ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

(wybór

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

IV

TOME IV

ANNÉE 1925

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LA RÉDACTION S'ADRESSER A M. STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE XVI, RUE, ŻYTNIA 6

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW 1926

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLONSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

Les publications de la Société polonaise de mathématique ont paru pour la première fois en 1921 sous le titre de „Rozprawy Polskiego Towarzystwa matematycznego" en un volume comprenant aussi bien des mémoires de langue polonaise que des mémoires rédigés en d'autres langues. Depuis 1922 l'organe de la Société porte le titre d'Annales de la Société polonaise de mathématique; les travaux de langue polonaise paraissent dans un Supplément, le corps du volume étant réservé aux travaux de langues française, anglaise, italienne et allemande.

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME IV

ANNÉE 1925

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LA RÉDACTION S'ADRESSER
À M. STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE XVI, RUE, ŻYTNIA 6

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW 1926
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

Sur une définition géométrique des espaces abstraits affines.

Par

Maurice Fréchet (Université de Strasbourg).

Table des matières.

Introduction.

L'Analyse vectorielle et l'étude des transformations affines ont donné naissance à de nombreux travaux où les opérations d'addition et de multiplication par un nombre étaient étendues à des éléments de nature quelconque[1]). Je me propose, dans ce mémoire, de définir les espaces abstraits affines par des considérations semblables, puis d'en étudier quelques propriétés géométriques

[1]) Voir par exemple „Le operazione distributive e le loro applicazione all' Analisi" par S. Pincherle et U. Amaldi, Bologne 1921.

et enfin d'utiliser ces propriétés pour en déduire une définition des espaces abstraits affines sous une forme géométrique.

Dans un mémoire qui paraîtra ailleurs[1]), j'étudierais les propriétés infinitésimales des espaces affines.

PREMIER CHAPITRE.

I. Définition analytique des espaces abstraits affines.

Dans un certain nombre de travaux sur les espaces affines, on définit ceux-ci comme certains ensembles sur lesquels certaines opérations peuvent être effectuées. Il est important d'observer que cette définition a l'inconvénient d'admettre par implication que l'on ne peut définir de telles opérations que sur des ensembles particuliers, ce qui n'est pas (voir page 33).

Si l'on veut que la notion d'espace affine soit distincte de la notion d'espace tout court ou d'ensemble, il est nécessaire de considérer, comme nous le ferons plus loin, un espace affine, non comme un ensemble particulier de points ou éléments, mais comme un système composé 1° d'un ensemble de „points" de cet espace et 2° de certaines opérations applicables aux points de cet ensemble.

Ajoutons que le système de postulats ou mieux de conditions que nous avons adopté pour l'espace affine ne diffère de celui auquel nous avons assujetti les „espaces abstraits vectoriels"[2]) que par la suppression d'une condition d'inégalité qui paraît une caractéristique plus importante de la notion de distance que de la notion de longueur.

Définition du champ de vecteurs. Un champ σ de vecteurs est le système constitué par: un ensemble d'éléments de nature quelconque appelés vecteurs abstraits ou simplement vecteurs et trois opérations sur ces vecteurs, représentées par les symboles $+$, $.$, $\| \ldots \|$, ces opérations étant liées entre elles et avec l'ensemble de vecteurs par les conditions suivantes:

Quels que soient les vecteurs abstraits ξ, η, φ et les nombres réels a, b:

---

[1]) Les espaces abstraits topologiquement affines, Acta Mathematica, 1925.

[2]) Les espaces vectoriels abstraits, Bull. Calcutta Mathematical Soc. 1925. Nous avons essayé dans ce mémoire de combiner les avantages respectifs de deux présentations (indépendantes) de la notion d'espace vectoriel dues à M. M. S. Banach et N. Wiener.

1° $\xi + \eta$ est un élément du champ σ de vecteurs.

2° $\xi + \eta = \eta + \xi$.

3° $\xi + (\eta + \varphi) = (\xi + \eta) + \varphi$.

4° $\xi + \eta = \xi + \varphi$ entraîne $\eta = \varphi$.

5° Il existe un vecteur du champ σ, qu'on représentera par la notation 0 et qui est tel que $\xi + 0 = \xi$.

6° $a \,.\, \xi$ est un vecteur abstrait appartenant au champ σ.

7° $a \neq 0$ et $a \,.\, \xi = a \,.\, \eta$ entraînent $\xi = \eta$.

8° $\xi \neq 0$ et $a \,.\, \xi = b \,.\, \xi$ entraînent $a = b$.

9° $a \,.\, (\xi + \eta) = a \,.\, \xi + a \,.\, \eta$.

10° $(a + b) \,.\, \xi = a \,.\, \xi + b \,.\, \xi$.

11° $1 \,.\, \xi = \xi$

12° $(a\, b) \,.\, \xi = a \,.\, (b \,.\, \xi)$.

13° $\| \xi \|$ est un nombre réel $\geqslant 0$, que nous appellerons longueur du vecteur ξ.

14° $\| \xi \| = 0$ est équivalent à $\xi = 0$.

15° $\| a \,.\, \xi \| = |a| \, \| \xi \|$.

Définition de l'espace affine abstrait. Un espace affine abstrait est le système constitué par un ensemble d'éléments de nature quelconque, que nous appellerons „points" de cet espace; et par un champ σ de vecturs défini comme ci-dessus, les points de l'espace considéré et les vecteurs du champ σ qui lui est associé étant liés entre eux de façon à satisfaire aux conditions suivantes:

I. Deux points de l'espace considéré, pris dans un certain ordre A, B, déterminent un vecteur ξ du champ σ et on représente cette association par la notation

$$\overline{AB} = \xi$$

II. Etant donnés un vecteur ξ du champ σ et un point A de l'espace considéré, il existe un point B de cet espace et un seul tel que $\overline{AB} = \xi$.

III. $\overline{AA} = 0$ quel que soit le point A de l'espace considéré.

IV. Quels que soient les points A, B, C de l'espace considéré, on a

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Remarque. 1° D'après 14° et 15°, l'égalité $a \,.\, \xi = 0$ est équivalente à l'alternative $a = 0$ ou $\xi = 0$

2° D'après III et IV, $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$; d'après 11°, 10° et ce qui précède $\overline{AB} + (-1) \,.\, \overline{AB} = (1 + (-1)) \,.\, \overline{AB} = 0 \,.\, \overline{AB} = 0$. Il en résulte d'après 4° que $\overline{BA} = (-1) \,.\, \overline{AB}$. Cela montre aussi que l'on peut écrire:

$$\overline{BC} = \overline{AC} + (-1) \,.\, \overline{AB} \tag{1}$$

II. Propriétés géométriques d'un espace affine abstrait.

Nous allons montrer qu'on peut traduire les conditions I—IV, 1°—15°, dans un langage géométrique qui mettra en évidence les analogies d'un espace affine avec l'espace considéré en géometrie élémentaire et que pour simplifier nous appellerons espace euclidien.

Tout d'abord, comme les conditions indiquées plus haut seraient formellement satisfaites par un espace réduit à un seul élément ou point et un seul vecteur 0, nous exclurons ce cas sans intérêt.

Définition de la droite abstraite joignant deux points. Considérons maintenant deux „points" distincts A, B, pris arbitrairement dans l'espace affine. Quel que soit le nombre réel ϱ, il existe un „point" M_ϱ de l'espace affine tel que

$$\overline{AM_\varrho} = \varrho \,.\, \overline{AB} \tag{10}$$

Lorsque ϱ varie, le point M_ϱ décrit un certain ensemble de points de l'espace affine. En songeant à ce que serait cet ensemble si l'on opérait avec les vecteurs géométriques usuels, il est naturel d'appeler cet ensemble une „droite" de l'espace affine, ou si l'on veut, une *droite abstraite* pour rappeler que ses points sont des éléments de nature quelconque. En outre, comme M_0 et M_1 coïncident nécessairement avec A et B respectivement, on voit que cet ensemble de points contient les points A et B, en d'autres termes que cette droite abstraite „passe" par les points A et B; nous l'appellerons *la droite AB*.

Pour montrer que les droites BA et AB ne sont pas distinctes, nous allons donner à l'égalité (10) une forme où A et B jouent le même rôle. Soit W un point quelconque de l'espace affine, distinct ou non de A ou de B. On a, en rapportant les vecteurs de l'égalité (10) à l'origine W, en vertu de la généralisation (1) de la formule de Chasles:

(11) $$\overline{WM_\varrho} = (1-\varrho)\,\overline{WA} + \varrho\,\overline{WB}$$

En sorte que, si l'on prend dans l'espace affine un point arbitraire W. la droite abstraite AB joignant les deux points distincts A et B est le lieu des points N de l'espace affine tels qu'il existe deux nombres x, y vérifiant à la fois les deux relations

(12) $$\begin{cases} \overline{WN} = x\,.\,\overline{WA} + y\,.\,\overline{WB} \\ 1 = x + y \end{cases}$$

Sous cette forme, qui nous sera utile. la définition de la droite AB est bien indépendante de l'ordre des points A et B.

Points alignés. Considérons trois points A, B, C de l'espace affines. Nous dirons qu'ils sout alignés s'il existe au moins une droite sur lesquels ils sont tous trois situés. S'il en est ainsi, il existe une droite DE passant par A, B, C et par suite trois nombres ϱ, ϱ', ϱ'' tels que

$$\overline{DA} = \varrho\,.\,\overline{DE}, \quad \overline{DB} = \varrho'\,.\,\overline{DE}; \quad \overline{DC} = \varrho''\,.\,\overline{DE}$$

d'où

$$\overline{AB} = (\varrho' - \varrho'')\,.\,\overline{DE}; \quad \overline{AC} = (\varrho'' - \varrho)\,.\,\overline{DE}$$

Alors, si A, B sont distincts, $AB \neq 0$ et en vertu de 15°, $\varrho' - \varrho \neq 0$. Donc:

$$\overline{AC} = \frac{\varrho'' - \varrho}{\varrho' - \varrho}\,.\,\overline{AB}$$

Par suite si A, B, C sont alignés, ou bien A et B sont confondus. ou bien il existe un nombre λ, tel que

(13) $$\overline{AC} = \lambda\,.\,\overline{AB}$$

Cette alternative est non seulement nécessaire, mais suffisante. Car si A et B étant distincts, on a la relation (13), A, B et C sont sur la droite AB. Et si A et B coïncident. A, B, C sont sur la droite AC (ou, si C coïncide avec A et B, sur la droite AP, P étant un point quelconque distinct de A, B, C.

En même temps, nous sommes mis en mesure de prouver que si deux droites ont en commun deux points distincts, elles coïncident. En effet, si deux droites DE, FG ont en commun deux points distincts A, B, tout point C de la première étant aligné avec A, B est situé sur la droite AB d'après ce qui précède. Réciproquement, tout point C' de la droite AB étant aligné avec les points distincts D et E (puisqu'on vient de démontrer que les positions particulières D et E de C sont comme C' sur AB), C' sera sur la droite DE. Autrement dit les droites AB et DE sont les mêmes ensembles de points: elles coïncident. De même pour AB et FG et par suite pour DE et FG.

Prenons enfin quatre points alignés $A\,B\,C\,D$. Si A et B sont distincts, il y a deux nombres λ, λ', tels que

$$\overline{AC} = \lambda \,.\, \overline{AB}; \quad \overline{AD} = \lambda' \,.\, \overline{AB}, \quad \text{d'où}$$
$$\overline{CD} = (\lambda' - \lambda) \,.\, \overline{AB}.$$

Il existe donc un nombre m tel que $\overline{CD} = m \,.\, \overline{AB}$. Réciproquement, si A, B, sont distincts, si A, B, C sont alignés et s'il existe un nombre μ tel que

$$\overline{CD} = \mu \,.\, \overline{AB},$$

les points A, B, C, D seront alignés Car il y aura un nombre m' tel que

$$\overline{AC} = m' \,.\, \overline{AB}, \quad \text{d'où}$$
$$\overline{AD} = (m' + \mu) \,.\, \overline{AB}$$

c'est à dire que D comme C sont sur la droite AB.

Ainsi lorsque 4 points $A\,B\,C\,D$ sont alignés, si deux d'entre eux A et B sont distincts, il existe un nombre m tel que $\overline{CD} = m \,.\, \overline{AB}$. Il ne peut exister qu'un tel nombre, car s'il en existait un autre, μ, on aurait $m \,.\, AB = \mu \,.\, \overline{AB}$ avec $AB \neq 0$ et en vertu de la condition 8°, $m = \mu$.

Application d'une droite abstraite sur une droite euclidienne. Nous avons appelé droite AB le lieu des points M_ϱ de l'espace considéré tels que $\overline{AM_\varrho} = \varrho \,.\, \overline{AB}$, ϱ désignant un nombre réel quelconque. C'est évidemment aussi le lieu des points N_x de l'espace considéré tel que

$$\overline{AN_x} = \frac{x}{\| \overline{AB} \|} \,.\, \overline{AB} \tag{14}$$

x désignant un nombre réel variable. Considérons x comme l'abscisse d'un point n_x d'une droite de la géométrie élémentaire, d'une droite euclidienne. A deux positions n_x, n_y de ce point correspondront deux points N_x, N_y de l'espace affine avec

$$\overline{N_x N_y} = \frac{y - x}{\| \overline{AB} \|} \,.\, \overline{AB} = \frac{\overline{n_x n_y}}{\| \overline{AB} \|} \,.\, \overline{AB} \tag{17}$$

d'où

$$\| \overline{N_x N_y} \| = | \overline{n_x n_y} | \tag{15}$$

Ainsi nous avons „appliqué" la droite abstraite AB sur une droite euclidienne, c'est à dire établi entre les „points" de ces deux droites une correspondance où les „longueurs" des vecteurs sont conservées. Cette correspondance sera d'ailleurs biunivoque. Car si n_x et n_y n'étaient pas distincts $|\overline{n_x n_y}|$ serait nul, donc aussi $\| \overline{N_x N_y} \|$ et en vertu de 14º, III et II, $N_x N_y$ ne seraient pas distincts. Et inversement si N_x et N_y ne sont pas distincts, $|\overline{n_x n_y}|$ serait nul et n_x coïnciderait avec n_y.

Orientation d'une droite abstraite. D'après cela, on pourra définir sur une droite abstraite deux sens de parcours, deux orientations en sens contraires, celles qui correspondent aux deux orientations sur une droite euclidienne. On les obtiendra en faisant parcourir la droite abstraite AB par le point N_x de sorte que x croisse constamment ou décroisse constamment dans la formule (14); ou, ce qui revient au même, par le point M_ϱ de sorte que ϱ varie toujours dans le même sens dans la formule

$$\overline{AM_\varrho} = \varrho \,.\, \overline{AB} \tag{16}$$

Montrons que ces deux orientations sont indépendantes du choix des points A, B sur la droite. Soient deux vecteurs $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ sur la droite abstraite. Quand on applique celui-ci sur la droite euclidienne, ils viennent en $\overline{mn}$, $\overline{pq}$ et on a d'après (17):

$$\overline{MN} = \frac{\overline{mn}}{\overline{pq}} \,.\, \overline{PQ}$$

Or sur la droite euclidienne, $\overline{mn}$ et $\overline{pq}$ sont orientés ou non de la même façon suivant que $\overline{mn}$ et $\overline{pq}$ sont ou non de même signe. Nous avons déjà remarqué que si M, N, P, Q sont alignés et si PQ sont distincts, il existe un nombre μ bien déterminé tel que

$$\overline{MN} = \mu \,.\, \overline{PQ}$$

Nous voyons maintenant que $\overline{MN}$ et $\overline{PQ}$ seront orientés ou non de la même façon suivant que ce nombre μ est > 0 ou < 0.

Nous pourrons alors dire qu'une orientation déterminée d'une droite abstraite consiste dans l'arrangement de ces points en un ordre tel que, si M est placé avant N, et P avant Q, les vecteurs $\overline{MN}$ et $\overline{PQ}$ sont orientés de la même façon. D'une part, un tel arrangement est possible; car si $\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho'''$ correspondent à M, N, P, Q, et si M est avant N, et P avant Q dans l'ordre qui correspond à un des sens de parcours de la droite euclidienne, cela signifie que $\varrho'-\varrho$ et $\varrho'''-\varrho''$ sont de même signe. Or on a évidemment

$$\overline{MN} = \frac{\varrho'-\varrho}{\varrho''-\varrho''} \cdot \overline{PQ}$$

Donc $\overline{MN}$ et $\overline{PQ}$ sont orientés de la même façon. D'autre part cette seconde façon de définir l'orientation est indépendante des points A et B et de l'application considérée plus haut.

En particulier, nous dirons que si trois points $A\,B\,C$ sont alignés, C est entre A et B ou en dehors de A et de B suivant que les vecteurs $\overline{AC}$ et $\overline{CB}$ sont de même sens ou de sens contraire; cela équivaut à dire suivant que c est entre a et b ou en dehors de a et de b quand on applique la droite $A\,B\,C$ de sorte que a, b, c soient les points de la droite euclidienne qui correspondent à A, B, C.

On appellera s e g m e n t AB l'ensemble des points C de la droite AB qui sont situés entre A et B; ou ce qui revient au même qui sont tels que

$$\| \overline{AB} \| = \| \overline{AC} \| + \| \overline{CB} \| .$$

Définition du plan abstrait. Nous avons vu qu'un espace affine non réduit à un point comprend au moins une droite abstraite. Mais un espace peut être affine et se réduire aux seuls points d'une droite abstraite de cet ensemble. Tel est par exemple l'espace linéaire habituel.

Nous allons maintenant envisager le cas où l'espace affine considéré contient au moins trois points non alignés. C'est dans ce cas seulement que la définition du plan abstrait que nous allons introduire peut avoir un sens.

Nous allons employer la définition ordinaire du plan telle qu'on la donne dans les ouvrages de géométrie élémentaire: c'est une surface telle que toute droite qui joint deux points distincts de cette surface y est située tout entiere. Seulement. il nous faut interpréter ici le sens du mot surface. On entend évidemment ainsi un ensemble de points. Et parmi les propriétés sous entendues de la notion de surface, on suppose au moins que la surface n'est réduite ni à un point, ni à une droite et d'autre part qu'elle n'occupe pas l'espace (euclidien) tout entier. Ces conditions suffisaient pour définir le plan dans l'espace euclidien. Si on les appliquait à un espace à 4 dimensions où la droite aurait été définie comme d'habitude, on obtiendrait deux sortes de plans: à 2 et à 3 dimensions. Pour être sûr de n'obtenir dans ce cas que le plan à 2 dimensions, nous interprèterons la dernière condition sous la forme suivante: le plan non seulement devra satisfaire aux conditions ci-dessus, mais il ne pourra être remplacé par un ensemble plus petit satisfaisant aux mêmes conditions.

Ainsi un plan abstrait de l'espace affine est un ensemble de points de cet espace, qui ne se réduit ni à un point ni à une droite de cet espace, tel en outre que toute droite joignant deux points (distincts) de cet ensemble lui appartient tout entière et enfin qui est irréductible par rapport aux conditions précédentes. (Un ensemble est irréductible par rapport à une propriété, s'il coïncide avec tout sous-ensemble jouissant de cette propriété).

Nous avons le droit de donner cette définition du plan abstrait pourvu toutefois que nous prouvions l'existence d'un tel ensemble de points de l'espace affine abstrait.

Nous allons même prouver qu'étant donnés trois points non alignés A, B, C, il existe un plan et un seul passant par ces trois points.

Pour cela, considérons un ensemble Π de points de l'espace affine, non réduit à un point ni à une droite et tel que toute droite joignant deux points distincts appartenant à cet ensemble soit contenue tout entière dans cet ensemble. Il existe au moins un tel ensemble, par exemple l'espace affine tout entier.

Prenons alors dans l'ensemble Π, trois points non alignés M, N, P, ce qui est possible par hypothèse. Alors l'ensemble Π contiendra tout point R de la droite NP par exemple et par suite contiendra tout point Q de la droite MR. Exprimons analytiquement cette propriété. Il existe deux nombres x, x', tels que

$$\overline{WR} = x' \, . \, \overline{WN} + (1 - x') \, . \, \overline{WP}; \quad \overline{WQ} = x \, . \, \overline{WM} + (1 - x) \, . \, \overline{WR}$$

d'où

$$\overline{WQ} = x \, . \, \overline{WM} + (1 - x)\, x' \, . \, \overline{WN} + (1 - x)(1 - x') \, . \, \overline{WP}$$

Il existe donc trois nombres x, y, z, tels que

$$(18) \quad \begin{cases} \overline{WQ} = x \, . \, \overline{WM} + y \, . \, \overline{WN} + z \, . \, \overline{WP} & \text{avec} \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Réciproquement, considérons l'ensemble ω des points Q obtenus quand x, y, z satisfont de toutes les façons possibles à ces deux relations.

L'un des nombres $x+y$, $y+z$, $z+x$, (dont la somme est égale à 2) est $\neq 0$, par exemple $x + y \neq 0$. Alors

$$\overline{WQ} = (x + y) \, . \left[\frac{x}{x+y} \, . \, \overline{WM} + \frac{y}{x+y} \, . \, \overline{WN} \right] + z \, . \, \overline{WP}$$

Donc le point Q est situé sur la droite joignant le point P au point S nécessairement distinct de P situé sur MN et tel que

$$\overline{WS} = \frac{x}{x+y} \, . \, \overline{WM} + \frac{y}{x+y} \, . \, \overline{WN}.$$

P et S étant situés dans Π, il en est de même de Q.

Ainsi l'ensemble Π contient l'ensemble ω des points Q donnés par les relations (18).

Or cet ensemble ω satisfait aux mêmes conditions que Π. En effet, cet ensemble contient les trois points non alignés M, N, P. Il n'est donc réduit, ni à un point, ni à une droite. De plus, la droite qui joint deux points Q, Q' (distincts) de ω, appartient à ω. On a en effet, pour tout point U de QQ'

$$\overline{WU} = \lambda \, . \, \overline{WQ} + (1 - \lambda) \, . \, \overline{WQ'}$$

$$\overline{WQ'} = x' \, . \, \overline{WM} + y' \, . \, \overline{WN} + z' \, . \, \overline{WP},$$

$$x' + y' + z' = 1$$

D'où:

$$\overline{WU} = x'' \, . \, \overline{WM} + y'' \, . \, \overline{WN} + z'' \, . \, \overline{WP}$$

avec $$x'' + y'' + z'' = [\lambda x + (1 - \lambda) x'] + [\lambda y + (1 - \lambda) y'] + \\ + [\lambda z + (1 - \lambda) z'] = 1$$

Si Π est un plan, l'ensemble ω devra donc coïncider avec Π.

Ainsi s'il existe un plan Π et si M, N, P sont trois points non alignés appartenant à Π, Π doit coïncider avec l'ensemble des points Q déterminés par les relations (18).

En particulier s'il existe un plan passant par trois points non alignés, il n'en existe qu'un seul; ou, si l'on préfere, s'il existe deux plans passant par trois points non alignés, ces deux plans coïncident, c'est à dire sont formés des mêmes points.

Il reste maintenant à montrer qu'il existe un plan et même qu'étant donnés trois points non alignés quelconques A, B, C, il existe un plan passant par A, B, C.

Nous savons que s'il existe, ce plan doit coïncider avec l'ensemble α des points T tels que

$$(19)\quad \begin{cases} \overline{WT} = X \, . \, \overline{WA} + Y \, . \, \overline{WB} + Z \, . \, \overline{WC} \\ \text{avec} \qquad X + Y + Z = 1. \end{cases}$$

On a vu que c'est un ensemble qui n'est réduit ni à un point, ni à une droite et qui contient toute droite joignant deux de ses points. Si donc ce n'était pas un plan, cet ensemble α contiendrait un sous-ensemble β, distinct de α et possédant les propriétés précédentes. A son tour, en appelant M, N, P trois points non alignés de β, l'ensemble β contiendrait l'ensemble γ des points Q vérifiant les relations (18) et cet ensemble γ serait un sous ensemble de l'ensemble α, non identique à α.

Or M, N, P appartenant à α, on a:

$$\overline{WM} = X_1 \, . \, \overline{WA} + Y_1 \, . \, \overline{WB} + Z_1 \, . \, \overline{WC} \quad \text{avec} \quad X_1 + Y_1 + Z_1 = 1$$
$$\overline{WN} = X_2 \, . \, \overline{WA} + Y_2 \, . \, \overline{WB} + Z_2 \, . \, \overline{WC} \qquad\qquad X_2 + Y_2 + Z_2 = 1$$
$$\overline{WN} = X_3 \, . \, \overline{WA} + Y_3 \, . \, \overline{WB} + Z_3 \, . \, \overline{WC} \qquad\qquad X_3 + Y_3 + Z_3 = 1$$

Si le déterminant des coefficients était nul, on pourrait établir une relation linéaire et homogène entre ses colonnes, et, par suite, il existerait trois nombres non tous nuls a', b', c' tels que

$$a' \, . \, \overline{WM} + b' \, . \, \overline{WN} + c' \, . \, \overline{WP} = 0,$$

avec

$$a' X_1 + b' X_2 + c' X_3 = a' Y_1 + b' Y_2 + c' Y_3 = a' Z_1 + b' Z_2 + c' Z_3 = 0.$$

Or en ajoutant ces dernières relations, on voit qu'on a

$$a' + b' + c' = 0.$$

Si donc a', par exemple, est $\neq 0$, on aurait

$$\overline{WM} = \left(\frac{-b'}{a'}\right) . \, \overline{WN} + \left(\frac{-c'}{a'}\right) \overline{WP}$$

avec $\left(\frac{-b'}{a'}\right)+\left(\frac{-c'}{a'}\right)=1$, c'est-à-dire que M, N, P seraient alignés. Ainsi le déterminant en question n'est pas nul. Par suite on peut trouver des nombres a, b, c tels que

$$\overline{WT}=a.\overline{WM}+b.\overline{WN}+c.\overline{WP}$$

et on voit comme plus haut que $a+b+c=1$. Donc non seulement γ fait partie de α, mais tout point T de a appartient à γ; de sorte que, contrairement à l'hypothèse, γ serait identique à α.

Ainsi l'ensemble α est un plan. Donc, il existe un plan passant par $A\,B\,C$, et nous avons précédemment montré qu'il n'en existe qu'un seul.

En résumé: étant donnés trois points non alignés arbitraires A, B, C, 1° il existe un plan passant par A, B, C, 2°, il n'en existe qu'un seul, 3° ce plan est l'ensemble des points T donnés par les relations (19).

Ces relations sont écrites sous une forme symétrique qui montre que l'ordre des points A, B, C est indifférent. En renonçant à cette symétrie, on peut simplifier. En retranchant vectoriellement $\overline{WC}$ de la première relation (19), il reste en effet

$$\overline{CT}=X.\overline{CA}.+Y.\overline{CB}$$

où X, Y sont des nombres indépendants. Et réciproquement cette relation est équivalente à l'ensemble des relations (19).

Observons aussi que d'après ce qui précède: si deux plans ont en commun trois points non alignés, ils coïncident.

Régions. Par analogie avec ce qui se passe pour le plan euclidien, nous pouvons penser qu'un plan de l'espace affine considéré est peut-être divisé en deux régions par chaque droite de ce plan.

Pour le prouver, cherchons à exprimer analytiquement la condition pour que la droite qui joint deux points M, M' d'un plan coupe une droite donnée $A\,B$ de ce plan entre M et M'. Pour déterminer le plan, donnons-nous en un point C, non sur $A\,B$. Alors

$$\overline{AM}=y.\overline{AB}+z.\overline{AC};\quad \overline{AM'}=y'.\overline{AB}+z'.\overline{AC}.$$

Si $M\,M'$ coupe $A\,B$ en un point P, on a à la fois

$$\overline{MP}=x'.\overline{MM'} \quad \text{et} \quad \overline{AP}=x.\overline{AB}$$

d'où en ramenant à l'origine A

$$\overline{AP} - \overline{AM} = x' . \overline{AM'} - x' . \overline{AM}$$

ou

$$x . \overline{AB} = x' y' . \overline{AB} + x' z' . \overline{AC} + (1 - x') y . \overline{AB} + (1 - x') z . \overline{AC}$$

ou

$$[x - x' y' + (x' - 1) y] . \overline{AB} = [x' z' + (1 - x') z] . \overline{AC}$$

Comme $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ ne sont ni nuls, ni situés sur la même droite, les deux coefficients numériques doivent être nuls, ce qui fournit deux équations pour déterminer x et x', savoir

$$x - x' y' + (x' - 1) y = 0; \quad z = x' (z - z').$$

La seconde fournira x' si $z - z' \neq 0$. Pour que le point P soit situé entre M et M', il faut de plus que l'on ait $0 < x' < 1$, d'où

$$0 < \frac{z}{z - z'} < 1$$

ce qui donne $z z' < 0$. Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que la droite MM' coupe AB entre M et M' est que z et z' soient de signes contraires. Appelons provisoirement région positive l'ensemble des points M du plan tels que $z > 0$; région négative l'ensemble des points M' du plan tels que $z' < 0$. On voit que *l'on a divisé l'ensemble des points du plan autres que ceux de la droite AB en deux régions* Et ceci de telle façon que si l'on joint par un segment de droite MM' deux points du plan n'appartenan pas à la droite AB, ce segment coupe AB quand M et M' n'appartiennent pas à la même région et seulement dans ce cas. Ainsi on peut dire qu'un plan est divisé en deux régions par toute droite de ce plan, en donnant à cette assertion le sens précis qui vient d'être indiqué.

Droites parallèles. D'après la définition d'une „droite", si deux droites sont distinctes, elles ont un ou zéro point commun. Nous appellerons droites parallèles, deux droites situées dans un même plan et ne se rencontrant pas

Cherchons sous quelle forme analytique peut se représenter la condition pour que deux droites AB, CD soient parallèles. Ces deux droites sont dans un même plan contenant A, B, C et D; or

A, B et C ne sont pas alignés, sans quoi CD et AB auraient en commun le point C. Donc les deux droites AB et CD sont dans le plan bien déterminé ABC et l'on a une relation de la forme

$$\overline{AD} = y \cdot \overline{AB} + z \cdot \overline{AC}, \quad \text{d'où}$$

(21) $$\overline{CD} = \overline{AD} + (-1) \cdot \overline{AC} = y \cdot \overline{AB} + (z-1) \cdot \overline{AC}$$

S'il y avait un point M commun aux droites AB et CD, on aurait des relations de la forme:

$$\overline{AM} = x \cdot \overline{AB}, \qquad \overline{CM} = x' \cdot \overline{CD} \qquad \text{d'où} \qquad \overline{AC} = x \cdot \overline{AB} - x' \cdot \overline{CD}$$

et en y portant l'expression de $\overline{CD}$ tirée de (21)

$$\overline{AC} = x \cdot \overline{AB} - x'y \cdot \overline{AB} - x'(z-1) \cdot \overline{AC}$$

ou $$[1 + x'(z-1)] \cdot \overline{AC} = (x - x'y) \cdot \overline{AB}$$

Puisque A, B, C ne sont pas alignés, les deux coefficients doivent être nuls. On aura donc deux équations

$$x'(1-z) = 1; \quad x = x'y$$

pour déterminer x et x' et inversement si ces équations déterminent x et x', il y aura un point M commun à AB et CD.

Or ces équations ne déterminent x et x' que si $z - 1 \neq 0$. La condition cherchée est donc que $z = 1$ et par suite, d'après (21), qu'il existe un nombre y tel que

$$\overline{CD} = y \cdot \overline{AB}.$$

En se reportant aussi à ce qui a été dit sur quatre points alignés, on voit finalement que: la condition nécessaire et suffisante pour que les droites AB et CD soient parallèles ou confondues est qu'il existe un nombre y tel que

(22) $$\overline{CD} = y \cdot \overline{AB}.$$

En prenant $y = 1$ on voit que si deux vecteurs $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ sont égaux et non $= 0$, les droites CD, AB sont parallèles ou confondues.

On conclut aussi de (22) que: *par un point quelconque C non situé sur une droite AB, il passe une parallèle à la droite AB.* En effet, prenons pour y un nombre quelconque $\neq 0$. Il existe en vertu de la condition II, il existe un point D distinct de C et un seul, tel que $\overline{CD} = y \cdot \overline{AB}$. La droite déterminée CD passe par C et est parallèle à AB.

En outre, nous rencontrons ici une généralisation du postulatum d'Euclide: étant donnés une droite AB et un point C non situé sur cette droite, il n'existe qu'une parallèle à AB menée par C. En effet si CD et CD' sont deux droites distinctes menées par C parallèlement à AB, on aura la relation (22) et

$$\overline{CD'} = y' . \overline{AB}$$

d'où (puisqu'on suppose D et D' distincts de C, et par suite y' et $y \neq 0$)

$$CD' = \frac{y'}{y} . \overline{CD},$$

donc les droites CD' et CD sont confondues.

Observons que si les droites AA' et BB' sont parallèles à la droite CC', on a

$$\overline{AA'} = x . \overline{CC'}; \quad \overline{CC'} = y . \overline{BB'}$$

donc

$$\overline{AA'} = xy . \overline{BB'}$$

Donc deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles ou confondues.

Parallélogrammes. Un quadrilatère est la figure obtenue en considérant quatre points A, B, C, D dans un ordre donné et en construisant successivement les segments qui joignent le premier point au second, etc., le dernier point au premier. On l'appellera le quadrilatère $ABCD$. La figure reste la même quand on renverse l'ordre des points ou quand on en fait une permutation circulaire. Les points A, B, C, D sont les sommets du quadrilatère.

On appellera parallélogramme la figure formée par un quadrilatère dont les „côtés opposés“ sont parallèles.

Il faut prouver l'existence d'une telle figure: si on considère trois points non alignés ABD, on sait qu'il y a un vecteur

$$\overline{DC} = \overline{AB}. \text{ Alors on aura:}$$

$$\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \quad \text{d'où}$$

$$\overline{AD} = \overline{BC}$$

Donc les droites AB et CD sont parallèles de même que les droites AD et BC, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Réciproquement, soit $A' B' C' D'$ un parallélogramme; les points $A' B' D'$ ne sont pas alignés et on a des relations de la forme

$$\overline{D'C'} = x \cdot \overline{A'B'}; \quad \overline{A'D'} = y \cdot \overline{B'C'}$$

D'où

$$x \cdot \overline{A'B'} + (-1) \cdot \overline{B'C'} = \overline{D'C'} + \overline{C'B'} = \overline{D'B'} = \overline{D'A'} + \overline{A'B'}$$
$$= \overline{A'B'} + (-y) \cdot \overline{B'C'}$$

ou:

$$(x - 1) \cdot \overline{A'B'} = (1 - y) \cdot \overline{B'C'}$$

Comme A', B', C' ne sont pas alignés, il faut donc que les coefficients soient nuls, d'où

$$\overline{D'C'} = \overline{A'B'}; \quad \overline{A'D'} = \overline{B'C'}$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs non alignés soient égaux est qu'ils soient côtés opposés d'un parallélogramme, entendant par là qu'ils sont parallèles et que les droites qui joignent l'une leurs extrémités l'autre leurs origines sont parallèles.

On en conclut en particulier que: les côtés opposés d'un parallélogramme ont même longueur.

Remarquons en outre que si $A' B' C' D'$ forme un parallélogramme, le quadrilatère $A' B' D' C'$ n'est pas un parallélogramme. En effet on prouverait comme plus haut que $\overline{C' D'} = \overline{A' B'}$ et comme on a vu que $\overline{D'C'} = \overline{A'B'}$ on aurait $\overline{D'C'} = \overline{C'D'}$ sans que C' et D coïncident. On peut appeler les droites $A' C'$ et $B' D'$ les diagonales du parallélogramme $A B C D$. La proposition précédente peut alors s'exprimer ainsi:

les diagonales d'un parallélogramme ne sont pas parallèles. Tout ce qui prècéde garderait un sens si l'espace considéré se réduisait à l'ensemble des points d'un de ses plans abstraits.

Nous allons indiquer une proposition qui n'a d'application que dans le cas contraire.

Considérons deux parallélogrammes $A B C D$ et $A' B' C' D'$ qui ont un côté commun et ne sont pas dans un même plan. On aura

$$\overline{A B} = \overline{D C} = \overline{A'B'}$$

Or les droites AB et $A'B'$ sont distinctes; les vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{A'B'}$ sont égaux, le quadrilatère $AB\,B'A'$ est un parallélogramme.

Ainsi: lorsque deux parallélogrammes $ABCD$, $A'B'C'D'$ non situés dans un même plan ont un côté commun, les côtés opposés à celui-ci sont côtes opposés d'un même parallélogramme.

Dans cet énoncé, on suppose bien entendu qu'on joint les sommets des côtés opposés au côté commun qui correspondent au même sommet du côté commun.

Translations. Par hypothèse, quels que soient les points A, B, A' il existe un point B' et un seul tel que $\overline{A'B'} = \overline{AB}$. Quand A et B sont donnés, cette relation définit donc une trasformation de chaque point A' de l'espace affine en un point B' de cet espace. Cette transformation transforme l'espace en lui-même et elle est biunivoque. En effet, non seulement à tout point A' de l'espace correspond un seul point B', mais, réciproquement, si on se donne une position quelconque du point B', il y a un point A' et un seul à qui il correspond. Car on doit avoir aussi $\overline{B'A'} = \overline{BA}$ et si B' A, B sont donnés, A' est unique et bien déterminé.

Nous pourrons par analogie avec ce qui se passe dans l'espace euclidien, appeler cette transformation une translation et plus précisément la translation $\overline{AB}$. On remarquera que, quels que soient les points A et B, il y a une translation qui amène A en B et une seule, à savoir la translation $\overline{AB}$. Si on remplace A par un autre point, la translation ne sera pas altérée si le vecteur $\overline{AB}$, en changeant d'origine, reste égal à lui même. De sorte que quel que soit le vecteur ξ, la translation ξ est bien définie.

On remarquera que, si l'on effectue successivement deux translations ξ et η la transformation finale sera précisément la translation $\xi + \eta$. Ceci montre que les translations forment un groupe de transformations des espaces affines. D'autant que, parmi les translations, on trouve la transformation identique, à savoir la translation 0, et qu'à toute translation ξ correspond une translation qui réalise la transformation inverse, à savoir la translation $(-1)\,.\,\xi$.

Remarquons enfin que si deux points A, A' sont transformés par une translation ξ en deux points B, B', le quadrilatère $A\,A'\,B'\,B$

est un parallélogramme si la droite $A A'$ n'est pas parallèle au vecteur ξ ou confondue avec lui. Dans ce dernier cas, B et B' seraient situés sur la droite $A A'$.

Dans tous les cas, on aura $\overline{A A'} = \overline{B B'}$; par conséquent en particulier $\| A A' \| = \| B B' \|$: toute translation conserve les longueurs. De plus les droites $A A'$ et $B B'$ étant parallèles ou confondues, on voit que toute translation transforme une droite en une autre droite parallèle à la première ou confondue avec elle. Elle transforme aussi un plan en un plan. Car le plan donné $A B C$ est le lieu des points M tels que

$$\overline{W M} = x \,.\, \overline{W A} + y \,.\, \overline{W B} + z \,.\, \overline{W C} \qquad \text{avec} \quad x + y + z = 1.$$

Et si M' est le point transformé de M par la translation ξ, on aura $\overline{W M'} = \overline{W M} + \xi$, d'où:

$$\overline{W M'} = x \,.\, (\overline{W A} + \xi) + y \,.\, (\overline{W B} + \xi) + z \,.\, (\overline{W C} + \xi)$$

C'est-à-dire que le lieu de M' est le plan $A' B' C'$ déterminé par les points A', B', C' transformés de A, B, C, puisque

$$\overline{W M'} = x \,.\, \overline{W A'} + y \,.\, \overline{W B'} + z \,.\, \overline{W C'}$$

D'une façon générale, on peut dire qu'un espace affine est h o m o g è n e par rapport à ses translations.

Autres propriétés géométriques. On pourrait démontrer encore analytiquement un grand nombre de propriétés géométriques que l'espace affine abstrait a en commun avec l'espace euclidien. Nous nous contenterons des précédentes parce qu'elles nous fourniront un système de propriétés géométriques caractéristique de l'espace affine abstrait le plus général. De sorte que les autres propriétés pourraient aussi être déduites des précédentes par une voie purement géométrique et en utilisant sans changement des démonstrations classiques de la géométrie élémentaire. Telle est par exemple l'extension du théorème de Thalès aux espaces affines abstraits, extension qui sera réalisée par voie géométrique dans le Second Chapitre, page 30.

DEUXIEME CHAPITRE.

Définition géométrique de l'espace affine.

Nous profiterons maintenant des propriétés établies précédemment pour définir l'espace affine par une voie plus semblable à celle qui a été suivie par Euclide pour décrire l'espace de la géométrie élémentaire.

Nous croyons que le langage géométrique employé est plus propre à soulager l'intuition que la description analytique des propriétés vectorielles. Par contre, celles-ci peuvent être plus commodes pour certaines démonstrations.

Parmi les conditions qui définissent l'espace affine, et parmi les propriétés de cet espace que nous venons d'établir, nous allons maintenant retenir les suivantes.

Propriétés géométriques caractéristiques de l'espace affine abstrait. Si l'on donne un espace affine abstrait, on donne par là-même deux sortes d'éléments appelés points et droites de cet espace (ou points abstraits et droites abstraites) qui jouissent des propriétés suivantes

a) A tout couple de points abstraits A, B correspond un nombre réel $\geqslant 0$ qu'on peut appeler longueur AB ou BA [1])

b) La longueur AB est positive si A et B sont distincts et dans ce cas seulement

c) Toute droite de l'espace affine est un ensemble de points de cet espace qui est applicable sur une droite euclidienne. C'est à dire qu'on peut établir entre la droite abstraite et la droite euclidienne, une correspondance ponctuelle biunivoque qui conserve les longueurs.

d) A tout couple de points distincts A, B d'un espace affine est associée d'une façon déterminée une droite de l'espace affine comprenant les points A et B.

e) Deux droites d'un espace affine qui ont en commun deux points distincts coïncident dans toute leur étendue; c'est à dire qu'elles sont formées des mêmes points.

Les propriétés qui suivent n'ont de sens que pour un espace

---

[1]) On verra plus loin pourquoi nous disons longueur plutôt que distance ou écart.

affine non réduit à une droite. Pour aller plus loin, nous allons donc maintenant considérer les espaces affines qui comprennent au moins trois points non alignés (c'est à dire non situés sur une même droite abstraite).

Nous donnerons d'abord la définition d'un plan abstrait ou plan de l'espace affine considéré.

Un plan abstrait est un ensemble de points d'un espace affine, ensemble non réduit à un point, ni à une droite, tel que toute droite joignant deux points de cet ensemble lui appartienne tout entière et enfin ensemble irréductible par rapport aux deux propriétés précédentes, c'est à dire qui coïncide avec ceux de ses sous-ensembles qui possèderaient ces deux propriétés.

L'existence d'un tel espace est admise dans la condition suivante:

f) Par trois points non alignés A, B, C, d'un espace affine passe au moins un plan.

Nous appellerons segment AB l'ensemble des points C de la droite AB tels que l'on ait

$$\| \overline{AB} \| = \| \overline{AC} \| + \| \overline{BC} \|$$

Cette définition a pour but de faciliter l'explication du sens de la condition suivante:

g) Toute droite d'un plan divise ce plan en deux régions. C'est à dire que les points de ce plan autres que ceux de la droite sont répartis en deux ensembles. le segment AB qui joint deux points A, B du plan ayant avec la droite un point en commun si A et B n'appartiennent pas au même ensemble et dans ce cas seulement.

Nous dirons que deux droites sont parallèles si elles appartiennent à un même plan sans se rencontrer. Ceci nous permettra de formuler la condition qui généralise le postulat d'Euclide:

h) Etant donnés une droite AB et un point C non situé sur cette droite, il y a une droite et une seule passant par C et parallèle à AB.

Nous avons maintenant la condition:

i) Deux droites parallèles rencontrant deux autres droites parallèles entre elles interceptent sur celles-ci des segments de longueurs égales.

Condition qu'on peut encore exprimer sous la forme: dans tout parallélogramme, les côtés opposés ont des longueurs égales.

Ajoutons que:

j) les diagonales d'un parallélogramme ne sont pas parallèles.

Si l'espace considéré se réduit aux points d'un de ses plans abstraits, la condition suivante n'aura pas d'objet; on pourra donc la laisser de côté dans ce cas particulier.

C'est la dernière condition que nous retiendrons:

k) si deux parallélogrammes non situés dans un même plan ont un côté commun, les côtés opposés à ce côté commun sont côtés opposés d'un même parallélogramme.

Nous supposons ici que les sommets se correspondent, de sorte que si les deux parallélogrammes sont $ABB'A'$ et $ABB''A''$, c'est le quadrilatère $A'B'B''A''$ qui est un parallélogramme.

Nous nous proposons maintenant de démontrer que l'ensemble des propriétés *a)...k)* caractérise l'espace affine abstrait le plus général, au sens suivant:

Considérons un système d'éléments appelés points abstraits et droites abstraites vérifiant les conditions *a)...k)*. On peut associer au système des points abstraits un champ de vecteurs de façon à constituer un espace affine (vérifiant par conséquent les conditions 1° à 15° et I à IV) et ceci de façon que les droites de cet espace définies comme nous l'avons fait dans la première partie soient les droites abstraites données et que, quels que soient les points abstraits A et B, la longueur du vecteur AB soit la longueur AB donnée.

Dans le choix des propriétés *a)...k)* que nous avons établies et retenues, nous avons été surtout guidé par le souci d'obtenir, non pas le système le plus réduit de propriétés caractéristiques mais un système simple rappelant des propriétés fondamentales classiques de la géométrie élémentaire. Il resterait intéressant d'examiner si l'une ou l'autre de ces propriétés n'est pas une conséquence des autres.

Cas linéaire. Prenons d'abord le cas où les points de l'espace considéré seraient tous situés sur une même droite AB de cet espace. Alors toute droite de l'espace ayant au moins en commun avec la droite AB les deux points distincts A, B coïncide avec la droite AB: dans le cas actuel, l'espace considéré ne comporte donc qu'une seule droite.

Il est possible par hypothèse d'appliquer la droite AB, et par suite l'espace considéré tout entier, sur une droite euclidienne et en particulier de faire correspondre à tout couple de points M, N de l'espace un couple de points m, n de la droite euclidienne de sorte que

$$\| \overline{MN} \| = | \overline{mn} |$$

Alors à chacun des sens de parcours de la droite euclidienne correspond un ordre des points, un sens de parcours de l'espace considéré.

On pourra appeler vecteur, l'ensemble de tous les couples ordonnés de points M, N de l'espace dont la longueur MN est la même et tels que M précède pour tous (ou M suive pour tous) le point N sur la droite.

Alors on définira $\xi + \eta$ et $\alpha . \xi$ comme les vecteurs qui correspondent aux vecteurs euclidiens $\xi' + \eta'$ et $\alpha . \xi'$, ξ' et η' étant les vecteurs euclidiens qui correspondent à ξ et η. Et on appellera longueur, $\| \xi \|$, du vecteur ξ, la longueur MN commune aux couples ordonnés MN qui représentent ξ.

Enfin on associera au couple ordonné M, N, le vecteur qui est l'ensemble des couples ordonnés M', N' tels que

$$\| \overline{MN} \| = \| \overline{M'N'} \|$$

et que les sens de M' vers N' soit celui de M vers N.

Ceci étant, on verra immédiatement que les conditions I à IV et 1° à 15° sont vérifiées.

Donc, on peut envisager l'espace considéré comme un espace affine dont les points et les droites sont précisément les points et les droites donnés, et où $\| \overline{MN} \| =$ longueur MN.

Cas général. Prenons maintenant le cas général où l'espace considéré ne se réduit pas à une de ses droites.

Nous ferons quelques remarques préalables. Tout d'abord, montrons que par trois points non alignés A, B, C, il ne passe qu'un seul plan. En effet, s'il en existait deux: Π' et Π'', l'ensemble Π des points communs à Π' et Π'', contenant A, B et C ne pourrait être réduit, ni à un point, ni à une droite. D'autre part, comme Π' et Π'', il contiendrait entièrement toute droite joignant deux de ses points. Par définition du plan, ce sous-ensemble de

Π' et Π'' devrait coïncider avec Π' et Π''; donc Π' et Π'' coïncident

Il en résulte que

par une droite Δ et un point non situé sur cette droite;

par deux droites sécantes;

par deux droites parallèles;

il passe un plan et un seul; puisque dans les trois cas, on peut prendre dans la figure donnée trois points non alignés, de sorte qu'un plan passant par ces trois points contient cette figure.

Il en résulte aussi que si l'on considére deux parallèles Δ et Δ' et une droite MM' coupant Δ et Δ', la parallèle à MM' menée par un point quelconque N de Δ rencontrera Δ'.

Observons ensuite que si deux droites Δ', Δ'' sont parallèles à une troisième Δ, elles sont parallèles ou confondues

En effet. si Δ' et Δ'' sont dans un même plan et si elles ont un point commun elles sont confondues en raison de la condition *h)*. Donc, si Δ' et Δ'' sont dans un même plan, elles sont parallèles ou confondues.

Si Δ' et Δ'' n'étaient pas dans un même plan, les plans déterminés par Δ et Δ' et par Δ et Δ'' ne seraient pas confondus. Or en prenant deux points A, B sur Δ, un point A' sur Δ', un point A'' sur Δ'' et en menant les droites AA', AA'' et les parallèles de B à AA' et AA'', ces parallèles rencontrent Δ' et Δ'' en deux points B' et B''. De sorte que $ABB'A'$ et $ABB''A''$ sont deux parallélogrammes ayant un côté commun et non situés dans un même plan. Alors $A'B'B''A''$ serait d'après la condition *k)* un parallélogramme et par suite contrairement à l'hypothèse, Δ' et Δ'' seraient dans un même plan

Définition des vecteurs. Nous allons maintenant définir une famille σ de vecteurs associés à l'espace considéré de façon à satisfaire aux conditions 1° à 15°, I à IV.

Pour cela, nous définirons une certaine relation que nous appellerons l'équipollence de deux segments dirigés. Nous avons déja défini un segment AB; les segments AB et BA sont les deux mêmes ensembles de points. Nous appellerons segment dirigé AB le système formé par le segment AB et le sens de parcours de la droite qui porte AB, de A vers B (Dans le cas où B n'est pas distinct de A le sens de parcours et même la droite AB sont indéterminés et indifférents).

Nous définirons l'èquipollence plus loin. Dès maintenant nous pourrons considérer un vecteur ξ comme déterminé par l'ensemble de tous les segments dirigés $\overline{A' B'}$ équipollents à un même segment dirigé $\overline{A B}$. Pour montrer que le segment dirigé $\overline{A B}$ ne joue pas un rôle particulier dans cet ensemble de segments dirigés, il nous suffira de montrer que deux segments dirigés $\overline{A' B'}$, $\overline{A'' B''}$ équipollents à un troisième $\overline{A B}$ sont équipollents entre eux. Alors le même ensemble de segments dirigés pourra être défini comme l'ensemble des segments dirigés équipollent à l'un quelconque $\overline{A' B'}$ de ceux-ci.

On voit aussi que, les segments dirigés $\overline{A' B'}$ équipollents à un même segment dirigé $\overline{A B}$ peuvent être considérés comme des représentations du même vecteur ξ. On pourra traduire ces relations par la notation

$$\overline{A' B'} = \overline{A B} = \xi.$$

Définition de l'équipollence. Comme en géométrie élémentaire, nous dirons que deux segments dirigés $\overline{A B}$, $\overline{A' B'}$ sont équipollents lorsque:

α) les segments $A B$ et $A' B'$ ont des longueurs égales et, — si les droites $A B$ et $A' B'$ sont bien déterminées, (ce qui n'a lieu que si les longueurs des segments $A B$ et $A' B'$ ne sont pas nulles),— lorsque *β)* ces droites sont parallèles ou confondues et lorsque *γ)* les sens de parcours des deux segments dirigés sont les mêmes:

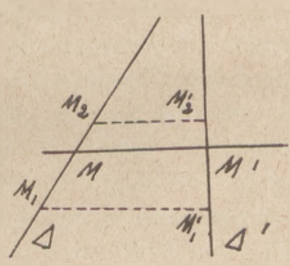
Les deux conditions *β)* et *γ)* disparaissant lorsque la longueur commune des segments $A B$ et $A' B'$ est nulle, on voit que: quel que soit le point A. l'ensemble de tous les segments dirigés équipollents au segment dirigé $\overline{A A}$ est formé de tous les segments dirigés $\overline{A' A'}$. Ainsi, il existe un vecteur bien déterminé, représenté par tous les segments dirigés dont l'origine et l'extrémité ne sont pas distinctes. Nous désignerons ce vecteur par 0 (à distinguer du nombre zéro).

Dans le cas où la longueur commune des segments $A B$ et $A' B'$ n'est pas nulle, il nous reste à préciser la signification que nous attachons à la condition *γ)*. Nous aurons aussi à montrer que deux segments dirigés $\overline{A' B'}$ et $\overline{A'' B''}$ équipollents à un troisième $\overline{A B}$ sont équipollents entre eux.

Or si la longeuur $A B$ est nulle, il en sera de même de celles de $A'B'$ et $A''B''$; donc $\overline{A'B'}$ et $\overline{A''B''}$ sont bien, dans ce cas, équipollents entre eux. Si, au contraire, la longueur AB n'est pas nulle, il en sera de même des longueurs $A'B'$ et $A''B''$ qui seront égales. Les droites $A'B'$ et $A''B''$ seront bien déterminées et seront chacune parallèle à la droite bien déterminée AB ou confondue avec cette droite. Nous avons vu que dans ce cas, les droites $A'B'$ et $A''B''$ seront parallèles ou confondues.

Pour compléter et légitimer la définition des vecteurs, nous avons donc à dire ce que nous entendons, pour deux segments dirigés situés sur deux droites parallèles ou confondues, en disant qu'ils sont dirigés de la même façon et ensuite à montrer que si trois segments dirigés sont situés sur des droites deux à deux parallèles ou confondues, et si deux d'entre eux sont dirigés comme le troisième, le premier est dirigé comme le deuxième. Dans ce but, nous allons étudier les orientations de droites situées dans un même plan.

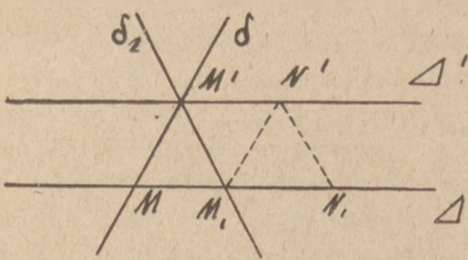
Orientations de deux droites d'un plan. Considérons deux droites Δ, Δ' situées dans un même plan et menons par un point M mobile sur Δ, une parallèle à une droite fixe Δ'' joignant un point de Δ à un point de Δ'. Cete parallèle étant située dans le plan contenant Δ et Δ' et n'étant (comme Δ'') parallèle, ni à Δ, ni à Δ', va couper Δ' en un point mobile M'. Si M parcourt Δ dans une direction déterminée, on ne sait pas d'avance si M' ne va pas zigzaguer sur Δ'. La condition *g)* nous permet de prouver que M' va parcourir Δ' dans un sens déterminé. En effet, soient deux positions $M_1 M_1'$ et $M_2 M_2'$ de la droite MM'; si par exemple M est entre M_1 et M_2, les points M_1 et M_2 appartiendront respectivement aux deux régions déterminées dans le plan par la droite MM'. Or $M_1 M_1'$ et $M_2 M_2'$ étant parallèles à MM', les points M_1' et M_2' appartiennent respectivement aux mêmes régions que M_1 et M_2. Donc le segment $M_1' M_2'$ coupe $M\ M'$; comme le point d'intersection ne peut être qu'en M', on voit que M' est entre M_1' et M_2', quand M est entre M_1 et M_2. De même si M_1 est entre M et M_2, M_1' sera entre M' et M_2'...



Orientations de deux droites parallèles. Considérons deux droites Δ et Δ' d'un plan, et une sécante variable NN' qui reste parallèle à une sécante fixe δ. Il y a deux sens opposés S' et Σ' sur Δ'; lorsque M' décrit Δ' dans un certain sens S', nous avons vu que M parcourt Δ dans un sens déterminé, que nous pourrons appeler S_δ; évidemment quand M' décrit Δ' dans le sens Σ', M parcourra Δ dans un sens Σ_δ qui sera le sens opposé à S_δ.

En général, le sens S_δ dépendra de δ, toutes choses égales d'ailleurs. Il ne dépendra que de la direction de δ et non de sa position si l'on exprime par là ce fait évident que S_δ sera défini de la même manière quand on remplace δ par une droite parallèle.

Nous allons montrer que si les droites Δ et Δ' sont parallèles le sens de parcours S_δ sur Δ, associé au sens S' sur Δ' par l'intermédiaire de la direction δ est indépendant de cette direction δ.



Soient en effet $M M'$ et $M_1 M'$, les sécantes δ et δ_1 que nous pouvons faire passer par un même point M' de Δ'. Soit $M_1 N'$ la sécante menée par M_1. parallèlement à δ et qui coupe Δ' en N'; soit $N' N_1$ la sécante menée par N' à δ_1 et qui rencontre Δ en N_1. Appelons S' le sens de parcours de Δ', de M' vers N'. Alors S_δ sera le sens de M vers M_1 et S_{δ_1} le sens de M_1 vers N_1. Or, remarquons que d'après la condition *i)* les longueurs $M M_1$ et $M_1 N_1$ sont égales à la longueur $M' N'$ et par suite sont égales entre elles. Si donc les sens S_δ et S_{δ_1} étaient différents, N_1 serait confondu avec M. Alors $N' M$ et $M' M_1$ du parallélogramme $M M' N' M_1$ seraient parallèles contrairement à la condition *j)*.

Ainsi, les sens S_δ et S_{δ_1} sont les mêmes. Ainsi, étant données deux droites parallèles, on peut associer deux à deux d'une manière définie leurs sens de parcours, la droite δ ne servant que comme intermédiaire dont cette association est indépendante.

Nous allons transformer cette relation entre les sens de parcours de deux droites parallèles pour la définir d'une façon plus analogue à celle qu'on rencontre en géométrie élémentaire.

Appelons demi-droite MS l'ensemble des points de la droite

Δ qui suivent le point M quand on s'éloigne de M sur Δ dans le sens S.

On peut dire alors que si S et S' sont les sens de parcours de Δ et Δ' qui sont associés au sens précédent, les demi-droites MS et $M'S'$ qui sont déterminées sur Δ et Δ' par une sécante quelconque MM' sont dans la même région du plan déterminée par la droite MM'. Ceci nous fournit finalement la définition suivante:

Etant données deux droites parallèles Δ et Δ', on dira que ces deux parallèles sont dirigées dans le même sens, si l'on a adopté sur ces deux droites, deux sens de parcours S et S' tels qu'en coupant Δ et Δ' par une sécante quelconque M et M', les demi-droites issues de ces sécantes dans les sens S et S' soient du même côté de la sécante MM', c'est à dire dans la même région du plan déterminée par cette sécante.

On en déduit en particulier que si, dans un même plan, on considère trois parallèles $\Delta, \Delta', \Delta''$ dont les deux premières sont dirigées dans le même sens de parcours que la troisième, les deux premières sont dirigées dans le même sens.

Car en coupant par une sécante $MM'M''$, si les demi-droites MS, $M'S''$ sont, par rapport à cette sécante dans la même région que $M''S''$, alors MS sera dans la même région que $M'S'$.

Passons au cas de trois parallèles $\Delta, \Delta', \Delta''$ non dans un même plan. Construisons comme précédemment deux parallélogrammes ayant un coté commun AB sur Δ'' et les côtés opposés à AB respectivement en $A'B'$ sur Δ' et $A''B''$ sur Δ''. D'après la condition *k)*, $A'B'B''A''$ forme un parallélogramme. Par suite, si on dirige Δ' et Δ'' comme Δ, si par exemple Δ est dirigé de A vers B, Δ' et Δ'' seront dirigés respectivement de A' vers B' et de A'' vers B''. Comme $A'A''$ et $B'B''$ sont parallèles, les deux directions de Δ' et Δ'' seront les mêmes. Ainsi, dans tous les cas, si deux droites Δ et Δ' parallèles à une troisième, sont dirigées comme cette troisième, les deux droites Δ et Δ' sont, non seulement parallèles (ou confondues), mais encore dirigées de la même façon.

Régions déterminées par deux parallèles dans leur plan. Considérons maintenant deux droites parallèles D, D' et une sécante NN'. La droite D détermine deux régions R_1, R_1' dans le plan des deux droites D, D'; la droite D' détermine deux régions R_2, R_2'. Les deux droites D, D' ne peuvent donc déterminer dans le plan que quatre régions au plus, l'une commune à R_1 et R_2 que nous pouvons appeler $R_1 R_2$, de même les régions $R_1 R_2'$, $R_1' R_2$ et $R_1' R_2'$.

Or quand on parcourt la sécante NN' dans un sens déterminé, on ne peut changer de région qu'en passant en N et N'. On ne rencontre donc que trois régions sur NN'. D'autre part tout point P du plan appartient à une de ces trois régions, comme on le voit en menant de P la parallèle à D, parallèle qui rencontrera NN' en un point situé dans les mêmes régions que P par rapport à D et D' séparément.

En résumé, deux droites parallèles divisent leur plan en trois régions et trois seulement. Et si l'on mène par un point P du plan une sécante QQ' à ces deux parallèles, la situation du point P par rapport à Q et Q' reste la même quels que soient P et QQ' pourvu que P reste dans l'une des trois régions. En particulier, on pourra appeler intérieur des parallèles, celle de ces régions où P est entre QQ'.

Remarque. D'après ce qui précède, si on considère un parallélogramme $ABB'A'$, les côtés opposés AB, $B'A'$ sont dirigés de la même façon quand on les parcourt l'un dans le sens AB, l'autre dans le sens $A'B'$. De plus leurs longueurs sont égales.

Réciproquement si deux segments dirigés $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ sont de longueurs égales, portés sur des droites parallèles et sont dirigés dans le même sens, le quadrilatère obtenu en les complétant par les segments qui joignent, l'un les deux extrémités, l'autre les deux origines, est un parallélogramme. Car en construisant un parallélogramme ayant pour côtés consécutifs $A'A$ et AB, soit $A'ABB''$, on aurait pour $\overline{A'B'}$ et $\overline{A'B''}$, deux segments dirigés issus d'un même point, parallèles à une même droite et dans le même sens que $\overline{AB}$ de sorte que B' et B'' coïncident.

On voit que la condition nécessaire et suffisante pour que deux segments dirigés soient équipollents est la suivante:

ou bien pour chaque segment, l'origine et l'extrémité sont confondues

ou bien les deux segments dirigés sont deux segments de longueurs égales situés sur une même droite et dirigés dans le même sens

ou bien en joignant les deux extrémités et les deux origines des deux segments dirigés, les quatre segments obtenus forment un parallélogramme.

Retour au champ de vecteurs. Revenons maintenant à l'équipollence. Nous avons défini ce qu'on entendait par même sens de parcours sur deux droites parallèles. Nous avons donc défini complètement l'équipollence de deux segments dirigés et prouvé que deux segments dirigés équipollents à un troisième sont équipollents entre eux. La définition du champ de vecteurs est complète.

Il nous sera utile de remarquer que si $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, on a $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ et réciproquement. En effet; ou bien les droites AB $A'B'$ sont bien déterminées et distinctes. Alors $ABB'A'$ est un parallèlogramme et par suite $\overline{AA'} = \overline{BB'}$. Ou bien les droites AB et $A'B'$ sont déterminées mais coïncident. Alors en prenant les points a, b, a', b' correspondants à $A, B, A'B'$ sur la droite euclidienne, on voit qu'on a $ab = a'b'$, d'où $aa' = bb'$ et par suite $\overline{AA'} = \overline{BB'}$. Ou enfin l'une des deux droites $AB, A'B'$ n'est pas déterminée, c'est à dire que par exemqle B coïncide avec A; alors B' coïncide avec A' et alors $\overline{AA'}$ coïncide avec $\overline{BB'}$, on a encore $\overline{AA'} = \overline{BB'}$.

On voit dès maintenant que les conditions I et III sont satisfaites. La condition II se démontre aisément. Si on se donne un point A et un vecteur ξ, et si $\overline{A'B'}$ est un des segments dirigés qui représente ξ, pour trouver un point B tel que $\overline{AB} = \xi$, il faut distinguer suivant que $\xi = 0$ ou non. Si $\xi = 0$, on a $\overline{AA} = \xi$ et la seule position possible du point B est A. Si $\xi \neq 0$, alors la droite $A'B'$ est déterminée et, par suite, il y a une seule droite menée par A parallèle à $A'B'$ ou confondue avec $A'B'$. Le point B sera sur cette droite dans l'une des deux positions B ou B_1 telles que les longueurs AB et AB_1 soient égales à $\| \xi \|$. Enfin comme les segments dirigés $\overline{AB}$ et $\overline{A'B'}$ doivent être de même sens, cette condition déterminera celui des points B ou B_1 à choisir.

Définition de la somme. Pour réaliser la condition IV, il nous suffira de définir la somme de deux vecteurs précisément de la seule façon qui réalise cette condition. Etant donnés deux vecteurs ξ et η, prenons un point A quelconque de l'espace considéré. Il y a un point B tel que $\overline{AB} = \xi$ et, alors, un point C tel que $\overline{BC} = \eta$. On aura d'après la condition IV

$$\xi + \eta = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Donc la somme $\xi + \eta$ doit être prise par définition égale à $\overline{AC}$ lorsque $\xi = \overline{AB}$ et $\eta = \overline{BC}$ Il faut d'abord montrer que cette définition est indépendante du point A, c'est à dire que si A' est un autre point quelconque et si $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ et $\overline{B'C'} = \overline{BC}$, on a $\overline{A'C'} = \overline{AC}$. En effet, puisque $\overline{A'B'} = \overline{AB}$, on aura $\overline{AA'} = \overline{BB'}$; de même de $\overline{B'C'} = \overline{BC}$, on tire $\overline{BB'} = \overline{CC'}$. On a donc $\overline{AA'} = \overline{CC'}$ et par suite $\overline{AC} = \overline{A'C'}$.

On voit sans peine que les conditions 1° à 5° sont vérifiées.

Définition du produit $a . \xi$. Soit ξ un vecteur et a un nombre quelconque; pour définir $a . \xi$ nous représentons ξ par un segment dirigé $\overline{AB}$ et alors $a . \xi$ sera représenté par définition par un segment dirigé $\overline{AB'}$. On réalisera la condition 15° en prenant B' tel que la longueur AB' soit égale à $|a|$ fois la longueur AB. Cela suffira pour déterminer la position de B' lorsque $|a| = 0$ ou lorsque $\xi = 0$, cas où B' coïncidera avec A. Pour que les droites soient définies dans l'espace affine à déterminer de la même façon que dans l'espace affine le plus général. on prendra B' sur la droite AB. Enfin puisqu'on doit avoir $1 . \overline{AB} = \overline{AB}$ et $(-1) . \overline{AB} = \overline{BA}$, on prendra $\overline{AB'}$ et $\overline{AB}$ de même sens ou de sens contraires suivant que $a > 0$ ou < 0.

On voit sans peine que les conditions 6° à 8° et 10° à 12° sont satisfaites.

D é f i n i t i o n d e $\|\xi\|$. Nous prendrons naturellement pour $\|\xi\|$ la longueur commune aux divers segments dirigés $\overline{AB}$ qui représentent ξ. Alors les conditions 13° à 15° sont évidemment satisfaites.

Il ne reste plus maintenant à vérifier que la condition 9°:

$$a . (\xi + \eta) = a . \xi + a . \eta$$

Nous allons voir que cela revient à généraliser au cas actuel le théorème de Thalès.

Généralisation du théorème de Thalès. Soient deux vecteurs abstraits quelconques ξ et η et a un nombre quelconque. Par un point A arbitraire, menons le segment dirigé $\overline{AB} = \xi$ et par B le segment dirigé $\overline{BC} = \eta$. Le segment dirigé $\overline{AC}$ représentera le vecteur $\varphi = \xi + \eta$.

Si A, B, C sont alignés, il est posible d'appliquer la droite ABC sur une droite euclidienne et alors les vecteurs $\xi, \eta, \varphi, a . \xi$,

$a \cdot \eta$. $a \cdot \varphi$ viendront s'appliquer sur les vecteurs euclidiens ξ', η', φ', $a\xi'$, $a\eta'$, $a\varphi'$ et on aura

$$\varphi' = \xi' + \eta', \quad a\varphi' = a\xi + a\eta'$$

d'où

$$a \cdot \varphi = a \cdot \xi + a \cdot \eta.$$

Si A, B, C ne sont pas alignés, A, B, C sont deux à deux distincts, les droites AB, BC, CA sont deux à deux sécantes.

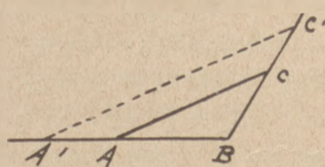
Soit $\overline{BA'}$ le segment dirigé bien déterminé ayant pour origine le point B et tel que $\overline{BA'} = (-a) \cdot \xi$, d'où $\overline{A'B} = a \cdot \xi$. La parallèle à AB menée par A' sera dans le plan $A'AC$ c'est à dire dans le plan ABC et coupera nécessairement BC en un point C'. Il existera alors deux nombres b et c tels que

$$\overline{BC'} = b \cdot \overline{BC} \quad \text{et} \quad \overline{A'C'} = c \cdot \overline{AC}$$

Comme on a $\overline{A'C'} = \overline{A'B} + \overline{BC'}$,

on aura: $c \cdot \overline{AC} = a \cdot \overline{AB} + b \cdot \overline{BC}$

$$c \cdot (\xi + \eta) = a \cdot \xi + b \cdot \eta$$



Il suffira pour démontrer que la condition 9° est satisfaite de prouver que

$$a = b = c.$$

Pour interpréter cette relation, observons que dans le cas où il existe un nombre c tel que

$$\overline{A'C'} = c \cdot \overline{AC}$$

on pourra appeler c le rapport des mesures algébriques de $A'C'$ et de AC. Il n'y aura pas d'inconvénient à écrire

$$c = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$$

On voit alors que nous avons à établir les égalités

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC}}$$

qui se présentent sous la forme familière du théorème de Thalès.

La démonstration se fera identiquement de la même manière qu'en géométrie élémentaire, pourvu qu'on ait soin de n'utiliser que les propriétés qui ont été plus haut démontrées ou admises comme définition de l'espace considéré.

Ainsi, pour montrer que les signes de a et b sont les mêmes, on utilisera les remarques faites page 25. Si par exemple $a < 0$, cela veut dire que B est entre A et A' donc que B est entre les parallèles AC et $A'C'$ et par suite que B est entre C et C', d'où $b < 0$.

On démontrera d'abord que $a = b$ et pour démontrer que $a = c$ on se servira du premier résultat en l'appliquant au triangle $A'BC'$ coupé par une parallèle à BC' menée par A.

Ainsi nous avons associé à l'espace considéré un champ de vecteurs satisfaisant à toutes les conditions 1° à 15° et I à IV. Relativement à ce champ de vecteurs et à l'ensemble des points de l'espace considéré, on peut définir des droites et des plans comme nous l'avons fait pour l'espace affine défini analytiquement. Ces droites et ces plans sont précisément ceux qui ont été donnés avec l'espace considéré et les longueurs n'ont pas changé. En effet, d'après la définition même du produit a. ξ, les points C_ϱ tels que $\overline{AC_\varrho} = \varrho \,.\, \overline{AB}$ où ϱ est un nombre réel quelconque sont situés sur la droite donnée d'avance AB aussi bien que sur la droite abstraite que, par l'intermédiaire du champ vectoriel, nous avons associée à AB. Ces deux droites coïncident.

Alors les plans abstraits étant définis de la même façon, qu'on considére les plans donnés d'avance ou les plans définis par l'intermédiaire du champ de vecteurs, ces deux familles de plans coïncident. De même les définitions des parallèles coïncident; etc.

Dépendance extra-logique entre les points, les éléments géométriques et les opérations vectorielles. Tout ce qui précéde s'applique en prenant pour points de l'espace abstrait affine considéré, des éléments de nature absolument quelconque. Mais on aurait introduit une notion bien inutile, si on admettait que le choix des opérations vectorielles satisfaisant aux conditions 1° à 15° et I à IV pût être indépendant de la nature des points de l'espace abstrait envisagé.

Il est en effet facile de montrer qu'à peu près tout espace peut être, si on se place au point de vue purement logique, considéré d'une infinité de façons comme un espace affine. Il faudra naturellement s'adresser à un espace ayant au moins la puissance du continu puisqu'un espace affine contenant deux points contient une droite abstraite qui a la puissance du continu.

Si l'espace considéré a exactement la puissance du continu — et c'est le cas de tous les espaces qui se présentent naturellement dans les applications les plus importantes — on pourra établir une correspondance biunivoque entre les points de cet espace et les points de l'espace euclidien et par suite attacher à cet espace abstrait une famille de vecteurs satisfaisant aux conditions 1° à 15° et I à IV. Mais bien entendu les opérations vectorielles qu'on définira ainsi n'auront en général aucun rapport avec la nature des points de l'espace considéré. On arrivera ainsi à des conséquences étranges conformes à la logique mais contraires au bon sens. Par exemple si on prend pour espace abstrait l'espace dont les points sont ceux d'une droite euclidienne, on parviendra par l'intermédiaire de la correspondance mentionnée ci-dessus à définir sur cette droite euclidienne des droites abstraites distinctes, des plans abstraits, des parallélogrammes, etc. En d'autres termes, croyant par la notion d'espace affine introduire un certain ordre, on pourra détruire au contraire si, l'on ne tient compte que de considérations purement logiques, l'ordre naturel qui existait d'avance dans l'espace considéré.

12 Février 1925.

Zur Potentialtheorie

von

Leon Lichtenstein.

In einem vor kurzem veröffentlichten Aufsatz, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. I[1]), habe ich eine Anzahl neuer Sätze aus der Theorie des Potentials einfacher und doppelter Belegungen, die bei verschiedenen höheren Randwertproblemen, so z. B. bei gewissen Existenzbeweisen der Hydrodynamik zur Verwendung kommen, bewiesen. Die vorgenannten Potentiale werden dabei als Funktionale der Randkurven oder Randflächen aufgefaßt. Diese Untersuchungen werden auf den folgenden Seiten fortgesetzt, wobei sich verschiedene neue Sätze ergeben. Bei der Abfassung der vorliegenden Abhandlung ist sorgfältig darauf geachtet worden, daß sie, auch ohne Kenntnis der vorhin zitierten Arbeit, verstanden werden kann. Einzelne Wiederholungen ließen sich aus diesem Grunde nicht gut vermeiden.

Es sei T irgendein beschränktes einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Begrenzung S aus einer endlichen Anzahl geschlossener, doppelpunktfreier Flächen mit stetiger Normale, die einander weder schneiden noch berühren, besteht. Bekanntlich läßt sich S in eine endliche Anzahl Stücke $\Sigma^{(1)}, \ldots, \Sigma^{(n)}$ zerlegen, so daß in jedem einzelnen dieser Stücke entweder z eine (eindeutige) stetige Funktion von x und y ist, die stetige Ableitungen erster Ordnung hat, oder y eine ebensolche Funktion von x und z. oder schießlich z eine gleich geartete Funktion von x und y darstellt. Es können natürlich auch alle drei Möglichkeiten zugleich bestehen. Man kann sich auch so einrichten, und wir wollen dies

[1]) Mathematische Zeitschrift, Band 23 (1925), S. 72—88.

im folgenden voraussetzen, daß die einzelnen Bereiche $\Sigma^{(k)}$ die Fläche S „dachziegelartig" überdecken. Es sei etwa in $\Sigma^{(1)}$

$$z = f^{(1)}(x, y).$$

Die Funktion $f^{(1)}$ ist im Innern und auf dem Rande eines von einer Jordanschen Kurve $\mathfrak{S}^{(1)}$ mit stetiger Tangente begrenzten ebenen Gebietes, kürzer in einem Bereiche $\mathfrak{T}^{(1)}$ (in $\mathfrak{T}^{(1)} + \mathfrak{S}^{(1)}$), erklärt und nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig. Wir setzen darüber hinaus fest, daß, unter (x_1, y_1), (x_2, y_2) zwei Punkte in $\mathfrak{T}^{(1)} + \mathfrak{S}^{(1)}$, unter $\mathfrak{r}_{12}$ ihren Abstand verstanden,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} f^{(1)}(x_1, y_1) - \frac{\partial}{\partial x} f^{(1)}(x_2, y_2)\right|, \left|\frac{\partial}{\partial y} f^{(1)}(x_1, y_1) - \frac{\partial}{\partial y} f^{(1)}(x_2, y_2)\right| \leqq M \mathfrak{r}_{12}^{\lambda}$$

gilt. Beziehungen dieser Art bestehen für jedes Flächenstück $\Sigma^{(k)}$. Sie besagen, daß die Richtungskosinus der Flächennormale von S einer Hölderschen Bedingung mit dem Exponenten λ genügen:

$$(1) \qquad |\alpha_1 - \alpha_2|, \ |\beta_1 - \beta_2|, \ |\gamma_1 - \gamma_2| \leqq M_0 \delta_{12}^{\lambda} \, (0 < \lambda < 1).$$

In (1) bezeichnen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Richtungskosinus in den Punkten $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ auf S; δ_{12} ist ihr Abstand:

$$\delta_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Es mögen nunmehr

$$(2) \qquad \xi(x, y, z), \quad \eta(x, y, z), \quad \zeta(x, y, z)$$

drei im Innern oder auf dem Rande des Gebietes T, kürzer im Bereiche T oder noch einfacher in $T + S$ erklärte stetige Funktionen bezeichnen, die daselbst stetige Ableitungen erster Ordnung haben und den Ungleichheiten

$$(3) \qquad \begin{gathered} |\xi|, \ |\eta|, \ |\zeta| \leqq 2\Omega_0; \quad \left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \xi}{\partial y}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right| \leqq 2\Omega_0; \\ \left|\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_2\right| \leqq 2\Omega_0 d_{12}^{\lambda}, \ldots \end{gathered}$$

genügen. In (3) bezeichnen $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_1$ und $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_2$ die Werte der eingeklammerten Größe in den Punkten (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) in $T + S$; d_{12} ist ihr Abstand,

$$d_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Durch die Gleichungen

$$\bar{x} = x + \bar{\xi}, \quad \bar{y} = y + \bar{\eta}, \quad \bar{z} = z + \bar{\zeta} \tag{4}$$

ist, wenn, wie vorausgesetzt werden soll, Ω_0 hinreichend klein ist, eine topologische Abbildung des Bereiches T auf einem Bereich $\bar{T}$ erklärt, dessen Begrenzung $\bar{S}$ sich ganz wie S verhält. Die einzelnen Randkomponenten von $\bar{S}$, Bilder der Randkomponenten von S, sind geschlossene, doppelpunktfreie Flächen mit stetiger Normale, die Richtungskosinus ihrer Normale erfüllen gewisse Ungleichheiten, die zu (1) analog sind.

Es sei jetzt $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ irgendein System nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetiger Ortsfunktionen in $T + S$, die den Ungleichheiten

$$\begin{gathered} |\dot{\xi}|, \ |\dot{\eta}|, \ |\dot{\zeta}| \leqq \Omega_0; \quad \left|\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial y}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq \Omega_0; \\ \left|\left(\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x}\right)_2\right| \leqq \Omega_0 d_{12}^{\lambda}, \\ \cdots\cdots\cdots \end{gathered} \tag{5}$$

genügen. Es sei weiter $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ ein anderes System von Funktionen, die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in $T + S$ stetig sind und die Ungleichheiten

$$\begin{gathered} |\hat{\xi}|, \ |\hat{\eta}|, \ |\hat{\zeta}| \leqq \Omega_0; \quad \left|\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial y}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq \Omega_0; \\ \left|\left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x}\right)_2\right| \leqq \Omega_0 d_{12}^{\lambda}, \\ \cdots\cdots\cdots \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} |\hat{\xi} - \dot{\xi}|, \ldots, |\hat{\zeta} - \dot{\zeta}|; \ \left|\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi} - \dot{\xi})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\zeta} - \dot{\zeta})\right| \leqq \Omega \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_0, \\ \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi} - \dot{\xi})\right)_1 - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi} - \dot{\xi})\right)_2\right| \leqq \Omega\, d_{12}^{\lambda}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered} \tag{7}$$

erfüllen. Auch hier bezeichnet beispielsweise $\left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi} - \dot{\xi})\right)_1$ den Wert der eingeklammerten Größe im Punkte (x_1, y_1, z_1).

Augenscheinlich gehören die durch die topologischen Abbildungen

$$\hat{x}=x+\hat{\xi},\ldots,\quad \hat{z}=z+\hat{\zeta};\quad \dot{x}=x+\dot{\xi},\ldots,\quad \dot{z}=z+\dot{\zeta}$$

aus $T+S$ gewonnenen Bilder $\hat{T}+\hat{S}$ und $\dot{T}+\dot{S}$ zu der vorhin mit $T+S$ bezeichneten Klasse von Bereichen.

Es sei χ eine auf S erklärte stetige Funktion, die stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung hat. Sind ω und v die G a u ß schen Parameter der Fläche S in der Umgebung eines ihrer Punkte, so kann man χ als Funktion von ω und v auffassen. Es gelten dann die Ungleichheiten

$$(9)\qquad |\chi|;\ \left|\frac{\partial\chi}{\partial\omega}\right|,\ \left|\frac{\partial\chi}{\partial v}\right|\leqq N_3;\quad \left|\left(\frac{\partial\chi}{\partial\omega}\right)_1-\left(\frac{\partial\chi}{\partial\omega}\right)_2\right|\leqq N_4\delta_{12}^{\lambda},\ldots$$

Wir setzen

$$(10)\qquad \chi(x,y,z)=\dot{\chi}(\dot{x},\dot{y},\dot{z})=\hat{\chi}(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$$

und bezeichnen mit $\dot{\theta}$ den von dem Vektor $(\dot{x}',\dot{y}',\dot{z}')\to(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ mit der Innennormale von $\dot{S}$ in $(\dot{x}',\dot{y}',\dot{z}')$ eingeschlossenen Winkel.

Betrachten wir jetzt die Potentiale der Doppelbelegungen

$$(11)\quad \dot{W}(\dot{x},\dot{y},\dot{z})=\int\limits_{\dot{S}}\dot{\chi}'\frac{1}{\dot{r}^2}\cos\dot{\theta}'\,d\dot{\sigma}',\quad \hat{W}(\hat{x},\hat{y},\hat{z})=\int\limits_{\hat{S}}\hat{\chi}'\frac{1}{\hat{r}^2}\cos\hat{\theta}'\,d\hat{\sigma}',$$

unter $d\dot{\sigma}'$ und $d\hat{\sigma}'$ Flächenelemente in den zusammengehörigen Punkten $(\dot{x}',\dot{y}',\dot{z}')$; $(\hat{x}',\hat{y}',\hat{z}')$ auf $\dot{S}'$ und $\hat{S}'$, unter $\dot{r}$ und $\hat{r}$ die Entfernung der Punktepaare $(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$, $(\dot{x}',\dot{y}',\dot{z}')$; $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$, $(\hat{x}',\hat{y}',\hat{z}')$ verstanden. In meiner vorhin genannten Arbeit ist gezeigt worden, *daß für alle* (x,y,z) *in* $T+S$, *darum alle* $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ *in* $\hat{T}+\hat{S}$ *und* $(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ *in* $\dot{T}+\dot{S}$ *und alle den Beziehungen* (5), (6), (7) *genügenden* $\dot{\xi},\dot{\eta},\dot{\zeta}$; $\hat{\xi},\hat{\eta},\hat{\zeta}$ *gleichmäßig die folgenden Ungleichheiten gelten:*

$$(12)\quad |\hat{W}-\dot{W}|\leqq c_0\Omega;\ \left|\frac{\partial\hat{W}}{\partial\hat{x}}-\frac{\partial\dot{W}}{\partial\dot{x}}\right|\leqq c_0\Omega,\ldots\ \left|\left(\frac{\partial\hat{W}}{\partial\hat{x}}-\frac{\partial\dot{W}}{\partial\dot{x}}\right)_1-\left(\frac{\partial\hat{W}}{\partial\hat{x}}-\frac{\partial\dot{W}}{\partial\dot{x}}\right)_2\right|\leqq c_0\Omega d_{12}^{\lambda},\ldots$$

Für den Beweis dieser und der hierzu analogen Beziehungen bei Potentialen einfacher Flächenbelegungen sowie der Volumladungen sind a. a. O. zwei verschiedene Wege skizziert worden. Beide Male wird eine Schar topologischer Abbildungen des Bereiches $T+S$ auf Bereiche $T_\varepsilon + S_\varepsilon$ eingeführt, bei der dem Punkte (x, y, z) der Punkt

$$(13) \quad x_\varepsilon = \dot{x} + \frac{\varepsilon}{\Omega}(\hat{\xi} - \dot{\xi}), \quad y_\varepsilon = \dot{y} + \frac{\varepsilon}{\Omega}(\hat{\eta} - \dot{\eta}), \quad z_\varepsilon = \dot{z} + \frac{\varepsilon}{\Omega}(\hat{\zeta} - \dot{\zeta})$$

zugeordnet wird. Dem Werte $\varepsilon = 0$ entspricht der Bereich $\dot{T} + \dot{S}$, dem Werte $\varepsilon = \Omega$ der Bereich $\hat{T} + \hat{S}$. Offenbar erfüllen $T_\varepsilon + S_\varepsilon$ *für alle reellen oder komplexen* ε, so daß $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$ gilt, die vorhin den Bereichen $T+S$ auferlegten Ungleichheitsbeziehungen (3)[1]). Mit Rücksicht auf die weiteren Entwicklungen dieser Arbeit wollen wir in dem folgenden noch einmal mit einigen Einzelheiten auf die früheren Betrachtungen eingehen[2]).

Wir setzen

$$(14) \qquad \chi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) = \chi(x, y, z)$$

und betrachten das Potential der Doppelbelegung

$$(15) \qquad W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) = \int\limits_{S_\varepsilon} \chi'_\varepsilon \frac{1}{r_\varepsilon^2} \cos\theta'_\varepsilon \, d\sigma'_\varepsilon,$$

oder, was derselbe ist,

$$(16) \qquad \begin{aligned} W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) = \int\limits_{S} \chi' \Big\{ &\frac{x_\varepsilon - x'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial(y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} + \frac{y_\varepsilon - y'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial(z'_\varepsilon, x'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} + \\ &+ \frac{z_\varepsilon - z'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} \Big\} d\omega' \, d\nu'. \end{aligned}$$

$$r_\varepsilon^2 = (x_\varepsilon - x'_\varepsilon)^2 + (y_\varepsilon - y'_\varepsilon)^2 + (z_\varepsilon - z'_\varepsilon)^2 \text{ [3])}.$$

---

[1]) Für komplexe ε bildet die Gesamtheit der komplexen Punkte x_ε, y_ε, z_ε natürlich keinen Bereich mehr. Wenn wir dennoch gelegentlich sagen werden, $(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ liege in $T_\varepsilon + S_\varepsilon$, so soll damit jedesmal nur ausgesagt werden, daß (x, y, z) in $T+S$ liegt.

[2]) An jener Stelle handelte es sich in erster Linie um die analogen Betrachtungen in der Theorie des Potentials einer einfachen Belegung.

[3]) In (15) bezeichnet, (für reelle ε) $d\sigma'_\varepsilon$ das Flächenelement im Punkte $(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)$ auf S_ε: θ'_ε ist der vom Vektor $(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon, z'_\varepsilon) \longrightarrow (x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ mit der Innennormale von S_ε in $(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)$ eingeschlossene Winkel, r_ε der Abstand der Punkte $(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$, $(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)$; ω und ν sind die zur Darstellung von S ge-

Der Ausdruck (16) hat offenbar auch für komplexe ε einen Sinn[1]). Es ist nicht schwer zu zeigen, das $W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ *eine für alle* (x, y, z) *in* $T + S$ *und alle* ε *in der Kreisfläche* $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$ *analytische und reguläre Funktion von* ε *darstellt.*

Es möge (x_1, y_1, z_1) irgendein Punkt auf S sein. Wir bezeichnen den korrespondierenden Punkt auf S_ε mit $(x_{1\varepsilon}, y_{1\varepsilon}, z_{1\varepsilon})$, den Wert von χ in (x_1, y_1, z_1) mit χ_1. Nach bekannten Sätzen ist für alle (x, y, z) im Innern von T und alle reellen ε mit $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$

$$(17)\quad \int\limits_S \left\{\frac{x_\varepsilon - x'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3}\frac{\partial(y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)}{\partial(\omega', v')} + \frac{y_\varepsilon - y'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3}\frac{\partial(z'_\varepsilon, x'_\varepsilon)}{\partial(\omega', v')} + \frac{z_\varepsilon - z'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3}\frac{\partial(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon)}{\partial(\omega', v')}\right\} d\omega' dv' = 4\pi,$$

sowie für alle (x_1, y_1, z_1) auf S

$$(18)\quad \int\limits_S \left\{\frac{x_{1\varepsilon} - x'_\varepsilon}{r_{1\varepsilon}^3}\frac{\partial(y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)}{\partial(\omega', v')} + \frac{y_{1\varepsilon} - y'_\varepsilon}{r_{1\varepsilon}^3}\frac{\partial(z'_\varepsilon, x'_\varepsilon)}{\partial(\omega', v')} + \frac{z_{1\varepsilon} - z'_\varepsilon}{r_{1\varepsilon}^3}\frac{\partial(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon)}{\partial(\omega', v')}\right\} d\omega' dv' = 2\pi,$$

$$r_{1\varepsilon}^2 = (x_{1\varepsilon} - x'_\varepsilon)^2 + (y_{1\varepsilon} - y'_\varepsilon)^2 + (z_{1\varepsilon} - z'_\varepsilon)^2.$$

Die beiden Formeln gelten, da die linke Seite, wie man leicht sieht, in bezug auf ε analytisch und regulär ist[2]), auch für komplexe ε mit $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$. Es ist also, zunächst für alle (x, y, z) im Innern von T und alle reellen oder komplexen $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$,

---

brauchten Gaußschen Parameter. Den Ausführungen zu Beginn dieser Arbeit gemäß können für ω und v gewiß entweder x und y, oder y und z oder schließlich x und z gewählt werden.

[1]) Wir wählen Ω_0 so klein, daß für alle komplexen ε mit $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$, alle zulässigen reellen oder komplexen ξ, η, ζ; $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ und alle (x, y, z), (x', y', z') in $T + S$ gewiß $\left|\frac{r_\varepsilon}{r}\right| \geqq q > 0$ gilt.

[2]) Bei dem Beweise kommt die Festsetzung $\left|\frac{r_\varepsilon}{r}\right| \geqq q > 0$ (vgl. die Fußnote 1) zur Verwendung. Die Behauptung des Textes ist, soweit es sich um die Formel (17) handelt, selbstverständlich. Um sie für den Integralausdruck (18) zu beweisen, genügt es, eine kleine Kugel vom Radius d um $(x_{1\varepsilon}, y_{1\varepsilon}, z_{1\varepsilon})$ zu beschreiben und die Beziehung $\int\limits_S = \lim \int\limits_{\bar{S}}$ für $d \to 0$ zu beachten, unter $\bar{S}$ den außerhalb der Kugel gelegenen Teil von S verstehend. Offenbar ist $\int\limits_{\bar{S}}$ für alle hinreichend kleinen $d > 0$ eine für alle $|\varepsilon| \leqq \Omega_0 + \delta$ (δ hinreichend klein) analytische und reguläre Funktion von ε, $\int\limits_{\bar{S}}$ konvergiert für alle diese ε gegen seinen Grenzwert für $d \to 0$ gleichmäßig, also ist $\int\limits_S$ für alle $|\varepsilon| < \Omega_0 + \delta$, mithin ge-

$$
(19) \quad \begin{aligned}
W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) = 4\pi\chi_1 + \int\limits_S (\chi' - \chi_1) \Big\{ & \frac{x_\varepsilon - x'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial(y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} + \\
& + \frac{y_\varepsilon - y'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial(z'_\varepsilon, x'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} + \frac{z_\varepsilon - z'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} \Big\} d\omega' d\nu'.
\end{aligned}
$$

Diese Formel gibt, wie man sich ohne Mühe überzeugt, den Wert von $W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ für alle diejenigen (x, y, z) in $T + S$, die sich in Innern und auf dem Gesamtrande (mit Einschluß der Spitze) eines beliebigen geraden Kreiskegels mit der Spitze in (x_1, y_1, z_1) um die Normale zu S in (x_1, y_1, z_1) als Achse und einem Oeffnungswinkel $< \pi$ befinden[1]). Wegen (18) ist insbesondere

$$
(20) \quad \begin{aligned}
W_\varepsilon(x_{1\varepsilon}, y_{1\varepsilon}, z_{1\varepsilon}) = 2\pi\chi_1 + \int\limits_S \chi' \Big\{ & \frac{x_{1\varepsilon} - x'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial(y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} + \\
& + \frac{y_{1\varepsilon} - y'_\varepsilon}{r_{1\varepsilon}^3} \frac{\partial(z'_\varepsilon, x'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} + \frac{z_{1\varepsilon} - z'_\varepsilon}{r_{1\varepsilon}^3} \frac{\partial(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon)}{\partial(\omega', \nu')} \Big\} d\omega' d\nu'.
\end{aligned}
$$

Von der Formeln (19) und (20) ausgehend, läßt sich ähnlich wie für reelle ε schließen, daß W_ε eine für alle reellen oder komplexen ε mit $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$ und alle (x, y, z) in $T + S$ nebst ihren partiellen Abteilungen $\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x}, \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial y}, \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial z}$ stetige Funktion ihrer vier Argumente darstellt. Diese partiellen Abteilungen genügen einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ.

Wir setzen

$$
(21) \quad \begin{aligned}
& |W_\varepsilon|; \quad \left|\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial y}\right|, \quad \left|\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial z}\right| \leqq c^{(1)}, \\
& \left|\left(\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x}\right)_2\right| \ldots \leqq c^{(1)} d_{12}^\lambda,
\end{aligned}
$$

unter $c^{(1)}$ eine Konstante verstanden, wie später unter $c^{(2)}, c^{(3)}, \ldots$

---

wiß in der Kreisfläche $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$ analytisch und regulär. (Man beachte, daß eine Beziehung $\left|\frac{r_\varepsilon}{r}\right| \geqq q_0 > 0$ auch noch für alle $|\varepsilon| \leqq \Omega_0 + \delta$ gilt. Das gleiche ist bezüglich der Abbildung durch Vermittelung der Funktionen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ zu sagen).

[1]) Wir fassen hier, wie gelegentlich später, $W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ als Ortsfunktion in $T + S$ auf. Wir denken uns dabei in der üblichen Weise die Funktion $W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$, die zunächst nur im Innern des Bereiches T erklärt ist, stetig über das ganze $T + S$ fortgesetzt.

Aus (19) folgt unmittelbar, daß $W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ für alle (x, y, z) im Innern und auf dem Rande des vorhin betrachteten Kegels und alle $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$ sich in bezug auf ε analytisch und regulär verhält[1]. Da dies für alle Kegel gilt, so ist W_ε überhaupt für alle (x, y, z) in $T + S$ und alle ε mit $|\varepsilon| \leqq \Omega_0$ in bezug auf die Gesamtheit seiner vier Argumente stetig und in bezug auf ε analytisch und regulär.

Es sei jetzt Γ_0 der Kreis vom Radius Ω_0 um den Koordinatenursprung als Mittelpunkt in der Ebene der Variablen ε. Für alle $|\varepsilon| \leqq \Omega \leqq \frac{1}{2}\Omega_0$ ist gewiß

$$(22) \qquad W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{W_\delta \, d\delta}{\delta - \varepsilon}, \quad \delta = \Omega_0 e^{i\psi}.$$

In (22) bezeichnet W_δ denjenigen Wert, den das Potential $W_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ erhält, wenn mann dem Parameter ε den Wert $\delta = \Omega_0 e^{i\psi}$ erteilt.

Aus der Formel (22) sind in der eingangs genannten Arbeit zunächst die folgenden Schlußfolgerungen gezogen worden[2].

Offenbar ist für alle $|\varepsilon| \leqq \Omega$ und alle (x, y, z) in $T + S$

$$(23) \qquad \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{W_\delta \, d\delta}{(\delta - \varepsilon)^2}.$$

Augenscheinlich hat $\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \varepsilon}$ für alle $|\varepsilon| \leqq \Omega$ stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf x, y und z. Denn W_ε hat für alle ε auf Γ_0 diese Eigenschaft. Wir schreiben

$$(24) \qquad \begin{gathered} \left|\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|, \left|\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x \partial \varepsilon}\right|, \left|\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial y \partial \varepsilon}\right|, \left|\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial z \partial \varepsilon}\right| \leqq c^{(2)}; \\ \left|\left(\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x \partial \varepsilon}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x \partial \varepsilon}\right)_2\right|, \ldots \leqq c^{(2)} d_{12}^\lambda. \end{gathered}$$

Beachtet man (24) und die Beziehung

---

[1] Der Beweis wäre ganz ähnlich wie in der Fußnote 2) S. 39 zu führen.
[2] Vgl. die Fußnote 2) S. 38.

$$\hat{W} - \dot{W} = \int_0^{\Omega} \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \varepsilon} d\varepsilon, \tag{25}$$

so findet man die bereits auf S. 37 angegebenen Ungleichheiten

$$\begin{gathered} |\hat{W} - \dot{W}| \leqq c_9 \Omega; \quad \left| \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{x}} \right| \leqq c_9 \Omega, \ldots \\ \left| \left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{x}} \right)_1 - \left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{x}} \right)_2 \right| \leqq c_9 \Omega d_{12}^{\lambda} \text{ [1]}, \end{gathered} \tag{26}$$

. . . .

Aus der Beziehung (22) wollen wir jetzt einige weitergehende Folgerungen ziehen. Es gilt die Entwicklung

$$W_\varepsilon = \overline{W}^{(0)} + \varepsilon \overline{W}^{(1)} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \overline{W}^{(2)} + \ldots \tag{27}$$

Die Reihe rechterhand konvergiert für alle den Ungleichheiten (5), (6), (7) genügenden reellen oder komplexen $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$; $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ und alle $|\varepsilon| \leqq \Omega$ unbedingt und gleichmäßig. Dabei ist

$$\overline{W}^{(n)} = \left[\frac{\partial^n}{\partial \varepsilon^n} W_\varepsilon \right]_{\varepsilon = 0} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{W_\delta}{\delta^{n+1}} d\delta. \tag{28}$$

Die Funktion $\overline{W}^{(n)}$ hat für alle (x, y, z) in $T + S$ stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung. Es gilt

---

[1]) In (26) bezeichnen $\hat{W}$ und $\dot{W}$ in ausführlicher Schreibweise die Ausdrücke $W(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ und $W(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Die zweite und die dritte Ungleichheit ergeben sich aus den Formeln

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{x}} = \int_0^{\Omega} \frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x \partial \varepsilon} d\varepsilon, \quad \frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x \partial \varepsilon} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{1}{(\delta - \varepsilon)^2} \frac{\partial W_\delta}{\partial \dot{x}} d\delta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{1}{(\delta - \varepsilon)^2} \left(\frac{\partial W_\delta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial W_\delta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial W_\delta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \dot{x}} \right) d\delta$$

und den Ungleichheiten (21).

Der Übergang von $\frac{\partial \hat{W}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{x}}$ zu $\frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{x}}$ bietet nicht die geringsten Schwierigkeiten.

$$\left|\overline{W}^{(n)}\right|, \quad \left|\frac{\partial \overline{W}^{(n)}}{\partial x}\right|, \ldots \leqq c^{(3)},$$

(29)
$$\left|\left(\frac{\partial \overline{W}^{(n)}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial \overline{W}^{(n)}}{\partial x}\right)_2\right| \leqq c^{(3)} d_{12}^{\lambda}, \ldots$$

Für $\overline{W}^{(n)}$ ergibt sich aus (19), da χ_1, wie übrigens auch $\chi' - \chi_1$, von ε unabhängig ist, der folgende Ausdruck:

(30)
$$\overline{W}^{(n)} = \int\limits_S (\chi' - \chi_1) \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon^n} \left\{ \frac{x_\varepsilon - x'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial (y'_\varepsilon, z'_\varepsilon)}{\partial (\omega', \nu')} + \frac{y_\varepsilon - y'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial (z'_\varepsilon, x'_\varepsilon)}{\partial (\omega', \nu')} + \right.$$
$$\left. + \frac{z_\varepsilon - z'_\varepsilon}{r_\varepsilon^3} \frac{\partial (x'_\varepsilon, y'_\varepsilon)}{\partial (\omega', \nu')} \right\}_{\varepsilon = 0} d\omega' d\nu' \, ^{1)}.$$

Offenbar ist $\overline{W}^{(0)} = \dot{W}$. Setzt man in (27) $\varepsilon = \Omega$ ein, so findet man, da jetzt $W_\varepsilon = \hat{W}$ wird,

(31)
$$\hat{W} = \dot{W} + \Omega\, \overline{W}^{(1)} + \frac{1}{2!} \Omega^2\, \overline{W}^{(2)} + \ldots$$

Man überzeugt sich leicht, daß in $\overline{W}^{(n)}$ die zu integrierende Funktion ein homogenes Polynom n-ten Grades inbezug auf

$$\frac{1}{\Omega}(\hat{\xi} - \dot{\xi}), \frac{1}{\Omega}(\hat{\eta} - \dot{\eta}), \frac{1}{\Omega}(\hat{\zeta} - \dot{\zeta}), \frac{1}{\Omega}(\hat{\xi}' - \dot{\xi}'), \frac{1}{\Omega}(\hat{\eta}' - \dot{\eta}'), \frac{1}{\Omega}(\hat{\zeta}' - \dot{\zeta}')$$

und die partiellen Ableitungen erster Ordnung der drei zuletzt hingeschriebenen Differenzen inbezug auf ω' und ν' darstellt. Setzt man darum zur Vereinfachung $\Omega^n \overline{W}^{(n)} = W^{(n)}$, so findet man

(32)
$$\hat{W} = \dot{W} + \frac{1}{1!} W^{(1)} + \frac{1}{2!} W^{(2)} + \ldots + \frac{1}{n!} W^{(n)} + \ldots$$

In $W^{(n)}$ ist die zu integrierende Funktion ein homogenes Polynom n-ten Grades in $\hat{\xi} - \dot{\xi}$, $\hat{\eta} - \dot{\eta}$, $\hat{\zeta} - \dot{\zeta}$; $\hat{\xi}' - \dot{\xi}'$, $\hat{\eta}' - \dot{\eta}'$, $\hat{\zeta}' - \dot{\zeta}'$ und den partiellen Ableitungen erster Ordnung der drei zuletzt hingeschriebenen Differenzen inbezug auf ω' und ν'. Die Entwicklung

---

[1] Der Beweis der Formel (30) bietet, da ja die Existenz von $\overline{W}^{(n)}$ feststeht, keine ernstlichen Schwierigkeiten dar. Man beachte vor allen, daß die zu integrierende Funktion für $r \to 0$, mithin $r_\varepsilon \to 0$, von derselben Ordnung unendlich groß wird wie die zu integrierende Funktion in (19), nämlich von der Ordnung $2 - \lambda$.

konvergiert unbedingt und gleichmäßig für alle reellen oder komplexen $\dot{\xi}, \dot{\eta}\ \dot{\zeta};\ \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$, *die den Ungleichheiten* (5), (6), (7) *genügen*[1])[2]).

Es gilt weiter:

$$
(33)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{W}}{\partial x} &= \frac{\partial \dot{W}}{\partial x} + \frac{1}{1!}\frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} + \frac{1}{2!}\frac{\partial W^{(2)}}{\partial x} + \ldots,\\
\frac{\partial \hat{W}}{\partial y} &= \frac{\partial \dot{W}}{\partial y} + \frac{1}{1!}\frac{\partial W^{(1)}}{\partial y} + \frac{1}{2!}\frac{\partial W^{(2)}}{\partial y} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

und auch diese drei Reihen konvergieren für alle (x, y, z) *in* $T + S$ *und alle zulässigen* $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta};\ \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ *unbedingt und gleichmäßig.*

Schließlich gelten die folgenden Beziehungen

$$
(34)\qquad
\begin{aligned}
\frac{1}{d_{12}^{\lambda}}\left[\left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial x}\right)_2\right] &= \frac{1}{d_{12}^{\lambda}}\left[\left(\frac{\partial \dot{W}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial \dot{W}}{\partial x}\right)_2\right] +\\
&+ \frac{1}{d_{12}^{\lambda}}\left[\left(\frac{\partial W^{(1)}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial W^{(1)}}{\partial x}\right)_2\right] + \ldots,
\end{aligned}
$$

und die einzelnen Glieder rechts sind für alle (x, y, z) *in* $T + S$ *und alle* (5), (6), (7) *genügenden* $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta};\ \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ *absolut genommen kleiner als die Glieder einer konvergenten numerischen Reihe.*

In der Tat ist nach (22) z. B. zunächst

$$
(35)\qquad \frac{1}{d_{12}^{\lambda}}\left[\left(\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x}\right)_2\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{1}{d_{12}^{\lambda}}\,\frac{d\delta}{\delta - \varepsilon}\left[\left(\frac{\partial W_\delta}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial W_\delta}{\partial x}\right)_2\right].
$$

---

[1]) Präziser, die Reihe

$$|W| + \frac{1}{1!}\,|W^{(1)}| + \frac{1}{2!}\,|W^{(2)}| + \ldots$$

konvergiert für alle (x, y, z) in $T + S$ und alle (5), (6), (7) genügenden reellen oder komplexen $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta};\ \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ gleichmäßig.

[2]) Man könnte den Ausdruck $W^{(n)}$, der bei festgehaltenen x, y, z ein Funktional in dem durch (5), (6), (7) erklärten Funktionsfelde ist, im Anschluß an die Klassifikation von Herrn Frechet als ganzes Funktional n-ten Grades bezeichnen. Ersetzt man $\hat{\xi} - \dot{\xi}$, $\hat{\eta} - \dot{\eta}$, $\hat{\zeta} - \dot{\zeta}$ entsprechend durch $\mu_1\dot{\xi} + \mu_2\hat{\xi}$; $\mu_1\dot{\eta} + \mu_2\hat{\eta}$; $\mu_1\dot{\zeta} + \mu_2\hat{\zeta}$, unter $\dot{\xi}, \hat{\xi};\ \dot{\eta}, \hat{\eta};\ \dot{\zeta}, \hat{\zeta}$ nebst ihren Ableitungen stetige Funktionen verstehend, die den Ungleichheiten (7) genügen ($\mu_1 \leq \frac{1}{2}$, $\mu_2 \leq \frac{1}{2}$ konstant), so geht $W^{(n)}$ in ein homogenes Polynom n-ten Grades von μ_1 und μ_2 über.

Aus (35) finden wir für $\varepsilon = \Omega$ in bekannter Weise

$$(36)\qquad \frac{1}{d_{12}^{\lambda}}\left[\left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial x}\right)_1-\left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial x}\right)_2\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega^n}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{1}{d_{12}^{\lambda}}\frac{d\delta}{\delta^{n+1}}\left[\left(\frac{\partial W_\delta}{\partial x}\right)_1-\left(\frac{\partial W_\delta}{\partial x}\right)_2\right].$$

Wegen (21) ist der absolute Betrag des Koeffizienten von Ω^n höchstens gleich

$$\frac{1}{2\pi}\,c_1\,.\,2\pi\,\frac{1}{\Omega_0^n}.$$

Hieraus und aus der Ungleichheit $\Omega \leqq \frac{\Omega_0}{2}$ folgt aber unsere Behauptung. Natürlich kann man sich in den Ausdrücken $W^{(n)}$ die Integration über die Fläche S erstreckt denken. Auch kann man in (33) und (34) die Differentialquotienten nach x, y, z durch diejenigen inbezug auf $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ersetzen.

Wir wollen jetzt die Funktionen $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ und damit den Bereich $\dot{T}$ als vorgegeben betrachten und lediglich $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ als den Beziehungen (6), (7) gemäß variabel ansehen. Das Potential der Doppelbelegung $\hat{W}$ ist bei festgehaltenem (x, y, z) ein Funktional in dem durch (6), (7) präzisierten Funktionenfelde. *In der Formel* (32) *haben wir eine Entwicklung des Funktionals $\hat{W}$ nach ganzen Funktionalen n-ten Grades* ($n = 0, 1, 2,\ldots$) *vor uns.*

§ 3.

Wir haben vorhin (vgl. die Formel (26)) Abschätzungen für die Differenz $\hat{W} - \dot{W}$ sowie ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung gefunden. Für manche Zwecke sind Abschätzungen für den Ausdruck

$$(37)\qquad \hat{W} - \dot{W} - W^{(1)} = \hat{W} - \dot{W} - \Omega \overline{W}^{(1)}$$

und seine partiellen Ableitungen erster Ordnung erwünscht.

Wegen (28) ist mit Rücksicht auf $\Omega \overline{W}^{(1)} = W^{(1)}$

$$(38)\qquad \begin{aligned}\int\limits_0^{\Omega} d\varepsilon \int\limits_0^{\varepsilon}\frac{\partial^2 W_{\bar\varepsilon}}{\partial\bar\varepsilon^2}\,d\bar\varepsilon &= \int\limits_0^{\Omega} d\varepsilon\left[\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial\varepsilon}-\left(\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\right]=(W_\varepsilon)_{\varepsilon=\Omega}-\\ &-(W_\varepsilon)_{\varepsilon=0}-\Omega\left(\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=\hat{W}-\dot{W}-W^{(1)}.\end{aligned}$$

Nun ist aber nach (22)

$$\frac{\partial^2 W_{\bar\varepsilon}}{\partial \bar\varepsilon^2} = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{W_\delta \, d\delta}{(\delta - \bar\varepsilon)^3}, \tag{39}$$

also für alle $\bar\varepsilon \leqq \varepsilon \leqq \Omega \leqq \frac{\Omega_0}{2}$ wegen

$$\delta - \bar\varepsilon \geqq \frac{\Omega_0}{2}, \quad \frac{1}{\delta - \bar\varepsilon} \leqq \frac{2}{\Omega_0}$$

$$\left| \frac{\partial^2 W_{\bar\varepsilon}}{\partial \bar\varepsilon^2} \right| \leqq \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi\Omega_0 \frac{8}{\Omega_0^3} = \frac{16}{\Omega_0^2}, \tag{40}$$

$$\left| \int_0^\varepsilon \frac{\partial^2 W_{\bar\varepsilon}}{\partial \bar\varepsilon^2} d\bar\varepsilon \right| \leqq \frac{16}{\Omega_0^2} \Omega$$

und

$$\left| \int_0^\Omega d\varepsilon \int_0^\varepsilon \frac{\partial^2 W_{\bar\varepsilon}}{\partial \bar\varepsilon^2} d\bar\varepsilon \right| \leqq \frac{16}{\Omega_0^2} \Omega^2 = c^{(4)} \Omega^2. \tag{41}$$

Wir finden also endgültig für alle (x, y, z) *in* $T + S$ *und alle den Beziehungen* (5), (6), (7) *genügenden* $\dot\xi, \dot\eta, \dot\zeta;\ \hat\xi, \hat\eta, \hat\zeta$ *gleichmäßig*

$$|\hat W - \dot W - W^{(1)}| \leqq c^{(4)} \Omega^2. \tag{42}$$

Ebenso findet man die weiteren Ungleichheiten

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} (\hat W - \dot W - W^{(1)}) \right| \leqq c^{(4)} \Omega^2, \ldots \tag{43}$$

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial x} (\hat W - \dot W - W^{(1)}) \right)_1 - \left(\frac{\partial}{\partial x} (\hat W - \dot W - W^{(1)}) \right)_2 \right| \leqq c^{(4)} \Omega^2 d_{12}^\lambda,$$

. . . .

Man kann so weiter gehen. Man findet bsp.

$$|\hat W - \dot W - W^{(1)} - \tfrac{1}{2} W^{(2)}| \leqq c^{(5)} \Omega^3, \ldots \tag{44}$$

Für manche Zwecke erweist sich eine andere Abschätzung, zu deren Ableitung wird jetzt ubergehen, als wichtig.

Wir nehmen jetzt, unter Ω_1 einen beliebigen Wert $\leqq \frac{1}{2}\Omega_0$ verstanden, an, daß $\dot\xi, \dot\eta, \dot\zeta;\ \hat\xi, \hat\eta, \hat\zeta$ den folgenden Ungleichheiten genügen

$$|\dot{\xi}|,\ \left|\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial x}\right|,\dots \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_1 \leqq \tfrac{1}{4}\Omega_0;\ \left|\left(\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial x}\right)_2\right| \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_1 d_{12}^{\lambda},\dots$$

(45) $$|\hat{\xi}|;\ \left(\frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x}\right),\dots \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_1;\ \left|\left(\frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x}\right)_2\right| \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_1 d_{12}^{\lambda},\dots$$

$$|\hat{\xi}-\dot{\xi}|;\ \left|\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi}-\dot{\xi})\right|,\dots \leqq \Omega \leqq \tfrac{1}{4}\Omega_1;\dots \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi}-\dot{\xi})\right)_1 - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi}-\dot{\xi})\right)_2\right| \leqq \Omega d_{12}^{\lambda},\dots$$

Für alle reellen oder komplexen ε mit $|\varepsilon| \leqq \frac{1}{2}\Omega$, ist alsdann bsp.

(46) $$\left|\dot{\xi}+\frac{\varepsilon}{\Omega}(\hat{\xi}-\dot{\xi})\right| \leqq |\dot{\xi}| + |\varepsilon| \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_1 + \tfrac{1}{2}\Omega_1 = \Omega_1 \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_0.$$

Wir setzen

(47) $$\dot{W} - W - \dot{W}^{(1)} = \dot{I} = \frac{1}{2!}\dot{W}^{(2)} + \frac{1}{3!}\dot{W}^{(3)} + \dots,$$

(48) $$\hat{W} - W - \hat{W}^{(1)} = \hat{I} = \frac{1}{2!}\hat{W}^{(2)} + \frac{1}{3!}\hat{W}^{(3)} + \dots,$$

und allgemein für alle reellen oder komplexen ε mit $|\varepsilon| \leqq \frac{1}{2}\Omega$,

(49) $$W_\varepsilon - W - W_\varepsilon^{(1)} = I_\varepsilon = \frac{1}{2!}W_\varepsilon^{(2)} + \frac{1}{3!}W_\varepsilon^{(3)} + \dots$$

Den zuletzt gewonnenen Ergebnissen zufolge ist

(50) $$|I_\varepsilon| \leqq c^{(4)}\Omega_1^2.$$

Bei der Anwendung der Ungleichheit (42) hat man dabei für $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta};\ \xi, \eta, \zeta$ entsprechend 0, Q, 0; $\dot{\xi}+\varepsilon(\hat{\xi}-\dot{\xi})$, $\dot{\eta}+\varepsilon(\hat{\eta}-\dot{\eta})$, $\dot{\zeta}+\varepsilon(\hat{\zeta}-\dot{\zeta})$ zu setzen. Für $\hat{\xi}-\dot{\xi},\dots$ tritt jetzt also $\dot{\xi}+\varepsilon(\hat{\xi}-\dot{\xi}),\dots$ ein. Wegen (46) hat jetzt Ω_1 offenbar die Bedeutung der Grösse, die in (42) mit Ω bezeichnet wurde. Wir finden also in der Tat die Beziehung (50). Es sei jetzt Γ_1 eine Kreislinie vom Radius $\frac{1}{2}\Omega_1$ um den Koordinatenursprung in der komplexen Ebene ε. Für alle $|\varepsilon| \leqq \Omega \leqq \frac{1}{4}\Omega_1$ ist gewiß

(51) $$I_\varepsilon = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{I_\delta}{\delta-\varepsilon}\,d\delta,\quad \delta = \tfrac{1}{2}\Omega_1 e^{i\psi}$$

und

(52) $$\frac{\partial I_\varepsilon}{\partial\varepsilon} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{I_\delta}{(\delta-\varepsilon)^2}\,d\delta,$$

darum wegen

$$(53) \qquad |\delta - \varepsilon| \geqq \tfrac{1}{4}\,\Omega_1, \quad \frac{1}{|\delta - \varepsilon|} \leqq \frac{4}{\Omega_1}$$

offenbar

$$(54) \qquad \left|\frac{\partial I_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right| \leqq \frac{1}{2\pi} \cdot \pi \Omega_1 \cdot \frac{16}{\Omega_1^2} \cdot c^{(4)} \Omega_1^2 = c^{(5)} \Omega_1$$

und

$$(55) \qquad |\hat{I} - \dot{I}| = \left| \int\limits_0^{\Omega} \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\, d\varepsilon \right| \leqq c^{(5)} \Omega_1 \Omega.$$

Wir finden also:

Für alle (x, y, z) *in* $T + S$ *und alle den Beziehungen (45) genügenden* $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}; \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ *gleichmäßig gelten die Ungleichheiten*

$$(56) \qquad |\hat{I} - \dot{I}| = |(\hat{W} - W - \hat{W}^{(1)}) - (\dot{W} - W - \dot{W}^{(1)})| \leqq c^{(5)} \Omega_1 \Omega$$

und analog

$$(57) \quad \left|\frac{\partial \hat{I}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{I}}{\partial \dot{x}}\right|, \ldots \leqq c^{(6)} \Omega_1 \Omega; \left|\left(\frac{\partial \hat{I}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{I}}{\partial \dot{x}}\right)_1 - \left(\frac{\partial \hat{I}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \dot{I}}{\partial \dot{x}}\right)_2\right| \leqq c^{(6)} \Omega_1 \Omega d_{12}^{\lambda}, \ldots$$ [1]

Der Schwerpunkt des soeben bewiesenen Satzes, der bei manchen höheren Randwertaufgaben zur Verwendung kommt, liegt in den Ungleichheiten (57).

In analoger Weise lässt sich zeigen, dass, wenn

$$(58) \quad \hat{I}_n = \hat{W} - W - \hat{W}^{(1)} - \ldots - \frac{1}{n!}\hat{W}^{(n)}, \quad \dot{I}_n = \dot{W} - W - \dot{W}^{(1)} - \ldots - \frac{1}{n!}\dot{W}^{(n)}$$

gesetzt wird,

$$(59) \quad \begin{aligned} &|\hat{I}_n - \dot{I}_n|; \left|\frac{\partial}{\partial x}(\hat{I}_n - \dot{I}_n)\right|, \ldots \leqq c^{(7)} \Omega_1^n \Omega; \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat{I}_n - \dot{I}_n)\right)_1 - \right. \\ &\qquad \left. - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat{I}_n - \dot{I}_n)\right)_2\right| \leqq c^{(7)} \Omega_1^n \Omega d_{12}^{\lambda}, \ldots \end{aligned}$$

gilt.

Macht man bezüglich des Charakters der Randflächen und der Beschaffenheit der Belegungsfunktion geeignete weitergehende Voraussetzungen, so lassen sich die vorstehenden Sätze dahin erweitern, daß auch für partielle Ableitungen höherer Ordnung der

---

[1]) Man kommt von (52) zu (57) ähnlich wie von (23) zu (26).

Potentiale $\hat{W}$ und $\dot{W}$ in Bezug auf die Ortsvariablen analoge Beziehungen gelten.

Haben z. B. die Funktionen $\chi; \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}; \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ stetige Ableitungen bis zur Ordnung m $(m \geqq 2)$ einschließlich, und erfüllen sie die Ungleichheiten

$$(60)\quad \begin{gathered} |\dot{\xi}|,\ |\dot{\eta}|,\ |\dot{\zeta}|;\ \left|\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial x}\right|,\ldots,\ \left|\frac{\partial\dot{\zeta}}{\partial z}\right|;\ldots;\ \left|\frac{\partial^m\dot{\xi}}{\partial x^m}\right|,\ldots,\ \left|\frac{\partial^m\dot{\zeta}}{\partial z^m}\right| \leqq \Omega_0; \\ \left|\left(\frac{\partial^m\dot{\xi}}{\partial x^m}\right)_1 - \left(\frac{\partial^m\dot{\xi}}{\partial x^m}\right)_2\right| \leqq \Omega_0 d_{12}^{\lambda},\ldots \end{gathered}$$

$$(61)\quad \begin{gathered} |\hat{\xi}|,\ |\hat{\eta}|,\ |\hat{\zeta}|;\ \left|\frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x}\right|,\ldots\ \left|\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial z}\right|;\ldots;\ \left|\frac{\partial^m\hat{\xi}}{\partial x^m}\right|,\ldots,\ \left|\frac{\partial^m\hat{\zeta}}{\partial z^m}\right| \leqq \Omega_0; \\ \left|\left(\frac{\partial^m\hat{\xi}}{\partial x^m}\right)_1 - \left(\frac{\partial^m\hat{\xi}}{\partial z^m}\right)_2\right| \leqq \Omega_0 d_{12}^{\lambda},\ldots \end{gathered}$$

$$(62)\quad \begin{gathered} |\hat{\xi}-\dot{\xi}|,\ldots;\ \left|\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\xi}-\dot{\xi})\right|,\ldots,\ \left|\frac{\partial^m}{\partial z^m}(\hat{\zeta}-\dot{\zeta})\right| \leqq \Omega \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_0, \\ \left|\left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}(\hat{\xi}-\dot{\xi})\right)_1 - \left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}(\hat{\xi}-\dot{\xi})\right)_2\right| \leqq \Omega d_{12}^{\lambda},\ldots \\ \left|\left(\frac{\partial^m\chi}{\partial\omega^m}\right)_1 - \left(\frac{\partial^m\chi}{\partial\omega^m}\right)_2\right| \leqq N_5\delta_{12}^{\lambda},\ldots, \end{gathered}$$

so gelten die zu (26) analogen Ungleichheiten:

$$(63)\quad \begin{gathered} |\hat{W}-\dot{W}|;\ \left|\frac{\partial}{\partial x}(\hat{W}-\dot{W})\right|,\ldots,\ \left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}(\hat{W}-\dot{W})\right|;\ldots \leqq c^{(8)}\Omega; \\ \left|\left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}(\hat{W}-\dot{W})\right)_1 - \left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}(\hat{W}-\dot{W})\right)_2\right| \leqq c^{(8)}\Omega d_{12}^{\lambda}, \end{gathered}$$

. . . .

Desgleichen ist

$$(64)\quad \begin{gathered} |\hat{I}-\dot{I}|;\ \left|\frac{\partial^p}{\partial x^p}(\hat{I}-\dot{I})\right| \leqq c^{(9)}\Omega_1\Omega;\ldots\ (p=1,\ldots m) \\ \left|\left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}(\hat{I}-\dot{I})\right)_1 - \left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}(\hat{I}-\dot{I})\right)_2\right| \leqq c^{(9)}\Omega_1\Omega d_{12}^{\lambda},\ldots, \end{gathered}$$

allgemeiner

$$(65)\quad \begin{gathered} |\hat{I}_n-\dot{I}_n|;\ \left|\frac{\partial^p}{\partial x^p}(\hat{I}_n-\dot{I}_n)\right| \leqq c^{(10)}\Omega_1^n\Omega;\ldots\ (p=1,\ldots m) \\ \left|\left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}(\hat{I}_n-\dot{I}_n)\right)_1 - \left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}(\hat{I}_n-\dot{I}_n)\right)_2\right| \leqq c^{(10)}\Omega_1^n\Omega d_{12}^{\lambda},\ldots \end{gathered}$$ [1])

[1]) Den Beziehungen (64) und (65) liegen Voraussetzngen zugrunde, die

Aehnliche Sätze gelten für das Potential einer einfachen Belegung sowie für das Potential einer Volumladung, ferner für alle drei Potentialarten in der Ebene (logarithmisches Potential). In allen Fällen gelten u. a. Reihenentwickelungen, die zu (32), (33), (34) analog sind.

Bei den vorstehenden Betrachtungen sind wir vor einer topologischen, den Beziehungen (5), (6), (7) genügenden Abbildung des Bereiches $T+S$ auf die Bereiche $\dot{T}+\dot{S}$ und $\hat{T}+\hat{S}$ ausgegangen. Es mögen nunmehr $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$; $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ lediglich für auf S gelegene (x, y, z), d. h. als Funktionen von ω und ν erklärt sein und Ungleichheiten erfüllen, die zu (5), (6), (7) analog sind. Jetzt liegt augenscheinlich lediglich eine topologische Abbildung der Fläche S auf $\dot{S}$ bzw. $\hat{S}$ vor. Alle bisherigen Entwicklungen lassen sich sinngemäß auch auf diesen Fall anwenden, nur gelten die von uns gewonnenen Ungleichheiten und Reihen natürlich nur noch für alle (x, y, z) auf S. In den Reihenentwicklungen (33) und (34) ist die Differentiation nach x, y, z durch diejenige nach ω und ν zu ersetzen.

Wir nehmen jetzt an, das die Fläche S stetig gekrümmt ist und ihre Hauptkrümmungsradien, als Funktionen von ω und ν aufgefaßt, einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen. Die soeben betrachtete topologische Abbildung der Fläche S auf $\dot{S}$ und $\hat{S}$ kann nunmehr wie folgt anders definiert werden. Es sei $P(x, y, z)$ ein Punkt auf S, und es mögen α, β, γ die Richtungskosinus der nach innen gerichteten Normale in P bezeichnen. Ist Ω_0 hinreichend klein, so trifft diese Normale $\dot{S}$ und $\hat{S}$ allemal nur in einem Punkte $\dot{P}$ bzw. $\hat{P}$. Die Abstände $P\dot{P}$, $P\hat{P}$, positiv nach Innen gemessen, heißen $\dot{p}$, $\hat{p}$. Augenscheinlich kann man $\dot{S}$ und $\hat{S}$ durch Vorgabe von $\dot{p}$ und $\hat{p}$ als Funktionen von ω und ν bestimmen; sie erscheinen dann auf das System der krummlinigen Koordinaten $\omega, \nu, \dot{p}$ bzw. $\omega, \nu\ \hat{p}$ bezogen. Setzt man im Sinne dieser Auffassung

$$(66) \qquad \dot{\xi} = \alpha\dot{p},\ \dot{\eta} = \beta\dot{p},\ \dot{\zeta} = \gamma\dot{p};\quad \hat{\xi} = \alpha\hat{p},\ \hat{\eta} = \beta\hat{p},\ \hat{\zeta} = \gamma\hat{p},$$

---

eine Verallgemeinerung der Ungleichheiten (45) darstellen. Man erhält sie, wenn man in (60) und (61) Ω_0 durch $\frac{1}{2}\Omega_1$, in (62) aber $\Omega \leqq \frac{1}{2}\Omega_0$ durch $\Omega \leqq \frac{1}{2}\Omega_1$ ersetzt.

so wird S auf $\dot{S}$ bzw. $\hat{S}$ topologisch abgebildet, wobei dem Punkt P allemal die auf derselben Normale zu S gelegenen Punkte $\dot{P}$ und $\hat{P}$ entsprechen. Da wir diesmal S als stetig gekrümmt und ihre Hauptkrümmungsradien als der H-Bedingungen genügend angenommen haben, so haben $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$; $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$, sofern $\frac{\partial \dot{p}}{\partial \omega}, \ldots, \frac{\partial \hat{p}}{\partial \nu}$ existieren und der H-Bedingung genügen, die zu Beginn dieser Arbeit eingeführten Stetigkeitseigenschaften. Machen wir noch die weiteren Voraussetzungen:

$$
\begin{gathered}
|\dot{p}|, |\hat{p}| \leqq \overline{\Omega}_0; \left|\frac{\partial \dot{p}}{\partial \omega}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \hat{p}}{\partial \nu}\right| \leqq \overline{\Omega}_0; \left|\left(\frac{\partial \dot{p}}{\partial \omega}\right)_1 - \left(\frac{\partial \dot{p}}{\partial \omega}\right)_2\right|, \ldots, \\
\left|\left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \nu}\right)_1 - \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \nu}\right)_2\right| \leqq \overline{\Omega}_0 \delta_{12}^{\lambda}; \\
|\hat{p} - \dot{p}| \leqq \overline{\Omega}; \quad \left|\frac{\partial}{\partial \omega}(\hat{p} - \dot{p})\right|, \ldots \left|\frac{\partial}{\partial \nu}(\hat{p} - \dot{p})\right| \leqq \overline{\Omega}; \\
\left|\left(\frac{\partial}{\partial \omega}(\hat{p} - \dot{p})\right)_1 - \left(\frac{\partial}{\partial \omega}(\hat{p} - \dot{p})\right)_2\right| \leqq \overline{\Omega} \delta_{12}^{\lambda}, \ldots
\end{gathered}
\tag{67}
$$

so sind für alle (x, y, z) auf S, wenn $\overline{\Omega}_0$ und $\overline{\Omega}$ hinreichend klein sind, auch die Ungleichheiten (5), (6), (7) erfüllt.

Betrachten wir für einen Augenblick die Entwicklung (32). Ihre Glieder erscheinen jetzt als ganze Funktionale einer einzigen Funktion, nämlich der Ortsfunktion $\hat{p} - \dot{p}$ auf $\dot{S}$, während in der ursprünglichen Darstellung sie von drei verschiedenen Funktionen $\hat{\xi} - \dot{\xi}$, $\hat{\eta} - \dot{\eta}$, $\hat{\zeta} - \dot{\zeta}$ abhingen.

Sur l'allure d'une fonction harmonique dans le voisinage d'un point exceptionnel

par

W. Stożek.

L'objet de cette Note est la généralisation des théorèmes de M. Picard (C. R. du 3 et du 16 avril 19.3), concernant l'allure d'une fonction harmonique dans le voisinage d'un point exceptionnel [1]. La méthode s'applique dans l'espace comme dans le plan et n'implique pas que les surfaces équipotentielles soient fermées. Au contraire, cette propriété résulte des formules (3). Soit

$U(P)$ — une fonction des coordonnées du point P harmonique et uniforme en tout point intérieur à un domaine $\mathcal{C}$, à deux ou à trois dimensions, sauf peut-être en un point exceptionnel O,

S — une sphère (ou un cercle) de centre O ayant une longueur donnée R ($R > 0$) pour rayon.

Σ — une sphère (ou un cercle) concentrique à S, de rayon ϱ $(0 < \varrho < R)$

l — la longueur $\overline{OP}$.

Théorème. S'il existe une constante non négative d telle que les relations

$$0 < l \leqq R \tag{1}$$

entraînent

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{d}{l} < U(P) \quad \text{(cas de l'espace),} \\ \text{ou} \\ -d\log\dfrac{1}{l} < U(P) \quad \text{(cas du plan),} \end{array} \right. \tag{2}$$

---

[1]) Dans le même tome des C. R. (176), on trouve des Notes de MM. P Noaillon (p. 879), G. Bouligand (pp. 1037, 1200, 1366) et H. Lebesgue (pp. 1097, 1270) relatives au même sujet.

on[1]) a:

$$
(3)\quad \left\{\begin{array}{l}
U(P) = \dfrac{c}{l} + \text{fonction harmonique dans } \textit{tout} \text{ le domaine } \mathfrak{T} \\
\qquad\text{(cas de l'espace),} \\
\text{ou} \\
U(P) = c \, . \lg \dfrac{1}{l} + \text{fonction harmonique dans } \textit{tout} \text{ le domaine } \mathfrak{T} \\
\qquad\text{(cas du plan),}
\end{array}\right.
$$

où c est une constante; dans le cas particulier où, pour

$$0 < l \leqq R$$

la fonction U est bornée, la constante c est nulle, les formules (3) étant sûrement valables dans tout le domaine $\mathfrak{T}$, à moins que le point O ne soit un point de discontinuité de la fonction $U(P)$, cas où les formules (3) ne seraient plus valables au point O lui-même tout en subsistant en tout autre point du domaine $\mathfrak{T}$ avec la valeur nulle de la constante c.

Pour établir le théorème[2]) précédent, considérons d'abord le cas de l'espace et, par rapport au domaine compris entre les sphè, res Σ et S, appliquons le théorème de Green aux fonctions $U(P)$ et

$$(4)\qquad \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{l}.$$

La seconde des deux fonctions précédentes s'annulant sur la sphère Σ, il viendra:

$$(5)\qquad + \frac{1}{\varrho^2} \int\limits_{(\Sigma)} u\, ds - \frac{1}{R^2} \int\limits_{(S)} u\, ds = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}\right) \int\limits_{(S)} \frac{du}{dN} ds.$$

Pour établir la formule analogue relative au cas du plan, il suffira de remplacer la fonction (4) par

$$\log \frac{l}{\varrho},$$

---

[1]) On a évidemment un théorème tout à fait analogue, correspondant au cas où la constante d serait non positive et où le sens des inégalités (1) serait renversé.

[2]) Dans la démonstration qui va suivre, j'utilise une remarque de M. Zaremba, remarque qui m'a permis de simplifier celle que j'avais élaborée d'abord.

ce qui donnera:

$$\frac{1}{\varrho}\int\limits_{(\Sigma)} u\,ds - \frac{1}{R}\int\limits_{(s)} u\,ds = \log\frac{R}{\varrho}\int\limits_{(s)} \frac{du}{dN}\,ds. \tag{6}$$

J'observe maintenant que, sans nuire à la généralité, on peut admettre que la constante d qui figure dans les inégalités (2) est nulle; pour le voir il suffit de changer $U(P)$ en

$$U(P) + \frac{d}{l} \text{ ou en } U(P) + d\log\frac{1}{l}$$

selon qu'il s'agit du cas de l'espace ou de celui du plan. Nous supposerons donc que les relations (1) entraînent la suivante:

$$U(P) > 0. \tag{7}$$

Cela posé, reprenons le cas de l'espace et supposons que le point P ait une position arbitrairement donnée à l'intérieur de la sphère S, sans cependant coïncider avec le centre O de cette sphère. Donnons alors au rayon ϱ de la sphère Σ une valeur assez petite pour que le point P soit extérieur à la sphère Σ et désignons par $G(P, Q)$ la valeur eu un point Q de la fonction de Green de pôle P, relative au domaine extérieur à la sphère Σ. Une application facile du théorème de Green nous donnera la formule suivante:

$$U(P) = \int\limits_{(\Sigma)} U(Q)\frac{d_Q G(P,Q)}{dN}\,ds + \int\limits_{(s)} U(Q)\frac{d_Q G(P,Q)}{dN}\,ds + \\ - \int\limits_{(s)} G(P,Q)\frac{d_Q G(P,Q)}{dN}\,ds. \tag{8}$$

Il nous faut maintenant passer à la limite pour $\varrho = 0$. En désignant par r la distance des points P et Q et en posant

$$V(P) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} U\frac{d}{dN}\left(\frac{1}{r}\right)ds - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} U\frac{ds}{r}, \tag{9}$$

on trouve aisément:

$$\lim_{\varrho\to 0}\left\{\int\limits_{(s)} U(Q)\frac{d_Q G(P,Q)}{dN}\,ds - \int\limits_{(s)} G(P,Q)\frac{d_Q U(Q)}{dN}\,ds\right\} = V(P) \tag{10}$$

où, évidemment, $V(P)$ est une fonction harmonique dans tout l'intérieur de la sphère S. Reste à déterminer la limite du premier terme du 2 ième membre de (8); dans l'intégrale qui le constitue, on a:

$$\frac{d_{\varrho} G(P, Q)}{dN} = \frac{l^2 - \varrho^2}{4\pi \varrho r^3}; \tag{11}$$

d'autre part, l'équation (5) donne:

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\varrho} \int_{(\Sigma)} u\, ds = \int_{(S)} \frac{du}{dN} ds. \tag{12}$$

En s'appuyant sur (7), on s'assure aisément, à l'aide des équations (11) et (12), que l'on a:

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{(\Sigma)} U(Q) \frac{d_{\varrho} G(P, Q)}{dN} ds = \frac{1}{4\pi l} \int_{(S)} \frac{du}{dN} ds.$$

En s'appuyant sur cette équation ainsi que sur l'équation (10), on déduit de (8) la formule suivante

$$U(P) = \frac{c}{l} + V(P), \tag{13}$$

en posant,

$$c = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{du}{dN} ds. \tag{14}$$

La formule (13) n'est valable que pour les positions du point P qui satisfont aux conditions

$$0 < l < R, \tag{15}$$

il y a donc encore quelques, mots à dire pour démontrer d'une façon complète la 1-ière partie de notre théorème en ce qui concerne le cas de l'espace. Désignons par $W(P)$ la fonction des coordonnées du point P définie comme il suit: au centre O de la sphère S on a

$$W(O) = V(O)$$

et, pour toute autre position du point P dans le domaine $\mathfrak{C}$, on a

$$W(P) = U(P) - \frac{c}{l}.$$

A l'intérieur de la sphère S, la fonction $W(P)$ se confondra avec la fonction $V(P)$ à cause de (13), d'où l'on déduit que la fonction $W(P)$ est une fonction harmonique dans *tout* l'intérieur du domaine $\mathfrak{C}$; d'autre part, il résulte de la définition de la fonction $W(P)$ que, pour *toute* position du point P à l'intérieur du domaine $\mathfrak{C}$ et sous la seule restriction d'avoir

$$l > 0, \tag{16}$$

on a

$$U(P) = \frac{c}{l} + W(P), \tag{17}$$

formule qui démontre la 1-ière partie de notre théorème pour le cas de l'espace; pour reconnaître, dans le même cas, l'exactitude de la 2-ième partie du théorème, il suffit de remarquer que, lorsque la fonction $U(P)$ est bornée, on a nécessairement

$$c = 0.$$

Passons maintenant au cas du plan. La formule (8) peut-être regardée comme se rapportant à ce cas-là: il suffit pour cela de regarder les symboles Σ et S comme représentant des cercles et l'expression $G(P, Q)$ comme celle de la fonction de Green de pôle P, relative au domaine extérieur par rapport au cercle Σ. Placons-nous donc à ce point de vue et passons à la limite pour $\varrho = 0$. A cet effet, désignons par r la distance des points P et Q et par r_1 la distance du point Q au conjugné harmonique P_1 du point P par rapport aux points d'intersection du cercle Σ avec la droite passant par le centre O du cercle Σ et par le point P. Avec ces notations la formule (8) pourra s'écrire comme il suit:

$$U(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{(\Sigma)} U \frac{l^2 - \varrho^2}{\varrho r^2} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{(s)} U \left\{ \frac{1}{r_1} \frac{d_Q r_1}{dN} - \frac{1}{r} \frac{d_Q r}{dN} \right\} ds + \\ - \int_{(s)} \frac{du}{dN} \left\{ \log \frac{r_1}{\varrho} - \log r - \log \frac{1}{l} \right\} ds. \tag{18}$$

La formule (6) donne

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{(\Sigma)} u \, ds = 0. \tag{19}$$

Cela étant, il résulte de (7) que, pour $\varrho = 0$, la limite du second membre de (18) se confond avec celle de l'expression suivante:

$$\frac{1}{2\pi}\frac{l^2-\varrho^2}{\varrho l^2}\int\limits_{(\Sigma)} u\,ds+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(s)} U\left\{\frac{-1}{R}-\frac{1}{r}\frac{d_0 r}{dN}\right\}ds+$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(s)}\frac{du}{dN}\left\{\log\frac{R}{\varrho}-\log r-\log\frac{1}{l}\right\}ds,$$

expression qui, à cause de (6), est égale à la suivante

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{l^2}{\varrho}\int\limits_{(\Sigma)} u\,ds+V(P)+c\log\frac{1}{l} \tag{20}$$

où l'on a posé

$$V(P)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(s)}\left\{\frac{du}{dN}\log r-u\frac{1}{r}\frac{d_\varrho r}{dN}\right\}ds \tag{21}$$

et

$$c=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(s)}\frac{du}{dN}ds. \tag{22}$$

Or, à cause de (19). la limite de l'expression (20) pour $\varrho=0$ est égale à

$$V(P)+c\log\frac{1}{l}.$$

Par conséquent, la formule (18) donne, par le passage à la limite pour $\varrho=0$, la suivante

$$U(P)=c\log\frac{1}{l}+V(P), \tag{23}$$

formule valable sous la condition (15) et dans laquelle, comme cela résulte de (21), la fonction $V(P)$ répresente une fonction harmonique dans tout l'intérieur du cercle Σ. Cela posé, la démonstration s'achève comme dans le cas de l'espace. En définitive notre théorème est complètement démontré.

Remarque[1]). Sans avoir rien à changer dans la thése du théorème qui vient d'être démontré, on peut adopter l'hypothèse un peu moins restrictive que voici: il existe une suite infinie $\{\varrho_n\}$ à termes positifs et ayant zéro pour limite à laquelle correspond un nombre positif d tel que l'existence de l'une ou de l'autre des inégalités (2) ne soit assurée à l'avance que pour

$$l=\varrho_n \quad (n=1,2,3\ldots).$$

[1]) Je dois cette remarque à M. Steinhaus.

Pour s'assurer de l'exactitude de cette remarque, il suffit de considérer que rien n'empêche de remplacer, dans la démonstration exposée plus haut, ϱ par ϱ_n et de passer à la limite pour $\frac{1}{n} = 0$.

Pour terminer, complétons l'étude précédente par l'examen du cas suivant: la fonction $U(P)$, harmonique et uniforme en tout point intérieur au domaine $\mathfrak{T}$ sauf peut-être en O n'est pas de la forme considérée dans la thèse de notre théorème. Je dis que, dans ce cas, le point A est un point-limite des zéros de la fonction $U(P)$. Pour le reconnaître, il suffit de considérer que, en vertu de la remarque faite il y a un instant on a la proposition suivante; si l'on désigne par $\{l_n\}$ une suite infinie à termes positifs ayant zéro pour limite et, lorsque P varie de façon à satisfaire à la condition

$$l = l_n,$$

par m_n et M_n respectivement le minimum et le maximum de l'expression

$$l \, . \, U(P)$$

ou de l'expression

$$\frac{U(P)}{\log \frac{1}{l}}$$

selon que l'on considére le cas de l'espace ou celui du plan, les termes de la suite

$$m_1, \; m_2, \; m_3 \ldots$$

n'auront pas de borne inférieure finie, et ceux de la suite

$$M_1, \; M_2, \; M_3 \ldots$$

n'auront pas de borne supérieure finie.

Sur le problemè de Dirichlet.

par

Georges Bouligand

professeur à l'Université de Poitiers.

1. **Généralités sur le caractère et les donneés du problème.** Le problème de Dirichlet a fait, au cours de ces dernières années, l'objet de nombreux travaux. Il nous paraît intéressant de reprendre ici, en les coordonnant et les simplifiant parfois, quelques uns d'entre eux. Nous ferons connaître en même temps quelques théorèmes nouveaux.

Le problème de Dirichlet ressort du calcul fonctionnel. La solution dépend à la fois

1⁰ de la frontière Σ;

2⁰ des données qu'elle porte.

Nous nous plaçons dans des conditions très générales, qui sont celles qu'a envisagées systématiquement, le premier, M. Norbert Wiener[1]): on prend à distance finie, un domaine ouvert Ω (= ensemble d'un seul tenant formé exclusivement de points intérieurs) et on désigne par Σ l'ensemble frontière, sur lequel on ne sait à peu près rien, sinon qu'il est fermé et qu'il comprend au moins un continu externe Σ', qui serait lui-même frontière d'un domaine ouvert Ω': de sorte que Σ se compose de Σ' et de points de Ω'.

---

[1]) (*A*) Nets and the Dirichlet Problems, mars 1923 (*B*) Certains notions in potential theory janvier 1924. (*C*) On the Dirichlet Problem, avril 1924. (*D*) Note on a Perron paper. octobre 1924. Tous ces mémoires ont paru dans le Journal de Mathématiques du Massachusetts Institute of Technology.

Nous désignerons par Q un point de la frontière Σ. Soit $f(Q)$ une fonction définie sur cet ensemble. Nous nous occuperons seulement du cas où elle est continue, hypothèse qui a un sens parfaitement clair, vu que Σ est un ensemble fermé: soient Q_1, Q_2,... des points de Σ qui tendent vers un point Q; alors ce point appartient aussi à Σ; en disant que $f(Q)$ est continue, nous voulons dire que dans les conditions précédentes, la suite $f(Q_1)$, $f(Q_2)$,... tend toujours vers $f(Q)$.

Ces prléiminaires posés, nous exposerons la solution du problème de Dirichlet en nous laissant guider par un certain parallélisme entre la question d'analyse fonctionuelle qu'il représente et une question classique de Théorie des fonctions: pour définir la fonction exponentielle, on la définit d'abord pour les valeurs rationnelles de la variable, et on l'étend ensuite par continuité au champ de toutes les valeurs réelles. De même, dans le problème de Dirichlet, notre méthode sera une méthode de prolongement fonctionnel. Cette Méthode, telle que nous allons l'exposer, peut être regardée comme la résultante des travaux de M. Norbert Wiener (lui-même assisté partiellement par M. H. B. Phillip's) et des nôtres [1]). M. Henri Lebesgue nous avait d'ailleurs précédés les uns et les autres: seule la guerre de 1914—18 l'a empêché de donner un exposé systématique des beaux résultats qu'il avait déjà obtenus [2]).

2. Faisons encore la remarque suivante: soit une fonctionnelle, définie pour une certaine classe d'éléments, par exemple la classe (C) des éléments E. Supposons qui'on ait défini d'abord cette fonctionnelle pour une sous-classe (C_1) de (C). Ponr que le prolongement fonctionnel puisse s'opérer, il faut naturellement supposer réalisées les conditions suivantes:

1° Un élément quelconque de (C) est limite d'éléments appartenant à (C_1).

2° La fonctionnelle est continue au sein de (C_1).

Inversement, si l'on complète ces hypothéses par celle de l'uniforme continuité de la fonctionnelle au sein de (C_1), il

---

[2]) (E) Notes aux Comptes Rendus de l'Ac. des Sc. de Paris, 19 mars 1923, 23 mars 1924. (F) Articles au Bulletin des Sciences Mathématiques (juillet et novembre 1923, mai, juin, et juillet 1924).

[3]) Nous citerons ultérieurement les travaux de M. H. Lebesgue sur ces questions.

résulte d'uu mémoire consacré par nous à ces questions (F) et d'un mémoire complémentaire de M. Fréchet[1]), que la fonctionnelle est prolongeable à tous les éléments de la classe (C) et qu'elle est uniformément continue au sein de cette classe. Bien entendu, l'intervention de la contiuuité exige que la classe (C) se compose d'éléments tels qu'on puisse définir la d i s t a n c e de deux d'entre eux.

Daus l'exposé qui va suivre, nous ne ferons pas directement état de ces théorèmes généraux. Mais il était bon de les signaler à l'attention du lecteur pour éclairer la route que nous allons-suivre. Notons déjà que nous avons une fonctionnelle dépendant de deux éléments bien distincts, le premier est un ensemble de points, soit Σ. constituant la frontière d'un domaine ouvert, le second est une fonction $f(Q)$ définie sur Σ. Nous avons donc ici à envisager deux classes bien distinctes:

1° La classe (C) des éléments Σ;

2° La classe (Γ) des éléments $f(Q)$;

Nous aurons à considerer spécialement.

1° La sous-classe (C_1) de (C), formée par les frontières des polyèdres obtenus par la juxtaposition de cubes d'un réseau, engendré par un système triplement orthogonal de plans (si nous supposons, pour fixer les idées $n = 3$).

2° La sous-classe (Γ_1) de (Γ) formée par les valeurs acquises par les polynômes sur la frontière Σ d'un domaine Ω.

Ces sous-classes satisfont bien à la condition d'admettre respectivement (C) et (Γ) pour classes dérivées: elles peuvent donc jouer, dans la résolution du problème de Dirichlet le même rôle que la sous-classe des nombres rationnels, dans la construction de la fonction exponentielle dans le champ réel.

3. **Le pré-probléme de Dirichlet**. Nous voyons maintenant la route à suivre: nous allons d'abord résondre, avec M. M. H. B. Phillip's et Norbert Wiener, le problème de Dirichlet ponr un domaine polyédral Δ formé par la juxtaposition de cubes d'un certain réseau. Ce problème a l'avantage de pourvoir se traiter comme cas limite d'un problème linéaire à un nombre fini d'inconues. que nous appellerons pour abréger le pré-problème de Dirichlet. Voici en quoi il consiste: introduisons la notion de f o n c t i o n d e r é s e a u. Se donner une fonction sur un réseau, c'est attribuer

[1]) Bull. des Sc. Math. mai 1924.

à chaque noeud de ce réseau une valeur numérîque. Substituons à l'équation də Laplace l'équation aux différences finies.

$$
(1) \quad \begin{aligned} 6\,U(x, y, z) = {} & U(x+h, y, z) + U(x, y+h, z) + U(x, y, z+h) \\ & + U(x-h, y, z) + U(x, y-h, x) + U(x, y, z-h), \end{aligned}
$$

où h représente l'arête du réseau: suivant cette équation, la valeur de la fonction de réseau en un noeud sera la moyenne de ses valeurs aux six noeuds les plus proches: d'où l'impossibilité, pour cette fonction, de présenter en un noeud (qui n'est pas un noeud frontière de son champ d'existence) un maximum ou un minimum, c'est-à-dire d'être en ce point ou supérieure, ou inférieure aux valeurs qu'elle acquiert respectivement aux six noeuds voisins. C'est ce que nous résumerons en disant que la fonction est une *fonction monotone* sur le réseau.

Cela posé, soit un polyèdre Δ formé par la juxtaposition de cubes du réseau, et que nous supposons être d'un seul tenant. Il y aura des noeuds extérieurs, des noeuds intérieurs, et des noeuds périphériques. Alors, le pré-problème de Dirichlet consiste à trouver aux noeuds intérieurs une fonction qui prenne des valeurs données aux noeuds périphériques et qui. en chaque noeud intérieur, vérifiè l'équation (1). C'est un problème linéaire ayant autant d'équations que d'inconnues, et dont le déterminant n'est pas nul: sinon en annulant les valeurs périphériques, on pourrait avoir d'autres solutions que la solution zéro, ce que la monotonie rend impossible [1]).

[1]) Cette remarque appelle d'intéressantes généralisations. Partons en général de l'équation aux derivées partielles

$$
(E) \quad \begin{aligned} A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + C\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 2E\frac{\partial U}{\partial x} + 2F\frac{\partial U}{\partial y} + \\ + 2G\frac{\partial U}{\partial z} + HU = 0 \end{aligned}
$$

où les coefficients sont les fonctions continues, A, B, C étant positifs et non nuls, et H étant $\leqslant 0$. On est amené à rapprocher cette équation de l'équation aux différences finies

$$
(E') \qquad \left[1 - \frac{h^2 H}{2(A+B+C)}\right] U_{x,y,z} = \frac{\sigma}{2(A+B+C)}
$$

où

$$
\begin{aligned} \sigma = (A+hE)\,U_{x+h,y,z} + (A-hE)\,U_{x-h,y,z} + (B+hF)\,U_{x,y+h,z} + \\ + (B-hF)\,U_{x,y-h,z} + (C+hG)\,U_{x,y,z+h} + (C-hG)\,U_{x,y,z-h}. \end{aligned}
$$

4. **Le problème de Dirichlet pour des domains polycubiques** (C'est-à-dire du type Δ).

Du pré-probléme de Dirichlet pour Δ, il s'agit maintenant de passer au problème de Dirichlet pour ce même domaine, suivant l'acception usuelle de ce terme. Il faut donc exécuter le passage à la limite, amenant de l'équation (1) à l'équation de Laplace. Nous suivons partiellement, l'exposé de MM. Philipp's et Wiener.

Considerons le réseau qui donne naissance à Δ, puis la suite des réseaux qu'on en déduit par subdivision binaire. Soit la fonction continue $f(Q)$ donnée sur la frontière de Δ (formée d'une ou plusieurs surfaces polyèdrales). Appelons:

E_1 l'ensemble des noeuds du 1er réseau intérieurs à Δ, e_1 celui des noends périphériques

E_2 l'ensemble des noeuds du 2e ...., e_2 ....

⋮

E_K .... K^{eme} ...., e_K ....

⋮

Soit F_1 (P) la solution du pré-problème de Dirichlet pour l'équation (1), les valeurs données sur e_1 étant prècisèment elles qu'y prend $f(Q)$: la fonction $F_1(P)$ est définie sur E_1. Soit de même $F_2(P)$ la solution, définie sur E_2, du pré-problème de Dirichlet relatif à (1), avec les valeurs $f(Q)$ sur e_2, et ainsi de suite. Nous formons une suite de fonctions $\{F_K(P)\}$ que nous pouvons étendre au domaine Δ et à sa frontière par interpolation plurilinèaire. Cela posé, il s'agit de montrer

---

Toute solution de cette équation aux différences finies est une fonctiou a t o n e sur le réseau, c. a. d. ne peut présenter (au sens du contexte) de maximum positif ni de minimum négatif. Il s'ensuit que, pour l'équation E', le pré-problème de Dirichlet a toujours une solution et une seule. Mais alors, cela montre que la méthode que nous allons appliquer à la résolution du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace n'a pas un champ d'application limité à cette seule équation. Ces considérations semblent même particulièrement opportunes, si conformément à un point de vue que nous avons exquissé dans un cours fait à Cracovie (octobre-décembre 1925), on veut construire une théorie a m é t r i q u e des fonctions harmoniques, c'est à dire valable indifféremment en géométrie euclidienne, ou en géométrie riemanienne, et dont les principes sont indifférents à la métrique particulière choisie. En n o u s b o r n a n t a u c a s $n = 3$, il est clair que l'équation E est la forme la plus générale prise en coordonneés orthogonales, par une équation du type $\Delta U + \alpha$ grad $U + HU = 0$ où Δ est l'opérateur de Beltrami pour un certain continu riemanien, où l'opérateur grad est relatif à ce continu, où α et H sont donnés.

1° que les fonctions $F_K(P)$ tendent uniformément,, dans le domaine fermé Δ, vers une fonction continue limite prenant sur le frontière les valeurs $f(Q)$

2° que cette fonction satisfait aux conditions entraînant l'harmonicité[1]).

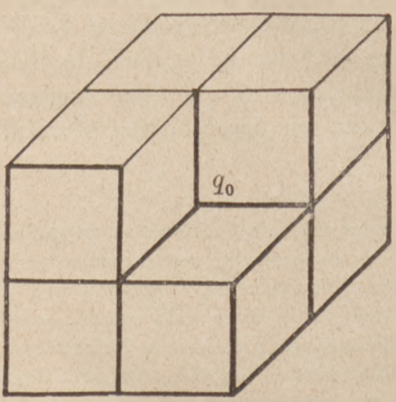
Cela posé, nous avons à établir plusieurs propositions préliminaires.

Lemme I. Soit Q_0 un point de la frontière du domaine polycubique Δ. Considérons un cube Γ_0, homothèhique à ceux des réseaux, de centre Q_0, de côté au plus égal à l'arête du premier réseau. Prenons $f(Q)=1$ sur la portion frontière de Δ intérieure au cube Γ_0, et $f(Q)=0$ sur le reste de la frontière. On peut alors trouver un cube Γ, homothétique et concentrique à Γ_0, à l'intérieur duquel on ait, à partir d'une certaine valeur de K

$$1 > F_K(P) > 1-\varepsilon$$

si petit ait été donné ε.

Il est bon, pour démontrer ce lemme, d'ulilisez un polyèdre particulier δ_0 (figuré ci-contre) obtenu en enlevant d'un groupe de huit cubes égaux, formant un cube d'arête double des précédents, un de ces cubes: appelons q_0 le sommet rentrant de δ_0. On peut alors, en chaque point frontière Q_0 de Δ, trouver un polyèdre Δ_0 tel que la figure (Q_0, Δ_0) soit semblable à (q_0, δ_0) et que chaque point intérieur à Δ et se trouvant avec Q_0 dans un même cube du réseau soit aussi intérieur à Δ_0.



Ce domaine Δ_0 pourra d'ailleurs être pris de manière à satisfaire, outre ces conditions, à celle d'être de dimensions indépendantes de la position de Q_0 sur la frontière.

[1]) Nous présentons la démonstration en lui donnant une forme aussi qualitative que possible, afin de favoriser l'extension dont nous avons montré la possibilité dans un précédent renvoi, relativement à des équations beaucoup plus générales du type elliptique.

Cela posé, en vertu d'inégalités évidentes, il suffit alors d'établir notre lemme pour le polyèdre δ_0 et pour le sommet q_0, en prenant $f^{(0)}(Q)=1$ sur les faces qui apparaissent lors de l'ablation, dans le grand cube initial, d'un de nos petits cubes, et $f^{(0)}(Q)=0$ sur la portion restante de la surface de ce grand cube initial. Appelons celui-ci γ_0, et avec q_0 comme centre, formons une suite de cubes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m, \ldots$ homothétiques et concentriques à γ_0, avec les rapports *d'homothétie* succesifs $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^m}$. Sur la portion de la frontière de γ_1, intérieure au domaine δ_0, on a quel que soit k

$$F_k^{(0)}(P) > p,$$

la signification des $F_k^{(0)}(P)$étant évidente, et p désignant un nombre positif non nul. On démontre son existence, en remarquant qu'à l'intérieur de γ_0, les fonctions $F_k^{(0)}(P)$, obtenues en prenant les valeurs $f(Q)=1$, sur les facettes communes à γ_0 et à l'un de ses huit cubes divisionnaires, et $f(Q)=0$ sur le reste de la frontière de γ_0, sont inférieures aux $F_k^{(0)}(P)$, et restent cependant supérieures à un nombre p' non nul [1]).

Envisageons alors les fonctions $F_k^{(0)}(P)-p$, qui sont $\geqslant 0$ sur la portion de la frontière de γ_1 intérieure à δ_0 et égales à $1-p$ sur la portion de la frontière de δ_0 intérieure à γ_1. Par un raisonnement analogue au précédent, nous montrerons qu'à l'intérieur de δ_0 et sur la frontière de γ_2, on a

$$F_k^{(0)}(P)-p \geqslant p(1-p),$$

ou

$$F_k^{(0)}(P) \geqslant 1-(1-p)^2.$$

---

[1]) Pour le voir, on cherche ce qui se passe lorsqu'on fait $f(Q)=1$ en un seul noeud périphérique du k^e réseau déduit du cube γ_0 et $f(Q)=0$ en tout autre noeud périphérique. Quel que soit le noeud pris pour siège de la valeur 1, les valeurs obtenues sur γ_1 sont toujours de l'ordre de $\frac{1}{k^2}$. Il existe donc un nombre positif a non nul tel que la fonction ainsi déterminée sur le k^{eme} réseau dépasse $\frac{a}{k^2}$, ce nombre a étant indépendant de k. Mais alors, dans la formation des $F_k^{(0)}(P)$ intervient un nombre de sommets portant la valeur 1, ayant l'ordre de grandeur k^2. On en conclut que les $F_k^{(0)}(P)$ restent supérieurs à un nombre positif p' conformément à ce que nous avons annoncé.

En répétant le même raisonnement, on en déduit que, dans le domaine fermé commun à δ_0 et à γ_m, on a

$$F_k^{(0)}(P) \geqslant 1-(1-p)^m;$$

or on peut prendre m assez grand pour rendre $(1-p)^m < \varepsilon$ (C. Q. F. D.).

Notons que, d'après une remarque faite au cours du raisonnement précédent, l'arête du cube γ_0 dont l'existence vient d'être établie pour chaque ε, peut être déterminée indépendamment de la position de Q_0 sur la frontière.

5. **Lemme II.** La fonction $f(Q)$ étant supposée continue sur Δ, les fonctions $F_k(P)$ sont également continues dans le domaine fermé Δ.

Avant d'entrer dans les détails de la démonstration, notons les causes essentielles de cette égale continuité: ce sont

1° Le fait que sur la frontière de Δ, les $F_k(P)$ se réduisent à des fonctions tendant uniformément vers une fonction continue, d'où l'égale continuité des empreintes de $F_k(P)$ sur cette frontière [1]).

2° Le fait que lorsque P tend vers un point Q de la frontière de Δ, les $F_k(P)$ tendent (et cela uniformément dans le champ de toutes les valeurs de k) vers les valeurs de leurs empreintes au point Q. Ce fait est une conséquence du lemme I.

3° Le fait que si P' et P'' sont deux points quelconques de Δ (ou de sa frontière), les différences $F_k(P')-F_k(P'')$ sont des fonctions monotones de chacun des points P' et P'', et par suite l'oscillation qui correspond à un trajet déterminé effectué par P, pour chaque fonction $F_k(P)$ est maximum lorsque ce trajet est effectué à partir d'un point de la frontière.

On pourrait se contenter de ces indications: toutefois, MM. Philipp's et Wiener ont donné à cette démonstration une forme vraiment magistrale et que nous allons reproduire.

Soit $\varphi(\delta)$ le maximum de $|f(Q')-f(Q'')|$ pour tous les couples Q', Q'' de points de la frontière de Δ, tels que $|Q'Q''| < \delta$. La fonction $\varphi(\delta)$ s'annule pour $\delta=0$, elle est continue et croît avec δ.

[1]) Le sens de la locution: empreinte d'une fonction (définie dans l'espace) sur un ensemble est suffisamment clair pour qu'il soit inutile d'insister.

Cela posé, envisageons d'abord ce qui se passe exclusivement sur la frontière de Δ. Si Q' et Q'' sont deux noeuds de e_k, on aura

$$|F_k(Q') - F_k(Q'')| < \varphi(Q', Q'')$$

si Q' et Q'' ne sont pas noeuds de e_k on considèrera le déplacement $Q'\,Q''$ comme la somme de plusienrs autres. l'un menant de Q' à Q_1' (l'un des noeuds de la face contenant Q') un second de Q_1' à Q_1'' (un noeud de la face contenant Q''), enfin $Q_1''\,Q''$, et cela de manière que le trajet $Q_1'\,Q_1''$ soit plus court que $Q'\,Q''$; en notant que chacun des deux trajets extrêmes est lui-même décomposable suivant les arêtes du carré qui le contient, on trouve finalement.

$$|F_k(Q') - F_k(Q'')| < 2\varphi(Q'\,Q'') + \varphi(Q_1'\,Q_1'') +$$
$$+ 2\varphi(Q'\,Q'') < 5\varphi(Q'\,Q'');$$

c'est la traduction analytique de l'égale continuité envisagée exclusivement sur la frontière de Δ

Etendons — la maintenant à cette frontière et à son voisinage. Les valeurs d'une F_k, aux points de E_k. s'obtiennent par une forme linéaire, à coefficients positifs et de somme égale à 1, des valeurs aux points de e_k. Puisque F_k est étendue aux autres points de Δ par interpolation plurilinéaire, cette forme d'expression de F_k snbsiste en tout point de Δ. Désignons maintenant par Q un point frontière, par P un point intérieur infiniment voisin. Appelons γ un cube de centre Q, homothétique à ceux de nos réseaux: chaque fonction F_k peut se mettre sous la forme $F_k' + F_k''$ en appelant F_k' sa partie provenant des noeuds frontières intérieurs à γ, et F_k'' la partie provenant des noeuds extérieurs. Nous pouvons alors écrire

$$F_k(P) - F_k(Q) = F_k'(P) - F_k'(Q) + F_k''(P) - F_k''(Q)$$

d'où

$$|F_k(P) - F_k(Q)| < |F_k'(P) - F_k'(Q)| + |F_k''(P)| + |F_k''(Q)|.$$

La fonction $F_k''(P) - F_k'(Q)$ s'annule sur e_k'' (c. à. d. sur l'ensemble des noeuds de e_k extérieurs à γ), donc la borne supérieure de sa valeur absolue est atteinte sur la partie de la fonction de Δ intérieure à γ. Cela posé, traçons un cube de centre Q et de côté $2PQ$, homothétique à ceux du réseau, et prenons pour γ le cube de côté $2^m \times 2PQ$, homothétique et concentrique du précédent. Nous aurons, d'après le lemme I

$$|F_k'''(P)| < (1-p)^m \max |f(Q)|$$

$$|F_k'''(Q)| < (1-p)^m \max |f(Q)|$$

$$F_k''(P) - F_k'(Q) < 5\varphi(PQ)$$

d'où

$$|F_k(P) - F_k(Q)| < 5\varphi(PQ) + 2(1-p)^m \max |f(Q)|$$

Notons alors que pour une valeur donnée de m, p est une fonction décroissante de PQ. et par suite que $1-p$ est une fonction croissante. Lions maintenant m à PQ de manière à avoir par exemple

$$\frac{1}{2^{2m+1}} < PQ < \frac{1}{2^{2m}}$$

ce qui aura pour effet de faire tendre le côté du cube γ vers zéro. Comme m croît indéfiniment avec l'inverse de PQ, il en résulte que $(1-p)^m$ est a fortiori une fonction croisante, qui tend vers zéro avec PQ, et cela, uniformément dans le champ de toutes les positions du point Q. On peut donc écrire finalement

$$|F_k(P) - F_k(Q)| < \varphi_1(PQ)$$

φ_1 étant une fonction croissante qui s'annule avec PQ, ce qui traduit analytiquement l'égale continuité sur la frontière de Δ, étendue à son voisinage.

Cela posé, si P' et P'' sont deux noeuds quelconques de E_k. nous aurons, en vertu de la propriété de monotonie

$$|F_k(P') - F_k(P'')| < \varphi_1(P'P'').$$

Les autres cas se ramènent à celui-là par une décomposition du deplacement $P'P''$ en déplacements partiels. qui nous conduit à reprendre un mode de raisonnement fait au début. On trouve ainsi

$$|F_k(P') - F_k(P'')| < 7\varphi_1(P'P'')$$

ce qui traduit l'égale continuité en général.

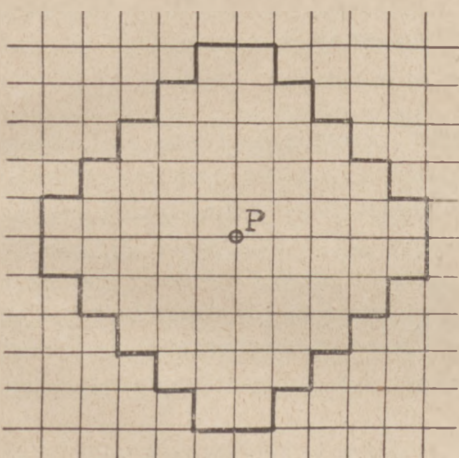
6. **Lemme III.** Toute fonction continue limite de la suite des $F_k(P)$ satisfait à une équation foctionnelle de la forme

$$F(P) = \int_{(\Sigma)} F(M)\, \Psi(M, P)\, d\sigma_M \tag{2}$$

où Σ est la surface d'un octaèdre régulier de centre P ayant ses diagonales orientées suivant les directions principales du réseau, et dont l'arête est quelconque, à cete resriction près: suffisamment petite; la fonction $\Psi(M, P)$ positive, satisfait à la relation

$$1 = \int_{\varepsilon} \Psi(M_1 P)\, d\sigma_M$$

Par ce lemme, nous nous écartons de la mèthode suivie par Philipp's et Wiener. Soit P un sommet d'un de nos réseaux. Considérons un domaine $\Delta_P^{(k)}$, de centre P, constitué par des cubes du réseau en assemblage octoédrique (c'est-à-dire tel que le système de ces cubes soit inscrit dans un octaèdre, disposé comme l'indique l'énoncé): nous avons représenté ci-contre l'assemblage de carrés qui serait, en géométrie plane, l'analogue du précédent assemblage. En résolvant dans ces conditions particulières le pré-problème de Dirichlet, nous pourrons calculer la valeur de $F_k(P)$ en fonction des valeurs prises par cette même quantité aux divers sommets de $\Delta_P^{(k)}$. Nous obtiendrons une forme linéaire dont les coefficients sont positifs et ont une somme égale à l'unité. Fixons notre attention sur cette répartition de coefficients, analogue à une répartition de masses, et considérons les polyèdres formés pareillement avec les réseaux d'ordre $k+1$, $k+2, \ldots$, polyèdres qui vont en se dilatant et sont inscrits dans le même octaèdre. En passant à la limite, on obtient une distribution de masses positives qui correspond à une loi continue [1]) sur chaque face de l'octaèdre. De là, notre



[1]) Nous n'vons pas obtenu de démonstration simple de ce fait: sa certitude n'est pas douteuse, cette loi limite est en effet donnée par la derivée nor-

lemme résulte alors d'une manière immédiate, grâce à la convergence uniforme de la suite partielle vers la fonction limite [1]).

7. **Lemme IV.** Les fonctions $F_k(P)$ tendent vers une fonction limite unique.

En effet, admettons un instant l'existence de deux fonctions limites $F(P)$ et $G(P)$ pour la suite des $F_k(P)$. Leur différence serait une solution de l'équation (2), qui d'après les propriétés de $\Psi(M, P)$ serait monotone. En outre, elle serait comme $F(P)$ et $G(P)$ continue dans le domaine fermé Δ, et enfin s'annulerait sur le bord. Elle serait donc identiquement nulle.

8. Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème final: la limite de la suite des fonctions $F_k(P)$ est une fonction harmonique. En effet, cette fonction limite satisfait à l'équation fonctionnelle précédente. Or. dans cette équation fonctionnelle, on peut supposer que l'octaèdre de centre P est infiniment petit. En outre, en considérant la différence

$$F(P) - \int_{\Sigma} F(M)\, \Psi(M, P)\, d\sigma_M$$

et la divisant par la quatrième puissance de l'arête de l'octaèdre, on obtient, à un coefficient numérique près, un opérateur coïncidant avec le laplacien dans le champ des fonctions continues ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres. Ne sachant pas si $F(P)$ remplit cette condition, raisonnons directement sur cet opérateur, qui est un laplacien généralisé donnant zèro lorsqu'on l'applique à $F(P)$. Cette fonction est d'ailleurs continue. En outre, moyennant cette nouvelle définition du laplacien, on montre très facilement que la formule

$$V(P) = \int_{\Omega} \frac{\varrho_M}{PM}\, d\omega_M \tag{3}$$

entraine, sous la seule hypothèse de la continuité de ϱ

$$\Delta V = -4\pi\varrho. \tag{4}$$

---

male aux divers points de la surface de l'octaèdre, de la fonction de Green évaluée avec le pôle P. Mais au point vue logique, il est désirable qu'une démonstration autonome soit donnée.

[1]) Il est clair, qu'en vertu de la continuité, la même équation fonctionnelle sera encore satisfaite si P n'est pas un noeud d'un de nos réseaux.

Mais alors, nous trouvons réunies toutes les conditions requises pour permettre l'application d'un important lemme établi par M. S. Zaremba[1]) et dont voici l'énoncé:

Considérons une définition quelconque du laplacien, telle que (3) entraîne (4) sous la seule hypothèse de la continuité de ϱ, telle aussi que si la fonction dont on prend le laplacien présente un maximum, on obtienne un résultat négatif ou nul (condition immédiatement remplie). Alors si une fonction continue possède un laplacien nul, elle est harmonique.

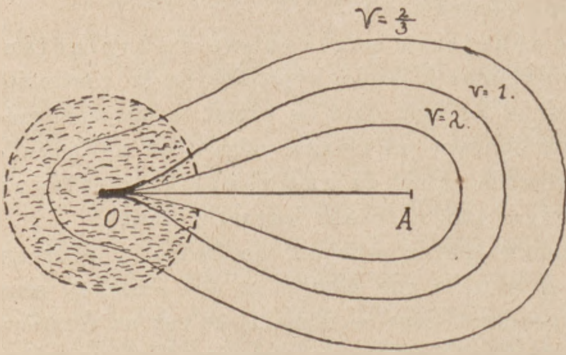
Il est donc démontré que le problème de Dirichlet, pour un domaine polycubique Δ, possède une solution et une seule, au sens classique, c'est-à-dire continue dans ce domaine et sur sa frontière et prenant sur cette dernière des valeurs données. Une première étape est ainsi franchie, et maintenant il va suffire d'opérer un prolongement fonctionnel pour atteindre le cas général.

9. **Cas d'imposibilité du problème de Dirichlet au sens classique**. — Avant de procéder à cette extension, il convient d'appeler l'attention sur des circonstances singulières qui se présentent dès qu'on veut résoudre le problème de Dirichlet pour des domaines un peu plus généraux que ceux que nous venons d'envisager. L'exemple suivant dû à M. Henri Lebesgue (1913) montre que même pour des domaines relativement simples, il n'y aura pas toujours de solution du problème de Dirichlet au sens classique.

Sur un segment de droite OA, de longueur 1, répartissons des masses positives de manière que la densité en un point M de ce segment soit mesurée par le même nombre que la longueur OM. Les surfaces équipotentielles $V = C$ qui correspondent à une valeur de $C \geqslant 1$ présentent en O un rebroussement dont la

[1]) Contribution à l'étude d'une équation fonctionnelle de la physique, Rendic. a Palermo t. 19, 1er. sum. 1905. Il serait souhaitable de donner une démonstration de ce lemme indépendante de l'hypothèse de la résolubilité du problème de Dirichlet pour un domaine de forme déterminée. Voici le principe de raisonnement de M. Zaremba: soit a une fonction continue et à laplacien nul au sens précédent. Dans la région de validité de nos hypothèses, prenons un domaine pour lequel le problème de Dirichlet puisse être résolu: soit v la solution prenant sur la frontière de ce domaine les mêmes valeurs que u. Soit w l'intégrale de la fonction de Green de ce domaine, étendue à son volume. Chacune des fonctions $u - v + t^2 w$ et $v - u + t^2 w$ a un laplacien (au sens convenu) égal à $-4\pi t^2$, d'où l'impossibilité d'un minimum dans le domaine. où nos fonctions sont $\geqslant 0$, quel que soit t^2. Donc $v - u = 0$

tangente est AO, tandis que celles qui correspondent à des valeurs de C moindres que 1 et de plus en plus petites se dilatent progressivement et abandontent d'ailleurs le point O dès que C cesse d'être égal à 1. La figure donne une idée de l'ensemble des surfaces $V = C$.



Cela posé, considérons un domaine Ω dont la frontière aux environs de O est formée par la surface $V = 2$, pour prendre à une certaine distance de O une forme quelconque: pour fixer les idées, ce sera par exemple un domaine délimité par la surface $V = 2$ d'une part, par une sphère de centre O de l'autre (la figure met en évidence une coupe méridienne de ce domaine). Choisissons pour valeurs $f(Q)$ sur la frontière Σ de ce domaine celles que prend justement le potentiel V sur cette surface: notamment, au voisinage de O, nous aurons la valeur $V = 2$

Appliquons maintenant un lemme d'unicité de M. Zaremba:

Une fonction $F(P)$, harmonique dans Ω, continue dans $\Omega + \Sigma - O$ et s'annulant sur $\Sigma - O$ est identiquement nulle si elle reste bornée [1])

D'après ce lemme, le problème de Dirichlet ne peut admettre de solution autre que V. Or, non seulement cette fonction ne tend nullement vers 2 quand on tend vers le point O (elle n'a aucune valeur limite déterminée en ce point), mais même on peut dire que sa valeur limite la plus probable est l'unité, puisqu'on

---

[1]) Soit $\mathfrak{M}$ la borne supérieure de $|F(P)|$ dans Ω: en chaque point P intérieur à Ω, $|F(P)|$ est $<$ à la solution du problème de Dirichlet extérieur, pour une sphère arbitrairement petite de centre O avec une distribution de valeurs égales à $\mathfrak{M}$ en chaque point de cette sphère. D'où, en appelant ε le rayon de cette sphère

$$|F(P)| < \frac{\mathfrak{M}}{OP}\varepsilon.$$

Donc on a rigoureusement $F(P) = 0$.

l'obtient en tendant vers O suivant une direction bien déterminée, pourvu que cette direction soit distincte de celle du segment portant la distribution.

10. **Existence de la solution du problème de Dirichlet généralisé.** Dans l'exemple précédent, la fonction $V(P)$ qui est le potentiel de notre segment de droite ne peut constituer, pour le domaine Ω qui a été défini, une solution du problème de Dirichlet au sens classique. Mais, il est tentant de la considérer comme solution d'un problème de Dirichlet, à énoncé moins restrictif, soit qu'on fasse l'une ou l'autre des remarques suivantes.

1° La fonction V satisfait à toutes les conditions imposées à la solution du problème de Dirichlet, sauf en 0: et cette infraction à nos exigences est vraiment faible pour que nous puissions, sans quelque sévérité, refuser à V le titre de solution.

2° Il est évidemment possible de trouver une suite $\{\Omega_k\}$ de domaines tendant vers le domaine Ω, pour chacun desquels la frontière Σ_k serait une surface assurant, pour le problème de Dirichlet classique relatif à Ω_k une solution et une seule. En prenant précisément sur Σ_k les valeurs acquises sur cette surface par $V(P)$, la solution serait la fonction $V(P)$ elle-même. Donc la fonction $V(P)$ est la limite d'une suite de fonctions [ici toutes égales á $V(P)$] qui sont des solutions. Par continuité (au sens de l'analyse fonctionnelle) nous devons donc la considérer elle-même comme une solution.

Au fond, nous revenons ici à l'idée initiale du prolongement fonctionnel. L'exposé de ce numéro et celui du précédent ne sont d'ailleurs destinés qu'à faciliter la compréhension. Après cette digression, nous allons faire connaître le théorème de M. Norbert Wiener *(B)* qui établit d'une manière tout à fait générale l'existence d'une solution pour le problème de Dirichlet généralisé[1]).

---

[1]) L'idée d'une fonction harmonique attachée à des valeurs frontières $f(Q)$ est très ancienne. Pour quiconque est familier avec ces questions, il apparait qu'elle existe en germe dans le mémoire de Poincaré d'Amer. Journ. of Math. (1890) exposant sa méthode du balayage, et chez les géomètres tels B. Levi et G. Fubini, qui à la suite des travaux d'Hilbert, se sont occupés du principe du minimum (voir Rendic. di Palermo. t. 22 et 23). Mais aucun de ces auteurs n'a étudié cette solution généralisé pour elle-même. Le premier pas décisif dans cette voie, dont nous apercevons aujourd'hui l'extrême importance, a été magistralement accompli par M. Zaremba, qui a fait connaître pour la première fois l'exposé de ses résultats au Congrès de Rome de 1907. Son travail principal

On reconnaîtra de suite que cette solution est définie au moyen d'un prolongement fonctionnel par *continuité*. Notre démonstration sera différente de celle de M. Norbert Wiener: conformément au programme que nous avons tracé, elle élucidera d'abord le cas où les données $f(Q)$ sur Σ sont l'empreinte d'un polynôme sur cet ensemble, pour passer, par un nouveau prolongement, à des données continues quelconques.

11. **Le théorème de Norbert Wiener**. Rappelons d'abord des lemmes fondamentaux, donnés par M. Henri Lebesgue dans son beau mémoire sur le problème de Dirichlet [1]:

1° Etant donné un ensemble fermé Σ, on peut construire une fonction $\mathcal{F}(P)$ continue dans tout l'espace et se réduisant sur Σ à une fonction continue $f(Q)$ [en supposant toujours que Σ est situé tout entier à distance finie].

2° En outre, si Σ est la frontière d'un domaine Ω, on peut s'arranger de manière que la fonction $\mathcal{F}(P)$ soit monotone à l'intérieur de ce domaine, c'est-à-dire que dans chaque domaine fermé intérieur à Ω, la fonction $\mathcal{F}(P)$ ait même borne supérieure dans l'ensemble de ce domaine partiel et sur sa frontière; et aussi, même borne inférieure.

Cela posé, voici maintenant l'énoncé du théorème de M. Norbert Wiener:

Soit le domaine ouvert Ω, à distance finie, de frontière Σ. Soit $f(Q)$ une fonction continue donnée sur Σ. Construisons une $\mathcal{F}(P)$ continue dans $\Omega + \Sigma$ et se réduisant à $f(Q)$ sur Σ. Considérons Ω comme la limite d'une suite de domaines $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ se dilatant progressivement (comme en fournit par exemple, l'artifice des réseaux), et pour chacun desquels le problème de Dirichlet possède une solution au sens classique (ce qui justement a lieu dans le cas cité). Calculons cette solution en prenant pour valeurs sur la frontière de chaque Ω_k

sur ce sujet est publié dans le Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1910. Jusqu'au moment où M. Norbert Wiener a publié son mémoire *B.* l'exposé précédent de M. Zaremba marquait le stade le plus élevé atteint dans l'étude du principe de Dirichlet. Il fait époque, dans l'histoire de ces questions, au même titre que le mémoire de Poincaré sur la méthode du balayage, au même titre aussi que le mémoire de M. Henri Lebesque, de 1907, (voir ci-dessous).

[1]) Rendic. à Palermo, t. 24, 1907. 2e semestre.

celles qu'y prend $\mathcal{F}(P)$. Nous obtenons ainsi une suite $\{F_K(P)\}$ de fonctions harmoniques. Cette suite possède justement une limite, indépendante du choix de $\mathcal{F}(P)$ et des domaines d'approximation: cette limite, nécessairement harmonique[1]) est par définition la solution du problème de Dirichlet généralisé soit $F(P)$:

Remarquons d'abord que si l'on prend $f(Q) = 0$, l'indépendance de la fonction limite vis à vis du choix de $\mathcal{F}(P)$ et des domaines approchés Ω_k est évidente: en effet, $\mathcal{F}(P)$ est uniformément continue, donc à tout ε positif, on peut faire correspondre un réseau assez resserré pour que dans l'ensemble γ des cubes de ce réseau contenant des points de Σ, on ait $|\mathcal{F}(P)| < \varepsilon$. Puisque les Ω_k tendent vers Ω, on peut prendre K assez grand pour que Σ_K soit enclose dans γ. On aura dès lors $|F_K(P)| < \varepsilon$, ce qui établit rigoureusement que les F_K tendent vers zéro, indépendamment des éléments laissés arbitraires.

Il s'ensuit qu'en général, les propriétés limites de la suite des F_K ne dépendent pas de ces éléments, nous pouvons donc choisir à notre gré une $\mathcal{F}(P)$ continue dans $\Omega + \Sigma$ et se réduisant sur Σ à $f(Q)$, ainsi que la suite des Ω_K, pourvu qu'elle tende vers Ω.

Etudions alors le cas où $\mathcal{F}(P)$ est un polynôme. D'après une remarque d'Henri Poincaré (donnée par lui à l'occasion de sa méthode du balayage) tout polynome peut, dans une région finie de l'espace, être regardé comme la différence de deux polynomes à laplacien $\geqslant 0$. A cause du caractére linéaire du problème, nous pouvons nous contenter d'examiner le cas où il en est ainsi pour $\mathcal{F}(P)$. Alors, on voit immédiatement que les $\{F_K(P)\}$ forment une suite croissante (et d'ailleurs bornée). Donc, d'après le théorème d'Harnack, elles tendent (et cela uniformément dans tout Ω' intérieur à Ω) vers une fonction harmonique limite $F(P)$.

---

[1]) Nous avons une suite de fonctions harmoniques qui sont manifestement bornées dans leur ensemble. Or toute famille bornée de fonctions harmoniques possède l'égale continuité, comme cela résulte aisément des propriétés de l'intégrale de Poisson (résultat signalé par Osgood et Montel, notamment, avant 1907). Si donc une suite de fonctions harmoniques a une fonction limite dans Ω, cette limite sera nécessairement continue et atteinte uniformément dans tout Ω' intérieur à Ω. Prenons Ω' sphérique: les F_K y sont représentés par leur intégrale de Poisson. En vertu de la convergence uniforme, il en est de même de la fonction limite, qui est donc aussi harmonique.

Le théorème de N. Norbert Wiener est vrai dans le champ des fonctions $\mathscr{F}(P)$ qui sont des polynômes. En outre, dans le champ de ces fonctions, l'inégalité

$$(5) \qquad |f'(Q) - f''(Q)| < \varepsilon$$

entraîne pour les solutions correspondantes $F'(P)$ et $F''(P)$ du problème de Dirichlet généralisé

$$(6) \qquad |F'(P) - F''(P)| < \varepsilon$$

et cela en vertu de la possibilité d'associer aux données $f(Q) = f'(Q) - f''(Q)$ une $\mathscr{F}(P)$ monotone (2^e lemme de Lebesgue). De cette remarque, et du théorème de Weierstrass sur la possibilité d'approcher d'une fonction continue quelconque, dans une région finie de l'espace, par une suite de polynômes tendant uniformément vers cette fonction, il résulte que le théorème de M. Norbert Wiener est complètement général

Remarquons encore que l'inégalité (5) entraînera toujours l'inégalité (6).

12. **Propriétés de la solution du problème de Dirichlet généralisé**. Supposons qu'il existe une fonction harmonique dans Ω, continue dans $\Omega + \Sigma$ et prenant les valeurs $f(Q)$ sur Σ. Nous pouvons prendre pour $\mathscr{F}(P)$ cette fonction. Il est clair qu'alors, toutes les $F_k(P)$ lui sont égales. Donc cette fonction sera manifestement la solution $F(P)$ du problème de Dirichlet généralisé.

On peut aussi démontrer une propriété d'inégalité:

Soit une fonction $\varphi(P)$ continue dans Ω, possédant en chaque point de Ω un laplacien négatif ou nul [ce qu'on exprime en disant que $\varphi(P)$ est s u r - h a r m o n i q u e ou harmonique[1]) et telle qu'en chaque point Q de Σ, sa plus petite limite $\underline{\varphi}(Q)$ satisfasse à la condition

$$(7) \qquad \underline{\varphi}(Q) \geqslant f(P).$$

En désignant toujours par $F(P)$ la solution attachée aux valeurs $f(Q)$ sur Σ, on a

$$(8) \qquad \varphi(P) \geqslant F(P).$$

---

[1]) De là il résulte que la valeur de la fonction au centre d'une sphère surpasse la moyenne de ses valeurs sur la sphère.

En effet, il est possible, en vertu de l'hypothèse (7) de trouver une $\mathcal{F}(P)$ telle que

$$\varphi(P) \geqslant \mathcal{F}(P).$$

Formons, relativement aux Ω_k, la suite de Wiener pour chacune des fonctions φ et $\mathcal{F}$. Nous aurons

$$\varphi_k(P) \geqslant F_k(P).$$

Or les φ_k vont en décroissant et tendent vers une limite $\lesssim \varphi(P)$. On a donc bien l'inégalité (8). Nous dirons avec M. Oscar Perron [1]) que $\varphi(P)$ est une fonction supérieure relative aux données frontières $f(Q)$ si elle est surharmonique (au sens large) et satisfait à la conditon (7). Le théorème précédent peut encore s'énoncer ainsi:

Toute fonction snpérieure relative à $f(Q)$ est supérieure ou égale à la solution correspondante du problème de Dirichlet généralisé.

Il est superflu d'énoncer la contre partie, relative aux fonctions inférieures de $f(Q)$. Notons maintenant que la différence.

$$\varphi(P) - F(P)$$

est surharmonique (sens large et que sa plus petite limite sur la frontière est positive ou nulle en chaque point: c'est donc une fonction supérieure pour la valeur zéro sur le bord. Il est clair qu'on peut former de telles fonctions qui soient partout inférieures à ε positif, il suffit de prendre un potentiel de masses positives de densité spatiale partout inférieure à un η assez petit. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, ou théorème de Perron et Wiener [2]).

La solution du problème de Dirichlet généralisé est la borne inférieure de toutes les fonctions supérieures et la borne supérieure de toutes les fonctions inférieures relatives aux données $f(Q)$.

13 **Propositions de première et de seconde espèces.** Le théorème d'existence de M. Norbert Wiener (n⁰ 11) et le théorème de Perron et Wiener sont des propositions valąbles sans restriction à la généralité de la frontière Σ. De telles restrictions sont cepen-

---

[1]) Eine neue Behandlung der erste Randwertaufgabe für $\Delta_u = 0$ (Math. Zeitschrifft, vol 18, 1924).

[2]) Le théorème a été établi par M. Wiener (*D*), à la faveur des concepts de M. Perron.

dant indispensables si l'on veut mettre en relation les propriétés limites de la solution $F(P)$ du problème de Dirichlet généralisé, lorsque P tend vers un point Q de Σ, avec la fonction $f(Q)$ donnée sur Σ. C'est ce que montre immédiatement l'exemple suivant: supposons que Ω soit constitué pas les points intérieurs à une sphère de centre O. moins ceux qui sont situés sur un certain segment OA. Une fonction harmonique dans Ω. attachée aux valeurs $f(Q)$ sur la sphère et $f_1(Q)$ sur OA coincide toujours, quelle que soit la fonction bornée $f_1(Q)$, avec la fonction harmonique dans toute la sphère et prenant les valeurs $f(Q)$ sur sa surface. Il ne peut donc exister aucune relation entre les propriétés limites aux points de OA de cette fonction $F(P)$ et les valeurs $f_1(Q)$. L'ensemble des points de OA, qui fait partie de la frontière du domaine Ω est un *ensemble impropre* à porter (efficacement) des données de Dirichlet, ou en abrégé, un ensemble impropre.

Nous appellerons propositions de seconde espèce celles qui marquent la dépendance entre $f(Q)$ et les propriétés limites de la solution correspondante du problème de Dirichlet généralisé sur la frontière. Il est clair que ces propositions ne sont valables que pour les frontières débarrassés d'ensembles impropres.

14. **Ensembles impropres. Capacité.** Il s'agit maintenant de préciser la notion des *ensembles impropres*. Partons d'un domaine Ω, de frontière Σ, dans les hypothèses générales du nº 11. Soit A un point intérieur au domaine Ω. Nous pouvons définir, en vertu du nº 11, la fonction de Green $G(A,P)$, dans un sens généralisé [1]). Considérons les domaines Δ définis par la condition $G(A, P) > \lambda$ où λ est un nombre positif, Ils se dilatent au fur et à mesure que λ decroit Il peut arriver que la région Δ_λ comprenne à partir d'un certain moment, un sous-ensemble de la frontière Σ, soit σ_λ qui ne pourra décroitre lorsqu'on fera décrôitre λ. Sur cet ensemble σ_λ, la fonction $G(A, P)$ ne cesse pas d'être harmonique. Désignons par σ la limite des ensembles σ_λ lorsque λ tend verszéro Tout ensemble fermé σ_1 intérieur à σ constitue, par définition, une *partie impropre de la frontière* Σ. La fonction de Green y est attachée indifféremment aux valeurs 0 ou $G(A, Q)$, ou encore à tout ensemble

[1]) L'existence de cette fonction de Green, au moyen du théorème d'Harnack, est immédiate: c'est même un résultat beaucoup moins caché que l'existence de la solution du problème de Dirichlet généralisé. Nous l'avions indiqué dès 1919, C. R. Ac. Sc. Paris, t. 169, p. 763 et suivantes).

de valenrs intermédiaires, et par suite en vertu du caractére linéaire du problème, à tout ensemble arbitraire de valeurs bornées. Il est donc indiqué de remplacer dans nos raisonnements le domaine Ω de frontière Σ par le domaine ouvert $\Omega + \sigma$ de frontière $\Sigma - \sigma$.

Il faut observer que la notion d'ensemble impropre est une notion intrinsèque: antrement dit, le fait que σ_1 est une portion impropre de la frontière Σ n'est nullement spécial à celle-ci. En effet, remarquons d'abord que la notion de fonction de Green a un sens parfaitement clair, qu'il s'agisse d'un domaine fini ou d'un domaine infini[1]. Cela posé, considérons un domaine infini ouvert, composé de tous les points de l'espace à l'exclusion des points de l'ensemble σ_1. La fonction de Green pour un tel domaine $G(A, P)$ [définie par l'harmonicité, par la présence en A d'une singularité ayant pour partie principale $\frac{1}{AP}$, par l'évanouissement à l'infini, et par le fait que la fonction est attachée à la valeur zéro sur σ_1] surpasse la fonction de Green de Ω. On en conclut que pour ce nouveau domaine, l'ensemble σ_1 (qui constitue la frontière tout entière) est encore un ensemble impropre.

La notion d'ensemble impropre est donc exempte de tout caractère relatif à une frontière Σ dont σ_1 serait un sous-ensemble.

15. Nous allons maintenant exprimer, sous forme physique, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit impropre. A cet effet, notons d'abord la possibilité de définir la solution généralisée du *problème de Dirichlet extérieur*. Raisonnons, pour fixer les idées, dans l'espace à trois dimensions. Considérons une sphére s_0 et un ensemble fermé e de points intérieurs a s_0: soit Σ son sous-ensemble frontière, formé aussi de points intérieurs à la sphère. En enlevant de la sphère l'ensemble e, nous obtenons un domaine ouvert. Résolvons le problème de Dirichlet pour ce domaine, avec des valeurs positives (ou nulles) $f(Q)$ sur Σ, et la valeur zéro sur la sphère s_0. D'après le théorème de M. Norbert Wiener, il y a une solution et une seule. Faisons maintenant croître indéfini-

[1] L'existence de cette fonction de Green au moyen du théorème d'Harnack, est immédiate: c'est même un résultat beaucoup moins caché que l'existence de la solution du problème de Dirichlet généralisé. Nous l'avions indiqué dès 1919, C. R. Ac. Sc. Paris, t. 169, p. 763 et suivantes).

ment le rayon de la sphère: la valeur en chaque point P de la solution précédente va en décroissant. Nous aurons donc, d'après le théorème d'Harnack, une fonction harmonique limite $F(P)$; cette fonction s'évanouit à l'infini, pour la raison suivante: soit $\mathfrak{M}$ le maximum de $F(P)$ sur la sphère s_0 initiale, la fonction harmonique qui prend la valeur $\mathfrak{M}$ sur cette sphère et la valeur zéro sur une sphère concentrique extérieure de rayon R tend lorsque R croît indéfiniment vers la fonction $\frac{\mathfrak{M} R_0}{r}$, qui est évanescente à l'infini. Donc la même propriété appartient a fortiori à $F(P)$ [1]). La solution du problème de Dirichlet extérieur est donc obtenue dans le cas particulier où l'on a $f(Q) \geqslant 0$. Pour passer à une distribution continue quelconque $f(Q)$, il suffit alors de savoir traiter le cas particulier où $f(Q) = 1$, lequel rentre justement dans celui que nous venons de traiter.

Ce cas particulier correspond au problème généralisé de la distribution de l'électricité en équilibre sur la frontière Σ de l'ensemble fermé e (supposé bon conducteur). Pour que l'ensemble Σ soit impropre, il faut et il suffit que le potentiel qui résout ce problème généralisé soit identiquement nul. Ceci ne peut avoir lieu que si $\Sigma = e$, c'est-à-dire, si l'ensemble fermé e ne contîent pas de points intérieurs. Ce n'est là d'ailleurs, qu'une condition nécessaire, comme on le voit en remarquant qu'il existe une distribution de l'électricité, correspondant à un potentiel d'équilibre non nul, sur un disque circulaire

16. Pour traduire la condition nécessaire et suffisante d'impropriété d'un ensemble, nous allons définir d'une manière générale la notion de capacité électrostatique dont M. Norbert Wiener (B) a inauguré l'emploi dans des questions analogues. Toutefois, nous adopterons une définition un peu différente (bien qu'au fond équivalente). Ici encore, nous aurons recours à l'idée du prolongement fonctionnel. Soit d'abord un système de conducteurs pour lequel le problème de Robin (recherche de l'éléctricité en équilibre, avec le potentiel 1 pour chaque conducteur) est résoluble au sens classique. Désignons par ϱ la densité électrostatique en

---

[1]) Il est clair que ce même raisonnement s'applique dans les espaces à plus de trois dimensions. En revanche, il cesse d'être valable en géométrie plane, parce que la solution fondamentale $-\log r$ n'est plus évanescente à l'infini.

chaque point. Le potentiel d'équilibre est encore

$$V(P) = \int \frac{\varrho_M \, d\sigma_M}{MP}$$

l'intégration étant étendue à l'ensemble des surfaces extérieures des conducteurs. Ce résultat n'est applicable que moyennant des hypothèses précises sur ces surfaces (par exemple, le fait qu'elles sont à courbures bornées). En réalité, ceci n'est pas gênant, en vertu de la possibilité d'approcher, au moyen de telles surfaces, de tout ensemble Σ. La capacité électrostatique de Σ sera par définition

$$C = \lim_{K=\infty} \int_{\Sigma_K} \varrho_M^{(K)} \, d\sigma_M = \lim_{K=\infty} \quad (\text{capacité de } \Sigma_K)$$

en désignant par Σ_K un système d'un nombre fini de surfaces fermées (conductrices), tel que la région extérieure à Σ_K comprenne au moins tous les points de la région extérieure à Σ_{K-1}. Dans ces conditions, on a nécessairement entre les distributions en équilibre sur ces surfaces la relation

$$\int_{\Sigma_{K-1}} \varrho_M^{(K-1)} \, d\sigma_M > \int_{\Sigma_K} \varrho_M^{(K)} \, d\sigma_M .$$

En effet, le potentiel $V_K(P)$ a pour partie principale, lorsque P s'éloigne indéfiniment d'un point fixe O

$$\frac{\int_{\Sigma_K} \varrho_M^{(K)} \, d\sigma_M}{OP}$$

De même, la partie principale de $V_{K-1}(P)$ s'exprime par un rapport analogue. Or, d'une part, la différence $V_{K-1}(P) - V_K(P)$ est partout $\geqslant 0$, d'autre part si nous supposons que Σ_K n'a aucun point commun avec Σ_{K-1}, il est facile de voir que $V_{K-1} - V_K$ est non nul et de l'ordre de $\frac{1}{OP}$ [1]). Donc on a nécessairement

[1]) Par exemple, prenons deux sphères concentriques, de rayons R et R': le potentiel d'équilibre, prenant la valeur 1 sur la sphère sera $\frac{R}{OP}$ pour l'une et $\frac{R'}{OP}$ pour l'autre. La différence est bien de l'ordre de $\frac{1}{OP}$.

$$\int_{\Sigma_{K-1}} \varrho^{(K-1)} d\sigma_M > \int_{\Sigma_K} \varrho_M^{(K)} d\sigma_M$$

relation qui exprime que les capacités successives des Σ_K vont en décroissant. Comme elles sont positives, la limite que nous avons désignée par C existe, et nous pourrons désormais, considérer comme acquise la notion de capacité de tout ensemble frontière (fermé).

17. Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème suivant:

Pour qu'un ensemble soit impropre, il faut et il suffit que sa capacité soit nulle.

La condition est nécessaire: en effet, soit σ un ensemble impropre; enserrons-le de plus en plus étroitement par une suite de frontières Σ_K pour lesquelles le problème de la distribution électrostatique soit résoluble au sens classique, au moyen d'une couche de densité $\varrho^{(K)}$. Soit P un point fixe de l'espace, extérieur à tous les Σ_K (pour $K > K_0$). La suite des $\{V_K(P)\}$ tend vers zéro. Il en est donc de même de la suite des capacités des Σ_K. Donc par définition, la capacité de σ est nulle.

Réciproquement, si la capacité de σ est nulle, la suite des capacités des Σ_K tend vers zéro donc les potentiels $V_K(P)$ tendent vers zéro. L'ensemble σ est donc impropre (C. Q. F. D.).

Le théorème précédent est fondamental. Il montre que les ensembles de capacité nulle jouent, dans le problème de Dirichlet, le même rôle que les ensembles de mesure nulle dans le problème de l'intégration, en ce sens que dans l'un et l'autre problème, les données portées par de tels ensembles peuvent être arbitrairement altérées sans que la solution s'en trouve modifiée (en maintenant ces données bornées). En outre notre exposé montre comment la notion de capacité s'introduit d'une manière naturelle dans ces questions.

18. **Théorème de seconde espèce concernant la fonction de Green.** Il existe une fonction $G(A, P)$ et une seule, telle que la différence $\frac{1}{AP} - G(A, P)$ soit harmonique dans Ω, et telle que la plus petite limite de $G(A, P)$ en chaque point Q de la frontière Σ, supposée réduite (exempte d'ensembles impropres) soit nulle. Cette fonction

est précisément la fonction de Green du problème de Dirichlet généralisé.

En effet, montrons d'abord que la fonction de Green $G(A, P)$ jouit bien de la propriété limite en question. Puisque Σ est débarrassée d'ensembles impropres, le domaine ouvert Δ_λ défini par l'inégalité $G(A, P) > \lambda$ (> 0) ne contiendra jamais de points de Σ, D'ailleurs ce domaine est délimité par une surface analytique, qui est réguliere sauf sur un certain système de points ou d'arêtes distribuées sur Σ. Sa fonction de Green est donc $G(A, P) - \lambda$. Lorsque λ tend vers zéro. le domaine Δ_λ tend en se dilatant vers un domaine formé de points de Ω dont la fonction de Green est $G(A, P)$ et dont la frontière est formée de points exclus de tous les Δ_λ. Ce domaine ouvert limite est nécessairement Ω, car s'il était plus restreint, il aurait une fonction de Green différente de $G(A, P)$[1]. Donc chaque point Q de Σ est limite de points tels que $G(A, P)$ soit égale à une quantité arbitrairement petite ε. On a donc bien

$$G(A, Q) = 0.$$

Démontrons maintenant la proposition d'unicité. Posons

$$\frac{1}{AP} - G(A, P) = H(A, P).$$

Tout revient à montrer qu'il existe dans Ω une seule fonction harmonique $H(A, P)$ telle que l'on ait

$$H(A, Q) = \frac{1}{AQ} \tag{9}$$

en chaque point Q de la frontière Σ Supposons qu'il existe une autre fonction harmonique $H'(A. P)$ remplissant la même condition. La fonction $H(A, P)$ est attachée aux valeurs $\frac{1}{AQ}$. Donc, en vertu d'une proposition établie au n^0 12, nous avons

$$H(A, P) \geqslant H'(A, P)$$

[1]) Ce fait est analogue au suivant: soit la portion de l'espace extérieure à une sphère, même très petite: je puis calculer la fonction de Green. J'ajoute cette sphère au domaine, de manière à retrouver tout l'espace. La fonction de Green s'accroît.

d'où

$$G(A' P) \leqslant G'(A, P).$$

Donc l'ensemble des points du domaine Ω où l'on a $G'(A, P) > \varepsilon$ contient le domaine ouvert Δ_ε et par suite tend vers Ω lorsque ε tend vers zéro. Sa fonction de Green $G'(A, P) - \varepsilon$ tend donc necessairement vers $G(A, P)$. Donc

$$G'(A, P) = G(A, P) \qquad \text{(C. Q. F. D.).}$$

Remarques. I. Nous avons fait ici état d'une proposition non établie explicitement, *relative* aux domaines dont la frontière est une surface analytique en ses points intérieurs à Ω présentant certaines singularités réparties sur Σ. Pour un domaine de cette espèce, on peut évidemment choisir des domaines approchés dont la frontière coïncide avec celle du domaine lui-même, sauf au voisinage des pointes ou arêtes qui seront évitées par des rondelles ou bandelettes de raccord. La fonction de Green généralisée est alors caractérisée par ses proprietés habituelles et par la propriété limite de s'annuler sur la frontière du domaine, sauf peut-être aux points singuliers de celle-ci. Cela s'établit sans difficulté (voyez *F*, mai et juin 1924), aussi bien qu'un théorème analogue relatif, dans les mêmes conditions, à la solution du problème de Dirichlet. C'est grâce à ce théorème que nous avons pu affirmer que la fonction de Green de Δ_λ est $G(A, P) - \lambda$.

II. Si la frontière Σ est débarrassée d'ensembles impropres, il est clair que tous ses points ne peuvent appartenir à la frontière de Δ_λ.

19. Nous completerons le théorème du numéro 18 en établissant maintenant la proposition suivante:

Soit une suite de points $\{P_K\}$ tendant vers le point Q de Σ (exempte d'ensembles impropres), pour laquelle la suite des valeurs $\{G(A, P_K)\}$ tend vers zéro. Il en sera encore ainsi si, conservant la suite des points P_K, on substitue au point A tout autre point A' (appartenant aussi à Ω).

En effet soit M nn point pouvant occuper á l'intérieur du domaine Ω une position quelconque. La suite des $\{G(M, P_K)\}$ est une suite de fonctions harmoniques du point M, qui partout dans Ω, sont $\geqslant 0$. Or quand M est confondu avec A, le terme général de cette suite tend vers zéro. Donc la moyenne des valeurs des $\{G(M, P_K)\}$ à l'intérieur d'une sphère de centre A [1]) tend vers zéro. On en déduit aisément que la suite $\{G(M, P_K)\}$ tend vers zéro pour toute position de M, intérieure à cette sphère [2]) puis en étendant ce résultat de proche en proche, pour toute position de ce point à l'intérieur de Ω. (C. Q. F. D.).

20. **Résolution du problème de Dirichlet pour l'équation $\Delta U = \psi(P)$.** Soit le domaine Ω, de frontière Σ et soit $f(Q)$ une distribution continue de valeurs sur Σ. Puisque nous avons défini pour le problème de Dirichlet, relatif à l'équation $\Delta U = 0$, la solution généralisée attachée aux valeurs $f(Q)$ sur Σ, il nous suffit, pour l'équation $\Delta U = \psi(P)$, de définir la solution attachée à la valeur zéro sur Σ. Mais il est clair que cette solution se présente comme le prolongement fonctionnel par continuité de la solution du même problème lorsque celui ci est résoluble au sens classique. Son expression est donc nécessairement

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} \psi(M)\, G(M, P)\, d\omega_M$$

$G(M, P)$ désignant la fonction de Green du problème de Dirichlet généralisé pour le domaine Ω.

Supposons maintenant que la frontière Σ soit débarrassée d'ensembles impropres. Alors d'après la proposition du nº 19. on peut à chaque point Q, associer une suite de points $\{P_K\}$ tendant vers Q et telle que $\{G(M, P)\}$ tende vers zéro quelque soit le point M. Il s'ensuit que l'intégrale précédente tendra aussi vers zéro. Donc, si la frontière est débarrassée des ensembles impropres, la valeur zéro est, en chaque point Q, l'une des valeurs limites pour la solution du problème de Dirichlet relative à $\Delta U = \psi$ et attachée à la valeur zéro sur Σ. Si la fonction $\psi(M)$ est partout $\leqslant 0$. alors la valeur zéro est la plus petite limite de cette solution.

Réciproquement, moyennant l'hypothèse $\psi \leqslant 0$, il n'existe qu'une solution de

---

[1]) Nous prenons ici le théorème de la moyenne, relatif aux fonctions harmoniques, non sous la forme de Gauss (invariance d'une fonction harmonique par une médiation sur la surface d'nne sphère, mais sous la forme de M. Zaremba (invariance par médiation dans son volume),

[2]) En effet, la suite des $G(M, P_K)$ possède l'égale continuité

$$\Delta U = \psi$$

dont la plus petite limite en chaque point de Σ soit nulle: c'est l'intégrale précédente.

En effet, désignons la valeur de cette intégrale par $U(P)$ et admettons un instant l'existence d'une autre solution $V(P)$ telle qu'on ait. en chaque point Q de Σ.

$$\underline{V}(Q) = 0.$$

Comme $U(P)$ est attachée à la valeur zéro, il en résulte que l'on a $U(P) \leqslant V(P)$. Soit ε un nombre positif tendant vers zéro. Considérons le domaine ouvert D_ε défini par la condition $U(P) > \varepsilon$. Pour ce domaine, la solution de $\Delta U = \psi$, attachée à la valeur zéro sur le bord est justement $U(P) - \varepsilon$. De même, pour le domaine D'_ε défini par $V(P) > \varepsilon$, la solution du même problème sera $V(P) - \varepsilon$. Or, tout point de D_ε appartient à D'_ε. Quand ε tend vers zéro, D_ε tend vers Ω. Il en est donc de même de D'_ε et par suite, la fonction $V(P) - \varepsilon$ tend vers $U(P)$, et l'on a bien $U(P) = V(P)$.

21. **Application aux proprietés limites de la solution du problème de Dirichlet pour $\Delta U = 0$.** Nous allons restreindre un instant la généralité du champ fonctionnel $f(Q)$ en considérant seulement celles de ses fonctions qui sont l'empreinte sur Σ d'une fonction $\mathcal{F}(P)$ continue dans $\Omega + \Sigma$, ayant en chaque point de Ω un laplacien et telle que l'intégrale

$$\int_\Omega \Delta \mathcal{F}(M)\, G(M, P)\, d\omega_M$$

ait un sens. Moyennant ces hypothéses, la solution du problème de Dirichlet généralisé pour l'équation $\Delta U = 0$ et pour les valeurs particulières $f(Q)$ considérées sera donnée par la formule

$$F(P) = \mathcal{F}(P) + \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \Delta \mathcal{F}(M)\, G(M, P)\, d\omega_M,$$

qui s'établit en passant par l'intermédiaire des domaines Ω_K et faisant croître K indéfiniment. On en déduit immédiatement les théorèmes suivants, qui en outre des hypothèses précédentes, supposent toujours qne Σ soit débarrassée d'ensembles impropres:

1° A chaque point Q de Σ, on peut toujours faire correspondre une suite de points $\{P_K\}$ faisant tendre la solution $F(P)$ vers $f(Q)$. Les suites possédant cette propriété sont indépendantes du choix de $f(Q)$ dans notre champ fonctionnel restreint, car ce sont celles qui assurent à $G(M, P)$ la valeur limite zéro.

2° Si la fonction $\Delta\mathcal{F}$ est toujours $\leqslant 0$, alors $f(Q)$ sera en chaque point Q de Σ la plus grande limite de $\mathcal{F}(P)$ De la réciproque établie à la fin du n^o 20, il résulte de plus que cette propriété limite détermine entièrement $F(P)$. On a des théorèmes anologues en supposant $\Delta\mathcal{F} \geqslant 0$ et en remplaçant plus grande limite par plus petite limite.

De ces deux groupes de propositions, nous allons maintenant montrer que le premier est complètement général, dans le champ des fonctions $f(Q)$ continues sur Σ. Avec précision, soit une suite de points $\{P_K\}$ tendant vers le point Q et pour laquelle la fonction de Green tend vers zéro. Je dis que pour cette suite de points, les valeurs de la solution $F(P)$ du problème de Dirichlet généralisé tendent vers $f(Q)$. En effet, soit $\mathcal{F}(P)$ une fonction continue dans $\Omega + \Sigma$ et se rédui sant à $f(Q)$ sur Σ. Approchons uniformément de $\mathcal{F}(P)$ dans $\Omega + \Sigma$ par une suite de polynômes $\{\mathcal{F}_i(P)\}$. Nous aurons évidemment

$$|F(P_K) - f(Q)| \leqslant |F(P_K) - F_i(P_K)| + |F_i(P_K) - f_i(Q)| + \\ + |f_i(Q) - f(Q)|,$$

où f_i désigne les valeurs prises par $\mathcal{F}_i$ sur Σ, F_i la solution correspondante du problème de Dirichlet généralisé. Je dis qu'à tout ε positif. on peut faire correspondre un entier K_0 tel que l'inégalité $K > K_0$ entraîne $|F(P_K) - f(Q)| < \varepsilon$. Pour le montrer, utilisons l'inégalité précédente. Commençons par déterminer i de manière que l'on ait daus $\Omega + \Sigma$

$$|\mathcal{F}(P) - \mathcal{F}_i(P)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

d'où

$$|f(Q) - f_i(Q)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

et par suite

$$|F_i(P) - F(P)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

quel que soit P dans $\Omega + \Sigma$. Les deux termes extrêmes du second membre de notre inégalité étant ainsi rendus moindres que $\frac{\varepsilon}{3}$, et la valeur numérique de i se trouvant fixée, nous pouvons, (d'après le théorème établi pour un champ fonctionnel restreint), choisir K assez grand pour que le terme du milieu $|F_i(P_K) - f_i(Q)|$ devienne moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$. Le théorème est donc établi

22. **Points réguliers points irréguliers.** On appelle points réguliers [1]) les points Q de Σ où la solution $F(P)$ du problème de Dirichlet généralisé tend vers $f(Q)$ lorsque P tend d'une manière quelconque vers le point Q. Les points Q, où les proprietés limites de la suite des $F(P_K)$ [en appelant toujours $\{P_K\}$ une suite de points tendant vers Q] sont liées au choix de la suite des P_K sont appelés points irréguliers.

Nous venons d'établir que toute suite $\{P_K\}$ faisant tendre la fonction de Green vers zéro fait tendre la solution $F(P)$ vers $f(Q)$. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Pour qu'un point Q de Σ soit régulier, il faut et il suffit que la fonction de Green $G(A, P)$ tende vers zéro lorsque P tend d'une manière quelconque vers le point Q [2]).

D'après la proposition du n^0 19, le choix de A est d'ailleurs indifférent.

23. **Caractère local de la notion de point régulier et critères de régularité.** Nous venons de faire connaître un critère de régularité, qui ultérieurement, nous sera très utile. Toutefois son énoncé ne met pas en évidence, d'une manière immédiate, ce fait que le caractère régulier d'un point de la frontière est une propriété purement locale.

Il est facile d'énoncer un nouveau critère mettant cette propriété en évidence:

Pour qu'un point Q_0 de Σ soit régulier, il faut et il suffit qu'on puisse trouver, dans la portion Ω_ϱ de Ω intérieure à une sphère de centre Q_0 et de rayon ϱ

---

[1]) Cette dénomination a été introduite par M. Henri Lebesgue dans son bel article des C. R. de l'Ac. des Sciences de Paris (tome 178, p. 349, 21 janvier 1924) que nous appellerons ultérieurement mémoire G.

[2]) Nous avons fait connaitre pour la première fois ce théorème dans notre note aux C. R. de l'Ac. des Sciences de Paris du 23 mars 1924.

une fonction harmonique $H(P)$ qui soit positive ou nulle (mais non $\equiv 0$) dans Ω_ϱ, et qui tende vers zéro lorsque le point P tend vers Q_0 suivant une loi arbitraire[1]).

Il nous suffit de montrer que la condition est suffisante, sa nécessité résultant immédiatement des propriétés de $G(A, P)$.

Considérons la fonction $H(P) \geqslant 0$ qui tend vers zéro avec la distance PQ_0. Soit toujours $F(P)$ la fonction harmonique attachée aux valeurs $f(Q)$. A tout ε positif, nous pouvons faire correspondre un ϱ positif, tel qu'en appelant Σ_ϱ la portion de Σ intérieure à la sphère de rayon ϱ, de centre Q_0, on puisse trouver sur Σ une nouvelle fonction continue $f_1(Q)$ remplissant les conditions suivantes:

1° On a, sur $\Sigma - \Sigma_{2\varrho}$
$$f_1(Q) = f(Q);$$
2° sur Σ_ϱ
$$f_1(Q) = f(Q_0);$$
3° sur $\Sigma_{2\varrho}$
$$|f_1(Q) - f(Q)| < \varepsilon.$$

Soit $F_1(P)$ la fonction harmonique attachée à $f_1(Q)$. Nous aurons:
$$F(P) - f(Q_0) = F(P) - F_1(P) + F_1(P) - f(Q_0)$$
et par suite
$$|F(P) - f(Q_0)| < \varepsilon + |F_1(P) - f(Q_0)|.$$

Or la fonction $F_1(P) - f(Q_0)$ est attachée à la valeur zéro sur Σ_ϱ et reste bornée sur la portion σ de la sphère de rayon ϱ intérieure à Ω. Pour montrer qu'elle peut être rendue arbitrairement petite, en même temps que la distance PQ_0, il suffit donc d'établir le résultat suivant:

Chaque fonction harmonique $\geqslant 0$ dans Ω_ϱ, attachée à la valeur zéro sur Σ_ϱ, et au plus égale à 1 sur l'aire σ (portion de la sphère de rayon ϱ intérieure à Ω) tend vers zéro lorsque P tend vers Q_0, dans les conditions indiquées.

---

[1]) Cette forme de critère est celle que nous avons donnée dès nos premières recherches sur ce sujet [E, F]. Voir dans [G] une forme très voisine due à M. Lebesgue.

En effet, considérons $H(P)$. Enlevons du domaine sphérique σ un voisinage de sa frontière d'aire $< \varepsilon \times 4\pi\varrho^2$. Soit ω le minimum (non nul) de $H(P)$ dans le domaine restant. En vertu du théorème de la moyenne de Gauss et d'inégalités évidentes, la fonction

$$\varepsilon + \frac{H(P)}{\omega}$$

surpasse en chaque point de Ω_ϱ. toute fonction harmonique attachée à la valeur zéro sur Σ_ϱ et au plus égale à l'unité sur σ. Notre dernier énoncé en résulte. (C. Q. F. D.).

Il est ainsi établi que le caractère régulier ou irrégulier d'un point de la frontière est purement local. En outre, cette dernière démonstration est autonome et entraîne le théorème du n^0 22, qui se trouve ainsi établi par une autre méthode.

Notons encore que, dans l'énoncé du critère qui vient d'être établi, on pourrait avec M. Lebesgue (G) remplacer l'hypothèse de l'existence d'une $H(P)$ harmonique $\geqslant 0$ par celle d'une $H(P)$ surharmonique $\geqslant 0$ tendant aussi vers zéro en Q_0.

24. **Comparaison des frontières: régularité ou irrégularité a fortiori.** D'après ce que nous venons de voir, pour chercher si Q_0 est régulier, on considère la solution attachée aux valeurs 0 sur Σ_ϱ et 1 sur Σ, harmonique dans Ω_ϱ, soit $H(P)$ [1]), et on s'assure que $H(P)$ tend vers zéro quand P tend d'une manière quelconque vers Q_0: sinon, la plus grande limite de $H(P)$ est un nombre positif et Q_0 est irrégulier.

Les inégalités usuelles relatives aux fonctions harmoniques fournissent immédiatement la remarque suivante:

Soient deux domaines Ω et Ω' dont les frontières Σ et Σ' admettent un point commun Q_0. Supposons qu'il existe une longueur ϱ_0 telle que pour $\varrho < \varrho_0$. le domaine partiel Ω'_ϱ soit formé exclusivement avec des points du domaine partiel Ω_ϱ. Alors, si Q_0 est régulier pour Σ', il l'est aussi pour Σ; si Q_0 est irrégulier pour Σ, il l'est pour Σ'.

---

[1]) Les valeurs auxquelles nous attachons $H(P)$ ne forment pas une suite continne sur $\sigma + \Sigma_\varrho$. Mais la fonction $H(P)$ est la forme supérieure des fonctions harmoniques attachées à la valeur 0 sur Σ_ϱ et $\leqslant 1$ sur σ. Du théorème d'Harnack, il résulte que cette borne est harmonique.

Ce fait, très important, et d'ailleurs connu de M. H. Lebesgue dès le début de ses recherches, nous permettra de décider de la nature des divers points de la frontière, en procédant par comparaison, de même qu'on décide de la convergence ou de la divergence d'une sommation (série ou intégrale) à éléments positifs, en la comparant à une sommation analogue, associée éléments par éléments à la première, lorsqu'il existe entre deux éléments correspondants une inégalité convenable, de sens constant.

Mais il y a là plus qu'une analogie. M. Norbert Wiener a montré (C) que la régularité ou l'irrégularité sont solidaires de la divergence ou de la convergence d'une série dont nous indiquerons la loi de formation (n^0 44). Nous avons indiqué simultanément un procédé de discrimination d'une grande généralité, qui se ramène aussi à décider si une certaine sommation converge ou diverge. (n^0 38 et suivants).

Mais dans la grande majorité des cas, pour reconnaître la régularité il, suffit d'une propriété très simple que nous allons maintenant établir.

25. **Une propriété des points irréguliers.** La propriété que nous allons faire connaître est une condition nécessaire, mais non suffisante pour l'irrégularité d'un point Q_0 de Σ.

Pour qu'un point Q_0 de Σ soit irrégulier, il faut que l'on ait

$$(10) \qquad \lim_{\varrho=0} \frac{\sigma}{4\pi\varrho^2} = 1$$

σ désignant l'aire du domaine ouvert constitué, sur la surface de la sphère de centre Q_0 et de rayon ϱ par les points appartenant à Ω.

En effet, supposons que la relation (10) n'ait pas lieu: il est alors possible de trouver une suite décroissante $\{\varrho_K\}$ de valeurs de ϱ tendant vers zéro, pour laquelle on aurait constamment

$$(11) \qquad \frac{\sigma_K}{4\pi\varrho_K^2} < \theta$$

θ désignant un nombre fixe moindre que l'unité. Considérons la fonction $H(P)$, attachée à la valeur 1 sur σ_1 et à la valeur 0 sur Σ_{ϱ_1}. Des inégalités classiques sur les fonctions harmoniques et de l'hypothèse (10), il résulte que la plus grande limite au point Q_0

de $H(P)$ est $\leqslant \theta$. Désignons-la par h, En remplaçant la première sphère par celle de rang K, et en prenant K suffisamment grand, on voit que cette plus grande limite est au plus celle d'une nouvelle fonction harmonique attachée aux valeurs 0 sur Σ_{ϱ_K} et $h+\varepsilon$ sur Σ_{ϱ}, la quantité ε étant arbitrairement petite. Or, en vertu de la même inégalité (11), cette plus grande limite est moindre que $\theta(h+\varepsilon)$. Or ceci est incompatible avec le fait que la plus grande limite est h, sauf si $h=0$, hypothèse que nous avons rejetée. Donc la relation (10) est bien une condition nécessaire d'irrégularité.

26. Le théorème précédent appelle un **corollaire**: soit une fonction harmonique $H(P)$ positive ou nulle dans Ω_{ϱ}, attachée à la valeur zéro sur Σ_{ϱ}, et soit h sa limite supérieure en Q_0. Supposons ici que Σ_{ϱ} soit une frontière réduite, c'est-à-dire sans ensembles impropres. Alors, en chaque point de Σ_{ϱ}, la plus petite limite de $H(P)$ est zéro. Considérons les surfaces

$$H(P)=\alpha$$

où α est une constante positive moindre que h Alors l'une d'elles est la frontière du domaine ouvert défini par $H(P)>\alpha$, et il est clair que cette frontière possède au point Q_0 un point irrégulier, témoigné par la fonction harmonique $H(P)-\alpha$. Appelons σ^{α} l'aire du domaine ouvert comprenant sur la sphère de rayon ϱ les points où $H(P)$ surpasse α. D'après le théorème précédent, le rapport

$$\frac{\sigma_{\alpha}}{4\pi\varrho^2}$$

tend vers 1, et cela quelle que soit la différence $h-\alpha$. D'où le corollaire en question:

En un point irrégulier Q_0 où la plus grande limite de la fonction $H(P)$ précédente est h, la moyenne

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} H(M)\, d\sigma_M$$

des valeurs de $H(P)$, sur le domaine ouvert constitué par les points de Ω situés sur une sphère de rayon ϱ, tend vers h quand ϱ tend vers zéro.

A fortori ce théorème est-il vrai si la point irrégulier Q_0 est pris sur une partie de la frontière Σ qui soit un ensemble impropre. Dans ce cas, la fonction H est harmonique au point Q_0, et le théorème précédent se réduit au théorème de la moyenne de Gauss[1])

En résumé, on peut dire qu'en un point irrégulier Q_0, la valeur limite privilégiée d'une fonction $H(P) > 0$ et harmonique dans Ω, attachée à la valeur zéro aux environs de Q_0, est justement la limite supérieure de $H(P)$ en Q_0 Pour qu'elle soit exclusive, il faut et il suffit, d'après le théorème du n^0 21, que le voisinage de Q_0 sur l'ensemble Σ soit impropre.

27. **Détermination univoque de $F(P)$ par liaisons entre ses valeurs limites et les données sur Σ.** Ce théorème est une proposition de première espèce: pour qu'il soit vrai, il n'est pas nécessaire d'avoir préalablement débarrassé Σ des ensembles impropres qui pourraient en faire partie. Voici notre énoncé:

Soit un domaine Ω de frontière Σ et soit donnée la fonction continue $f(Q)$ sur Σ. Il existe une fonction et une seule $F(P)$, harmonique et bornée dans Ω, et telle que ε positif étant arbitrairement donné, l'ensemble des points Q de Σ où quelque valeur limite de $F(P)$ est extérieure à l'intervalle $[f(Q) - \varepsilon,\ f(Q) + \varepsilon]$ soit de capacité nulle: cette fonction $F(P)$ est justement la solution du problème de Dirichlet généralisé.

Il y a dans cet énoncé deux parties:

1⁰ Une affirmation d'existence;

2⁰ Une affirmation d' unicité;

Nous montrerons d'abord que la première est légitime, en faisant voir que la solution du problème de Dirichlet généralisé possède bien les propriétés requises. Puis, nous justifierons la seconde.

1⁰ *Affirmation d'existence.* Considérons d'abord le cas où $f(Q)$ est l'empreinte d'un polynôme $\mathcal{F}(P)$, sur Σ. La solution du problème de Dirichlet généralisé est alors donnée par

$$F(P) = \mathcal{F}(P) + \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} \Delta\mathcal{F}(M)\, G(M, P)\, d\omega_M.$$

[1]) On vérifie par là que toute section d'un ensemble impropre par une sphère doit avoir une aire nulle.

Nous sommes ramenés à établir que l'ensemble fermé E_η des points pour lesquels on a

$$\overline{\lim_{P \to Q}} \int_\Omega G(M, P)\, d\omega_M \geqslant \eta$$

est de capacité nulle, quel que soit η.

Soit A une position particulière de M dans Ω: sur E_η, la limite supérieure de $G(A, P)$ reste supérieure à un nombre positif η_1 non nul. Sinon, il existerait une suite de points Q de E_η pour lesquels cette limite supérieure tendrait vers zéro. Cette suite étant infinie admettrait au moins un point limite qui appartiendrait à E_η (celui-ci étant fermé); en ce point limite, $G(A, P)$ aurait une valeur limite et une seule, zéro. Donc ce point serait régulier, et à ce titre, ne pourrait, contrairement à notre hypothèse, appartenir à E_η.

Il est donc acquis que, sur E_η, la plus grande limite de $G(A, P)$ est partout au moins égale à η_1 non nul. Posons le problème de Dirichlet (extérieur)[1]) en prenant E_η comme ensemble frontière. En étudiant ce problème, nous allons arriver à cette conclusion que la capacité de E_η est nulle.

Soit $G'(A, P)$ la fonction de Green du problème de Dirichlet extérieur pour l'ensemble frontière E_η. Le nouveau domaine contient à son intérieur tout point du domaine Ω: il y a donc eu accroissement du domaine. Tous les points de E_η sont donc a fortiori irréguliers (n^0 24). En outre, dans Ω, $G'(A, P)$ est $\geqslant G(A, P)$. Donc, en chaque point Q de E_η, on a aussi

$$\overline{\lim_{P \to Q}}\, G'(A, P) > \eta_1 .$$

Considérons alors le domaine Δ_{η_1} contenant tous les points P pour lesquels on a

$$G'(A, P) > \eta_1 .$$

La frontière de Δ_{η_1} comprend tous les points de E_η. Dès lors, l'ensemble E_η est nécessairement impropre: sinon, en supprimant sa partie impropre il resterait un ensemble E'_η, frontière réduite

[1]) Nous admettons ici qu'il est légitime de poser le problème de Dirichlet extérieur pour la totalité de l'ensemble E_η. Cela sera justifié ultérieurement.

d'un domaine Δ_0 admettant pour fonction de Green $G'(A, P)$. Le domaine Δ_{η_1} serait intérieur à Δ_0 (mais non formé de la totalité de ses points) et cependant tout point de la frontière de Δ_0 appartiendrait à Δ_1. Cela est imposible, en vertu de la remarque II du n^0 18.

Remarque. S'il n'était pas possible de poser le problème de Dirichlet extérieur pour E_η, c'est que cet ensemble comprendrait au moins un continu externe (plus d'autres points enclos par ce dernier). En posant le problème de Dirichlet exterieur pour ce continu externe, on verrait, par le raisonnement précédent, que sa capacité doit être nulle, ce qui est impossible, puisqu'il y a au moins une sphère enclose.

Soit maintenant $f(Q)$ une fonction continue quelconque. Prenons une $\mathcal{F}(P)$ continue dans $\Omega + \Sigma$, réduite à $f(Q)$ sur Σ. On peut alors trouver une suite de polynômes $\mathcal{F}_K(P)$, tendant uniformément vers $\mathcal{F}(P)$ dans $\Omega + \Sigma$. Nous aurons une suite correspondante de fonctions $f_K(Q)$ sur Σ et une suite de fonctions harmoniques $F_K(P)$ attachées aux $f_K(Q)$. Cela posé, donnons-nous un ε positif. Nous avons

$$|F(P) - f(Q)| \leqslant |F(P) - F_K(P)| + \\ + |F_K(P) - f_K(Q)| + |f_K(Q) - f(Q)|$$

par suite, si nous prenons les $\{P_K\}$ tendant vers Q, nous aurons pour les valeurs limites éventuelles des divers termes une relation d'inégalité analogue. Cela posé, commençons par choisir K de manière à avoir

$$|\mathcal{F}_K(P) - \mathcal{F}(P)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

d'où

$$|f_K(Q) - f(Q)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |F_K(P) - F(P)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour que $|F(P) \quad f(Q)|$ admette quelque valeur limite surpassant ε. il faudra que $|F_K(P) - f_K(Q)|$ admette quelque valeur limite surpassant $\frac{\varepsilon}{3}$, ce qui ne peut avoir lieu, en vertu de la première partie du raisonnement, que sur un ensemble de capacité nulle.

Il est donc complètement démontré que la solution du problème de Dirichlet généralisé, telle que M. Norbert Wiener l'a définie, satisfait aux conditions de l'énoncé.

29. 2° **Affirmation d'unicité.** Admettons qu'il existe une seconde solution $F'(P)$. Soit Σ' l'ensemble des points de Σ pour lesquels $|F'(P) - F(P)|$ admet quelqne valeur limite surpassant ε. Nous pouvons enclore Σ' dans un domaine polycubique (obtenu à l'aide d'un réseau) dont la surface σ ait une capacité infiniment petite. Soit Σ_1 la portion de Σ qui ne contient aucun point intérieur aux conducteurs délimités par σ. Une fonction harmonique attachée à la valeur zéro sur Σ_1 et à la valeur 1 sur la partie de σ intérieure à Ω est au plus égale à la solution du problème de Dirichlet extérieur donnant le potentiel unitaire d'équilibre électrique sur σ. On peut toujours, en disposant du voisinage de $\Sigma - \Sigma_1$ et de σ, s'arranger de manière à rendre une telle fonction harmonique inférieure à la quantité $\frac{\varepsilon}{2\mathcal{M}}$, en appelant $\mathcal{M}$ le maximum de $|f(Q)|$ sur Σ. Dès lors en chaque point de Σ_1, la limite supérieure de $|F'(P) - F(P)|$ est au plus ε. Donc $F'(P) - F(P)$ est la somme d'une fonction harmonique inférieure en valeur absolue à ε et d'une seconde, inférieure en valeur absolue à

$$\frac{\varepsilon}{2\mathcal{M}} \max_\sigma |F'(P) - F(P)| \leqslant \varepsilon.$$

On a donc finalement

$$|F'(P) - F(P)| < 2\varepsilon$$

ε étant arbitrairement petit. D'où

$$F'(P) = F(P) \qquad \text{(C. Q. F. D.)}.$$

30. **Toute frontière réduite est l'ensemble dérivé de celui de ses points réguliers.** Considérons un ensemble impropre. Tous ses points sont irréguliers. Inversement, soit un ensemble fermé dont tout point est irrégulier. Posons le problème de Dirichlet extérieur pour cet ensemble. Alors, la fonction de Green $G(A, P)$ possède en chaque point une limite supérieure surpassant un nombre positif fixe η_1. En vertu d'un raisonnement du n° 27, on en déduit que l'ensemble en question est de capacité nulle.

Soit alors Σ une frontière réduite, c'est-à-dire débarrassée d'ensembles impropres. Soit Q_0 un point irrégulier de Σ. Appelons comme précédemment Σ_ρ l'ensemble fermé constitué par les points de Σ dont la distance à Q_0 ne surpasse pas ρ. Si petit que soit ρ, cet ensemble ne peut se composer exclusivement de points irréguliers, sinon il serait impropre et la frontière Σ ne serait pas réduite. Donc **tout point irrégulier est nécessairement limite de points réguliers.** Il s'ensuit qu'une frontière réduite est toujours l'ensemble dérivé de ses points réguliers.

Ainsi que nous l'avons fait remarquer en commençant, la frontière d'un domaine tout entier à distance finie comprend toujours un continu externe; la capacité de ce continu est non nulle, puisqu'il y a au moins une sphère enclose par lui. On peut ajouter que ce continu externe appartiendra tout entier à la frontière réduite du domaine, c'est-à-dire débarrassée d'ensembles impropres, car d'après les raisonnements présentés au n^0 14, un ensemble impropre σ est toujours limite d'une suite d'ensembles analogues σ_λ sans point commun avec le continu externe.

31. **Nouvelle forme de critère de régularité, déduite de la transformation de Lord Kelvin.** Pour qu'un point Q de Σ soit irrégulier, il faut et il suffit que la fonction de Green $G(A,P)$ ne tende pas vers zéro lorsque P tend vers Q. Ainsi que nous l'avons vu, il s'agit là d'une propriété indépendante du choix de A dans Ω. Soit $\varphi(M)$ la plus grande limite de $G(M,P)$ lorsque P tend vers Q. D'après le n^0 26, si nous décrivons de Q comme centre une sphère de rayon ρ infiniment petit, et si nous appelons σ l'ensemble des points de Ω situés sur cette sphère, l'intégrale

$$I = \frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} G(M,P)\, d\sigma_P$$

tend précisément vers $\varphi(M)$ lorsque ρ tend vers zéro. Considérons une suite décroissante $\{\rho_K\}$ de valeurs de ρ tendant vers zéro, les intégrales $\{I_K\}$ correspondantes sont des fonctions harmoniques de M, bornées dans toute région fermée de $\Omega+\Sigma$ ne contenant pas le point Q. Donc ces fonctions sont également continues dans tout Ω' intérieur à Ω, et puisqu'elles admettent une fonction limite $\varphi(M)$, cette fonction est nécessairement harmonique. En outre, en supposant que la frontière Σ soit réduite, la plus petite limite de $G(M,P)$ lorsque M tend vers quelque point Σ est zéro pour chaque point P. Donc, en chaque point Q, la plus petite limite de $\varphi(M)$ est aussi zéro. La fonction φ étant $\geqslant 0$ est par suite attachée à la valeur zéro sur Σ, et comme elle n'est pas identiquement nulle, il est impossible qu'elle reste bornée au voisinage de Q. D'ailleurs, on a nécessairement

$$\varphi(M) < \frac{1}{MQ}.$$

Ainsi, pour qu'un point Q soit irrégulier, il faut et il suffit qu'il existe une fonction harmonique $\varphi(M)$ non nulle dans Ω, attachée à la valeur zéro sur Σ', et devenant infinie en Q, mais de manière à rester moindre que $\frac{1}{MQ}$.

Faisons maintenant une inversion, en prenant précisément pour pôle le point Q. Au domaine Ω correspond un nouveau domaine Ω' dont la frontière Σ' est l'ensemble inverse de Σ: Ω' et Σ' s'étendent à l'infini. De la fonction harmonique $\varphi(M)$ dans Ω, on déduit par la transformation de Lord Kelvin dans Ω' une nouvelle fonction harmonique attachée à la valeur zéro sur Σ' et restant bornée à l'intérieur de Ω'. Si le point Q est irrégulier, il doit exister une telle fonction, non identiquement nulle. Nous dirons que le domaine Ω' est un *domaine exceptionnel*. Au contraire, si le point Q est régulier, toute fonction harmonique attachée à la valeur zéro sur Σ' et bornée dans Ω' sera de ce fait identiquement nulle: nous dirons que Ω' est un *domaine normal*[1]).

La propriété des point irréguliers établie au n^o 25 nous donne immédiatement le théorème suivant:

Pour que le domaine Ω' soit exceptionnel, il faut que l'on ait

$$\lim_{R\to\infty} \frac{s}{4\pi R^2} = 1$$

s désignant l'aire formée par les points de Ω' situés sur une sphère de centre fixe arbitraire et de rayon R infiniment grand.

---

[1]) Dans nos recherches, la distinction des domaines infinis en domaines normaux et domaines exceptionnels a précédé toute étude systématique des cas d'impossibilité du problème de Dirichlet au sens classique. Voir C. R. Ac. Sc. Paris. t. 169 (1919) p. 763 et t. 178 (1924) p. 1054.

De là, on déduit qu'étant donné un domaine exceptionnel, il est impossible de le subdiviser en domaines partiels qui soient tous exceptionnels: si l'on a en tout n domaines divisionnaires, $n-1$ au moins seront normaux. Par suite, dans un domaine exceptionnel, chaque fonction harmonique et bornée, s'annulant sur la frontière (ou mieux attachée à la valeur zéro sur la frontière) conserve dans tout ce domaine un signe constant (sinon, on pourrait opérer la subdivision de Ω' en domaines qui seraient tous exceptionnels contrairement à la remarque qui précède). Désormais, nous considérerons donc une fonction harmonique et bornée, constamment positive[1]. Soit $\mathfrak{M}$ sa borne supérieure. Nous allons prouver qu'en fixant $\mathfrak{M}$, on détermine entièrement cette fonction.

Pour cela, désignons par $V(P)$ une fonction remplissant, dans Ω', l'ensemble des conditions précédentes. Quel que soit le nombre positif ε, le domaine infini formé par les points de Ω' où l'on a

$$\mathfrak{M} - \varepsilon < V(P)$$

est un domaine exceptionnel, comme en témoigne la fonction harmonique bornée

$$V(P) - (\mathfrak{M} - \varepsilon)$$

qui s'annule sur la frontière de ce domaine. Nous retrouvons ici l'amorce d'un raisomment analogue à celui du n° 26. Ce raisonnement nous amène à cette conclusion que le rapport

$$\frac{1}{s}\int V(M)\, dS_M$$

(où l'intégrale est étendue à l'aire s de la sphère de centre fixe quelconque et de rayon R, précédemment envisagée) tend vers $\mathfrak{M}$ lorsque R croit indéfiniment. Ainsi, $\mathfrak{M}$ est la valeur limite probable de $V(P)$ lorsque P s'éloigne indéfiniment. Dès lors, s'il existait une seconde fonction $V_1(P)$ remplissant les mêmes conditions que $V(P)$, la fonction $V_1(P) - V(P)$ serait une fonction harmonique bornée dans Ω', attachée à la valeur zéro sur Σ', et dont la valeur limite probable (définie par la précédente opération

[1]) Les résultats précédents nous permettaient d'admettre d'emblée que ces conditions sont réalisées simultanément. Mais il est intéressant de faire observer qu'elles constituent un système surabondant

de moyenne) serait nulle. Donc la borne supérieure de $|V_1(P) - V(P)|$ serait nulle, ce qui exige $V_1(P) = V(P)$.

32 Interprétation physique des domaines exceptionnels. Emplissons l'ensemble complémentaire de Ω' de matière conductrice de l'électricité. Si Ω' est un domaine exceptionnel, il existe une fonction $V(P)$ positive et harmonique dans Ω', admettant l'unité comme limite supérieure dans ce domaine, et attachée à la valeur zéro sur Σ'. On en conclut que la fonction $1 - V$ jouit des propriétés suivantes:

1° Elle est harmonique est positive dans Ω';

2° Sa limite inférieure est zéro: cette limite est aussi celle vers laquelle tend la moyenne des valeurs prises sur une sphère de rayon infiniment grand par la fonction considérée;

3° Elle est attachée à la valeur 1 sur Σ'.

La fonction $1 - V$ apparait donc comme le potentiel d'une couche en équilibre sur l'ensemble Σ' qui délimite un système de conducteurs (ensemble complémentaire de Ω') s'étendant à l'infini. Le potentiel est fini et c'est là une circonstance remarquable, car elle ne se produit pas toujours. Par exemple, considérons le problème de l'équilibre électrique sur un cylindre de révolution de rayon a. Le potentiel est celui de masses uniformément réparties sur l'axe du cylindre. Dans l'espace à trois dimensions, il est donc infini. Désignons par A un point quelconque situé sur la surface du cylindre, par P un point situé à l'extérieur du cylindre, par a et δ les distances de ces points à l'axe du cylindre, et considérons l'intégrale

$$\int \left(\frac{1}{MA} - \frac{1}{MP} \right) d\delta_M = \log \frac{a}{\delta}$$

étendue à la surface du cylindre: c'est une fonction harmonique du point P, s'annulant sur la surface du cylindre, et restant constamment positive dans la région extérieure au cylindre. Cette intégrale exprime la différence de potentiel entre A et P: elle est finie, alors que le potentiel en chacun de ces points est infini.

D'une manière générale, considérons un système de conducteurs s'étendant à l'infini, soit Σ' la frontière de cet ensemble. Supposons que dans le domaine complémentaire Ω', on ait pu déterminer une fonction $U(P)$, harmonique et positive, attachée à la valeur zéro sur Σ'. Nous pourrons considérer, par définition, qu'elle correspond à un état d'équilitre électrique sur nos conducteurs, état dans lequel la différence de potentiel qui existe entre un point P du domaine complémentaire Ω' et un point de Σ' est précisément égale à $U(P)$.

Pour qu'un tel état d'équilibre soit unique, il faut que la fonction $U(P)$, harmonique et positive dans Ω', et attachée à la valeur zéro sur Σ' soit déterminée à un facteur constant près. Il faut donc se placer dans les conditions où le principe des singularités positives de Picard est vrai. Ceci va nous amener à dire quelques mots de ce principe. Mais auparavant, résumons notre conclusion sous la forme suivante:

Considérons l'ensemble des fonctions harmoniques et positives dans Ω', qui sont attachées à la valeur zéro sur Σ'. Pour que le domaine Ω' soit un domaine exceptionnel, il faut et il suffit que l'une de ces fonctions soit bornée (et alors, toute autre lui est proportionnelle).

En langage physique, la recherche de l'équilibre électrique sur les conducteurs emplissant le complémentaire de Ω' coïncide avec celle des fonctions précédentes, qui définissent chacune un état d'équilibre particulier pour lequel elles expriment la différence du potentiel en P et du potentiel sur Σ'. Pour que Ω' soit un domaine exceptionnel, il faut que ce potentiel soit borné.

33. **Indications sur le principe des singularités positives de Picard.** Dans tous les raisonnements ultérieurs, nous supposerons pour simplifier qu'il n'est question que de frontières réduites.

Reprenons un domaine Ω tout entier à distance finie, de frontière Σ. Considérons un domaine ω formé de points de Ω, et dont la frontière ait en commun avec Σ un certain ensemble σ. Nous dirons que σ est d'un seul tenant sur Σ si en appelant ω_δ le domaine partiel de ω constitué par les points de ce dernier dont la plus courte distance à Σ est $< \delta$, le domaine ω_δ est connexe quel que soit δ.

Etant donné un sous-ensemble σ d'un seul tenant de Σ, il existe une fonction harmonique et une seule dans Ω, attachée à la valeur zéro sur $\Sigma - \sigma$ et à la valeur un sur σ. C'est la limite supérieure des fonctions harmoniques attachées aux fonctions $f(Q)$ continues, qui sont nulles sur $\Sigma - \sigma$ et qui sont $\leqslant 1$ sur σ. Soit $\overline{\omega}_P(\sigma)$ cette fonction: M. Norbert Wiener l'a introduite le premier (B), sous le nom de poids de l'ensemble σ. C'est une fonction additive de σ, et il est facile de montrer que grâce à cette fonction d'ensemble, on peut exprimer la solution du problème de Dirichlet généralisé par l'intégrale de Stieltjiés[1]):

$$\int_{\Sigma} f(Q)\, d\bar{\omega}_P(\sigma).$$

Considérons maintenant une suite d'ensembles $\{\sigma_K\}$: telle que chacnn deux contienne les suivants et telle que les diamètres des σ_K tendent vers zéro. Alors la suite des poids successifs tend vers zéro. Toutefois, les considérations les plus familières sur les infiniment petits posent ausitôt la question de savoir, si K étant infiniment grand, le poids infiniment petit $\bar{\omega}_P(\sigma_K)$ peut équivaloir à une quantité de la forme $\varepsilon_K \Pi_P$, en désignant par ε_K un infiniment petit indépendant du point P, et par Π_P une fonction harmonique du point P, bien déterminée (fonction de Picard).

Nous admettons ici que ce résultat est vrai dans des conditions très larges ou encore que si une fonction harmonique Π_P dans Ω est attachée à la valeur zéro sur Σ, exception faite du point Q_0 (au voisinage duquel elle n'est pas bornée), enfin si elle est de signe constant, elle est déterminée à un facteur constant près. Nous avons indiqué ailleurs (F) la signification de ce principe et les cas d'exception qu'il comporte; mais nous admettrons qu'il ne s'en présente pas ici. vu que le rapport $\dfrac{\sigma}{4\pi\rho^2}$, envisagé au n^0 25 tend vers 1.

Dans l'application du principe précédent, le cas où le point Q_0 appartiendrait simultanément à plusieurs ensembles d'un seul tenant de la frontière, ayant des voisinages distincts dans Ω, appelle la précaution suivante: on devra préciser pour lequel de ces voisinages la fonction Π_P ne reste pas bornée. C'est seulement à cette condition que le principe de Picard est vrai: c'est pour le voisinage considéré, qu'on définira donc σ (sur la sphère de rayon ρ) et c'est le σ ainsi obtenu qui sera supposé équivalent à $4\pi\rho^2$.

Si maintenant nous faisons une inversion de centre Q_0. nous obtenons un domaine Ω' dont le point à l'infini est un point

---

[1]) C ci s'appliquerait même si la frontière Σ n'était pas réduite: le poids d'un ensemble de capacité nulle est évidemment nul.

frontière: les branches infinies de notre domaine corespondent justement aux ensembles d'un seul tenant dont il vient d'être question ou mieux aux voisinages de ces ensembles. Une seule de ces branches nous intéresse pratiquement, c'est la branche d'irrégularité éventuelle, c'est-à-dire celle qui, moyennant les notations du n_0 31, nous donne une section sphérique (de rayon infiniment grand) d'aire s équivalente à $4\pi R^2$. En définitive, chercher si Ω' est exceptionnel revient finalement à chercher si la fonction de Picard, relative à la branche d'irrégularité éventuelle, est bornée [1]).

Nous allons maintenant faire connaître le principe d'une méthode permettant de distinguer, par comparaison avec des domaines déjà déterminés, ceux qu'il s'agit d'étudier, pour décider s'ils sont normaux ou exceptionnels

Auparavant, il sera utile de faire quelques remarques relatives aux ensembles de capacité nulle.

34. **Quelques propriétés des ensembles de capacité nulle.** Pour qu'un ensemble soit de capacité nulle, il faut et il suffit qu'en répartissant sur cet ensemble des masses positives, de manière que chaque sous-ensemble non vide du premier et non extérieur à une sphère quelconque contienne une masse totale non nulle, la limite supérieure du potentiel en chaque point de cet ensemble soit $+\infty$.

La condition est nécessaire. En effet, soit un ensemble de capacité nulle, pourvu d'une répartition de masses positives, conformément à nos hypothèses. Un point de cet ensemble où la limite supérieure du potentiel est finie est nécessairement situé à l'intérieur d'une sphère telle que la même propriété ait lieu en chaque point de l'ensemble non extérieur à cette sphère. Isolons cette partie de l'ensemble [2]): elle porte une masse non nulle. On peut d'ailleurs s'arranger de manière que la limite supérieure du potentiel sur ce sous-ensemble ne surpasse pas un nombre positif fixe h. Considérons le problème de Dirichlet extérieur, pour notre sous-ensemble, avec la valeur h en chaque point de celui-ci Sa

---

[1]) Dans le problème initial, cela revient à chercher si cette fonction coïncide bien avec la limite supérieure $H(M)$ de la fonction de Green $G(M, P)$, lorsque P tend vers Q_0.

[2]) Nous faisons abstraction des autres masses, ce qui ne peut que diminuer le potentiel.

solution serait certainement non nulle et surpasserait le potentiel précédent. Mais alors, la capacité serait non nulle contrairement à l'hypothèse.

La condition est suffisante. En effet, si elle est remplie, les surfaces équipotentielles $V = \lambda$ délimitent des domaines (définis par $V = \lambda$) qui se contractent lorsque C croît de manière à tendre vers l'ensemble. Posons le problème de Dirichlet extérieur, pour le complémentaire du domaine $V < \lambda$, avec la valeur 1 sur $V = \lambda$. Le potentiel d'équilibre est $\frac{V}{\lambda}$. Donc la capacité des conducteurs $V > \lambda$ est le quotient par λ de la somme des masses réparties sur l'ensemble potentiant: elle est infiniment petite avec $\frac{1}{\lambda}$. Donc, la capacité de l'ensemble potentiant est nulle.

35. Indépendantement de notre objet actuel, il est intéressant de signaler chemin faisant la proposition suivante.

Si une fonction est harmonique dans une certaine région ouverte R, sauf peut-être sur un certain ensemble fermé E de points intérieurs à cette région si cette fonction est bornée dans R et si E est de capacité nulle, la fonction en question est harmonique dans R.

En effet, il suffit de démontrer ce résultat en supposant que R soit l'espace entier et que la fonction proposée s'évanouisse à l'infini. En appelant $\mathfrak{M}$ la borne supérieure de la valeur absolue de la fonction sur E, il est clair que cette fonction ne dépasse pas en valeur absolue la solution du problème de Dirichlet extérieur avec la valeur $\mathfrak{M}$ sur E. Or celle-ci est identiquement nulle puisque E est de capacité nulle. Donc, dans ce cas, la fonction se réduit bien à zéro. Donc, dans tous les autres cas, elle se réduit à la somme d'un potentiel de simple couche et d'un potentiel de double couche étendus à une surface de la région R englobant l'ensemble E (C. Q. F. D.).

36. **Une classe d'ensembles de capacité nulle.** Un ensemble fermé E est toujours de capacité nulle, quand on peut y répartir des masses, de manière que chaque sphère de rayon ρ infiniment petit, ayant son centre en quelque point fixe de E, contienne à son intérieur

une masse totale dont le quotient par ρ^{n-2} (dans le cas où l'espace a n dimensions) ne tende pas vers zéro.

En effet, soit Q un point de E. De Q comme centre, traçons une suite de sphères de rayons

$$\rho_0 > \rho_1 > \ldots > \rho_K > \cdots$$

qui tendent vers zéro. Soit μ_K la somme des masses fixées en des points dont la distance ρ au point Q satisfait aux conditions

$$\rho_K \leqslant \rho < \rho_{K-1}.$$

Le potentiel en Q surpassera la somme de la série de terme général

$$\frac{\mu_K}{\rho_{K-1}^{n-2}}$$

Par hypothèse, on peut choisir la suite $\{\rho_K\}$ de manière que l'expression

$$\frac{\mu_K + \mu_{K-1} + \cdots}{\rho_{K-1}^{n-2}}$$

reste supérieure à un nombre fixe a. Alors le reste de la série ci-dessus, à savoir

$$\frac{\mu_K}{\rho_{K-1}^{n-2}} + \frac{\mu_{\mu+1}}{\rho_K^{n-2}} + \cdots$$

surpasse a fortiori a. La série est donc divergente (C. Q. F. D.).

On déduit immédiatement de ce théorème la conséquence suivante: soit dans l'espace à n dimensions lieu du point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une variété p fois étendue, définie par n équations

$$x_i = f_i(u_1, u_2, \ldots, u_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où f_i sont des fonctions à nombres dérivés bornés. Si $p \leqslant n - 2$, la variété précédente est un ensemble de capacité nulle.

En particulier, dans l'espace à trois dimensions, les lignes rectifiables sont de capacité nulle. Par contre, nous savons que cette propriété n'a pas lieu pour les surfaces.

37. Il importe de remarquer que le théorème précédent peut être appliqué dans des conditions très variées. Pour le montrer, nous considèrerons une classe très familière d'ensembles parfaits discontinus.

Soit d'abord un segment de droite, de longueur égale à l'unité. Enlevons de ce segment un autre de même milieu et de longueur $\lambda (< 1)$. Il nous reste deux segments, sur chacun desquels nous répétons, à une similitude près, la même opération: nous aurons alors quatre segments, nous recommençons sur chacun d'eux, et ainsi de suite indéfiniment. Soit E_λ l'ensemble final, c'est-à-dire celui qui subsiste à la suite indéfinie des ablations précédentes. On peut définir, sur E_λ, une répartition uniforme de masses positives, de somme égale à 1. A cet effet, il suffit, à chaque subdivision d'un segment, d'affecter la moitié de la masse qu'il porte à chacun des deux segments partiels auxquels il donne naissance. Après m opérations, nous aurons ainsi 2^m segments, portant chacun la masse $\frac{1}{2^m}$. Chacun de ces segments a pour longueur $\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^m$. Ainsi, en faisant tendre ρ vers zéro par valeurs de la forme

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^m$$

la masse intérieure à une sphère de rayon ρ, ayant son centre en quelque point de E_λ, sera un infiniment petit d'ordre infinitésimal

$$\frac{L2}{L\frac{2}{1-\lambda}}.$$

Cet ordre constitue ce qu'on peut appeler le **nombre dimensionnel** de l'ensemble E_λ [1]). Il est maintenant facile en partant d'un rectangle, d'un parallélipipède, ou d'une manière générale, d'un domaine rectangulaire à p dimensions de définir des ensembles $E_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p}$ projetés sur chaque arête du domaine suivant des ensembles $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_p}$ semblables au précédent. Sur un tel ensemble, on peut aussi définir une répartition uniforme de masses, et on est conduit, pour le nombre dimensionnel, à une valeur qui est la somme des nombres dimensionnels de $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_p}$, soit

$$\frac{L2}{L\frac{2}{1-\lambda_1}} + \frac{L2}{L\frac{2}{1-\lambda_2}} + \ldots + \frac{L2}{L\frac{2}{1-\lambda_p}}.$$

[1]) La même notion a été présentée sous une forme différente par F. Hausdorf, Math Ann. 1918. Voir aussi notre article: **dimension, étendue, densité**, C. R. Ac. Sc. Paris, t. 180, p. 245. L'application de notions de ce genre à l'étude du problème de Dirichlet nous a été suggéreé par un remarquable exemple de M O. D. Kellogg: An example in potential theory (Proc. Amer. Ac. Sc. vol 58, juin 1923). L'auteur montre que le problème plan de Dirichlet est régulierement résoluble le long d'une frontière du type ci-dessus, pour la valeur $\lambda = \frac{1}{3}$.

En vertu du théorème précédent lorsque cette somme sera au plus égale à $n-2$, nous obtiendrons un ensemble de capacité nulle.

37 **Obtention de points irréguliers.** Considérons une répartition de masses positives sur un ensemble E de capacité nulle s'étendant à l'infini. Nous dirons que cet ensemble remplit la condition C si la sommation qui permet d'évaluer la différence de potentiel entre deux points est absolument convergente. On peut alors définir les surfaces équipotentielles: chacune de ces surfaces constitue la frontière d'un domaine, et d'un seul, qui s'étend à l'infini et qui ne comprend aucun point de E. Soit Ω_0 ce domaine pour la surface $V=V_0$. Nous avons $V_0 - V_E = -\infty$. Soit P un point intérieur à Ω_0. La différence $V_P - V_0$ est une fonction harmonique, positive dans Ω_0, s'annulant sur la frontière de ce domaine. Cela posé, pour que Ω_0 soit un domaine exceptionnel, il faut et il suffit que la différence $V_P - V_0$ soit bornée dans le domaine Ω_0, ou encore que la sommation donnant le potentiel total de la répartition précédente sur l'ensemble E soit convergente[1]).

39. Cette remarque simple permet d'abord de donner des exemples variés de domaines dont la frontière admet un point donné pour point irrégulier. Dans l'espace à trois dimensions, on prendra une courbe ou un système de courbes portant une répartition de masses positives dont le potentiel soit convergent. Il suffira de transformer une surface équipotentielle par inversion pour obtenir une frontière possèdant un point irrégulier au pôle.

Par exemple, on peut prendre sur un cône une courbe partant d'un point et s'éloignant indéfiniment du sommet, de manière à dessiner une spirale. En dotant cette courbe d'une répartition continue de masses positives dont le potentiel soit convergent, nous en déduirons par inversion une frontière présentant une variété assez curieuse de point irrégulier. Voici un autre exemple: d'un point fixe O comme centre, décrivons une suite de sphères, avec les rayons respectifs $1, 2, 3, \ldots, K, \ldots$ Prenons sur chacune d'elles une circonférence de grand cercle, les directions des plans de ces cercles étant ainsi déterminées: ces plans passent par une même droite, rencontrant la première sphère en deux points A et B

[1]) D'après le théorème d'Harnack, si cette propriété a lieu en un point. elle aura lieu en tout autre point.

qui sont les extrémités de tous les cercles homothétiques des précédents par rapport à O et situés sur cette sphère. Les deux premiers plans sont à angle droit. Les deux suivants sont leurs bissecteurs. Les suivants sont les bissecteurs de tous les dièdres ainsi formés. et ainsi indéfiniment. Cela posé, sur la demi droite OA et sur ce système de cercles, répartissons des masses, dans les conditions suivantes:

1° chacun des cercles portera une répartition uniforme, soit $\frac{1}{K^2}$ la densité qui correspond à la circonférence de rang K. Le potentiel en O qui correspond à ce cercle sera précisément

$$\frac{1}{K^2}\int_0^{2\pi}\frac{K d\theta}{K}=\frac{2\pi}{K^2}.$$

Donc la somme des potentiels de ces cercles converge en O: elle converge donc en tout autre point.

2° La demi-droite OA portera une densité égale à $\frac{1}{1+OM}$.

Dans ces conditions, nous aurons un potentiel total fini. Il est clair qu'une surface équipotentielle sera ici la frontière d'un domaine exceptionnel, frontière présentant des points arbitrairement éloignés de O dans toutes les directions possibles issues de ce point. En transformant cette figure par inversion on obtient un exemple de point irrégulier, que fait bien comprendre la complexité qu'on peut atteindre en pareille matière, et qui justifie surabondamment le soin que nous avons apporté à nos raisonnements.

40. Notons encore qu'il est d'autant plus facile d'obtenir des points irréguliers que le nombre de dimensions de l'espace est plus grand. En effet dans l'espace à n dimensions, la solution élémentaire est

$$\frac{1}{r^{n-2}};$$

lorsque n croît, la rapidité avec laquelle cette solution tend vers zéro devient de plus en plus marquée, et cette circonstance favorise naturellement la convergence des sommations dont nous avons parlé. Par exemple, dans l'espace à trois dimensions, la région extérieure à un cylindre de révolution est undomaine normal; à partir de quatre dimensions, elle devient un domaine exceptionnel.

Profitons de cette occasion pour rappeler. dans le cas de deux dimensions, une condition de régularité très générale, donnée par M. Henri Lebesgue dans son mémoire des Rendic 1907: il suffit qu'un cercle suffisamment petit de centre Q rencontre la frontière. Il va sans dire qu'il faut modifier, dans ce cas, la définition des domaines exceptionnels: un domaine exceptionnel est alors un domaine infini capable d'une fonction harmonique non nulle, s'annulant sur sa frontière et dont la croissance soit astreinte à une inégalité de la forme

$$|U_P| < K \log \frac{1}{OP}$$

O désignant quelque point fixe.

41. **Obtention de critéres de régularité**. Pour déduire de la remarque du n^0 35 des critères de régularité, il est indispensable de faire quelque hypothèse sur la forme de la frontière au voisinage du point Q étudié. Les circonstances les plus variées peuvent se produire. Citons notamment les suivantes;

1° La portion du domaine avoisinant le point Q est extérieure à un ensemble infini de sphéroïdes (ou d'ensembles plus complexes d'un seul tenant) admettant le point Q pour point limite. On peut aussi considérer le cas où ces sphéroïdes (ou au moins certains d'entre eux) seraient aplatis et se réduiraient à des disques.

2° La frontière du domaine Ω, au voisinage du point Q est continue. Il peut alors arriver que le complémentaire de Ω admette des points formant une aire sur toute sphère de centre Q; il peut arriver aussi que ce complimentaire aux environs du point Q soit réduit à la frontière Σ elle-même.

3° On peut avoir des circonstances plus complexes mettant simultanément en jeu toutes les particularités que nous venons de décrive.

Les hypothèses les plus simples sont celles du 2°. Si nous les transposons aux domaines infinis, nous serons conduits à chercher les domaines normaux dont le complémentaire posséde une branche infinie en tube ou une branche infinie en ruban. Dans les deux cas, ce complémentaire est continu au delà d'une certaine sphère. Le premier cas sera celui où l'ensemble des points de ce complémentaire situés sur cette sphère forme constamment une aire, le second sera celui où cet ensemble se réduit à la trace sur la sphère de la frontière du domaine étudié,

42. Cas d'une branche infinie en tube. Un domaine infini est normal lorsque son complémentaire possède une branche infinie en tube telle qu'on puisse tracer, dans l'intérieur du tube, à partir d'un certain point A, une ligne L telle que l'on ait simultanément

$$\overline{AM}^2 \left|\log R_M\right| > K(\widetilde{AM})^{1+\alpha}$$

$$\int_L \frac{d\widetilde{AM}}{MP\left|\log r_M\right|} \text{ divergente}$$

en désignant par M un point courant de L, par r_M sa distance minima à la paroi du tube, par R_M le rayon d'une sphère de centre M dont l'enveloppe englobe la branche infinie dont il vient d'être question.

Pour justifier ce critère, il suffit de montrer qu'on peut répartir sur L des masses positives de manière à satisfaire à la condition C, masses dont le potentiel total sera divergent, une surface équipotentielle étant intérieure à la branche infinie en tube, qui sera désignée par B. Prenons précisément la densité

$$\rho_M = \frac{1}{\left|\log r_M\right|}.$$

La différence de potentiel en P et P_1 est donnée par l'intégrale

$$\int_L \frac{1}{\left|\log r_M\right|}\left(\frac{1}{MP} - \frac{1}{MP_1}\right) d(\widetilde{AM}) <$$

$$< PP_1 \int_L \frac{1}{\left|\log R_N\right|} \frac{1}{MP.MP_1} d(AM)$$

en vertu de la première condition de l'énoncé, cette intégrale est absolument convergente, et par suite, la condition C est remplie. Cela posé, considérons une surface équipotentielle très voisine de L. En appelant δ la longueur de la normale abaissée d'un point de cette surface sur la ligne L, par M le pied de cette normale, nous aurons:

$$\rho_M \left|\log \delta_M\right| = (1 + \varepsilon_M) h$$

ou encore

$$\frac{|\log \delta_M|}{|\log r_M|} = (1 + \varepsilon_M)\, h$$

où ε_M désigne, d'aprés les propriétés asymptotiques connues d'un potentiel de ligne[1]), une quantité qui tend vers zéro lorsque h croît indéfiniment. Mais alors, il est établi qu'on peut enserrer la ligne L aussi étroitement qu'on le veut par une surface équipotentielle, laissant à son extérieur un domaine normal contenant tous les points de celui dont il faut décider. Le résultat est donc établi.

Inversement, on pourrait affirmer que le domaine extérieur à la branche B est exceptionnel, si avec les mêmes notations, l'intégrale

$$\int \frac{d\,\widetilde{AM}}{MP\,|\log R_M|}$$

était convergente

Dans le cas où la branche B est de révolution et où sa méridienne se rapproche constamment de son asymptote, on peut prendre $R_M = r_M$. Le domaine extérieur à B est alors exceptionnel ou normal suivant que l'intégrale

$$\int \frac{dz}{MP\,|\log r_M|}$$

diverge ou converge, z désignant l'abscisse de M sur l'axe de révolution et r_M le rayon du parallèle de cote z.

43. **Cas d'une branche infinie en ruban**. On peut justifier un critère analogue à celui du numéro précédent, la ligne L étant maintenant tracée sur le ruban et r désignant la distance minima d'un point M de cette ligne aux bords du ruban.

La démonstration complète nous amènerait à développer des calculs un peu pénibles. Nous nous bornerons à remarquer que le cas précédent a pu être résolu par la connaissance approchée de la distribution d'équilibre électrique sur une sorte de surface canal branchée sur L, Cette surface est un assemblage de solides, qui pris à part, sont analogues à des cylindres droits très allongés et

---

[1]) Bien entendu, l'étude de ε_M ne peut être négligée, nous ne la supprimons ici que pour éviter des longueurs. Cette étude amène à supposer que la courbure de L reste finie.

soumis à une déformation, les influences mutuelles de ces cylindres étant peu appréciables. Le cas d'une branche en ruban se déduit du précédent en substituant aux cylindres déformés des règles plates déformées. Du problème, facile à traiter directement. de l'équilibre sur une règle plate indéfinie, on déduit alors une solution approchée du même problème sur un ruban indéfini dont la largeur diminue indéfiniment.

44. **Condition nécessaire et suffisante de régularité de M. Norbert Wiener (C).** M. Norbert Wiener a tiré des conclusions analogues d'une belle condition nécessaire et suffisante de régularité qu'il a obtenue grâce à la notion de capacité. Soit Q un point de la frontière Σ du domaine Ω. Soit γ_K la capacité de l'ensemble des points extérieurs à Ω et dont la distance à Q est comprise entre les limites λ^K et λ^{K-1}, en appelant λ une quantité inférieure à 1. Alors, dans l'espace à n dimensions, le point Q est irrégulier ou régulier suivant que la série de terme général

$$\frac{\gamma_K}{\lambda^K}$$

converge ou diverge. Nous renverrons pour la démonstration au mémoire (C) de l'éminent géomètre.

Nota.

L'exposé qui précède est une partie importante d'un cours professé à l'Université de Cracovie pendant le premier trimestre de l'année scolaire 1925—26. Nous ne voulons pas le terminer sans adresser nos plus affectueux remerciments à M. le Professeur Zaremba, aux Professeurs de l'Institut Mathématique de Cracovie, et à leurs élèves, pour l'accueil si empressé que nous avons trouvé près d'eux.

Cracovie, le 10 décembre 1925.

G. Bouligand.

Sur les séries semi-convergentes.

Par

F. Leja.

Soient

(1) $\quad \Sigma a_n, \quad \Sigma a'_n; \quad s_n = a_1 + \ldots + a_n, \quad s'_n = a'_1 + \ldots + a'_n$

deux séries semi-convergentes à termes réels. Je dirai que les séries

(2) $\quad \Sigma a_{\nu_n}, \quad \Sigma a'_{\nu_n}; \quad \sigma_n = a_{\nu_1} + \ldots + a_{\nu_n}, \quad \sigma'_n = a'_{\nu_1} + \ldots + a'_{\nu_n}$

forment un couple dérivé du couple de séries (1) si la suite des indices $\nu_1, \nu_2, \ldots$ ne diffère de la suite $1, 2, \ldots$ que par l'ordre des termes.

Les séries (1) seront dites indépendantes si, quels que soient les quatre nombres $\mu \leqq \nu$ et $\mu' \leqq \nu'$, il existe un couple dérivé (2) tel que μ et ν soient les limites inférieure et supérieure de σ_n et μ' et ν' celles de σ'_n. Dans le cas, où $\sigma_n \rightarrow s$ et $\sigma'_n \rightarrow s'$, le couple des nombres (s, s') sera dit somme du couple des séries (1).

Le but de cette note est d'examiner les conditions d'indépendance de deux séries semi-convergentes et de montrer que, si ces séries ne sont pas indépendantes, 1° les deux séries d'un couple dérivé quelconque sont toujours en même temps convergentes ou en même temps divergentes et 2° toutes leurs sommes (s, s') remplissent une droite déterminée du plan [1]).

Cette question est intimément liée avec celle de savoir si une série semi-convergente à termes imaginaires $\Sigma (a_n + i a'_n)$ peut changer sa somme lorsqu'on change l'ordre de ses termes. Ce problème

[1]) Dans le cas de l'indépendance, les sommes (s, s') remplissent évidemment le plan tout entier.

a été résolu par M. Steinitz [1]) et ensuite par M. Gross par des méthodes vectorielles; j'en donne une solution nouvelle par une méthode dont s'est servi Riemann dans la démonstration de son théorème sur les séries semi-convergentes.

1. Une série finie $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s$ sera dite monotone à ε près, si toutes les sommes $a_1 + a_2 + \ldots + a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, que j'appellerai segments de cette série, sont contenues dans l'intervalle

$$(3) \qquad < -\varepsilon_1, \quad s + \varepsilon_2 >, \quad \text{où } |\varepsilon_i| = \varepsilon, \quad s\varepsilon_2 \geqq 0.$$

Remarquons que, si $\varepsilon = \max |a_i|$, les termes de s peuvent toujours être rangés dans un ordre $a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + \ldots + a_{\nu_n}$ tel que cette nouvelle série soit monotone à ε près. Cela est évident si tous les a_n sont de même signe; dans le cas contraire il suffit d'ajouter à un a_{ν_1} quelconque un a_{ν_2} de signe contraire, puis un a_{ν_3} tel que $(a_{\nu_1} + a_{\nu_2})\, a_{\nu_3} \leqq 0$ et ainsi de suite.

Soient

$$(4) \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s, \quad a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n = s'$$

deux séries à un même nombre de termes et $\varepsilon = \max\{|a_i|, |a'_i|\}$, $i = 1, \ldots, n$.

Lemme. *On peut changer parallèlement l'ordre des termes des séries (4) de telle sorte que les séries obtenues*

$$a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + \ldots + a_{\nu_n} = s, \quad a'_{\nu_1} + a'_{\nu_2} + \ldots + a'_{\nu_n} = s'$$

soient toutes les deux monotones à 2ε *près.*

Démonstration: 1° Dans le cas, où tous les termes d'une des séries (4) sont d'un même signe, la démonstration est immédiate d'après la remarque précédente [2]).

2°. Dans le cas contraire, l'ensemble des couples des termes

$$(5) \qquad (a_k, a'_k) \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

en contient deux, soit (a_i, a'_i) et (a_j, a'_j), tels que $a_i a_j \leqq 0$ et $a'_i a'_j \leqq 0$. De tels couples seront dits opposés; en partant d'eux et en chan-

---

[1]) E. Steinitz: *Crelle J.* t. 143 (1913) et t. 144 (1914).
W. Gross: *Monatsh. f. M. u. Ph.* t. 28 (1917).
V. aussi Threlfall: *Math. Zeitschr.* t. 24 (1925).

[2]) On peut dans ce cas remplacer dans le lemme le nombre 2ε par ε. Il se peut que cela soit possible dans le cas général.

geant convenablement les indices des couples (5), ou peut former deux séries

(6) $\alpha = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}, \quad \alpha' = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_{n_1}, \quad n_1 \geqq 2$

telles que, quel que soit $k < n_1$, on ait $(a_1 + \ldots + a_k)\, a_{k+1} \leqq 0$ et $(a'_1 + \ldots + a'_k)\, a'_{k+1} \leqq 0$. On dira que ces séries sont fermées dans l'ensemble (5) et que (α, α') est un couple secondaire de cet ensemble si, quel que soit $k > n_1$, les couples (α, α') et (a_k, a'_k) ne sont pas opposés.

Supposons que les séries (6) soient fermées. Si l'ensemble $\{(a_k, a'_k), n_1 < k \leqq n\}$ contient encore des couples opposés, on en peut former un autre couple secondaire (α_1, α'_1), puis (α_2, α'_2) et ainsi de suite. Posons

(7) $\alpha_i = a_{n_i+1} + \ldots + a_{n_{i+1}}, \quad \alpha'_i = a'_{n_i+1} + \ldots + a'_{n_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$

et supposons que l'ensemble restant $\{(a_k, a'_k), k > n_{p+1}\}$, s'il n'est pas vide, ne contienne plus de couples opposés. On distinguera les deux cas:

α) Si, quel que soit i, les couples (α, α') et $(\alpha_i\, \alpha'_i)$ ne sont pas opposés [1]), tous les termes d'une des séries

$$\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_p + a_{n_{p+1}+1} + \ldots + a_n = s,$$
$$\alpha' + \alpha'_1 + \ldots + \alpha'_p + a'_{n_{p+1}+1} + \ldots + a'_n = s'$$

sont d'un même signe et ce cas ne présente pas d'autres difficultés, que le cas 1°, en tenant compte de ce que les séries (6) et (7) sont monotones à ε près.

β) Dans le cas contraire, soient (α, α') et $(\alpha_i\, \alpha'_i)$ les couples opposés. Remplaçons les séries (6) par les suivantes

$$a_1 + \ldots + a_{n_1} + a_{n_i+1} + \ldots + a_{n_{i+1}}, \quad a'_1 + \ldots + a'_{n_1} + a'_{n_i+1} + \ldots + a'_{n_{i+1}}$$

fermons ces dernières dans l'ensemble (5) et désignons par β et β' les sommes des séries ainsi obtenues; elles seront monotones à 2ε près, mais on aura $|\beta| \leqq \varepsilon$ et $|\beta'| \leqq \varepsilon$. En partant du couple (β, β') on formera des couples secondaires (β_j, β'_j) analogues aux couples (α_i, α'_i) et on distinguera de nouveau les cas (α) et (β); cela conduira enfin au cas (α), donc le lemme est démontré.

[1]) Les couples $(\alpha_i\, \alpha'_i)$ $(\alpha_j\, \alpha'_j)$ ne le seront non plus.

2. Cela posé, considérons les séries (1) et désignons par (E) l'ensemble de tous leurs couples dérivés.

Théorème. *Pour que les séries (1) soient indépendantes, il suffit qu'une des trois conditions suivantes soit satisfaite: L'ensemble (E) contient*

A) Un couple de séries dont l'une converge et l'autre oscille.

B) Deux couples (1) et (2) tels que les suites s_n et σ_n convergent vers une même limite finie et que $\lim s'_n \neq \lim \sigma'_n$.

C) Deux couples (1) et (2) tels que les suites s_n et σ_n convergent et que $\lim s'_n \neq \lim \sigma'_n$, une de ces deux limites au moins étant infinie.

Démonstration: Cas *(A)*. Supposons que les séries (1) satisfassent à la condition *(A)* et que

$$s_n \to s, \qquad \liminf s'_n = g, \qquad \limsup s'_n = G \neq g.$$

Soient s'_{m_k} et s'_{n_k} deux suites partielles de s'_n telles qu'on ait

$$s'_{m_k} \to g, \quad s'_{n_k} \to G, \quad m_k < n_k < m_{k+1}, \qquad \text{pour } k = 1, 2 \ldots$$

Posons

$$u_k = a_{m_k+1} + a_{m_k+2} + \ldots + a_{n_k}, \qquad v_k = a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + \ldots + a_{m_{k+1}}$$

et désignons par u'_k et v'_k des sommes analogues composées des termes a'_n [1]); on aura

$$s_{n_k} = s_{m_k} + u_k, \qquad s_{m_{k+1}} = s_{n_k} + v_k$$

donc $u_k \to 0$, $v_k \to 0$, $u'_k \to G - g = \varrho$, $v'_k \to -\varrho$, ϱ étant fini ou infini, mais $\neq 0$. Posons encore

$$u_{pq} = u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{p+q}, \qquad v_{pq} = v_{p+1} + \ldots + p_{p+q},$$

u'_{pq} et v'_{pq} ayant une signification analogue; on aura, q étant fixe

(8) $$u_{pq} \to 0, \quad v_{pq} \to 0; \quad u'_{pq} \to q\varrho, \quad v'_{pq} \to -q\varrho, \quad \text{pour } p \to \infty.$$

Soient $\mu \leqq \nu$, $\mu' \leqq \nu'$ quatre nombres quelconques [2]); je vais former deux séries de la forme (2) telles que (μ, ν) soient les limites inf. et sup. de σ_n et (μ', ν') celles de σ'_n.

---

[1]) Lorsque un symbole, p. e. A_k, représente un terme ou une somme de termes de la série $\sum a_n$, le symbole A'_n désignera toujours le terme ou la somme des termes analogues (= ayant les mêmes indices) de la série $\sum a'_n$.

[2]) Je suppose qu'ils sont finis; le cas contraire ne présente pas de difficultés nouvelles.

P r e m i è r e c o n s t r u c t i o n. Soit A la somme d'autant de premiers termes positifs de Σa_n qu'on ait

$$(9) \qquad 0 < A - \nu < \alpha_1$$

α_1 étant le dernier terme de A. Si la différence $|A' - \nu'|$ est trop grande, on peut la diminuer en changeant A, comme il suit: Soit $A' - \nu' < 0$; d'après (8), il existe un indice q_1 tel qu'on ait $A' + u'_{pq_1} > \nu'$ pour presque tous les p, et un indice p_1 tel que, si l'on désigne par $\overline{u}_{p_1q_1}$ un segment [1]) quelconque de $u_{p_1q_1}$, on ait $|\overline{u}_{p_1q_1}| < A - \nu$. Désignons par σ'_{n_0} le plus petit segment de $A' + u'_{p_1q_1}$ contenant A' et satisfaisant à l'inégalité $\sigma'_{n_0} > \nu'$ et soit α'_{11} le dernier terme de σ'_{n_0} et n_0 le nombre de ses termes; si l'on désigne par σ_{n_0} le segment de $A + u_{p_1q_1}$ correspondant à σ'_{n_0}, on obtient

$$(10) \qquad 0 < \sigma_{n_0} - \nu \leqq 2\,\alpha_1, \qquad 0 < \sigma'_{n_0} - \nu' \leqq \alpha'_{11}.$$

Si la différence $A' - \nu'$ est positive et trop grande, il suffit d'ajouter à A' un certain segment de v'_{pq} pour obtenir les inégalités (10).

S e c o n d e c o n s t r u c t i o n. Ajoutons à σ_{n_0} autant de premiers termes négatifs de Σa_n, non contenus dans σ_{n_0}, que, si l'on désigne par B la somme obtenue, on ait

$$0 > B - \mu \geqq \beta_1$$

β_1 étant le dernier terme de B. Soit $B' - \mu' > 0$; choisissons, comme plus haut, deux indices p_2 et q_2 tels qu'on ait $B' + v'_{pq_2} < \mu'$ et $|\overline{v}_{p_2q_2}| < \mu - B$, $\overline{v}_{p_2q_2}$ désignant un segment quelconque de $v_{p_2q_2}$. Désignons par σ'_{m_1} le plus petit segment de $B' + v'_{p_2q_2}$ contenant B' et tel qu'on ait $\sigma'_{m_1} < \mu'$ et soit β'_{11} le dernier terme de σ'_{m_1}; on obtient

$$(12) \qquad 0 > \sigma_{m_1} - \mu \geqq 2\beta_1, \qquad 0 > \sigma'_{m_1} - \mu' \geqq \beta'_{11}.$$

Si $B' - \mu'$ est négatif, on doit ajouter à B' un certain segment de u'_{pq} pour obtenir ces inégalités.

En continuant cette construction, on ajoutera à σ_{m_1} un certain nombre de termes initials positifs de Σa_n, non contenus dans σ_{m_1},

[1]) J'admets que les termes a_n des sommes u_{pq} et v_{pq} sont rangés suivant leurs indices croissants.

et un certain segment de u_{pq} ou de v_{pq} pour obtenir les inégalités

$$0 < \sigma_{n_1} - \nu \leqq 2\, a_2, \qquad 0 < \sigma'_{n_1} - \nu' \leqq a'_{22}$$

et ainsi de suite.

On formera de telle sorte deux séries de la forme (2) dont les sommes partielles σ_n et σ'_n satisferont aux formules

$$\sigma_{m_k} \to \mu, \qquad \sigma_{n_k} \to \nu; \qquad \sigma'_{m_k} \to \mu', \qquad \sigma'_{n_k} \to \nu'; \qquad k \to \infty,$$

où $m_k < n_k < m_{k+1}$. Posons $\sigma_{n_k} = \sigma_{m_k} + u_k$, $\sigma_{m_{k+1}} = \sigma_{n_k} + v_k$; il suffit de changer l'ordre des termes des sommes (u_k, u'_k) et des sommes (v_k, v'_k) de la façon décrite dans le lemme pour obtenir les séries demandées.

Cas (B): Il peut être réduit au cas (A). Supposons, en effet, que les séries (1) et (2) satisfassent à la condition (B) et que

$$s_n \to s, \qquad \sigma_n \to s; \qquad s'_n \to s', \qquad \sigma'_n \to \sigma' \neq s'.$$

Soient m_k et n_k deux suites d'indices croissants telles que σ_{n_k} contienne tous les termes de s_{m_k} et que $s_{m_{k+1}}$ contienne tous les termes σ_{n_k}. Posons

$$(12) \qquad \sigma_{n_k} = s_{m_k} + u_k, \qquad s_{m_{k+1}} = \sigma_{n_k} + v_k$$

et supposons que u'_k et v'_k aient une signification analogue par rapport à s'_n et σ'_n et que les termes des sommes (u_k, u'_k) et des sommes (v_k, v'_k) aient été ordonnés de la façon décrite dans le lemme. Formons les séries

$$\Sigma a_{\mu_n} = s_{m_1} + u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + \ldots$$
$$\Sigma a'_{\mu_n} = s'_{m_1} + u'_1 + v'_1 + u'_2 + v'_2 + \ldots;$$

la première d'elles converge et la seconde oscille, on est donc conduit au cas (A).

Cas (C): Considérons les séries (1) et (2) et posons

$$s_n \to s, \qquad \sigma_n \to \sigma; \qquad s'_n \to s', \qquad \sigma'_n \to \sigma' \neq s',$$

$\varrho = \sigma - s$ étant supposé fini et $\varrho' = \sigma' - s'$ infini. En conservant les notations (12), on obtient

$$(12\,a) \qquad u_k \to \varrho, \qquad v_k \to -\varrho; \qquad u'_k \to \varrho', \qquad v'_k \to -\varrho'.$$

Considérons quatre nombres quelconques $\mu \leqq \nu$, $\mu' \leqq \nu'$ et soit A la somme d'autant de termes initials positifs de Σa_n qu'on ait l'inégalité (9). Si $A'-\nu'<0$, supposons que $\varrho'=+\infty$ et soit q_1 un indice tel que

(13) $\quad |u_k+v_{q_1}|<A-\nu$ et $|a_k|<A-\nu, \qquad$ pour $k>q_1$

et p_1 un indice $>q_1$ et tel qu'on ait

$$A'+u'_{p_1}+v'_{q_1}>\nu'.$$

Cela est évidemment possible d'après (12a) et en vertu de ce que $a_k\to 0$.

Rangeons les termes de la somme $u_{p_1}+v_{q_1}$ et, en même temps, ceux de la somme $u'_{p_1}+v'_{q_1}$ dans un ordre tel que la première de ces sommes devienne monotone à $(A-\nu)$ près ce qui est possible d'après (13). Désignons par σ'_{m_0} le plus petit segment de $A'+u'_{p_1}+v'_{q_1}$ contenant A' et satisfaisant à l'inégalité $\sigma'_{m_0}>\nu'$ et soit a'_{11} le dernier terme de σ'_{m_0}; on obtient, comme dans le cas (A), les inégalités (10).

La suite de cette construction est tout à fait analogue à celle du cas (A), donc le théorème est démontré.

3. Supposons que les séries (1) ne soient pas indépendantes. Je dis que, si l'une des séries d'un couple dérivé quelconque est convergente l'autre converge aussi car, dans le cas contraire, les séries (1) seraient indépendantes, d'après le cas (A) ou (C) de notre théorème. De plus, soient (s, s') et (σ, σ') les sommes des couples des séries (1) et (2), s étant $\neq \sigma$, et soit

(14) $$\Sigma a_{\mu_n}, \qquad \Sigma a'_{\mu_n}$$

un autre couple dérivé quelconque ayant la somme (x, y). Je dis que

(15) $$(\sigma'-s')x+(s-\sigma)y=s\sigma'-s'\sigma.$$

En effet, la série

$$\Sigma b_n, \qquad \text{où } b_n=(\sigma'-s')a_n+(s-\sigma)a'_n$$

est absolument convergente car, dans les cas contraire, étant

$$\Sigma a_n \neq \Sigma a_{\nu_n}, \qquad \Sigma b_n=\Sigma b_{\nu_n}$$

les séries Σa_n et Σb_n seraient indépendantes, d'après le cas (B) de notre théorème et, par suite, il existerait un couple dérivé $(\Sigma a_{k_n}, \Sigma b_{k_n})$ dans lequel Σa_{k_n} converge et Σb_{k_n} oscille; mais, dans ce cas la série

$$\Sigma[b_{k_n}+(s'-\sigma')a_{k_n}]=\Sigma(s-\sigma)a'_{k_n}$$

oscillerait aussi, ce qui est impossible, car les séries Σa_{k_n} et $\Sigma a'_{k_n}$ sont en même temps convergentes ou en même temps divergentes. On a donc $\Sigma b_{\mu_n}=\Sigma b_n$ ce qui entraîne (15).

Il résulte immédiatement de ce qui précède que, étant donnée une série semi-convergente à termes complexes

$$\Sigma(a_n + i\,a'_n).$$

les sommes de ses séries dérivées remplissent le plan tout entier, si les séries Σa_n et $\Sigma a'_n$ sont indépendantes, et que ces sommes remplissent une droite déterminée du plan, dans le cas contraire.

Sur une remarque de M. Hoborski.

Par

H. Auerbach.

M. Hoborski [1]) a démontré pour $n=3$ le théorème suivant

Lorsque les nombres a_{ki} $(i, k=1, 2, \ldots n)$ sont réels, les équations $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 1$ $(i=1, 2, \ldots n)$ et $|a_{ki}|^2 = 1$ entraînent les relations $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = 0$ $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots n)$.

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème bien connu de M. Hadamard d'après lequel on a

$$|a_{ik}|^2 \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \right),$$

l'égalité n'ayant lieu que lorsque $|a_{ki}|$ est orthogonal [2]).

---

[1]) A. Hoborski. Remarque relative aux transformations linéaires, orthogonales. Ann. de la Soc. Pol. de Math. I (1922), p. 70.

[2]) V. p. e. E. Goursat. Cours d'analyse. 3-ième éd. (1917), p. 125.

Nouveaux fascicules du „Mémorial des Sciences mathématiques“ [1]).

Fascicule V. *Analyse fonctionnelle*, par M. Paul Lévy. Cet ouvrage constitue un aperçu très condensé mais cependant très clair sur l'ensemble de l'Analyse fonctionnelle. Il rendra des services d'autant plus précieux aux mathématiciens que l'Analyse fonctionnelle, à cause de son origine tout à fait récente, est très loin d'être aussi généralement connue qu'elle devrait l'être étant donné le rôle important qu'elle joue dès maintenant dans les Sciences mathématiques.

Fascicule VI. *Le Problème de Bäcklund*, par E. Goursat. Le sujet de ce mémoire présente un intérêt considérable à cause des liens multiples qui l'unissent à la théorie de la transformation des surfaces d'une part et à la théorie des équations aux dérivées partielles d'autre part. M. Goursat, après avoir formulé le Problème de Bäcklund avec la généralité qui est en harmonie avec les conceptions scientifiques modernes dans cet ordre d'idées, étudie ce problème avec la maîtrise bien connue qui caractérise tous ses travaux.

Fascicule VII. *Séries analytiques. Sommabilité*, par M. A. Buhl. L'opération du prolongement analytique d'une fonction analytique donnée au moyen d'une série S qui ne converge que dans une partie du domaine d'existence de la fonction considérée, rentre dans la théorie générale de la sommation des séries divergentes, puisqu'elle fait correspondre à la série S des nombres déterminés, même en certains points où la série considérée est divergente, et c'est précisément à ce point de vue que se place M. Buhl. La méthode employée par M. Buhl est extrêmement remarquable en ce qu'elle

[1]) Voir l'article „Notice sur le Mémorial des Sciences mathématiques«, p. 142 du t. III de ces Annales.

lui permet de faire dériver tous les résultats qu'il expose d'une formule unique qui est l'une des généralisations de l'intégrale classique de Cauchy.

Fascicule VIII. *Introduction à la Grafique einsteinienne* par M. Th. De Donder. L'auteur traite son sujet en partisan déclaré de la conception relativiste de l'espace-temps imaginée par M. Einstein, sans discuter les difficultés mises en évidence par différents auteurs.

Fascicule IX. *La Géometrie des espaces de Riemann*, par E. Cartan. Ce fascicule se distingue par les qualités de clarté de simplicité et de parfaite ordonnance des matières que le nom de son éminent auteur permettait de prévoir. M. Cartan s'est surtout attaché à dégager, d'une part, les propriétés de l'espace euclidien qui subsistent dans les espaces de Riemann les plus généraux; d'autre part, les propriétés essentielles par lesquelles les espaces de Riemann se différencient de l'espace euclidien. En s'inspirant d'une idée de Lamé, M. Cartan a pris pour point de départ le problème qui consiste à reconstituer, lorsque cela est possible, l'espace euclidien qui admet un élément linéaire arbitrairement donné à l'avance et cela lui a permis d'amener le lecteur par une voie très naturelle à envisager la théorie des espaces de Riemann dans toute sa généralité. En définitive, le remarquable mémoire de M. Cartan facilitera merveilleusement au lecteur l'acces à la Géométrie générale moderne.

Fascicule X. *Fonctions de Lamé et Fonctions de Mathieu*, par M. P. Humbert. On trouvera dans ce fascicule une exposition véritablement lumineuse des propriétés fondamentales des fonctions de Lamé et de Mathieu ainsi que des indications très complètes en ce qui concerne les diverses applications de ces fonctions. La bibliographie très complète qui termine l'ouvrage permettra au lecteur d'approfondir à son gré tel point des théories étudiées dans cet ouvrage qui l'intéresserait particulièrement.

Fascicule XI. *Fonctions harmoniques. Principe de Picard et de Dirichlet*, par M. Georges Bouligand. Ce très remarquable mémoire est consacré à l'étude du problème de Dirichet pour les domaines les plus généraux.

Le point de départ des recherches exposées dans ce travail est le fait suivant établi dans des travaux autérieurs: le problème de Dirichlet classique n'est possible sans restriction quant à la nature des valeurs périphériques de la fonction demandée, qu'au cas où la frontière du domaine que l'on considère satisfait à certaines conditions de régularité, mais il est possible de substituer au problème de Dirichlet un problème (P) possible sans restrictions pour tout domaine borné (D), problème n'admettant, dans tous les cas, qu'une solution unique u, laquelle coïncide avec celle du problème de Dirichlet lorsque celui ci est possible.

Cela posé, M. Bouligand étudie les relations qui subsistent entre la solution u du problème (P) et la fonction demandée dans le problème de Dirichlet. Par la nature des choses, l'étude précédente a amené M. Bouligand à celle de la fonction de Green ce qui, conjointement avec l'examen du cas où l'on envisage un domaine non borné, l'a conduit à étudier certaines singularités des fonctions harmoniques et à étendre, sous le nom de *Principe de Picard*, un théorème remarquable dû à M. Picard. M. Bouligand fait voir en outre comment, dans les questions qu'il étudie, on peut faire intervenir une certaine équation intégrodifférentielle laquelle, à son tour, conduit à envisager certains systèmes différentiels linéaires. Ajoutons que, par l'interprétation physique des théories étudiées au moyen de la théorie mathématique de la conductibilité calorifique, M. Bouligand réussit à faire prévoir par l'intuition certains des résultats qu'il obtient. En définitive, le mémoire de M. Bouligand, muni d'une bibliographie très complète, sera lu avec autant de profit que d'intérêt par tous ceux qui voudront approfondir la théorie si importante des fonctions harmoniques.

Fascicule XII *La méthode de Darboux et les équations* $s = f(x, y, z, p, q)$, par M. R. Gosse. Le sujet traité dans ce mémoire rentre dans la théorie générale du problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles du second ordre, considérées exclusivement au point de vue de la théorie des fonctions analytiques.

L'auteur, après avoir rappelé les principes généraux sur lesquels il aura à s'appuyer dans la suite, s'attache plus particulièrement à exposer la théorie des équations de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

théorie à laquelle il a apporté lui-même d'importantes contributions. La façon claire et précise avec laquelle M. Gosse a réussi à traiter son sujet lui assurera certainement la reconnaissance de tous ceux qui voudront étudier les théories qu'il expose.

Fascicule XIII. *Figures d'équilibre et Cosmogonie*, par M. Alex. Véronnet. Le titre de ce mémoire en indique suffisamment le sujet lequel intéressera tout mathématicien quelle que soit la nature de ses recherches de prédilection.

M. Véronnet, à qui l'on doit une série d'importantes contributions aux théories étudiées dans son mémoire, donne un aperçu très lucide sur l'ensemble des travaux ayant pour but de nous éclairer sur l'équilibre physique, sur la constitution ainsi que sur l'évolution et la formation des astres de l'Univers et, pas la Bibliographie détaillée, placée à la fin du fascicule, il facilite grandement au lecteur l'étude approfondie des questions se rapportant au sujet du mémoire et qui l'intéresseraient particulièrement.

Fascicule XIV. *Théorie des Champs gravifiques*, par M. Th. De Donder. Le fascicule actuel du „Mémorial", consacré à la théorie de la relativité, fait suite au fascicule VIII dû au même auteur. Les opinions sur la théorie de la relativité et sur la façon rationnelle de l'exposer sont encore trop divergentes pour que nous puissions nous résoudre à formuler une appréciation de l'ouvrage de M. De Donder et nous ne pouvons que renvoyer le lecteur à cet ouvrage lui-même.

S. Zaremba.

Liste de publications périodiques avec lesquelles la Société polonaise de mathématiques échange ses Annales.

Berlin. Jahresberichte der deutscher Mathematiker Vereinigung.
Bologna. Bolletino della Unione Matematica Italiana.
Brno. Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk.
Calcutta. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society.
Jassy. Annales Scientifiques de l'Université de Jassy.
Paris. Bulletin de la Société mathématique de France.
La Plata (Universitad de). Contributions al Estudio de las Ciencias Fisicas y Matemàticas.
Roma. Rendiconti di Seminario Matematico della Facolta di Scienze della Università di Roma.
Strasbourg. Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université.
Szeged Acta litterarum et scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco Josephinae.
Timisoara. Bulletin scientifique de l'Ecole polytechnique.
Warszawa. Fundamenta Mathematicae.
„ Prace Matematyczno-Fizyczne.
„ Przegląd Matem.-Fizyczny.
Wien. Monatshefte für Mathematik und Physik.

Etat

De la Société polonaise de Mathématique au commencement de l'année 1926.

Président: M. S. Dickstein.

Vice-Présidents: MM. S. Zaremba, M. Ernst.

Secrétaire: M. T. Ważewski.

Trésorier: M. A. Wilk.

Autres membres du Bureau: MM. A. Rosenblatt, W. Wilkosz L. Chwistek.

Commission de Contrôle: MM. G. Leśnodorski, S. Zakrocki.

Il existe trois sections de la Société, l'une à Lwow, présidée par M. Łomnicki. la seconde à Varsovie, présidée par M. Mazurkiewicz et la troisième à Poznań. présidée par M. Krygowski.

Liste des membres de la Société.

Dr. Kazimierz Abramowicz (Poznań).
Bohdan Babski (Grudziądz).
Dr. Stefan Banach (Lwów).
Tadeusz Banachiewicz (Kraków).
Jan Baran (Nowy Targ).
Dr. Kazimierz Bartel (Lwów).
Dr Czesław Białobrzeski (Warszawa).
Dr. Izydor Blumenfeld (Lwów).
Dr. Stefan Bóbr (Warszawa).
Władysław Bogucki (Kraków).
Dr. Georges Bouligand. Poitiers (France).
Dr. Łucjan Böttcher (Lwów).
Franciszek Brablec (Krakow).
Celestyn Burstin (Lwów)
Élie Cartan (Paris).
Dr. Juljan Chmiel (Kraków).
Antoni Chromiński (Warszawa)
Dr. Leon Chwistek (Kraków).
Dr. Bohdan Debryng (Warszawa).
Dr. S. Dickstein (Warszawa).
Gerhard Długowski (Warszawa).
Prof. Władysław Dziewulski (Wilno).
Dr. Placyd Dziwiński (Lwów).
Dr. Marcin Ernst (Lwów).

Kazimierz Fijoł (Kraków).
Mirosław Gibas (Kraków).
Dr. Lucjan Grabowski (Lwów).
Dr Antoni Hoborski (Kraków).
† Dr. Ludwik Hordyński (Kraków).
Ks. Feliks Hortyński (Kraków).
Dr. Maksymiljan Huber (Lwów).
Zenon Jagodziński (Warszawa).
Wincenty Janik (Kraków).
† Dr. Zygmunt Janiszewski (Lwów).
Dr. Stefan Kaczmarz (Lwów).
Dr. Stanisław Kalandyk (Poznań)
Dr. Bazyli Kalicun (Lwów).
Ludwik Kaszycki (Kraków).
Dr. Stefan Kempisty (Wilno).
Stefania Klawekówna (Poznań).
Dr. Zygmunt Kobrzyński.
Dr. Zdzisław Krygowski (Poznań).
Dr. Marjan Kryzan (Poznań).
Dr. Kazimierz Kuratowski (Warszawa).
Dr. Stefan Kwietniewski (Warszawa).
Dr. Franciszek Leja (Warszawa).
Dr. Stanisław Leśniewski (Warszawa).
Gustaw Leśnodorski (Kraków).
Władysław Lichtenberg (Lwów).
Prof. Leon Lichtenstein (Lipsk).
Dr. Stanisław Loria (Lwów).
Dr. Antoni Łomnicki (Lwów).
Władysław Majewski (Lwów).
Dr. Adam Maksymowicz (Lwów).
Andrzej Marconi (Lwów).
Dr. Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).
Dr. Meyer (Wiedeń, Austrja).
Zofja Napadiewiczówna (Lwów).
Dr. Roman Negrusz (Lwów).
Jan Spława Neyman (Warszawa).
Dr. Stanisław Nikliborc (Lwów).
Dr. Otton Nikodym (Kraków).
Józef Orłowski (Poznań).

Ludwik Ostrzeniewski (Poznań).
Dr. Aleksander Oareński (Lwów).
Dr. Tadeusz Pęczalski (Poznań).
Dr. Antoni Plamitzer (Lwów).
Dr. A. Przeborski (Warszawa).
Józef Przygodzki (Poznań).
Dr. Aleksander Rajchmann (Warszawa).
Dr. Alfred Rosenblatt (Kraków).
Antoni Rozmus (Zakopane).
Dr. Juljusz Rudnicki (Wilno).
Dr. Stanisław Ruziewicz (Lwów).
Walerja Sabatowska (Lwów).
Dr. Stanisław Saks (Warszawa).
Juljusz Szauder (Lwów).
Lidja Seipellówna (Poznań).
Dr. Wacław Sierpiński (Warszawa).
Władysław Ślebodziński (Poznań).
Dr. Jan Śleszyński (Kraków).
Kazimierz Smoliński (Poznań).
Władysław Smosarski (Poznań).
Jan Sobaszek (Poznań).
Dr. Edward Stamm (Ciechanów).
Dr. Wiktor Staniewicz (Wilno).
Ksawery Stankiewicz (Kraków).
Zofja Starosolska (Lwów).
Dr. Hugo Steinhaus (Lwów).
Dr. Władysław Stożek (Lwów).
Dr. Stefan Straszewicz (Warszawa).
Karol Szczepanowski (Modlin).
Dr. Alfred Tarski (Warszawa).
Henryk Titz (Kraków).
Włodzimierz Urbański (Kraków).
Kazimierz Vetulani (Kraków).
Dr. Tadeusz Ważewski (Kraków).
Leopold Węgrzynowicz (Kraków).
Dr. Jan Weyssenhoff (Wilno).
Dr. Antoni Wilk (Kraków).
Dr. Witold Wilkosz (Kraków).
Irena Wilkoszowa (Kraków).

Dr. Franciszek Włodarski (Poznań).
Stanisław Zakrocki (Kraków).
Dr. Bohdan Zaleski (Poznań).
Dr. Kazimierz Zarankiewicz (Warszawa).
Dr. Stanisław Zaremba (Kraków).
Dr. Zygmunt Zawirski (Lwów).
† Stanisław Ziobrowski (Kraków).
Dr. Antoni Zygmund (Warszawa).
Dr Kazimierz Żórawski (Warszawa).
Dr Eustachy Żyliński (Lwów)

Ouvrages reçus.

La collection complète des volumes du Bulletin de la Société mathématique de France depuis la fondation de ce périodique en 1872 jusqu'en 1924.

Table des matières.