \overset{A}{\underset{''}{\upharpoonright}} \pi) \underset{d'}{=} \hat{u}\hat{P}[. \hat{u}[R]^{A}_{a} \hat{P} . \hat{P}\varepsilon_{A}\pi .]$

35·412 $\vdash (R \overset{a}{\underset{a}{\upharpoonright}} (\varkappa \cup_{''} \omega)) \equiv ((R \underset{''}{\overset{a}{\upharpoonright}} \varkappa) \cup_{a} (R \underset{a}{\overset{''}{\upharpoonright}} \omega))$

35·431 $\vdash$ extens $(\varkappa, \omega) \supset : \varkappa \underset{''}{\subset} \omega . \supset . (R \underset{''}{\overset{a}{\upharpoonright}} \varkappa) \underset{a}{\subset} (R \underset{''}{\overset{a}{\upharpoonright}} \omega) :$

35·65 $\vdash : \varkappa \underset{''}{\subset} \mathrm{G}_{''} R :$ extens $(\varkappa) . \supset . D_{''} (\varkappa \underset{a}{\overset{a}{\urcorner}} R) \underset{a}{=} \varkappa .$

Ordinal couples:

55·01 $(u \overset{''}{\downarrow} v) \underset{d'}{=} \hat{w}\hat{t}[: \hat{w} \underset{'','''}{=} u :. \hat{t} \underset{'','''}{=} v :]$

55·03 $(u \underset{A}{\downarrow}) \underset{d'}{=} \hat{P}\hat{w}[: \hat{P} \underset{''}{=} (u \overset{a}{\downarrow} \hat{w}) : \bar{\mathfrak{c}}\{\hat{w}, a\} . \bar{\mathfrak{c}}\{\hat{P}, A\} .]$

55·04 $(\underset{A}{\downarrow} u) \underset{d'}{=} \hat{P}\hat{w}[: \hat{P} \underset{''}{=} (\hat{w} \overset{a}{\downarrow} u) : \bar{\mathfrak{c}}\{\hat{w}, a\} . \bar{\mathfrak{c}}\{\hat{P}, A\} .]$

55·2 $\vdash . (u \overset{''}{\downarrow} v) \underset{a}{=} (u' \overset{''}{\downarrow} v') . \equiv : u \underset{'','''}{=} u' :. v \underset{a,a}{=} v' :.$

One-many, many-one and one-one relations.

71·01 $R\,\varepsilon\,1 \underset{u}{\rightarrow} Cls \underset{df}{=} .(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) : \overline{u}\,[R]_u\, \overline{w} \,.\, \overline{v}\,[R]_a\, \overline{w} \,. \supset \overline{u} \underset{a,a}{=} \overline{v}$: extens$_u(R)$.

71·011 $R\,\varepsilon\,1 \underset{u,A}{\rightarrow} Cls \underset{df}{=} .(\overline{u}, \overline{v})(\overline{P}) : \overline{u}\,[R]^A_u\, \overline{P} \,.\, \overline{v}\,[R]^A_a\, \overline{P} \,. \supset . \overline{u} \underset{u,a}{=} \overline{v}$:

extens$^A_a(R)$.

77·012 $R\,\varepsilon\,1 \underset{A,u}{\rightarrow} Cls \underset{df}{=} .(\overline{P}, \overline{Q})(\overline{u}) : \overline{P}\,[R]^a_A\, \overline{u} \,.\, \overline{Q}\,[R]^a_A\, \overline{u} \,. \supset . \overline{P} \underset{a}{=} \overline{Q}$:

extens$^A_a(Cnv^a_A\, R)$.

71·02 $R\,\varepsilon\, Cls \underset{u}{\rightarrow} 1 \underset{df}{=} (\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) . \overline{w}\,[R]_u\, \overline{u} \,.\, \overline{w}\,[R]_a\, \overline{v} \,. \supset . \overline{u} \underset{u,u}{=} \overline{v}$: extens$_a(R)$.

71·03 $R\,\varepsilon\,1 \underset{u}{\rightarrow} 1 \underset{df}{=} : R\,\varepsilon \underset{u}{\rightarrow} Cls \,.\, R\,\varepsilon\, Cls \underset{u}{\rightarrow} 1$.

I omit the definitions of $R\,\varepsilon\, Cls \underset{a,A}{\rightarrow} 1$, $R\,\varepsilon\, Cls \underset{A,a}{\rightarrow} 1$, $R\,\varepsilon\,1 \underset{a,A}{\rightarrow} 1$, $R\,\varepsilon\,1 \underset{A,a}{\rightarrow} 1$, which are to be got by the same method.

71·19 $\vdash R\,\varepsilon\,1 \underset{u}{\rightarrow} Cls \equiv .(R \underset{a}{|} Cnv_a R) \underset{a}{=} (I \underset{a}{\restriction} D_u\, R)$.

71·192 $\vdash R\,\varepsilon\,1 \underset{u}{\rightarrow} 1 \equiv : (R \underset{a}{|} Cnv_a R) \underset{a}{=} (I \restriction D_a R) :. (Cnv_u\, R \,|\, R) \underset{a}{=} (I \restriction \mathsf{G}_u R)$:

71·24 $\vdash .R\,\varepsilon\,1 \underset{a}{\rightarrow} Cls \,.\, S\,\varepsilon\,1 \underset{a}{\rightarrow} Cls : (\mathsf{G}_u\, R \cap_u \mathsf{G}_u S) \underset{u}{=} \wedge_{(a)} : \supset$

$(R \cup_a S)\,\varepsilon\,1 \underset{u}{\rightarrow} Cls$

71·25 $\vdash .R\,\varepsilon\,1 \underset{u}{\rightarrow} Cls \,.\, S\,\varepsilon\,1 \underset{a}{\rightarrow} Cls . \supset (R \,|\, S)\,\varepsilon\,1 \underset{a}{\rightarrow} Cls$

71·252 $\vdash .R\,\varepsilon\,1 \underset{a}{\rightarrow} 1 \,.\, S\,\varepsilon\,1 \underset{a}{\rightarrow} 1 . \supset (R \,|\, S)\,\varepsilon\,1 \underset{a}{\rightarrow} 1$

71·26 $\vdash R\,\varepsilon\,1 \underset{a}{\rightarrow} Cls \supset (R \underset{a}{\restriction} x)\,\varepsilon\,1 \underset{a}{\rightarrow} Cls$

71·36 $\vdash R\,\varepsilon\,1 \underset{a}{\rightarrow} Cls \supset : u = R^{c}{}_{(u,a)}\, v \,. \equiv u[R]_u v$.

72·184 $\vdash .(u \underset{A}{\downarrow})\,\varepsilon\,1 \underset{A,a}{\rightarrow} 1 \,.\, (\underset{A}{\downarrow} u)\,\varepsilon\,1 \underset{A,a}{\rightarrow} 1$.

72·503 $\vdash R\,\varepsilon\,1 \underset{A,u}{\rightarrow} 1 : \omega \underset{a}{\subset} \mathsf{G}^a_A R : \supset [Cnv^a_A\, R^{c}]^A_a [R^{c}]^a_A\, \omega \underset{a}{=} \omega$

D. Similarity of Classes.

We shall use the following classes and relations to determine the types:

73·002 $B \underset{df}{=} \hat{P}\hat{Q}[\hat{P}, \hat{Q}\,\varepsilon_A\, D^a_A(a \underset{A}{\downarrow})]$

73·003 $C \underset{df}{=} \hat{u}\hat{v}\,[\hat{u}, \hat{v}\,\varepsilon_u\, \mathsf{G}^a_A(a \underset{A}{\downarrow})]$

Our propositions, 12·31—12·51 and 12·1, imply the following propositions concerning the types:

73·004 $\vdash \mathfrak{T}\{C, ((Cnv^{a}_{A}(a \underset{A}{\downarrow}) \overset{A}{\underset{a,A}{|}} B) \overset{A}{\underset{a}{|}} (a \downarrow))\}$

73·005 $\vdash \mathfrak{T}\{B. (((a \underset{A}{\downarrow}) \overset{a}{\underset{A,a}{|}} C) \overset{a}{\underset{A}{|}} Cnv^{a}_{A}(a \underset{A}{\downarrow}))\}$

73·006 $\vdash \mathfrak{T}\{D_{a}C, [Cnv^{a}_{A}(a \underset{A}{\downarrow})^{ee}]^{A}_{a} D_{A}B\}$

73·007 $\vdash \mathfrak{T}\{D_{A}B. [(a \underset{A}{\downarrow})^{ee}]^{A}_{a} D_{a}C\}$

73·01 $\varkappa \leftarrow (R)_{a} \rightarrow \omega \underset{df}{=} . R \varepsilon 1 \underset{a}{\quad} 1 : \varkappa \underset{a}{=} D_{a}R :. \omega \underset{a}{=} \mathit{Q}_{a}R :$

73·011 $\varkappa \leftarrow (R) \quad \omega = \varkappa \leftarrow (R)_{a} \rightarrow \omega$

Note that, if $\varkappa$ or ω is not extensional, we have $\sim \varkappa \leftarrow (R)_{a} \rightarrow \omega$.

The proposition „$\varkappa\, sm\, \omega$" is defined as follows:

73·02 $\varkappa\, sm\, \omega \underset{df}{=} (\exists \overline{R}) . \varkappa \leftarrow (\overline{R}) \rightarrow \omega . \mathfrak{T}\{\overline{R}, C\}.$

For classes of relations of the type A, we have the definition:

73·03 $\vartheta\, sm'\, \pi \underset{df}{=} (\exists \overline{R}) . \vartheta \leftarrow (\overline{R})_{A} \rightarrow \pi . \mathfrak{T}\{\overline{R}, B\}.$

This definition is to be used only in a small number of propositions. The full theory of similarity will be given for $\varkappa\, sm\, \omega$.—

By the method of Principia we get the following propositions:

73·11 $\vdash \mathfrak{T}\{\varkappa, D_{a}C\} \supset . \varkappa sm \omega \equiv (\exists \overline{R}) . \varepsilon 1 \underset{a}{\rightarrow} 1 : \varkappa \underset{a}{\subset} D_{a}\overline{R} :. \omega = [Cnv R^{ee}]_{a} \varkappa :.$

$\text{extens}\,[D_{a}C_{(a)}]\{\varkappa\} . \mathfrak{T}\{\overline{R}, C\}:$

73·12 $\vdash \mathfrak{T}\{\omega, D_{a}C\} \supset . \varkappa\, sm\, \omega \equiv (\exists \overline{R}) . \overline{R} \varepsilon 1 \underset{a}{\rightarrow} 1 : \omega \subset \mathit{Q}_{a}\overline{R} : \varkappa = [\overline{R}^{ee}]_{a} \omega :$

$\text{extens}\,[D_{a}C_{(a)}]\{\omega\} . \mathfrak{T}\{\overline{R}, C\}:$

73·2 $\vdash . R \varepsilon 1 \underset{a}{\rightarrow} 1 . \mathfrak{T}\{R, C\} . \supset . D_{a}R\, sm\, \mathit{Q}_{a}R . \mathit{Q}_{a}R\, sm\, D_{a}R .$

73·21 $\vdash . R \varepsilon 1 \underset{a}{\rightarrow} 1 : \omega \underset{a}{\subset} D_{a}R : \text{extens}(\omega) . \supset \omega \leftarrow ((\omega \overset{a}{\underset{a}{\upharpoonleft}} R)) \rightarrow [Cnv R^{ee}]_{a} \omega$

73·22 $\vdash . R \varepsilon 1 \underset{a}{\rightarrow} 1 : \omega \underset{a}{\subset} \mathit{Q}_{a}R : \text{extens}(\omega) . \supset [R^{ee}]_{a} \omega \leftarrow ((R \overset{2}{\underset{a}{\upharpoonright}} \omega)) \rightarrow \omega$

73·3 $\vdash \text{extens}\,[(D_{a}C)_{(a)}]\{\varkappa\} \supset . \varkappa\, sm\, \varkappa . \varkappa \leftarrow ((I \overset{a}{\underset{a}{\upharpoonright}} \varkappa)) \rightarrow \varkappa .$

73·32 $\vdash . \mathfrak{T}\{\varkappa, \omega . \varkappa', D_{a}C\} . \varkappa\, sm\, \omega . \omega\, sm\, \varkappa' . \supset \varkappa\, sm\, \varkappa'$

73·37 $\vdash . \mathfrak{T}\{\varkappa, \omega . \varkappa', D_{a}C\} . \varkappa\, sm\, \varkappa' . \supset . \omega\, sm\, \varkappa \equiv \omega\, sm\, \varkappa' .$

73·611 $[(\underset{A}{\downarrow} u)^{ee}]^{a}_{A} \varkappa\, sm'\, [(a \underset{A}{\downarrow})^{ee}]^{a}_{A} \varkappa$

73·69 $\vdash . \varkappa \leftarrow (R) \rightarrow \omega . \text{extens}(\varkappa') : (\varkappa \cap_{a} \varkappa') \underset{a}{=} \Lambda_{(a)} :. (\omega \cap_{a} \varkappa') \underset{a}{=} \Lambda_{(a)} :$

$\supset (\varkappa \cup_{a} \varkappa') \leftarrow ((R \cup_{a} (I \overset{a}{\upharpoonright} \varkappa'))) \rightarrow (\omega \cup_{a} \varkappa')$

73·7 $\vdash . \text{exstens}\,[D_{a}C_{(a)}]\{\varkappa'\} . \varkappa sm\, \omega : (\varkappa \cap_{a} \varkappa') = \Lambda_{(a)} :. (\omega \cap_{a} \varkappa') \underset{a}{=} \Lambda_{(a)} :$

$\supset (\varkappa \cup_{a} \varkappa')\, sm\, (\omega \cup_{a} \varkappa')$

73·71 $\vdash . \varkappa\, sm\, \omega . \varkappa'\, sm\, \omega' : (\varkappa \cap_{a} \varkappa') \underset{a}{=} \Lambda_{(a)} : . (\omega \cap_{a} \omega') \underset{a}{=} \Lambda_{(a)} : \supset$

$(\varkappa \cup_{a} \varkappa')\, sm\, (\omega \cup_{a} \omega')$

73·72 $\vdash . \text{extens}\,(\varkappa, \omega) . (\varkappa \cup \iota\text{‘}_{a} u)\, sm\, (\omega \cup \iota\text{‘}_{a} v) : (\varkappa \cap \iota\text{‘}_{a} u) \underset{a}{=} \Lambda_{(a)} :$

$. (\omega \cap \iota\text{‘}_{a} v) \underset{a}{=} \Lambda_{(a)} : \supset \varkappa\, sm\, \omega$

73·73 $\vdash . \text{extens}\,(\varkappa, \omega) . [(a_{\downarrow})^{\text{‘‘}}]^{a}_{A}\, \varkappa\, sm'\, \vartheta . [(a_{\downarrow})^{\text{‘‘}}]^{a}_{A}\, \omega\, sm'\, \vartheta . \supset \varkappa\, sm\, \omega .$

Dem. $\vdash$ 72·184 . 71·252 . 73·004 . $\supset$

$\vdash \text{Hp} \supset : [(a_{\downarrow})^{\text{‘‘}}]^{a}_{A}\, \varkappa \leftarrow (R)_{A} \rightarrow \vartheta . [(a_{\downarrow})^{\text{‘‘}}]^{a}_{A}\, \omega \leftarrow (S)_{A} \rightarrow \vartheta . \mathfrak{C}\{R, S, B\} . \supset$

$\varkappa \leftarrow (((Cnv^{a}_{A}(a_{\downarrow}) \overset{A}{\underset{a,A}{|}} R) | (S \overset{A}{\underset{A,a}{|}} (a_{\downarrow})))) \rightarrow \omega . \mathfrak{C}\{((Cnv^{a}_{A}(a_{\downarrow}) \overset{A}{\underset{a,A}{|}} R) | (S \overset{A}{\underset{A,a}{|}} (a_{\downarrow}))), C\}.$

[10·28] $\supset \vdash$ Prop

73·31 $\vdash . \omega\, sm\, \varkappa . [(a_{\downarrow})^{\text{‘‘}}]^{a}_{A}\, \varkappa\, sm'\, \vartheta . \supset [(a_{\downarrow})^{\text{‘‘}}]^{a}_{A}\, \omega\, sm'\, \vartheta$

Dem. $\vdash$. 72·184 . 71·252 . $\supset$

$\vdash . \mathfrak{C}\{R, C\} . \mathfrak{C}\{S . B\} . \omega \leftarrow (R)_{A} \rightarrow \varkappa . [(a_{\downarrow})^{\text{‘‘}}]^{a}_{A}\, \varkappa \leftarrow (S)_{A} \rightarrow \vartheta .$

$\supset . [(a_{\downarrow})^{\text{‘‘}}]^{a}_{A}\, \omega \leftarrow ((((a_{\downarrow}) \underset{A,a}{|} R) \overset{a}{\underset{A}{|}} Cnv^{a}_{A}(a_{\downarrow}))) \underset{A}{\rightarrow} [(a_{\downarrow})^{\text{‘‘}}]^{a}_{A}\, \varkappa .$

$[(a_{\downarrow})^{\text{‘‘}}]^{a}_{A}\, \varkappa \leftarrow (S)_{A} \rightarrow \vartheta .$

[71·252] $\supset [(a_{\downarrow})^{\text{‘‘}}]^{a}_{A}\, \omega \leftarrow ((((a_{\downarrow}) \underset{A,a}{|} R) \underset{A}{|} (Cnv^{a}_{A}(a_{\downarrow}) \overset{A}{\underset{a,A}{|}} S)))_{A} \rightarrow \vartheta$

[10·28] $\supset \vdash$ Prop.

31·01 $Cnv \underset{df}{=} \hat{Q}\, \hat{P} : Q \underset{a}{=} Cnv_{A} P . \mathfrak{C}\{\hat{Q}, \hat{P}, A\} .]$

72·11 $\vdash$ $Cnv \,\varepsilon\, 1 \underset{A}{\rightarrow} 1$

73·4 $\vdash . [Cnv^{\text{‘‘}}]_{A}\, \vartheta\, sm'\, \vartheta . [Cnv^{\text{‘‘}}]_{A}\, \vartheta \leftarrow ((Cnv \overset{A}{\upharpoonright} \vartheta))_{A} \rightarrow \vartheta .$ [72·11]

73·71 $\vdash . \vartheta\, sm'\, \pi . \vartheta'\, sm'\, \pi : (\vartheta \cap_{A} \vartheta') \underset{A}{=} \Lambda_{(A)} : . (\pi \cap_{A} \pi') \underset{A}{=} \Lambda_{(A)} . \supset$

$(\vartheta \cup_{A} \vartheta')\, sm'\, (\pi \cup_{A} \pi')$

I now pass to the Schröder-Bernstein theorem and its lemmas, assuming the following definitions:

73·79 $l(\omega) \underset{df}{=} : \omega \subset D_{a} R : (\omega'' - \text{Ч}_{a} R) \underset{a}{\subset} \omega : . [Cnv_{a} R^{\text{‘‘}}]_{a}\, \omega \underset{a}{\subset} \omega :$

extens (ω'').

73·791 $l_0 \underset{df}{=} \hat{x} [. l(\hat{x}) . \text{extens}\, [K_{(a)}] \{\hat{x}\} .]$

Note that $l(\omega)$ is ambiguous as to the order of ω, therefore $l(\mathfrak{p}\text{‘}l_0)$ is a proposition, the expression $l_0\{\mathfrak{p}\text{‘}l_0\}$ being meaningless. We now have the following proposition to be got by the method of Principia:

73·81 $\vdash . R \varepsilon 1 \underset{a}{\rightarrow} Cls : \mathfrak{A}_{a} R \underset{u}{\subset} \omega'' :. \omega'' \underset{u}{\subset} D_{a} R : \text{extens}(\omega'')$.

$$(\exists \bar{\varkappa}) : \bar{\varkappa} = D_{a} R : \mathfrak{C}\{\bar{\varkappa}, K\} . \supset l(\mathfrak{p}^{\mathfrak{c}} l_0)$$

The hypothesis $R \varepsilon 1 \rightarrow Cls$ is here irrelevant, but it is necessary in the following lemmas. It is no serious limitation of our theory, as we have to apply our lemmas to one-one relations. Following Principia, I write „Hp 73·81" for „the hypothesis of 73·81".

We have:

73·811 $\vdash$ Hp 73·81 $\supset . [Cnv_{u} R^{\mathfrak{cc}}]_{u} \mathfrak{p}^{\mathfrak{c}} l_0 \underset{u}{\subset} (\mathfrak{p}^{\mathfrak{c}} l_0 \underset{a}{-} (\omega'' \underset{a}{-} \mathfrak{A}_{u} R))$.

73·812 $\vdash$. Hp 73·81 . $\sim u \varepsilon_{u} ((\omega'' - \mathfrak{A}_{a} R) \cup_{u} [Cnv_{u} R^{\mathfrak{cc}}]_{u} \mathfrak{p}^{\mathfrak{c}} l_0) . \supset$

$$(\exists \bar{\varkappa}) . [Cnv_{u} R^{\mathfrak{cc}}]_{u} (\bar{\varkappa} \underset{a}{-} \iota^{\mathfrak{c}}{}_{u} u) \underset{u}{\subset} (\bar{\varkappa} \underset{a}{-} \iota^{\mathfrak{c}}{}_{a} u) : \bar{\varkappa} \varepsilon_{K} l_0 .$$

Dem. $\vdash$ 22.81 $\supset \vdash$ Hp $\supset \sim u \varepsilon_{u} [Cnv_{u} R^{\mathfrak{cc}}]_{a} \mathfrak{p}^{\mathfrak{c}} l_0$

[. Hp . 71·36 .] $\supset \sim (R^{\mathfrak{c}}{}_{(a,a)} u) \varepsilon_{a} \mathfrak{p}^{\mathfrak{c}} l_0$

[(40·01)] $\supset (\exists \bar{\varkappa}) \; \bar{\varkappa} \varepsilon_{K} l_0 : [Cnv R^{\mathfrak{cc}}]_{u} \bar{\varkappa} \underset{a}{\subset} \underset{a}{-} \iota^{\mathfrak{c}}{}_{a} u : (1)$

$\vdash$. (1) . (73·791) . $\supset \vdash$ Hp $\supset (\exists \bar{\varkappa}) : [Cnv R^{\mathfrak{cc}}]_{u} \bar{\varkappa} \underset{u}{\subset} (\bar{\varkappa} \underset{u}{-} \iota^{\mathfrak{c}}{}_{a} u) : \bar{\varkappa} \varepsilon_{K} l_0 :$

[37·2] $\supset \vdash$ Prop

73·82 $\vdash$ Hp 73·812 $\supset : (\mathfrak{p}^{\mathfrak{c}} l_0 \underset{u}{-} \iota^{\mathfrak{c}}{}_{a} u) \underset{a}{=} \mathfrak{p}^{\mathfrak{c}} l_0 : \sim u \varepsilon_{a} \mathfrak{p}^{\mathfrak{c}} l_0$.

Dem. $\vdash$ 22·87 51·36 . $\supset \vdash$ Hp $\supset . (\omega'' \underset{a}{-} \mathfrak{A}_{a} R) \underset{a}{\subset} \underset{u}{-} \iota^{\mathfrak{c}}{}_{u} u$. (1)

[73·81] $\supset \vdash$. Hp . $\varkappa \varepsilon_{K} l_0 . \supset . (\omega'' \underset{a}{-} \mathfrak{A}_{a} R) \underset{u}{\subset} (\varkappa \underset{u}{-} \iota^{\mathfrak{c}}{}_{u} u)$.

[73·812 . (73·79)] $\supset \vdash$ Hp $\supset (\exists \bar{\varkappa}) . (\bar{\varkappa} \underset{u}{-} \iota^{\mathfrak{c}}{}_{u} u) \varepsilon_{K} l_0 . \mathfrak{C}\{\varkappa, K\}$.

[40·12] $\supset . p^{\mathfrak{c}} l_0 \subset (p^{\mathfrak{c}} l_0 - \iota^{\mathfrak{c}}{}_{u} u)$.

[51·36 . 22·43] $\supset \vdash$ Prop.

73·821 $\vdash$. Hp 73·81 . $u \varepsilon_{u} (\mathfrak{p}^{\mathfrak{c}} l_0 - (\omega'' - \mathfrak{A}_{a} R)) . \supset$

$u \varepsilon_{a} [Cnv_{a} R^{\mathfrak{cc}}]_{u} \mathfrak{p}^{\mathfrak{c}} l_0$ [73·82]

73·83 $\vdash$ Hp 73·81 $\supset . (\mathfrak{p}^{\mathfrak{c}} l_0 \underset{u}{-} (\omega'' \underset{u}{-} \mathfrak{A}_{u} R)) \underset{a}{=} [Cnv_{a} R^{\mathfrak{cc}}]_{u} \mathfrak{p}^{\mathfrak{c}} l_0 :$

$. \mathfrak{p}^{\mathfrak{c}} l_0 \underset{a}{=} ((\omega'' \underset{a}{-} \mathfrak{A}_{u} R) \cup_{u} [Cnv_{u} R^{\mathfrak{cc}}]_{u} \mathfrak{p}^{\mathfrak{c}} l_0) :$

[73·821 . 811·81 .]

73·84 $\vdash$ Hp 73·81 $\supset . \omega'' \underset{u}{=} (\mathfrak{p}^{\mathfrak{c}} l_0 \cup_{a} (\mathfrak{A}_{u} R \underset{u}{-} [Cnv_{a} R^{\mathfrak{cc}}]_{u} \mathfrak{p}^{\mathfrak{c}} l_0))$ [73·83]

73·8401 $\vdash \mathfrak{C}\{R, C\} . \mathfrak{C}\{\omega'', DC\} . \supset$

$$\mathfrak{C}\{((\mathfrak{p}^{\mathfrak{c}} l_0 \underset{u}{\upharpoonleft} R) \cup_{a} (I \underset{u}{\upharpoonright} (D_{a} R \underset{a}{-} [Cnv_{u} R^{\mathfrak{cc}}]_{a} \mathfrak{p}^{\mathfrak{c}} l_0))), C\}$$

[(0·252) . 12·3121 · 3122 · 4 · 5]

73·841 $\vdash . \mathrm{Hp}\,73{\cdot}81 . \mathfrak{T}\{\omega'', DC\} . \mathfrak{T}\{R, C\} . R \,\varepsilon\, 1 \rightarrow 1$
$\supset . \omega'' \,sm\, D_a R . \omega'' \,sm_a\, \mathrm{Ɑ}_a R .$
[73·8·21·83·84]

73·86 $\vdash : \mathrm{Ɑ}_a R \underset{a}{\subset} D_a S :. \mathrm{Ɑ}_a S \underset{a}{\subset} D_a R . \mathrm{extens}(R) . \mathrm{extens}(S) . \supset$
$: \mathrm{Ɑ}_a S \underset{a}{\subset} D_a(R | S) :. D_a(R | S) \underset{a}{=} D_a R :. \mathrm{Ɑ}_a(R | S) \underset{a}{\subset} \mathrm{Ɑ}_a S :$

73·87 $\vdash . R \varepsilon 1 \underset{a}{\rightarrow} 1 . S \varepsilon 1 \underset{a}{\rightarrow} 1 : \mathrm{Ɑ}_a R \underset{a}{\subset} D_a S :. \mathrm{Ɑ}_a S \underset{a}{\subset} D_a R : \mathfrak{T}\{R, S, C\}.$
$\supset . (\exists \bar{\varkappa}) : D_a R = \bar{\varkappa} : \mathfrak{T}\{\bar{\varkappa}, K\} . \supset D_a R \,sm\, D_a S$
[73·86·841·2.(0·252)]

73·88 $\vdash . \varkappa \,sm\, \varkappa' . \omega \,sm\, \omega' : \varkappa' \underset{a}{\subset} \omega :. \omega' \underset{a}{\subset} \varkappa : \mathfrak{T}\{\varkappa, K\} . \mathfrak{T}\{\varkappa', \omega, \omega', D_a C\}.$
$\supset \varkappa \,sm\, \omega$

This is the Schröder-Bernstein theorem. Note that this theorem is true, when $\varkappa$, $\varkappa'$, ω, ω' are of the type K, but it is not proved for $\varkappa$, $\varkappa'$ ω, ω' being of the type $D_a C$.

VII. Cardinal numbers.

The Theory of Cardinal numbers, as given in Principia, is based on certain conventions enabling us to deal with numbers of ambiguous types. These conventions are far from being general directions of meaning, as they concern arithmetical operations. These conventions being required in proofs of propositions, can hardly be omitted, therefore it may be doubted whether we can build up Arithmetic without supplementary directions. Now the use of ascending cardinals seems to be scarcely possible without these. Moreover it would be quite useless in our system, as we can prove nothing concerning cardinal number of the Universum of a given type. There is this essential difference between the Pure Theory of Types and a simplified one, that the simplified Theory enables us to prove that the cardinal number of the classes of classes contained in a given class is greater than the cardinal number of this class [1]). With this theorem, we can prove that if σ is a cardinal number other than the null-class, there is a cardinal

[1]) Cf. Principia * 102·1.

number $(\sigma + 1)$ other than the null-class. Therefore in the simplified theory it is useful to deal with ascending cardinals; but, as I think, we ought at any rate to set aside the special conventions of Principia. In the Pure Theory of Types we have to do simply with homogeneous cardinals. This limitation enables us to get the theory of cardinals without any supplementary convention.

A. Homogeneous Cardinals.

Let us assume the following abbreviations:

101·0001 $\exists' \underset{df}{=} \exists_{nc}$

101·0002 $\varepsilon' \underset{df}{=} \varepsilon_{nc}$

103·001 $Red_1(\omega) \underset{df}{=} (\overline{\varkappa}') :. \overline{\varkappa}' \underset{a}{\subset} \omega : \text{extens}\, [D_a C_{(a)}] \{\overline{\varkappa}'\}.$

$$\supset (\exists \overline{\varkappa}) : \overline{\varkappa} \underset{a}{=} \overline{\varkappa}' : \mathfrak{C}\{\overline{\varkappa}', K\} :. \text{extens}\, [D_a C_{(a)}] \{\omega\}.$$

103·002 $Red_2(\omega) \underset{df}{=} (\overline{\varkappa}')(P) :: \overline{\varkappa}' \underset{a}{\subset} \omega : \text{extens}\, [D_a C_{(a)}] \{\overline{\varkappa}'\} . \overline{P} \varepsilon 1 \rightarrow Cls :$

$$\mathit{\Pi}_a \overline{P} \underset{a}{=} \overline{\varkappa}' : \mathfrak{C}\{\overline{P}. C\} . \supset (\exists \overline{Q})\, \overline{Q} \underset{a}{=} \overline{P} : \mathfrak{C}\{\overline{Q}, A\} :. \text{extens}\, [D_a C_{(a)}] \{\omega\}.$$

103·003 $Red(\omega) \underset{df}{=} . Red_1(\omega) . Red_2(\omega) . (\exists \overline{S})\, \mathfrak{C}\{\overline{S} . B\}.$

103·004 $Red(\varkappa, \omega) \underset{df}{=} . Red(\varkappa) . Red(\omega).$

We see that $Red(\omega)$ is the hypothesis of reducibility of subclasses of ω, as much as of one-many relations, whose converse domain is a sub-class of ω. We shall deal with reducible classes, i. e. classes which satisfy $Red(\omega)$, using a method analogous to that which we have applied to the problem of extension. As we cannot prove that there are in the type $D_a C$ classes which are not identical with $\iota'_a a$ or $\iota^{c}_{a} - a$, the existence of cardinals other than 0,1 and 2 is not assured by any means in this type. As we can prove that the null-class, as well as the classes containing elements identical with a unit element, or with one of two given elements, are reducible classes our dealing with reducible classes is no serious limitation of the theory of homogeneous cardinals.

I assume the following definition of the relation of similarity between reducible classes:

103·004 $sm\, r \underset{df}{=} \hat{\varkappa}\hat{\omega} [. Red(\hat{\varkappa}, \hat{\omega}) . \hat{\varkappa}\; sm\; \hat{\omega}.]$

This relation enables us to have the following definition of a homogeneous cardinal number of the class $\varkappa$ having the type $D_a C$. —

103·01 $\quad Nc^{\epsilon}\varkappa \underset{df}{=} \hat{\omega}[\omega\, smr\, \varkappa]$

We see that $Nc^{\epsilon}\varkappa$ is the class of all reducible classes of the type $D_a C$, which are similar to $\varkappa$.

We shall use the abbreviation:

101·001 $\quad \Omega \underset{df}{=} D_a C$

101·002 $\quad \wedge' \underset{df}{=} (\wedge_{(a)} \cap_a \Omega)$

The numbers 0, 1, 2 are defined as follows:

101·01 $\quad 0 \underset{df}{=} Nc^{\epsilon}\wedge'$

101·02 $\quad 1 \underset{df}{=} Nc^{\epsilon}(\iota^{\epsilon}_a a \cup_a \wedge')$

101·03 $\quad 2 \underset{df}{=} Nc^{\epsilon}((\iota^{\epsilon}_a a \cup_a \iota^{\epsilon}_a - a) \cup_a \wedge')$

101·003 $\quad \wedge'' \underset{df}{=} (\wedge_{(\Omega)} \cap_\Omega 1)$

The class of cardinals other than $\wedge''$ being denoted by NC, we have the following definition:

103·02 $\quad NC \underset{df}{=} \hat{\sigma}[(\exists\overline{\varkappa}) : \sigma \underset{\Omega}{=} Nc^{\epsilon}\overline{\varkappa} : \exists^{\epsilon}\sigma . \overline{\subset}\{\sigma, Nc^{\epsilon}\Omega\}.]$

We now have the following propositions concerning the use of $Red\ \omega)$.

101·1001 $\vdash : \varkappa \underset{a}{\subset} \omega : \text{extens}\,[\Omega_{(a)}]\{\varkappa\}. Red\,(\omega) : \supset Red\,(\varkappa)$

Dem $\vdash$ 22·44 $\supset \vdash . Hp : \omega' \underset{a}{\subset} \varkappa : \supset \omega' \underset{a}{\subset} \omega : Red\,(\omega)$.

$[10\cdot 33 ; 1] \supset \vdash$ Prop.

101·1002 $\vdash Red(\varkappa, \omega) \supset Red\,((\varkappa \cup_a \omega))$

Dem . $\vdash$ 22·43·68·621 $\underset{a}{\supset} \vdash : \varkappa' \underset{a}{\subset} (\varkappa \cup_a \omega) : \text{extens}\,[\Omega_{(a)}]\{\varkappa'\} . \supset$

$: (\varkappa' \cap_a \varkappa) \underset{a}{\subset} \varkappa : . (\varkappa' \cap_a \omega) \underset{a}{\subset} \omega : . \varkappa' \underset{a}{=} ((\varkappa' \cap_a \varkappa) \cup_a (\varkappa' \cap_a \omega)) :$ (1)

$\vdash$ 35·431·65·412 $\supset \vdash : \varkappa' \underset{a}{\subset} (\varkappa \cup_a \omega) : \text{extens}\,[\Omega_{(a)}]\{\varkappa'\} . P \varepsilon 1 \underset{a}{\rightarrow} Cls :$

$G_a P \underset{a}{=} \varkappa' : \overline{\subset}\{P, C\}$.

$\supset . (P \underset{a}{\overset{a}{\upharpoonright}} (\varkappa' \cap_a \varkappa)) \,\varepsilon\, 1 \underset{a}{\rightarrow} Cls . (P \underset{a}{\overset{a}{\upharpoonright}} (\varkappa' \cap_a \omega)) \,\varepsilon\, 1 \underset{a}{\rightarrow} Cls : G_a(P \overset{a}{\upharpoonright} (\varkappa' \cap_a \varkappa)) \subset \varkappa :$

$. G_a(P \underset{a}{\overset{a}{\upharpoonright}} (\varkappa' \cap_a \omega)) \underset{a}{\subset} \omega : . P \underset{a}{=} ((P \underset{a}{\overset{a}{\upharpoonright}} (\varkappa' \cap_a \varkappa)) \cup_a (P \underset{a}{\overset{a}{\upharpoonright}} (\varkappa' \cap_a \omega)))$. (2)

$[(1)] \supset :. \varkappa'' \underset{a}{=} (\varkappa' \cap_a \varkappa) :. \omega'' \underset{a}{=} (\varkappa' \cap_a \omega) : \mathfrak{C}\{\varkappa'', \omega'', K\} : Q \underset{a}{=} (P \overset{a}{\underset{a}{\upharpoonright}} (\varkappa' \cap_a \varkappa)) :$

$Q' \underset{a}{=} (P \overset{a}{\underset{a}{\upharpoonright}} (\varkappa' \cap_a \omega)) : \mathfrak{C}\{Q, Q', A\}.$

$\supset : \varkappa' \underset{a}{=} (\varkappa'' \cup_a \omega'') :. P \underset{a}{=} (Q \cup_a Q') : \mathfrak{C}\{(\varkappa'' \cup_a \omega''). K\} . \mathfrak{C}\{(Q \cup_a Q'), A\} :$

[10·24] $\supset (\exists \bar{\varkappa}''') (\exists \bar{Q}'') : \bar{\varkappa}' \underset{a}{=} \bar{\varkappa}''' :. P \underset{a}{=} \bar{Q}'' : \mathfrak{C}\{\varkappa''', K\} . \mathfrak{C}\{\bar{Q}'', A\}.$ (3)

$\vdash$ (1) (2) (3) . 10·34 $\supset \vdash$ Prop.

101·1003 $\vdash Red(\wedge')$

101·1004 $\vdash Red((\iota^{\epsilon} u \cup_a \wedge'))$

101·1005 $\vdash Red(\varkappa) \supset Red((\varkappa \cup_a \iota^{\epsilon}_a u))$ [101·1002·1004]

101·1006 $\vdash Red(((\iota^{\epsilon}_a u \cup_a \iota^{\epsilon}_a u) \cup_a \wedge'))$ [101·1004·1005]

With these lemmas we prove now without any difficulty the following propositions, by the method of Principia.

103·11 $\vdash . \varkappa \varepsilon' Nc^{\epsilon} \omega \equiv \varkappa \, smr \, \omega :. \varkappa \varepsilon' Nc^{\epsilon} \omega \equiv \omega \varepsilon' Nc^{\epsilon} \varkappa .$

103·12 $\vdash \exists' Nc^{\epsilon} \varkappa \supset \varkappa \varepsilon' Nc^{\epsilon} \varkappa$

103·13 $\vdash \exists' Nc^{\epsilon} \varkappa \equiv Red(\varkappa)$

103·14 $\vdash \exists' Nc^{\epsilon} \varkappa \supset : Nc^{\epsilon} \varkappa \underset{\Omega}{=} Nc^{\epsilon} \omega . \equiv \varkappa \, smr \, \omega .$

101·11 $\vdash 0 \varepsilon_1 NC$ [101·1003]

101·21 $\vdash 1 \varepsilon_1 NC$ [101·1004]

101·31 $\vdash 2 \varepsilon_1 NC$ [101·1005]

101·14 $\vdash . Nc^{\epsilon} \varkappa \underset{\Omega}{=} 0 . \equiv . \varkappa \underset{a}{=} \wedge' .$ [(101·01) . 103·11]

Here ε_1 is no special sign; we simply use the class 1 to denote the types, according to the definition 20·042.

101·22 $\vdash 1 \underset{\Omega}{\neq} 0$

101·33 $\vdash \varkappa, \omega \varepsilon' 1 : (\varkappa \cap_a \omega) = \wedge_{(a)} : \supset (\varkappa \cup_a \omega) \varepsilon' 2$

101·34 $\vdash . 2 \underset{\Omega}{\neq} 0 :. 2 \underset{\Omega}{\neq} 1 .$

103·2 $\vdash \sigma \varepsilon_1 NC \equiv (\exists \bar{\varkappa}) : \sigma \underset{\Omega}{=} Nc^{\epsilon} \bar{\varkappa} : \exists' \sigma .$

103·27 $\vdash . \exists' \sigma : \sigma \underset{\Omega}{=} Nc^{\epsilon} \varkappa : \equiv . \sigma \varepsilon_1 NC . \varkappa \varepsilon' \sigma .$

B. Greater and less.

Our dealing with homogenous cardinals enables us to have the following simple definition of „greater or equal".

117·05 $. \sigma \geqslant \tau . \underset{d.}{=} . \sigma, \tau \varepsilon_1 NC . (\exists \bar{\varkappa} . \bar{\omega}) . \bar{\varkappa} \varepsilon' \sigma . \bar{\omega} \varepsilon' \tau : \bar{\omega} \underset{a}{\subset} \bar{\varkappa} :.$

We then have:

117·06 $\quad . \tau \leqslant \sigma . \underset{df}{=} . \sigma \geqslant \tau .$

117·01 $\quad . \sigma > \tau . \underset{df}{=} : \sigma \geqslant \tau :. \sigma \underset{\Omega}{\neq} \tau :$

117·04 $\quad . \tau < \sigma . \underset{df}{=} . \sigma > \tau .$

117·23 $\quad \vdash : \sigma \geqslant \tau :. \tau \geqslant \sigma . \supset . \tau \underset{\Omega}{=} \sigma .$ [103·14·26 73·88]

This important proposition is got by means of the Schröder-Bernstein theorem. Note that our definition of NC enables us to use this theorem, as we are dealing with no other classes but reducible and extensional ones.

117·1031 $\quad \vdash : \sigma \underset{\Omega}{=} \tau : \sigma, \tau \varepsilon_1 NC . \supset . \sigma \geqslant \tau .$ [(117·05) . 22·42]

117·104 $\quad \vdash . \sigma \geqslant \tau . \equiv :. \sigma > \tau . \vee :. \sigma \underset{\Omega}{=} \tau : \sigma . \tau \varepsilon_1 NC :.$ [(117·01) . 5·75.]

117·281 $\quad \vdash . \sigma > \tau . \equiv : \sigma \geqslant \tau : \sim . \tau \geqslant \sigma :$ [117·1031 23]

117·4 $\quad \vdash : \sigma \geqslant \tau' :. \tau' \geqslant \tau : \supset . \sigma \geqslant \tau .$ [73·23]

117·42 $\quad \vdash \sim . \mu > \mu .$

117·45 $\quad \vdash : \sigma \geqslant \tau' :. \tau' > \tau : \supset . \sigma > \tau .$

Dem $\vdash$ 117·4 $\supset \vdash$ Hp $\supset . \sigma \geqslant \tau .$

[117·104] $\quad \supset :. \sigma > \tau . \vee :. \sigma \underset{\Omega}{=} \tau : \sigma, \tau \varepsilon_1 NC :.$ (1)

$\left[\text{Hp} \frac{\sigma}{\tau} \right] \vdash \supset . \text{Hp} : \sigma \underset{\Omega}{=} \tau : \sigma, \tau \varepsilon_1 NC . \supset : \sigma \geqslant \tau' : \tau' \geqslant \sigma :. \sigma \underset{\Omega}{\neq} \tau' :$

[117.23] $\quad \supset : \sigma \underset{\Omega}{=} \tau' :. \sigma \underset{\Omega}{\neq} \tau' :$

[Transp. (1) .] $\supset \vdash$ Prop.

117·46 $\quad \vdash : \sigma > \tau' :. \tau' \geqslant \tau : \supset . \sigma > \tau .$ [Proof as in 117·45]

117·47 $\quad \vdash : \sigma > \tau' :. \tau' > \tau : \supset . \sigma > \tau .$ [117·45 (117·01)]

117·5 $\quad \vdash \sigma \varepsilon_1 NC \supset . \sigma \geqslant 0 .$

117·501 $\quad \vdash \sigma \varepsilon_1 NC \equiv . \sigma \geqslant 0 .$

117·511 $\quad \vdash \sigma \varepsilon_1 (NC \underset{1}{-} \iota'_1 0) \equiv . \sigma > 0 .$ [117·501 . (127·01)]

117·531 $\quad \vdash \sigma \varepsilon_1 (NC \underset{1}{-} \iota'_1 0) \equiv . \sigma \geqslant 1 .$ [117·53·501·23 . 101·22 .]

117·54 $\quad \vdash . 1 \geqslant \sigma . \equiv :. \sigma \underset{\Omega}{=} 0 . \vee \sigma \underset{\Omega}{=} 1 :$ [117·531·501·104 . Transp.]

117·551 $\quad \vdash \sigma \varepsilon_1 ((NC \underset{1}{-} \iota'_1 0) \underset{1}{-} \iota'_1 1)) \equiv . \sigma \geqslant 2 .$

[(101·03) . (117·05) . 101·34 .]

C. Addition.

The sum of two homogeneous cardinals is to be defined as follows:

110·02 $(\sigma+\tau) \underset{df}{=} \dot{\varkappa}' | . \exists'\sigma . \exists'\tau . (\exists \bar{\varkappa}, \bar{\omega}) : \sigma = Nc'\bar{\varkappa} :. \tau = Nc'\bar{\omega} . (\bar{\varkappa} \cap_a \bar{\omega}) \underset{a}{=} \wedge_{(a)} : \bar{\varkappa}' \, smr \, (\bar{\varkappa} \cup_a \bar{\omega}) .]$

The dealing with homogeneous cardinals makes the more general definition, as given in Principia, irrelevant to our purposes. Now we have the following propositions:

110·1001 $\vdash \tilde{c}\{\sigma, \tau, 1\} \supset \tilde{c}\{(\sigma+\tau), 1\}$ [12·2421·42·5]

110·14 $\vdash : (\varkappa \cap_a \omega) = \wedge_{(a)} : \varkappa \varepsilon' \sigma . \omega \varepsilon' \tau . \sigma . \tau \varepsilon_1 NC . \supset (\varkappa \cup_a \omega) \varepsilon' (\sigma+\tau)$ [110·03 . 101·1002]

110·4 $\vdash \exists'(\sigma+\tau) \supset \sigma, \tau \varepsilon_1 NC$

110·42 $\vdash (\sigma+\tau) \varepsilon_1 (NC \cup_1 \iota'_1 \wedge'')$

110·51 $\vdash (\sigma+\tau) \underset{\Omega}{=} (\tau+\sigma)$

110·552 $\vdash : (\varkappa \cap_a \omega) = \wedge_{(a)} : \varkappa'' smr (\varkappa \cup_a \omega) : \varkappa, \omega \varepsilon' \text{extens}[\Omega_{(a)}] . \supset (\exists \bar{\varkappa}', \bar{\omega}') . \bar{\varkappa}' smr \varkappa . \omega' smr \omega ; \varkappa'' \underset{a}{=} (\bar{\varkappa}' \cup_a \bar{\omega}') :. (\bar{\varkappa}' \cap_a \bar{\omega}') \underset{a}{=} \wedge_{(a)} :$

Dem $\vdash$ 101·1001 . 73·22 . $\supset$

$\vdash : (\varkappa \cap_a \omega) = \wedge_{(a)} : Red(\varkappa'', (\varkappa \cup_a \omega)) . \varkappa'', (\varkappa \cup_a \omega) \varepsilon' \text{extens}[\Omega_{(a)}] . \text{Hp} . \supset$

$: \tilde{c}\{S, C\} . \varkappa'' \leftarrow (S)_a \rightarrow (\varkappa \cap_a \omega) . \supset . [S^{cc}]_a \varkappa \, smr \, \varkappa . [S^{cc}]_a \omega \, smr \, \omega : \varkappa'' \underset{a}{=} ([S^{cc}]_a \varkappa \cup_a [S^{cc}]_a \omega) : ([S^{cc}]_a \varkappa \cap_a [S^{cc}]_a \omega) \underset{a}{=} \wedge_{(a)} :.$

[10·34] $\supset \vdash$ Prop.

110·56 $\vdash ((\sigma+\tau)+\sigma') \underset{\Omega}{=} (\sigma+(\tau+\sigma'))$ [110·552]

110·6 $\vdash \sigma \varepsilon_1 (NC \cup_1 \iota'_1 \wedge'') \supset . (\sigma+0) \underset{\Omega}{=} \sigma .$

110·62 $\vdash (\sigma+\tau) \underset{\Omega}{=} 0 . \equiv : \sigma \underset{\Omega}{=} 0 :. \tau \underset{\Omega}{=} 0 :$ [103·26]

110·631 $\vdash \sigma \varepsilon_1 (NC \cup_1 \iota'_1 \wedge'') \supset . (\sigma+\tau) \underset{\Omega}{=} \dot{\varkappa} | . \sigma \varepsilon_1 NC . (\exists \bar{\omega}) (\exists \bar{u}) . \bar{\omega} \varepsilon' \sigma . \sim \bar{u} \varepsilon_a \bar{\omega} . \varkappa \, smr \, (\bar{\omega} \cup_a \iota' \bar{u})] .$

110·632 $\vdash \sigma \varepsilon_1 (NC \cup_1 \iota'_1 \wedge'' \supset . (\sigma+1) \underset{\Omega}{=} \dot{\varkappa} . \sigma \varepsilon_1 NC . (\exists \bar{u}) . \bar{u} \varepsilon_a \dot{\varkappa} . (\dot{\varkappa} - \iota' \bar{u}) \varepsilon' \sigma . \text{extens}[\Omega_{(u)}] \{\dot{\varkappa}\} .]$

110·64 $\vdash (\sigma+0) \underset{\Omega}{=} 0$ [110·62]

110·641 $\vdash (1+0) \underset{\Omega}{=} 1$ [110·6]

110·643 $\vdash \underset{\Omega}{=} (1+1)$ [110·641]

117·31 $\vdash . \sigma \geqslant \tau . \equiv . \sigma . \tau \varepsilon_1 NC . (\exists \bar{\sigma}') . \sigma \underset{\Omega}{=} (\tau + \bar{\sigma}') :$

117·561 $\vdash : \sigma \geqslant \tau \; \exists'(\sigma+\tau') . \supset . (\sigma+\tau') \geqslant (\tau+\tau') .$

Dem $\vdash$ 101·1001 . 73·22 $\supset$

$\vdash$. Hp : $\varkappa'' \underset{a}{=} (\varkappa' \cup_a \omega') : \varkappa', \varkappa \varepsilon' \sigma . \omega' \varepsilon' \tau' : (\varkappa' \cap_a \omega') \underset{a}{=} \wedge_{(a)} : \omega \varepsilon' \tau : \omega \underset{a}{\subset} \varkappa :$

$\varkappa' \leftarrow (R)_{(a)} \rightarrow \varkappa . \supset$

$: [R^{\varepsilon\varepsilon}]_a\, \omega \underset{a}{\subset} \varkappa' :. ([R^{\varepsilon\varepsilon}]_a\, \omega \cap_a \omega') \underset{a}{=} \wedge_{(a)} : [R^{\varepsilon\varepsilon}]_a\, \omega\ sm\ \omega .$ (1)

[110·14] $\supset . \varkappa'' \varepsilon' (\sigma + \tau) : ([R^{\varepsilon\varepsilon}]_a\, \omega \cup_a \omega') \underset{a}{\subset} \varkappa'' :$

[101·1001 . 10·34] $\supset \vdash$ Prop.

117·6 $\vdash (\sigma + \tau) \varepsilon_1 NC \supset . (\sigma + \tau) \geqslant \sigma .$ [(110·02) . 110·14.]

D. Multiplication.

I take from Principia the following definition of the arithmetical product of two classes:

113·01 $(\varkappa \times_A \omega) \underset{df}{=} \hat{P} [(\exists \bar{u} . \bar{v}) . \bar{u} \varepsilon_a \varkappa . \bar{v} \varepsilon_a \omega : \hat{P} \underset{a}{=} (\bar{u} \downarrow \bar{v}) : \mathfrak{C}\{\hat{P}, A\} .]$

The definition of the product of two cardinals is now:

113·02 $(\sigma \times \tau) \underset{df}{=} \hat{\varkappa}' [. \exists' \sigma . \exists' \tau . (\exists \bar{\varkappa}, \bar{\omega}) : \sigma \underset{\Omega}{=} Nc' \bar{\varkappa} :. \tau \underset{\Omega}{=} Nc' \bar{\omega} :$

$[a \underset{A}{\downarrow})^{\varepsilon\varepsilon}]^a_A\, \hat{\varkappa}'\, sm' (\bar{\varkappa} \times_a \bar{\omega}) . Red (\hat{\varkappa}') .]$

We have now the following propositions:

113·001 $\vdash \mathfrak{C}\{\sigma, \tau, 1\} \supset \mathfrak{C}\{\sigma \times \tau, 1\}$ [12·2421·42·5.]

113·13 $\vdash . \varkappa\ smr\ \varkappa'\ \ \omega\ smr\ \omega' . \supset (\varkappa \times_A \omega)\, sm' (\varkappa' \times_A \omega')$

Dem $\vdash$ 72·184 . 71·252 . $\supset$

$\vdash . \varkappa \leftarrow (R)_a \rightarrow \varkappa' . \omega \leftarrow (S)_a \rightarrow \omega' : T \underset{A}{=} \hat{P} \hat{Q} [(\exists \bar{u}, \bar{w}) .$

$\hat{P} [(((\bar{u} \underset{A}{\downarrow}) \underset{A,a}{|} S) \underset{A}{|} Cnv^a_A (\bar{w} \underset{A}{\downarrow})]_A\, \hat{Q} . \bar{u} [R]_a \bar{w} .]$

$\supset . T \varepsilon 1 \underset{A}{\rightarrow} 1 : D_a T \underset{A}{=} (\varkappa \times_A \omega) : G_A T \underset{A}{=} (\varkappa' \times_A \omega') :$

[10·28] $\supset \vdash$ Prop.

103·203 $\vdash (\sigma \times \tau) \varepsilon_1 (NC \cup_1 \iota'_1 \wedge'')$ [73·73·731]

113·27 $\vdash (\sigma \times \tau) = (\tau \times \sigma)$ [73·4]

117·571 $\vdash : \sigma \geqslant \tau : \exists' (\sigma \times \tau') . \supset . (\sigma \times \tau') \geqslant (\tau \times \tau') .$

Dem $\vdash$ 37·2 $\supset \vdash : \omega \underset{a}{\subset} \varkappa :$ extens $(\omega, \varkappa) . \supset . (\omega \times_A \omega') \underset{A}{\subset} (\varkappa \times_A \omega') .$ (1)

$\vdash$ 113·13 $\supset \vdash . \varkappa \varepsilon' \sigma . \omega \varepsilon' \tau : \omega \underset{a}{\subset} \varkappa : \varkappa' \varepsilon' \sigma . \omega' \varepsilon' \tau' . [(a \underset{A}{\downarrow})^{\varepsilon\varepsilon}]^a_A\, \varkappa''\, sm' (\varkappa' \times_A \omega') .$

$Red (\varkappa'') . \supset [(a \underset{A}{\downarrow})^{\varepsilon\varepsilon}]^a_A\, \varkappa''\ sm' (\varkappa \times_A \omega')$ (12)

[(1) . 73·22 . 37·2 51 . 72·502] $\supset [(a \underset{A}{\downarrow})^a_A\, \varkappa'' \leftarrow (R)_A \rightarrow (\varkappa \times_A \omega') \supset$

$: [R^{\varepsilon\varepsilon}]_A (\omega \times_A \omega') \subset [(a \underset{A}{\downarrow})^{\varepsilon\varepsilon}]^a_A\, \varkappa'' :. [Cnv^a_A (a \underset{A}{\downarrow})^{\varepsilon\varepsilon}]^a_a [R^{\varepsilon\varepsilon}]_A (\omega \times_A \omega') \subset \varkappa'' :$

$[Cnv^a_A (a \underset{A}{\downarrow})^{\varepsilon\varepsilon}]^A [R^{\varepsilon\varepsilon}]_A (\omega \times_A \omega') \varepsilon' (\tau \times \tau') .$

$\supset \vdash$ Prop.

113·621 $\vdash \sigma \varepsilon_1 (NC \cup_1 \iota'_1 \wedge'') \supset . (\sigma \times 1) \underset{\Omega}{=} \sigma . [73·611]$

117·62 $\vdash (\sigma \times \tau) \varepsilon_1 NC . \sigma, \tau \varepsilon_1 \underset{1}{-} \iota'_1 0 . \supset . (\sigma \times \tau) \geqslant \sigma .$

[117·571·53 . 113·621 .]

113·601 $\vdash \sigma \varepsilon_1 NC \supset . (\sigma \times 0) \underset{\Omega}{=} 0 .$

113·602 $\vdash . (\sigma \times \tau) = 0 . \equiv :. \sigma \underset{\Omega}{=} 0 . \vee . \tau \underset{\Omega}{=} 0 :.$

113·4 $\vdash ((\varkappa \cup_a \omega) \times_A \omega') \underset{A}{=} ((\varkappa \times_A \omega') \cup_A (\omega \times_A \omega'))$ [40·31]

113·43 $\vdash . \exists'(\sigma + \tau) \vee . \tau' \underset{\Omega}{\neq} 0 : \supset . ((\sigma + \tau) \times \tau') \underset{\Omega}{=} ((\sigma \times \tau') + (\tau \times \tau')) .$

Dem $\vdash$ 113·601 . 117·561·4 . 110·62 $\supset$

$\vdash : \tau' \underset{\Omega}{\neq} 0 : \exists'((\sigma \times \tau') + (\tau \times \tau')) . \supset \exists'(\sigma + \tau)$ (1)

$\vdash$ 101·1001 . 113·4 . 73·71 . $\supset \vdash \exists'(\sigma + \tau) \supset ((\sigma + \tau) \times \tau') \underset{\Omega}{=}$

$((\sigma \times \tau') + (\tau \times \tau'))$. (2)

$\vdash$ (1) . (2) . $\supset \vdash$ Prop.

I shall use the following abbreviations:

113·501 $X(w) \underset{df}{=} (((\varkappa'' \overset{A}{\underset{a}{\uparrow}} Cnv^a_A(a \underset{A}{\downarrow}) \overset{A}{\underset{a.A}{|}} R) \overset{A}{\underset{a}{|}} ((w \underset{A}{\downarrow}) \overset{a}{\underset{A}{\upharpoonright}} \omega))$

113·502 $Y(t) \underset{df}{=} (((\omega \overset{A}{\underset{a}{\uparrow}} Cnv^a_A(t \underset{A}{\downarrow})) \overset{A}{\underset{a,A}{|}} Cnv_A S) \overset{A}{\underset{a}{|}} ((a \underset{A}{\downarrow}) \overset{a}{\underset{A}{\upharpoonright}} \omega''))$

113·503 $Z_x \underset{df}{=}$

$\hat{P}\hat{Q}[(\exists \bar{u}, \bar{u}') \hat{P}[(((\underset{A}{\downarrow} \bar{u}') \overset{a}{\underset{A}{\upharpoonright}} \varkappa'') \overset{a}{\underset{A,a}{|}} X(\bar{u})) \overset{a}{\underset{A}{|}} (Y(\bar{u}') \overset{a}{\underset{a,A}{|}} (\omega'' \overset{A}{\underset{a}{\uparrow}} Cnv^a_A(\underset{A}{\downarrow} \bar{u})))] Q]$

113·51 $\vdash . [a \underset{A}{\downarrow})^{\epsilon\epsilon}]^a_A \varkappa'' \leftarrow (R)_A \rightarrow (\varkappa \times_A \omega) . [(a \underset{A}{\downarrow})^{\epsilon\epsilon}]^a_A \omega'' \leftarrow (S)_A \rightarrow (\varkappa' \times_A \omega)$

$. \mathfrak{C}\{R, S, B\} . \supset (\varkappa'' \times_A \varkappa') sm' (\omega'' \times^A \varkappa)$

Dem $\vdash$ 72·184 . 71·252 . $\supset . Z_x \varepsilon 1 \underset{A}{\rightarrow} 1 : D_A Z_x \underset{A}{=} (\varkappa'' \times_A \varkappa') :. \mathit{C}_A Z_x \underset{A}{=}$

$(\omega'' \times_A \varkappa) : \mathfrak{C}\{'Z_x, B\} .$

[10·24] $\supset \vdash$ Prop.

113·54 $\vdash . \exists'(\sigma \times \tau) . \exists'(\sigma \times \tau') . \supset ((\sigma \times \tau) \times \tau') \underset{\Omega}{=} (\sigma \times (\tau \times \tau')) .$

[113·51 . 105·6 . 113·27]

113·66 $\vdash (\sigma \times 2) = (\sigma + \sigma)$ [110·643 . 113·43·621 . 101·32]

113·771 $\vdash . \exists'(\sigma + 1) \vee . \tau \neq 0 : \supset . (\tau \times (\sigma + 1)) \underset{\Omega}{=} ((\tau \times \sigma) + \tau))$

[113·43·621]

E. Exponentiation.

According to the method of Cantor, I start from the following definition:

116·01 $(\varkappa \exp \omega) \underset{df}{=} \hat{P}[.\hat{P}\varepsilon 1 \underset{a}{\rightarrow} Cls: D_a\hat{P} \underset{a}{\subset} \varkappa :. G_a\hat{P} \underset{a}{=} \omega : \mathfrak{T}\{P, A\}.$ extens $(\varkappa, \omega).]$

We see that $(\varkappa \exp \omega)$ is a class of relations of the type A, like $(\varkappa \times_A \omega)$. By means of $(\varkappa \exp \omega)$ we define σ^τ as follows.

116·02 $\sigma^\tau \underset{df}{=} \varkappa'[.\exists'\sigma.\exists'\tau.(\exists\bar{\varkappa}, \bar{\omega}): \sigma \underset{\Omega}{=} Nc^{\epsilon}\bar{\varkappa} :. \tau \underset{\Omega}{=} Nc^{\epsilon}\bar{\omega}:$ $[(a\underset{A}{\downarrow})^{\epsilon\epsilon}]^a_A \varkappa' sm' (\bar{\varkappa} \exp \omega). Red(\hat{\varkappa}').]$

We have now the following proposition:

116·001 $\vdash \mathfrak{T}\{\sigma, \tau, 0\} \supset \mathfrak{T}\{\sigma^\tau, 0\}$ [12·2421·425]

116·19 $\vdash .\varkappa\, smr\, \varkappa'.\omega\, smr\, \omega'. \supset (\varkappa \exp \omega)\, sm'(\varkappa' \exp \omega')$

Dem $\vdash$ 71·25 $\supset$

$\vdash .\mathfrak{T}\{\varkappa, \varkappa', K\}.\mathfrak{T}\{\omega, \omega', K\}.\mathfrak{T}\{R, S, A\}.\varkappa \leftarrow (R)_a \rightarrow \varkappa'.\omega \leftarrow (S)_a \rightarrow \omega'.$ $\supset : P\varepsilon 1 \underset{a}{\rightarrow} Cls \supset .\mathfrak{T}\{(Cnv_a R \mid P \mid S), A\}.(Cnv_a R \mid P \mid S)\varepsilon 1 \underset{a}{\rightarrow} Cls:$ (1)

[71·192.34·21] $\supset$:

$T \underset{A}{=} \hat{P}\hat{Q}[: \hat{Q} \underset{a}{=} (Cnv_a R \mid P \mid S): \dot{Q}\varepsilon_A(\varkappa' \exp \omega').\hat{P}\varepsilon_A(\varkappa \exp \omega)] \cdot \supset$ $.\mathfrak{T}\{T.B\}.T\varepsilon 1 \underset{A}{\rightarrow} 1 : D_A T \underset{A}{=} (\varkappa \exp \omega) :. G_A T \underset{A}{=} (\varkappa' \exp \omega'):.$ (2)

[10·28.(103·004).] $\supset \vdash$ Prop.

116·23 $\vdash \sigma^\tau \varepsilon_1 NC \vee .\sigma^\tau \underset{\Omega}{=} \wedge''$. [73·73·731]

116·301 $\vdash \sigma\varepsilon_1 NC \supset .\sigma^0 \underset{\Omega}{=} 1$

116·311 $\vdash \sigma\varepsilon_1 (NC \underset{1}{-} \iota^{\epsilon}{}_1 0) \supset 0^\sigma \underset{\Omega}{=} 0.$

116·321 $\vdash \sigma\varepsilon_1 NC \supset \sigma^1 \underset{\Omega}{=} \sigma.$

116·331 $\vdash \sigma\varepsilon_1 NC \supset 1^\sigma \underset{\Omega}{=} 1$

116·51 $\vdash \sigma^\tau \underset{\Omega}{=} 0 \equiv : \sigma \underset{\Omega}{=} 0 : \sigma\varepsilon_1 (NC \underset{1}{-} \iota^{\epsilon}{}_1 0)$

116·35 $\vdash .[(a\underset{A}{\downarrow})^{\epsilon\epsilon}]^a_A \varkappa'' \leftarrow (R)_A \rightarrow (\varkappa \exp \omega)$ $[(a\underset{A}{\downarrow})^{\epsilon\epsilon}]^a_A \leftarrow (S)_A \rightarrow (\varkappa \exp \omega'):(\omega \cap_a \omega') \underset{a}{=} \wedge_{(a)}:$ $.\mathfrak{T}\{R, S, B\}.\mathfrak{T}\{\omega, \omega', K\}. \supset (\varkappa'' \times \omega'')\, sm'(\varkappa \exp(\omega \cup_a \omega'))$

Dem $\vdash$ 72·184 · 71·252. $\supset$

$\vdash$ Hp: $T \underset{A}{=} \hat{P}\hat{Q}[(\exists \bar{u}, \bar{v}): \hat{P} \underset{a}{=} (u\downarrow v) : \bar{u}[((\varkappa'' \underset{a}{\upharpoonleft} Cnv^a_A(a\underset{A}{\downarrow})) \underset{a,A}{\mid} R)] \underset{a}{\mid} \hat{Q} \underset{a}{\upharpoonleft} \omega).$

$\bar{v}[((\omega'' \overset{A}{\underset{a}{\upharpoonleft}} Cnv^a_A(a\downarrow)) \overset{A}{\underset{a,A}{|}} S)]^A_a(Q \overset{a}{\underset{a}{\upharpoonright}} \omega') : \hat{Q}\varepsilon_A(\varkappa \exp(\omega \cup_a \omega')) . \hat{P}\varepsilon_A(\varkappa'' \times_A \omega'').]:$

$\supset . \mathfrak{C}\{T, B\} . T\varepsilon 1 \underset{A}{\rightarrow} 1 : D_A T \underset{A}{=} (\varkappa'' \times \omega'') :. \mathrm{G}_A T \underset{A}{=} (\varkappa \exp(\omega \cup_a \omega')) :$

$[10{\cdot}24] \supset \vdash$ Prop.

$117{\cdot}581 \quad \vdash : \sigma \geqslant \tau : \tau' \varepsilon_1 NC . \supset . \sigma^{\tau} \geqslant \tau^{\tau}.$

Dem $\vdash 22{\cdot}44 \supset \vdash . \omega \underset{a}{\subset} \varkappa . \supset . (\omega \exp \omega') \underset{A}{\subset} (\varkappa \exp \omega').$

$\supset \vdash$ Prop.

$117{\cdot}591 \quad \vdash : \sigma \geqslant \tau : \tau' \varepsilon_1(NC - \iota'_1 0) . \supset . \tau'^{\sigma} \geqslant \tau'^{\tau}.$

Dem $\vdash . 71{\cdot}24 . 25{\cdot}4 . \supset$

$\vdash \omega, \varkappa \varepsilon_K \text{extens}[K_{(a)}] : \omega \underset{a}{\subset} \varkappa : u \varepsilon_a \varkappa' : T \underset{a}{=} \hat{P}\hat{Q}[\hat{P}\varepsilon_A(\varkappa' \exp \omega) :$

$\hat{Q} \underset{a}{=} (\hat{P} \cup_a \hat{v}\hat{w}[: v \underset{a,a}{=} u : \hat{w}\varepsilon_a(\varkappa \underset{a}{-} \omega) .]) : \mathfrak{C}\{\hat{Q}, A\}.]:$

$\supset . \mathfrak{C}\{T, B\} . T\varepsilon 1 \underset{A}{\rightarrow} 1 : D_A T \underset{A}{=} (\varkappa' \exp \omega) :. \mathrm{G}_A T \underset{A}{\subset} (\varkappa' \exp \varkappa) :. \quad (1)$

$[(1) . 72{\cdot}184 . 71{\cdot}252] \supset : [(a \underset{A}{\downarrow})^{\epsilon\epsilon}] \varkappa'' \leftarrow (R)_A \rightarrow (\varkappa' \exp \omega) .$

$[(a \underset{A}{\downarrow})^{\epsilon\epsilon}] \omega'' \leftarrow (S)_A \rightarrow (\varkappa' \exp \varkappa) : T' \underset{a}{=} (((Cnv^A_a(a \underset{A}{\downarrow})) \overset{A}{\underset{a,A}{|}} (R \overset{A}{\underset{A}{|}} T \overset{A}{\underset{A}{|}} Cnv_A S)) \overset{A}{\underset{a}{|}} (a \underset{A}{\downarrow})) :$

$\supset . T' \varepsilon 1 \underset{a}{\rightarrow} 1 : D_a T' \underset{a}{=} \varkappa'' :. \mathrm{G}_a T' \underset{a}{\subset} \omega'' : \quad (2)$

$\vdash (1) . (2) . \supset$ Prop.

$117{\cdot}592 \quad \vdash : \sigma^{\tau} \underset{\Omega}{=} 1 :. \sigma \underset{\Omega}{\neq} 0 :. \sigma \underset{\Omega}{\neq} 1 : \supset . \tau \underset{\Omega}{=} 0.$

$[117{\cdot}551{\cdot}53{\cdot}581{\cdot}591 . 116{\cdot}321 . 110{\cdot}643 . 117{\cdot}6 .]$

$116{\cdot}52 \quad \vdash \exists'(\sigma + \tau) \supset . (\tau'^{\sigma} \times \tau'^{\tau}) \underset{\Omega}{=} \tau'^{(\sigma+\tau)} . [116{\cdot}51 . 117{\cdot}591{\cdot}6]$

To prove the remaining laws of exponentiation, I shall use the following temporary abbreviations:

$116{\cdot}521 \quad Z_1 \underset{df}{=} ((\varkappa'' \overset{A}{\underset{a}{\upharpoonleft}} Cnv^a_A(a\downarrow)) \overset{A}{\underset{a,A}{|}} S)$

$116{\cdot}5211 \quad Z_2 \underset{df}{=} ((\omega'' \overset{A}{\underset{a}{\upharpoonleft}} Cnv^a_A(a\downarrow)) \overset{A}{\underset{a,A}{|}} R)$

$116{\cdot}5212 \quad Z_3 \underset{df}{=} ((\omega' \overset{A}{\underset{a}{\upharpoonleft}} Cnv^a_A(a\downarrow)) \overset{A}{\underset{a,A}{|}} T)$

$116{\cdot}522 \quad L_0 \underset{df}{=} \hat{P}\hat{Q}[\hat{P}\varepsilon_A(\varkappa'' \times_A \omega'') . \hat{Q}\varepsilon_A(\varkappa' \exp \omega') . (\exists \bar{u}'', \bar{v}'') . \bar{u}''[P]_a \bar{v}' .$

$(\exists \bar{P}', \bar{Q}') . \bar{u}''[Z_1]^A_a \bar{P}' . \bar{v}''[Z_2]^A_a \bar{Q}' : \hat{Q} \underset{a}{=} \hat{u}'\hat{v}'[(\exists \bar{v}) . \bar{v}[Q']_a \hat{v}' .$

$\hat{u}'[((Z_3 \overset{A}{\underset{a}{|}} ((\downarrow \bar{v}) \underset{A}{\upharpoonright} \varkappa)) \overset{a}{\underset{a}{|}} \bar{P}')]_a \hat{v}' .]:]$

$116{\cdot}523 \quad L_1 \underset{df}{=} \hat{P}\hat{Q}[. \hat{P}\varepsilon_A(\varkappa \exp \omega'') . \hat{Q}\varepsilon_A(\varkappa'' \exp \omega') : \hat{Q} \underset{a}{=}$

$\hat{u}''\hat{v}'[\hat{u}''[Z_1]^A_a((P \overset{a}{\underset{a,A}{|}} Z_2) \overset{A}{\underset{a}{|}} ((\underset{A}{\downarrow} \hat{v}') \underset{A}{\upharpoonright} \omega))]:]$

116·524 $H_1 \underset{d'}{=} \hat{u}\hat{v}'' [(\exists \bar{v}')(\exists \bar{P}') . \bar{P}' [(Cnv^A_a Z_1 \mid Q)]^a_A \bar{v}' .$

$\hat{u} [((\bar{P}' \underset{a,A}{\overset{a}{|}} (\omega \underset{a}{\overset{A}{\upharpoonright}} Cnv^a_A(\underset{A}{\downarrow} \bar{v}')) \underset{a}{\overset{A}{|}} Cnv^A_a Z_2)]_a \hat{v}''.]$

We have the following propositions concerning these relations:

116·525 $\vdash : D_A S \underset{A}{=} [(a \underset{A}{\downarrow})^{cc}]^a_A \varkappa'' : S \varepsilon 1 \underset{A}{\rightarrow} 1 . \supset$

$. Z_1 \varepsilon 1 \underset{a,A}{\rightarrow} 1 : D^A_a Z_1 \underset{a}{=} \varkappa'' :. G^A_a Z_1 \underset{A}{=} G_A S :$ [72·184 . 71·252]

116·526 $\vdash : D_A R \underset{A}{=} [(a \underset{A}{\downarrow})^{cc}]^a_A \omega'' : R \varepsilon 1 \underset{A}{\rightarrow} 1 . \supset$

$. Z_2 \varepsilon 1 \underset{a,A}{\rightarrow} 1 : D^A_a Z_2 \underset{a}{=} \omega'' :. G^A_a Z_2 \underset{A}{=} G_A R :$

116·527 $\vdash : D_A T \underset{A}{=} [(a \underset{A}{\downarrow})^{cc}]^a_A \varkappa' : T \varepsilon 1 \underset{A}{\rightarrow} 1 . \supset$

$. Z_3 \varepsilon 1 \underset{a,A}{\rightarrow} 1 : D^A_a Z_3 \underset{a}{=} \omega' :. G^A_a Z_3 \underset{A}{=} G_A T :$

116·5401 $\vdash [(a \underset{A}{\downarrow})^{cc}]^a_A \varkappa'' \leftarrow (S)_A \rightarrow (\varkappa \exp \omega') . [(a \underset{A}{\downarrow})^{cc}]^a_A \omega'' \leftarrow (R)_A \rightarrow (\omega \exp \omega')$

$. [(a \underset{A}{\downarrow})^{cc}]^a_A \varkappa' \leftarrow (T)_A \rightarrow (\varkappa \times_A \omega) .$

$Red(\varkappa) . Red(\varkappa', \omega') . Red(\varkappa'', \omega'') . \mathfrak{C}\{R, S, T, B\} . \exists_a \omega'' . \exists_a \varkappa'' .$

$Q \varepsilon_A (\varkappa \exp \omega') . \supset Q \varepsilon_A G_A L_0$

Dem $\vdash$. 71·192·25·252·36 . 116·527 . $\supset$

$\vdash$ Hp . $Q' \varepsilon_A (\omega \exp \omega') : P' \underset{a}{=} \hat{u}\hat{v}' [(\exists \bar{v}) . \bar{v} [Q']_a \hat{v}' .$

$\hat{u} [(((\varkappa \overset{A}{\upharpoonright} Cnv^a_A(\underset{A}{\downarrow} \bar{v})) \underset{a}{\overset{A}{|}} Cnv^A_a Z_3) \underset{a}{\overset{a}{|}} Q)]_a \hat{v}' .] :$

$u''[Z_1]^A_a P' . v''[Z_2]^A_a Q' . P \underset{a}{=} (u'' \downarrow v'') : \supset .$

$Q \underset{a}{=} \hat{u}'\hat{v}' [(\exists \bar{v}) . \bar{v} [Q']_a \hat{v} . \hat{u} [((Z_3 \underset{a}{\overset{A}{|}} ((\underset{A}{\downarrow} v) \underset{A}{\overset{a}{\upharpoonright}} \varkappa)) \overset{a}{|} P')]_a \hat{v} .] .$

[10·24 . (115·522)] $\supset P [L_0]_A Q$

[10·34 . Hp] $\supset$ Prop.

116·5402 $\vdash$ Hp 116·541 $\supset L_0 \varepsilon 1 \underset{A}{\rightarrow} 1$ [116·525·526]

116·54 $\vdash . [(a \underset{A}{\downarrow})^{cc}]^a_A \varkappa'' \, sm' (\varkappa \exp \omega') . [(a \underset{A}{\downarrow})^{cc}]^a_A \omega'' \, sm' (\omega \exp \omega') .$

$[(a \underset{A}{\downarrow})^{cc}]^a_A \varkappa' \, sm' (\varkappa \times_A \omega) .$

$Red(\varkappa'', \omega'') . Red(\varkappa) . Red(\varkappa', \omega') . \supset (\varkappa'' \times_A \omega'') \, sm' (\varkappa \exp \omega')$

[116·5401·5402·35 . 113·601]

116·55 $\vdash \exists' (\sigma \times \tau) \supset . (\sigma^{\tau'} \times \tau^{\tau'}) \underset{Q}{=} (\sigma \times \tau)^{\tau'}$

[116·54 . 117·581·62 . 113·601·311·621 . 116·301]

116·615 ⊢ . $[(a\underset{A}{\downarrow})^{\epsilon\epsilon}]^a_A \varkappa'' \leftarrow (S)_A \rightarrow (\varkappa \exp \omega)$.

$[(a\underset{A}{\downarrow})^{\epsilon\epsilon}]^a_A \omega'' \leftarrow (R)_A \rightarrow (\omega\times\omega') . \mathfrak{C}\{R,S,B\}$.

$Red(\varkappa'',\omega'') . Red(\varkappa,\omega) . Red(\omega') . \exists_a \varkappa'' . \exists_a\omega'' . \exists_a\omega . Q\varepsilon_A(\varkappa''\exp\omega')$:

$P \underset{a}{=} H_1 : \supset P[L_1]_A Q$

Dem ⊢ . 116·525 . 71·25 . ⊃ ⊢ Hp ⊃ . $(Cnv^A_a Z_1 \overset{a}{\underset{A,a}{|}} Q)\varepsilon 1 \underset{A,a}{\rightarrow} Cls$:

$D^a_A(Cnv^A_a Z_1 \overset{a}{\underset{A,a}{|}} Q) \underset{A}{\subset} (\varkappa\exp\omega) :. G^a_A(Cnv^A_a Z_1 \overset{a}{\underset{A,a}{|}} Q) \underset{a}{=} \varkappa'$:

[71·36] ⊃ ⊢ Hp ⊃ . $P''[(Cnv^A_a Z_1 \overset{a}{\underset{A,a}{|}} Q)]^a_A v' \equiv . P'' \underset{a}{=} \hat u \hat v[(\exists \overline{P}')$.

$\overline{P}'[(Cnv^A_a Z_1 \overset{a}{\underset{a}{|}} Q)]^a_A v' . \hat u[\overline{P}']_a \hat v .]$:

⊃: $u''[Z_1]^A_a P'' . P''[(Cnv^A_a Z_1 \overset{a}{\underset{A,a}{|}} Q)]v' . \equiv . u''[Z_1]^A_a P''$:

$P'' \underset{a}{=} \hat u\hat v[(\exists\overline{P}') . \overline{P}'[(Cnv^A_a Z_1 \overset{a}{\underset{A,a}{|}} Q)]^a_A v' . \hat u[\overline{P}']_a \hat v .]$:.

[71·192] ⊃ . $u''[Q]_a v' \equiv (\exists \overline{Q}') . u''[Z_1]^A_a \overline{Q}' : \overline{Q}' \underset{a}{=} \hat u\hat v[(\exists \overline{P}'')$.

$\overline{P}'[(Cnv^A_a Z_1 \overset{a}{\underset{A,a}{|}} Q)]^a_A v' . \hat u[\overline{P}']_a \hat v .]$:

71·192] ⊃ ⊢ Hp ⊃ . $u''[Q]_a v' \equiv (\exists\overline{Q}') . u''[Z_1]^A_a \overline{Q}' : \overline{Q}' \underset{a}{=} \hat u\hat v[(\exists\overline{P}')$.

$\overline{P}'[(Cnv^A_a Z_1 \overset{a}{\underset{A,a}{|}} Q)]^a_A v' . \hat u[(((\overline{P}' \overset{a}{\underset{a,A}{|}} (\omega \underset{a}{\overset{A}{\rceil}} Cnv(\underset{A}{\downarrow} v'))) \overset{A}{\underset{a,A}{|}} (Cnv^A_a Z_2 \overset{a}{\underset{A}{|}} Z_2)) \overset{A}{\underset{a}{|}} ((\downarrow v') \underset{A}{\overset{a}{\upharpoonright}} \omega))]_a \hat v .]$:

[71·192.55·2] ≡ $(\exists\overline{Q}') . u''[Z_1]^A_a \overline{Q}' : \overline{Q}' \underset{a}{=} \hat u\hat v[(\exists \overline{v}'', \overline{w}')(\exists\overline{P}')$.

$\overline{P}'[(Cnv^A_a Z_1 \overset{a}{\underset{A,a}{|}} Q)]^a_A \overline{w}' . \hat u[((\overline{P}' \overset{a}{\underset{a,A}{|}} (\omega \underset{a}{\overset{A}{\rceil}} Cnv^a_A(\underset{A}{\downarrow}\overline{w}'))) \overset{A}{\underset{a}{|}} Cnv Z_2)]_a \overline{v}''$.

$\overline{v}''[(Z_2 | ((\underset{A}{\downarrow} v') \underset{A}{\overset{a}{\upharpoonright}} \omega))]_a \hat v .]$:

[(116·524)] ≡ $(\exists\overline{Q}') . u''[Z_1]^A_a\overline{Q}' : \overline{Q}' \underset{a}{=} ((P \overset{a}{\underset{a,A}{|}} Z_2) \overset{A}{\underset{a}{|}} ((\underset{A}{\downarrow} v') \overset{a}{\underset{a}{\upharpoonright}} \omega))$:

[(116·523)] ⊃ ⊢ Prop.

116·616 ⊢ Hp 116·65 ⊃ $L_1 \varepsilon 1 \underset{A}{\rightarrow} 1$

Dem ⊢ . 71·192·25·252 . 116·525 . ⊃ ⊢ $P[L_1]_A Q \supset$

. $u''[Q]_a v' \equiv (\exists\overline{P}'') . u''[Z_1]^A_a \overline{P}' : P \underset{a}{=} ((P' \overset{a}{\underset{a,A}{|}} (\omega \rceil Cnv^a_A(\underset{A}{\downarrow} v'))) \overset{A}{\underset{a}{|}} Cnv^A_a Z_2)$:.

[71·192] ⊃ $P''[(Cnv^A_a Z_1 \overset{a}{\underset{A,a}{|}} Q)]^a_A v' \equiv . P''\varepsilon(\varkappa\exp\omega) : P \underset{a}{=}$

$((P'' \overset{a}{\underset{a,A}{|}} (\omega\rceil Cnv^a_A(\underset{A}{\downarrow} v'))) \overset{A}{\underset{a}{|}} Cnv^A_a Z_2)$:.

$[(116{\cdot}525)] \supset \vdash$ Prop.

116·62 $\vdash . [a\underset{A}{\downarrow})^{\epsilon\epsilon}]^{a}_{A} \varkappa'' sm'(\varkappa \exp \omega) . [(a\underset{A}{\downarrow})^{\epsilon\epsilon}]^{a}_{A} \omega'' sm'(\omega \times_{A} \omega') .$

$Red(\varkappa'', \omega'') . Red(\omega) .$

$\supset (\varkappa \exp \omega'') sm' (\varkappa'' \exp \omega')$

$[116{\cdot}615{\cdot}616{\cdot}311{\cdot}301{\cdot}35\ 113{\cdot}602]$

116·63 $\vdash \exists'(\tau \times \tau') \supset . \sigma^{(\tau \times \tau')} \underset{\Omega}{=} (\sigma^{\tau})^{\tau'}$ $[116{\cdot}62.117{\cdot}62.116{\cdot}301{\cdot}331]$

This proposition is the third law of exponentiation. We have got the laws of exponentiation by another method than that used in Principia. The proofs are here very much shortened; newerthless, as the fundamental relations we have to deal with are explicitly given, there is no further difficulty to obtain full demonstrations.

117·66 $\vdash \sigma \varepsilon_1 NC \supset . 2^{\sigma} \geqslant \sigma .$

Dem $\vdash 72{\cdot}184 \supset$

$\vdash : \varkappa \underset{a}{=} (\iota^{\epsilon}{}_{a} u \cup_{a} \iota^{\epsilon}{}_{a} v) : \sim . u \underset{a,a}{=} v : T \underset{A}{=} \hat{P}\hat{Q}| . \hat{P} \varepsilon_{A} (\varkappa \exp \omega) . (\exists \overline{w}) :$

$\overline{w} \underset{a}{=} (Cnv_{a} \hat{P})^{\epsilon} u : \hat{Q} | (\underset{A}{\downarrow} a)]^{a}_{A} w .] : Red(\omega) .$

$\supset . T \varepsilon 1 \underset{A}{\rightarrow} 1 : D_{A} T \underset{A}{\subset} (\varkappa \exp \omega) :. G_{A} T \underset{A}{=} [(\underset{A}{\downarrow} a)^{\epsilon\epsilon}]^{a}_{A} \omega :$

$[10{\cdot}24]$ $\supset (\exists \overline{\vartheta}) : \overline{\vartheta} \underset{A}{\subset} (\varkappa \exp \omega) : \overline{\vartheta} sm' [(\underset{A}{\downarrow} a)^{\epsilon\epsilon}]_{A} \omega .$

$[73{\cdot}22]$ $\supset . [(a\underset{A}{\downarrow})^{\epsilon\epsilon}]^{a}_{A} \varkappa' \leftarrow (R)_{A} \rightarrow (\varkappa \exp \omega) \supset : [R^{\epsilon\epsilon}]_{A} \vartheta \underset{a}{\subset} \varkappa' : [R^{\epsilon\epsilon}]_{A} \vartheta sm \omega .$

$[101{\cdot}1001]$ $\supset . \varkappa' \varepsilon' 2^{\sigma} . \omega \varepsilon' \sigma . \supset (\exists \overline{\omega}') : \overline{\omega}' \underset{a}{\subset} \varkappa' : \omega' \varepsilon' \sigma .$

$[10{\cdot}28]$ $\supset \vdash$ Prop.

F. Subtraction.

119·01 $(\sigma - \tau) \underset{df}{=} \hat{\varkappa} | : (\tau + Nc^{\epsilon} \hat{\varkappa}) \underset{\Omega}{=} \sigma : NC\{\sigma\} . NC\{\tau\} . |$

119·11 $\vdash \exists'(\sigma - \tau) \supset \sigma, \tau \varepsilon_1 NC$

119·14 $\vdash \varkappa \varepsilon' (\sigma - \tau) \supset Nc^{\epsilon} \varkappa \underset{\Omega}{\subset} (\sigma - \tau)$

119·26 $\vdash \exists'(\sigma - \tau) \supset . \sigma \geqslant \tau .$

119·27 $\vdash . \sigma \geqslant \tau . \supset \exists'(\sigma - \tau)$

119·64 $\vdash . \sigma \geqslant \tau . \equiv \exists'(\sigma - \tau)$

119·32 $\vdash ((\sigma + \tau) - \tau) \varepsilon_1 NC \supset . \sigma \underset{\Omega}{=} ((\sigma + \tau) - \tau) .$

119·34 $\vdash (\sigma - \tau) \varepsilon_1 NC \supset . ((\sigma - \tau) + \tau) \underset{\Omega}{=} \sigma .$

119·35 $\vdash . \exists'(\sigma' + \tau) . (\sigma - \tau) \varepsilon_1 NC . \supset . (\sigma' + \sigma) \underset{\Omega}{=} ((\sigma' + \tau) + (\sigma - \tau)) .$

119·45 $\vdash .((\sigma+\tau)-\sigma')\varepsilon_1 NC.(\tau-\sigma')\varepsilon_1 NC.\supset$

$$.((\sigma+\tau)-\sigma')\underset{\Omega}{=}(\sigma+(\tau-\sigma')).$$

The proof of these propositions is to be got by a direct application of the method of Principia and of lemmas 101·1001·1002.

VIII. Inductive numbers.

The Theory of iductive numbers, as based on the pure theory of Types, is quite complete and seems very simple. Moreover, it can be exposed in a quite popular way, without any serious difficulty.

I begin with the definition of an hereditary class.

120·001 $H(g,\tau)\underset{df}{=}.\tau\varepsilon_1 g.(\bar\sigma):\bar\sigma\varepsilon_1 g\supset(\bar\sigma+1)\varepsilon_1 g:\mathfrak{C}\{\bar\sigma,1\}:$

We have now following proposition:

120·101 $\vdash H(\hat\sigma'[.H(g,\tau)\supset\hat\sigma'\varepsilon_1 g.],\tau)$

Dem $\vdash 5{\cdot}5\supset\vdash H(g,\tau)\supset:H(g,\tau)\supset\sigma'\varepsilon_1 g.\equiv\sigma'\varepsilon_1 g.$

[(120·001)] $\supset H(\hat\sigma'[.H(g,\tau)\supset\hat\sigma'\varepsilon_1 g.],\tau)$ (1)

$\vdash 2{\cdot}21\supset\vdash\sim H(g,\tau)\supset:H(g,\tau)\supset\sigma'\varepsilon_1 g.\equiv V_{(1)}\{\tau\}.$

[(120·001)] $\supset H(\hat\sigma'[.H(g,\tau)\supset\hat\sigma'\varepsilon_1 g.],\tau)$ (2)

$\vdash (1).(2).\supset\vdash$ Prop.

Note that $H(g,\tau)$ is ambiguous in respect to the type of g. I proceed now to the definition of inductive numbers. The class of inductive numbers ought to be the logical product of all hereditary classes, i. e. all classes g such that $H(g,0)$. Now, we cannot speak about „all hereditary classes", these classes not having the same type. Therefore we cannot speak simply of inductive numbers, as we have different orders of them.

Let us now lay down the definition:

120·002 $\Phi\underset{df}{=}\hat\tau[\exists\bar\sigma).\bar\sigma\varepsilon_1 NC.\tau\varepsilon_1 NC.]$

Our definition of the Φ-order inductive numbers will be:

120·01 $NC(\Phi)\text{ induct}\underset{df}{=}\hat\tau[(\bar g):H(\bar g,0)\supset\hat\tau\varepsilon_1 g:\mathfrak{C}\{\bar g,\Phi\}.]$

This definition is a pattern for definitions of inductive numbers in any order. We shall here use the definition.

120·001 $\quad N_0 C \text{ induct} \underset{df}{=} NC(\Phi) \text{ induct}$

It is obvious that the Φ-order inductive numbers do not necessarily belong to all hereditary classes of another order. Now, it is useful to speak about $N_0 C$ induct-order inductive numbers. We shall see below that the inductive numbers of this order have all fundametal group-properties of the natural numbers. Therefore we shall call these numbers simply inductive numbers, and we shall use the following definition:

120·013 $\quad NC \text{ induct} \underset{df}{=} NC(N_0 C \text{ induct}) \text{ induct}$

It is easy to prove that all „inductive nnmbers“ are Φ-order inductive numbers. We have the following proposition:

120·1011 $\quad \vdash \tau \varepsilon_1 NC \text{ induct} \supset \tau \varepsilon_1 N_0 C \text{ induct}$

Dem $\vdash$ 24·23·24 $\supset$

$\vdash . \text{Hp} . H(g, 0) . \mathfrak{C}\{g, \Phi\} . \supset H((g \cup_1 (N_0 C \text{induct} \cap_1 \wedge_{(1)})), 0)$

[Hp] $\quad \supset \tau \varepsilon_1 (g \cup_1 (N_0 C \text{induct} \cap_1 \wedge_{(1)}))$

[24·23·24] $\quad \supset \tau \varepsilon_1 g$

$\supset \vdash$ Prop.

The following propositions concerning $N_0 C$ induct can be proved by the same method for NC induct.

120·1 $\quad \vdash \sigma \varepsilon_1 N_0 C \text{ induct} = (\bar{g}) : H(\bar{g}, 0) \supset \sigma \varepsilon_1 \bar{g} . \mathfrak{C}\{\bar{g}, \Phi\}.$

To prove this proposition we use 120·001 and we show in an easy manner that $N_0 C$ induct is an extensional class.

120·11 $\quad \vdash . H(g, 0) . \mathfrak{C}\{g, \Phi\} . \sigma \varepsilon_1 N_0 C \text{ induct} . \supset \sigma \varepsilon_1 g$

120·12 $\quad \vdash H(g, 0) \supset 0 \varepsilon_1 g$

120·121 $\quad \vdash . H(g, 0) \supset \sigma \varepsilon_1 g . \supset . H(g, 0) \supset (\sigma \quad 1) \varepsilon_1 g.$

120·122 $\quad \vdash H(g, 0) \supset 1 \varepsilon_1 g \quad$ [120·12·121 . 110·641 .]

120·123 $\quad \vdash H(g, 0) \supset 2 \varepsilon_1 g \quad$ [120·122·121 . 110·643 .]

Note that, if any natural number, e. g. 1918, is defined in our system, we can prove the proposition $\dot{1}918 \; \varepsilon_1 \; N_0 C$ induct, using 1918 times the method of the proof of 110·122.

120·124 $\quad \vdash (\sigma + 1) \underset{\Omega}{\neq} 0 \quad$ [110·4 . 101·11 . 110·632 .]

120·14 $\quad \vdash N_0 C \text{ induct} \underset{1}{\subset} (NC \cup_1 \iota'_1 \wedge'') \quad$ [120·121·12·11 .]

120·02 $\quad Cls(\Phi) \text{ induct} \underset{df}{=} \hat{\varkappa}[(\exists \bar{\sigma}) . \bar{\sigma} \varepsilon_1 NC(\Phi) \text{ induct} . \hat{\varkappa} \varepsilon_1 \bar{\sigma} .]$

120·021 $\quad Cls_0 \text{ induct} \underset{df}{=} Cls(\Phi) \text{ induct}$

120·023 $\quad J(h) \underset{df}{=} (\bar{\varkappa})(\bar{u}) : \text{extens}(\bar{\varkappa}) . \bar{\varkappa} \varepsilon' h . \supset (\bar{\varkappa} \cup_a \iota' \bar{u}) \varepsilon' h .$

120·212 $\vdash H(g,0) \supset Nc^{\epsilon}\Lambda' \varepsilon_1 g$ [120·12.(101·01)]

120·2121 $\vdash \wedge' \varepsilon' Cls_0$ induct [120·212.(120·02 021)]

120·213 $\vdash H(g,0) \supset Nc^{\epsilon}(\iota^{\epsilon}{}_{a} u \cup_{a} \wedge')\varepsilon_1 g$ [120·122.(101·02)]

120·2131 $\vdash (\iota^{\epsilon}{}_{a} u \cup_{a} \wedge')\varepsilon' Cls_0$ induct [120·213(120·0 021)]

120·21 $\vdash \varkappa \varepsilon' Cls_0 \text{ induct} \equiv Nc^{\epsilon}\varkappa \varepsilon_1(N_0 C \text{ induct} \underset{1}{-} \iota^{\epsilon} \wedge'')$

[120 14.(120·02) 103·27]

120·201 $\vdash \varkappa smr \varkappa' \supset . Nc^{\epsilon}\varkappa \varepsilon_1(N_0 C \text{ induct} \underset{1}{-} \iota^{\epsilon} \wedge'') \equiv$

$Nc^{\epsilon}\varkappa' \varepsilon_1(N_0 C \text{ induct} - \iota^{\epsilon} \wedge'')$.[103·14]

120·214 $\vdash \varkappa smr \varkappa' \supset . \varkappa \varepsilon' Cls_0 \text{ induct} \equiv \varkappa' \varepsilon' Cls_0 \text{ induct}$.[120·201]

120·215 $\vdash \text{extens}(\omega) \supset : Nc^{\epsilon}(\omega \cup_{a} \iota^{\epsilon}{}_{a} u) \underset{\Omega}{=} Nc^{\epsilon}\omega . \vee . Nc^{\epsilon}(\omega \cup_{a} \iota^{\epsilon}{}_{a} u) \underset{\Omega}{=}$

$(Nc^{\epsilon}\omega + 1)$: [110·63]

120·22 $\vdash . \overline{c}\{g, \Phi\} . H(g,0) . (\overline{h}) :. \wedge' \varepsilon' \overline{h} . J(\overline{h}) . \supset \omega' \varepsilon_1 \overline{h} :$

$\overline{c}\{\overline{h}, \hat{\omega}[\Phi\{Nc^{\epsilon}\hat{\omega}\}]\} : \supset Nc^{\epsilon}\omega' \varepsilon_1 g$

Dem $\vdash$ 120·215 $\supset \vdash H(g,0) \supset J(\hat{\omega}[g\{Nc^{\epsilon}\hat{\omega}\}])$ (1)

$\vdash$ (1).120 212 $\supset \vdash$ Hp $\supset \omega' \varepsilon_1 \hat{\omega}[g\{Nc^{\epsilon}\omega\}]$

$\supset \vdash$ Prop.

120·221 $\vdash . J(h) : Nc^{\epsilon}\omega \underset{\Omega}{\subset} h : \supset . (Nc^{\epsilon}\omega + 1) \underset{\Omega}{\subset} h$.[103·11.110 63]

120·222 $\vdash . J(h) . \sigma \varepsilon_1 NC : \sigma \underset{\Omega}{\subset} h : \supset . (\sigma + 1) \underset{\Omega}{\subset} h$.

.[103·2.120·211.110·4]

120·251 $\vdash . H(g.0) . \sigma' \varepsilon_1 g . \omega \varepsilon_1 \sigma' . \supset (\exists \overline{\sigma}) . \overline{\sigma} \varepsilon_1 g . (\omega \cup_{a} \iota^{\epsilon}{}_{a} u) \varepsilon_1 \overline{\sigma}$.

Dem $\vdash$ 120 121.101·1005. $\supset \vdash$ Hp $\supset . Nc^{\epsilon}\omega \varepsilon_1 g \;\; Nc^{\epsilon}(\omega \cup_{a} \iota^{\epsilon}{}_{a} u)\varepsilon_1 g$.

[120 215) $\supset \vdash$ Prop.

120·302 $\vdash . \exists_1 Nc^{\epsilon}\varkappa : (Nc^{\epsilon}\varkappa + 1) \underset{\Omega}{=} \wedge'' : \equiv : \varkappa \underset{a}{=} V_{(a)} : Red(\varkappa)$.

Dem $\vdash$ 110·631 $\supset \vdash \omega \varepsilon'(Nc^{\epsilon}\varkappa + 1) \equiv$

$(\exists \overline{u}) . \sim \overline{u} \varepsilon_a \varkappa . \omega \varepsilon' Nc^{\epsilon}(\varkappa \cup_{a} \iota^{\epsilon}{}_{a} \overline{u}) . \text{extens}[\Omega_{(a)}]\{\varkappa\}$. (1)

$\supset \vdash \sim \omega \varepsilon'(Nc^{\epsilon}\varkappa + 1) \equiv (\overline{u}) : \omega \varepsilon' Nc^{\epsilon}(\varkappa \cup_{a} \iota^{\epsilon}{}_{a} \overline{u}) . \text{extens}[\Omega_{(a)}]\{\varkappa\} . \supset \overline{u} \varepsilon_a \varkappa$.

$\vdash$. 10·271.10·1.

$\supset \vdash : (Nc^{\epsilon}\varkappa + 1) \underset{\Omega}{=} \wedge'' : \exists' Nc^{\epsilon}\varkappa$.

$\supset (\overline{u}) . (\varkappa \cup_{a} \iota^{\epsilon}{}_{a} \overline{u}) \varepsilon' Nc^{\epsilon}(\varkappa \cup_{a} \iota^{\epsilon}{}_{a} \overline{u}) \supset \overline{u} \varepsilon_a \varkappa$.

[103·13·12.101·1005.] $\supset (\overline{u}) \overline{u} \varepsilon_a \varkappa$

$\supset : \varkappa \underset{a}{=} V_{(a)} : Red(\varkappa)$. (2)

$\vdash$ (1) $\supset \vdash : \varkappa = V_{(a)} : Red(\varkappa) . \supset \sim \omega \varepsilon'(Nc^{\epsilon}\varkappa + 1)$

$\supset . (Nc^{\epsilon}\varkappa + 1) \underset{\Omega}{=} \wedge''$. (3)

[103·13] $\supset \exists' Nc^{\epsilon} \varkappa$ (4)

$\vdash$ (2) . (3) . (4) $\supset$ $\vdash$ Prop.

120·303 $\vdash \wedge'' \varepsilon_1 N_0 C$ induct $\supset Nc^{\epsilon}(\underset{a}{-}\wedge') \varepsilon_1 NC$ induct

Dem $\vdash$ 120·12 $\supset \vdash . H(g,0) . \sim Nc^{\epsilon}(\underset{a}{-}\wedge')\varepsilon_1 g . \supset (g \underset{1}{-} \iota^{\epsilon}{}_1 \wedge'')\{0\}$ (1)

[120·121·302] $\supset . (g - \iota^{\epsilon}{}_1 \wedge'')\{\sigma\} \supset (g \underset{1}{-} \iota^{\epsilon}{}_1 \wedge'')\{(\sigma+1)\}$. (2)

[. (1) . (2) .] $\supset H(\hat{\sigma}[(g \underset{1}{-} \iota^{\epsilon}{}_1 \wedge'')\{\hat{\sigma}\}], 0)$

$\supset \sim \wedge'' \varepsilon_1 NC$ induct (3)

$\vdash$. Transp. (33) . $\supset \vdash$ Hp $\supset . H(g,0) \supset Nc^{\epsilon}(\underset{a}{-}\wedge') \varepsilon_1 g$.

[120·01] $\supset \vdash$ Prop.

120·31 $\vdash . \exists'(Nc^{\epsilon}\varkappa + 1) : (Nc^{\epsilon}\varkappa + 1) \underset{\Omega}{=} (Nc^{\epsilon}\omega + 1) : \supset . Nc^{\epsilon}\varkappa \underset{\Omega}{=} Nc^{\epsilon}\omega$.

[110·63 . 73·72·3·32 . 103·14]

120·311 $\vdash . \exists'(\sigma+1) : (\sigma+1) \underset{\Omega}{=} (\tau+1) : \supset . \sigma \underset{\Omega}{=} \tau$.

[120·31 . 110·4 . 103·2]

120·32 $\vdash \sigma \varepsilon_1 (NC$ induct $\underset{1}{-} \iota^{\epsilon}{}_1 \wedge'') . \supset . \sigma \underset{\Omega}{\neq} (\sigma+1)$.

[101·22 . 110·64 . 120 311·11]

120·41 $\vdash . \exists'(\sigma+\tau) . \tau \varepsilon_1 NC$ induct $: (\sigma+\tau) \underset{\Omega}{=} (\sigma'+\tau) : \supset . \sigma \underset{\Omega}{=} \sigma'$.

Dem $\vdash$. 120·311 . 110·61 . 120·11 . $\supset \vdash$ Prop.

Remark: As we deal with numbers of the same type, the complicatad proof of Principia is here supplied by the simple application of 120·11 to the class:

$\hat{\tau}[:. \exists'(\sigma+\hat{\tau}) : (\sigma+\hat{\tau}) \underset{\Omega}{=} (\sigma'+\hat{\tau}) : \supset . \sigma \underset{\Omega}{=} \sigma' : \vee (\Phi \cap_1 \wedge_{(1)})\{\hat{\tau}\} .]$

120·411 $\vdash \sigma' \varepsilon_1 N_0 C$ induct $\supset : \exists'(\sigma-\sigma') \supset (\sigma-\sigma') \varepsilon_1 NC :$

$: \sigma \geqslant \sigma' . \equiv (\sigma - \sigma') \varepsilon_1 NC :$

[(119·01) . 120·41 . 119·14·27 . 103·2 .]

120·412 $\vdash . \sigma' \varepsilon_1 N_0 C$ induct$: \tau' \geqslant \sigma' : \supset . (\bar{\bar{\tau}}, \bar{\bar{\sigma}}) :. (\tau' - \sigma') \underset{\Omega}{=} \bar{\tau} :.$

$(\tau' - \sigma') \underset{\Omega}{=} \bar{\sigma} : \supset . \bar{\tau} \underset{\Omega}{=} \bar{\sigma} :. (\bar{\tau}, \bar{\sigma}) :. (\sigma' + \bar{\tau}) \underset{\Omega}{=} \tau' :. (\sigma' + \bar{\sigma}) \underset{\Omega}{=} \tau' : \supset . \bar{\tau} \underset{\Omega}{=} \bar{\sigma} :.$

[120·41·411 . 119·34]

120·413 $\vdash \sigma \varepsilon_1 NC \supset . (\sigma - 0) \underset{\Omega}{=} \sigma$. [(119·01) . 110·6]

120·414 $\vdash \sigma \varepsilon_1 (NC \underset{1}{-} \iota^{\epsilon}{}_1 0) \supset (\sigma - 1) \varepsilon_1 NC$ [117·53 . 120·411]

120·416 $\vdash . \sigma' \varepsilon_1 NC$ induct $. \exists'(\sigma - \sigma') . \supset . ((\sigma - \sigma') + \sigma') \underset{\Omega}{=} \sigma$.

[120·411 . 119·34]

120·417 $\vdash \sigma\varepsilon_1(NC \underset{1}{-} \iota'_1 0) \supset . (\sigma+\sigma') \underset{\Omega}{=} ((\sigma'+1)+(\sigma-1))$.

[120·414 . 119·35 .]

120·418 $\vdash . \sigma\varepsilon_1 NC \text{ induct} : \tau \geqslant \sigma : \supset . (\sigma'+\tau) \underset{\Omega}{=} ((\sigma'+\sigma)+(\tau+\sigma))$.

[120·411 . 119·35]

120·42 $\vdash . \sigma\varepsilon_1 NC \text{ induct} . \exists'\sigma : \sigma' \underset{\Omega}{\neq} 0 : \supset . \sigma \underset{\Omega}{\neq} (\sigma+\sigma')$.

[120·41·14]

120·422 $\vdash (\sigma+1)\varepsilon_1(N_0C\text{induct} \underset{1}{-} \iota'_1 \wedge'') \supset \sigma\varepsilon_1(N_0C\text{induct} \underset{1}{-} \iota'_1 \wedge'')$

Dem $\vdash . \exists'(\sigma+1) . H(g,0) . \sim\sigma\varepsilon_1 g . \supset . (g \underset{1}{-} \iota'_1(\sigma+1))\{0\}$ (1)

[120·41] $\supset (g \underset{1}{-} \iota'_1(\sigma+1))\{\tau\} \supset (g \underset{1}{-} \iota'_1(\sigma+1))\{(\tau+1)\}$. (2)

[(1).(2)] $\supset . H((g \underset{1}{-} \iota'_1(\sigma+1)),0) . \sim(g \underset{1}{-} \iota'_1(\sigma+1))\{(\sigma+1)\}$. (3)

$\vdash . 120·1 . (3) \supset \vdash . \exists'(\sigma+1) . H(g,0) . \sim\sigma\varepsilon_1 g . \supset$

$\sim(\sigma+1)\varepsilon_1(NC\text{ induct} \underset{1}{-} \iota'_1 \wedge'')$

[Transp] $\supset \vdash (\sigma+1)\varepsilon_1(NC\text{induct} \underset{1}{-} \iota'_1 \wedge'') \supset . H(g,0) \supset \sigma\varepsilon_1 g$. (4)

$\vdash$ 110·4 $\supset \vdash (\sigma+1)\varepsilon_1(\underset{1}{-} \iota'_1 \wedge'') \supset \exists'\sigma$ (5)

$\vdash$ (4).(5) $\supset \vdash$ Prop.

120·423 $\vdash \sigma\varepsilon_1(N_0C\text{induct} \underset{1}{-} \iota'_1 0) \equiv (\exists\bar{\tau}) . \bar{\tau}\varepsilon_1 N_0C\text{induct} : \sigma \underset{\Omega}{=} (\bar{\tau}+1)$:

Dem $\vdash . 120·14·414 . \supset \vdash . \sigma\varepsilon_1(N_0C\text{induct} \underset{1}{-} \iota'_1 0) . \exists'\sigma . \supset (\sigma-1)\varepsilon_1 NC$

[120·422] $\supset (\sigma-1)\varepsilon_1(NC\text{ induct} \underset{1}{-} \iota'_1 \wedge'')$

[120·416] $\supset (\exists\bar{\tau}) . \bar{\tau}\varepsilon_1 N_0C\text{ induct} : \sigma \underset{\Omega}{=} (\bar{\tau}+1)$: (1)

$\vdash$. Transp . 119·11 $\supset \vdash . \sigma\varepsilon_1(N_0C\text{ induct} \underset{1}{-} \iota'_1 0) : \sigma \underset{\Omega}{=} \wedge'' . \supset$

$: (\sigma-1) \underset{\Omega}{=} \wedge'' : (\sigma-1)\varepsilon_1 N_0C\text{ induct}$.

[Hp . 110·202] $\supset (\exists\bar{\tau}) . \bar{\tau}\varepsilon_1 N_0C\text{ induct} : \sigma \underset{\Omega}{=} (\bar{\tau}+1)$: (2)

$\vdash$ (1).(2) $\supset \vdash \sigma\varepsilon_1(N_0C\text{induct} \underset{1}{-} \iota'_1 0) \supset (\exists\bar{\tau}) . \bar{\tau}\varepsilon_1 N_0C\text{induct}$:

$\sigma \underset{\Omega}{=} (\bar{\tau}+1)$: (3)

$\vdash$ 120·422·124 $\supset \vdash (\exists\bar{\tau}) . \bar{\tau}\varepsilon_1 N_0C\text{induct} : \sigma \underset{\Omega}{=} (\bar{\tau}+1) : \supset$

$\sigma\varepsilon_1(N_0C\text{ induct} \underset{1}{-} \iota'_1 0)$ (4)

$\vdash$ (3) . (4) $\supset \vdash$ Prop.

120·4231 $\vdash\ \sigma\varepsilon_1 N_0 C\,\text{induct} \supset (\exists\bar\tau).\bar\tau\varepsilon_1(N_0 C\,\text{induct} \underset{1}{-} \iota'_1\Lambda''):.$
$(\sigma+1) \underset{\Omega}{=} (\bar\tau+1):$

Dem $\vdash :\text{Hp}.\exists'(\sigma+1) \supset (\exists\bar\tau).\bar\tau\varepsilon_1(NC\,\text{induct} \underset{1}{-} \iota'_1\Lambda''):.$
$(\sigma+1) \underset{\Omega}{=} (\bar\tau+1):$ (1)

$\vdash$ 120·302 303 $.\supset\vdash.\ \text{Hp}:(\sigma+1) \underset{\Omega}{=} \Lambda'':\supset$
$.\,Nc'(\underset{a}{-}\Lambda')\,\varepsilon_1(NC\,\text{induct} \underset{1}{-} \iota'_1\Lambda''):.(\sigma+1) \underset{\Omega}{=} (Nc'(\underset{a}{-}\Lambda')+1):$
$\supset(\exists\bar\tau).\bar\tau\varepsilon_1(N_0 C\,\text{induct} \underset{1}{-} \iota'_1\Lambda''):.(\sigma+1) \underset{\Omega}{=} (\bar\tau+1):$ (2)
$\vdash$ (1) . (2) . $\supset\vdash$ Prop.

120·4232 $\vdash\ \sigma\varepsilon_1(N_0 C\,\text{induct} \underset{1}{-} \iota'_1 0) \equiv (\exists\bar\tau).\bar\tau\varepsilon_1(N_0 C\,\text{induct} \underset{1}{-} \iota'_1\Lambda''):$
$\sigma \underset{\Omega}{=} (\bar\tau+1):$ [120·423·4231]

120·424 $\vdash :\sigma \underset{\Omega}{\neq} 0:\exists'(\tau+\sigma).\supset.((\tau+\sigma)-1) \underset{\Omega}{=} (\tau+(\sigma-1)).$
[110·42·62 . 120·414 . 110·4 . 120·416 . 110·56 . 120·311 .]

120·425 $\vdash\ (\sigma+\tau)\varepsilon_1(NC \underset{1}{-} \iota'_1 0)\supset:((\sigma+\tau)-1) \underset{\Omega}{=} (\sigma+(\tau-1)).\vee.$
$.((\sigma+\tau)-1) \underset{\Omega}{=} ((\sigma-1)+\tau):$ [110·62 . 120·424 . 103·2 .]

120·426 $\vdash .\,\varkappa\varepsilon_1\,Cls_0\,\text{induct}:\varkappa \underset{a}{\subset} \omega:\exists_a(\omega \cap_a - \varkappa).\exists' Nc'\omega.$
$\supset: Nc'\varkappa < Nc'\omega:\sim\omega\, sm\,\varkappa.$
[110·14 . 101·14 . 120·42 . (117·05) .]

120·427 $\vdash .\,R\varepsilon 1 \underset{a}{\rightarrow} 1: G_a R \subset D_a R:\exists_a(D_a R \underset{a}{-} G_a R).\mathfrak{C}\{R, C\}.$
$Red\,(D_a R).\supset\sim D_a R\varepsilon' Cls_0\,\text{induct}$
[120·426 . Transp .]

120·428 $\vdash .\,\sigma\varepsilon_1 N_0 C\,\text{induct}.\exists'(\sigma+\tau):\tau \underset{\Omega}{\neq} 0:\supset.(\sigma+\tau)>\sigma.$
[117·511 . 110·4 . 117·561 . 120·42 .]

120·429 $\vdash\ \sigma\varepsilon_1 N_0 C\,\text{induct}\supset:\tau>\sigma.\equiv.\tau\geqslant(\sigma+1).$
[120·428 . 117·47 31 531]

120·43 $.\ \sigma\,\text{spec}\,\tau.\underset{df}{=}:\sigma<\tau.\vee.\sigma\geqslant\tau:$

120·432 $\vdash .\,\sigma\,\text{spec}\,\tau\equiv:\sigma\leqslant\tau.\vee.\sigma\geqslant\tau:$ [117·281]

120·436 $\vdash .\,\sigma\,\text{spec}\,\sigma'.\equiv.\sigma,\sigma'\varepsilon_1 NC.(\exists\bar\tau):.(\sigma+\bar\tau) \underset{\Omega}{=} \sigma'.\vee.(\sigma'+\bar\tau) \underset{\Omega}{=} \sigma:$
$.\,\mathfrak{C}\{\bar\tau, 1\}:$[120·432 . 117·31 .]

120·437 $\vdash\ \sigma\varepsilon_1 NC\supset.0\,\text{spec}\,\sigma.$ [120·432 . 117·281]

120·438 $\vdash .\,\sigma\,\text{spec}\,\tau.\exists'(\sigma+1).\supset.(\sigma\quad 1)\,\text{spec}\,\tau.$
[120·436·417 . 110·4·61 .]

120·44 $\vdash . \sigma\varepsilon_1 NC . \tau\varepsilon_1(N_0 C \text{induct} \underset{1}{-} \iota'_1 \wedge''). \supset \tau \,\text{spec}\, \sigma.$

[120·437·438 . 110·4 .]

120·442 $\vdash . \sigma\varepsilon_1(NC \text{induct} \underset{1}{-} \iota'_1 \wedge''). \tau\varepsilon_1 NC . \supset$

$: \sigma < \tau . \equiv \sim . \sigma \geqslant \tau :: . \sigma > \tau . \equiv \sim . \sigma \leqslant \tau :.$

[120·44 . 117·281 .]

120·443 $\vdash \mathfrak{C}\{\Phi, \hat{\sigma}[. \Phi\{(\tau' + \hat{\sigma})\} . \mathfrak{C}\{\tau', \hat{\sigma}, 1\}.]\}$

Constr.

$\vdash .12·1 . 0·261 . \supset \vdash \mathfrak{C}\{\hat{\tau}[. \Phi\{\sigma'\} | \Phi\{\hat{\tau}\}.], \hat{\tau}[. \Phi\{\sigma'\} | \Phi\{\hat{\tau}\}\,]\}$

$[0·41·441 . 0·243] \supset \mathfrak{C}\{\hat{\tau}[. \Phi\{\sigma'\} | \Phi\{\hat{\tau}\}.], \hat{\tau}[: \Phi\{(\tau' + \sigma')\} \; \mathfrak{C}\{\tau', \sigma', 1\}. | \Phi\{\tau\}.]\}$

$[0·23·26·261] \supset \vdash \mathfrak{C}\{\hat{\sigma}[. \Phi\{\hat{\sigma}\} | \Phi\{\tau\}.], \hat{\sigma}[: \Phi\{\tau' + \hat{\sigma})\} \; \mathfrak{C}\{\tau', \hat{\sigma}', 1\}. | \Phi\{\tau\}\,]\}$

$[0·2411] \supset \vdash$ Prop.

We prove in a similar manner:

120·444 $\vdash \mathfrak{C}\{\Phi, \hat{\sigma}[. \Phi\{(\tau' \times \hat{\sigma})\} . \mathfrak{C}\{\tau', \hat{\sigma}, 1\}\,]\}$

120·445 $\vdash \mathfrak{C}\{\Phi, \hat{\sigma}[\; \Phi\{\tau^{\hat{\sigma}})\} \; \mathfrak{C}\{\tau, \hat{\sigma}, 1\}.]\}$

120·446 $\vdash \mathfrak{C}\{\Phi, \hat{\sigma}[. \Phi\{\tau^{(\tau' + \hat{\sigma})}\} . \mathfrak{C}\{\tau, \tau', \hat{\sigma}, 1\}.]\}$

120·447 $\vdash \mathfrak{C}\{\hat{\sigma}[(\bar{\tau}) . N_0 C \text{induct}\{(\bar{\tau} + \hat{\sigma})\} . \mathfrak{C}\{\bar{\tau}, \hat{\sigma}, 1\}\,], N_0 C \text{induct}\}$

Constr.

$\vdash 12·3121·3122 . \supset \vdash \mathfrak{C}\{\hat{\sigma}[(\bar{h}) : (\tau' + \hat{\sigma})\varepsilon_1 \bar{h} | (\bar{\tau}) . (\bar{\tau} + \hat{\sigma})\varepsilon_1 \bar{h} | \mathfrak{C}\{\tau', \bar{\tau}, \hat{\sigma}, 1\}:$

$| \mathfrak{C}\{\bar{h}, \Phi\}.], N_0 C \text{induct}\}$

$[0·27·12·2421] \supset \vdash \mathfrak{C}\{\hat{\sigma}[(\bar{h})(\bar{\tau}) : (\tau' + \hat{\sigma})\varepsilon_1 \bar{h} | \; (\bar{\tau} + \hat{\sigma})\varepsilon_1 \bar{h} | \mathfrak{C}\{\tau', \bar{\tau}, \hat{\sigma}, 1\}:$

$| \mathfrak{C}\{\bar{h}, \Phi\}.], N_0 C \text{induct}\}$

$[12·5] \supset \vdash \mathfrak{C}\{\hat{\sigma}[(\bar{h})(\bar{\tau})(\tau') : (\bar{\tau}' + \hat{\sigma})\varepsilon_1 \bar{h} | . (\bar{\tau} + \hat{\sigma})\varepsilon_1 \bar{h}' | \mathfrak{C}\{\bar{\tau}', \bar{\tau}, \hat{\sigma}, 1\}:$

$| \mathfrak{C}\{\bar{h}, \Phi\}.], N_0 C \text{induct}\}$

$[0·24·27 . 12·51 .] \supset \vdash \mathfrak{C}\{\hat{\sigma}[(\bar{\tau})(\bar{h}) : (\bar{\tau} + \hat{\sigma})\varepsilon_1 \bar{h} | (\bar{\tau}') . (\bar{\tau} + \hat{\sigma})\varepsilon_1 \bar{h} | \mathfrak{C}\{\bar{\tau}', \bar{\tau}, \hat{\sigma}, 1\}:$

$| \mathfrak{C}\{\bar{h}, \Phi\}.], N_0 C \text{induct}\}$

$[(1) . 120·443] \supset \vdash$ Prop.

120·45 $\vdash . H(g, 0) . \sigma\varepsilon_1 g . \tau\varepsilon_1 N_0 C \text{induct} . \mathfrak{C}\{g, \Phi\} . \supset (\sigma + \tau)\varepsilon_1 g$

Dem $\vdash . 110·6·02 . 103·23 . \supset \vdash \text{Hp} \supset (\sigma + 0)\varepsilon_1 g$ (1)

$\vdash . 120·121 . 110·56 . \supset \vdash \text{Hp} \supset : (\sigma + \sigma')\varepsilon_1 g \supset (\sigma + (\sigma' + 1))\varepsilon_1 g : \mathfrak{C}\{\sigma', 1\}.$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash \text{Hp} \supset H(\hat{\sigma}'[. g\{(\sigma + \hat{\sigma}')\} . \mathfrak{C}\{\hat{\sigma}', \sigma, 1\}.], 0)$

$[120·1·443] \qquad \supset g\{(\sigma + \tau)\}$

$[\text{Hp} . 20·042 .] \supset \vdash$ Prop.

Remark that this proposition is much more general than its correlate of Principia. We shall see its importance for the further development of our theory.

120·4502 $\vdash \sigma, \tau \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} \supset (\sigma + \tau) \varepsilon_1 N_0 C \text{induct}$

Dem $\vdash$ 120·45 $\supset \vdash . \text{Hp} . H(g,0) . \mathfrak{C}\{g, \Phi\} . \supset (\sigma + \tau) \varepsilon_1 g$

[120·1] $\supset \vdash$ Prop.

120·451 $\vdash . (\bar{\sigma}, \bar{\tau}) :. \sigma'' \underset{\Omega}{=} (\bar{\sigma} + \bar{\tau}) : H(g,0) . \supset \bar{\sigma}\, \bar{\tau} \varepsilon_1 (g \underset{1}{-} \iota^{\epsilon}_1 \wedge'') : \exists'(\sigma'' + 1).$

$\mathfrak{C}\{\sigma', \tau', 1\} : (\sigma'' + 1) \underset{\Omega}{=} (\sigma' + \tau') : \supset \sigma', \tau' \varepsilon_1 (g \underset{1}{-} \iota^{\epsilon}_1 \wedge'')$

[120·414·124·425 . 110·42 . 119·32·11 .]

120·452 $\vdash . (\sigma + \tau) \varepsilon_1 (N_0 C \text{induct} \underset{1}{-} \iota^{\epsilon}_1 \wedge'') . H(g,0) . \supset \sigma, \tau \varepsilon_1 (g \underset{1}{-} \iota^{\epsilon} \wedge'')$

Dem $\vdash$. 120·451·12 . 110·62 . $\supset$

$\vdash \text{Hp} \supset H(\hat{\sigma}'[(\bar{\sigma}'', \bar{\tau}'') :. \hat{\sigma}' \underset{\Omega}{=} \wedge'' . \vee . \sigma' \underset{\Omega}{=} (\bar{\sigma}'' + \bar{\tau}'') :. \mathfrak{C}\{\hat{\sigma}', 1\} . \supset .$

$(g \underset{1}{-} \iota^{\epsilon}_1 \wedge'') \{\bar{\tau}''\} . (g \underset{1}{-} \iota^{\epsilon}_1 \wedge'') \{\bar{\sigma}''\} .], 0)$

[120·12] $\supset \vdash \text{Hp} \supset :. \sigma' \underset{\Omega}{=} \wedge'' . \vee . \sigma' \underset{\Omega}{=} (\sigma + \tau) : \supset \sigma, \tau \varepsilon_1 (g \underset{1}{-} \iota^{\epsilon}_1 \wedge'').$

$\supset :. (\sigma + \tau) \underset{\Omega}{=} \wedge'' . \vee . (\sigma + \tau) \underset{\Omega}{=} (\sigma + \tau) : \supset \sigma, \tau \varepsilon_1 (g \underset{1}{-} \iota^{\epsilon}_1 \wedge'').$

$\supset \vdash$ Prop.

120·46 $\vdash . \sigma \varepsilon_1 (NC \cup_1 \iota^{\epsilon}_1 \wedge'') . \tau \varepsilon_1 NC \text{induct} . H(g, \sigma) . \supset (\sigma + \tau) \varepsilon_1 g$

Dem $\vdash$ 110·6 $\supset \vdash \text{Hp} \supset g\{(\sigma + 0)\}$ (1)

$\vdash$ 110·56 $\supset \vdash \text{Hp} \supset H(\hat{\tau}'[. g\{(\sigma + \hat{\tau}')\} . \mathfrak{C}\{\hat{\tau}', 1\}], 0)$

[Hp] $\supset g\{(\sigma + \tau)\}$

[Hp . 20·042 .] $\supset \vdash$ Prop.

120·4601 $\vdash . \sigma' \varepsilon_1 (NC \cup_1 \iota^{\epsilon}_1 \wedge'') . (\bar{g}) : H(\bar{g}, \sigma') \supset \tau \varepsilon_1 \bar{g} : \mathfrak{C}\{\bar{g}, \Phi\} :$

$\supset (\exists\bar{\sigma}) : \tau \underset{\Omega}{=} (\sigma' + \bar{\sigma}) : \mathfrak{C}\{\bar{\sigma}, 1\}.$

Dem $\vdash$ 110·61 $\supset \vdash \text{Hp} \supset . \sigma' \underset{\Omega}{=} (\sigma' + 0).$

$\supset (\exists\bar{\sigma}) : \sigma' \underset{\Omega}{=} (\sigma' + \bar{\sigma}) : \mathfrak{C}\{\bar{\sigma}, 1\}.$

$\vdash$ 110·56 $\supset \vdash \text{Hp} \supset : \tau \underset{\Omega}{=} (\sigma' + \sigma) . \supset . (\tau + 1) \underset{\Omega}{=} (\sigma' + (\sigma + 1)) :$

$\supset . (\exists\bar{\sigma}) : \tau \underset{\Omega}{=} (\sigma' + \bar{\sigma}) : \mathfrak{C}\{\bar{\sigma}, 1\} . \supset (\exists\bar{\sigma}) : (\tau + 1) \underset{\Omega}{=} (\sigma' + \bar{\sigma} : \mathfrak{C}\{\bar{\sigma}, 1\}.$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash \text{Hp} \supset$

$H(\hat{\tau}[. (\exists\bar{\sigma}) : \hat{\tau} \underset{\Omega}{=} (\sigma' + \bar{\sigma}) : \mathfrak{C}\{\bar{\sigma}, \hat{\tau}, 1\} . \vee (\Phi \cap_1 \wedge_{(1)}) \{\hat{\tau}\} .], 0)$

[Hp] $\supset \vdash$ Prop

120·461 $\vdash . \sigma' \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} . (\bar{g}) : H(\bar{g}, \sigma') \supset \tau \varepsilon_1 \bar{g} : \mathfrak{C}\{\bar{g}, \Phi\} :$

$\supset (\exists\bar{\sigma}) . \bar{\sigma} \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} : \tau \underset{\Omega}{=} (\sigma' + \bar{\sigma}) :$

Dem $\vdash$ 120·11 $\supset \vdash . \text{Hp} . H(g, 0) . \mathfrak{C}\{g, \Phi\} . \supset H(g, \sigma')$

$\supset \vdash \text{Hp} \supset :. H(g, \sigma') \supset \tau \varepsilon_1 g . \supset . H(g, 0) \supset \iota \varepsilon_1 g :. \mathfrak{C}\{g, \Phi\}.$

$\supset \tau \varepsilon_1 N_0 C \text{induct}$

$[120{\cdot}4601] \supset . \tau \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} \ (\exists \bar{\sigma}) : \tau \underset{\Omega}{=} (\sigma' + \bar{\sigma}) : \mathfrak{C}\{\bar{\sigma}', 1\} :$ (1)

$\vdash .(1).120{\cdot}452.\supset \vdash . \text{Hp} . \exists' \tau . \supset (\exists \bar{\sigma}) . \bar{\sigma} \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} : \tau \underset{\Omega}{=} (\sigma' + \bar{\sigma}) :$ (2)

$\vdash \text{Hp} \supset \vdash . \text{Hp} : \tau \underset{\Omega}{=} \wedge'' : \supset \wedge'' \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} : \tau \underset{\Omega}{=} (\sigma' + \wedge'') :$

$\supset (\exists \bar{\sigma}) . \bar{\sigma} \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} : \tau \underset{\Omega}{=} (\sigma' + \bar{\sigma}) :$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash$ Prop.

120·4611 $\vdash . \sigma' \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} . (\exists \bar{\sigma}) . \bar{\sigma} \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} : \tau \underset{\Omega}{=} (\sigma' + \bar{\sigma}) :$

$\supset (\bar{g}) : H(\bar{g}, \sigma') \supset \tau \varepsilon_1 \bar{g} : \mathfrak{C}\{\bar{g}, \Phi\}.$

Dem $\vdash . \mathfrak{C}\{g, \Phi\} . H(g, \sigma') . \sigma', \sigma \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} : \tau = (\sigma' + \sigma) : \supset g\{\sigma' + 0)\}$ (1)

[110·56] $\supset . g\{(\sigma' + \tau')\} \supset g\{(\sigma' + (\tau' + 1))\}.$ (2)

$\supset H(\hat{\tau}'[. g\{(\sigma' + \hat{\tau}')\} . \mathfrak{C}\{\tau', 1\} .], 0)$

[120·11] $\supset g\{(\sigma' + \sigma)\}$

[Hp] $\supset g\{\tau\}$ (3)

$\vdash (3) \supset \vdash . \sigma', \sigma \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} : \tau \underset{\Omega}{=} (\sigma' + \sigma) : \supset : H(g, \sigma') \supset \tau \varepsilon_1 g : \mathfrak{C}\{g, \Phi\}.$

$\supset \vdash$ Prop.

120·463 $\vdash \sigma' \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} \supset . (\exists \bar{\sigma}) . \bar{\sigma} \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} : \tau \underset{\Omega}{=} (\sigma' + \bar{\sigma}) : \equiv$

$(\bar{g}) : H(\bar{g}, \sigma) \supset \tau \varepsilon_1 \bar{g} : \mathfrak{C}\{\bar{g}, \Phi\} :$

Dem $\vdash . 120{\cdot}461{\cdot}4611 . \supset \vdash$ Prop.

120·47 $\vdash \tau \varepsilon (N_0 C \text{ induct} \underset{1}{-} \iota^{\epsilon}_1 0) \equiv (\bar{g}) : H(\bar{g}, 1) \supset \tau \varepsilon_1 \bar{g} : \mathfrak{C}\{\bar{g}, \Phi\}.$

[120·423·463]

120·471 $\vdash (\exists \bar{\sigma}) . \bar{\sigma} \varepsilon_1 (N_0 C \text{induct} \underset{1}{-} \iota^{\epsilon}_1 0) . \bar{\sigma} \varepsilon_1 f . \equiv$

$(\exists \bar{\sigma}) . \bar{\sigma} \varepsilon N_0 C \text{induct} . (\bar{\sigma} + 1) \varepsilon_1 f :$

[120·423]

120·48 $\vdash . \sigma \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} : \sigma \geqslant \tau : \supset \tau \varepsilon_1 (N_0 C \text{induct} \underset{1}{-} \iota^{\epsilon}_1 \wedge'')$

[120·452 . 117·31 .]

120·481 $\vdash . \varkappa \varepsilon' Cls_0 \text{ induct} : \omega \underset{0}{\subset} \varkappa : \exists' Nc^{\epsilon} \omega . \supset \omega \varepsilon' Cls_0 \text{ induct}$

[120·21·48]

120·49 $\vdash . \sigma \varepsilon_1 (NC \underset{1}{-} N_0 C \text{induct}) \ \tau \varepsilon (N_0 C \text{induct} \underset{1}{-} \iota^{\epsilon}_1 \wedge'') .$

$\supset . \sigma > \tau .$

[120·48·44]

To prove the theorem 120·13, I assume the following temporary definition:

120·013 $H_0(g . 0) \underset{df}{=} . O \varepsilon_1 g . (\bar{\tau}) : \bar{\tau} \varepsilon_1 g . \tau \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} . \supset$

$(\bar{\tau} + 1) \varepsilon_1 g : \mathfrak{C}\{g, \Phi\}.$

We now have:

120·13 $\vdash . \sigma\varepsilon_1 N_0 C\,\text{induct} . H_0(g.0) . \supset \sigma\varepsilon_1 g$

Dem $\vdash . 120{\cdot}124{\cdot}48 . \supset$

$\vdash . \text{Hp} . \sim\sigma\varepsilon_1 g . \supset : \tau\varepsilon_1 g : \tau \leqslant \sigma : \supset \tau\varepsilon_1 N_0 C\,\text{induct} .$

$[22{\cdot}621] \supset : \tau\varepsilon_1 g : \tau \leqslant \sigma : \equiv . \tau\varepsilon_1 g : \tau < \sigma : \tau\varepsilon_1 N_0 C\,\text{induct} :$ (1)

$\vdash . 117{\cdot}501 . 120{\cdot}14 . (1) . \supset \vdash . \text{Hp} . \sim\sigma\varepsilon_1 g . \supset 0\varepsilon_1 g : 0 \leqslant \sigma :$ (2)

$\vdash . (1) . 120{\cdot}429 . \supset \vdash . \text{Hp} . \sim\sigma\varepsilon_1 g . \supset$

$: \tau\varepsilon_1 g : \tau \leqslant \sigma : \supset . (\tau + 1)\varepsilon_1 g : (\tau + 1) \leqslant \sigma :.$ (3)

$\vdash . (2) . (3) . 120{\cdot}11 . \supset \vdash . \text{Hp} . \sim\sigma\varepsilon_1 g . \supset \sigma\varepsilon_1 g$

$\supset \vdash$ Prop.

120·23 $\vdash . \wedge'\varepsilon' h . J(h) . \complement\{h, \hat{\omega}[\Phi\{Nc'\omega\}]\} . \supset . Cls_0\,\text{induct} \subset_{\Omega} h .$ [120·222·13]

120·24 $\vdash \omega\varepsilon' Cls_0\,\text{induct} \equiv (\bar{h}) :: \wedge'\varepsilon'\bar{h} . J(\bar{h}) . \supset \omega\varepsilon'\bar{h} :$

$\complement\{\bar{h}, \hat{\omega}[\Phi\{Nc'\hat{\omega}\}]\} . \supset \omega\varepsilon'\bar{h} .$ [120·23·22]

120·2601 $J_0(h) =_{df} (\bar{\varkappa})(\bar{u}) :. \bar{\varkappa}\varepsilon' h . \bar{\varkappa}\varepsilon' Cls_0\,\text{induct} . \text{extens}(\bar{\varkappa}) .$

$\supset (\bar{\varkappa} \cup_a \iota'\bar{u})\varepsilon' h : \complement\{\bar{u}, a\} .$

120·261 $\vdash . \omega\varepsilon_1 Cls_0\,\text{induct} . \wedge'\varepsilon' h . J_0(h) . \complement\{h\, \hat{\omega}[\Phi\{Nc'\hat{\omega}\}]\} \supset \omega\varepsilon' h$

Dem $\vdash . \text{Hp} . \sim\omega\varepsilon' h . \supset : \varkappa\varepsilon' h : Nc'\varkappa \leqslant Nc'\omega : \equiv .$

$\varkappa\varepsilon' h : Nc'\varkappa < Nc'\omega : \varkappa\varepsilon' Cls_0\,\text{induct} :$ (1)

$\vdash . 117{\cdot}501 . 120{\cdot}14 . (1) . \supset \vdash . \text{Hp} . \sim\omega\varepsilon' h . \supset . \wedge'\varepsilon' h : Nc'\wedge' \leqslant Nc'\omega :$ (2)

$\vdash . 101{\cdot}1005 . (1) . 120{\cdot}428 . \supset \vdash . \text{Hp} . \sim\omega\varepsilon' h . \supset$

$: \varkappa\varepsilon' h : Nc'\varkappa \leqslant Nc'\omega : \supset . (\varkappa \cup_a \iota'_a u)\varepsilon' h : Nc'(\varkappa \cup_a \iota' u) \leqslant Nc'\omega :.$ (3)

$\vdash . (2) . (3) . 120{\cdot}23 . \supset \vdash . \text{Hp} . \sim\omega\varepsilon' h . \supset \omega\varepsilon' h$

$\supset \vdash$ Prop.

120·473 $\vdash . \sigma\varepsilon_1(N_0 C\,\text{induct} \mathop{-}_1 \iota'_0 0) . 1\varepsilon_1 g . (\bar{\tau}) : \bar{\tau}\varepsilon_1 g .$

$\bar{\tau}\varepsilon_1 (N_0 C\,\text{induct} \mathop{-}_1 \iota'_1 0) . \supset (\bar{\tau} + 1)\varepsilon_1 g : \complement\{g, \Phi\} . \supset \sigma\varepsilon_1 g$

This proposition is to be proved by the same method as 120·13.

120·491 $\vdash \sim\varkappa\varepsilon' Cls_0\,\text{induct} \equiv (\bar{\sigma}) . \bar{\sigma}\varepsilon_1 NC\,\text{induct} \supset$

$(\exists\bar{\omega}) : \bar{\omega} \subset_{\Omega} \varkappa : \bar{\omega}\varepsilon'\bar{\sigma} :$

[120·49·429·13·121·21 . 101·11 . 117·42.]

120·493 $\vdash \varkappa\varepsilon' Cls_0\,\text{induct} \supset : Nc'\omega < Nc'\varkappa \equiv (\exists\bar{\omega}') . \bar{\omega}'\varepsilon' Nc'\omega :$

$\bar{\omega}' \subset_{\Omega} \varkappa : \sim\bar{\omega}'\varepsilon'\iota'_{\Omega}\varkappa :$ [120·481·426 . 73·37·3 . 1[illegible]14 .]

120·501 $\vdash \sigma, \tau\varepsilon_1 N_0 C\,\text{induct} \supset (\sigma \times \tau)\varepsilon_1 N_0 C\,\text{induct}$

Dem $\vdash . 120{\cdot}14 . 103{\cdot}23 . 113{\cdot}601 . \supset$

$\vdash \text{Hp} \supset : (\sigma \times 0) =_{\Omega} 0 . \vee : (\sigma \times 0) =_{\Omega} \sigma :. \sigma =_{\Omega} \wedge'' :.$

[120·12] $\vdash . \sigma \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} . H(g,0) . \supset g\{(\sigma \times 0)\}$ (1)

$\vdash$ 113 $\quad \supset \vdash . \sigma \underset{\Omega}{\neq} 0 . \supset . (\sigma \times (\tau' + 1)) \underset{\Omega}{=} ((\sigma \times \tau') + \sigma)$. (2)

$\vdash . (2) . 120{\cdot}45 . \supset \vdash : \sigma \underset{\Omega}{\neq} 0 : \text{Hp} . H(g,0) . \mathfrak{C}\{g, \Phi\} . \supset$

$. g\{(\sigma \times \tau')\} \supset g\{(\sigma \times (\tau' + 1))\}$. (3)

$\vdash (1) . (3) . \supset \vdash : \sigma \underset{\Omega}{\neq} 0 : \text{Hp} . H(g,0) . \mathfrak{C}\{g, \Phi\} .$

$\supset H(\hat{\tau}'[. g\{(\sigma \times \hat{\tau}')\} . \mathfrak{C}\{\hat{\tau}' . 1)\} .], 0)$

[120·11] $\quad \supset g\{(\sigma \times \tau)\}$ (4)

$\vdash$ 113·601 $\supset \vdash : \sigma \underset{\Omega}{=} 0 : \text{Hp} \supset (\sigma \times \tau) \varepsilon_1 N_0 C \text{induct}$ (5)

$\vdash . (4) . (5) . \supset \vdash$ Prop.

This is the second fundamental theorem concerning the group-properties of inductive numbers.

120·51 $\quad \vdash . \sigma, \sigma', \tau \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} : \tau \underset{\Omega}{\neq} 0 : \exists'(\tau \times \sigma) : (\tau \times \sigma) \underset{\Omega}{=} (\tau \times \sigma') :$

$\supset . \sigma \underset{\Omega}{=} \sigma'$.

[120·436·44 . 113·43·602·203 . 110·6 .]

120·511 $\quad \vdash . \sigma, \tau \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} : \tau \underset{\Omega}{\neq} 0 : \exists'\tau : (\tau \times \sigma) \underset{\Omega}{=} \tau : \supset . \sigma \underset{\Omega}{=} 1$.

[120·51 . 113·621.]

120·512 $\quad \vdash (\sigma \times \tau) \varepsilon_1 ((N_0 C \text{induct} \underset{1}{-} \iota_1^{\epsilon} 0) \underset{1}{-} \iota_1^{\epsilon} \wedge'')$

$\supset \sigma, \tau \varepsilon_1 ((N_0 C \text{induct} \underset{1}{-} \iota_1^{\epsilon} 0) \underset{1}{-} \iota_1^{\epsilon} \wedge'')$

[120·48 . 113·602·203 . 117·62 .]

120·513 $\quad \vdash . \tau \varepsilon_1 ((N_0 C \text{induct} \underset{1}{-} \iota_1^{\epsilon} 0) \underset{1}{-} \iota_1^{\epsilon} \wedge'') : (\tau \times \sigma) = \tau :$

$\supset . \sigma \underset{\Omega}{=} 1$. [120·511·512]

The axiom of infinity is to be defined as follows:

120·03 $\quad \text{Infin}_0 ax \underset{df}{=} (\bar{\sigma}) . \bar{\sigma} \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} \supset \exists' \bar{\sigma}$.

120·031 $\quad \text{Infin}\, ax \underset{df}{=} (\bar{\sigma}) . \bar{\sigma} \varepsilon_1 NC \text{induct} \supset \exists' \bar{\sigma}$.

We have the following propositions:

120·321 $\quad \vdash . \sigma \underset{\Omega}{\neq} (\sigma + 1) . \supset \exists' \sigma$ [110·4]

120·322 $\quad \vdash \sigma \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} \supset . \exists' \sigma \equiv . \sigma \underset{\Omega}{\neq} (\sigma + 1)$: [120·32·321]

120·33 $\quad \vdash \text{Infin}_0 ax = (\bar{\sigma}) . \bar{\sigma} \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} \supset . \bar{\sigma} \underset{\Omega}{\neq} (\bar{\sigma} + 1)$: [120·322]

125·12 $\quad \vdash \text{Infin}_0 ax \equiv (\bar{\sigma}) . \bar{\sigma} \varepsilon_1 N_0 C \text{induct} \supset \exists'(\bar{\sigma} + 1)$.

[120·423)

125·15 $\quad \vdash \text{Infin}_0 ax \equiv (\bar{\varkappa}) . \bar{\varkappa} \varepsilon_1 Cls_0 \text{induct} \supset \exists_a(\underset{a}{-} \bar{\varkappa})$.

[120·13·21·426 . 125·12.]

125·21 $\vdash$ $\text{Infin}_0\, ax \equiv \sim (\underset{a}{-}\wedge')\, \varepsilon' Cls_0\, \text{induct}$ [125·15]

125·211 $\vdash$ $\text{Infin}\, ax \equiv \sim (\underset{a}{-}\wedge')\, \varepsilon' Cls\, \text{induct}$

I shall use the following abbreviations:

120·51401 $(\sigma + \sigma' + \tau) \underset{df}{=} ((\sigma + \sigma') + \tau)$

120·5141 $(\sigma + \sigma' - \tau) \underset{df}{=} ((\sigma + \sigma') - \tau)$

120·5142 $(\sigma - \sigma' - \tau) \underset{df}{=} ((\sigma - \sigma'(- \tau)$

120·5143 $(\sigma - \sigma' - \tau' + \tau'') \underset{df}{=} ((\sigma - \sigma') - \tau' + \tau'')$

120·5144 $\vdash$ $\sigma \varepsilon_1 N_0 C\, \text{induct} \supset . (\sigma - \sigma) \underset{\Omega}{=} 0 .$

[110·6 . 120·412·48 .]

120·5145 $\vdash$ $. \sigma' \varepsilon_1 N_0 C\, \text{induct} . \exists' (\sigma' - (\sigma + 1)) . \supset .$

$(\sigma' - (\sigma + 1)) \underset{\Omega}{=} (\sigma' - \sigma - 1) .$

Dem $\vdash$. 120·411·48 . 119·34 . $\supset \vdash$ Hp $\supset . (\sigma' - (\sigma + 1) + (\sigma + 1)) \underset{\Omega}{=} \sigma'$.

[110·51·56] $\supset . ((\sigma' - (\sigma + 1) + 1) + \sigma) \underset{\Omega}{=} \sigma'$. (1)

[110·6 . 120·5144 .] $\supset . (\sigma' - (\sigma + 1) + 1) \underset{\Omega}{=} (\sigma' - \sigma)$. (2)

$\vdash$. (1) . (2) . 119·45 . $\supset \vdash$ Prop.

120·5146 $\vdash$ $. \sigma' \varepsilon_1 N_0 C\, \text{induct} . \exists' (\sigma' - (\sigma + 1)) . \supset$

$. (\sigma' + 1 - (\sigma + 1)) \underset{\Omega}{=} (\sigma' - \sigma) .$

Dem $\vdash$ 110·51 $\supset \vdash$ Hp $\supset . (\sigma' + 1 - (\sigma + 1)) \underset{\Omega}{=} (1 + \sigma' - (\sigma + 1))$.

[119·32] $\underset{\Omega}{=} (1 + (\sigma' - (\sigma + 1)))$.

[120·5145] $\underset{\Omega}{=} (1 + (\sigma' - \sigma - 1))$.

[110·51 . (120·5141) . (120·5143) .] $\underset{\Omega}{=} (\sigma' - \sigma - 1 + 1)$.

[119·34] $\supset \vdash$ Prop.

120·515 $\vdash$. $\text{Infin}\, ax$.

$(\bar{g}) :. H(\bar{g}, 0) : g \underset{1}{\subset} (N_0 C\, \text{induct} \underset{1}{-} \iota'_1 \wedge'') : \supset \bar{g} \{\sigma\} : \mathfrak{C}\{\bar{g}, N_0 C\, \text{induct}\} :$

$\supset \sigma \varepsilon_1 NC\, \text{induct}$

Dem $\vdash$. 3·47 . (120·001) . $\supset \vdash$. $H(g, 0) . H(g', 0) . \supset H((g \cap_1 g'), 0)$ (1)

$\vdash$ (1) $\supset \vdash$ Hp $\supset : H(g', 0) : g' \underset{1}{\subset} (N_0 C\, \text{induct} \underset{1}{-} \iota'_1 \wedge'') : \mathfrak{C}\{g', N_0 C\, \text{induct}\}$.

$\supset . H(g, 0) \supset (g \cap_1 g') \{\sigma\} :$

$\supset g \{\sigma\} :$

$\supset \vdash$ Hp $\supset : H(g', 0) : g' \underset{1}{\subset} (N_0 C\, \text{induct} \underset{1}{-} \iota'_1 \wedge'') : \mathfrak{C}\{g', N_0 C\, \text{induct}\}$.

$\supset \sigma \varepsilon_1 NC\, \text{induct}$. (2)

$\vdash 120{\cdot}1011 \supset \vdash \mathrm{Hp} \supset . \sigma \varepsilon_1 NC\,\mathrm{induct} \supset \sigma \varepsilon_1 (N_0 C\,\mathrm{induct} \underset{1}{-} \iota'_1 \wedge'')$.

$[\mathrm{Transp}] \supset \vdash . \sim \sigma \varepsilon_1 (N_0 C\,\mathrm{induct} \underset{1}{-} \iota'_1 \wedge'') . \mathrm{Hp} . \supset \sim \sigma \varepsilon_1 NC\,\mathrm{induct}$

$\supset \vdash \mathrm{Hp} \supset (\exists \bar{g}) . H(\bar{g}, 0) : \bar{g} \underset{1}{\subset} (N_0 C\,\mathrm{induct} \underset{1}{-} \iota' \wedge'') : \mathfrak{C}\{\bar{g}, N_0 C\,\mathrm{induct}\}$ (3)

$\vdash . (2) . (3) . \supset \vdash$ Prop.

120·51501 $\vdash \mathrm{Infin}\,ax \supset . (\bar{g}) :. H(\bar{g}, 0) : \bar{g} \underset{1}{\subset} (N_0 C\,\mathrm{induct} \underset{1}{-} \iota'_1 \wedge'') :$

$\supset \bar{g}\{\sigma\} \; \mathfrak{C}\{\bar{g} . N_0 C\,\mathrm{induct}\} . \equiv \sigma \varepsilon_1 NC\,\mathrm{induct}$. [120·515 . 2·05.]

I shall use the following abbreviations:

120·5151 $\sigma^{\sigma' + \tau} \underset{df}{=} \sigma^{(\sigma' + \tau)}$

120·5152 $\sigma^{\sigma' - \tau} \underset{df}{=} \sigma^{(\sigma' - \tau)}$

120·51521 $g\{\sigma + \tau\} \underset{df}{=} g\{(\sigma + \tau)\}$

120·5153 $g_*(\tau', \sigma) \underset{df}{=} . g\{\tau' + 2^{\sigma' - \sigma}\} . \sim g\{\tau' + 2^{\sigma' + 1 - \sigma}\} . \mathfrak{C}\{\tau', \sigma, 1\}$.

120·516 $\vdash . \mathrm{Infin}\,ax . \sigma' \varepsilon_1 NC\,\mathrm{induct} . H(g . 0) :$

$g \underset{1}{\subset} (N_0 C\,\mathrm{induct} \underset{1}{-} \iota'_1 \wedge'') : \mathfrak{C}\{g . N_0 C\,\mathrm{induct}\}$.

$\supset . g\{2^{\sigma'}\} \supset g\{2^{\sigma' + 1}\}$.

$\vdash 110{\cdot}61 \supset \vdash . \mathrm{Hp} . g_*(0,0) . \supset g_*(0,0)$

[10·24] $\supset (\exists \bar{\tau}') g_*(\bar{\tau}', 0)$ (1)

$\vdash . 120{\cdot}5146 . 110{\cdot}51 . \supset \vdash . \mathrm{Hp} . g_*(0,0) . \supset$

$g_*(\tau'', \sigma) . \sim g\{\tau'' + 2^{\sigma' - \sigma} + 2^{\sigma' - (\sigma+1)}\} . \supset \sim g\{\tau'' + 2^{\sigma' - (\sigma+1)} + 2^{(\sigma'+1) - (\sigma+1)}\}$. (2)

[Hp . 113·66 . 116·52·32 . 120·5145 .] $\supset g\{\tau'' + 2^{\sigma' - (\sigma+1)} + 2^{\sigma' - (\sigma+1)}\}$. (3)

[(2) . (3) . 10·24 .] $\supset (\exists \bar{\tau}') g_*(\bar{\tau}', (\sigma + 1))$ (4)

$\vdash . 120{\cdot}5146 . 113{\cdot}66 . 116{\cdot}52{\cdot}32 . \supset \vdash . \mathrm{Hp} . g_*(0,0) . \supset$

$: g_*(\tau'', \sigma) . g\{\tau'' + 2^{\sigma' - \sigma} + 2^{\sigma' - (\sigma+1)}\} . \supset \sim g\{\tau'' + 2^{\sigma' - \sigma} + 2^{\sigma' + 1 - (\sigma+1)}\}$.

[10·24] $\supset (\exists \bar{\tau}') g_*(\bar{\tau}', (\sigma + 1))$ (5)

$\vdash . (4) . (5) . \supset \vdash . \mathrm{Hp} . g_*(0,0) . \supset . g_*(\tau'', \sigma) \supset (\exists \bar{\tau}') g_*(\bar{\tau}', (\sigma + 1))$.

[10·24] $\supset . (\exists \bar{\tau}') g_*(\bar{\tau}', \sigma) \supset (\exists \bar{\tau}') g_*(\bar{\tau}', (\sigma + 1))$.

[(1) . 120·515·447 .] $\supset (\exists \bar{\tau}') g_*(\bar{\tau}', \sigma')$

[(120·5153) . 120·5144 .] $\supset (\exists \bar{\tau}') . g\{\bar{\tau}' + 2^0\} . \sim g\{\bar{\tau}' + 2^1\} . \mathfrak{C}\{\bar{\tau}', 1\}$.

[116·32·301] $\supset (\exists \bar{\tau}') . g\{\bar{\tau}' + 1\} . \sim g\{\bar{\tau}' + 2\} . \mathfrak{C}\{\bar{\tau}', 1\})$.

[Transp] $\supset \vdash \mathrm{Hp} \supset \sim g_*(0,0)$

$\supset \vdash$ Prop.

120·517 $\vdash . \mathrm{Infin}\,ax . \sigma' \varepsilon_1 NC\,\mathrm{induct} . H(g, 0) . \mathfrak{C}\{g, N_0 C\,\mathrm{induct}\}$.

$\supset g\{2^{\sigma'}\}$

Dem $\vdash 116{\cdot}301 \supset \vdash \mathrm{Hp} \supset g\{2^0\}$ (1)

$\vdash 120{\cdot}516 \supset \vdash . \mathrm{Hp} : g \underset{1}{\subset} (N_0 C \text{induct} \underset{1}{-} \iota'_1 \wedge'') : \supset$

$: g\{2^\sigma\} . \sigma \varepsilon_1 NC \text{induct} . \supset g\{2^{\sigma+1}\}.$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . 120{\cdot}13 . \supset \vdash . \mathrm{Hp} : g \underset{1}{\subset} (N_0 C \text{induct} \underset{1}{-} \iota'_1 \wedge'') : \supset g\{2^{\sigma'}\}$

[120·51501] $\supset \vdash$ Prop

120·518 $\vdash \sim \mathrm{Infin}\, ax . \mathfrak{C}\{\tau, \sigma, 1\} . \supset \iota^\sigma \varepsilon_1 NC \text{induct}$

Dem $\vdash 1{\cdot}5{\cdot}211 \supset \vdash \mathrm{Hp} \supset Nc'(-\wedge') \varepsilon_1 NC \text{induct}$ (1)

[120·121] $\supset \wedge'' \varepsilon_1 NC \text{induct}$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . 120{\cdot}48 . \supset \vdash$ Prop.

120·52 $\vdash \sigma \varepsilon_1 NC \text{induct} \supset 2^\sigma \varepsilon_1 NC \text{induct}$

$\vdash 120{\cdot}517{\cdot}518 \supset \vdash$ Prop.

120·523 $\vdash . \mathrm{Infin}\, ax . \sigma, \tau \varepsilon_1 NC \text{induct} . \supset \sigma^\tau \varepsilon_1 NC \text{induct}$

$\vdash 117{\cdot}661 \supset \vdash \mathrm{Hp} \supset . \sigma \leqslant 2^\sigma.$

[117·591] $\supset . \sigma^\tau \leqslant (2^\sigma)^\tau .$

[120·501 . Hp . 116·63 .] $\supset . \sigma^\tau \leqslant 2^{(\sigma \times \tau)}.$

[120·501·52·48] $\supset \vdash$ Prop.

120·524 $\vdash \sigma, \iota \varepsilon_1 NC \text{induct} \supset \sigma^\tau \varepsilon_1 NC \text{induct}$

[120·523·518]

This is the third and last fundamental theorem concerning the group properties of inductive numbers.

IX. Some remarks concerning Finite and Infinite.

I assume the following definition of finite classes:

122·001 $\mathrm{fin}(\varkappa) \underset{df}{=} . \mathrm{extens}(\varkappa) . (\bar{u}) . \sim \bar{u} \varepsilon_n \varkappa . \supset . Nc'\varkappa \underset{\Omega}{\neq} Nc'(\varkappa \cup_n \iota'_n \bar{u}) :.$

We see that all inductive classes are finite classes.

To prove that all finite classes are inductive classes, we need the multiplicative axiom, unless we assume that $(N_0 C \text{induct} \underset{1}{-} NC \text{induct})$ is not a null-class. With this last hypothesis we get finite numbers, which are not inductive numbers; but we can prove that any Φ-order inductive class, being no $N_0 C$induct-order inductive class must be an infinite class in a sufficiently high order. Now, as the multiplicative axiom can be proved in the system of Nominalism, as remarked above, we see that in this system we have no other finite numbers, as inductive numbers.

Note that Infinax by no means implies the existence of $\aleph_0$. The existence of any aleph must be assumed separately. — It is easy to see that if we deal with alephs, we assume the reducibility of the corresponding classes, and by this method we get a system which is practically equivalent to the simplified theory of types. We then see that Cantor's theory is closely connected with the simplified Theory of Types.

The fundamental idea of this work being that there are no other primitive propositions than those belonging to the Logical calculus, we are obliged never to deal with an hypothesis without having a parallel system based on a contradictory hypothesis. Now it is interesting to see what is to be done, if we assume an hypothesis inconsistent with the multiplicative axiom. Such an hypothesis being somewhat connected with the ideology of Realism, we can deal with it by means of the simplified Theory of Types. This matter will form the subject of a separate paper [1]). Here I wish to expound only the fundamental ideas of this work. On the other hand, I shall prove the fundamental proposition of Nominalism which I have mentioned above. I begin with this proof.

A. Nominalism.

I shall use the following definitions:

13·41 $\quad i \underset{df}{=} \hat{\varkappa}\hat{v}[(\bar{u}): \varkappa\{\bar{u}\} \equiv (\hat{v} \underset{L}{=} \bar{u}): \mathfrak{C}\{\bar{u}, \hat{v}, V\} . \mathfrak{C}\{\hat{\varkappa}, \omega''''_{(V)}\}.]$

13·42 $\quad (i_V \alpha) \underset{df}{=} \hat{u}[(\hat{u} \underset{L}{=} \alpha). \mathfrak{C}\{\hat{u}, \alpha, V\}.]$

The direction 0·4, enabling us to take functions in any type for all individuals occurring explicitly or implicitly in a given expression, we ean use any function instead of a. Then our Theory of Cardinals applies to classes of any type. Now we shall have to deal with classes of the type $[i^{cc}]^{V}_{\omega''''_{(V)}}\ \omega''''_{(V)}$ instead of K and with corresponding cardinals and inductive numbers. This Theory enables us to prove the fundamental theorem of Nominalism, which I call the theorem of M. Greniewski. I use the following abbreviations:

13·43 $\quad \beta_{*} \underset{df}{=} \hat{\varkappa}[.\beta\{\hat{\varkappa}\} \mid V\{\hat{\varkappa}\}.]$

---

[1]) „Über die Hypothesen der Mengenlehre", to be printed in „Mathematische Zeitschrift".

13·44 $\beta_{**} \underset{df}{=} \hat{\varkappa}[.\beta_*\{\hat{\varkappa}\} \mid V\{\hat{\varkappa}\}.]$

13·45 $\mathrm{int}(\omega) \underset{df}{=} (\bar{u}): \omega\{\bar{u}\}. \sim (\bar{u} \underset{L}{=} V): \supset$

$$(\exists \bar{v}) . (\bar{u} \underset{L}{=} \bar{v}_*) . \omega\{\bar{v}\} . \mathfrak{C}\{\bar{v}, V\}: \mathfrak{C}\{\bar{u}, V\}.$$

13·46 $\mathrm{id}(\omega) \underset{df}{=} (\bar{u}, \bar{v}): (\bar{u} \underset{L}{=} \bar{v}) . \omega_V\{\bar{v}\} . \supset \omega_V\{\bar{u}\}.$

13·47 $\max(\omega) \underset{df}{=} \hat{u}[.\omega_V\{\hat{u}\} . \sim \omega_V\{\hat{u}_*\}.$

$$(\bar{v}): \omega_V\{\bar{v}\} . \sim (\bar{v} \underset{L}{=} \hat{u}) . \supset \omega_V\{\bar{v}_*\}:]$$

13·48 $\bar{i}^{ee} \varkappa \underset{df}{=} [i^{ee}]^V_{\omega''''_{(V)}} \varkappa$

13·481 $\bar{\wedge} \underset{df}{=} (\wedge_{(V)} \cap_V \omega''''_{(V)})$

I denote by $\bar{\Omega}$ the function we get from Ω, if we use functions of the type $\bar{i}^{ee} \varkappa$ instead of functions of the type K. I shall also use the abbreviation:

13·482 $\wedge''' \underset{df}{=} (\wedge_{(\omega''''_{(V)})} \cup_{\omega''''_{(V)}} \bar{\Omega}).$

The interval determined by σ' is to be defined as follows:

13·49 $\mathrm{Int}(\sigma) \underset{df}{=} \hat{\omega}[: \sigma \underset{\Lambda'''}{=} Nc^e(i^{ee} \hat{\omega} \cup_{\omega''''_{(V)}} \wedge'''): \hat{\omega}\{V\}.$

$$(\exists \bar{v}) . \max(\hat{\omega})\{\bar{v}\} . \mathrm{int}(\hat{\omega}) . \mathrm{id}(\hat{\omega}) . \mathfrak{C}\{\hat{\omega}, (i_V V)\}.]$$

We have the following lemmas:

13·5 $\vdash \mathrm{Int}(1)\{(i_V V)\}$ [13·15]

13·51 $\vdash \mathrm{id}(\omega) \supset \mathrm{id}(.\omega_{(V)} \cup (i_V \alpha)_{(V)}.)$ [13·17]

13·512 [(13·49)] $\vdash \mathrm{Int}(\sigma)\{\omega\} \equiv : \sigma \underset{\Lambda'''}{=} Nc^e(i^{ee} \hat{\omega} \cup_{\omega''''_{(V)}} \wedge'''): \omega\{V\}.$

$$(\exists \bar{v}) . \max(\omega)\{\bar{v}\} . \mathrm{int}(\omega) . \mathrm{id}(\omega) . \mathfrak{C}\{\omega, (i_V V)\}.$$

13·513 $\vdash . \mathrm{int}(\omega) . \max(\omega)\{\beta\} . \supset \mathrm{int}(.\omega_{(V)} \cup (i_V \beta_*)_{(V)}.)$

Dem $\vdash . \mathrm{Hp} . \omega\{\alpha\} . \sim (\alpha \underset{L}{=} V) . \supset (\exists \bar{v}) . (\alpha \underset{L}{=} \bar{v}_*) . \omega\{\bar{v}\}.$ (1)

$\vdash . \mathrm{Hp} . (i_V \beta_*)\{\alpha\} . \sim (\alpha \underset{L}{=} V) . \supset (\alpha \underset{L}{=} \beta_*) . \omega\{\beta\}$

$$\supset (\exists \bar{v}) . (\alpha \underset{L}{=} \bar{v}_*) . \omega\{\bar{v}\}. \quad (2)$$

$\vdash (1).(2). 3·44 \supset \vdash$ Prop.

13·514 $\vdash . \mathrm{Intax} . \omega\{V\} . \mathrm{int}(\omega) . \mathrm{id}(\omega) . \max(\omega)\{\beta\} . \mathfrak{C}\{\omega, (i_V V)\}.$

$$\supset \max(.\omega_{(V)} \cup (i_V \beta_*)_{(V)}.)\{\beta_*\}$$

Dem $\vdash \mathrm{Hp} \supset \sim (i_V \beta_*)\{\beta_{**}\}$ (1)

$\supset . \beta_{**} = \wedge .$ (2)

$\vdash 20·14 \supset \vdash (\beta_{**} \underset{L}{=} V) \supset . \beta_{**} = V.$ (3)

$\vdash (2).(3). \supset \vdash \text{Hp}. \supset \sim (\beta_{**} \underset{L}{=} V)$ (4)

$\vdash .13\cdot513 . \text{Intax} . \text{Hp}. \supset . (\beta_{**} \underset{L}{=} \alpha_*) . \omega\{\alpha_*\} . \supset . (\beta_* \underset{L}{=} \alpha) . \omega\{\alpha\}:$

[(13·46)] $\supset \omega\{\beta_*\}.$

[Hp] $\supset \omega\{\beta_*\} . \sim \omega\{\beta_*\}$

[Transp] $\supset . \omega\{\alpha_*\} \supset \sim (\beta_{**} \underset{L}{=} \alpha_*)$

[Hp] $\supset : \sim (\alpha \underset{L}{=} V) . \omega\{\alpha\} . \supset \sim (\beta_{**} \underset{L}{=} \alpha)$ (5)

$\vdash (1)(3)(5). \supset \vdash \text{Hp} \supset \sim . \omega_{(\nu)} \cup (i_\nu \beta_*)_{(\nu)} . \{\beta_{**}\}$ (6)

[Hp] $\supset . \omega_{(\nu)} \cup (i_\nu \beta_*)_{(\nu)} . \{\gamma\} . \sim (\beta_* \underset{L}{=} \gamma) . \supset$

$. \omega_{(\nu)} \cup (i_\nu \beta_*)_{(\nu)} . \{\gamma_*\}$ (7)

$\vdash (6)(7). \supset \vdash$ Prop.

13·52 $\vdash \text{Hp } 13\cdot514 : \sigma \underset{\wedge'''}{=} Nc^{\epsilon}(\bar{i}^{\epsilon}\, \omega \cup_{\underset{(\nu)}{\omega''''}} \wedge''' : \supset$

$. (\sigma + 1) = Nc(\bar{i}^{\epsilon} . \omega_{(\nu)} \cup (i_\nu \beta_*)_{(\nu)} . \cup_{\underset{(\nu)}{\omega''''}} \wedge''').$

[110·631]

13·521 $\vdash . \text{Intax} . \exists' \text{Int}(\sigma) . \supset \exists' \text{Int}(\sigma + 1)$

[13·514·513·52]

13·53 $\vdash . \text{Intax} . \sigma \varepsilon_1 (NC\text{induct} \underset{1}{-} \iota^{\epsilon}{}_1 0) . \supset \exists' \text{Int}(\sigma)$

[120·47 . 13·521·5·512]

13·54 $\vdash$ Intax $\supset$ Infinax [13·53]

This is the theorem of Mr. Greniewski.

B. Realism and hyperrealism.

Let us assume the following definition:

$\text{Transcax} \underset{df}{=} (\bar{\varkappa}) . \sim \bar{\varkappa} \varepsilon' \, Cls\,\text{induct} \underset{a}{=} (- \bar{\varkappa}) \varepsilon' Cls\,\text{induct}.$

If we assume Transcax. we can prove without any difficulty that $V_{(a)}$ is a finite class, i. e. a class which is not similar to any proper part of itself, not being an inductive class. We also prove the proposition:

Transcax $\supset$ Infinax.

It is easy to see that Transcax is not consistent with Multax. Nevertheless there is an hypothesis, which is practically as much fruitful as the multiplicative axiom, being consistent with the Transcax. To get this hypothesis, I shall use the idea of self-comparable classes (intspec). We have the following definition of this idea:

$$\text{intspec}(\varkappa) \underset{df}{=} (\bar{\varkappa}', \bar{\varkappa}'') :, \bar{\varkappa}' \underset{a}{\subset} \varkappa :. \bar{\varkappa}'' \underset{a}{\subset} \varkappa : \supset . Nc^{\epsilon} \bar{\varkappa}' \text{ spec } Nc^{\epsilon} \bar{\varkappa}'' :$$

With this definition we can build up the following definition of the Axiom of Affinity (Affinax)

$$\text{Affinax} \underset{df}{=} (\bar{\varkappa}, \bar{\omega}) : \text{int spec}(\bar{\omega}) . \text{int spec}(\bar{\varkappa}) . \supset$$
$$: Nc^{\epsilon} \bar{\varkappa} \text{ spec } Nc^{\epsilon} \bar{\omega} . \supset . Nc^{\epsilon} | Cls^{\epsilon} \bar{\varkappa} \text{ spec } Nc^{\epsilon} (\iota^{\epsilon\epsilon} \bar{\omega}) :.$$

We see that Affinax cannot be applied to classes, which are not self-comparable. Therefore we never can prove with this axiom the multiplicative axiom or some equivalent axiom. It is easy to see, although it can by no means be proved that Affinax is consistent with Transcax If we take Transcax for Infinax and Affinax for Multax, we get a system, which is as well founded as Cantor's system, and which enables us to have a generalised Arithmetic and Mathematical Analysis

---

Additional errata to Part I.

p. 20, l. 34, read ψp for fq
p. 21, l. 2, 3 and 4 read ψ for f
p. 23, l. 16 read „Fundamental class-letters“ for „Fundamental and functional class-letters“.
p. 24, l. 26 read $G(\lambda, \mu)$ for $E(\lambda, \eta)$
p. 25, footnote read 0·14·141 for 0·13·131
*9·15 for $\times$9·15
p. 25, footnote 3 read $\hat{x}$ for x, y for α
p. 26, l. 22 read „noted individual variables“ for „noted variables“
p. 26, l. 24 read $\hat{x}\hat{y}[\varphi\{\hat{x}, \hat{y}\}]$, $\hat{y}\hat{x}[\varphi\{\hat{x}, \hat{y}\}]$ for $\hat{x}\hat{\varphi}[\hat{\varphi}\{\hat{x}\}]$, $\hat{\varphi}\hat{x}[\hat{\varphi}\{\hat{x}\}]$
p. 28, l. 8 read „are to be used in E as denoting“ for „denote“
p. 28, l. 17 read „expression or a real variable, E“ for „expression, E“
p. 28, l. 23 read „we can make any substitution for a letter in all its occurrences, allowed in the defining symbol“ for „we can take a functional expression for a determined real variable“.

p. 28, l. 28 read „$F(E')$ is a propositional expression“ for „$F(E')$, $F(\Omega)$ are propositional expressions“

p. 29, l. 15 read „E', if all determined variables of E are determined variables of E'.“ for „E'.“

p. 29, l. 17 read „in respect of this expression“ for „expressions“

p. 29, l. 26 read „fundamental indetermined“ for „fundamental“

p. 29, footnote read „conformable“ for „conform“

p. 29, l. 32 read „and if“ for „or if“

p. 30, l. 12 read „in respect of E“ for „one with another and with E“

p. 31, l. 4 and l. 11 read „any fundamental letters or any functional expressions“ for „any functional expressions“

p. 32, l. 7 read „any compatible propositional“ for „any propositional“

p. 37, l. 12 is to be cut out

p. 42, l. 2 read $\underset{df}{=}$ for $=$

p. 42, l. 10 read $=$ for $\underset{df}{=}$ and $\underset{df}{=}$ for $=$

p. 42, l. 25 read $u_{(a)} = v_{(a)}$ for $u = v$

p. 43, read $\underset{a, a}{=}$ for $=$

p. 43, l. 13, 15 read u' for u and $\overline{u}$ and v' for v and $\overline{v}$

p. 44. l. 11 read $-V$ for $.\, \alpha - V.$

p. 44, l. 12 read $-V_{(a)}$ for $.\, \varkappa_{(a)} - V_{(a)}\,.$

p. 45, l. 2 read „$= \wedge$“ for „$= \alpha$“

p. 45, l. 21 read $.\, R^{\varepsilon}_{(a,b)} = R^{\varepsilon}_{(a,b)}\, u\,.$ for $.\, R^{\varepsilon}_{(a,b)}\, v = u\,.$

p. 47, l. 11 and 12, read G for D

Errata to Part II.

p. 96, l. 3 read „is“ for „in“

p. 103, l. 10 read extens^{A}_{a} for extens^{a}_{A}

p. 117, l. 6 and 26 read $\underset{\Omega}{=}$ for $=$

p. 119, last line read $\hat{u}''\,\hat{v}'[(\exists \overline{Q}').\,\hat{u}''[Z_1]^{A}_{a}\overline{Q}' : \overline{Q}' \underset{a}{=} ((P \overset{a}{\underset{a,A}{|}} Z_2) \overset{A}{\underset{a}{|}} ((\underset{A}{\downarrow} \hat{v}') \overset{a}{\underset{A}{\upharpoonright}} \omega)):]:]$

I am indebted to Mr. Skarżeński for valuable remarks concerning the errata to Part I. I am also indebted to Mr. M. H. Dziewicki for the reading of proofs.

Notice sur le Mémorial des Sciences Mathématiques

Directeur:

Henri Villat

Correspondant de l'Académie des Sciences, Professeur à l'Université de Strasbourg, Directeur du „Journal de Mathématiques pures et appliquées".

Paris, chez Gauthier-Villars et C[ie], 55, Quai des Grands-Augustins.

M. Henri Villat vient de fonder sous le haut patronage de: l'Académie des Sciences de Paris, l'Académie Royale de Serbie (Belgrade), l'Académie Royale des Sciences de Belgique (Bruxelles), l'Académie des Sciences de Bucarest, l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres (Cracovie), l'Académie des Sciences de l'Ukraine (Kiew), la Real Academie de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales (Madrid), l'Académie Tchèque des Sciences (Prague), la Reale Accademia dei Lincei (Rome), l'institut Mathématique de l'Académie des Sciences de Suède (Stockholm, fondation Mittag-Leffler), la Société Mathématique de France, etc., avec la collaboration de nombreux savants, une nouvelle collection portant le titre de: Mémorial des Sciences Mathématiques.

Voici en quels termes l'éminent fondateur de cette collection formule le but qu'il avait en vue:

„Notre but est de constituer un ensemble de petits volumes sur tous les sujets intéressant les Mathématiques. Chacun de ces volumes donnera l'exposé et la mise au point d'une question précise et bien délimitée. Sur une telle question, on trouvera la suite ordonnée de tous les faits fondamentaux, tous les résultats acquis, et un tableau des principaux progrès qui paraissent actuellement désirables, ou en cours de réalisation. Nous donnerons (sauf exceptions), seulement les grandes lignes des démonstrations, et l'on ne verra pas citer toutes les démonstrations successives, par exemple, d'un même résultat, si deux ou trois seulement d'entre elles ont une réelle importance. C'est dire que la documentation de chaque fascicule sera critique et non pas encyclopédique, en ce sens que parmi les travaux cités, ceux qui contiennent les idées vraiment neuves et fécondes seront, comme il convient, spécialement mis en évidence. Une solide bibliographie, d'une consultation aisée, sera placée à la fin des volumes.

Nous pensons que les fascicules du Mémorial sont appelés à rendre de grands services. En ce qui concerne l'enseignement, ils sont destinés à combler une lacune, en abordant des sujets importants restés en dehors des programmes d'examens, ou à peine abordés dans les grands Traités.

D'autre part, tous les chercheurs estimeront fructueuse l'existence d'une Collection leur permettant de s'assimiler aisément, au moyen d'un guide sûr, l'essence d'une théorie qui ne rentrerait pas dans le cadre de leurs études habituelles".

Ce peu de mots suffit pour faire comprendre les services inappréciables que le „Mémorial" est appelé à rendre aussi bien aux mathématiciens de profession qu'à tous ceux qui ont l'occasion d'appliquer les Sciences mathématiques au cours de leurs recherches.

Plusieurs fascicules du „Mémorial" viennent de paraître et nous allons les analyser brièvement. Le fascicule I est dû à M. Paul Appell, Membre de l'Institut et Recteur de l'Académie de Paris, et porte le titre suivant: *Sur une forme générale des équations de la dynamique.*

Dès 1899 M. Appell avait fait connaître une forme remarquable qu'il est possible de donner aux équations de la mécanique classique. Les équations de M. Appell, intimément liées au „principe de la moindre action" de Gauss, ont cela de remarquable qu'elles s'appliquent quelle que soit la nature des liaisons, pourvu que les liaisons soient réalisées, de telle façon que l'équation générale de la dynamique soit exacte; les équations de M. Appell sont donc beaucoup plus générales que celles de Lagrange qui ne s'appliquent qu'aux systèmes holonomes. Il était à prévoir que les équations de M. Appell, à cause de leur grande généralité, pourraient rendre de grands services non seulement en mécanique proprement dite mais, qu'en outre, elles permettraient de découvrir la parenté existant entre les lois régissant les phénomènes physiques de classes diverses et les lois de la dynamique dans des cas où les équations de Lagrange n'auraient pas permis d'atteindre le même résultat; c'est ce que confirment pleinement les applications, déjà nombreuses et importantes, auxquelles ces équations ont donné lieu.

Dans le petit livre dont nous présentons une brève analyse, M. Appell, après une courte introduction d'un caractère philosophique, consacre quelques pages extrêmement instructives à l'étude des différents genres de liaisons ainsi qu'aux diverses façons de les réaliser; ensuite, après avoir établi les équations qui lui sont dues, il présente un aperçu des principales applications de ces équations. L'ouvrage se termine par une bibliographie très complète des questions qui se rattachent au sujet traité.

Le Livre est écrit avec la maîtrise bien connue de son illustre auteur et permet de se renseigner, avec le minimum d'efforts, sur l'un des chapitres les plus captivants des sciences mathématiques.

Ajoutons que, à cause de sa portée philosophique, l'intérêt que présente le bel ouvrage dont nous venons de chercher à donner une idée, dépasse de beaucoup celui d'une monographie, même excellente, mais limitée à un sujet strictement borné.

Fascicule II. *Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable* par G. Valiron, Professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg. L'auteur s'est proposé de fournir au lecteur les moyens de se renseigner d'une façon complète sur les belles et importantes théories qui se groupent d'une part autour du théorème de Weierstrass sur la décomposition d'une fonction analytique entière en un produit de „facteurs primaires“ et d'autre part autour du théorème suivant de M. E. Picard: *Une fonction uniforme prend une infinité de fois toute valeur sauf deux valeurs exceptionnelles au plus dans le voisinage d'une singularité essentielle isolée.* M. Valiron, dont les remarquables contributions aux théories précédentes sont bien connues, a pleinement atteint le but que nous venons d'indiquer. On trouvera dans son petit livre les énoncés des principaux résultats acquis avec des indications sommaires sur les relations qui subsistent entre ces résultats et, en utilisant les renvois à la bibliographie, le lecteur pourra approfondir à son gré les points qui lui inspireraient un intérêt particulier.

Fascicule III. *Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables; les Polynômes d'Hermite et autres fonctions sphériques dans l'hyperespace.* Par M. Paul Appell, Membre de l'Institut, Recteur de l'Académie de Paris. Ce mémoire n'est autre chose qu'une exposition condensée mais remarquablement lucide des sujets énumérés dans le titre et pourra être lu aisément par quiconque possède les principes classiques de l'Analyse mathématique. La bibliographie qui se trouve à la fin du livre permettra au lecteur de se renseigner d'une façon complète sur tous les sujets étudiés dans le corps de l'ouvrage.

Fascicule IV. *Esquisse d'ensemble de la Nomographie.* Par M. Maurice d'Ocague, Membre de l'Institut, Professeur à l'Ecole Polytechnique. On trouvera, dans cet ouvrage, une esquisse très intéressante de la théorie générale de l'application des procédés graphiques à la résolution des problèmes d'Analyse mathématique ou des problèmes réductibles aux précédents.

Le fait que le fascicule consacré à la Nomographie ait été rédigé par un auteur d'une compétence aussi exceptionnelle en cette matière que l'est M. d'Ocagne, constitue une véritable bonne fortune pour les lecteurs du „Mémorial".

S. Zaremba.

Compte-rendu des séances de la Société polonaise de Mathématique, Section de Varsovie.

26. XI. 1923. M. R. Witwiński: *Sur les réseaux isothermiques des surfaces* (Prace Mat.-Fiz. 1925).

16. XII. 1923. M. O. Nikodym: *Quelques remarques sur les principes des mathématiques pures.*

M. N. attire l'attention sur la tendance à construire les systèmes déductifs en faisant abstraction du sens des termes primitifs et en rendant ces systèmes automatiques. Outre les termes primitifs et les axiomes il y a des „règles de procédé" dans les systèmes déductifs. M. N. s'occupe de ces règles sur un exemple analogue au paradoxe de Russell.

21. XII. 1923. M. J. Spława-Neyman: *Sur les valeurs théoriques de la plus grande de n erreurs.* Voir: Prace Matematyczno-Fizyczne 1924.

25. I. 1924. M. W. Sierpiński: *Sur quelques nouveaux ouvrages de la théorie des ensembles.* M. S. Mazurkiewicz: *Sur la différentiation des fonctions de Lipschitz.*

15. II. 1924. M. C. Kuratowski: *Sur l'état actuel de l'axiomatique de la théorie des ensembles.* M. K. considère le système suivant (qui est une modification de celui de Zermelo et de Fraenkel) d'axiomes admettant deux termes primitifs: la notion d'ensemble et la relation $x \varepsilon y$ (x appartient à y).

I: Si les ensembles A et B contiennent les mêmes éléments, $A = B$; II: pour tout système de deux ensembles A et B, il existe la somme $A + B$; III: A étant un ensemble, tous ses éléments x qui vérifient une fonction propositionnelle donnée $\varphi(x)$, forment un ensemble; IV: pour tout ensemble dont les éléments sont des ensembles, il existe la somme de ces ensembles; V: pour tout ensemble, il existe l'ensemble de tous ses sous-ensembles; VI (axiome du choix): pour tout ensemble d'ensembles non-vides et disjoints, il existe un ensemble qui contient un élément de chacun de ces ensembles; VII (axiome de l'infini): il existe un ensemble non-vide A tel que, si $X \varepsilon A$, il existe un Y tel que $Y \varepsilon A$, $Y \subset X$ et $Y \neq X$; VIII (axiome de substitution): si à tout élement x d'un ensemble A correspond un ensemble $F(x)$, tous les $F(x)$ forment un ensemble.

L'indépendance des axiomes, outre l'axiome du choix, ne présente pas de difficulté (d'ailleurs l'axiome II est indépendant des axiomes I, III—VII, mais il dépend de l'ax. VIII). Quant à la suffisance du système, M. K. remarque que, même à l'aide de l'axiome VIII (dû à MM Mirimanoff et Fraenkel), on ne saurait établir l'existence des nombres ordinaux initiaux ω_α dont l'indice α soit de second genre et tel que ω_α ne soit confinal avec aucun nombre inférieur.

29. II. 1924. M. W. Sierpiński: *Sur un problème de la théorie des ensembles (A).* Voir: Fund. Math. VII pp. 155—158, 198—202.

14. III. — 28. III. 1924. MM. A. Rajchman et A. Zygmund: *Sur les principes et les problèmes de la théorie riemannienne des séries trigonométriques.*

M. R. considère ses théorèmes sur la multiplication et sur la double intégration des séries trigonométriques comme une nouvelle forme et extension des résultats, formant la base de la théorie riemannienne des séries trigonométriques. Il insiste: 1° sur ce que toute la théorie de la multiplication des séries trigonométriques peut être ramenée au cas banal de la multiplication par le binôme: $e^{ix} - 1$; 2° sur ce que la voie de l'extension du théorème fondamental de Riemann (sur la possibilité d'intégrer terme à terme une série trig. conv.) indiquée par M. Fejer peut être remplacée par une méthode plus simple et menant plus loin au point de vue des applications; pour étudier les séries trig. à coeff. tendant vers 0, et même quelques développements plus généraux, il suffit d'intégrer la série sommable (par le procédé des moyennes arithm. et même par celui de Poisson) considérée deux fois seulement; 3° sur le lien qui existe entre la théorie de la multiplication des séries trig. et le problème de Cantor (de l'unicité du développement trig.). Ensuite M. R. donne une esquisse de l'état actuel des recherches sur le problème mentionné de Cantor. Voir: Rajchman „Sur la multiplication..." Math. Ann., „Sur la possibilité d'appliquer..." Math. Zeitsch.

M. Zygmund considère la classe des ensembles d'unicité qui correspond à une suite donnée des nombres positifs:

$$(S) \qquad \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \ldots > \varepsilon_n \ldots, \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Tout ensemble de points E situé sur $(0, 2\pi)$ et vérifiant la condition: „pour toute série trigon. $\frac{1}{2} a_0 + \Sigma a_n \cos nx + b_n \sin nx$, $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} < \varepsilon_n$, convergente vers 0 en dehors de E, on a $a_n = 0$", est dit ensemble d'unicité relatif à la suite (S).

M. Z. démontre que pour toute suite (S) il existe des ensembles d'unicité de mesure positive et aussi voisine de 2π que l'on veut. Voir: „Contribution à l'unicité du développement trigonométrique" Math. Zeitschr. Bd. 25.

11. IV. 1924. M. J. Spława-Neyman: *Essai d'application de la Statistique mathématique à la résolution de quelques problèmes agricoles.* Voir: Revue de Statistique t. VI, fasc. 9–12.

25. IV. 1924. MM. Mazurkiewicz et Sierpiński: *Sur les ensembles* (A). Voir: Fund. Math. VI.

9. V. 1924. M. A. Tarski: *Sur les principes de l'arithmétique des nombres ordinaux (transfinis).* Après avoir analysé les ouvrages concernant ce sujet, M. T. présente un système d'axiomes admettant „$<$" comme le seul terme primitif; α est, par définition, un nombre ordinal, s'il existe un ξ tel que $\alpha < \xi$. Ax. I: S'il existe un nombre ordinal jouissant d'une propriété donnée, il existe alors un μ qui possède aussi cette propriété et tel que, si ξ la possède, on a $\xi \not< \mu$ et $\mu < \xi$ ou bien $\mu = \xi$. Ax. II: Il existe, au moins, un nombre ordinal. Ax. III: S'il existe un ξ tel que $\xi < \alpha$, α est un nombre ordinal. Ax. IV: S'il existe des nombres ordinaux, il en existe un α tel que: 1° il y a un ξ tel que $\xi < \alpha$, 2° si $\eta < \alpha$, il existe un ζ tel que $\xi < \zeta$ et $\zeta < \alpha$. Ax. V: Pour chaque α il existe un β tel que aucune fonction f ne peut satisfaire à la fois aux deux conditions suivantes: 1° si $\xi < \beta$, $f(\xi) < \alpha$, 2° $f(\xi) = f(\eta)$ entraîne $\xi = \eta$. Ax. VI: Pour chaque nombre α et chaque fonction f, il existe un nombre λ tel que, si $\xi < \alpha$ et $f(\xi)$ est un nombre ordinal, alors $f(\xi) < \lambda$.

M. T. expose les raisons pour lesquelles il semble que ce système fournit une base suffisante pour construire la théorie des nombres transfinis. Il fait observer ensuite que 1°: le système peut être interprété dans le système d'axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo (l'axiome du choix exclus, et l'axiome de substitution inclus), 2°: si l'on suppose le système d'axiomes des nombres ordinaux compatible, les axiomes sont indépendants, 3°: s'il existe un nombre ordinal régulier à indice de II espèce (Hansdorff), son existence ne peut être déduite du système (au cas où il est compatible); si, au contraire, un tel nombre n'existe point, le système est catégorique (au sens de Veblen-Huntington).

23. V. 1924. M. J. Spława-Neyman: *Sur les applications de la théorie des probabilités aux expériences agricoles.* Roczniki nauk roln. X, Poznań 1923.

13. VI. 1924. M. J. Łukasiewicz: *Démonstration de la compatibilité des axiomes de la théorie de la déduction.* M. Ł. emploie le terme théorie de la déduction dans le même sens que MM Russell et Whitehead dans les „Principia mathematica". Son système est basé sur les trois axiomes: A_1: $\sim p \supset p . \supset p$, A_2: $p \supset . \sim p \supset q$, A_3: $p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$.

Tous les théorèmes s'en déduisent à l'aide des règles de substitution et de déduction. M. Ł. prouve que le système ainsi construit ne contient aucun couple de propositions contradictoires. Dans ce but, il suppose que les variables n'admettent que deux valeurs 0 et 1 et que:

$$(1)\ \sim 0 = 1 \qquad (3)\ 0 \supset 0 . = 1 \qquad (5)\ 1 \supset 0 . = 0$$
$$(2)\ \sim 1 = 0 \qquad (4)\ 0 \supset 1 . = 1 \qquad (6)\ 1 \supset 1 . = 0$$

Si l'on substitue dans les propositions du système, 0 et 1 aux variables, ces propositions deviennent égales à 1, en vertu des égalités (1) — (6). Par exemple l'ax. A_2 devient, en substituant 1 à p et 0 à q:

$$1 \supset . \sim 1 \supset 0 : = : 1 \supset . 0 \supset 0 : = . 1 \supset 1 . = 1.$$

Aucune proposition du système ne peut donc être la négation d'une autre, car cela conduirait à des expressions égales à ~ 1, donc à 0.

Une méthode analogue permet d'établir l'independance des axiomes. Les axiomes A_1—A_3 sont indépendants. Parmi les axiomes *1·2—*1·6, adoptés dans la I^{re} édition des Principia, *1·5 résulte des autres; tous les autres sont indépendants. Dans le système de M. Hilbert (Math. Ann. 88 p. 153) l'ax. 2 dépend des autres, les autres sont indépendants.

10. X. 1924. Conférence de M. Sierpiński sur les travaux du *Congrès de Toronto.*

31. X. 1924. M. Sierpiński: *Sur quelques opérations sur les ensembles.* Voir: Fund. Math. VI p. 100—105, Fund. Math. VII p. 144—148, 237—243.

M. Tarski: *Une remarque concernant les principes d'arithmétique théorique.* M. T. établit la proposition suivante: tout système d'axiomes de l'arithmétiqne des nombres réels peut être — en interprétant convenablement les termes primitifs — admis comme système d'axiomes de l'arithmétique des nombres complexes et vice versa. Cela tient au fait qu'on peut définir une correspondance biunivoque entre l'ensemble des nombres réels et celui des nombres complexes (la même proposition est vraie de l'arithmétique des nombres naturels, d'une part, et des nombres entiers ou rationnels de l'autre).

M. T. établit sa proposition en considérant un système U d'axiomes pour les nombres réels positifs qui contient trois termes primitifs: „nombre positif", „1" et „+". Comme la fonction $f(x) = 2^x$ établit une correspondance biunivoque entre les nombres positifs et réels, on transforme U en un système U^* de l'arithmétique des nombres réels, si l'on remplace les termes primitifs par: „nombre réel", „1^*" et „$+^*$", où $1^* = 0$, $x +^* y = \log_2(2^x + 2^y)$. D'une façon analogue, on en déduit l'axiomatique des nombres complexes. Si l'on suppose le système U „complet", le système U^* l'est également.

M. T. observe que N. Wiener s'est proposé de construire l'arithmétique des nombres complexes à l'aide d'un seul terme primitif (Publ. Massachusets Inst. Techn. II, 3); mais sa solution n'est pas satisfaisante, car il ne parait pas possible de définir chez lui le nombre i et de le discerner de $-i$. D'autre part, N. Wiener a résolu le même problème pour le cas des nombres réels à l'aide de la fonction $f(x, y) = 1 - \frac{x}{y}$ (on pourrait la remplacer par $2^x . y$ ou x^y); or, la méthode de M. Tarski permet de transporter directement le résultat de M. Wiener dans le domaine des nombres réels.

14. XI. 1924. M. F. Leja: *Sur les séries entières multiples.*

Soient $A(a_1 a_2 \dots a_n)$ et $B(b_1 b_2 \dots b_n)$ deux points de l'espace à n

dimensions dont les coordonnées sont toutes positives. L'arc de la courbe

$$\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{\alpha_k} = \left(\frac{x_k}{a_k}\right)^{\alpha_i} \; ; \; i, k = 1, 2 \ldots n, \; \alpha_j = \log \frac{a_j}{b_j}, \; j = 1, 2 \ldots n,$$

passant par A et B, situé entre ces deux points, sera dit *l'arc hyperbolique* AB.

On peut démontrer que, si une série multiple $\Sigma a_{\lambda_1 \cdots \lambda_n} z_1^{\lambda_1} \ldots z_n^{\lambda_n}$ est absolument convergente en deux points quelconques A et B des coordonnées positives, elle est absolument convergente sur l'arc hyperbolique AB tout entier (c'est une généralisation d'un théorème de V. Almer, Arkiv f. Mat. Astr. och Fysik 17, 1922). M. L. montre comment on peut appuyer sur ce théorème l'étude du domaine de la convergence absolue d'une série entière multiple.

28. XI. 1924. M. S. Straszewicz: *Sur la théorie des courbes planes.*

J étant un arc de Jordan, s'il existe un maximum fini n de segments d'intersection d'une droite quelconque avec J (un point isolé étant regardé comme segment), J est d'ordre n. Les arcs d'ordre 2 sont les arcs convexes. M. S. signale le théorème suivant: Tout arc d'ordre 3 est une somme de 4 arcs d'ordre 2. Ce théorème s'étend aux continus sans points intérieurs (lignes cantoriennes).

12. XII. 1924. M. S. Saks: *Sur une classe de fonctions d'intervalles.* Voir: C. R. Paris 1925.

17. I. 1925. M. S. Mazurkiewicz: *Sur les figures d'équilibre.*

M. Lichtenstein a démontré que T étant une figure d'equilibre de volume v correspondant à la vitesse angulaire ω, — il existe pour la distance des points de T de l'axe de rotation, une borne ne dépendant que de v et ω. M. Mazurkiewicz démontre l'existence d'une borne analogue pour l'épaisseur de T dans la direction de l'axe de rotation.

13. II. 1925. M. O. Nikodym: *Exemple d'un ensemble fermé dont les points linéairement accessibles forment un ensemble non mesurable* (B).

Considérons un système de coordonnées cylindriques x, r, φ (axiale, distancielle et asymutale) d'un point arbitraire P situé en dehors de l'axe. Soit M un ensemble (A) non mesurable (B) situé sur l'axe des x et soit $\{\delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}\}$ son système déterminant d'intervalles fermés. $\delta'_{i_1 \ldots i_k}$ est l'intervalle ouvert qui s'obtient de $\delta_{i_1 \ldots i_k}$

en le prolongeant de $\frac{1}{k}$ à chaque extrémité. $\varphi_{i_1 \dots i_\varkappa}$ est l'intervalle que l'on obtient en écartant les extrémités de l'intervalle qui est la fermeture de l'ensemble des nombres irrationnels dont le développement en fraction continue commence par $\frac{1|}{|i_1} + \frac{1|}{|i_2} + \dots \frac{1|}{|i_\varkappa}$. $W_{i_1 \dots i_\varkappa}$ est l'ensemble des points (x, r, φ) tels que $x \varepsilon \delta_{i_1 \dots i_\varkappa}$, $\frac{1}{\varkappa+2} < r < \frac{1}{\varkappa}$, $\varphi \varepsilon \varphi_{i_1 \dots i_\varkappa}$. Or, le complémentaire de l'ensemble

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \sum_{i_1 \dots i_\varkappa} W_{i_1 \dots i_\varkappa}$$

est l'ensemble cherché.

27. II. 1925. M. C. Zarankiewicz: *Sur les continus Jordaniens.*

M. Z. prouve que: 1° pour q'un continu soit Jordanien il faut et il suffit que tout ensemble fermé qui le découpe entre deux points, le disjoigne entre les mêmes points; 2° l'ensemble de points qui découpent un continu Jordanien est somme d'une suite infinie d'ensembles fermés.

M. Kuratowski annonce le théorème: pour qu'un continu C soit Jordanien il faut et il suffit que, R_n étant des ensembles ouverts dans C, on ait $\overline{\sum_{n=1}^{\infty} F(R_n)} \supset F\left(\sum_{n=1}^{\infty} R_n\right)$, où $F(R)$ désigne la frontière de R.

27. III. 1925. MM. S. Mazurkiewicz et S. Saks: *Sur les projections orthogonales des ensembles fermés.*

M. Mazurkiewicz établit l'existence d'un ensemble plan fermé dont la projection orthogonale sur toutes les droites d'un faisceau, sauf une, est un ensemble de mesure nulle, tandis que la projection sur la droite exceptionnelle est un segment. M. Saks y apporte quelques simplifications. (A paraître au vol. VIII des Fund. Math.).

17. IV. 1925. M. A. Rajchman: *Sur la convergence multiple des séries.*

Une série (1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est doublement convergente si la série (2) $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} u_n$ converge. Si la convergence de la série (2) est (p—1)-uple, celle de la série (1) est dite p-uple.

M. Rajchman prouve que, si une série trigonométrique converge vers 0 dans tout un intervalle, sa convergence en tout point intérieur du dit intervalle est p-uple, si grand que soit p. Il en résulte que toute série de Taylor à coefficients tendant vers 0 est à convergence multiple d'un ordre infini dans tout point de régularité (de la fonction développée) situé sur la circonférence $|z|=1$.

15. V. 1925. M. A. Zygmund: *Sur un théorème de M. Marcel Riesz.*

M. Z. présente une simple démonstration du théorème suivant: toute série finie (C, α) et sommable (C, β) $(-1<\alpha<\beta)$ est sommable $(C, \alpha+2)$ (théorème démontré pour $\alpha>0$ par M. Riesz). Il énonce, en outre, quelques théorèmes concernant les moyennes typiques et leurs applications dans la théorie des séries trigonométriques. En particulier: toute série finie $(R, e^{\lambda_n}, \alpha)$ et sommable $(R, e^{\lambda_n}, \beta)$ $(0<\alpha<\beta)$ est sommable $(R. e^{\lambda}, \alpha)$ $(0<\alpha<\beta)$.

29. V. 1925. M. F. Leja: *Sur les groupes abstraits continus.*

Soit G une classe (L) de Fréchet où on a fait correspondre à tout système de deux éléments a et b, un élément ab (leur produit) de façon que 1°: $(ab)c=a(bc)$; 2°: il existe un élément e (l'unité) tel que $ae=ea=a$, quel que soit a; 3°: à tout élément a correspond a^{-1} (l'élément inverse) tel que $aa^{-1}=e$; 4: lorsque $a_n \rightarrow a$ et $b_n \rightarrow b$ on a $a_n b_n \rightarrow ab$. L'ensemble G est dit groupe (L). Ce groupe est dit *continu* s'il est homéormophe d'un semi-continu situé dans un espace métrique. M. Leja établit quelques propriétés topologiques des groupes ainsi définis et indique plusieurs problèmes qui s'y rattachent.

Liste des publications périodiques avec lesquelles la Société polonaise de mathématique échange ses Annules.

Bologna. Bolletino della Unione Matematica Italiana.

Brno. Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk.

Calcutta. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society.

Jassy. Annales Scientifiques de l'Université de Jassy.

Paris. Bulletin de la Société mathématique de France.

Roma. Rendiconti di Seminario Matematico della Facolta di Scienze della Universita Roma.

Szeged Acta litterarum et scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco Josephinae.

Warszawa. Fundamenta Mathematicae.

„ Prace Matematyczno-Fizyczne.

„ Przegląd Matem.-Fizyczny.

Wien. Monatshefte für Mathematik und Physik.

Ouvrages rsçus.

Cailler Charles: Introduction géométrique à la Mécanique Rationelle.

Etat

De la Société polonaise de Mathématique au commencement de l'année 1925.

Président: M. S. Dickstein.
Vice-Présidents: MM. S. Zaremba, M. Ernst.
Secretaire: M. T. Ważewski.
Trésorier: M. A. Wilk.
Autres membres du Bureau: MM. A. Rosenblatt, W. Wilkosz.
Commission de Contrôle: MM. G. Leśnodarski, A. Wilk, S. Zakrocki.
Il existe trois sections de la Société, l'une à Lwów, présdée par M. Łomnicki, la seconde à Varsovie, présidée par M. Mazurkiewicz et la troisième à Poznań, présidée par M. Krygowski.

Liste des membres de la Société.

Dr. Kazimierz Abramowicz (Poznań).
Bohdan Babski (Grudziądz).
Dr. Stefan Banach (Lwów)
Tadeusz Banachiewicz (Kraków).
Jan Baran (Nowy Targ).
Dr. Kazimierz Bartel (Lwów).
Dr. Czesław Białobrzeski (Warszawa).
Dr. Izydor Blumenfeld (Lwów).
Dr. Stefan Bóbr (Warszawa).
Władysław Bogucki (Kraków).
Dr. Łucjan Böttcher (Lwów).
Franciszek Brablec (Kraków).
Celestyn Burstin (Lwów).
Élie Cartan (Paris).
Dr. Juljan Chmiel (Kraków).
Antoni Chromiński (Warszawa).
Dr. Leon Chwistek (Kraków).
Dr. Bohdan Dehryng (Warszawa).
Dr. S Dickstein (Warszawa).
Gerhard Długowski (Warszawa).
Prof. Władysław Dziewulski (Wilno).
Dr. Placyd Dziwiński (Lwów).
Dr. Marcin Ernst (Lwów).

Kazimierz Fijoł (Kraków).
Mirosław Gibas (Kraków).
Dr. Lucjan Grabowski (Lwów).
Dr. Antoni Hoborski (Kraków).
† Dr. Ludwig Hordyński (Kraków).
Ks. Feliks Hortyński (Kraków).
Dr. Maksymiljan Huber (Lwów).
Zenon Jagodziński (Warszawa).
Wincenty Janik (Kraków).
† Dr. Zygmunt Janiszewski (Lwów).
Stefan Kaczmarz (Lwów).
Dr. Stanisław Kalandyk (Poznań).
Dr. Bazyli Kalicnn (Lwów).
Ludwik Kaszycki (Kraków).
Dr. Stefan Kempisty (Wilno).
Stefania Klawekówna (Poznań).
Dr. Zygmunt Kobrzyński.
Dr. Zdzisław Krygowski (Poznań).
Dr. Marjan Kryzan (Poznań).
Dr. Kazimierz Kuratowski (Warszawa).
Dr. Stefan Kwietniewski (Warszawa).
Dr. Franciszek Leja (Kraków).
Dr. Stanisław Leśniewski (Warszawa).
Gustaw Leśnodarski (Kraków).
Władysław Lichtenberg (Lwów).
Prof. Leon Lichtenstein (Lipsk).
Dr. Stanisław Loria (Lwów).
Dr. Antoni Łomnicki (Lwów).
Władysław Majewski (Lwów).
Dr. Adam Maksymowicz (Lwów).
Andrzej Marconi (Lwów).
Dr. Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).
Dr. Meyer (Wiedeń, Austrja).
Zofja Napadiewiczówna (Lwów).
Dr. Roman Negrusz (Lwów).
Jan Spława Neymann (Warszawa).
Stanisław Nikliborc (Lwów).
Otton Nikodym (Kraków).
Józef Orłowski (Poznań).

Ludwik Ostrzeniewski (Poznań).
Dr. Aleksander Oareński (Lwów).
Dr. Tadeusz Pęczalski (Poznań).
Dr. Antoni Plamitzer (Lwów).
Dr. A. Przeborski (Warszawa).
Józef Przygodzki (Poznań).
Dr. Aleksander Rajchmann (Warszawa).
Dr. Alfred Rosenblatt (Kraków).
Antoni Rozmus (Zakopane).
Dr. Juljusz Rudnicki (Wilno).
Dr. Stanisław Ruziewicz (Lwów).
Walerja Sabatowska (Lwów).
Dr. Stanisław Saks (Warszawa).
Juljusz Szauder (Lwów).
Lidja Seipellówna (Poznań).
Dr. Wacław Sierpiński (Warszawa).
Władysław Ślebodziński (Poznań).
Dr. Jan Sleszyński (Kraków).
Kazimierz Smoliński (Poznań).
Władysław Smosarski (Poznań).
Jan Sobaszek (Poznań).
Edward Stamm (Ciechanów).
Dr. Wiktor Staniewicz (Wilno).
Ksawery Stankiewicz (Kraków).
Zofja Starosolska (Lwów).
Dr. Hugo Steinhaus (Lwów).
Dr. Władysław Stożek (Lwów).
Dr. Stefan Straszewicz (Warszawa).
Karol Szczepanowski (Modlin).
Dr. Alfred Tarski (Warszawa).
Henryk Titz (Kraków).
Włodzimierz Urbański (Kraków).
Kazimierz Vetulani (Kraków).
Tadeusz Ważewski (Kraków).
Leopold Węgrzynowicz (Kraków).
Dr. Jan Weyssenhoff (Wilno).
Dr. Antoni Wilk (Kraków).
Dr. Witold Wilkosz (Kraków).
Irena Wilkoszowa (Kraków).

Romuald Witwiński (Warszawa).
Dr. Franciszek Włodarski (Poznań).
Stanisław Zakrocki (Kraków).
Dr. Bohdan Zaleski (Poznań).
Dr. Kazimierz Zarankiekiewicz (Warszawa).
Dr. Stanisław Zaremba (Kraków)
Dr. Zygmunt Zawirski (Lwów)
† Stanisław Ziobrowski (Kraków).
Dr. Antoni Zygmunt (Warszawa).
Dr. Kazimierz Żórawski (Warszawa).
Dr. Eustachy Żyliński (Lwów).

Table des matiéres.