ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

1 2 3

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

4 5

TOME VII

ANNÉE 1928

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LA RÉDACTION S'ADRESSER À M. STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE XVI, RUE ŻYTNIA, 6

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

60

KRAKÓW 1929
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

Les publications de la Société polonaise de mathématique ont paru pour la première fois en 1921 sous le titre de „Rozprawy Polskiego Towarzystwa matematycznego“ en un volume comprenant aussi bien des mémoires de langue polonaise que des mémoires rédigés en d'autres langues. Depuis 1922 l'organe de la Société porte le titre d'Annales de la Société polonaise de mathématique; les travaux de langue polonaise paraissent dans un Supplément, le corps du volume étant réservé aux travaux de langues française, anglaise, italienne et allemande.

Pour tout ce qui concerne les échanges et l'administration des Annales de la Société Polonaise de Mathématique, s'adresser au Secrétariat de la Société, 20, rue Gołębia, Cracovie (Pologne).

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME VII

ANNÉE 1928

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LA REDACTION S'ADRESSER À M. STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE XVI, RUE ŻYTNIA, 6

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW 1929
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

Les publications de la Société polonaise de mathématique ont paru pour la première fois en 1921 sous le titre de „Rozprawy Polskiego Towarzystwa matematycznego“ en un volume comprenant aussi bien des mémoires de langue polonaise que des mémoires rédigés en d'autres langues. Depuis 1922 l'organe de la Société porte le titre d'Annales de la Société polonaise de mathématique; les travaux de langue polonaise paraissent dans un Supplément, le corps du volume étant réservé aux travaux de langues française, anglaise, italienne et allemande.

Pour tout ce qui concerne les échanges et l'administration des Annales de la Société Polonaise de Mathématique, s'adresser au Secrétariat de la Société, 20, rue Gołębia, Cracovie (Pologne).

Contribution à la théorie de la longueur.

(Calcul de la longueur généralisée. Une définition analytique de la longueur généralisée. Rapport entre de différentes définitions de la longueur. Applications à la théorie classique de la longueur et aux fonctions absolument continues).

Par

T. Ważewski.

Introduction.

§ 1. **Notations.** Nous adoptons les notations suivantes:

Soit

$$(1) \qquad G(t) = \{g_1(t), \ldots, g_n(t)\}$$

un point mobile dans l'espace à n dimensions ($n \geqslant 1$). Nous appelons $G(t)$ transformation absolument continue dans un intervalle fermé et borné Δ, lorsque les fonctions $g_i(t)$ sont absolument continues dans Δ.

Nous supposons dans la suite que $G(t)$ est définie seulement dans Δ.

Soit A une partie de Δ. Nous désignons par

$$(2) \qquad G(A)$$

la classe des points (1) que l'on obtient lorsque t varie dans A. (2) est dit image de A par l'intermédiaire de $G(t)$.

Nous désignons par

$$k_A(t)$$

la fonction qui pour tout t_0 de A est égale au nombre des t satisfaisant à la condition

$$G(t) = G(t_0), \quad t \varepsilon A.$$

Nous appelons $k_A(t)$ ordre de multiplicité de t relatif à A e t $G(t)$. Nous posons $\frac{1}{k_A(t)} = 0$ toutes les fois que $k_A(t)$ n'est pas fini.

Soit B une partie de $G(\Delta)$. Nous désignons par

$$(3) \qquad G^{-1}(B)$$

la classe de tous les t pour lesquels le point (1) appartient à B. Nous appelons (3) i m a g e i n v e r s e d e B par l'intermédiaire de $G(t)$.

Nous posons[1])

$$(4) \qquad G'(t) = \{ g_1'(t), \ldots, g_n'(t) \}$$

$$(5) \qquad | G'(t) | = \sqrt{\sum_{\nu/1}^{n} [g_\nu'(t)]^2}$$

Nous désignons par

$$\Delta_z$$

la classe de tous les t où $| G'(t) | = 0$.

Remarque. Si $G(t)$ est une transformation définie et absolument continue dans l'intervalle Δ, (4) et (5) sont définis presque partout dans Δ; Δ_z est un ensemble mesurable[2]).

§ 2. *Longueur d'un ensemble au sens classique. Représentation normale (naturelle) d'un arc simple rectifiable.*

La définition classique de la longueur concerne seulement les arcs simples et leurs parties.

Soit L un arc simple rectifiable situé dans l'espace cartésien à n dimensions.

On dit qu'une transformation $F(s) = \{ f_1(s), \ldots, f_n(s) \}$ définie dans un intervalle borné et fermé I est une r e p r é s e n t a t i o n n o r m a l e de L lorsque (cf. § 1)

1°) $F(I) = L$,

2°) $F(s)$ est absolument continue dans I,

3°) $| F'(s) | = 1$ presque partout dans I,

4°) $F(s_1) \neq F(s_2)$ lorsque s_1 et s_2 sont deux points différents de I.

Tout arc simple rectifiable admet au moins une représentation normale et inversement.

Soit B une partie de L. On entend par l o n g u e u r (longueur

---

[1]) Cf. p. e. Bliss, The solutions of differential equations, Annals of Math. 1904—05, p. 49. $| G'(t) |$ correspond au mod $G'(t)$.

[2]) S. Banach. Sur les dérivées des fonctions mesurables, Fund. Math. T. III, p. 128.

intérieure, longueur extérieure) de B au sens classique la mesure (mesure intérieure, mesure extérieure) de $F^{-1}(B)$ (cf. § 1). „B est rectifiable au sens classique“ veut dire que $F^{-1}(B)$ est mesurable.

Pour être exact, il faudrait préciser: longueur de B au sens classique relative à L et sa représentation $F(s)$; B est rectifiable au sens classique relativement à L et $F(s)$.

§ 3. *Généralisations de la notion de la longueur et leur justification.*

Plusieurs auteurs ont été amenés à généraliser la notion classique de la longueur[1]).

Voilà un problème s'imposant souvent dans l'analyse qui justifie l'introduction de définitions nouvelles de la longueur.

Problème P. Soient successivement $F(s)$ et $H(u)$ deux représentations normales (cf. § 2) de deux arcs simples rectifiables L et M. Soit B une partie de LM. La question se pose de savoir:

1°) si, B étant rectifiable au sens classique relativement à L et $F(s)$, l'est aussi relativement à M et $H(u)$;

2°) si la longueur de B au sens classique relative à L et $F(s)$ et relative à M et $H(u)$ est la même lorsque B est rectifiable relativement à ces arcs et à ces représentations.

On peut, ou bien chercher à traiter cette question directement, ou bien tenter de donner une définition de la longueur d'un ensemble indépendante de la représentation paramétrique de l'arc sur lequel cet ensemble est situé, définition compatible avec la définition classique relative à cet arc et à ses représentations normales.

L'introduction des définitions nouvelles est ainsi justifiée parce qu'elles représentent un point de départ pour une méthode d'examen du problème P ou bien parce qu'elles découlent d'une façon naturelle de certaines méthodes en question.

Pour la plupart de ces définitions D subsistent les théorèmes suivants:

T_1. A étant une partie d'un arc L rectifiable au sens classique

---

[1]) Cf. O. Janzen: Über einige stetige Kurven, über Bogenlänge, linearen Inhalt und Flächeninhalt, Königsberg 1907. — W. Gross. Über das lineare Maß von Punktmengen, Monatshefte für Mathematik und Physik, T. 29 (1918) p. 177.

et $F(s)$ étant une représentation normale de L (cf. § 2), la définition D est compatible avec la définition classique en ce qui concerne l'existence de la longueur de A et sa valeur (relative à L et $F(s)$).

T_2. Si $A \subset B$ et que A et B sont rectifiables (D)[1] (= ont une longueur finie), on a

$$\operatorname{long}_D A \leq \operatorname{long}_D B.$$

T_3. Toute partie fermée d'un ensemble rectifiable (D) est rectifiable (D).

T_4. La projection d'un ensemble rectifiable (D) sur une droite quelconque est mesurable et sa mesure ne surpasse pas la longueur de cet ensemble.

T_5. La longueur d'une somme d'un nombre fini ou dénombrable d'ensembles disjoints et rectifiables (D) est égale à la somme de leurs longueurs.

T_6. La longueur d'un ensemble se projetant sur toute droite de l'espace suivant un ensemble de mesure nulle est de longueur nulle.

T_7. Le produit et la différence de deux ensembles rectifiables (D) est rectifiable (D).

En ce qui concerne les définitions de la longueur indépendantes de l'ordre imposé aux ensembles par des représentations paramétriques, il est a espérer à priori qu'elles peuvent classer comme rectifiables des ensembles plus généraux que les parties des arcs simples.

Il en est ainsi; il y en a qui offrent une généralisation de la notion de la longueur.

Toute généralisation de cette sorte est-elle stérile? Non parce qu'il se présente dans l'analyse le besoin d'envisager des ensembles plus généraux que les parties des arcs simpes rectifiables et de considérer leurs longueurs définies ad hoc suivant le cas. Il suffit de faire mention d'une circonférence augmentée d'une coupure pénétrant dans son intérieur.

C'est un continu rectifiable.

Les différentes définitions (D) réalisant les théorèmes T_1—T_7 ne sont pas forcément compatibles entre elles dans toute leurs

[1]) „Rectifiable (D)" veut dire rectifiable relativement à la définition D.

[2]) $\operatorname{long}_D A$ désigne la longueur de A relative à la définition D.

généralisité[1]). Elle le sont sur le terrain des parties des continus rectifiables (plus généralement: parties des sommes dénombrables de tels continus). (Cf. § 15. Th. 3).

Les continus rectifiables s'introduisent naturellement à l'occasion suivante: Soit $\{L_\nu\}$ une suite d'arcs simples aux longueurs inférieures à un nombre fixe k. Supposons que les arcs L_ν tendent vers un ensemble L. L n'est pas forcément un arc simple, il est un continu rectifiable[2]).

§ 4. Le présent travail fournit, relativement aux continus rectifiables et à leurs parties, une réponse à une question exactement de la même nature que celle que Jordan a posée à M. Lebesgue relativement au calcul de l'aire de surface[3]).

Je suppose qu'un continu K rectifiable est donné par une transformation absolument continue (cf. § 1) quelconque[4]).

En partant de cette représentation de K je donne un critère de la rectifiabilité (relative à une définition quelconque réalisant les théorèmes $T_1 - T_7$ du § 3) d'une partie quelconque B de K. Je donne une formule pour la longueur intérieure et extérieure de B et une formule pour la longueur de B lorsque B est rectifiable au sens précédent.

Je démontre la compatibilité des définitions de la longueur (pour lesquelles subsistent les théorèmes $T_1 - T_7$) relativement aux parties de K.

En partant de la formule mentionnée je donne une définition analytique de la longueur des parties de K et je démontre qu'elle réalise les théorèmes $T_1 - T_7$.

Je prouve que la rectifiabilité et la longueur (relatives à cette définition) d'un ensemble ne dépendent pas de la transformation absolument continue qui représente K.

Je démontre que les parties de K rectifiables au sens précé-

---

[1]) S. Mazurkiewicz et S. Saks. Sur les projections d'un ensemble fermé. Fund. Math. T. VIII, p. 109.

[2]) C'est une conséquence d'un théorème d'Ascoli (cf. p. ex. Tonelli: Calcolo delle Variazioni T. 1, p. 76) et du théorème 1 du § 14.

[3]) Lebesgue: Quelques remarques sur la définition de l'aire de surfaces. Fund. Math. T. VIII, p. 164.

[4]) Une telle transformation existe pour tout K rectifiable (cf. § 14. Th. 1).

dent continuent d'être rectifiables lorsqu'on soumet l'espace à une transformation aux dérivées partielles continues[1]).

Je prouve l'invariance par rapport aux transformations cartésiennes de la rectifiabilité et de la longueur en question des parties de K (ce n'est pas vrai pour tous les ensembles et toutes les définitions réalisant $T_1 - T_7$).

J'établis directement la solution du problème P et j'obtiens des applications aux arcs rectifiables au sens classique.

J'obtiens quelques conséquences relatives aux fonctions absolument continues.

J'indiquerai dans un travail ultérieur les applications de nos résultats à l'analyse classique.

* * *

Il est intéressant d'observer comment quelques-uns de nos théorèmes pourraient être acquis dans une voie plus courte par les mêmes méthodes appliquées aux cas plus simples[2]). Si leurs démonstrations sont précédées par des théorèmes qui ne sont pas étroitement liés avec eux c'est parce que la ligne de nos raisonnements converge vers le calcul de la longueur.

Théorèmes préliminaires sur les fonctions d'une variable.

§ 5. **Lemme I.** Soit $g(t)$ une fonction possédant en tout point d'un ensemble E (mesurable ou non) une dérivée finie et soit A une partie de E. La condition nécessaire et suffisante pour que $m\,g(A) = 0$[3]) (cf. § 1) est qu'on ait, presque partout dans A, $g'(t) = 0$.

Démonstration. On peut supposer que E est borné sans restreindre la généralité du lemme.

---

[1]) Ce n'est pas vrai pour tous les ensembles rectifiables relativement à une définition réalisant $T_1 - T_7$. En partant d'un ensemble indiqué par M. Saks, on peut facilement construire un ensemble de mesure nulle au sens de Janzen qui après une transformation du genre en question passe en un ensemble non mesurable au même sens. (Cet ensemble n'appartient à aucun continu rectifiable). Cf. S. Saks: Remarque sur la mesure linéaire des ensembles plans. Fund. Math. T. IX, p. 16.

[2]) La solution du problème P par exemple pourrait se passer de la théorie de l'ordre de multiplicité.

[3]) mA, $m_i A$, $m_e A$ désignent respectivement la mesure de A, sa mesure intérieure et extérieure.

La condition est suffisante suivant un résultat de M. Saks[1]).

Pour démontrer que la condition est nécessaire admettons, par impossible, que par exemple $g'(t) > 0$ dans une partie B de A pour laquelle

$$(1) \qquad m_e(B) > 0$$

et que $mg(B) = 0$. Soit $[a, b]$ $(a < b)$ un intervalle fini contenant B. Désignons par $E_{p,q}$ (où p et q sont des nombres naturels) la classe de tous les t de B pour lesquels les relations $0 < h < \frac{b-a}{p}$, $(t+h) \varepsilon B$ entraînent l'inégalité

$$(2) \qquad \frac{g(t+h) - g(t)}{h} > \frac{1}{q}.$$

$g'(t)$ étant positif et fini dans B, on a $B = \Sigma\Sigma E_{p,q}$. Il existe donc selon (1) un p' et un q' pour lesquels $m_e(E_{p',q'}) > 0$. Divisons $[a, b]$ en p' sous intervalles égaux. Au moins l'un d'eux renferme une portion C de $E_{p',q'}$ de mesure non nulle. On a

$$(3) \qquad m_e(C) > 0,$$

$$(4) \qquad mg(C) = 0.$$

D'après (2) la fonction $g(t)$ est croissante au sens strict dans C[2]).

On peut supprimer dans C une partie dénombrable D, telle que $C - D$ et $g(C - D)$ soient bilatéralement denses en eux-mêmes[3]). Désignons par $g^{-1}(y)$ la fonction inverse de la fonction $g(t)$, cette dernière étant considérée seulement dans $C - D$.

$g'(t)$ étant positif et fini dans $C - D$, $(g^{-1}(y))'$ est fini dans $g(C - D)$ (c'est un résultat de la façon dont on a choisi D). Or, notre condition étant suffisante, on en conclut conformément à (4) que $0 = mg^{-1}(g(C - D)) = m(C - D) = m(C)$, ce qui est contraire à (3).

---

[1]) S. Saks. Sur un théorème de M. Lusin. Th. 1 et 2, p. 115, Fund. Math. Th. VI.

[2]) Le raisonnement précédent est calqué sur un raisonnement de M. Saks. (Sur les nombres dérivés, p. 100, Fund. Math. V).

[3]) Cf. T. Ważewski. Un théorème sur les fonctions dérivables. Ann. d. l. Soc. Polonaise de Math. T. VI, p. 87, § 3.

A est dit bilatéralement dense en lui-même, si tout point x de A est à la fois point d'accumulation de la partie de A située à droite de x et de celle qui se trouve à sa gauche.

Lemme 2. Soit $g(t)$ une fonction définie dans un ensemble E jouissant des propriétés suivantes.

P_1) $g'(t)$ est fini presque partout dans E,

P_2) si C est une partie de mesure nulle de E, alors $mg(C)=0$ (cf. § 1).

Soit A une partie de E. La condition nécessaire et suffisante pour que

$$mg(A)=0 \tag{1}$$

est que $g'(t)$ soit nul presque partout dans A.

Démonstration. Désignons par B la partie de E où $g'(t)$ n'est pas fini ou n'existe pas. On a suivant P_1 et P_2

$$mB=0 \tag{2}$$

$$mg(B)=0. \tag{3}$$

Soit A une partie de E. On a

$$g(A)=g(A-B)+g(A\,.\,B). \tag{4}$$

De (3) il s'ensuit

$$mg(A\,.\,B)=0. \tag{5}$$

D'après (4) et (5) la condition nécessaire et suffisante pour l'égalité (1) est que $mg(A-B)=0$. Or, $g'(t)$ étant fini partout dans $A-B$, cette condition revient à ce que $g'(t)$ soit nul presque partout dans $A-B$ (cf. lemme précédent) c. à.-d. (cf. (2)) presque partout dans A.

Corollaire. Soit $g(t)$ une fonction définie et absolument continue dans un intervalle borné et fermé Δ. Soit A une partie (mesurable ou non) de Δ. La condition nécessaire et suffisante pour que $g(A)$ (cf. § 1) soit de mesure nulle est que $g'(t)$ soit nul presque partout dans A.

Pour le démontrer, il suffit de remarquer que $g'(t)$ jouit des propriétés P_1 et P_2 du lemme précédent[1]).

§ 6. **Définition.** Soit $\alpha(t)$ une fonction définie dans un ensemble linéaire E. (Les valeurs que prend $\alpha(t)$ peuvent être des nombres ou non). Soit A une partie de E. Nous désignons par

$$A^*$$

la classe de tous les t appartenant à A pour lesquels l'équation

[1]) S. Banach. Sur les lignes rectifiables. Th. 3, p. 229. Fund. Math. T. VII.

$\alpha(u) = \alpha(t)$ n'admet pas de solutions en u satisfaisant aux conditions: $u \varepsilon A$, $u < t$.

Lemme 1. Si $A \subseteq B \subset E$, alors $B^* - A^* \subset B - A$ (cf. définition précédente).

Démonstration. Soit $A \subseteq B \subset E$ et soit

(1) $$t_0 \varepsilon B^* - A^*$$

t_0 appartenant à B^*, on a selon la définition de B^*

(2) $$t_0 \varepsilon B.$$

J'affirme que

(3) $$t_0 \varepsilon (-A).$$

En effet, d'après (1) l'équation $\alpha(u) = \alpha(t_0)$ n'admet pas de solutions en u satisfaisant aux conditions $u \varepsilon B$, $u < t_0$ ni (à plus forte raison) aux conditions $u \varepsilon A$, $u < t_0$. Il en résulte que, si t_0 appartenait à A, il appartiendrait aussi à A^* (cf. déf. de A^*), ce qui est contraire à (1). La relation (3) est ainsi établie. De (2) et (3) il s'ensuit

$$t_0 \varepsilon B - A.$$

Cette relation étant une conséquence de (1), on obtient $B^* - A^* \subset B - A$, c. q. f. d.

Lemme 2. Si

(1) $$A \subset B \subset E,$$

alors $\alpha(A^* - B^*) \subset \alpha(B - A)$.

La démonstration est basée sur les deux remarques suivantes découlant immédiatement de la définition précédente:

I) Si $t_0 \varepsilon B - B^*$, alors il existe un t_1 pour lequel ou à

(2) $$t_1 \varepsilon B,\ t_1 < t_0,\ \alpha(t_0) = \alpha(t_1).$$

II) Si $t_0 \varepsilon A^*$, $t_1 < t_0$, $\alpha(t_0) = \alpha(t_1)$, alors

(3) $$t_1 \varepsilon (-A).$$

Adressons-nous à la démonstration du lemme.

Supposons que

(4) $$p \varepsilon \alpha(A^* - B^*).$$

Il suffit de prouver que $p \varepsilon \alpha(B - A)$. D'après (4) il existe un t_0 pour lequel

(5) $$t_0 \varepsilon A^* - B^*,\ \alpha(t_0) = p$$

d'où il résulte, en vertu de (1) que $t_0 \varepsilon B - B^*$. Il existe donc un t_1 satisfaisant à (2). De (2) et (5) résulte (3) (cf. II) et de (2) et (3) il résulte que $t_1 \varepsilon B - A$.

On a, par conséquent, $p = \alpha(t_0) = \alpha(t_1) \varepsilon \alpha(B - A)$ c. q. f. d.

En rapprochant les deux lemmes précédents, on obtient le suivant

Corollaire. Si $A \subset B \subset E$, alors

$$\alpha(B^* - A^*) + \alpha(A^* - B^*) = \alpha[(B^* - A^*) + (A^* - B^*)] \subset \alpha(B - A).$$

§ 7. **Théorème 1.** Soit $\{P_\nu\}$ une suite (finie ou non) d'ensembles parfaits et disjoints dont la somme $P = \Sigma P_\nu$ est bornée.

Supposons qu'une fonction $\alpha(t)$ est monotone au sens strict dans chacun des ensembles P_ν et qu'elle possède en tout point de P une dérivée n o n n u l l e et finie.

Admettons en plus que partout dans P on a

$$k_P(\alpha, t) < \infty\,[1].$$

Ceci étant, j'affirme que, si A est une partie mesurable de P, on a

$$m\alpha(A) = \int_A \frac{|\alpha'(t)|}{k_A(\alpha, t)}\, dt.$$

La démonstration de ce théorème sera basée sur quelques lemmes.

Lemme 1. Si $A \subset P$, alors la condition nécessaire et suffisante pour que $m\alpha(A) = 0$ est que $m(A) = 0$.

C'est une conséquence immédiate du lemme 1, § 5.

Lemme 2. Si A est une partie mesurable de P, $\alpha(A)$ est mesurable (c.-à-d. $m(I.\alpha(A)) < +\infty$ lorsque I est un intervalle fini).

Supposons, en effet, que A est mesurable. On peut mettre A sous la forme

$$A = A_0 + \sum_{\nu/1}^{\infty} A_\nu,$$

où A_0 est un ensemble de mesure nulle et les A_ν sont fermés. On a

$$\alpha(A) = \alpha(A_0) + \Sigma\alpha(A_\nu).$$

$\alpha(A_0)$ est de mesure nulle (lemme 1) et les $\alpha(A_\nu)$ sont fermés, car $\alpha(t)$ est une fonction continue. $\alpha(A)$ est donc mesurable.

Lemme 3. Soit $B \subset \alpha(P) = \alpha(\Sigma P_\nu)$. La condition nécessaire et suffisante pour que B soit mesurable est que $\alpha^{-1}(B)$ (cf. § 1) le soit aussi.

---

[1]) $k_P(\alpha, t)$ désigne l'ordre de multiplicité de t relatif à P et $\alpha(t)$ (cf. § 1).

En vertu du lemme précédent la condition est suffisante, car $B = \alpha(\alpha^{-1}(B))$. Pour démontrer qu'elle est nécessaire supposons que B est mesurable et mettons B sous la forme $B = \sum_{\nu/1}^{\infty} B_\nu + B_0$, où B_0 est de mesure nulle et les B_ν sont fermés. On a

$$\alpha^{-1}(B) = \Sigma\, \alpha^{-1}(B_\nu) + \alpha^{-1}(B_0).$$

$\alpha^{-1}(B_0)$ est de mesure nulle (lemme 1). Il reste à démontrer que les $\alpha^{-1}(B_\nu)$ sont mesurables.

On a $\alpha^{-1}(B_\nu) = \sum_{\mu/1}^{\infty} P_\mu \,.\, \alpha^{-1}(B_\nu)$. Comme les P_μ et les B_ν sont fermés et que la fonction α est continue, $P_\mu \,.\, \alpha^{-1}(B_\nu)$ est aussi fermé. Les $\alpha^{-1}(B_\nu)$ sont donc mesurables.

Lemme 4. Si B est une partie mesurable de P, l'ensemble B^* (cf. § 6, définition) est mesurable.

Démonstration. Il existe une partie A de B, une partie qui est une somme dénombrable d'ensembles fermés et pour laquelle

(1) $$m(B - A) = m(B) - m(A) = 0.$$

A^* est mesurable[1]). On a d'après (1) (cf. lemme 1) $m\,\alpha(B - A) = 0$. Le corollaire du § 6 donne $\alpha(B^* - A^*) + \alpha(A^* - B^*) \subset \alpha(B - A)$ d'où

$$m\,\alpha(B^* - A^*) = m\alpha(A^* - B^*) = 0$$

et de là (cf. lemme 1)

$$m(B^* - A^*) + m(A^* - B^*) = 0.$$

L'ensemble $A^* B^* = A^* - (A^* - B^*)$ est donc mesurable et par suite l'ensemble $B^* = A^* \,.\, B^* + (B^* - A^*)$ est aussi mesurable.

Lemme 5. Si A est un ensemble mesurable et que pour tout point de A

(1) $$k_A(\alpha, t) = 1,$$

alors

(2) $$m\,\alpha(A) = \int_A |\,\alpha'(t)\,|\, dt.$$

Démonstration. Supposons que les prémisses du lemme sont verifiées. $\alpha(t)$ est monotone au sens strict sur chacun des ensembles P_ν. Soit Δ_ν le plus petit intervalle fermé contenant P_ν. Soit

---

[1]) S. Banach. Sur une classe de fonctions continues. Th. 1, p. 167 Fund. Math. T. VIII.

$\beta_\nu(t)$ une fonction continue dans Δ_ν, identique à $\alpha(t)$ dans P_ν et linéaire dans chaque intervalle contigu de P_ν. Elle est absolument continue[1]) et monotone au sens strict dans Δ_ν. On a presque partout dans P_ν (à l'exception éventuelle des extrêmités des intervalles contigus de P_ν) $\beta'_\nu(t) = \alpha'(t)$. On a donc[2])

$$(3) \qquad m\beta_\nu(AP_\nu) = m\,\alpha(AP_\nu) = \int\limits_{AP_\nu} |\beta'_\nu(t)|\,dt = \int\limits_{AP_\nu} |\alpha'(t)|\,dt.$$

Les ensembles AP_ν sont disjoints, il en est donc ainsi des $\alpha(AP_\nu)$ en vertu de (1). On a $\alpha(A) = \Sigma\alpha(AP_\nu)$. Ceci étant, il est clair que (3) implique (2).

Lemme 6. Soit A une partie mesurable de P et soit n un nombre naturel. Désignons par A_n la classe des t pour lesquels $k_A(\alpha, t) = n$. Ceci étant on a

a) $\alpha(A_n)\,.\,\alpha(A_m) = 0$ lorsque $m \neq n$,

b) $A = \sum\limits_{\nu/1}^{\infty} A_\nu$,

c) A_n est mesurable,

d) $m\,\alpha(A_n) = \frac{1}{n}\int\limits_{A_n} |\alpha'(t)|\,dt$.

Démonstration. En remontant aux hypothèses faites sur $\alpha(t)$, on voit que seulement c et d ne sont pas évidents.

Désignons par B_n la classe des points appartenant exactement à n ensembles $\alpha(AP_\nu)$. Les ensembles AP_ν et par conséquent (cf. lemme 2) les ensembles $\alpha(AP_\nu)$ étant mesurables, B_n est mesurable[3]). $\alpha^{-1}(B_n)$ est aussi mesurable (lemme 3). $\alpha(t)$ étant monotone au sens strict sur chacun des ensembles P_ν et les P_ν étant disjoints on a $A_n = \alpha^{-1}(B_n)$. A_n est donc mesurable.

L'égalité d) est juste pour $n = 1$ (lemme 5). Supposons qu'elle est juste pour n et en visageons le cas de $n+1$. On a (cf. définition de A^*, § 6)

$$A_{n+1} = (A_{n+1} - A^*_{n+1}) + A^*_{n+1}$$

$$(1) \qquad \alpha(A_{n+1}) = \alpha(A^*_{n+1}) = \alpha(A_{n+1} - A^*_{n+1}).$$

---

[1]) S. Banach. Sur les lignes rectifiables l. c.

[2]) C'est presque immédiat. cf. p. e. T. Ważewski, Kontinua prostowalne etc. lemme 5, p. 15. Dodatek do Rocznika Pol. Tow. Mat. T. V. 1927.

[3]) Ceci découle facilement d'un raisonnement convenablement modifié de W. Groß (Über das Flächenmaß von Punktmengen, Monatshefte f. Mathem. u. Physik, p. 175, T. XXIX, 1918).

A_{n+1}^* étant mesurable (lemme 4), on a selon le lemme 5

(2) $$m\,\alpha(A_{n+1}^*) = \int_{A_{n+1}^*} |\,\alpha'(t)\,|\,dt.$$

Pour tout t de l'ensemble mesurable $A_{n+1} - A_{n+1}^* = G$ on a $k_G(\alpha, t) = n$ d'où

(3) $$m\,\alpha(G) = \frac{1}{n}\int_{G} |\,\alpha'(t)\,|\,dt.$$

De (1), (2) et (3) il s'ensuit

$$m\,\alpha(A_{n+1}) = \frac{1}{n+1}\int_{A_{n+1}} |\,\alpha'(t)\,|\,dt.$$

Démonstration du théorème 1. Gardons les notations du lemme précédent. Nous avons

(1) $$m\,\alpha(A_n) = \frac{1}{n}\int_{A_n} |\,\alpha'(t)\,|\,dt = \int_{A_n} \frac{|\,\alpha'(t)\,|}{k_A(\alpha, t)}\,dt.$$

On a $A = \Sigma A_n$, car $k_P(\alpha, t) < \infty$. En vertu des propriétés a) et b) du lemme précédent il s'ensuit de (1) que

$$m\,\alpha(A) = \int_{A} \frac{|\,\alpha'(t)\,|}{k_A(\alpha, t)}\,dt \quad \text{c. q. f. d.}$$

Transformations absolument continues.

§ 8. Nous désignons, dans ce paragraphe, par $G(t) = \{g_1(t), \ldots g_n(t)\}$ une transformation définie et absolument continue dans un intervalle fermé et borné Δ. Nous désignons par Δ_z la classe des t pour lesquels $|\,G'(t)\,| = 0$. (Cf. les notations du § 1).

Remarque 1. Soit D une portion de l'espace contenant $G(\Delta)$ (cf. § 1) dans son intérieur. Soient $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ n fonction possédant dans D les dérivées partielles de premier ordre continues. Soit $h_i(t) = f_i(g_1(t), \ldots, g_n(t))$.

Ceci étant la transformation

$$H(t) = \{h_1(t), \ldots, h_n(t)\}$$

est définie et absolument continue dans Δ. Pour le démontrer, il suffit de remarquer que les fonctions $h_i(t)$ sont absolument continues dans Δ.

Remarque 2. $|G'(t)|$ est un invariant relativement à toutes les transformations cartésiennes de l'espace à n dimensions.

C'est immédiat.

Définition 1. Nous appelons une partie A (mesurable ou non) de Δ exceptionnelle (par rapport à $G(t)$) si, presque partout dans A, on a $|G'(t)| = 0$ c.-à.-d., si on a $m(A - \Delta_s) = 0$.

Nous appellons une partie A (mesurable ou non) de Δ régulière (par rapport à $G(t)$), si, presque partout dans A, on a $|G'(t)| \neq 0$, c.-à-d. si $m(A\Delta_s) = 0$.

Remarque 3. Les parties des ensembles exceptionnels (réguliers) sont exceptionnelles (régulières).

La somme et le produit d'un nombre fini ou d'une quantité dénombrable d'ensembles exceptionnels (réguliers) sont exceptionnels (réguliers).

Remarque 4. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie A de Δ soit de mesure nulle est qu'elle soit à la fois régulière et exceptionnelle (cf. remarque du § 1).

Définition 2. Nous appelons une partie B de l'espace à n dimensions ensemble à projection nulle, lorsque B se projette sur toute droite de cet espace suivant un ensemble de mesure nulle.

Remarque 5. Les parties, les sommes (dénombrables) et les produits des ensembles à projection nulle sont à projection nulle.

Theorème 1. Soit $A \subset \Delta$. La condition nécessaire et suffisante pour que $G(A)$ (cf. § 1) soit à projection nulle (cf. déf. 2) est que A soit exceptionnel (cf. def. 1) c.-à-d. que $m(A - \Delta_s) = 0$.

Démonstration. Désignons par $x_1, \ldots, x_n$ le système d'axes rectangulaires auxquels est rapporté notre espace à n dimensions.

Supposons que $G(A)$ est à projection nulle. On a: $mg_i(A) = 0$ $(i \mid 1, \ldots, n)$, car $g_i(A)$ est la projection de $G(A)$ sur l'axe x_i. Suivant le corollaire du § 5 on a presque partout dans A: $g_i'(t) = 0$ $(i \mid 1, \ldots, n)$ et par suite $|G'(t)| = 0$, ce qui prouve que A est un ensemble exceptionnel.

Supposons, en second lieu, que A est un ensemble exceptionnel et que d est une droite quelconque. Il s'agit de prouver que la projection de $G(A)$ sur d est de mesure nulle. On a presque partout dans A: $|G'(t)| = 0$.

Soumettons l'espace à n dimensions à une transformation cartésienne aux axes nouveaux $y_1, \ldots, y_n$ de façon que d coïncide avec l'axe y_1. La transformation $G(t)$ passe alors en une transformation absolument continue (cf. remarque 1) $H(t) = \{h_1(t), \dots, h_n(t)\}$.

Suivant la remarque 2, on a presque partout dans A: $|H(t)| = |G'(t)| = 0$ et à plus forte raison on a presque partout dans A: $h_1'(t) = 0$. La projection en question $h_1(A)$ est donc de mesure nulle (cf. § 5 corollaire).

Théorème 2. Soit L un arc simple rectifiable et $F(s)$ une représentation normale de L (§ 2) définie dans un intervalle D. Soit B une partie de L.

La condition nécessaire et suffisante pour que la longueur de B (relative à L et $F(s)$ cf. § 2) soit nulle est que B soit à projection nulle (cf. déf. 2).

Démonstration. Désignons par D_z la classe des s où $|F'(s)| = 0$. On a (cf. § 2)

$$(1) \qquad m D_z = 0.$$

Posons $A = F^{-1}(B)$. On a $B = F(A)$. Suivant le théorème précédent la condition nécessaire et suffisante pour que B soit à projection nulle est que A soit exceptionnel, c.-à-d. que l'on ait $m(A - D_z) = 0$, ce qui selon (1), revient à ce que A soit de mesure nulle, c.-à-d. que B soit de longueur (relative à L et $F(s)$) nulle (cf. § 2).

Théorème 3. Soit Δ_∞ la classe des t pour lesquels $k_\Delta(t) = \infty$ (cf. § 1). Δ_∞ est un ensemble exceptionnel.

Désignons, en effet, par Δ_e la classe des t où $|G'(t)|$ n'existe pas on n'est pas fini. Δ_e est exceptionnel (cf. Rem. 4 et § 1, Remarque).

Il suffit de démontrer (cf. Remarque 5 et théorème précédent) que

$$(1) \qquad G(\Delta_\infty) \subset G(\Delta_e) + G(\Delta_z),$$

car, selon le théorème précédent, le second membre de cette inclusion est à projection nulle.

Pour établir (1) il suffit de démontrer que

$$(2) \qquad p \,\varepsilon\, G(\Delta_\infty) - G(\Delta_e)$$

implique

$$(3) \qquad p \,\varepsilon\, G(\Delta_z).$$

Supposons que la relation (2) est vraie. La classe des solutions en t de l'équation $p = G(t)$ est fermée et infinie. Soit t_0 un point d'accumulation de cette classe et $\{t_\mu\}$ une suite de points pour lesquels

$$\lim t_\mu = t_0,\ t_\mu \neq t_0,\ G(t_\mu) = G(t_0) = p. \tag{4}$$

D'après (2) et (4) t_0 n'appartient pas à Δ_s donc $\sqrt{\Sigma g'_\nu(t_0)^2} = |G'(t_0)|$ existe. Selon (4)

$$\frac{g_i(t_\mu) - g_i(t_0)}{t_\mu - t_0} = 0$$

donc à la limite $g'_i(t_0) = 0$ $(i \mid 1, \ldots n)$ d'où $|G'(t_0)| = 0$. Par consequent $p = G(t_0)\ \varepsilon\, G(\Delta_s)$ c. q. f. d.

Corollaire. 1. Soit A_∞ la partie d'un ensemble A (mesurable on non) pour les points de laquelle on a $k_A(t) = \infty$. A_∞ est un ensemble exceptionnel.

Pour le prouver, il suffit de remarquer que $A_\infty \subset \Delta_\infty$ (cf. remarque 3).

Lemme I. Gardons les hypothèses de la Remarque 1 relativement à $H(t)$.

Si $G(A)$ est à projection nulle, $H(A)$ l'est aussi.

Démonstration. Supposons que $G(A)$ est à projection nulle. A est exceptionnel (relativement à $G(t)$) (cf. Th. 1). A est aussi exceptionnel relativement à $H(t)$, car $|H'(t)|$ est évidemment nul lorsque $|G'(t)|$ l'est. $H(t)$ étant une transformation absolument continue (cf. Rem. 1) $H(A)$ est à projection nulle en vertu du théorème 1.

Problème de mesurabilité des images inverses par l'intermédiaire des transformations absolument continues. Application aux arcs rectifiables.

§ 9. **Théorème I.** Soient $G(t)$ et $H(u)$ deux transformations définies et absolument continues respectivement dans les intervalles fermés et bornés Δ et Θ. Soient Δ_s et Θ_s les classes des points t et u où on a respectivement $|G'(t)| = 0$, $|H'(t)| = 0$. Soit B une partie de $G(\Delta)$ et $H(\Theta)$.

Ceci étant les ensembles (cf. § 1).

$$G^{-1}(B) - \Delta_s,\ H^{-1}(B) - \Theta_s$$

ne peuvent être mesurables qu'à la fois.

Démonstration. Supposons par exemple que l'ensemble $A = G^{-1}(B) - \Delta_s$ est mesurable. Il existe une suite d'ensembles fermés $\{F_\nu\}$ et un ensemble de mesure nulle R, tels que

$$A = \sum_{\nu/1}^{\infty} F_\nu + R.$$

On a $B \subset G(A) + G(\Delta_s)$ et comme

$$G(A) = G(\Sigma F_\nu) + G(R) \quad \text{donc} \quad B \subset G(\Sigma F_\nu) + G(R) + G(\Delta_s)$$

d'où il s'ensuit que

$$B - G(\Sigma F_\nu) \subset G(R) + G(\Delta_s).$$

$G(R) + G(\Delta_s)$ étant à projection nulle (cf. § 8, théorème 1, remarques 4 et 5), l'ensemble $C = B - G(\Sigma F_\nu)$ l'est aussi (§ 8 rem. 5) et par conséquent (cf. § 8, th. 1)

(1) $$m(H^{-1}(C) - \Theta_s) = 0.$$

On a

$$B = C + \Sigma G(F_\nu),$$
$$H^{-1}(B) = H^{-1}(C) + \Sigma H^{-1}(G(F_\nu)),$$
$$H^{-1}(B) - \Theta_s = H^{-1}(C) - \Theta_s + \Sigma(H^{-1}(G(F_\nu)) - \Theta_s).$$

Comme les ensembles $H^{-1}(G(F_\nu))$ sont fermés et Θ_s est mesurable (§ 1, remarque) donc en raison de (1) $H^{-1}(B) - \Theta_s$ est mesurable, c. q. f. d.

Théorème 2. Gardons relativement à $G(t)$ les hypothèses du théorème précédent et soit A une partie mesurable de Δ.

$G^{-1}(G(A)) - \Delta_s$ est mesurable.

Démonstration. Il existe une suite d'ensembles fermés $\{F_\nu\}$ et un ensemble de mesure nulle R, tels que $A = \Sigma F_\nu + R$. On a

$$G^{-1}(G(A)) - \Delta_s = \Sigma G^{-1}(G(F_\nu)) - \Delta_s + (G^{-1}(G(R)) - \Delta_s.$$

Les ensembles $G^{-1}(G(F_\nu))$ étant fermés et Δ_s étant mesurable (§ 1, Rem.) il suffit de prouver que

(1) $$m(G^{-1}(G(R)) - \Delta_s) = 0.$$

R étant de mesure nulle, $G(R)$ est à projection nulle (§ 8, Th. 1) $G^{-1}(G(R))$ est donc exceptionnel, c.-à-d. (1) a lieu.

Théorème 3. Soit $G(t)$ une transformation définie et absolument continue dans un intervalle fermé et borné Δ. Désignons par Δ_s la classe des t où $|G'(t)| = 0$.

Soit $F(s)$ une représentation normale d'un arc simple rectifiable L.

Soit B une partie de L et de $G(\Delta)$.

La condition nécessaire et suffisante pour que B soit rectifiable au sens classique relativement à L et $F(s)$ est que $G^{-1}(B) - \Delta_0$ soit mesurable (cf. les notations et définitions des §§ 1 et 2).

Démonstration. La condition nécessaire et suffisante pour que B soit rectifiable au sens ci-dessus est que $F^{-1}(B)$ soit mesurable (cf. § 2).

Désignons par Θ_0 la classe des s où $|F'(s)| = 0$. On a (cf. § 2) $m\Theta_0 = 0$. Notre condition revient donc à ce que $F^{-1}(B) - \Theta_0$ soit mesurable.

Or, $F(s)$ étant une transformation absolument continue, les ensembles $F^{-1}(B) - \Theta_0$ et $G^{-1}(B) - \Delta_0$ ne peuvent être mesurables qu'à la fois (cf. Th. 1), ce qui termine la démonstration.

Ordre de multiplicite.

§ 10. Théorème I. Soit $G(t)$ une transformation définie et absolument continue dans un intervalle fermé et borné Δ. Soit Δ_0 la classe des points où $|G'(t)| = 0$ (cf. § 1).

Désignons par $k_A(t)$ l'ordre de multiplicité de t relatif à A et $G(t)$ (cf. § 1).

Si $A \subset B \subset \Delta$ et que

(1) A est un ensemble regulier c.-à-d. $m(A\Delta_0) = 0$,

(2) $B - A$ est un ensemble exceptionnel c.-à-d. $m(B - A - \Delta_0) = 0$,

alors on a presque partout dans A

$$k_A(t) = k_B(t). \tag{3}$$

Démonstration. Désignons par A_1 la classe des points de A pour lesquels (3) n'a pas lieu. Il faut prouver que A_1 est de mesure nulle et pour cela il suffit de démontrer que A_1 est à la fois régulier et exceptionnel (§ 8, Rem. 4). Or, A_1 est régulier comme une partie de l'ensemble régulier A (§ 8, Rem. 3).

J'affirme que

$$G(A_1) \subset G(B - A). \tag{4}$$

Soit en effet t_0 un point de A_1. Selon la définition de A_1 il existe un t_1 pour lequel

$$G(t_1) = G(t_0),\ t_1 \varepsilon B - A.$$

De là: $G(t_0) = G(t_1) \varepsilon\, G(B - A)$ ce qui prouve (4). D'après (2) et (4) $G(A_1)$ est à projection nulle (§ 8, Th. 1 et Rem. 5) et par conséquent (§ 8, Th. 1) A_1 est un ensemble exceptionnel.

Corollaire. Gardons les hypothèses du théorème précédent relatives à $G(t)$.

Si $A \subset \Delta$, on a presque partout dans $A - \Delta_s$

$$k_{A-\Delta_s}(t) = k_A(t).$$

Il suffit de remarquer que $A - \Delta_s$ est régulier et que $A\Delta_s$ est exceptionnel (cf. § 8, déf. 1) pour ramener ce corollaire au théorème précédent.

Lemme. Maintenons les hypothèses du théorème 1 relativement à $G(t)$. Soit

(1) $$B \subset C \subset G(\Delta), \quad A \subset \Delta.$$

On a partout dans $AG^{-1}(B)$

(2) $$k_{AG^{-1}(B)}(t) = k_{AG^{-1}(C)}(t),$$

(3) $$k_{G^{-1}(B)}(t) = k_{G^{-1}(C)}(t).$$

Démonstration. Il suffit de démontrer (cf. la définition de $k_A(t)$ § 1) que pour tout t_0 appartenant à $AG^{-1}(B)$ les deux conditions en t

(4) $$t \varepsilon AG^{-1}(B),\ G(t) = G(t_0),$$

(5) $$t \varepsilon AG^{-1}(C),\ G(t) = G(t_0),$$

sont équivalentes.

Supposons que

(6) $$t_0 \varepsilon AG^{-1}(B).$$

(4) implique (5) en vertu de (1).

Supposons que (5) a lieu. On a selon (5)

(7) $$t \varepsilon A.$$

D'après (5), (6) et (1)

$$G(t) = G(t_0) \varepsilon B$$

d'où il résulte que

$$t \varepsilon G^{-1}(B),$$

ce qui rapproché à (7) donne: $t \varepsilon A \,.\, G^{-1}(B)$. (5) implique donc (4).

La relation (3) résulte de la relation (2) lorsqu'on pose $A = \Delta$.

Un lemme sur les fonctions implicites.

§ 11. **Lemme.** Soient

1º) $G(t)=\{g_1(t),\dots, g_n(t)\}$ une transformation définie et absolument continue dans un intervalle fermé et borné Δ.

2º) $F(s)=\{f_1(s),\dots, f_n(s)\}$ une représentation normale d'un arc rectifiable L (cf. § 1).

Ceci étant on a:

I. La classe T des points t pour lesquels $G(t)\,\varepsilon\, L$ est fermée.

II. Il existe une fonction unique $\alpha(t)$, telle que les équations

$$s=\alpha(t),$$
$$G(t)=F(s),$$

sont équivalentes.

III. La fonction $\alpha(t)$ est définie et continue dans T.

IV. A étant une partie de T, on a partout dans A

$$k_A(\alpha, t)=k_A(t)$$

($k_A(\alpha, t)$ est l'ordre de multiplicité de t relatif à A et $\alpha(t)$; $k_A(t)$ l'ordre relatif à A et $G(t)$).

V. Il existe une suite d'ensembles parfaits et disjoints P_ν qui sont contenus dans T, tels qu'en posant $P=\Sigma P_\nu$ on a

α) $\alpha(t)$ est une fonction monotone au sens strict dans chacun des ensembles P_ν.

β) P est un ensemble régulier et $T-P$ un ensemble exceptionnel relativement à $G(t)$ (cf. § 8, déf. 1).

γ) On a partout dans P: $k_P(\alpha, t)<\infty$.

δ) Si $t\,\varepsilon\, P$, alors $0<|\alpha'(t)|=|G'(t)|<+\infty$.

Démonstration. Supposons que les prémisses du lemme sont vraies.

I. est vrai, car $G(t)$ est une transformation continue et L est un ensemble fermé.

Ad II et III. Comme l'équation $p=F(s)$ constitue une homéomorphie entre L et un intervalle, il est clair qu'il existe une seule fonction $\alpha(t)$ en question et qu'elle est définie et continue dans T.

La proposition IV est une conséquence immédiate de II. Nous allons démontrer V.

Désignons par

$$\Delta_e,\ \Delta_s,\ \Delta_\infty$$

les classes des t où respectivement $|G'(t)|$ n'existe pas, est nul et où $k_{\Delta}(t) = \infty$.

La classe

$$\Delta_e + \Delta_s + \Delta_\infty$$

est exceptionnelle (cf. § 1, Rem.; § 8, Déf. 1, Th. 3, Rém. 3). Désignons par

$$S_e$$

la classe des s où l'égalite $|F'(s)| = 1$ n'a pas lieu et désignons par

$$\Sigma_e$$

la classe des t pour lesquels $G(t) \varepsilon F(S_e)$.

On a $G(\Sigma_e) \subset F(S_e)$. La représentation $F(s)$ étant absolument continue et S_e étant de mesure nulle (cf. § 2), $F(S_e)$ et, par conséquent, $G(\Sigma_e)$ est à projection nulle (§ 8, Th. 1 et Rem. 4). Σ_e est donc exceptionnel (§ 8, Th. 1).

L'ensemble

$$\Gamma = \Delta_e + \Delta_s + \Delta_\infty + \Sigma_e$$

est exceptionnel (§ 8, Rem. 3), c. à-d. $m(\Gamma - \Delta_s) = 0$. Γ est un ensemble mesurable, car (cf. § 1. Rem.)

$$\Gamma = \Delta_s + (\Gamma - \Delta_s).$$

$T - F$ est régulier, car il est disjoint de Δ_s (cf. § 8, Déf. 1). $T - \Gamma$ étant mesurable (cf. I), il existe une partie Π de $T - \Gamma$ dense en elle-même et ayant la même mesure que $T - \Gamma$ (p. ex. une somme dénombrable d'ensembles parfaits). On a

(1) $$m(T - \Gamma - \Pi) = 0.$$

Je vais démontrer que β, γ, δ ont lieu lorsqu'on y remplace P par Π.

Π est un ensemble régulier parce qu'il fait partie de l'ensemble régulier $T - \Gamma$.

$T - \Pi$ est un ensemble exceptionnel puisqu'il est somme de deux ensembles exceptionnels: $T - \Pi = (T - \Pi)\Gamma + (T - \Pi - \Gamma)$. β est donc vérifié.

La propriété γ a aussi lieu, car Π est disjoint de Γ et à plus forte raison de Δ_∞.

Pour démontrer la propriété δ supposons que

(2) $$t_0 \varepsilon \Pi.$$

Π étant disjoint de $\Delta_e + \Delta_*$, on a

(3) $$+\infty > |G'(t_0)| \neq 0.$$

Soit $\{t_\mu\}$ une suite quelconque de points pour laquelle

(4) $$t_\mu \varepsilon T,\ t_\mu \neq t_0,\ \lim t_\mu = t_0.$$

(Une telle suite existe parce que Π est un ensemble dense en lui-même et non vide en raison de l'hypothèse (2)).

De (3) il s'ensuit qu'à partir d'un μ assez grand

(5) $$G(t_\mu) \neq G(t_0).$$

Nous pouvons supposer que c'est le cas pour tous les μ. Posons

(6) $$s_0 = \alpha(t_0),\ s_\mu = \alpha(t_\mu).$$

On a (cf. II)

(7) $$F(s_0) = G(t_0),\ F(s_\mu) = G(t_\mu)$$

et en raison de la continuité de $\alpha(t)$

(8) $$\lim_{\mu/\infty} s_\mu = s_0.$$

On a suivant (5) et (7)

(9) $$s_\mu \neq s_0.$$

Π étant disjoint de Σ_e, s_0 n'appartient pas à S_e et de là on obtient

(10) $$|F'(s_0)| = 1.$$

Pour un certain i on a par conséquent

(11) $$f'_i(s_0) \neq 0.$$

Nous avons pour ce i (cf. (4), (7), (9), (6))

$$\frac{g_i(t_\mu) - g_i(t_0)}{t_\mu - t_0} = \frac{f_i(s_\mu) - f_i(s_0)}{s_\mu - s_0} \cdot \frac{\alpha(t_\mu) - \alpha(t_0)}{t_\mu - t_0}.$$

Comme t_μ est une suite quelconque satisfaisant à (4) et comme $\alpha(t)$ n'est pas défini en dehors de T, on obtient de l'égalité précédente (cf. (3), (4), (8), (11))

$$\alpha'(t_0) = \frac{g'_i(t_0)}{f'_i(s_0)}.$$

On a pour tout ν et pour tout t de T (cf. II)

$$f_\nu(\alpha(t)) = g_\nu(t).$$

De là on obtient en vertu de l'existence de $\alpha'(t_0)$, d'après (3) et (10) et en raison de ce que t_0 est point d'accumulation de T les relations suivantes:

$$\alpha'(t_0)f'_\nu(s_0)=g'_\nu(t_0) \qquad (\nu/1,\ldots,n),$$

$$[\alpha'(t_0)]^2=\Sigma[g'_\nu(t_0)]^2\neq 0,$$

$$0<|\alpha'(t_0)|=|G'(t_0)|<+\infty, \text{ lorsque } t_0\,\varepsilon\,\Pi. \tag{12}$$

La propriété δ est donc démontrée relativement à Π.

Suivant un théorème de M. Kintchine[1]) il résulte de la relation (12) qu'il existe une suite d'ensembles P_ν contenus dant Π, parfaits et disjoints et tels que

1°) $m(\Pi-\Sigma P_\nu)=0$,

2°) $\alpha(t)$ est monotone au sens strict sur chacun des ensembles P_ν.

On vérifie sans peine qu'une telle suite P_ν satisfait aux conditions énoncées dans V.

Application à la longueur d'un ensemble au sens classique; l'indépendance de la longueur classique de la représentation paramétrique.

§ 12. Théorème I. Soient 1°) $G(t)=\{g_1(t),\ldots,g_n(t)\}$ une transformation définie et absolument continue dans un intervalle fermé et borné Δ (cf. § 1).

2°) $F(s)=\{f_1(s),\ldots,f_n(s)\}$ une représentation normale d'un arc rectifiable L (cf. § 2).

Désignons par T la classe des t pour lesquels $G(t)$ appartient à L.

A étant une partie mesurable de T, la classe $G(A)$ est:

α) rectifiable au sens classique relativement à L et $F(s)$ (cf. § 2),

β) la longueur au sens classique de $G(A)$ (relative à L et $F(s)$) est égale à l'integrale

$$\int_A \frac{|G'(t)|}{k_A(t)}\,dt \tag{1}$$

(cf. les notations du § 1).

---

[1]) Ce théorème constitue un excellent instrument pour démontrer le théorème T_1 du § 3 relativement à la définition de Janzen et à celle de Peano-Gross.

Démonstration. Selon la définition de la longueur au sens classique il s'agit de démontrer que $F^{-1}(G(A))$ est mesurable et que sa mesure est égale à (1).

Revenons aux notations du § précédent. On a (cf. § 11, V)

$$A = A.P + (A - P)$$

d'où en raison de II, § 11

$$\alpha(A) = F^{-1}(G(A)) = F^{-1}(G(AP)) + F^{-1}(G(A - P)) =$$
$$= \alpha(AP) + \alpha(A - P).$$

$A - P$ étant exceptionnel (V β, § 11), $G(A - P)$ est à projection nulle (§ 8, Th. 1) et par conséquent (§ 8, Th. 2) $F^{-1}(G(A - P))$ a une longueur (relative à L et $F(s)$) nulle c.-à-d.

(2) $$m\alpha(A - P) = 0.$$

A étant mesurable, AP l'est aussi et on a (cf. § 11, IV, V et § 7, Th. 1)

(3) $$m\alpha(AP) = \int\limits_{AP} \frac{|\alpha'(t)|}{k_{AP}(\alpha, t)} dt = \int\limits_{AP} \frac{|G'(t)|}{k_{AP}(t)} dt.$$

Comme $A - P$ est exceptionnel et AP est régulier (cf. § 11, V), il apparaît selon le théor. 1 du § 10 qu'on a presque partout dans AP

$$k_{AP}(t) = k_A(t)$$

et par suite d'après (2) et (3)

$$m\alpha(A) = \int\limits_{AP} \frac{|G'(t)|}{k_A(t)} dt = \int\limits_{A} \frac{|G'(t)|}{k_A(t)} dt, \text{ c. q. f. d.}$$

Corollaire. Si B est une partie de deux arcs rectifiables L et L_1 donnés respéctivement par deux représentations normales $F(s)$ et $F_1(t)$, alors

1^0) B peut être rectifiable au sens classique relativement à L et $F(s)$ d'une part et relativement à L_1 et $F_1(t)$ de l'autre — seulement simultanément.

2^0) Si B est rectifiable au sens classique, sa longueur au sens classique relative à L et $F(s)$ est égale à sa longueur relative à L_1 et $F_1(t)$.

Autrement: La propriété d'être rectifiable au sens classique et la valeur de la longueur (au sens classique) d'un ensemble B

ne dépendent ni de l'arc rectifiable dont B est une partie ni de sa représentation normale.

On ramène ce corollaire au théor. 3 du § 9 et au théorème précédent lorsqu'on y pose $F_1(t)$ au lieu de $G(t)$; $F_1^{-1}(B)$ au lieu de A et si l'on observe que 1°) $k_A(t) = 1$ partout dans A, que 2°) $|G'(t)| = 1$ presque partout dans A et que 3°) notre corollaire est symétrique par rapport à L et L_1.

Théorème 2. Soit $G(t)$ une fonction définie et absolument continue dans un intervalle fermé et borné et soit Δ_s la classe des t où $|G'(t)| = 0$ (cf. § 1).

Soit B un ensemble rectifiable au sens classique et contenu dans $G(\Delta)$.

Ceci étant la longueur de B (au sens classique) est égale à

$$(1)\qquad \int\limits_{G^{-1}(B)-\Delta_s} \frac{|G'(t)|}{k_{G^{-1}(B)-\Delta_s}(t)}\, dt = \int\limits_{G^{-1}(B)-\Delta_s} \frac{|G'(t)|}{k_{G^{-1}(B)}(t)}\, dt.$$

Démonstration. On a

$$B = G(G^{-1}(B) - \Delta_s) + G(G^{-1}(B) \,.\, \Delta_s).$$

$G(G^{-1}(B) \,.\, \Delta_s)$ est à projection nulle (§ 8. Th. 1) donc de longueur (au sens classique) nulle (§ 8. Th. 2). La longueur de B (au sens classique) est donc égale à la première des intégrales (1) (cf. Th. 1). La seconde intégrale est égale à la première, car presque partout dans $G^{-1}(B) - \Delta_s$ on a (cf. § 10, Corollaire)

$$k_{G^{-1}(B)-\Delta_s}(t) = k_{G^{-1}(B)}(t).$$

Application aux fonctions absolument continues.

§ 13. Désignons par $g(t)$ une fonction définie et absolument continue dans un intervalle borné et fermé Δ. Soit Δ_s la classe des t où $g'(t) = 0$. Désignons par $k_A(t)$ l'ordre de multiplicité de t relatif à A et $g(t)$ (cf. § 1). Ceci étant nous avons les trois théorèmes suivants:

Théorème 1. Si A est une partie mesurable de Δ, alors (cf. les notations du § 1)

1°) $g(A)$ est mesurable

2°) $mg(A) = \int\limits_A \frac{|g'(t)|}{k_A(t)}\, dt.$

Théorème 2. Soit B une partie de $g(\Delta)$.

La condition nécessaire et suffisante pour que B soit mesurable est que

$$g^{-1}(B)-\Delta,$$

soit mesurable.

Théorème 3. Soit B une partie mesurable $G(\Delta)$. On a

$$mB=\int\limits_{g^{-1}(B)-\Delta_z}\frac{|g'(t)|}{k_{g^{-1}(B)-\Delta_z}(t)}\,dt=\int\limits_{g^{-1}(B)-\Delta_z}\frac{|g'(t)|}{k_{g^{-1}(B)}(t)}\,dt.$$

Démonstration. $g(\Delta)$ est identique à un intervalle $[a,b]=L$. L est un arc simple rectifiable situé dans l'espace à une dimension. $f(s)=s$ est une représentation normale de L. Il suffit de poser $T=\Delta$ pour ramener le théorème 1 au théorème 1 du § 12, car la longueur coïncide dans ce cas avec la mesure.

On ramène d'une façon analogue le théorème 2 au théorème 3 du § 9 et le théorème 3 au théorème 2 du § 12.

Résultats antérieurs.

§ 14. J'ai développé la théorie des continus rectifiables dans un mémoire antérieur[1]).

Voilà deux des théorèmes que j'y ai démontrés et que j'utiliserai dans la suite.

Théorème 1[2]). La condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu K soit rectifiable (= ait une longueur finie) relativement à une définition D de la longueur, définition réalisant les théorèmes T_1-T_7 du § 3, est qu'il existe une transformation $G(t)$ définie et absolument continue dans un intervalle borné et fermé Δ telle qu'on ait

$$K=G(\Delta).$$

Théorème 2[3]). Soit $G(t)$ une transformation définie et absolument continue dans un intervalle fermé et borné Δ.

Il existe une suite $\{L_\nu\}$ jouissant des propriétés suivantes:

---

[1]) T. Ważewski. Kontinua prostowalne w związku z funkcjami i odwzorowaniami absolutnie ciągłemi. Dodatek do Rocznika Pol. Tow. Mat. T. 5, 1927.

[2]) l. c. § 24, p. 46.

[3]) l. c. § 29, p. 49.

1°) $L_\nu \subset G(\varDelta)$ $(\nu/1, 2, \ldots)$,

2°) L_ν est un arc simple ouvert (sans extrémités) rectifiable au sens classique,

3°) $L_\mu \cdot L_\nu = 0$ lorsque $\mu \neq \nu$.

4°) En désignant par l_ν la longueur au sens classique de L_ν on a

$$\sum_{\nu/1}^{\infty} l_\nu < +\infty,$$

5°) La classe $R = G(\varDelta) - \Sigma L_\nu$ est à projection nulle (cf. § 8, Déf. 2)[1]).

On a en plus

$6\alpha)$ $\varLambda_\nu = G^{-1}(L_\nu)$ est un ensemble mesurable (car $G(t)$ est continue et L_ν est une somme dénombrable d'ensembles fermés).

$\beta)$ Si $\mu \neq \nu$, alors $\varLambda_\mu \neq \varLambda_\nu$, $G(\varLambda_\mu) \cdot G(\varLambda_\nu) = L_\mu \cdot L_\nu = 0$.

$\gamma)$ $\varDelta - \Sigma \varLambda_\nu$ est exceptionnel, $G(\varDelta - \Sigma \varLambda_\nu) = R$ est à projection nulle (cf. § 8, Déf. 1 et 2, Th. 1).

Calcul de la longueur généralisée. Compatibilité de différentes définitions de la longueur.

§ 15. (H). Nous désignons par $G(t)$ une transformation définie et absolument continue dans un intervalle fermé et borné $\varDelta$.

D étant une définition quelconque de la longueur, nous dirons, comme dans le § 3, que

B est rectifiable (D)

lorsque B est rectifiable (= a une longueur finie) relativement à la définition D.

Nous désignerons la longueur de B relative à la définition D par

$$\operatorname{long}_D B.$$

Nous n'envisagerons au cours de ce paragraphe que des définitions de la longueur qui réalisent les théorèmes $T_1 - T_7$ du § 3.

Nous désignerons par

$$\operatorname{long}_{cl} B$$

la longueur de B au sens classique.

Lemme 1. Soit B une partie de $G(\varDelta)$ (cf. § 1). La condition

---

[1]) Nous laissons de côté le cas banal où $G(\varDelta)$ se réduit à un point.

nécessaire et suffisante pour que B soit de longueur nulle relativement à une définition quelconque de la longueur (réalisant T_1—T_7 du § 3) est que B soit à projection nulle (cf. § 8, Déf. 2).

Démonstration. La condition en question est suffisante (cf. T_6, § 3).

Elle est nécessaire. Supposons, en effet, que

$$\text{long}_D B = 0.$$

On a (cf. § 14. Th. 2, 5⁰)

$$B = \Sigma BL_\nu + BR. \tag{1}$$

L_ν étant rectifiable au sens classique (§ 14, Th. 2, 2⁰), il est aussi rectifiable (D) (cf. § 3. T_1) et par conséquent BL_ν est rectifiable (D) (§ 3. T_7). On a (cf. T_2) $\text{long}_D(BL_\nu) \leq 0$. Mais la longueur de BL_ν ne peut pas être négative, car BL_ν renferme l'ensemble vide qui est de longueur nulle (cf. § 3, T_6 et T_2) donc

$$\text{long}_D(BL_\nu) = 0$$

et BL_ν étant situé sur l'arc L_ν rectifiable au sens classique, on a (§ 3, T_1)

$$\text{long}_{cl}(BL_\nu) = 0.$$

Cette égalité implique que les BL_ν sont à projection nulle (§ 8, Th. 2). BR est à projection nulle (§ 14, Th. 2, 5_0. § 8, Rem. 5).

B est ainsi, suivant (1), une somme dénombrable d'ensembles à projection nulle, il est donc (§ 8, Rem. 5) à projection nulle.

Lemme 2. Q et B étant contenus dans $G(\Delta)$ et Q étant à projection nulle, Q et B ne peuvent être rectifiables (D) qu'à la fois. S'ils sont rectifiables (D) on a

$$\text{long}_D B = \text{long}_D(B + Q).$$

Démonstration. On a (cf. le lemme précédent) $\text{long}_D Q = 0$ et par suite (§ 3, T_6) $\text{long}_D(Q - B) = 0$. Les ensembles B et $B + Q = B + (B - Q)$ ne peuvent donc être rectifiables (D) qu'à la fois et s'ils le sont, leurs longueurs sont égales (cf. § 3, T_5 et T_7).

Théorème 1. Soit A une partie mesurable de Δ (cf. (H)) et soit D une définition quelconque de la longueur réalisant les théorèmes T_1 — T_7 du § 3. Ceci étant on a (cf. § 1 et § 14, Th. 2).

1°) $0 \leq \int\limits_{A} \frac{|G'(t)|}{k_A(t)} dt \leqslant \Sigma l_\nu < +\infty$[1].

2°) $G(A)$ est rectifiable relativement à D.

3°) $\log_D G(A) = \int\limits_{A} \frac{|G'(t)|}{k_A(t)} dt.$

Démonstration. Gardons les notations du Th. 2, § 14. On a

$$A = \Sigma A \Lambda_\nu + A(\Delta - \Sigma \Lambda_\nu)$$

et (§ 12, Th. 1 et § 14, Th. 2)

$$\log_{cl} G(A\Lambda_\nu) = \int\limits_{A\Lambda_\nu} \frac{|G'(t)|}{k_{A\Lambda_\nu}(t)} dt \leq l_\nu.$$

Comme (cf. § 14, Th. 2)

$$\Lambda_\nu = G^{-1}(L_\nu) \subset \Sigma \Lambda_\nu = G^{-1}(\Sigma L_\nu),$$

on a donc partout dans $A\Lambda_\nu$ (cf. § 10, Lemme)

$$k_{A\Lambda_\nu}(t) = k_{A\Sigma\Lambda_\nu}(t)$$

et $A(\Delta - \Sigma\Lambda_\nu)$ étant un ensemble exceptionnel (cf. § 14, Th. 2, 6γ) on a, d'après le théorème 1 du § 10, presque partout dans $A\Sigma\Lambda_\nu$

$$k_{A\Sigma\Lambda_\nu}(t) = k_A(t),$$

donc presque partout dans $A\Lambda_\nu$ on a (cf. § 10, Lemme; § 14, Th. 2, 6α)

$$k_{A\Lambda_\nu}(t) = k_A(t).$$

On a par conséquent (cf. § 3, T_1)

$$\log_D G(A\Lambda_\nu) = \log_{cl} G(A\Lambda_\nu) = \int\limits_{A\Lambda_\nu} \frac{|G'(t)|}{k_A(t)} dt \leq l_\nu. \tag{1}$$

Les ensembles $A\Lambda_\nu$ d'une part et les ensembles $G(A\Lambda_\nu)$ de l'autre étant disjoints (§ 14, Th. 2, 6β) on a en vertu du théorème T_5 du § 3

$$\log_D G(A\Sigma\Lambda_\nu) = \int\limits_{A\Sigma\Lambda_\nu} \frac{|G'(t)|}{k_A(t)} dt \leq \Sigma l_\nu < +\infty.$$

---

[1]) On peut établir cette inégalité indépendamment de la définition D. Ceci résulte d'une analyse facile de la démonstration qui suit.

Or, $\text{long}_D(G(A(\varDelta - \Sigma \varLambda_\nu)) = 0$ (cf. § 14, Th. 2, 6γ; § 8, Th. 1 et § 15, Lem. 1). Par conséquent (cf. Lemme 2)

$$\text{long}_D G(A) = \text{long}_D G(A \Sigma \varLambda_\nu). \tag{2}$$

$|G'(t)|$ étant nul presque partout dans l'ensemble exceptionnel $A(\varDelta - \Sigma \varLambda_\nu)$ (cf. § 14, Th. 2, 6γ, § 8 Déf. 1), on a suivant (1) et (2)

$$0 \leq \text{long}_D G(A) = \int\limits_A \frac{|G'(t)|}{k_A(t)}\, dt \leq \Sigma l_\nu < +\infty, \text{ c. q. f. d.}$$

Théorème 2[1]. Soit $B \subset G(\varDelta)$ (cf. (H)). La condition nécessaire et suffisante pour que B soit rectifiable ($=$ ait une longueur finie) relativement à une définition quelconque D de la longueur, définition réalisant les théorèmes $T_1 - T_7$ du § 3, est que

$$G^{-1}(B) - \varDelta_z$$

soit mesurable (cf. les notations du § 1).

Si B est rectifiable au sens ci-dessus on a

$$\text{long}_D(B) = \int\limits_{G^{-1}(B) - \varDelta_z} \frac{|G'(t)|}{k_{G^{-1}(B)-\varDelta_z}(t)}\, dt = \int\limits_{G^{-1}(B) - \varDelta_z} \frac{|G'(t)|}{k_{G^{-1}(B)}(t)}\, dt. \tag{1}$$

Démonstration. Notre condition est nécessaire. Supposons en effet que B est rectifiable (D). BL_ν est rectifiable au sens classique (cf. § 14, Th. 2, 2°; § 3, T_1) et par conséquent (§ 9, Th. 3), $G^{-1}(BL_\nu) - \varDelta_z$ est mesurable.

RB est à projection nulle (§ 14, Th. 2, 5°; § 8, Rem. 5) donc $G^{-1}(BR) - \varDelta_z$ est de mesure nulle (§ 8, Th. 1). On a (§ 14, Th. 1, 1° et 5°)

$$B = \Sigma BL_\nu + R$$

et par conséquent

$$G^{-1}(B) - \varDelta_z = \Sigma(G^{-1}(BL_\nu) - \varDelta_z) + G^{-1}(BR) - \varDelta_z,$$

$G^{-1}(B) - \varDelta_z$ est donc mesurable.

Notre condition est suffisante. Supposons en effet que $G^{-1}(B) - \varDelta_z$ est mesurable. $G(G^{-1}(B) - \varDelta_z)$ est donc rectifiable (D) et on a (cf. Théorème 1)

$$\text{long}_D G(G^{-1}(B) - \varDelta_z) = \int\limits_{G^{-1}(B) - \varDelta_z} \frac{|G'(t)|}{k_{G^{-1}(B)-\varDelta_z}(t)}\, dt < +\infty. \tag{2}$$

---

[1]) Le présent théorème fait partie de ceux que j'ai présentés au cours du 1-er Congrès Polon. de Math. (Lwów, Septembre 1927). Le théorème reste vrai lorsqu'on remplace la définition D par celle de M. Caratheodory.

$G(G^{-1}(B) \,.\, \Delta_s)$ est à projection nulle (§ 8, Th. 1) et par suite (Lemme 1)

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{long}_D G(G^{-1}(B) \,.\, \Delta_s) = 0$$

(2) et (3) impliquent en vertu du lemme 2 que les deux premiers termes de (1) sont égaux. Le troisième terme de (1) est égal aux précédents en raison du corollaire du § 10.

Théorème 3. B étant une partie d'un continu K rectifiable (= possédant une longueur finie) relativement à une certaine définition de la longueur, définition réalisant les théorèmes $T_1 - T_7$ du § 3, toutes les définitions de la longueur qui réalisent ces théorèmes sont compatibles entre elles en ce qui concerne la rectifiabilité de B et la valeur de la longueur de B.

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent et du théorème 1, § 14.

Théorème 4. Soit P une portion de l'espace contenant $G(\Delta)$ dans son intérieur. Soient

$$\text{(1)} \qquad y_i = f_i(x_1, \ldots x_n), \ (i/1 \ldots, m)$$

m fonctions possédant partout dans P les dérivées partielles de premier ordre continues.

Si une partie B de $G(\Delta)$ est rectifiable au sens d'une certaine définition de la longueur réalisant les théorèmes $T_1 - T_7$ du § 3, l'ensemble correspondant à B par l'intermédiaire des équations (1) est rectifiable relativement à toute définition réalisant ces théorèmes.

Démonstration. L'ensemble $U = G^{-1}(B) - \Delta_s$ est mesurable (cf. Th. 2).

Soit $\{F_\nu\}$ une suite d'ensembles fermés contenus dans U et telle que

$$mR = m(U - \Sigma F_\nu) = 0.$$

On a $G^{-1}(B) = \Sigma F_\nu + R + G^{-1}(B) \,.\, \Delta_s$. L'ensemble $T = G^{-1}(B) \,.\, \Delta_s + R$ est exceptionnel (§ 8, Rem. 3 et 4). On a

$$B = G(\Sigma F_\nu) + G(T).$$

Soit $H(t)$ la transformation absolument continue analogue à celle qui a été introduite dans la remarque 1 du § 8. $H(\Delta)$ est un continu rectifiable (cf. la remarque citée et le théorème 1 du présent paragraphe). L'ensemble transformé de B est

$$\Sigma H(F_\nu) + H(T).$$

Le dernier terme de cette somme est à projection nulle (cf. § 8, Th. 1) donc de longueur (relative à D) nulle (cf. lemme 1). Les $H(F_\nu)$ étant fermés et contenus dans le continu rectifiable $H(\Delta)$, on en conclut facilement (cf. T_1 — T_7 du § 3) que l'ensemble transformé est rectifiable au sens en question.

Une définition analytique de la longueur généralisée.

§ 16. Définition D^*. Soit $G(t) = \{g_1(t), \dots, g_n(t)\}$ une transformation définie et absolument continue dans un intervalle borné et fermé Δ. Soit

$$\Delta_s$$

la classe des t où $|G'(t)| = 0$ et soit B une partie de $G(\Delta)$. (cf. les notations du § 1).

Nous appelons B rectifiable relativement à la définition D^* ($=$ rectifiable (D^*)) lorsque l'intégrale

$$(1) \qquad \int\limits_{G^{-1}(B)-\Delta_s} \frac{|G'(t)|}{k_{G^{-1}(B)}(t)}\, dt$$

existe et qu'elle est finie. Nous appelons l'intégrale (1) (lorsqu'elle existe) longueur de B relative à D^*. Nous la désignerons par

$$\text{long}^* B.$$

Remarque 1. Il faudrait, a priori, appeler l'intégrale (1) longueur de B relative à $G(t)$, mais on va voir dans la suite que la valeur de (1) dépend seulement de l'ensemble B et est indépendante de $G(t)$.

Remarque 2. Toute partie de l'espace à n dimensions dont nous parlerons au cours du présent paragraphe sera supposée contenue dans $G(\Delta)$.

Théorème 1. Si $\text{long}^* B$ existe, on a (cf. § 10. Corol.)

$$(2) \qquad 0 \leq \text{long}^* B = \int\limits_{G^{-1}(B)-\Delta_s} \frac{|G'(t)|}{k_{G^{-1}(B)-\Delta_s}(t)}\, dt < +\infty$$

et inversement: si l'intégrale figurant dans cette inégalité existe, elle est finie et égale à $\text{long}^* B$.

Théorème 2. La condition nécessaire et suffisante pour que B soit rectifiable (D^*) est que $G^{-1}(B) - \Delta_s$ soit mesurable.

Démonstration. Cette condition est nécessaire, car elle résulte de l'existence de l'intégrale (1). Elle est suffisante en vertu du théorème précédent et du § 10. th. 1).

Théorème 3. L'intégrale (1) est un invariant relatif à toutes les transformations cartésiennes de l'espace à n dimensions en lui-même (cf. § 8. Rem. 2).

Théorème 4. La condition nécessaire et suffisante pour que

$$\text{long}^* \ B = 0$$

est que B soit à projection nulle (cf. § 8. Déf. 2).

L'intégrale (1) ne peut être, en effet, nulle que dans le cas où $G^{-1}(B) - \Delta_z$ est de mesure nulle [1]), c.-à-d. dans le cas où B est à projection nulle (§ 8. Th. 1).

Théorème 5. La définition D^* réalise les théorèmes $T_1 - T_7$ du § 3.

Ad T_1. T_1 est une conséquence immédiate du théorème 1 du § 12 et du théorème 1 du présent paragraphe.

Ad T_3. Si B est fermé, il est rectifiable (D^*) puisque $G^{-1}(B)$ est fermé et par conséquent $G^{-1}(B) - \Delta_z$ est mesurable (cf. Théorème 2 et § 1, Rem.).

Ad T_4. Soit B rectifiable (D^*); soit d une droite quelconque et soit P la projection de B sur d. J'affirme que P est mesurable et que sa longueur ne surpasse pas long* B.

Soit en effet $x_1, \ldots, x_n$ le système d'axes réctangulaire auxquels est rapporté notre espace.

On peut se borner au cas où d coïncide avec l'axe x_1 (cf. Théorème 3). On a dans ce cas

$$P = g_1(G^{-1}(B)) = g_1(G^{-1}(B) - \Delta_z) + g_1(G^{-1}(B) \,.\, \Delta_z). \tag{3}$$

En vertu du corollaire du § 5

$$m\, g_1(G^{-1}(B) . \Delta_z) = 0. \tag{4}$$

Désignons par $K_A(t)$ l'ordre de multiplicité de t relatif à $g_1(t)$ et A (cf. § 1). On a évidemment partout dans $G^{-1}(B) - \Delta_z$

$$K_{G^{-1}(B)-\Delta_z}(t) \geqslant k_{G^{-1}(B)-\Delta_z}(t). \tag{5}$$

---

[1]) Car on a presque partout dans $G^{-1}(B) - \Delta_z$ les inégalités: $|G'(t)| \neq 0$ (cf. § 1), $k_{G^{-1}(B)}(t) < \infty$ (cf. § 8. Th. 3).

$G^{-1}(B)-\Delta_z$ étant mesurable (cf. Théorème 2) on obtient selon le théorème 1 du § 13

$$(6) \qquad mg_1(G^{-1}(B)-\Delta_z)=\int\limits_{G^{-1}(B)-\Delta_z}\frac{|g_1'(t)|}{K_{G^{-1}(B)-\Delta_z}(t)}\,dt.$$

On a presque partout dans Δ

$$|g_1'(t)|\leqslant|G'(t)|.$$

En rapprochant les relations (2), (3), (4), (5), et (6) nous obtenons

$$mP\leqslant \operatorname{long}^* B, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Ad. T_5. Si $\{B_\nu\}$ est une suite d'ensembles rectifiables (D^*) et disjoints, ΣB_ν est rectifiable D^* et $\operatorname{long}^*\Sigma B_\nu=\Sigma\operatorname{long}^* B_\nu$.

Démonstration. Les ensembles $G^{-1}(B_\nu)-\Delta_z$ sont mesurables (cf. Théorème 2) et, par suite (cf. § 1. Rem.), l'ensemble

$$(7) \qquad G^{-1}(\Sigma B_\nu)-\Delta_z=\Sigma(G^{-1}(B_\nu)-\Delta_z)$$

l'est aussi, ΣB_ν est donc rectifiable (D^*) (cf. Th. 2). On a partout dans $G^{-1}(B_\nu)$ (§ 10, Lemme)

$$k_{G^{-1}(B_\nu)}(t)=k_{G^{-1}(\Sigma B_\nu)}(t)$$

par conséquent (cf. Déf. D^*)

$$(8) \qquad \operatorname{long}^* B_\nu=\int\limits_{G^{-1}(B_\nu)-\Delta_z}\frac{|G'(t)|}{k_{G^{-1}(\Sigma B_\nu)}(t)}\,dt.$$

Les ensembles $G^{-1}(B_\nu)-\Delta_z$ étant disjoints, on obtient de (7) et (8)

$$\Sigma\operatorname{long}^* B_\nu=\int\limits_{G^{-1}(\Sigma B_\nu)-\Delta_z}\frac{|G'(t)|}{k_{G^{-1}(\Sigma B_\nu)}(t)}\,dt=\operatorname{long}^*\Sigma B_\nu, \text{ c. q. f. d.}$$

Ad T_6. T_6 est une conséquence immédiate du théorème 4.

Ad T_7. Le produit et la différence de deux ensembles rectifiables (D^*) sont rectifiables (D^*).

Pour le prouver il suffit de remarquer (cf. Théorème 2 et § 1. Rem.) que

$$G^{-1}(B_1-B_2)-\Delta_z=(G^{-1}(B_1)-\Delta_z)-[\{G^{-1}(B_2)-\Delta_z\}+\Delta_z],$$
$$G^{-1}(B_1\,.\,B_2)-\Delta_z=(G^{-1}(B_1)-\Delta_z)\,.\,(G^{-1}(B_2)-\Delta_z).$$

Ad T_2. B étant une partie rectifiable (D^*) d'un ensemble C rectifiable (D^*), on a

$$\text{long}^* B \leqslant \text{long}^* C. \tag{9}$$

On a selon T_5 et T_7

$$\text{long}^* C = \text{long}^* B + \text{long}^* (C - B)$$

d'où résulte (9) puisque $\text{long}^*(C - B) \geqslant 0$ (cf. th. 1).

Théorème 6. Soit $H(u)$ une transformation définie et absolument continue dans un intervalle borné et fermé I et soit

$$B \subset G(\Delta)\, H(I).$$

B ne peut être rectifiable (D^*) relativement à $G(t)$ et $H(u)$ qu'à la fois. Les longueurs de B (au sens de la définition D^*) relatives à $G(t)$ et $H(u)$ ne peuvent pas être différentes.

Autrement: La rectifiabilité D^* et la longueur (au sens de la définition D^*) dépendent seulement de l'ensemble B en question et ne dépendent nullement de la représentation paramétrique du continu sur lequel il est situé.

Démonstration. Ce théorème résulte immédiatement du théorème précédent et du th. 3, § 15 lorsqu'on remarque que $G(\Delta)$ et $H(I)$ sont des continus rectifiables (D^*) respectivement par rapport à $G(t)$ et $H(u)$ (cf. T_3, § 3).

Corollaire. La projection d'un ensemble rectifiable au sens classique sur une droite quelconque est mesurable et la mesure de cette projection ne surpasse pas la longueur de l'ensemble en question (cf. Th. 5, T_1 et T_4).

Théorème 7. La notion de l'arc rectifiable au sens classique et celle de l'arc rectifiable D^* coïncident.

En effet, tout arc simple rectifiable au sens classique l'est aussi relativement à la définition D^*. La proposition inverse est aussi vraie, car tout arc simple contenu dans $G(\Delta)$ est rectifiable au sens classique[1]).

Calcul de la longueur généralisée intérieure et extérieure.

§ 17. Nous gardons relativement à $G(t)$ les hypothèses du paragraphe précédent.

---

[1]) T. Ważewski, Kontinua prostowalne etc. § 12 et § 24. l. c.

Définition I. Soit $B \subset G(\Delta)$. Nous appelons *longueur intérieure* de B (relative à une définition quelconque (D) réalisant les théorèmes $T_1 - T_7$ du § 3) la borne supérieure des longueurs (relatives à (D)) des parties rectifiables de B. Nous la désignons par

$$\operatorname{long}_{iD} B.$$

Théorème I. Si $B \subset G(\Delta)$, il existe une partie rectifiable (D) de B, appelons-la C, telle que

$$\operatorname{long}_{iD} B = \operatorname{long}_D C.$$

En désignant par A une partie mesurable de $G^{-1}(B)$, telle que

$$m(A) = m_i(G^{-1}(B)) \text{ [1]}$$

on a

$$\operatorname{long}_{iD} B = \operatorname{long}_D(G(A)) = \int\limits_A \frac{|G'(t)|}{k_A(t)}\, dt < +\infty.$$

Démonstration. Posons $R = G^{-1}(B) - A$.

$G(A)$ est une partie rectifiable (D) de B et on a (cf. § 15, th. 1)

$$\operatorname{long}_{iD} B \geqslant \operatorname{long}_D G(A)) = \int\limits_A \frac{|G'(t)|}{k_A(t)}\, dt < +\infty.$$

Soit C une partie rectifiable (D) de B. Il reste à démontrer que

(1) $$\operatorname{long}_D C \leqslant \operatorname{long}_D G(A).$$

$G^{-1}(C) - \Delta_s$ est mesurable (§ 15, th. 2) et $G^{-1}(C) - \Delta_s \subset A + R$. L'ensemble

$$H = G^{-1}(C) - \Delta_s - A$$

est, par conséquent, de mesure nulle [2]).

On a

$$G^{-1}(C) - \Delta_s = (G^{-1}(C) - \Delta_s)A + H,\quad G^{-1}(C) - \Delta_s - H \subset A$$

d'où (cf. § 15. Th. 1 et § 3, T_2)

$$\operatorname{long}_D G(G^{-1}(C) - \Delta_s - H) \leqslant \operatorname{long}_D G(A).$$

---

[1]) Un tel A existe. Cf. p. e. C. Carathéodory. Vorlesungen über reelle Funktionen. 1918. p. 261, Satz 3.

[2]) Dans le cas contraire il existerait une partie mesurable de $G^{-1}(B)$ de mesure supérieure à mA.

H étant de mesure nulle, on en obtient facilement (cf, § 15, Th. 1. et Th. 2 et § 10. Th. 1).

$$\text{long}_D C = \text{long}_D G(G^{-1}(C) - \Delta_z - H),$$

ce qui rapproché à l'inégalité précedente implique (1).

Définition 2. Soit $B \subset G(\Delta)$. Nous appelons longueur extérieure de B (relative à une définition quelconque (D) réalisant les théorèmes $T_1 - T_7$ du § 3) la borne inférieure des longueurs (relatives à (D)) des ensembles rectifiables (D) qui contiennent B. Nous la désignerons par

$$\text{long}_{eD}\, B.$$

Théorème 2. Si $B \subset G(\Delta)$, il existe une partie rectifiable (D) de $G(\Delta)$, appelons-la C, telle que

1⁰ $B \subset C$,

2⁰) $\text{long}_{eD} B = \text{long}\, C$.

En désignant par A une partie mesurable de Δ telle que

$$G^{-1}(B) \subset A,$$

$$m_e G^{-1}(B) = m A \text{ [1]},$$

on a

$$\text{long}_{eD} B = \int_A \frac{|G'(t)|}{k_A(t)}\, dt = \text{long}_D G(A) < +\infty.$$

Démonstration. On a (cf. Th. 1. § 15).

$$\text{long}_{eD} B \leqslant \text{long}_D G(A) = \int_A \frac{|G'(t)|}{k_A(t)}\, dt < +\infty.$$

Soit C un ensemble rectifiable (D) contenant B. Il suffit de démontrer que $\text{long}_D G(A) \leqslant \text{long}_D C$. L'ensemble $F = G(\Delta).C$ est rectifiable D (cf. § 15. Th. 1 et § 3, T_7) et on a (cf. § 3, T_2) $\text{long}_D F \leqslant \text{long}_D C$. Il suffit donc de prouver que

(1) $$\text{long}_D G(A) \leqslant \text{long}_D F.$$

L'ensemble

$$H = G^{-1}(F) + \Delta_z = (G^{-1}(F) - \Delta_z) + \Delta_z$$

est mesurable (cf. § 15, Th. 2 et § 1. Rem.) et

$$G^{-1}(B) \subset H.$$

[1]) Un tel A existe. Cf. p. e Caratheodory l. c. p. 260, Satz 2.

Posons $R = A - H$. On a [1])

$$mR = 0.$$

On a

$$A = AH + R, \quad A \subset R + H$$

d'où (cf. § 15, Th. 1; § 3, T_2)

$$\log_D G(A) \leqslant \log_D G(H + R) = \log_D G((G^{-1}(F) - \Delta_s) + \Delta_s + R).$$

Or, $\Delta_s + R$ étant un ensemble exceptionnel (cf. § 8, Def. 1, Rem 3, Rem. 4) on en obtient (cf. § 15, Th. 1 et 2; § 10, Th. 1) que

$$\log_D G(H + R) = \log_D F$$

ce qui rapproché à l'inégalité précédente implique (1).

Théorème 3. B étant une partie d'un continu rectifiable (= possédant une longueur finie) relativement à une certaine définition de la longueur, définition réalisant les théorèmes $T_1 - T_7$ du § 3, toutes les définitions qui réalisent ces théorèmes sont compatibles entre elles en ce qui concerne la valeur de la longueur intérieure et de la longueur extérieure de B.

C'est une conséquence du théorème 3 du § 15 et des définions 1 et 2.

Application aux fonctions absolument continues.

§ 18. **Théorème.** Soit $g(t)$ une fonction définie et absolument continue dans un intervalle fermé et borné Δ. Soit $B \subset G(\Delta)$.

Désignons par A et C deux ensembles, tels que

$$A \subset G^{-1}(B) \subset C \subset \Delta,$$

$$mA = m_i G^{-1}(B), \; mC = m_e G^{-1}(B).$$

On a

$$m_i B = \int_A \frac{|g'(t)|}{k_A(t)}\, dt,$$

$$m_e B = \int_C \frac{|g'(t)|}{k_C(t)}\, dt.$$

C'est une conséquence immédiate des théorèmes 1 et 2 du paragraphe précédent.

---

[1]) Autrement il existerait une partie mesurable de Δ contenant $G^{-1}(B)$ de mesure inférieure à mA.

Note sur un théorème de M. Peano concernant l'existence de solutions d'un système des équations différentielles linéaires du premier ordre.

Par

André Turowicz (Cracovie).

(Présénté au Séminaire du Prof. Wilkosz le 5 Décembre 1927).

I. M. Peano a démontré le théorème suivant [1]:

Soient

$$r_{ij}(t) \quad i, j/1, \ldots, n \tag{1}$$

un système de fonctions continues d'une variable réelle dans un intervalle $[a, b]$; soit $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}$ un système des n constantes réelles arbitraires; soit $\bar{x}$ un nombre complexe à n unités dont les composantes sont: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; soit $R\bar{x}$ un nombre complexe dont les composantes sont définies par les égalités:

$$z_i = \sum_{j/1}^{n} r_{ij}(t)\, x_j, \quad i/1, 2, \ldots, n;$$

soit enfin

$$\bar{a}^0 = (a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}), \quad \bar{a}^{(k+1)} = \int_{t_0}^{t} R\, \bar{a}^{(k)}(t)\, dt$$

pour $k/0, 1, 2, \ldots$

Alors les composantes de la fonction complexe définie par la série uniformément convergente:

$$\sum_{i/0}^{\infty} \bar{a}^{(i)}(t) \tag{2}$$

[1]) Mathem. Annalen t. 32. p. 450—456.

forment les solutions du système des équations différentielles dans l'intervalle $[a, b]$:

$$(3) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j/1}^{n} r_{ij}(t)\, x_j \quad i/1, 2, 3, \ldots, n.$$

II. Ce théorème peut être généralisé d'une manière suivante:

1⁰ Si les fonctions (1) sont mesurables et bornées la série (2) converge uniformément dans $[a, b]$ et ses composantes satisfont aux équations (3) dans $[a, b]$ à l'exception d'un ensemble de mesure nulle, peut ètre.

2⁰ Si les fonctions (1) sont sommables, la série (2) converge uniformément dans $[a, b]$ et ses composantes y satisfont aux équations (3), un ensemble de mesure nulle excepté, peut être.

Ces théorèmes sont quand à la convergence, une conséquence d'un théorème de M. Banach [1]. On peut cependant les démontrer d'une manière tout à fait analogue à celle de M. Peano, si on insère à sa démonstration deux lemmes suivants:

1. Si les fonctions (1) sont mesurables, le „module" de la matrice:

$$(4) \qquad \left\| \begin{matrix} r_{11}(t) & r_{12}(t), \ldots, & r_{1n}(t) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ r_{n1}(t) & r_{n2}(t) & r_{nn}(t) \end{matrix} \right\|$$

est de même mesurable.

2. Si les fonctions (1) sont sommables le module de la matrice (4) est sommable.

Par le module de la matrice (4) nous entendrons [2] la fonction $f(t)$ définie de la manière suivante:

Soit $F(t; x_1, \ldots, x_n)$ une fonction des variables réelles définie dans le domaine D:

$$\left| \begin{matrix} a \leqq t \leqq b \\ \sum_{i/1}^{n} |x_i| \neq 0 \end{matrix} \right|$$

---

[1]) Cf. Fund. Math. t. III. p. 161. th. 7.

[2]) Cf. Peano loc. cit.

par l'égalité:

$$F(t;\, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i/1}^{n}\left[\sum\limits_{j/1}^{n} r_{ij}(t)\, x_j\right]^2}{\sum\limits_{i/1}^{n} x_i^2}}.$$

On voit immédiatement que $F(t;\, k x_1, \dots, k x_n) = F(t;\, x_1, \dots, x_n)$ pour $k \neq 0$. Par conséquent, toutes les valeurs de la fonction F dans le domaine D sont atteintes dans le domaine K:

$$\left|\begin{array}{c} a \leqq t \leqq b \\ \sum\limits_{i/1}^{n} x_i^2 = r^2 \end{array}\right|$$

où r est une constante positive arbitraire.

Comme ce domaine est borné et fermé et la fonction F continue relativement aux variables $x_1, \dots, x_n$ elle atteindra dans K pour chaque t de $[a, b]$ son maximum, que nous désignerons par $f(t)$.

III. **Démonstration.** A chaque t appartenant à l'intervalle $[a, b]$ nous assignerons dans l'espace à n dimensions $(y_1, \dots, y_n)$ l'hypersphère $K(t)$:

$$\sum_{i/1}^{n} y_i^2 = [r(t)]^2, \text{ où } r(t) = 1 + \frac{t-a}{b-a}.$$

Soit $\varphi(y_1, \dots, y_n)$ une fonction définie dans l'ensemble des hypersphères $K(t)$ par l'égalité:

$$\varphi(y_1, \dots, y_n) = F\left[a + (b-a)\left(\sqrt{\sum_{i/1}^{n} y_i^2} - 1\right);\; y_1, \dots, y_n\right].$$

Evidemment $f(t)$ est égale au maximum de la fonction φ, atteint sur l'hypersphère $K(t)$.

Choisissons sur $K(a)$ un ensemble $E(a)$ dénombrable et partout dense sur $K(a)$. Soient: $(y_1^{(i)}, \dots, y_n^{(i)})$, $i/1, 2, \dots$, les coordonnées des points de cet ensemble et soit $E(t)$ un ensemble composé de points de coordonnées: $(y_1^{(i)} \cdot r(t), \dots, y_n^{(i)} \cdot r(t))$, $i/1, 2, \dots$ L'ensemble $E(t)$ est situé sur $K(t)$ et y est partout dense. La fonction F étant continue relativement aux variables $(x_1, \dots, x_n)$, la fonction φ sera continue relativement aux variables $(y_1, \ldots, y_n)$ sur chaque hypersphère $K(t)$. En conséquence le maximum de φ sur $K(t)$ est égal à la limite supérieure de cette fonction sur $E(t)$. Soient $\psi_i(t)$, $i/1, 2, \ldots$ une suite de fonctions définies par les égalités:

$$\psi_i(t) = \varphi[y_1^{(i)}. r(t), \ldots, y_n^{(i)}. r(t)], \quad i/1, 2, \ldots \tag{5}$$

dans l'intervalle $[a, b]$.

On déduit par un calcul facile que:

$$\psi_i(t) = F(t;\, y_1^{(i)}. r(t),\, y_2^{(i)} r(t), \ldots, y_n^{(i)} r(t)) \quad i/1, 2, \ldots, \tag{6}$$

d'ou l'on voit immédiatement que toutes les fonctions ψ_i sont mesurables. Comme $f(t)$ est une limite supérieure de la suite des fonctions φ_i, elle est elle-même mesurable.

IV. Supposons maintenant que les fonctions (1) sont sommables dans l'intervalle $[a, b]$.

Les seconds membres des égalités (6) peuvent s'écrire:

$$\sqrt{\frac{\sum\limits_{i/1}^{n}\left[\sum\limits_{j/1}^{n} r_{ij}(t)\, y_j^{(k)} r(t)\right]^2}{\sum\limits_{i/1}^{n} [y_i^{(k)} r(t)]^2}} = \sqrt{\sum_{i/1}^{n}\left[\sum_{j/1}^{n} r_{ij}(t)\, y_j^{(k)}\right]^2}, \quad k/1, 2, \ldots,$$

On a par conséquent:

$$|\psi_k^{(t)}| \leqq \sum_{i/1}^{n} \left| \sum_{j/1}^{n} r_{ij}(t)\ y_j^{(k)} \right| \leqq \sum_{i/1}^{n} \sum_{j/1}^{n} |r_{ij}(t)| \cdot |y_j^{(k)}| \leqq$$

$$\leqq \sum_{i/1}^{n} \sum_{j/1}^{n} |r_{ij}(t)|, \quad k/1, 2, \ldots$$

Il existe donc pour les fonctions $\psi_k(t)$ une majorante commune sommable. En conséquence les fonctions ψ_k, ainsi que leur limite supérieure $f(t)$, sont des fonctions sommables.

Cracovie 3. III. 1928.

Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali delle superficie.

Nota di

Giuseppe Vitali a Padova.

Elenco dei lavori citati. (Essi vengono indicati colla lettera che li precede in questo elenco).

(A). G. Vitali. *Geometria nello spazio hilbertiano.* [Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti-Anno accademico 1927—28. Tomo LXXXVII. Parte seconda. pp. 349—428].

(B). G. Vitali. *Sulle derivazioni covarianti nel calcolo assoluto generalizzato.* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Vol. VII, serie 6ª, 1º sem. fasc. 8. Roma, 1928, pp. 626 e seg.].

(C). Ernesto Pascal. *I determinanti.* [U. Hoepli, editore Milano Seconda edizione. 1923].

(D). G. Vitali. *I fondamenti del calcolo assoluto generalizzato.* [Giornale di Matematiche di Battaglini diretto da E. Pascal. Volume, LXI (1923) 14º della 3ª serie. pp. 1—46].

(E). G. Fubini — E. Čech. *Geometria proiettiva differenziale.* [Bologna. Nicola Zanichelli. editore, in 2 tomi, 1926 e 1927].

(F). K. Kommerell. *Riemannsche Flächen in ebenen Raum von vier Dimensionen.* [Mathematische Annalen. LX. Band. 1905. pp. 548—596].

(G). E. Bompiani. *Studi sugli spazi curvi. La seconda forma fondamentale di una V_m in V_n.* [Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti-Anno accademico 1920—21. Tomo LXXX. Parte seconda. pp. 1113—1145].

Prefazione.

E nota l'importanza che per le superficie dello spazio ordinario ha l'esistenza di una normale determinata. Questa normale interviene nella formazione della seconda forma differenziale quadratica associata alla superficie, e quindi nell' espressione della curvatura media, nella determinazione delle linee di curvatura, ecc.

Per le altre superficie esistono infinite normali, le quali hanno già subito una prima classificazione colla considerazione degli spazi r-tangenti, che io indico con σ_r [1]).

Le normali che prima si affacciano alla considerazione sono quelle che giacciono nel σ_2, ma anche queste, se si esclude il caso delle sviluppabili e quello delle superficie dello spazio ordinario, sono in numero infinito, ed in particolare possono essere tutte le direzioni di un piano, se il σ_2 ha 4 dimensioni, o possono essere tutte le direzioni di uno spazio a 3 dimensioni, se il σ_2 ha 5 dimensioni.

Si presenta allora la questione di riconoscere se fra dette normali vi sia un sistema ortogonale (di 2 o 3, a seconda che esse riempiono un piano od uno spazio a 3 dimensioni) che meriti di essere considerato come privilegiato.

Un tale sistema deve, secondo il mio parere, rispondere ad una definizione simmetrica rispetto al sistema delle sue rette. In generale non apparterrà ad un tale sistema la *normale di curvatura media* del Bompiani [2]), nè una di quelle da me segnalate recentemente [3]), e di cui la 2ª coincide colla precedente normale del Bompiani.

In questo lavoro presento una definizione di un tal sistema, la quale gode della proprietà desiderata (Cap. III. n⁰. 1 e Cap. IV. n⁰. 1), e che forse è l'unica del genere che si possa pensare.

Corrispondentemente dimostro che esistono sistemi reali che vi soddisfano e che chiamo *sistemi principali.* (Cap. III. n⁰ 2 e Cap. IV. n⁰. 2).

Però non in tutti i casi vi è un solo sistema principale. In una superficie vi possono essere punti (che io chiamo *ciclici*) in cui

---

[1]) (A). pag. 395.
[2]) (G). pag. 1133.
[3]) (A). pag. 424

si ha una semplice infinità di sistemi principali (Cap. III. ni. 5, 6, 7 e Cap. IV. ni. 2, 3, 5).

Ho chiamato *cicliche* le superficie i cui punti sono tutti ciclici, ed ho trovato esempi di superficie cicliche tanto col σ_2 a *5* dimensioni (Cap. III. n⁰. 7), quanto col σ_2 a *4* dimensioni (Cap. IV. n⁰. 5).

Alla trattazione degli argomenti predetti (Cap. III e IV) ho premesso due capitoli in cui si passano in rassegna *8* invarianti di una qualunque varietà (Cap. I), uno dei quali, quello che ho indicato con J_2 si presenta, almeno analiticamente, come la più naturale estensione alle varietà a più dimensioni dell'invariante di Gauss (curvatura totale delle superficie), e che probabilmente apparirà tale anche dal punto di vista geometrico, e nel secondo dei quali (Cap. II) si procede, nel caso in cui il σ_2 abbia una dimensione di meno del massimo numero possibile, alla scomposizione di un controvariante a *4* apici, che conduce ad un cono quadrico dello spazio tangente, che deve avere un significato proiettivo. (Cap. II. n⁰ 4). Questo cono è definito uguagliando a zero una certa forma quadratica, che per la superficie dello spazio lineare a 4 dimensioni si riduce alla forma F_2 del Fubini[1]).

I risultati dei primi due capitoli hanno anche applicazione nei successivi.

CAPITOLO I.

Gli invarianti $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6, J_7, J_8$ di una varietà qualunque.

1. — Sia

$$f = f(t, u_1, u_2, \dots, u_n)$$

l'equazione di una varietà V_n ad n dimensioni dello spazio hilbertiano, ed indichiamo con g il campo di variabilità della t[2]). Indichiamo poi con f_i la derivata di f rispetto ad u_i, e poniamo

$$[1] \qquad a_{rs} = \int_g f_r f_s \, dt.$$

Il sistema a_{rs} è un covariante simmetrico a *2* indici del calcolo assoluto del Ricci, e quindi una sostituzione S di equazioni

$$u_i = u_i(v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

---

[1]) (E). Tomo secondo. pp. 631—637.

[2]) Per questa rappresentazione delle varietà vedere (A) pag. 391 e seguenti.

che porta dalle variabili u alle variabili v, la muta colla legge

$$[2] \qquad a_{rs}[v] = \sum_{1}^{n}{}_{\varrho\sigma} a_{\varrho\sigma}[u] \frac{\partial u_\varrho}{\partial v_r} \cdot \frac{\partial u_\sigma}{\partial v_s} = \Sigma'_{\varrho\sigma} a_{\varrho\sigma}[u] D_{\varrho\sigma,rs}$$ [1]),

dove

$$D_{\varrho\sigma,rs} = \begin{cases} \dfrac{\partial u_\varrho}{\partial v_r} \cdot \dfrac{\partial u_\sigma}{\partial v_s}, \ se \ \sigma = \varrho \\ \dfrac{\partial u_\varrho}{\partial v_r} \cdot \dfrac{\partial u_\sigma}{\partial v_s} + \dfrac{\partial u_\sigma}{\partial v_r} \cdot \dfrac{\partial u_\varrho}{\partial v_s}, \ se \ \sigma \neq \varrho, \end{cases}$$

e Σ' è estesa a tutte le combinazioni $\varrho\sigma$ con ripetizione a *2* a *2* dei numeri

$$[3] \qquad 1, 2, \dots, n.$$

Il determinante di ordine $n(n+1):2$

$$D = | D_{\varrho\sigma,rs} |$$

ottenuto facendo percorrere nello stesso ordine alle coppie $\varrho\sigma$ ed rs tutte le combinazioni con ripetizione a *2* a *2* dei numeri (3), e mettendo in una medesima riga tutti gli elementi colla stessa coppia $\varrho\sigma$ e in una stessa colonna tutti gli elementi colla stessa coppia rs, è un determinante di Scholtz-Hunyady [2]), e quindi vale Δ^{n+1}, dove

$$\Delta = \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(v_1, v_2, \dots, v_n)}$$

è il determinante funzionale della sostituzione S.

Indichiamo poi con a il determinante di ordine n

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Si sa che $a \neq 0$, e che

$$a[v] = a[u] \,.\, \Delta^2.$$

---

1) Per la notazione $a_{rs}[u]$ vedere (B).

2) (C). pp. 156—160.

2. — Indichiamo con f_{rs} le derivate seconde covarianti di f rispetto al sistema a_{rs}, poniamo

[4] $$A_{rs,pq} = \int_g f_{rs} f_{pq}\, dt.$$

Il sistema (4) è un covariante a *4* indici nel calcolo assoluto di Ricci, simmetrico rispetto alle coppie rs e pq, e rispetto agli indici di ciascuna di queste coppie.

Si ha evidentemente

$$A_{rs,pq}[v] = \Sigma'_{\varrho\sigma,\pi\varkappa} A_{\varrho\sigma,\pi\varkappa}[u] \,.\, D_{\varrho\sigma,rs} \,.\, D_{\pi\varkappa,pq},$$

dove la Σ' è estesa a tutte le combinazioni $\varrho\sigma$ e $\pi\varkappa$ con ripetizione a *2* a *2* dei numeri (3).

Indichiamo con A il determinante formato cogli elementi $A_{\varrho\sigma,rs}$ come è stato formato D con i $D_{\varrho\sigma,rs}$.

Si ha subito per le regole di moltiplicazione dei determinanti

$$A[v] = A[u] \,.\, D^2 = A[u] \,.\, \Delta^{2(n+1)}.$$

Consegue che

$$J_1 = A : a^{n+1}$$

è un invariante.

3. — Il sistema

[5] $$R_{rs,pq} = A_{rp,sq} - A_{rq,sp}$$

è un covariante a *4* indici simmetrico rispetto alle coppie rs e pq, ed emisimmetrico rispetto agli indici di ciascuna di queste coppie, e quindi ha nulli tutti gli elementi in cui una di queste coppie è formata di due numeri uguali.

Consegue che

$$R_{rs,pq}[v] = \Sigma''_{\varrho\sigma,\pi\varkappa} R_{\varrho\sigma,\pi\varkappa} \,.\, P_{\varrho\sigma,rs}[u] \,.\, P_{\pi\varkappa,pq}, \quad (r < s \text{ e } p < q)$$

dove

$$P_{\varrho\sigma,rs} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_\varrho}{\partial v_r} & \dfrac{\partial u_\varrho}{\partial v_s} \\[2ex] \dfrac{\partial u_\sigma}{\partial v_r} & \dfrac{\partial u_\sigma}{\partial v_s} \end{vmatrix}$$

e Σ'' è estesa a tutte le combinazioni semplici a *2* a *2* dei numeri (3).

Il determinante di ordine $n(n-1):2$

$$P = | P_{\varrho\sigma . rs} |$$

ottenuto facendo percorrere nello stesso ordine alle coppie $\varrho\sigma$ ed rs tutte le combinazioni semplici a *2* a *2* dei numeri [3] scritte con $\varrho < \sigma$, ed $r < s$, e mettendo in una medesima riga gli elementi colla stessa coppia $\varrho\sigma$ ed in una stessa colonna tutti gli elementi colla stessa coppia rs, è un determinante di Spottiswoode[1]), formato coi minori di 2^0 ordine di Δ, e quindi vale Δ^{n-1}.

Indichiamo con R il determinante formato cogli elementi $R_{\varrho\sigma, rs}$ come è stato formato P con i $P_{\varrho\sigma, rs}$.

Si ha subito per le regole di moltiplicazione dei determinanti

$$R[v] = R[u] \, . \, P^2 = R[u] \, . \, \Delta^{2(n-1)}.$$

Consegue che

$$J_2 = R : a^{n-1}$$

è un invariante.

4. — Indichiamo con

[6] $$A^{rs,pq}$$

il complemento algebrico di $A_{rs,pq}$ in A.

Si ha

[7] $$\Sigma'_{hk} A_{hk,rs} \, . \, A^{hk,pq} = \varepsilon_{rs,pq} \, . \, A$$

dove Σ' ha il solito significato, ed $\varepsilon_{rs,pq}$ vale zero od uno secondo che le combinazioni rs e pq sono differenti od uguali. La [7] si può anche scrivere

[7′] $$\sum_1^n{}_{hk} A_{hk,rs} \, . \, (A^{hk,pq}) = \varepsilon_{rs,pq} \, . \, A \, . \, (2^{\varepsilon_{pq}} : 2),$$

dove

$$(A^{hk,pq}) = A^{hk,pq} \, . \, (2^{\varepsilon_{hk} + \varepsilon_{pq}} : 4),$$

ed ε_{hk} vale zero od uno secondo che h e k sono differenti od uguali.

Se $A \neq 0$, e se la combinazione pq e' tenuta fissa le [7] individuano il sistema

$$A_{hk,pq} : A$$

---

[1]) (C) pp. 132—135.

con hk percorrente tutte le combinazioni con ripetizione a *2* a *2* dei numeri (3), e quindi è individuato dalle (7′) il sistema

$$\omega_{hk,pq} = (A^{hk,pq}) : A \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Consideriamo questo sistema per le variabili u, e costruiamo il controvariante a *4* apici $\Omega^{hk,pq}$ che per le variabili u coincide con $\omega^{hk,pq}(u)$[1]).

Per il principio della saturazione il sistema

$$H^{pq}_{rs} = \sum_{1}^{n}{}_{hk} A_{hk,rs} \Omega^{hk,pq}$$

è un sistema di Ricci a due indici di covarianza ed a due indici di controvarianza, il quale per le variabili u coincide con $\varepsilon_{rs,pq}.(2^{\varepsilon_{pq}}:2)$, ma il sistema E^{pq}_{rs} che per qualunque sistema di variabili coincide con $\varepsilon_{rs,pq}.(2^{\varepsilon_{pq}}:2)$, è pure un sistema assoluto di Ricci, come si può facilmente verificare, dunque per qualunque sistema di variabili

$$\sum_{1}^{n}{}_{hk} A_{hk,rs} . \Omega^{hk,pq} = \varepsilon_{rs,pq}.(2^{\varepsilon_{pq}}:2),$$

e poichè [7′] ha una soluzione determinata, si ha per qualunque sistema di variabili

$$\omega^{hk,pq} = \Omega^{hk,pq},$$

e quindi si puo concludere che $\omega^{hk,pq}$ è un controvariante di Ricci a *4* apici.

Allora è pure un controvariante di Ricci a *4* apici anche il sistema

$$\alpha^{hk,pq} = \omega^{hk,pq} . J_1 = (A^{hk,pq}) : a^{n+1} = 2^{\varepsilon_{hk}+\varepsilon_{pq}} . A^{hk,pq} : (4a^{n+1}).$$

Io dico che il sistema

$$\alpha^{hk,pq} = 2^{\varepsilon_{hk}+\varepsilon_{pq}} . A^{hk,pq} : (4a^{n+1})$$

è un controvariante a *4* apici di Ricci anche quando $A = 0$. Intanto la cosa è vera se la caratteristica K di A è $< n(n+1):2-1$, perchè allora $\alpha^{hk,pq} = 0$ qualunque siano gli apici.

Resta a vedere che cosa avviene se $K = n(n+1):2-1$. Intanto possiamo osservare che tutti i risultati precedenti si possono ripetere quando a_{rs} sia un covariante a *2* indici di Ricci col determinante a diverso da zero, ed $A_{rs,pq}$ sia un covariante di Ricci

[1]) (D). Cap. II. 2. pp. 12—13.

a *4* indici, simmetrico rispetto alle due coppie rs e pq e rispetto agli indici di ciascuna coppia. Ed allora supposto $A^{ij,mn}(u) \neq 0$, consideriamo il sistema $B_{rs,pq}$ covariante di Ricci a *4* indici, che per le variabili u soddisfa alle uguaglianze

$$B_{mn,ij} = B_{ij,mn} = A_{ij,mn} + \lambda A^{ij,mn}$$

dove λ è una costante positiva, e per tutti gli altri sistemi di indici

$$B_{rs,mn} = A_{rs,mn} .$$

Allora il determinante B costruito colle $B_{rs,pq}$, come A è costruito colle $A_{rs,pq}$, è diverso da zero per $\lambda > 0$, sufficientemente piccolo, e diventa zero per $\lambda = 0$, perchè allora coincide con A.

Indichiamo con $B^{rs,pq}$ il complemento algebrico di $B_{rs,pq}$ in B. Le $B^{rs,pq}$ sono funzioni di λ, che col tendere di λ a zero tendono alle $A^{rs,pq}$. Inoltre per $\lambda \neq 0$, sufficientemente piccolo, essendo $B \neq 0$, il sistema

$$\beta^{hk,pq} = 2^{\varepsilon_{hk}+\varepsilon_{pq}} . B^{hk,pq} : (4 a^{n+1})$$

è un controvariante a *4* apici di Ricci, ma la legge di controvarianza che vale per ogni $\lambda > 0$, e abbastanza piccolo, si conserverà a causa della continuità, anche al limite per $\lambda = 0$, e quindi

$$\alpha^{hk,pq} = \lim \beta^{hk,pq} = 2^{\varepsilon_{hk}+\varepsilon_{pq}} . A^{hk,pq} : (4 a^{n+1})$$

è un controvariante di Ricci a 4 apici. c. d. d.

Si può dunque enunciare il

Teor. Se le a_{rs}, a, $A_{rs,pq}$, A hanno il significato loro assegnato ai Ni 1 e 2, se $A^{rs,pq}$ è il complemento algebrico di $A_{rs,pq}$ in A, il sistema

[8] $$\alpha^{hk,pq} = 2^{\varepsilon_{hk}+\varepsilon_{pq}} . A^{hk,pq} : (4 a^{n+1}),$$

dove

$$\varepsilon_{rs} = \begin{cases} 1, \text{ se } r = s \\ 0, \text{ se } r \neq s \end{cases}$$

è un controvariante di Ricci a *4* apici, qualunque sia la caratteristica della matrice di A.

Si vede poi facilmente che il sistema $\alpha^{rs,pq}$ è simmetrico rispetto alle coppie rs e pq e rispetto agli apici di ciascuna coppia.

5. — Il sistema

$$\varrho^{rs,pq} = a^{rp,sq} - a^{rq,sp}$$

è un controvariante a *4* apici simmetrico rispetto alle coppie rs e pq, ed emisimmetrico rispetto agli apici di ciascuna di queste coppie.

6. — Si puo' anche notare che

$$R_{rs,pq} + R_{rp,qs} + R_{rq,sp} = 0$$
$$\varrho^{rs,pq} + \varrho^{rp,qs} + \varrho^{rq,sp} = 0,$$

e che le $R^{rs,pq}$ non sono altro che i noti simboli di Riemann (rs, pq) di prima specie[1]).

7. — La funzione

$$J_3 = \sum_1^n{}_{rs.pq} R_{rs,pq}\, \varrho_{rs,pq}$$

è un invariante.

8. — Indichiamo con ϱ il determinante formato coi $\varrho_{rs\,pq}$, come R è stato formato cogli $R_{rs,pq}$, allora con ragionamenti simili ad altri precedenti, si può dimostrare che

$$\varrho(v) = \varrho(u) : \Delta^{2(n-1)},$$

da cui consegue che

$$J_4 = \varrho \cdot a^{n-1}$$

è un invariante.

9. — Sono pure invarianti

$$J_5 = \sum_1^n{}_{rs\,pq} A_{rs,pq} \cdot a^{rs} \cdot a^{pq}$$
$$J_6 = \sum_1^n{}_{rs\,pq} A_{rs,pq} \cdot a^{rp} \cdot a^{sq}$$
$$J_7 = \sum_1^n{}_{rs\,pq} a_{rs,pq} \cdot a_{rs} \cdot a_{pq}$$
$$J_8 = \sum{}_{rs\,pq} a_{rs,pq} \cdot a_{rp} \cdot a_{sq},$$

dove a^{rs} indica il reciproco di a_{rs} in a.

10. — Noto che se $A = 0$ è $J_1 = 0$, e che se la caratteristica K di A è $< n(n+1) : 2 - 1$, si ha

$$J_1 = J_3 = J_4 = J_7 = J_8 = 0.$$

[1]) (A). Pag. 394.

CAPITOLO II.

Caso di $K = n(n+1):2 - 1$. Scomposizione di $\alpha^{rs,pq}$. La forma F_2.

1. — Supponiamo che sia $K = n(n+1):2 - 1$. Sussistono intanto le relazioni

[9] $$\sum_{1}^{n}{}_{hk} A_{hk,rs} \,.\, \alpha^{hk,pq} = 0,$$

qualunque siano le coppie rs e pq.

Le (9) considerate come equazioni nelle $\alpha^{hk,pq}$, formano un sistema di $K+1$ equazioni lineari in $K+1$ incognite, colla caratteristica della matrice dei coefficienti $= K$, e che quindi ha tutte le sue soluzioni proporzionali ad una medesima.

Poniamo

$$b^{hk} = \sum_{1}^{n}{}_{pq}\, \alpha^{hk,pq}\, a_{pq},$$

il sistema b^{hk} e' un controvariante a 2 apici, e si ha

$$\sum_{1}^{n}{}_{hk} A_{hk,rs} \,.\, b^{hk} = 0,$$

dunque le b^{hk} formano una soluzione del sistema (9), e poichè tali sono le $\alpha^{hk,pq}$, dovra' essere

$$\alpha^{hk,pq} = b^{hk}\, \lambda^{pq},$$

dove le λ^{pq} sono delle funzioni convenienti, che per la simmetria di $\alpha^{hk,pq}$ rispetto alle coppie hk e pq dovranno essere proporzionali alle b^{pq}. Allora

$$\alpha^{rs,pq} = H \,.\, b^{rs}\, b^{pq},$$

e poichè $\alpha^{rs,pq}$ e $b^{rs}\, b^{pq}$ sono controvarianti, la H sarà un invariante, e

$$c^{rs} = \sqrt{|H|} \,.\, b^{rs}$$

sarà un controvariante a *2* apici e si avrà

[10] $$\alpha^{rs,pq} = \pm\, c^{rs} \,.\, c^{pq},$$

il segno che precede il secondo membro dovendosi prendere lo stesso per tutte le coppie rs e pq.

2. — Se si pone

$$d = \sqrt{|\, \alpha^{11,11}\, |},$$

si ha

$$c^{rs} = a^{11,rs} : d.$$

Resta così individuato un controvariante a *2* apici c^{rs}. L'invariante $| J_7 |$ diventa il quadrato dell' invariante

$$\Sigma_{rs} c^{rs} a_{rs}.$$

3. — Le relazioni [9] danno subito a causa delle [10]

$$\sum_{1}^{n}{}_{hk} A_{hk,rs} c^{hk} = 0,$$

ossia

$$\int_g (\sum_{1}^{n}{}_{hk} c^{hk} f_{hk}) f_{rs} \, dt = 0,$$

qualunque sia la coppia rs, e quindi

$$[11] \qquad \sum_{1}^{n}{}_{hk} c^{hk} f_{hk} = 0.$$

Così è trovata l'unica relazione lineare fra i parametri f_{rs}. Dalle [11] consegue che il controvariante c^{rs} ha un carattere proiettivo, e che quindi per una proiettività nello spazio ambiente esso verrà moltiplicato per un invariante.

4. — Se con c_{rs} si indica il complemento algebrico di c^{rs} in

$$\begin{vmatrix} c^{11} & c^{12} & \ldots & c^{1n} \\ c^{21} & c^{22} & \ldots & c^{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c^{n1} & c^{n2} & \ldots & c^{nn} \end{vmatrix},$$

il sistema

$$\gamma_{rs} = c_{rs} \,.\, a$$

è un covariante a *2* indici, e noi indicheremo con F_2 la forma

$$\sum_{1}^{n}{}_{hk} \gamma_{hk} \, du_h \, du_k.$$

L'equazione $F_2 = 0$ definisce un cono quadrico nello spazio tangente a V_n.

6. — Se $n = 2$, e la V_2 è una superficie generica in uno spazio lineare a *4* dimensioni, la F_2 è la forma indicata nello stesso modo dal Fubini[1]).

[1]) [E]. Tomo secondo pp. 631—637.

Infatti supposto che X ad Y siano parametri normali di 2 direzioni del σ_2 [1]) fra loro ortogonali e perpendicolari alla V_2 generica di uno spazio lineare a 4 dimensioni, si ha

$$f_{rs} = x_{rs} \,.\, X + y_{rs} \,.\, Y,$$

dove

$$x_{rs} = \int_0 f_{rs} X \, dt, \quad y_{rs} = \int_0 f_{rs} Y \, dt$$

sono due covarianti.

Se τ è il piano tangente alla V_2 e ν è il piano delle normale in σ_2, una direzione di τ è data da

$$f_1 \, du_1 + f_2 \, du_2,$$

la normale principale alla geodetica che ha per tangente questa direzione è data da

$$f_{11} \, du_1^2 + 2 f_{12} \, du_1 \, du_2 + f_{22} \, du_2^2,$$

ossia da

$$\begin{gathered}(x_{11} \, du_1^2 + 2 x_{12} \, du_1 \, du_2 + x_{22} \, du_2^2) X \\ + (y_{11} \, du_1^2 + 2 y_{12} \, du_1 \, du_2 + y_{22} \, du_2^2) Y.\end{gathered}$$

Ora se $\lambda X + \mu Y$ è una direzione di ν si hanno 2 direzioni corrispondenti in τ, che corrispondono ai 2 valori di $du_1 : du_2$ per cui

$$\begin{gathered}\mu (x_{11} \, du_1^2 + 2 x_{12} \, du_1 \, du_2 + x_{22} \, du_2^2) \\ - \lambda (y_{11} \, du_1^2 + 2 y_{12} \, du_1 \, du_2 + y_{22} \, du_2^2) = 0.\end{gathered}$$

Quando queste direzioni coincidono lo spazio lineare a 3 dimensioni tangente a V_2 e contenente la direzione $\lambda X + \mu Y$ è bitangente alla V_2. Si vede che ci sono 2 di tali spazi (eventualmente coincidenti) che corrispondono ai valori di λ e μ che soddisfano all' equazione

$$\begin{vmatrix} \mu x_{11} - \lambda y_{11} & \mu x_{12} - \lambda y_{12} \\ \mu x_{12} - \lambda y_{12} & \mu x_{22} - \lambda y_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Ad una di tali radici corrispondono dei du_2 e du_1 proporzionali ai termini di una riga del 1° membro di [12], ossia eliminando λ e μ dalle 2 relazioni:

$$\begin{gathered}(\mu x_{11} - \lambda y_{11}) \, du_1 + (\mu x_{12} - \lambda y_{12}) \, du_2 = 0 \\ (\mu x_{12} - \lambda y_{12}) \, du_1 + (\mu x_{22} - \lambda y_{22}) \, du_2 = 0,\end{gathered}$$

---

[1]) [A]. pag. 395.

dei du_1 e du_2 soddisfacenti all' equazione

$$[13] \qquad \begin{vmatrix} x_{11}\,du_1 + x_{12}\,du_2 & y_{11}\,du_1 + y_{12}\,du_2 \\ x_{12}\,du_1 + x_{22}\,du_2 & y_{12}\,du_1 + y_{22}\,du_2 \end{vmatrix} = 0$$

che si può scrivere

$$[13'] \qquad \begin{vmatrix} du_1^2 & -du_1\,du_2 & du_2^2 \\ x_{22} & x_{12} & x_{11} \\ y_{22} & y_{12} & y_{11} \end{vmatrix} = 0.$$

Ora dalle

$$f_{rs} = x_{rs}\,X + y_{rs}\,Y,$$

e dalla [11] risulta

$$(\sum_1^2{}_{rs}\,x_{rs}\,c^{rs})\,X + (\sum_1^2{}_{rs}\,y_{rs}\,c^{rs})\,Y = 0$$

e poichè X e Y sono liberi [1]),

$$\sum_1^2{}_{rs}\,x_{rs}\,c^{rs} = 0, \quad \sum_1^2{}_{rs}\,y_{rs}\,c_{rs} = 0.$$

Per queste la [13′] diventa, all' infuori di un fattore

$$c^{22}\,du_1^2 - 2c^{12}\,du_1\,du_2 + c^{11}\,du_2^2 = 0$$

od anche

$$F_2 = 0.$$

CAPITOLO III.

Superficie col σ_2 a 5 dimensioni, terne principali di normali. Superficie cicliche.

1. — Se x_{rs} ed y_{rs} sono due sistemi di funzioni a *2* indici, noi porremo

$$(x, y) = x_{11}\,y_{22} - 2x_{12}\,y_{12} + x_{22}\,y_{11},$$

e quindi anche

$$(x, x) = 2\,(x_{11}\,x_{22} - x_{12}^2)$$

---

1) [A]. pag. 360—361.

Def. — Se V_2 è una superficie dello spazio hilbertiano il cui σ_2 abbia 5 dimensioni, e quindi tale per cui $A \neq 0$, noi diremo terna principale di normali di V_2 ogni insieme di tre parametri normali X, Y, Z di σ_2 ortogonali fra loro e perpendicolari a V_2, per cui sia

$$(x, y) = (y, z) = (z, x) = 0,$$

con

$$x_{rs} = \int_g X f_{rs}\, dt,\ y_{rs} = \int_g Y f_{rs}\, dt,\ z_{rs} = \int_g Z f_{rs}\, dt.$$

2. — Teor. — Se V_2 è una superficie dello spazio hilbertiano col σ_2 a 5 dimensioni, esiste almeno una terna principale di normali di V_2.

Dim. — Consideriamo l' equazione

[14] $$\begin{vmatrix} A_{11,11} & A_{11,12} & A_{11,22} - \theta \\ A_{12,11} & A_{12,12} + \theta : 2 & A_{12,22} \\ A_{22,11} - \theta & A_{22,12} & A_{22,22} \end{vmatrix} = 0$$

che sviluppata e divisa per $-a^3 : 2$, diventa

[14′] $$\varrho^3 + 2 J_2 \varrho^2 + 4 J_4 \varrho - 2 J_1 = 0,$$

dove $\varrho = \theta : a$.

La [14′] ha almeno una radice reale ϱ_1.

Il sistema

[15] $$\begin{aligned} \lambda_{22} A_{11,11} - 2\lambda_{12} A_{11,12} + \lambda_{11}(A_{11,22} - \varrho_1 a) = 0 \\ \lambda_{22} A_{12,11} - 2\lambda_{12}\left(A_{12,12} + \varrho_1 \frac{a}{2}\right) + \lambda_{11} A_{12,22} = 0 \\ \lambda_{22}(A_{22,11} - \varrho_1 a) - 2\lambda_{12} A_{22,12} + \lambda_{11} A_{22,22} = 0 \end{aligned}$$

nelle λ_{rs} ha soluzione, e noi potremo trovare una sua soluzione reale λ_{rs} per la quale sia

$$(\lambda, \lambda) = \varrho_1 a.$$

Sia intanto λ_{rs} una qualunque soluzione reale di [15], e poniano

[16] $$L = (\lambda_{22} f_{11} - 2\lambda_{12} f_{12} + \lambda_{11} f_{22}) : (\varrho_1 a).$$

Moltiplicando i 2 membri di [16] per f_{rs} ed integrandó e tenendo conto delle [15], si ha

[17] $$\int_g L f_{rs}\, dt = \lambda_{rs},$$

e moltiplicando i due membri di [16] per L ed integrando, e tenendo conto di [17], si ottiene

$$[18] \qquad \int_g L^2\, dt = (\lambda, \lambda) : (\varrho_1 a)$$

e poichè il 1° membro di [18] è > 0, si potrà porre

$$[19] \qquad (\varrho_1 a) : (\lambda, \lambda) = \delta^2,$$

dove δ è un numero reale, ed il sistema $x_{rs} = \delta \lambda_{rs}$ è una soluzione reale di [15] che soddisfa la

$$[20] \qquad (x, x) = \varrho_1 a.$$

Ponendo inoltre

$$X = L\delta,$$

per le [17] e [18] si ha

$$[17'] \qquad \int_g X f_{rs}\, dt = x_{rs},$$

$$[18'] \qquad \int_g X^2\, dt = 1,$$

la quale [18'] dice che X è un parametro normale di σ_2 perpendicolare a V_2.

Siano inoltre Y' e Z' due altri parametri normali di σ_2 perpendicolari a V_2 e tali che X, Y', Z' siano fra loro ortogonali. Sarà

$$[21] \qquad f_{rs} = x_{rs} X + y'_{rs} Y' + z'_{rs} Z',$$

dove, x_{rs} è dato dalle [17'] ed inoltre

$$y'_{rs} = \int_g Y' f_{rs}\, dt, \quad z'_{rs} = \int_g Z' f_{rs}\, dt.$$

Moltiplicando per δ le [16], si ha

$$[16'] \qquad X = (x_{22} f_{11} - 2 x_{12} f_{12} + x_{11} f_{22}) : (\varrho_1 a),$$

e sostituendo in [16'] alle f_{rs} i secondi membri di [21], si ottiene, tenendo conto delle [20],

$$(x, y') Y' + (x, z') Z' = 0,$$

e poichè le Y' e Z' sono libere sarà

$$[22] \qquad (x, y') = (x, z') = 0.$$

Se risultasse inoltre $(y', z') = 0$, le X, Y', Z' formerebbero una terna principale, e quindi sarebbe provata l'esistenza di una terna principale.

Se invece $(y', z') \neq 0$, poniano

$$Y = \cos\alpha\, Y' - \operatorname{sen}\alpha\, Z'$$
$$Z = \operatorname{sen}\alpha\, Y' + \cos\alpha\, Z'$$

ed allora X e Y sono 2 altri parametri normali di σ_2 ortogonali fra loro e a V_2 ed a X.

Si ha poi

$$Y' = \cos\alpha\, Y + \operatorname{sen}\alpha\, Z$$
$$Z' = -\operatorname{sen}\alpha\, Y + \cos\alpha\, Z,$$

e quindi

$$f_{rs} = x_{rs} X + y_{rs} Y + z_{rs} Z,$$

dove

$$y_{rs} = y'_{rs}\cos\alpha - z'_{rs}\operatorname{sen}\alpha$$
$$z_{rs} = y'_{rs}\operatorname{sen}\alpha + z'_{rs}\cos\alpha.$$

A causa delle [22] si hanno le

[22′] $$(x, y) = (x, z) = 0.$$

Si ha inoltre

$$(y, z) = [(y', y') - (z', z')]\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + (y', z')\cos 2\alpha,$$

e, scegliendo α in modo che

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{(z', z') - (y', y')}{2(y', z')},$$

si ha

$$(y, z) = 0,$$

ed allora X, Y, Z sono una terna principale. Così è completamente dimostrato il teor.

3. — Supposto che il σ_2 di V_2 sia a 5 dimensioni, e che X, Y, Z sia una terna principale, sarà

$$f_{rs} = x_{rs} X + y_{rs} Y + z_{rs} Z,$$

con

$$x_{rs} = \int_g X f_{rs}\, dt, \quad y_{rs} = \int_g Y f_{rs}\, dt, \quad z_{rs} = \int_g Z f_{rs}\, dt,$$

ed

$$(x, y) = (y, z) = (z, x) = 0,$$

ed, a causa di queste relazioni, si ha subito

$$x_{22} f_{11} - 2x_{12} f_{12} + x_{11} f_{22} = (x, x) X \text{ e analoghe}$$

e moltiplicando per f_{rs} ed integrando

$$x_{22} A_{11,11} - 2x_{12} A_{12,11} + x_{11}[A_{11,22} - (x, x)] = 0$$

[15′] $$x_{22} A_{12,11} - 2x_{12}\left[A_{12,12} + \frac{(x, x)}{2}\right] + x_{11} A_{12,22} = 0$$

$$x_{22}[A_{22,11} - (x, x)] - 2x_{12} A_{12,22} + x_{11} A_{22,22} = 0$$

ed analoghe.

Risulta che

$$(x, x), \quad (y, y), \quad (z, z)$$

devono essere radici di [14]

Se le radici di [14] sono a *2* a *2* diverse, per ognuna di esse la matrice del 1° membro di [14] ha caratteristica *2*, e quindi le corrispondenti [15] hanno una sola soluzione. Si vede così che in tal caso si ha una sola terna principale.

Per determinarla, indichiamo con ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 le tre radici diverse di [14′], che sono degli invarianti. Osserviamo poi che

$$W_{rs,pq} = (a_{rp} a_{sq} + a_{rq} a_{sp} - 2 a_{rs} a_{pq}) : 2$$

è un covariante che ha le stesse simmetrie di $A_{rs,pq}$, per cui

$$W_{11,11} = W_{22,22} = W_{11,12} = W_{12,22} = 0,\ W_{11,22} = -a,\ W_{12,12} = a:2,$$

ed allora anche

$$\underset{i}{\Delta}_{rs,pq} = A_{rs,pq} + \varrho_i W_{rs,pq}$$

è un covariante che ha le stesse simmetrie di $A_{rs,pq}$, e il determinante $\underset{i}{\Delta}$, formato cogli elementi $\underset{i}{\Delta}_{rs,pq}$ come è stato formato A cogli $A_{rs,pq}$, è nullo ed ha caratteristica *2*.

Indichiamo con $\underset{i}{\Delta}^{rs,pq}$ i complementi algebrici di $\underset{i}{\Delta}_{rs,pq}$ in $\underset{i}{\Delta}$, e poniano

$$\underset{i}{\delta}^{rs,pq} = 2^{\varepsilon_{rs}+\varepsilon_{pq}} . \underset{i}{\Delta}^{rs,pq} : (4 a^{n+1}).$$

Questo è un controvariante a *4* apici, ed essendo $\underset{i}{\Delta} = 0$, posto

$$\underset{i}{d} = \sqrt{|\underset{i}{\delta}^{11,11}|}$$

e

$$\underset{i}{\gamma}^{rs} = \frac{\underset{i}{\delta}^{11,rs}}{\underset{i}{d}}$$

si ha[1])

$$\underset{i}{\delta}^{rs,pq} = \pm \underset{i}{\gamma}^{rs} . \underset{i}{\gamma}^{pq}.$$

Il complemento algebrico di $\underset{i}{\gamma}^{rs}$ moltiplicato per a si indicherà con $\underset{i}{\gamma}_{rs}$, ed i sistemi x_{rs}, y_{rs}, z_{rs} risulteranno proporzionali ai cova-

---

[1]) Poichè anche i risultati del Cap. II n° 2 valgono per qualunque sistema covariante $A_{rs,pq}$ avente le solite simmetrie, e quindi senza tenere conto dei legami colla varietà.

rianti $\underset{1}{\gamma_{rs}}, \underset{2}{\gamma_{rs}}, \underset{3}{\gamma_{rs}}$, il fattore di proporzionalità dovendo essere determinato in modo che

$$(x, x) = \varrho_1 a, \quad (y, y) = \varrho_2 a, \quad (z, z) = \varrho_3 a.$$

4. — Non può darsi che le radici di [14′] siano tutte uguali, perchè in tal caso le x_{rs}, y_{rs}, z_{rs} sarebbero soluzioni del medesimo sistema [15], e quindi, o sono linearmente dipendenti, ed allora il σ_2 ha meno di 5 dimensioni, o non sono linearmenti dipendenti ed allora devono essere nulli tutti gli elementi del 1° membro di [14], e dalla relazione $A_{11,11} = 0$ che ne conseguirebbe si avrebbe ancora che il numero delle dimensioni del σ_2 sarebbe < 5.

5. — Resta a supporsi che le radici di [14′] siano una doppia ed una semplice. In tal caso due delle espressioni

$$(x, x), \quad (y, y), \quad (z, z)$$

saranno uguali, per esempio sarà

$$(x, x) = (y, y).$$

Allora il sistema [15] in cui ϱ_1 è una conveniente radice di [14′] è soddisfatto tanto da x_{rs}, quanto da y_{rs}, e poichè le x_{rs} e y_{rs} non possono essere proporzionali, perchè allora le f_{rs} risulterebbero vincolate, la matrice del 1° membro di [14] dovrà avere caratteristica 1, e ϱ_1 è radice doppia di [14′].

Dunque se [14′] ha una radice ϱ_1 doppia ed un' altra semplice ϱ_2, sarà

$$(x, x) = (y, y) = \varrho_1 a, \quad (z, z) = \varrho_2 a,$$

le x_{rs} e y_{rs} saranno 2 soluzioni del sistema [15], per cui $(x, y) = 0$, le z_{rs} soddisferanno le relazioni

$$z_{22} A_{11,11} - 2 z_{12} A_{11,12} + z_{11} (A_{11,22} - \varrho_2 a) = 0$$
$$z_{22} A_{12,11} - 2 z_{12} \left(A_{12,12} + \varrho_2 \frac{a}{2}\right) + z_{11} A_{12,22} = 0$$
$$z_{22} (A_{22,11} - \varrho_2 a) - 2 z_{12} A_{22,12} + z_{11} A_{22,22} = 0.$$

È evidente in questo caso che facendo ruotare lo spazio a 3 dimensioni appartenente a σ_2 e perpendicolare a V_2 intorno alla retta uscente dal punto di V_2 ed avente per parametro Z, la terna X, Y, Z si porta in un altra terna principale, perchè detto α l'angolo di rotazione, ed X' e Y' i parametri normali delle nuove posizione di X e Y, e x'_{rs}, y'_{rs} i soliti covarianti associati, si ha

$$(x', y') = [(x, x) - (y, y)] \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + (x, y) \cos 2\alpha,$$

e si vede che

$$(x', y') = 0$$

perchè $(x, x) = (y, y)$ e $(x, y) = 0$.

E interessante osservare che essendo la caratteristica di $\underset{1}{\Delta}$ uguale ad *1*, risulterà

$$\underset{1}{\Delta}_{rs,pq} = \pm\, \omega_{rs}\, \omega_{pq},$$

dove ω_{rs} è un covariante, e per le [15] dovrà essere

$$(x, \omega) = (y, \omega) = 0,$$

il che prova che i sistemi ω_{rs} e z_{rs} devono essere proporzionali.

6. — Concludendo

Se una superficie V_2 ha un σ_2 di *5* dimensioni, o esiste una sola terna principale, o ne esistono infinite che si ottengono da una di esse facendola ruotare intorno ad una determinata delle sue rette.

Il 1º caso si presenta quando l'equazione [14'] ha il discriminante diverso da *zero*, ed il 2º quando questo discriminante è *zero*, pur non avendo la [14'] tutte e tre le sue radici uguali.

Def. Un punto di una V_2 col σ_2 a *5* dimensioni, in cui si ha una sola terna principale si dice generico, ed un punto con infinite terne principali si dice ciclico.

7. — Def. Una superficie V_2 col σ_2 a *5* dimensioni, la quale ha tutti i punti ciclici, si dice ciclica.

Esempio.

Siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ *6* parametri normali fra loro ortogonali e consideriamo la superficie V_2 di equazione

$$f = \cos u_1\, \varphi_1 + \operatorname{sen} u_1\, \varphi_2 + \cos u_2\, \varphi_3 + \operatorname{sen} u_2\, \varphi_4 + \\ + \cos(u_1 + u_2)\, \varphi_5 + \operatorname{sen}(u_1 + u_2)\, \varphi_6.$$

Per essa si ha

$$f_1 = -\operatorname{sen} u_1\, \varphi_1 + \cos u_1\, \varphi_2 - \operatorname{sen}(u_1 + u_2)\, \varphi_5 + \cos(u_1 + u_2)\, \varphi_6$$
$$f_2 = -\operatorname{sen} u_2\, \varphi_3 + \cos u_2\, \varphi_4 - \operatorname{sen}(u_1 + u_2)\, \varphi_5 + \cos(u_1 + u_2)\, \varphi_6$$

ed inoltre, indicando con f'_{rs} le derivate seconde ordinarie di f,

$$f'_{11} = -\cos u_1\,\varphi_1 - \operatorname{sen} u_1\,\varphi_2 - \cos(u_1+u_2)\,\varphi_5 - \operatorname{sen}(u_1+u_2)\,\varphi_6$$
$$f'_{12} = -\cos(u_1+u_2)\,\varphi_5 - \operatorname{sen}(u_1+u_2)\,\varphi_6$$
$$f'_{22} = -\cos_2\varphi_3 - \operatorname{sen} u_2\,\varphi_4 - \cos(u_1+u_2)\,\varphi_5 - \operatorname{sen}(u_1+u_2)\,\varphi_6$$

e poichè risulta dalle espressioni trovate che

$$\int_g f'_{rs} f_p\,dt = 0 \quad (r, s, p = 1, 2)$$

si ha anche

$$f_{rs} = f'_{rs}, \quad (r, s = 1, 2)$$

e quindi

$$A_{11,11} = A_{22,22} = 2,\ A_{11,12} = A_{11,22} = A_{12,22} = A_{12,22} = 1,$$

e l'equazione [14] diventa

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1-\theta \\ 1 & 1+\dfrac{\theta}{2} & 1 \\ 1-\theta & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

che è soddisfatta, come si verifica subito, da $\theta = -1$, e da $\theta = 2$. Infatti per $\theta = -1$ la prima e la terza colonna risultano uguali, e per $\theta = 2$ la prima colonna risulta uguale alla differenza della seconda e della terza colonna.

Si vede poi facilmente che $\theta = -1$ annulla tutti i minori di 2° ordine del 1° membro, e quindi la $\theta = -1$ è radice doppia. Dunque la superficie considerata è ciclica.

Ogni terna principale di normali conterrà il parametro $Z = f : \sqrt{3}$, ed altri due parametri X, Y ad esso ortogonali ed ortogonali fra loro, ed es,

$$X = (\psi_1 - \psi_2) : \sqrt{2}, \quad Y = (\psi_1 + \psi_2 - 2\psi_3) : \sqrt{6},$$

dove

$$\psi_1 = \cos u_1\,\varphi_1 + \operatorname{sen} u_1\,\varphi_2$$
$$\psi_2 = \cos u_2\,\varphi_3 + \operatorname{sen} u_2\,\varphi_4$$
$$\psi_3 = \cos(u_1+u_2)\,\varphi_5 + \operatorname{sen}(u_1+u_2)\,\varphi_6.$$

Con queste notazioni è anche

$$Z = (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) : \sqrt{3}.$$

8. — Se V_2 ha il σ_2 a 5 dimensioni, le normali principali alle sue geodetiche formano un cono quadrico che diremo il cono

geodetico, e se X, Y, Z sono una terna principale, un punto di questo cono sarà dato da

$$f + \xi X + \eta Y + \zeta Z,$$

dove ξ, η, ζ sono le sue coordinate rispetto agli assi X, Y, Z, e poichè

$$X = (x_{22} f_{11} - 2 x_{12} f_{12} + x_{11} f_{22}) : (x, x),$$

ed analoghe, detto punto sarà dato da

$$f + \lambda_{22} f_{11} - 2 \lambda_{12} f_{12} + \lambda_{11} f_{22},$$

dove

$$\lambda_{rs} = \xi \,.\, x_{rs} : (x, x) + \eta \cdot y_{rs} : (y, y) + \zeta \,.\, z_{rs} : (z, z),$$

e

$$(\lambda, \lambda) = 0,$$

poichè deve risultare

$$\lambda_{11} : - \lambda_{12} : \lambda_{22} = du_2^2 : du_1\, du_2 : du_1^2$$

e quindi con

$$\xi^2 : (x, x) + \eta^2 : (y, y) + \zeta^2 : (z, z) = 0,$$

il che prova che una terna principale è un triedro trirettangolo autopolare rispetto al cono geodetico. Quando il punto è ciclico, ossia la terna principale non è determinata, il cono geodetico è un cono di rotazione.

CAPITOLO IV.

Superficie col σ_2 a 4 dimensioni. Coppie principali di normali. Superficie cicliche.

1. — Def. Se V_2 è una superficie dello spazio hilbertiano il cui σ_2 abbia *4* dimensioni, e quindi tale per cui A ha caratteristica *2*, noi diremo coppia principale di normali di V_1 ogni coppia X, Y di parametri normali di σ_2 ortogonali fra loro e perpendicolari a V_2, per cui sia $(x, y) = 0$, con

$$x_{rs} = \int_0 X f_{rs}\, dt, \quad y_{rs} = \int_0 Y f_{rs}\, dt.$$

2. — Teor. Se V_2 è una superficie col σ_2 a *4* dimensioni, esiste almeno una coppia principale di normali a V_2.

Dim. — Indichiamo con τ il piano tangente a V_2 e con ν il piano perpendicolare a τ che giace in σ_2.

Siano X, Y due parametri normali di ν fra loro ortogonali, e x_{rs}, y_{rs} i soliti relativi covarianti. Sarà

$$f_{rs} = x_{rs} X + y_{rs} Y.$$

Una direzione di τ è data da

$$f_1 \, du_1 + f_2 \, du_2,$$

la normale principale alla geodetica tangente a questa direzione sarà data da

$$f_{11} \, du_1^2 + 2 f_{12} \, du_1 \, du_2 + f_{22} \, du_2^2 = \lambda X + \mu Y,$$

dove

$$\lambda = \sum_{1}^{2}{}_{rs} \, x_{rs} \, du_r \, du_s, \quad \mu = \sum_{1}^{2}{}_{rs} \, y_{rs} \, du_r \, du_s.$$

Si vede così che ad ogni valore di $du_1 : du_2$, cioè ad ogni direzione τ corrisponde un solo valore di $\lambda : \mu$, cioè una sola direzione di ν, e che ad ogni direzione di ν ne corrispondono due di τ (eventualmente coincidenti).

Le direzioni di ν che corrispondono a direzioni coincidenti di τ si diranno normali doppie. Esse corrispondono ai valori di $\lambda : \mu$ che annullano il discriminante dell' equazione

[23] $$\Sigma_{rs} (\mu x_{rs} - \lambda y_{rs}) \, du_r \, du_s = 0$$

ossia che soddisfano l'equazione

[24] $$\begin{vmatrix} \mu x_{11} - \lambda y_{11} & \mu x_{12} - \lambda y_{12} \\ \mu x_{12} - \lambda y_{12} & \mu x_{22} - \lambda y_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Si vede così che esistono due normali doppie che possono essere reali e distinte, reali e coincidenti ed imaginarie coniugate, ed in particolare le due rette cicliche di ν.

Corrispondentemente noi diremo che il punto è iperbolico, parabolico od ellittico ed in particolare ciclico.

Se il punto non è ciclico le due normali doppie dividono ν in due angoli, le cui bisettrici sono reali e fra loro perpendicolari. Dico che queste bisettrici formano una coppia principale. Supponiamo che i parametri X e Y siano quelli di queste 2 bisettrici, allora se $\lambda_1 X + \mu_1 Y$, $\lambda_2 X + \mu_2 Y$ sono i parametri delle 2 normali doppie, poichè X e Y devono risultare loro bisettrici, dovrà essere

$$\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 = 0$$

e poichè λ_1, μ_1 e λ_2, μ_2 soddisfano la [24] dovrà essere nullo il coefficiente di $\lambda . \mu$ in [24], e quindi essere $(x, y) = 0$ c. d. d.

Se il punto è ciclico, dovendo la [24] risultare equivalente alla $\lambda^2 + \mu^2 = 0$, dovrà essere (qualunque sia il sistema di partenza X, Y)

$$(x, x) = (y, y), \quad (x, y) = 0,$$

il che prova che in questo caso ogni coppia di direzioni di ν fra loro ortogonali è una coppia principale.

Così è dimostrato completamente il teor.

3. — Se X e Y è una coppia principale, è al solito

$$f_{rs} = x_{rs} X + y_{rs} Y,$$

con $(x, y) = 0$, da cui si ricava

$$x_{22} f_{11} - 2 x_{12} f_{12} + x_{11} f_{22} = (x, x) X$$

ed analoga per y, e moltiplicando per f_{rs} ed integrando si hanno le [15′] e le analoghe per y.

Ciò prova che (x, x) e (y, y) sono radici di [14].

Ora la [14], essendo nel nostro caso $A = 0$ diventa, posto $\varrho = \theta : a$ e dividendo per ϱ,

[14″] $$\varrho^2 + 2 J_2 \varrho + 4 J_4 = 0.$$

Se le radici di [14″] sono uguali si avrà un punto ciclico.

4. — Se λ e μ soddisfano la [24], $\lambda X + \mu Y$ è parametro di una normale doppia. La perpendicolare in ν a questa normale doppia ha per parametro normale

$$z = \frac{\mu X - \lambda Y}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$$

e, se $z_{rs} = \int\limits_{\Omega} Z f_{rs} \, dt$, si ha per la [24] $(z, z) = 0$. Si ha così il

T e o r. Le perpendicolari in ν alle normali doppie hanno uu covariante con determinante nullo.

5. — D e f. — Una superficie V_2 col σ_2 a *4* dimensioni, la quale ha tutti i punti ciclici, si dice c i c l i c a.

E s e m p i o.

Siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ *4* parametri normali fra loro ortogonali, ed U e V la parte reale ed il coefficiente dell' imaginario di una funzione analitica $U + iV$ della variabile complessa $u_1 + iu_2$, e consideriamo la superficie di equazione

$$f = u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2 + U\varphi_3 + V\varphi_4.$$

Dico che essa è ciclica.

Intanto indicando con U_1, U_2, U'_{11}, U'_{12}, U'_{22} le derivate parziali prime e seconde ordinarie di U rispetto alle u_i, ed analogamente per V, si ha

$$U_1 = V_2, \quad U_2 = - V_1, \quad U_{22} = - U_{11},$$

e quindi

$$\begin{aligned} f_1 &= \varphi_1 + U_1\varphi_3 + V_1\varphi_4 = \varphi_1 + U_1\varphi_3 - U_2\varphi_4 \\ f_2 &= \varphi_2 + U_2\varphi_3 + V_2\varphi_4 = \varphi_2 + U_2\varphi_3 + U_1\varphi_4 \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$a_{11} = \int_g f_1^2\, dt = 1 + \Delta, \quad a_{12} = \int_g f_1 f_2\, dt = 0, \quad a_{22} = \int_g f_2^2\, dt = 1 + \Delta,$$

dove $\Delta = U_1^2 + U_2^2$.

Se poi indichiamo con f'_{rs} la derivata seconda ordinaria di f rispetto ad u_r e ad u_s, abbiamo

$$\begin{aligned} f'_{11} &= U_{11}\varphi_3 - U_{12}\varphi_4 \\ f'_{12} &= U_{12}\varphi_3 + U_{11}\varphi_4 \\ f'_{22} &= U_{22}\varphi_3 + U_{12}\varphi_4 = - U_{11}\varphi_3 + U_{12}\varphi_4. \end{aligned}$$

Da queste espressioni risulta che $f'_{22} = - f'_{11}$ e che quindi dovrà essere

$$f_{22} = - f_{11}.$$

Inoltre sarà

$$f_{11} = f'_{11} - \alpha f_1 - \beta f_2,$$

dove α e β devono essere scelte in modo che f_{11} risulti ortogonale ad f_1 e ad f_2, ossia in modo che

$$\begin{aligned} \int_g f_{11} f_1\, dt &= U_1 U_{11} + U_2 U_{12} - \alpha(1 + \Delta) = 0 \\ \int_g f_{11} f_2\, dt &= U_2 U_{11} - U_1 U_{12} - \beta(1 + \Delta) = 0. \end{aligned}$$

Sarà dunque

$$f_{11} = U_{11}\varphi_3 - U_{12}\varphi_4 - \frac{U_{11}}{1 + \Delta}(U_1 f_1 + U_2 f_2) - \frac{U_{12}}{1 + \Delta}(U_2 f_1 - U_1 f_2).$$

Inoltre si avrà poi

$$f_{12} = f'_{12} - \gamma f_1 - \delta f_2,$$

con γ e δ scelte in modo che f_{12} risulti ortogonale ad f_1 e f_2, ossia in modo che

$$\int_g f_{12} f_1 \, dt = U_1 U_{12} - U_2 U_{11} - \gamma(1 + \Delta) = 0$$
$$\int_g f_{12} f_2 \, dt = U_2 U_{12} + U_1 U_{11} - \delta(1 + \Delta) = 0.$$

Sarà dunque

$$f_{12} = U_{12} \varphi_3 + U_{11} \varphi_4 - \frac{U_{12}}{1+\Delta}(U_1 f_1 + U_2 f_2) + \frac{U_{11}}{1+\Delta}(U_2 f_1 - U_1 f_2).$$

E si verifica facilmente che

$$\int_g f_{11} f_{12} \, dt = 0.$$

Ed indicando con X e Y parametri normali delle direzioni che hanno per parametri f_{11} ed f_{12} si ha

$$f_{rs} = x_{rs} X + y_{rs} Y,$$

con

$$y_{11} = y_{22} = x_{12} = 0$$

e

$$x_{11} = - x_{22} = \pm \sqrt{(U_{11}^2 + U_{12}^2) \cdot K}$$
$$y_{12} = \pm \sqrt{(U_{11}^2 + U_{12}^2) \cdot K}$$

dove

$$K = 1 + \frac{\Delta}{(1+\Delta)^2}.$$

Si ha così

$$(x, y) = 0, \quad (x, x) = (y, y),$$

e la superficie che si considera è ciclica.

Le superficie qui studiate furono già considerate col nome di *superficie riemanniane* dal Kommerell[1]).

---

[1]) (F).

Sur les fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz généralisée.

Par

Stanisław Ruziewicz (Lwów).

Le but de cette note est de donner pour tout α positif < 1 un exemple d'une fonction satisfaisant à la condition de Lipschitz généralisée, c'est-à-dire à l'inégalité:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M |x - y|^{\alpha},$$

et ne possédant de dérivée pour aucune valeur de l'intervalle $(0, 1)$.

Soit α un nombre positif < 1. Choissons un nombre naturel $g > 2$ suffisament grand pour qu'on ait

$$(3g - 2)^{\alpha} < g; \tag{1}$$

on vérifie sans peine que de tels nombres g existent pour tout $\alpha < 1$.

Posons pour tout nombre entier γ, où $0 \leqslant \gamma \leqslant 3g - 3$:

$$\begin{aligned}
&a_{\gamma} = \frac{\gamma}{3g}, \ b_{\gamma} = \frac{1}{g} && \text{pour } \gamma \equiv 0 \pmod 3 \\
&a_{\gamma} = \frac{\gamma + 2}{3g}, \ b_{\gamma} = -\frac{1}{g} && \quad \text{"} \quad \gamma \equiv 1 \quad \text{"} \\
&a_{\gamma} = \frac{\gamma - 2}{3g}, \ b_{\gamma} = \frac{1}{g} && \quad \text{"} \quad \gamma \equiv 2 \quad \text{"}
\end{aligned} \tag{2}$$

On a

$$0 \leqslant a_{\gamma} \leqslant \frac{g-1}{g}, \tag{3}$$

et

$$a_{\gamma} + b_{\gamma} = a_{\gamma+1}. \tag{4}$$

Soit x un nombre réel de l'intervalle $(0, 1)$, défini par le développement

$$(5) \qquad x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{(3g-2)^\nu};$$

posons

$$(6) \qquad f(x) = a_{\gamma_1} + b_{\gamma_1} a_{\gamma_2} + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} a_{\gamma_3} + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} b_{\gamma_3} a_{\gamma_4} + \dots$$

La fonction $f(x)$ ainsi définie est univoque pour tout nombre x de l'intervalle $(0, 1)$; en effet, si x a deux développements différent

$$x = \frac{\gamma_1}{3g-2} + \frac{\gamma_2}{(3g-2)^2} + \dots + \frac{\gamma_n}{(3g-2)^n} \qquad (\gamma_n > 0)$$

et

$$x = \frac{\gamma_1}{3g-2} + \frac{\gamma_2}{(3g-2)^2} + \dots + \frac{\gamma_n - 1}{(3g-2)^n} + \frac{3g-3}{(3g-3)^{n+1}} + \dots,$$

et si $f(x)$ est définie pour le premier de ces développements:

$$f(x) = a_{\gamma_1} + b_{\gamma_1} a_{\gamma_2} + \dots + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n-1}} a_{\gamma_n},$$

en désignant par $\bar{f}(x)$ le côté droit de (6) pour le second développement, nous aurons

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) = a_{\gamma_1} + b_{\gamma_1} a_{\gamma_1} + \dots + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n-1}} a_{\gamma_n-1} + \\ + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n-1}} b_{\gamma_n-1} \frac{3g-3}{3g} + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n-1}} b_{\gamma_n-1} \frac{3g-3}{3g} + \dots \\ = a_{\gamma_1} + b_{\gamma_1} a_{\gamma_2} + \dots + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n-1}} a_{\gamma_n-1} + \\ + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n-1}} [a_{\gamma_n-1} + b_{\gamma_n-1}], \end{aligned}$$

donc, d'après (4):

$$\bar{f}(x) = f(x).$$

Soit maintenant

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{(3g-2)^\nu}$$

et

$$h = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\eta_\nu}{(3g-2)^\nu},$$

où

$$\eta_{n-1} \geqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 < x + h \leqslant 1.$$

Le développement de $x+h$ est

$$(\alpha) \qquad x+h=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{(3g-2)^\nu}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\gamma_\nu}{(3g-2)^\nu},$$

ou bien

$$(\beta) \qquad x+h=\sum_{\nu=1}^{p}\frac{\gamma_\nu}{(3g-2)^\nu}+\frac{\gamma_p+1}{(3g-2)^p}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\gamma'_\nu}{(3g-2)^\nu}$$

$$\begin{pmatrix}1\leqslant p\leqslant n\\ \gamma_p<3g-3\end{pmatrix}.$$

Dans le cas (α) nous aurons

$$f(x+h)-f(x)=b_{\gamma_1}\,b_{\gamma_2}\dots b_{\gamma_n}\,[(a_{\gamma'_{n+1}}-a_{\gamma_{n+1}})+$$
$$+(b_{\gamma'_{n+1}}\,a_{\gamma'_{n+2}}-b_{\gamma_{n+1}}\,a_{\gamma_{n+2}})+\dots],$$

donc, d'après (2) et (3):

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant\frac{1}{g^n}\left[2\frac{g-1}{g}+2\frac{g-1}{g^2}+\dots\right]=\frac{2}{g^n}.$$

Dans le cas (β), en posant

$$\xi=\frac{\gamma_1}{3g-2}+\frac{\gamma_2}{(3g-2)^2}+\dots+\frac{\gamma_p+1}{(3g-2)^p}$$

$$=\frac{\gamma_1}{3g-2}+\frac{\gamma_2}{(3g-2)^2}+\dots+\frac{\gamma_p}{(3g-2)^p}+\frac{3g-3}{(3g-2)^n}+\frac{3g-3}{(3g-2)^{n+1}}+\dots$$

nous obtenons (x et le second développement de ξ, et de même $x+h$ et le premier développement de ξ coïncidant resp. dans ses n premiers chiffres et se différant dans le $n+1$ chiffre), en utilisant l'inégalité obtenue dans le cas α:

$$|f(x+h)-f(x)|\leq|f(x+h)-f(\xi)|+|f(\xi)-f(x)|\leqslant\frac{4}{g^n}.$$

Dans les deux cas (α) et (β) nous obtenous donc pour $h>0$, $0\leqslant x<1$, $0<x+h\leqslant 1$:

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant 4g\frac{1}{g^{n+1}},$$

ce qui donne, d'après (1):

$$|f(x+h)-f(x)|<\frac{4g}{[(3g-2)^{n+1}]^\alpha},$$

donc

$$|f(x+h)-f(x)|<3g\,h^\alpha.$$

Pour $h < 0$ on obtient l'inégalité

$$|f(x+h) - f(x)| < 3g\,|h|^\alpha.$$

La fonction $f(x)$ satisfait donc à la condition de Lipschitz généralisée.

Soit maintenant (5) le développement d'un nombre x, ou $0 \leqslant x < 1$, ayant une infinité de chiffres γ_n différents de $3g-3$.

Supposons que pour une infinité de $n_\varkappa$, tels que $\gamma_{n_\varkappa} \neq 3g-3$, on a

$$\gamma_{n_\varkappa} \equiv 0 \pmod 3$$

(nous avons donc $\gamma_{n_\varkappa} \leqslant 3g-6$).

En remplaçant $\gamma_{n_\varkappa}$ par $\gamma_{n_\varkappa}+2$, nous trouvons pour

$$x_{n_\varkappa} = \sum_{\nu=1}^{n_\varkappa-1} \frac{\gamma_\nu}{(3g-2)^\nu} + \frac{\gamma_{n_\varkappa}+2}{(3g-2)^{n_\varkappa}} + \sum_{\nu=n_\varkappa+1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{(3g-2)^\nu},$$

d'après (1):

$$f(x_{n_\varkappa}) = a_{\gamma_1} + b_{\gamma_1} a_{\gamma_2} + \ldots + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-2}} a_{\gamma_{n_\varkappa-1}} +$$
$$+ b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-2}} b_{\gamma_{n_\varkappa-1}} \frac{(\gamma_{n_\varkappa}+2)-2}{3g} +$$
$$+ b_{\gamma_1} b_{\gamma_1} \ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}} \frac{1}{g} a_{\gamma_{n_\varkappa+1}} + \ldots = f(x),$$

d'où

$$\lim_{\varkappa\to\infty} \frac{f(x_{n_\varkappa}) - f(x)}{x_{n_\varkappa} - x} = 0.$$

Or, en remplaçant $\gamma_{n_\varkappa}$ par $\gamma_{n_\varkappa}+3$, nous trouvons, pour

$$\bar{x}_{n_\varkappa} = \sum_{\nu=1}^{n_\varkappa-1} \frac{\gamma_\nu}{(3g-2)^\nu} + \frac{\gamma_{n_\varkappa}+3}{(3g-2)^{\nu_\varkappa}} + \sum_{\nu=n_\varkappa+1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{(3g-2)^\nu},$$

$$f(\bar{x}_{n_\varkappa}) = a_{\gamma_1} + b_{\gamma_1} a_{\gamma_2} + \cdots + b_{\gamma_1} q_{\gamma_2} \cdots b_{\gamma_{n_\varkappa-2}} a_{\gamma_{n_\varkappa-1}} +$$
$$+ b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}} \frac{\gamma_{n_\varkappa}+3}{3g} + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}} \frac{1}{g} a_{\gamma_{n_\varkappa+1}} + \ldots =$$
$$= f(x) + b_{\gamma_1} b_\gamma \ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}} \frac{1}{g},$$

d'où, d'après (2):

$$\lim_{\varkappa\to\infty}\left|\frac{f(\bar{x}_{n_\varkappa})-f(x)}{\bar{x}_{n_\varkappa}-x}\right|=\lim_{\varkappa\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{3g-2}{g}\right)^{n_\varkappa}=\infty.$$

La fonction $f(x)$ est donc dépourvue de dérivée pour toute valeur x de l'intervalle $(0,1)$, dont le développement à base $3g-2$ a une infinité de chiffres $\gamma_n\equiv 0 \pmod 3$, $\gamma_n\leqslant 3g-6$.

Supposons maintenant, qu'on a pour une infinité des indices $n_\varkappa$:

$$\gamma_{n_\varkappa}\equiv 1 \pmod 3).$$

En remplaçant $\gamma_{n_\varkappa}$ par $\gamma_{n_\varkappa}+1$, nous avons

$$f(x_{n_\varkappa})=a_{\gamma_1}+b_{\gamma_1}a_{\gamma_2}+\ldots+b_{\gamma_1}b_{\gamma_2}\ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-2}}a_{\gamma_{n_\varkappa-1}}+$$
$$+b_{\gamma_1}b_{\gamma_2}\ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}}\frac{(\gamma_{n_\varkappa}+1)-2}{3g}+b_{\gamma_1}b_{\gamma_2}\ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}}\frac{1}{g}a_{\gamma_{n_\varkappa+2}}+\ldots=$$
$$=f(x)-b_{\gamma_1}b_{\gamma_2}\ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}}\frac{1}{g}+2\,b_{\gamma_1}b_{\gamma_2}\ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}}\frac{1}{g}a_{\gamma_{n_\varkappa+2}}+\ldots,$$

donc

$$\frac{f(x_{n_\varkappa})-f(x)}{x_{n_\varkappa}-x}=-\frac{(2g-3)^{n_\varkappa}b_{\gamma_1}b_{\gamma_2}\ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}}}{g}.$$
$$.\,[1-2a_{\gamma_{n_\varkappa+1}}-2b_{\gamma_{n_\varkappa+1}}a_{\gamma_{n_\varkappa+2}}-\ldots].$$

En emplaçant $\gamma_{n_\varkappa}$ par $\gamma_{n_\varkappa}-1$, nous avons:

$$f(\bar{x}_{n_\varkappa})=f(x)-b_{\gamma_1}b_{\gamma_2}\ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}}\frac{1}{g}+2b_{\gamma_1}b_{\gamma_2}\ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}}\frac{1}{g}a_{\gamma_{n_\varkappa+1}}+\ldots,$$

d'où

$$\frac{f(\bar{x}_{n_\varkappa})-f(x)}{\bar{x}_{n_\varkappa}-x}=\frac{(2g-3)^{n_\varkappa}b_{\gamma_1}b_{\gamma_2}\ldots b_{\gamma_{n_\varkappa-1}}}{g}.$$
$$.\,[1-2a_{\gamma_{n_\varkappa+1}}-2b_{\gamma_{n_\varkappa+1}}a_{\gamma_{n_\varkappa+2}}-\ldots]$$
$$=-\frac{f(x_{n_\varkappa})-f(x)}{x_{n_\varkappa}-x}.$$

Si pour ces valeurs la dérivée existait, elle serait nécessairement nulle, et nous aurions l'égalité

(*) $$\lim_{\varkappa\to\infty}[a_{\gamma_{n_\varkappa+1}}+b_{\gamma_{n_\varkappa+1}}a_{\gamma_{n_\varkappa+2}}+\ldots]=\tfrac{1}{2}.$$

D'autre part, en remplaçant $\gamma_{n_\varkappa}$ par $\gamma_{n_\varkappa}+2$, nous avons:

$$\overline{\overline{f}}(x_{n_\varkappa}) = f(x) + 2b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n_\varkappa - 1}} \frac{1}{g} a_{\gamma_{n_\varkappa + 1}} + 2b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n_\varkappa - 1}} \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{g} b_{\gamma_{n_\varkappa + 1}} a_{\gamma_{n_\varkappa + 2}} + \dots,$$

d'où

$$\frac{f(\overline{\overline{x}}_{n_\varkappa}) - f(x)}{\overline{\overline{x}}_{n_\varkappa} - x} = \frac{(2g-3)^{n_\varkappa} b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n_\varkappa - 1}}}{2g} [2a_{\gamma_{n_\varkappa + 1}} + 2b_{\gamma_{n_\varkappa + 1}} a_{\gamma_{n_\varkappa + 2}} + \dots],$$

donc, la supposition que pour ces valeurs une dérivée existe, entraîne:

$$\lim_{\varkappa \to \infty} [a_{\gamma_{n_\varkappa + 1}} + b_{\gamma_{n_\varkappa + 1}} a_{\gamma_{n_\varkappa + 2}} + \dots] = 0,$$

contrairement à (*).

La dérivée de la fonction $f(x)$ n'existe donc non plus pour ces valeurs de l'intervalle $(0, 1)$, dont les développements pour la base $3g - 2$ ont une infinité des chiffres $\gamma_n \equiv 1 \pmod 3$.

Supposons enfin, qu'on a pour une infinité des indices $n_\varkappa$:

$$\gamma_{n_\varkappa} \equiv 2 \pmod 3.$$

En remplaçant $\gamma_{n_\varkappa}$ par $\gamma_{n_\varkappa} - 2$, nous avons:

$$f(x_{n_\varkappa}) = f(x),$$

d'où

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \frac{f(x_{n_\varkappa}) - f(x)}{x_{n_\varkappa} - x} = 0;$$

en remplaçant $\gamma_{n_\varkappa}$ par $\gamma_{n_\varkappa} + 1$, nous obtenons:

$$f(x_{n_\varkappa}) = f(x) + b_{\gamma_1} b_{\gamma_2} \dots b_{\gamma_{n_\varkappa - 1}} \frac{1}{g},$$

d'où

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \left| \frac{f(x_{n_\varkappa}) - f(x)}{x_{n_\varkappa} - x} \right| = \lim_{\varkappa \to \infty} \left(\frac{3g-2}{g} \right)^{n_\varkappa} = \infty.$$

Donc, pour les valeurs x du dernier genre la dérivée de $f(x)$ n'existe pas.

Mais, évidemment, tout nombre de l'intérvalle $(0, 1)$ (à l'exception de 1) appartient à un de trois genres considérés (car si nous avions constantemment $\gamma_n = 3g - 3$ pour tout $n > N$, $\gamma_N < 3g - 3$, nous pouvions dans cet développemment remplaçer tous les γ_n par 0 et γ_N par $\gamma_N + 1$.

Donc pour aucune valeur x de l'intervalle $(0, 1)$ la fonction $f(x)$ n'a pas de dérivée (ni finie, ni infinie); pour $x = 0$, comme on voit aisément, il n'y a pas de dérivée à gauche, pour $x = 1$ il n'y a pas de dérivée à droite.

Sur la continuité des fonctions absolument additives d'ensembles.

Par

W. Sierpiński.

Soit M un espace métrique donné, F — une famille de sous-ensembles de M, telle que

1) La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de la famille F appartient à F.

2) Le complémentaire $CE = M - E$ de tout ensemble E de F appartient à F.

Soit $f(E)$ une fonction réelle finie d'ensemble, définie pour les ensembles E de la famille F.

La fonction f est dite absolument additive (sur la famille F), si pour toute suite finie ou infinie $E_1, E_2, E_3, \ldots$ d'ensembles disjoints de la famille F, on a

$$f(E_1 + E_2 + E_3 + \ldots) = f(E_1) + f(E_2) + f(E_3) + \ldots$$

La fonction f est dite continue sur F au point p, s'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $r > 0$, tel que les formules

$$E \varepsilon F, \quad E \subseteq K(p, r)$$

entraînent

$$f(E) < \varepsilon,$$

$K(p, r)$ désignant la sphère au centre p et rayon r.

M. H. Hahn a démontré[1]) que pour qu'une fonction f absolument additive d'ensemble soit continue au point p sur une famille F d'ensembles, satisfaisant aux

[1]) Theorie der reellen Funktionen, Berlin 1921, p. 409.

conditions 1) et 2), il faut et il suffit que dans le cas où l'ensemble (p) (formé d'un seul point, p) appartient à F, on ait

$$f((p)) = 0. \tag{1}$$

Le but de cette Note est de donner une démonstration de ce théorème plus simple que celle de M. Hahn.

La nécessité de la condition étant évidente, nous prouverons seulement leur suffisance.

Admettons que la fonction f n'est pas continue sur F au point p. Il existe donc un nombre $\alpha > 0$ et, pour tout n naturel, un ensemble E_n de la famille F, tel que

$$E_n \subset K\left(p, \frac{1}{n}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

et

$$f(E_n) \geqslant \alpha, \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

L'ensemble de tous les ensembles finis (différents) de nombres naturels étant dénombrable, il existe une suite infinie

$$\sigma_1, \ \sigma_2, \ \sigma_3, \ldots \tag{4}$$

formée de tous ces ensembles.

$\sigma = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ étant un ensemble donné de nombres naturels, nous désignerons par $H_\sigma = H_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ l'ensemble de tous les points q de M, tels que

$$q \in E_{n_i} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \ldots, k,$$

et

$$q \in CE_n \quad \text{pour } n \neq n_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Les ensembles $E_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ appartenant à la famille F, il résulte tout de suite de 1) et 2) que les ensembles

$$H_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = E_{n_1} E_{n_2} \ldots E_{n_k} \prod_{\substack{n \neq n_i \\ (i = 1, 2, \ldots k)}} CE_n \tag{5}$$

appartiennent à F.

m étant un nombre naturel et $\sigma = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ un ensemble fini de nombres naturels, nous désignerons par $H_{m,\sigma}$ l'ensemble $H_{m, n_1, n_2, \ldots, n_k}$.

Soit $q \neq p$ un point de l'ensemble E_m: on voit sans peine qu'il existe un systéme d'indices $n_1, n_2, .., n_k$, tel que

$$q \epsilon H_{m, n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

Pour le voir il suffit de se rapporter à la définition des ensembles $H_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ et de remarquer que le nombre des indices n, tels que $q \epsilon E_n$, ne peut pas être infini, puisque, d'après (2), on aurait dans dans ce cas $q \epsilon K\left(p, \frac{1}{n}\right)$ pour une infinité de nombres n, ce qui donnerait $q = p$, contrairement à l'hypothèse.

Or, on a évidemment (d'après la définition des ensembles $H_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$)

$$H_{m, n_1, n_2, \ldots, n_k} \subset E_m.$$

Il en résulte tout de suite qu'on a soit

(6) $$E_m = \sum_{i=1}^{\infty} H_{m, \sigma_i},$$

soit

(7) $$E_m = (p) + \sum_{i=1}^{\infty} H_{m, \sigma_i},$$

et dans ce dernier cas nous pouvons supposer que $(p) . H_{m, \sigma_i} = 0$, pour $i = 1, 2, 3, \ldots$, d'où résulte, les ensembles E_m et (5) appartenant à F, et la famille F satisfaisant aux conditions 1) et 2), que l'ensemble (p) appartient à F.

Les ensembles H_{m, σ_i} $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ étant évidemment disjoints (d'après (5)), il résulte de (6) et (7) (d'après (1)) que

(8) $$f(E_m) = \sum_{i=1}^{\infty} f(H_{m, \sigma_i})$$

(la fonction f étant absolument additive sur F).

Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, respectivement par $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$, tous les termes consécutifs de la suite (4), tels que $f(H_\alpha) \geqslant 0$, resp. $f(H_\beta) < 0$, et posons

(9) $$P = \sum_{i=1}^{\infty} H_{\alpha_i}, \quad Q = \sum_{i=1}^{\infty} H_{\beta_i}$$

— ce seront, d'après 1), des ensembles de la famille F.

Les ensembles H_{α_i} $(i = 1, 2, \ldots)$ étant disjoints, il résulte de (9) (et de 1)) que

(10) $$f(P) = \sum_{i=1}^{\infty} f(H_{\alpha_i}) \text{ et } f(Q) = \sum_{i=1}^{\infty} f(H_{\beta_i});$$

la fonction $f(E)$ étant finie pour les ensembles E de F, il en résulte que les séries (10) sont convergentes: d'après la définition des α_i et β_i on en conclut tout de suite que la série

(11) $$\sum_{i=1}^{\infty} f(H_{\sigma_i})$$

est absolument convergente.

Le nombre m étant suffisamment grand, tous les systèmes d'indices (m, σ_i) $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ sont évidemment des termes de la suite (4) dont le rang est aussi élevé qu'on veut. La série (11) étant absolument convergente, il en résulte tout de suite qu'il existe un nombre μ, tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(H_{m,\sigma_i}) < \alpha \quad \text{pour} \quad m > \mu,$$

ce qui est incompatible avec les formules (3) et (8). La fonction f est donc continue sur F au point p, c. q. f. d.

Sur l'accessibilité rectilinéaire des points d'un ensemble (F_σ)[1]) plan.

Par

Otton Nikodym (Cracovie).

La théorie des ensembles (A)[2]) gagne toujours en importance grace aux liaisons avec des questions fondamentales concernant la logique mathématique[3]). Ces ensembles qui peuvent être définis comme les projections des ensembles mesurables (B) interviennent aussi dans des différents problèmes de la théorie des ensembles. Un de tels problèmes est celui posé par Urysohn[4]):

Soit E un ensemble de points situés dans l'espace à n dimensions $(n \geqslant 2)$, appelons un point A de E *rectilinéairement (ou*

---

[1]) Selon la terminologie de M. Hausdorff un ensemble est dit (F_σ). s'il est somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés.

[2]) *Comptes rendus* 164 (1917) p. 88 M. Souslin: *Sur une définition des ensembles mesurables* (B). ibid. p. 91. N. Lusin *Sur la classification de* M. Baire.

Voilà une propriété fondamentale des ensembles (A). Pour qu'un ensemble E soit un ensemble (A) il faut et il suffit qu'il existe un système d'ensembles mesurables (B):

$$\{\delta_{i_1, i_2, \ldots, i_k}\}, \qquad \begin{matrix}(i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots)\\ (k = 1, 2, \ldots)\end{matrix}$$

tel que

$$E = \prod_{i_1, i_2, \ldots} \delta_{i_1} \cdot \delta_{i_1, i_2} \cdot \delta_{i_1, i_2, i_3} \cdots,$$

le produit étant étendu à toutes les suites infinies $i_1, i_2, \ldots$ de nombres naturels. Un tel système s'appelle „système déterminant de E".

[3]) H. Lebesgue, *Ann. Ec. Norm* (3e) 35 (1918) p. 198. N. Lusin: *Comptes rendus* t. 180 p. 1318 (4 mai 1925); ibid. p. 1572 (25 mai 1925); ibid. p. 1817 (15 juin 1925); ibid. t. 181, p. 95 (20 juillet 1925); ibid. p. 279 (17 août 1925). N. Lusin: *Fund. Math.* T. X. *Sur les ensembles analytiques*.

[4]) *Fund. Math.* t. V. p. 337. (Problème 29).

linéatrement) accessible (dans le complémentaire de E) s'il existe un segment rectiligne AB n'ayant pas avec E de points communs, qui soient différents de A. Urysohn a proposé d'étudier le caractère de l'ensemble de tous les points rectilinéairement accessibles d'un ensemble fermé E donné à l'avance.

Dans cet ordre d'idées le premier résultat est obtenu par M. E. Mazurkiewicz et Urysohn, qui ont démontré le théorème suivant[1].

L'ensemble A de tous les points d'un ensemble plan et fermé E, qui sont linéairement accessibles, est un ensemble (A).

La méthode employée par M. Mazurkiewicz modifiée convenablement, permet d'étudier la question de l'accessibilité rectilinéaire dans les cas des ensembles (F_σ) plans.

C'est précisément par cette méthode (qui va être exposé ici), que j'ai résolu pour la prémière fois le problème pour les ensembles (F_σ).

M. C. Kuratowski a donné ensuite une autre méthode, beaucoup plus simple[2]) et en outre j'ai publié[3]) une méthode tout à fait générale, permettant d'étudier le problème pour des ensembles projectifs du type quelconque. Recemment M. N. Lusin[4]) a publié une méthode extrêmement simple et générale permettant de resoudre de différentes problèmes concernant l'accessibilité.

Néanmoins la méthode (mentionnée ci-dessus) de M. Mazurkiewicz parait être interessante et c'est pourquoi que je me propose de l'exposer ici en l'appliquant — avec des changements convenables — au problème de l'accessibilité pour les ensembles (F_σ) plan.

Le théorème, que nous nous proposons de démontrer est le suivant:

---

[1]) P. Urysohn: *Sur les points accessibles des ensembles fermés* (publié par M. Alexandroff) *Koninklijke Academie Van Wetenschappen Te Amsterdam, Proceedings* Vol. XXVIII, Nr. 10, p. 984—993. M. Mazurkiewicz a exposé sa démonstration dans une des séances de la Société Polonaise des Mathématique (Section de Varsovie) en 1924.

[2]) *Fund. Math.* t. VII. p. 250.

[3]) Ibid.

[4]) *Fund. Math.* t. XII.

Pour tout ensemble plan E du type (F_σ), l'ensemble de points qui sont linéairement accessibles, est un ensemble (A).

Démonstration:

Désignons par E^* le complémentaire de l'ensemble plan E par rapport à ce plan. Nous nous servirons de quelques constructions auxiliaires, que voici. Soient a un point arbitraire du plan Euclidien (R) pourvu d'un système des coordonnées rectangulaires x, y; soient $r_1 > r_2 > 0$ deux nombres réels, et ω_1, ω_2 deux nombres rationnels tels que:

$$0 < \omega_1 - \omega_2 < 2. \tag{1}$$

Désignons par φ, r les coordonnées polaires d'un point variable (par rapport au système des coordonnées polaires, avec a comme centre et avec l'axe principale parallèle à l'axe x), et considérons l'ensemble de points, tels que:

$$\pi\omega_2 < \varphi < \pi\omega_1, \quad r_2 < r < r_1. \tag{2}$$

Cet ensemble est un domaine ouvert (de Weierstrass), et possède la forme d'un secteur d'un anneau circulaire.

Désignons le par:

$$\delta(a, r_1, r_2, \omega_1, \omega_2). \tag{3}$$

Envisageons dans l'espace (à 3 dimensions) la droite l_a, (pourvue d'une direction positive indépendante du point a), perpendiculaire dans le point a au plan (R), et construisons y l'ensemble $B(a, r_1, r_2, \omega_1, \omega_2)$ de la manière suivante.

A chaque point du secteur correspond une infinité de valeurs pour sa coordonnée φ, qui diffèrent entre eux d'une multiplicité entière de 2π.

Alors on prend sur l_a tous les nombres[1]) qui constituent la coordonnée φ de différents points du secteur $\delta(a, r_1, r_2, \omega_1, \omega_2)$: ces nombres forment précisément l'ensemble $B(a, r_1, r_2, \omega_1, \omega_2)$. Il se compose des points d'un ensemble dénombrable d'intervalles, ouverts ayant la longueur $(\omega_1 - \omega_2) \cdot \pi$.

[1]) On se donne une longueur-unité fixe et on place le nombre 0 dans le point a de la droite l_a.

Ceci posé, considérons deux ensembles arbitraires M, N fermés et des nombres fixes $r_1, r_2, \omega_1, \omega_2$, comme auparavant.

Désignons par

$$M^N(r_1, r_2, \omega_1, \omega_2)$$

l'ensemble de tons les points a de M, pour lesquels:

$$\delta(a, r_1, r_2, \omega_1, \omega_2) \,.\, N = 0.$$

On peut démontrer facilement que M^N est fermé, la démonstration étant indirecte et basée sur la supposition que M soit fermé [1]).

Déterminons maintenant pour chaque point a de M^N la droite l_a et construisons l'ensemble:

$$B_M^N(r_1, r_2, \omega_1, \omega_2) \underset{df}{=} \sum_{a \varepsilon M^N} B(a, r_1, r_2, \omega_1, \omega_2),$$

la sommation étant étendue à tous les a appartenant à M^N.

On voit aisément que nous avons obtenu ainsi un ensemble (F_σ) dans l'espace.

Si $b \epsilon B_M^N(r_1, r_2, \omega_1, \omega_2)$ et si b' est la projection orthogonale de b sur le plan (R), on a évidemment: $b' \epsilon M$ et le secteur $\delta(b', r_1, r_2, \omega_1, \omega_2)$ n'a pas de points communs avec N.

Rangeons maintenant tous les paires de nombres rationnels satisfaisant à la condition (1), dans une suite dénombrable:

$$(w_1', w_2'),\ (w_1'', w_2''), \ldots,\ (w_1^{(n)}, w_2^{(n)}), \ldots,$$

et déterminons pour des nombres r_1, r_2 fixes, où $0 < r_1 < r_2$, les ensembles correspondants:

$$B_M^N(r_1, r_2, w_1^{(n)}, w_2^{(n)}), \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Définissons l'ensemble:

$$B_M^N(r_1, r_2) \underset{df}{=} \sum_{n/1}^{\infty} B_M^N(r_1, r_2, w_1^{(n)}, w_2^{(n)});$$

cet ensemble est aussi un (F_σ) dans l'espace, parce qu'il est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles (F_σ).

Pour chaque paire r_1, r_2 de nombres $(0 < r_2 < r_1)$ et quels que soient les ensembles fermés M, N, on peut ainsi construire de la manière déterminée, l'ensemble correspondant $B_M^N(r_1, r_2)$.

---

[1]) Cela n'exclut pas la possibilité que M^N soit vide.

Les constructions préliminaires étant achevées, envisageons l'ensemble E du type (F_σ), pour lequel nous nous avons proposé de démontrer notre théorème. E étant une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés, on peut poser:

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n + \dots,$$

où E_n sont des ensembles fermés.

Choisissons deux suites infinies de nombres positifs:

$$(4) \quad \left| \begin{array}{l} r'_1 > r'_2 > \dots > r'_n > \dots; \lim\limits_{n\to\infty} r'_n = 0 \\ r''_1 > r''_2 > \dots > r''_n > \dots; \lim\limits_{n\to\infty} r''_n = 0 \end{array} \right. ,$$

dont les éléments satisfont aux conditions:

$$(5) \qquad r'_1 = s,\ r''_n < r'_{n+1}\ (n = 1, 2, \dots),$$

où s est un nombre donné positif arbitrairement pris d'avance.

Construisons les produits doubles:

$$B_{E_i} = \prod_{n/1} \prod_{k/1} B^{E_k}_{E_i}(r'_n, r''_n), \quad (i = 1, 2, \dots),$$

qui représentent des ensembles $(F_{\sigma\delta})$[1]) dans l'éspace, et en faisons les projections P_i sur le plan (R).

Nous allons démontrer que chaque point de P_i est accessible dans E^* par un segment réctiligne *ouvert* de longueur s.

En effet, envisageons un point quelconque a de P_i. Il existe au moins un point φ' de B_i, dont a est la projection.

Nous avons:

$$\varphi' \epsilon \prod_{n/1} \prod_{k/1} B^{E_k}_{E_i}(r'_n, r''_n),$$

donc pour tous les indices n, k on a:

$$\varphi' \epsilon B^{E_k}_{E_i}(r'_n, r''_n).$$

Mais d'après les considérations préliminaires on a:

$$\varphi' \epsilon \sum_{m/1}^{\infty} B^{E_k}_{E_i}(r'_n, r''_n, w_1^{(m)}, w_2^{(m)}),$$

d'où il résulte, (l'axiome de Zermelo), que l'on peut choisir une

[1]) Un ensemble est dit $(F_{\sigma\delta})$, s'il est le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles (F_σ).

suite doublement infinie d'indices m: $\{m_{k,n}\}$, $(k, n = 1, 2, \ldots)$ de sorte, qu'on ait simultanément les relations:

$$\varphi' \epsilon B^{E_k}_{E_i}(r'_n, r''_n, w_1^{(m_{n,k})}, w_2^{(m_{n,k})}), \quad (n, k = 1, 2, \ldots)$$

que nous voulons écrire de manière un peu plus simple:

$$\varphi' \epsilon B^{E_k}_{E_i}(r'_n, r''_n, v_1^{(n,k)}, v_2^{(n,k)}) \quad (n, k = 1, 2, \ldots).$$

On en déduit, que $a \epsilon E_i$ et que le secteur:

$$\delta(a, r'_n, r''_n, v_1^{(n,k)}, v_2^{(n,k)})$$

n'a pas de points communs avec E_k pour tous les n, et qu'il y existe dans ce secteur au moins un point, dont la coordonnée φ (par rapport au système polaire, dont le centre est en a) est égale à φ'. Pour chaque indice k nous avons ainsi obtenu une suite infinie de secteurs:

$$\delta(a, r'_1, r''_1, v_1^{(1,k)}, v_2^{(1,k)}).$$
$$\delta(a, r'_2, r''_2, v_1^{(2,k)}, v_2^{(2,k)}),$$

n'ayant pas de points communs avec E_k.

Dans chaqun de ces secteurs il existe un point, pour lequel une valeur de sa φ — coordonnée est égale à φ'.

Les rayons de secteurs étant respectivement:

$$r'_1, r'_2; \quad r''_1, r''_2; \ldots,$$

les segments rectilignes:

$$\{r''_n < r < r'_n, \quad \varphi = \varphi'\},$$

appartiennent respectivement à ces secteurs.

Il s'ensuit que la somme de ces segments n'a pas de points communs avec E_k.

Donc en vertu de (4), (5), la segment défini par les conditions:

$$\varphi = \varphi', \quad 0 < r < s \tag{6}$$

est contenu dans E^*_k.

Si l'on répète ce raisonnement pour chaque indice k, on trouve que notre segment (6) n'a pas de points communs avec $\sum\limits_{k/1}^{\infty} E_k = E$.

On a donc démontré que pour chaque point de P_i il existe un segment rectiligne *ouvert*, dont la longueur est s, et qui se trouve tout entièr dans E^*. Nous savons de plus que $P_i \subset E_i$.

Supposons, réciproquement, qu'un point a' de E_i soit accessible dans E^* par un segment rectiligne *fermé d'un seul côté*:

$$\{\varphi = \varphi'',\ 0 < r \leqslant s\},$$

(le point (φ'', s) y compris).

Nous pouvons considérer ce segment comme la somme de segments:

$$\{\varphi = \varphi'',\quad r''_n \leqslant r \leqslant r'_n\}\ldots,\quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

E_k étant fermé, on peut, pour chaque indice n, trouver deux nombres rationnels $v_1^{(n,k)}$, $v_2^{(n,k)}$, où

$$v_2^{(n,k)} \cdot \pi < \varphi'' < v_1^{(n,k)} \cdot \pi,$$

pour lesquels le secteur

$$\delta(a,\ r'_n,\ r''_n,\ v_1^{(n,k)},\ v_2^{(n,k)})$$

n'a pas de points communs avec E_k.

On le démontre facilement, en envisageant pour chaque point du segment considéré le plus grand cercle ouvert placé dans E_k^*, et ensuite en s'appuyant sur le théorème de Heine-Borel. L'axiôme de M. Zermelo nous permet donc de choisir de tels nombres rationnels pour tous les segments (7) et pour chaque k.

Les nombres $v_1^{(n,k)}$, $v_2^{(n,k)}$ $(n,k = 1, 2 \ldots)$ étant choisis, nous pouvons écrire:

$$\varphi'' \in B_{E_i}^{E_k}(r'_n,\ r''_n,\ v_1^{(n,k)},\ v_2^{(n,n)}),$$

d'où à fortiori:

$$\varphi'' \in \sum_{m/1}^{\infty} B_{E_i}^{E_k}(r'_n,\ r''_n;\ w_1^{(m)},\ w_2^{(m)}) = B_{E_i}^{E_k}(r'_n,\ r''_n)$$

pour chaque n et k, où $w_1^{(m)}$, $w_2^{(m)}$ ont la même signification comme plus haut.

On en déduit que:

$$\varphi'' \in \prod_{n/1}^{\infty} \prod_{k/1}^{\infty} B_{E_i}^{E_k}(r'_n,\ r''_n)$$

$$\varphi'' \in B_{E_i}.$$

Le point a, étant la projection de φ'' sur (R), appartient donc à P_i.

Nous avons démontré que chaque point de E_i qui est rectilinéairement accessible dans E^* par un segment fermé (d'un côté) de longueur s, appartient nécessairement à P_i.

Les ensembles P_i sont obtenus pour le nombre $s > 0$; nous allons les désigner dans la suite par $P_i(s)$.

Désignons par $Q_i(s)$ l'ensemble de tous les points de E_i accessibles dans E^* par des segments *ouverts* de longueur s, et désignons par $F_i(s)$, l'ensemble de tous les points de E_i accessibles dans E^* par des segments *fermés* (d'un côté) de la même longueur.

Nous avons pour chaque $s > 0$:

$$F_i(s) \subset P_i(s) \subset Q_i(s) \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Prenons maintenant pour s les valeurs positives... $3, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ que nous allons désigner respectivement par $\ldots, s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \ldots$ et formons les ensembles: P_i, Q_i, F_i.

Nous avons:

$$F_i(s) \subset P_i(s) \subset Q_i(s) \qquad (i = 1, 2 \ldots),$$

et

(8) $$Q_i(s) \subset F_i(t) \quad \text{pour } t < s \quad (i = 1, 2 \ldots).$$

On en tire la relation suivante:

$$\sum_{s/-\infty}^{+\infty} F_i(s) \subset \sum_{s/-\infty}^{+\infty} P_i(s) \subset \sum_{s/-\infty}^{+\infty} Q_i(s),$$

d'où en vertu de (8), on obtient:

$$\sum_{s/-\infty}^{+\infty} P_i(s) = \sum_{s/-\infty}^{+\infty} Q_i(s) = \sum_{s/-\infty}^{+\infty} F_i(s).$$

On voit facilement que $Q_i \underset{df}{=} \sum_{s/-\infty}^{+\infty} Q_i(s)$ est l'ensemble de tous les points de E_i, qui sont accessibles rectilinéairement dans E^*. D'autre part cet ensemble étant identique à $\sum_{s/-\infty}^{+\infty} P_i(s)$, il est la somme d'une infinité dénombrable de projections des ensembles $(F_{\sigma\delta})$. Or, Q_i, comme somme d'une infinité dénombrable d'ensembles (A) est aussi un ensemble (A). L'ensemble $\sum_{i/1}^{\infty} Q_i$, c'est-à-dire, l'ensemble de tous les points de E qui sont linéairement accessibles dans E^*, est donc un ensemble (A). Notre théorème est ainsi démontré.

Par une méthode analogue on peut traiter la même question, posée pour les ensembles (F_σ) situés dans l'espace (V) à 3 dimensions. On n'a qu'à remplacer les cercles par des sphères et construire des ensembles auxiliaires dans l'espace à 5 dimensions (au lieu de 3 dimensions). Toutefois une modification y semble être nécessaire. Ayant un ensemble E du type (F_σ), on cherche l'ensemble E_{+x} de tous les points de E, qui soient linéairemant accessibles dans E^* par des segments rectilignes dont la direction est parallèle à un des rayons appartenant à la demisphère, définie par les conditions suivantes:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \xi > 0. \tag{9}$$

Pour éffectuer la construction de E_{+x} on fait correspondre à chaque direction considéré (ξ, η, ζ), des point P dans l'espace à 5 dimensions, ayant les coordonnées:

$$(a, b, c, \eta, \zeta),$$

où $(a. b, c)$ sont les coordonnées des points dans l'espace (V), pour lesquels on envisage des secteurs „d'anneaux" sphériques. On construit les secteurs en question en prenant des différents domaines de Weierstrass situés sur la surface convexe de demisphère (9), ces domaines étant tels, que leurs projections sur le plan $\xi = 0$ soient des cercles de rayon rationnel et suffisament petit, les coordonnées des centres étant aussi des nombres rationnels.

On obtient ainsi l'ensemble E_{+x} qui est nécessairement un ensemble (A). De manière analogue on construira des ensembles

$$E_{-x}, E_y, E_{-y}, E_z, E_{-z}.$$

En en faisant la somme:

$$E_{+x} + E_{-x} + E_{+y} + E_{-y} + E_{+z} + E_{-z},$$

on obtient precisément l'ensemble de tous les points de E qui sont rectilinéairement accessibles dans E^*. Donc cet ensemble est un ensemble (A).

Recherches sur les équations $s = f(x, y, z, p, q)$ intégrables par la méthode de Darboux.

Par

E. Lainé.

Préliminaires.

1. Relativement à l'application de la méthode de Darboux aux équations de la forme

$$s = f(x, y, z, p, q) \tag{1}$$

on peut se proposer deux problèmes.

Problème *A. Etant donnée une équation* (1), *reconnaître si elle est intégrable par la méthode de Darboux, c'est-à-dire si elle est de la première classe.*

Problème *B. Former les équations* (1) *qui sont de la première classe.*

Ces deux problèmes sont distincts. Par exemple [1]) M. Goursat a résolu le problème B pour les équations

$$s^2 - 4\lambda(x, y)\, p\, q = 0;$$

cependant étant donnée une équation de ce type, on ne peut en général reconnaître par un nombre fini d'opérations si elle est de la première classe.

Le problème B a été entièrement résolu par Darboux pour l'équation linéaire

$$s = a(x, y)\, p + b(x, y)\, q + c(x, y)\, z. \tag{2}$$

Il a en effet indiqué le moyen de former toutes les équations (2) dont la suite de Laplace est limitée dans les deux sens, et on sait

[1]) *Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXV, p. 36—48.

que les deux problèmes sont équivalents. Ceci n'est d'ailleurs à peu près d'aucune utilité pour la résolution du problème A relatif à une équation (2); mais on doit en outre observer, et cette remarque a une portée générale pour la suite du présent travail, que si l'on impose aux coefficients a, b, c de vérifier certaines relations, un nouveau problème B se présente, distinct de celui qui a été résolu pour le cas général. Rappelons par exemple les belles recherches de Moutard et de Darboux sur les équations à invariants égaux,

$$s = c(x, y)z,$$

qui sont de la première classe: a et b sont ici nuls, et le problème B a dû être repris entièrement pour ces équations particulières.

2. Moutard s'est proposé de déterminer toutes les équations du second ordre dont l'intégrale générale peut se mettre sous la forme

$$z = F(x, y;\ X, X', \ldots, X^{(m)};\ Y, Y', \ldots\ Y^{(m)}).$$

Il a établi que ces équations, qui sont toujours de la forme (1), sont réductibles, par des transformations *ponctuelles*, soit aux équations linéaires, soit à l'une des équations

$$(3)\qquad s = kpz \qquad s = e^{kz} \qquad (k \text{ constant})$$

qui s'intègrent sans difficulté, soit à des équations de la forme

$$(4)\qquad s - \frac{d}{dx}\left[A(x, y)\, e^{z}\right] + \frac{d}{dy}\left[B(x, y) e^{-z}\right] = 0.$$

On pourra donc considérer le problème B comme résolu pour les équations étudiées par Moutard si l'on sait déterminer les équations (4) qui sont de la première classe. Posons

$$(5)\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = A\, e^{z} + \frac{\partial \log u}{\partial y} \qquad B\, e^{-z} = -\frac{\partial \log u}{\partial x};$$

si l'on élimine u entre les équations (5) on a l'équation (4); si l'on élimine z on a l'équation linéaire

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial \log B}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - A\, B\, u = 0.$$

On est donc ramené à résoudre le problème B pour les équations (6). Il résulte d'une remarque de M. Goursat [1]) que l'on peut toujours

[1]) *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II. p. 247.

passer de l'équation (2) à une équation de la forme (6) au moyen d'un changement de variable

$$u = z\,\varphi(x, y);$$

on sait par conséquent former toutes les équations (4) intégrables par la méthode de Darboux. On leur donne généralement le nom *d'équations de Moutard.*

M. Gau [1]) a résolu le problème B pour les équations (1) qui sont linéaires en p et q,

$$s = \varrho(x, y, z)\,p\,q + a(x, y, z)\,p + b(x, y, z)\,q + c(x, y, z).$$

Le résultat de son étude est que les équations cherchées se ramènent, par une transformation *ponctuelle*, soit aux équations linéaires, soit aux équations (3), soit aux équations de Moutard, soit à l'équation

$$(7) \qquad s = (e^z + e^{-z})\,p$$

qui admet un invariant d'ordre 3 pour le système X et un invariant d'ordre 1 pour le système Y.

Signalons enfin, pour compléter l'énoncé des travaux antérieurs à ceux de M. Gosse, que M. Goursat dans deux Mémoires fondamentaux [2]) qui ont servi de base à toutes les études ultérieures sur ce sujet, a formé et intégré toutes les équations qui ont un invariant d'ordre 1 ou 2 pour chaque système de caractéristiques. Ces équations se ramènent, par des transformations *ponctuelles*, soit à des équations linéaires, soit à onze types canoniques que l'on trouvera dans le premier Mémoire de M. Goursat.

3. C'est M. Gosse [3]) qui a entrepris le premier l'étude du problème B relatif aux équations (1) de forme générale. Il résume ainsi sa méthode [4]).

„Des conditions *nécessaires et suffisantes* pour qu'il existe un invariant ou une involution, on peut déduire des conditions seule-

---

[1]) Thèse de doctorat (Gauthier-Villars, 1911) et *Annales de l'Université de Grenoble*, t. 25, 1913, p. 95—107. Avant M. Gau, Clairin avait résolu le problème B pour les équations $s = f(x, y, z)$ (*Bulletin des Sciences Mathématiques* t. 29, 1905, p. 177).

[2]) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t, I, 1899 (p. 31 - 78 et 439—464).

[3]) *Annales de Toulouse*, t. XII, 1920 (p. 107—180), et t. XVI, 1924 (p. 204—240).

[4]) *Mémorial des Sciences Mathématiques*, fascicule XII (p. 31).

ment *nécessaires*, qui ont l'avantage d'être très simples. On profite de leur simplicité pour essayer de restreindre la généralité de la fonction $f(x, y, z, p, q)$, et l'on essaye, par des transformations appropriées, de ramener l'équation à une forme canonique avantageuse".

Si l'on veut arriver, par cette méthode, à une solution rigoureuse et complète du problème B pour les équations (1), il est essentiel de préciser deux points.

En premier lieu, on peut convenir de ne pas considérer comme distinctes deux équations qui se ramènent l'une à l'autre par une transformation ponctuelle de la forme

$$(T_0) \qquad X = X(x) \qquad Y = Y(y) \qquad Z = Z(x, y, z).$$

C'est ce qu'a fait M. Goursat dans les Mémoires déjà cités.

En second lieu, il faut observer au contraire que deux équations telles qu'on ne puisse passer de l'une à l'autre que par une transformation de Bäcklund doivent être considérées comme distinctes. On sait en effet que toute transformation (T_0) conserve la forme de l'équation (1), tandis que le problème de la détermination de toutes les transformations de Bäcklund admises par une équation de la forme (1) paraît présenter, même dans les cas les plus simples, des difficultés considérables.

Reprenons par exemple l'équation de M. Gau déjà signalée

$$(7) \qquad s = (e^z + e^{-z})\, p.$$

Si l'on y fait la transformation de Bäcklund

$$p = e^{z'}$$

suivie de la transformation ponctuelle

$$X = x \qquad Y = -e^{-4y} \qquad Z = z' + 2y,$$

on obtient l'équation

$$(8) \qquad S = e^Z \sqrt{YQ^2 + Q}$$

qui est une équation de M. Goursat. On doit pourtant considérer les équations (7) et (8) comme distinctes, car, avant les travaux de M. Gau, on ne savait pas qu'on pouvait, par une transformation de Bäcklund, passer de l'équation (8) à une autre équation de la forme (1) ayant un invariant du 1er ordre pour le système Y et un invariant d'ordre 3 pour le système X. Le fait d'avoir obtenu l'équation (7) constitue donc un résultat nouveau par rapport à ceux de M. Goursat.

La méthode à suivre découle immédiatement des considérations précédentes. En combinant les conditions *nécessaires* obtenues, conditions qui expriment des propriétés invariantes pour toute transformation (T_0), on répartit d'abord les équations (1) qui peuvent être de la première classe en un certain nombre de groupes G_1, $G_2, \dots$, tels qu'on ne puisse passer d'un groupe à l'autre au moyen d'une telle transformation. Supposons alors que nous ayons résolu le problème B pour les groupes G_1, $G_2, \dots$ G_n; si l'étude du groupe G_{n+1} met en évidence une transformation de Bäcklund qui permette de passer de ce groupe à une équation *particulière* E_0 du groupe G_i $(i \leqslant n)$, il faudra encore résoudre le problème B pour l'équation E_0. Et, comme nous l'avons fait remarquer à propos des équations linéaires, le problème B relatif à l'équation E_0 est distinct du problème B relatif à l'équation générale du même groupe.

4. L'étude du problème B relatif aux équations (1) a été conduite par M. Gosse avec une rare puissance de calcul. C'est en appliquant ses méthodes, et en reprenant ou complétant ses discussions, que j'ai été amené à déterminer de nouveaux types intégrables. Il semble bien d'ailleurs que la voie qu'il a ouverte soit la seule praticable, et c'est probablement en la suivant jusqu'au bout qu'il sera possible d'élucider entièrement le difficile problème à la solution duquel M. Gosse a apporté de si larges contributions.

Le présent travail est divisé en quatre chapitres.

Au Chapitre I je préciserai la position du problème et les divisions que la considération des invariants amène à y introduire. Après avoir formé de nouvelles conditions nécessaires, je compléterai l'énumération des groupes G_i précédemment signalés, qui n'a été faite que partiellement jusqu'ici, et je montrerai que les équations non encore cataloguées peuvent être réparties en trois familles, suivant leur ordre minimum d'invariance.

Aux Chapitres II et III, je donnerai la solution complète du problème B pour les deux premières familles.

Au Chapitre IV, j'étudierai un cas particulier du problème B relatif aux équations de la troisième famille qui sont linéaires par rapport à *l'une* des dérivées p ou q, et je ferai connaître, au cours de cette étude, un certain nombre de propositions de portée générale qui sont de nature à faciliter l'extension du résultat obtenu. Le caractère négatif de ce résultat est d'autant plus remarquable qu'il n'est plus vrai pour les équations non linéaires: j'indiquerai en effet en terminant un nouveau type intégrable admettant un invariant d'ordre 3 pour chaque système de caractéristiques.

Je remercie M. Goursat d'avoir bien voulu s'intéresser à mon travail.

J'adresse aussi l'expression de ma bien vive gratitude à M. Bouligand, qui a orienté mes premières recherches; si j'ai persévéré dans une voie plutôt aride, je le dois en partie à ses encouragements affectueux et à l'appui de sa très cordiale amitié.

CHAPITRE I.

Position et division du problème.

5. Nous allons chercher un système de conditions nécessaires pour qu'une équation de la forme

$$s = f(x, y, z, p, q) \tag{1}$$

admette un invariant. Ce problème a déjà été résolu partiellement par M. Gau et par M. Gosse.

Faisons d'abord connaître une notation qui nous sera souvent utile. Nous poserons, d'une façon générale, u désignant une fonction des variables $x, y, z, p, \ldots, p_m$,

$$\Delta_m^x u = \frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} + f\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{df}{dx}\frac{\partial u}{\partial p_2} + \ldots + \frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\frac{\partial u}{\partial p_m};$$

de même, v désignant une fonction des variables $x, y, z, q, \ldots. q_n$, nous poserons

$$\Delta_n^y v = \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} + f\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{df}{dy}\frac{\partial v}{\partial q_2} + \ldots + \frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\frac{\partial v}{\partial q_n}.$$

Les lettres p_i, q_k ont ici leur signification usuelle dans la théorie des équations (1), ainsi que les symboles $\frac{d^i f}{dx^i}$, $\frac{d^k f}{dy^k}$. Rappelons aussi la notation classique

$$\frac{d^m f}{dx^m} = p_{m+1}\frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{d^m f}{dx^m}\right) \qquad \frac{d^n f}{dy^n} = q_{n+1}\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{d^n f}{dy^n}\right).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que u soit un invariant s'écrit alors, comme on sait,

$$\Delta_m^x u = 0. \tag{2}$$

De même, pour que l'équation $u = 0$ soit en involution avec (1), il faut et il suffit que l'équation (2) soit une conséquence de $u=0$. D'une façon plus précise, pour que l'équation

$$p_{m+1}+u(x, y, z, p, \dots p_m)=0$$

soit en involution avec (1), il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$\Delta^x_m u+\frac{d^m f}{dx^m}=(p_{m+1}+u)\frac{\partial f}{\partial p} \quad \text{ou} \quad \Delta^x_{m+1} \operatorname{Log}(p_{m+1}+u)=\frac{\partial f}{\partial p}.$$

6. Pour simplifier, nous conviendrons de dire qu'une équation (1) qui admet un invariant d'ordre n pour le système X, par exemple, sans admettre aucun invariant d'ordre inférieur, est *de genre n* pour ce système.

Considérons alors une équation (1) qui soit de genre $n>2$ pour le système X, et commençons par rappeler un certain nombre de résultats dûs à M. Gau et à M. Gosse.

Posons d'une façon générale, avec M. Gosse, λ désignant une fonction des variables $x, y, z, p, \dots p_k$,

$$E^k_x(\lambda)=\Delta^x_k \lambda+\lambda\frac{\partial f}{\partial p}$$

Un invariant d'ordre $n\geqslant 3$ pour le système X est, comme l'a montré M. Goursat, de la forme

(3) $$[p_n+\psi(x, y, z, p, \dots p_{n-1})]\,A(x, y, z, p, \dots p_{n-k})$$

Supposons que l'invariant (3) soit l'invariant d'ordre minimum. Deux cas sont à distinguer:

1°. Il existe une fonction $\lambda(x, y, z, p)\neq 0$ telle que

(4) $$E^1_x(\lambda)=0.$$

On peut alors dans (3) prendre

$$k=n-1 \qquad A=\lambda;$$

l'équation

$$p_n+\psi=0$$

est en involution avec (1), et il n'y a aucune involution d'ordre m tel que $1<m<n$ pour le système X.

2° L'équation (4) n'a que la solution $\lambda=0$ [1]). Dans ce cas on a

$$A=[p_{n-k}+\vartheta(x, y, z, p, \dots p_{n-k-1})]^{-1} \qquad (1\leqslant k\leqslant n-2);$$

les équations

$$p_{n-k}+\vartheta=0 \qquad p_n+\psi=0$$

---

[1]) Nous ne tiendrons pas compte désormais des involutions d'ordre 1 qui pourraient exister sans que l'équation (4) ait des solutions non nulles.

sont en involution avec (1), et la première est la seule involution d'ordre inférieur à n pour le système X.

M. Gau a établi[1]) que si l'équation

$$E_x^k(\lambda) = 0 \tag{5}$$

n'a aucune solution non nulle pour $k \leqslant 2$, et si m est l'ordre minimum d'involution pour le système X ($m \geqslant 3$), la fonction f doit vérifier les deux conditions

$$C_1(\alpha) \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial y} + q\frac{\partial \alpha}{\partial z} + f\frac{\partial \alpha}{\partial p} + \alpha\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0$$

$$C_2(\alpha_1) \equiv \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} + q\frac{\partial \alpha_1}{\partial z} + f\frac{\partial \alpha_1}{\partial p} + (m-1)\left[\alpha\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right] + \\ + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

α et α_1 désignant des fonctions des seules variables x, y, z, p.

Posons encore

$$E_y^k(\mu) = \Delta_k^y \mu + \mu\frac{\partial f}{\partial q}.$$

Si l'équation

$$E_y^k(\mu) = 0 \qquad (k \leqslant 2)$$

n'a que la solution $\mu = 0$, et si m' est l'ordre minimum d'involution pour le système Y, la fonction f doit de même vérifier les deux conditions

$$C_1'(\beta) \equiv \frac{\partial \beta}{\partial x} + p\frac{\partial \beta}{\partial z} + f\frac{\partial \beta}{\partial q} + \beta\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = 0$$

$$C_2'(\beta_1) \equiv \frac{\partial \beta_1}{\partial x} + p\frac{\partial \beta_1}{\partial z} + f\frac{\partial \beta_1}{\partial q} + (m'-1)\left[\beta\left(\frac{df}{dy}\right) + \left(\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right] + \\ + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

β et β_1 désignant des fonctions de x, y, z, q.

Supposons maintenant que l'équation (5) ait, pour l'une des valeurs $k = 0$, 1 ou 2 une solution non nulle, et observons d'abord que de cette équation on tire

$$\Delta_x^k \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial p},$$

---

[1]) Thèse, p. 37.

ce qui montre que l'équation

$$\frac{1}{\lambda}=0$$

est en involution avec (1) (n^0 5).

Si l'on a $k=0$ ou $k=1$, M. Gosse a établi [1]) que la fonction f devait vérifier les conditions

$$\Gamma_1(\lambda)\equiv\frac{\partial\lambda}{\partial y}+q\frac{\partial\lambda}{\partial z}+f\frac{\partial\lambda}{\partial p}+\lambda\frac{\partial f}{\partial p}=0$$

$$\Gamma_2(\vartheta)\equiv\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+q\frac{\partial\vartheta}{\partial z}+f\frac{\partial\vartheta}{\partial p}-\lambda X(x)\left(\frac{df}{dx}\right)+\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}=0.$$

On a évidemment des conditions analogues pour le système Y.

Si l'on a $k=2$, l'équation (1) admet une involution d'ordre 2; réciproquement, ce qui n'a pas lieu pour $k<2$, si l'équation (1) admet une involution d'ordre 2,

$$p_2+\vartheta=0,$$

on voit aisément que l'on a

$$E_x^2\left(\frac{1}{p_2+\vartheta}\right)=0.$$

On est donc amené naturellement à répartir les équations qui sont de genre $n\geqslant 3$ pour le système X en trois catégories:

1^0 Celles qui satisfont aux conditions Γ de M. Gosse; elles ont une involution d'ordre 0 ou 1.

2^0 Celles qui admettent une involution d'ordre minimum égal ou supérieur à 3: elles doivent satisfaire aux conditions C de M. Gau.

3^0 Celles qui admettent une involution d'ordre minimum égal à 2.

Nous allons maintenant chercher, pour ces dernières équations, un système de conditions nécessaires.

7. Supposons donc que l'équation (1) admette 1^0 une involution et une seule d'ordre 2

$$p_2+\psi(x, y, z, p)=0; \tag{6}$$

2^0 une involution d'ordre $n>2$

$$p_n+\vartheta(x, y, z, p, \ldots p_{n-1})=0, \tag{7}$$

étant entendu qu'il n'existe aucune autre involution d'ordre compris entre 2 et n, et que l'équation

---

[1]) *Annales de Toulouse,* t. XII, 1920, p. 148.

$$\Delta_1^x A + A \frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

n'a que la solution $A = 0$.

Lemme. — Soit $u(x, y, z, p, \ldots, p_m)$ une solution de l'équation

$$\Delta_m^x u + k u \frac{\partial f}{\partial p} = 0,$$

où k désigne une constante, et m un entier positif compris entre 1 et n. La fonction u est nécessairement de la forme

$$\xi(x)(p_2 + \psi)^{-k}.$$

En effet, posons $u = v^k$; on aura, si $v \neq 0$ et si m est l'ordre réel de u,

$$\Delta_m^x v + v \frac{\partial f}{\partial p} = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta_m^x \operatorname{Log} v + \frac{\partial f}{\partial p} = 0;$$

soit $w = \operatorname{Log} v$; dérivons la dernière équation par rapport à p_m: on aura, en remarquant que $\frac{\partial w}{\partial p_m} \neq 0$,

$$\Delta_m^x \frac{\partial w}{\partial p_m} + \frac{\partial w}{\partial p_m} \frac{\partial f}{\partial p} = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta_m^x \operatorname{Log} \frac{\partial w}{\partial p_m} + \frac{\partial f}{\partial p} = 0,$$

donc

$$\Delta_m^x \left(w - \operatorname{Log} \frac{\partial w}{\partial p_m} \right) = 0 \qquad \operatorname{Log} \frac{\partial w}{\partial p_m} - w = \operatorname{Log} [-\xi_0(x)]$$

$$e^{-w} = \xi_0 \, [p_m + \varphi(x, y, z, p, \ldots, p_{m-1})],$$

et enfin

$$v = e^w = \xi_1 (p_m + \varphi)^{-1}.$$

D'ailleurs l'équation $\frac{1}{v} = 0$ est en involution avec (1). On a donc

$$m = 2, \qquad \varphi \equiv \psi, \qquad u = v^k = \xi(x)(p_2 + \psi)^{-k},$$

ce qui démontre notre proposition.

8. Ecrivons maintenant que l'équation (7) est en involution avec (1),

$$\Delta_{n-1}^x \vartheta + \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right) = \vartheta \frac{\partial f}{\partial p}. \tag{8}$$

M. Gau a montré [1]) que l'on a, pour $n > 3$,

[1]) Thèse, p. 36.

$$\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)=p_{n-1}\left[(n-1)\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}\right]+$$
$$+\varrho(x,y,z,p,q,p_2,p_3,\dots p_{n-2})=M_{n-1}^{n-1}p_{n-1}+\varrho.$$

Cette formule n'est plus exacte pour $n=3$; on a alors

$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)=p_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}+p_2\left[2\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right)+\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}\right]+\lambda\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q).$$

Nous réserverons le cas où f est linéaire en p; on a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\neq 0 \qquad M_{n-1}^{n-1}\neq 0.$$

Dérivons l'équation (8) par rapport à p_{n-1}; on aura, pour $n\geqslant 3$,

(9) $$\Delta_{n-1}^{x}\vartheta'+M_{n-1}^{n-1}=0.$$

Soit $m\geqslant 2$ l'ordre réel de ϑ'; nous examinerons successivement les hypothèses

$$m=2 \qquad m=3 \qquad 3<m\leqslant n-1.$$

9. *Première hypothèse*: $m=2$.
Posons

$$\vartheta'=\mu(x,y,z,p_1,p_2) \qquad \frac{\partial\mu}{\partial p_2}=\mu' \qquad \frac{\partial^2\mu}{\partial p_2^2}=\mu''.$$

En dérivant deux fois par rapport à p_2 l'équation (9) et appliquant le Lemme, on trouve

$$\mu=\vartheta'=\xi\,\mathrm{Log}\,(p_2+\psi)+p_2\,\vartheta_1\,(x,y,z,p)+\vartheta_2\,(x,y,z,p).$$

Remplaçant ϑ' par cette valeur dans l'équation (3) et annulant séparément le coefficient de p_2 et le terme indépendant de p_2, on a

$$\Delta_1^x\vartheta_1+\vartheta_1\frac{\partial f}{\partial p}+(n-1)\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}=0,$$

$$\Delta_1^x\vartheta_2+\vartheta_1\left(\frac{df}{dx}\right)+\xi\frac{\partial f}{\partial p}+(n-1)\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right)+\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}=0.$$

Par hypothèse, on a d'ailleurs

$$\Delta_1^x\psi-\psi\frac{\partial f}{\partial p}+\left(\frac{df}{dx}\right)=0,$$

d'où

$$\Delta_1^x\frac{\partial\psi}{\partial p}-\psi\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}+\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right)+K=0 \qquad \left(K=\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}\right);$$

posons alors

$$\vartheta_1 = (n-1)\,\alpha \qquad \vartheta_2 = (2-n)\,\alpha_1 + (n-1)\left(\alpha\psi + \frac{\partial\psi}{\partial p}\right),$$

et changeons ξ en $(2-n)\,\xi$: les conditions précédemment obtenues s'écrivent

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\Delta_1^x \alpha + \alpha \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0 \\ &\Delta_1^x \alpha_1 + \xi \frac{\partial f}{\partial p} + K = 0 \end{aligned}$$

La première équation (10) est identique à la condition (C_1) de M. Gau.

10. *Deuxième hypothèse*: $m = 3$.

Posons

$$\vartheta' = \psi_1(x, y, z, p, p_2, p_3).$$

En dérivant l'équation (9) par rapport à p_3 et appliquant le Lemme, on trouve

$$\vartheta' = \psi_1 = \xi_1 \frac{p_3 + \varphi(x, y, z, p, p_2)}{p_2 + \psi}.$$

Portons cette valeur dans l'équation (9); on aura

$$(11)\qquad \Delta_2^x \varphi - \varphi \frac{\partial f}{\partial p} + \left(1 + \frac{n-1}{\xi_1}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\, p_2^2 + \varrho_0\, p_2 + \varrho_1 = 0,$$

avec

$$\varrho_0 = \frac{n-1}{\xi_1}\, \psi \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \left(2 + \frac{n-1}{\xi_1}\right)\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right) + \left(1 + \frac{1}{\xi_1}\right) K,$$

$$\varrho_1 = \frac{\psi}{\xi_1}\left[(n-1)\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right) + K\right] + \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right).$$

Supposons d'abord

$$1 + \frac{n-1}{\xi_1} = \xi_2 \neq 0.$$

En dérivant trois fois de suite l'équation (11) par rapport à p_2 on aura

$$(12)\qquad \begin{gathered} \Delta_2^x \varphi' + 2\,\xi_2\, p_2 \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \varrho_0 = 0, \quad \Delta_2^x \varphi'' + \varphi'' \frac{\partial f}{\partial p} + 2\,\xi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0, \\ \Delta_2^x \varphi''' + 2\,\varphi''' \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \end{gathered}$$

et par suite

$$\varphi' = \xi_3 \operatorname{Log}(p_2 + \psi) + p_2\, \sigma(x, y, z, p) + \sigma_1(x, y, z, p).$$

La première équation (12), où l'on remplace φ' et ϱ_0 par leurs valeurs, donne alors

$$\Delta_1^x \sigma + \sigma \frac{\partial f}{\partial p} + 2\,\xi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0$$

$$\Delta_1^x \sigma_1 + \sigma \left(\frac{df}{dx}\right) + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial p} + (\xi_2 + 1)\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{\xi_1} + 1\right) K + (\xi_2 - 1)\,\psi \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0.$$

Posant enfin

$$\sigma = 2\,\xi_2\,\alpha \qquad\qquad \sigma_1 = \alpha_1 + 2\,\xi_2\,\alpha\,\psi + (\xi_2 + 1)\frac{\partial \psi}{\partial p},$$

on aura les deux conditions

$$(13)\qquad \begin{aligned} &\Delta_1^x \alpha + \alpha \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0 \\ &\Delta_1^x \alpha_1 + \xi \frac{\partial f}{\partial p} + \xi_0 K = 0. \end{aligned}$$

Les conditions (10) sont un cas particulier des conditions (13). Il est clair, d'ailleurs, qu'on peut toujours satisfaire à la seconde condition (13) en prenant $\xi = \xi_0 = \alpha_1 = 0$.

Supposons en second lieu

$$1 + \frac{n-1}{\xi_1} = 0.$$

L'équation (11) donne alors

$$(14)\qquad \Delta_2^x \varphi - \varphi \frac{\partial f}{\partial p} + \varrho_0\, p_2 + \varrho_1 = 0,$$

et on en tire, en dérivant deux fois par rapport à p_2 et appliquant le Lemme,

$$\varphi = \xi_4 (p_2 + \psi)\,\mathrm{Log}\,(p_2 + \psi) + p_2\,\sigma_0(x, y, z, p) + \sigma_1(x, y, z, p).$$

En portant cette valeur dans l'équation (14) on aura

$$(15)\qquad \begin{aligned} &\Delta_1^x \sigma_0 + \xi_4 \frac{\partial f}{\partial p} + \varrho_0 = 0 \\ &\Delta_1^x \sigma_1 - \sigma_1 \frac{\partial f}{\partial p} + \sigma_0 \left(\frac{df}{dx}\right) + \xi_4\,\psi \frac{\partial f}{\partial p} + \varrho_1 = 0. \end{aligned}$$

Posons dans la première équation (15)

$$\sigma_0 = \sigma + \left(2 + \frac{n-1}{\xi_1}\right)\frac{\partial \psi}{\partial p}:$$

elle s'écrira

$$(16)\qquad \Delta_1^x\sigma+2\left(1+\frac{n-1}{\xi_1}\right)\psi\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}-\left(1+\frac{n-2}{\xi_1}\right)K+\xi_4\frac{\partial f}{\partial p}=0;$$

posons de même, dans la seconde équation (15),

$$\sigma_1=\alpha_1+\sigma\psi+\left(2+\frac{n-1}{\xi_1}\right)\psi\frac{\partial\psi}{\partial p}:$$

elle s'écrira

$$(17)\qquad \begin{aligned}&\Delta_1^x\alpha_1-\alpha_1\frac{\partial f}{\partial p}-\psi\left[\frac{n-1}{\xi_1}\psi\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}+K+2\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right]+\\&\qquad+\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right)=0.\end{aligned}$$

Remplaçant dans les équations (16) et (17) ξ_1 par $1-n$, σ par $\frac{\alpha}{1-n}$ et ξ_4 par $\frac{\xi}{1-n}$, on a finalement les conditions

$$(18)\qquad \begin{aligned}&\Delta_1^x\alpha+\xi\frac{\partial f}{\partial p}+K=0\\&\Delta_1^x\alpha_1-\alpha_1\frac{\partial f}{\partial p}+\psi\left[\psi\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}-K-2\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right]+\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right)=0\end{aligned}$$

11. *Troisième hypothèse*: $m>3$.

Posons

$$\vartheta'=\psi_1(x,y,z,p,\dots p_m)\qquad\qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial p_m}=\psi'_1\neq 0.$$

On trouve alors, comme dans l'hypothèse précédente,

$$\psi_1=\xi_1\frac{p_m+\varphi}{p_2+\psi}\qquad\qquad(\xi_1\neq 0).$$

L'équation

$$\Delta_{n-1}^x\psi_1+M_{n-1}^{n-1}=0$$

donne ensuite

$$\frac{\xi_1}{p_2+\psi}\left[\Delta_{m-1}^x\varphi-\varphi\frac{\partial f}{\partial p}+\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)\right]+M_{n-1}^{n-1}=0,$$

et, après dérivation par rapport à p_{m-1},

$$\Delta_{m-1}^x\varphi'+M_{m-1}^{m-1}=0.$$

La fonction φ' est au moins d'ordre 2; si elle est d'ordre supérieur à 3, on recommencera le raisonnement précédent, et, en continuant de la sorte, on finira nécessairement par retomber sur une des hypothèses déjà étudiées.

En résumé, si la fonction f n'est pas linéaire en p, elle est assujettie à vérifier l'un des systèmes (13) ou (18), et en outre la relation

$$\varDelta_1^x \psi - \psi \frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{df}{dx}\right) = 0,$$

qui exprime l'existence d'une involution d'ordre 2.

12. Dans tout ce qui précède nous avons supposé $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \neq 0$. Voyons ce qui se produit dans le cas où f est linéaire en p.

Soit toujours m l'ordre réel de ϑ'. Si $m = 2$, on retrouve les conditions (10), et l'on a nécessairement $\alpha = 0$, sans quoi f vérifierait la condition $\varGamma_1$.

Supposons $m = 3$. L'équation (11) donne alors les conditions (16) et (17) où l'on fait $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0$ et où ξ_1 est arbitraire. On a ainsi les conditions

$$\varDelta_1^x \sigma + \xi_0 K + \xi \frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

$$\varDelta_1^x \alpha_1 - \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial p} - \psi \left[K + 2\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right] + \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right) = 0;$$

on peut toujours satisfaire à la première en prenant $\sigma = \xi_0 = \xi = 0$.

Si $m > 3$, on voit, comme au n° 11, qu'on peut de proche en proche se ramener à l'hypothèse $m \leqslant 3$.

Il nous reste donc à examiner l'hypothèse $m < 2$ qu'on ne peut plus exclure a priori. Dans ce cas l'équation (9) peut s'écrire

$$\varDelta_1^x \vartheta' + (n-1)\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right) + K = 0;$$

posons

$$\vartheta' = (2-n)\sigma + (n-1)\frac{\partial \psi}{\partial p}:$$

il viendra

$$\varDelta_1^x \sigma + K = 0.$$

C'est un cas particulier de la seconde équation (10).

13. Nous pouvons maintenant indiquer une classification des équations (1) qui sont intégrables par la méthode de Darboux, c'est-à-dire qui possèdent, outre les invariants x et y, un autre invariant pour chaque système de caractéristiques.

Nous ne considérons pas comme distinctes des équations que l'on peut ramener l'une à l'autre par une transformation ponctuelle; d'autre part nous laissons de côté:

1° les équations linéaires en p et q, qui ont été étudiées complètement par M Gau;

2° les équations de genre 1 ou 2 au plus pour chaque système de caractéristiques, qui ont été déterminées par M. Goursat.

Nous répartirons alors les autres équations en trois groupes.

Groupe A. — Ce groupe comprendra les équations qui sont de genre 1 pour l'un des systèmes de caractéristiques, et de genre $n \geqslant 3$ pour l'autre. Nous déterminerons au chapitre II les équations de ce groupe; il comprend trois familles, dont deux ont déjà été obtenues par M. Gosse.

Groupe B. — Ce groupe comprendra les équations qui sont de genre 2 pour l'un des systèmes de caractéristiques, et de genre $n \geqslant 3$ pour l'autre. Nous verrons, au chapitre III, que ces équations peuvent se ramener à deux types canoniques dont nous formerons les invariants.

Groupe C. — Ce groupe comprendra les équations qui sont de genre $n \geqslant 3$ pour chaque système de caractéristiques.

Considérons, parmi les équations du groupe C, celles dont l'ordre minimum d'involution, relativement au système X par exemple, est égal à 2. Nous venons d'établir qu'elles doivent vérifier l'un ou l'autre des systèmes suivants:

$$(G)\quad \begin{cases} G_1(\psi) \equiv \Delta_1^x \psi - \psi \dfrac{\partial f}{\partial p} + \left(\dfrac{df}{dx}\right) = 0 \\ G_2(\alpha) \equiv \Delta_1^x \alpha + \alpha \dfrac{\partial f}{\partial p} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0 \\ G_3(\alpha_1) \equiv \Delta_1^x \alpha_1 + \xi \dfrac{\partial f}{\partial p} + \xi_0 K = 0 \qquad \left(\xi_0 \neq 0 \text{ si } \dfrac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0\right) \end{cases}$$

$$(H)\quad \begin{cases} H_1(\psi) \equiv \Delta_1^x \psi - \psi \dfrac{\partial f}{\partial p} + \left(\dfrac{df}{dx}\right) = 0 \\ H_2(\alpha) \equiv \Delta_1^x \alpha + \xi \dfrac{\partial f}{\partial p} + \xi_0 K = 0 \qquad \left(\xi_0 \neq 0 \text{ si } \dfrac{\partial^2 f}{\partial p^2} \neq 0\right) \\ H_3(\alpha) \equiv \Delta_1^x \alpha_1 - \alpha_1 \dfrac{\partial f}{\partial p} + \psi \left[\psi \dfrac{\partial^2 f}{\partial p^2} - K - 2\left(\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial p}\right)\right] + \\ \qquad + \left(\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df}{dx}\right)\right) = 0. \end{cases}$$

On aurait évidemment, pour le système Y, deux systèmes analogues de conditions nécessaires, (G') et (H'), qu'il est inutile d'écrire.

Ceci posé, on voit que l'étude des équations du groupe C se ramènera, conformément à la méthode indiquée par M. Gosse, à l'étude de la compatibilité de l'un des systèmes C, Γ, G et H avec l'un des systèmes C' Γ', G' et H'. En se bornant aux cas essentiellement distincts, on aura donc à faire l'étude successive des dix cas

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma-\Gamma' & \Gamma-G' & \Gamma-H' & \Gamma-C' & G-G' \\ G-H' & G-C' & H-H' & H-C' & C-C'. \end{array}$$

Notons toutefois que si l'on se propose de résoudre le problème B pour les équations (1) qui sont linéaires par rapport à l'une des dérivées partielles du 1er ordre, p par exemple, on ne pourra plus, en raison de la dissymétrie ainsi introduite, considérer comme non distincts deux cas tels que $\Gamma-G'$ et $G-\Gamma'$. Le nombre des cas réellement distincts est alors porté à seize.

CHAPITRE II.

Détermination des équations du groupe A.

14. Nous pouvons évidemment nous borner à rechercher les équations qui ont un invariant du premier ordre pour le système Y et un invariant d'ordre $n \geqslant 3$ pour le système X.

Une équation qui admet, outre les invariants x et y, un invariant du premier ordre pour le système Y est de la forme

$$s\frac{\partial\varphi(x,y,z,q)}{\partial q}+p\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\neq 0\right),$$

ou

$$s=f(x,y,z,p,q)=p\,\varrho(x,y,z,q)+\omega(x,y,z,q), \tag{1}$$

avec

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial q}=0 \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\omega\frac{\partial\varphi}{\partial q}=0$$

La condition de compatibilité de ces deux dernières équations nous fournit la relation fondamentale

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}+\varrho\frac{\partial\omega}{\partial q}=\frac{\partial\varrho}{\partial x}+\omega\frac{\partial\varrho}{\partial q}. \tag{R}$$

L'équation (1) doit en outre pour être de la 1ère classe satisfaire aux conditions Γ, C, G ou H. Nous allons faire successivement l'étude de ces différentes conditions.

§ 1. Etude des conditions Γ; les équations de M. Gosse.

15. La condition Γ_1 s'écrit

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} + q\frac{\partial \lambda}{\partial z} + f\frac{\partial \lambda}{\partial p} + \lambda\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \qquad (\lambda \neq 0). \tag{2}$$

Dérivons deux fois l'équation (2) par rapport à q; on aura

$$(p\,\varrho'' + \omega'')\frac{\partial \lambda}{\partial p} + \lambda\,\varrho'' = 0,$$

les accents indiquant des dérivations par rapport à q.

Supposons d'abord $\varrho'' \neq 0$; on aura

$$\lambda = \frac{1}{\lambda_0\,p + \lambda_1},$$

λ_0 et λ_1 étant des fonctions des seules variables x, y, z,; l'équation (2) donne alors

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \lambda_0}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + q\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + \lambda_0\,\omega - \varrho\,\lambda_1 = 0.$$

Si λ_0 était nul, on aurait $\lambda_1 \neq 0$, $\varrho'' = 0$. Donc λ_0 n'est pas identiquement nul, et on peut prendre $\lambda_0 = 1$. On a alors, en remplaçant λ par sa valeur dans l'équation (2),

$$\omega = \varrho\,\lambda_1 - \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} - q\frac{\partial \lambda_1}{\partial z},$$

et l'équation (1) s'écrit

$$s + \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + q\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} = (p + \lambda_1)\,\varrho.$$

Prenant enfin une nouvelle fonction inconnue $Z(x, y, z)$ telle que

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \lambda_1\frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

on est ramené à une équation de la forme

$$s = p\,\varrho(x, y, z, q),$$

pour laquelle $\omega = 0$, et la relation (R) donne alors

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0.$$

On obtient donc les équations

$$s = p\varphi(y, z, q).$$

Les équations de ce type qui sont de la première classe ont été déterminées et intégrées par M. Gosse [1]).

16. Supposons en second lieu $\varrho'' = 0$. Comme $\omega'' \neq 0$, on devra avoir

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p} = 0,$$

et par suite

$$\varrho = -\frac{\partial \log \lambda}{\partial y} - q\frac{\partial \log \lambda}{\partial z};$$

l'équation (1) s'écrit donc

$$\lambda s + p\frac{\partial \lambda}{\partial y} + pq\frac{\partial \lambda}{\partial z} = \lambda\omega(x, y, z, q).$$

Si l'on prend une nouvelle fonction inconnue $Z(x, y, z)$ telle que

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \lambda(x, y, z),$$

on est ramené à une équation de la forme

$$s = \omega(x, y, z, q),$$

pour laquelle ϱ est nul, et la relation (R) donne

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

On obtient donc finalement les équations

$$s = \varphi(x, y, q).$$

Les équations de ce type qui sont de la première classe ont été également déterminées et intégrées par M. Gosse [2]).

§ 2. Etude des conditions C

17. Nous reprendrons, en la poussant jusqu'au bout, une discussion de M. Gosse [3]) relative aux équations (1) qui satisfont aux conditions C. M. Gosse établit que ces équations peuvent se rame-

---

[1]) *Annales de Toulouse*, 3e série, t. XVI, 1924, p. 334—240.

[2]) *Annales de Toulouse*, 3e série, t. XVI, 1924, p. 224—234.

[3]) *Annales de Toulouse*, 3e série, t. XVI, 1924, p. 210—211.

ner, par des transformations ponctuelles, à des équations qui satisfont aux conditions

(3) $$\frac{\partial \varrho}{\partial z} + \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial q} = 0$$

(4) $$\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \omega \frac{\partial \varrho}{\partial q} + \frac{\partial m}{\partial y} + q \frac{\partial m}{\partial z} = \psi(x, y, \varrho)$$

(5) $$(n-1)\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \omega \frac{\partial \varrho}{\partial q}\right) + \frac{\partial \omega}{\partial z} + \varrho \frac{\partial \omega}{\partial q} + \frac{\partial l}{\partial y} + q \frac{\partial l}{\partial z} = 0,$$

l et m désignant des fonctions de x, y, z, et n l'ordre minimum d'involution pour l'équation (1) relativement au système (X). Ce sont ces conditions que nous allons discuter.

Supposons d'abord que ϱ soit une fonction linéaire de q,

$$\varrho = \varrho_0(x, y, z)\, q + \varrho_1(x, y, z).$$

Si ϱ_0 était nul, il en serait de même de $\frac{\partial \varrho}{\partial q}$ et $\frac{\partial \varrho}{\partial z}$; un changement de fonction inconnue permettrait alors de supposer $\varrho = 0$, et la condition Γ_1 admettrait pour solution une fonction arbitraire de x. On a donc $\varrho_0 \neq 0$, et l'équation (3) donne en particulier

(6) $$\frac{\partial \varrho_0}{\partial z} + \varrho_0^2 = 0.$$

Prenons comme variables indépendantes x, y, z, ϱ au lieu de $x, y. z, q$, et posons

$$\omega(x, y, z, q) = \overline{\omega}(x, y, z, \varrho).$$

Remplaçons dans l'équation (4) q par sa valeur (3) et dérivons par rapport à z: nous aurons une équation de la forme

(7) $$\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial z} - \varrho_0 \overline{\omega} = A(x, y, z)\, \varrho + B(x, y, z).$$

D'ailleurs

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} + \varrho \frac{\partial \omega}{\partial q} = \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial z},$$

et l'équation (5) donne alors

(8) $$\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial z} + (n-1)\, \varrho_0 \overline{\omega} = A_1(x, y, z)\, \varrho + B_1(x. y, z).$$

Les équations (7) et (8) montrent que $\overline{\omega}$ est une fonction linéaire de ϱ: l'équation (1) est donc alors une équation de M. Gau.

18. Nous supposerons donc $\frac{\partial^2 \varrho}{\partial q^2} \neq 0$; on tire alors de l'équation (3)

(9) $$q = \varrho z + g(x, y, \varrho) \text{ avec } \frac{\partial^2 q}{\partial \varrho^2} = g'' \neq 0.$$

Des équations (3), (4), (5) et (9) on tire ensuite après quelques transformations faciles, en posant

(10) $$\alpha = l - (n+1)m,$$

(11) $$n\psi + (\varrho z + g)\frac{\partial(\alpha + m)}{\partial z} + \frac{\partial(\alpha + m)}{\partial y} = (z + g')\left[\varrho \frac{\partial m}{\partial z} + (\varrho z + g)\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial y \partial z}\right],$$

d'où, en prenant le système de variables x, y, z, ϱ et dérivant par rapport à z,

(12) $$\varrho \frac{\partial \alpha}{\partial z} + (\varrho z + g)\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial z} = (z + g')\left[2\varrho \frac{\partial^2 m}{\partial z^2} + (\varrho z + g)\frac{\partial^3 m}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 m}{\partial y \partial z^2}\right].$$

Ecartons d'abord l'hypothèse $\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} = 0$; l'équation (12) ne peut se réduire à une identité, et on en tire

$$g' = \frac{b_0 g + b_1 \varrho + b_2}{a_0 g + a_1 \varrho + a_2}.$$

Remplaçant g' par cette valeur dans l'équation (12) on obtient une équation de la forme

(13) $$A g^2 + g(B\varrho + C) + D\varrho^2 + E\varrho + F = 0.$$

Si cette équation n'est pas vérifiée identiquement, on en tire g, et l'équation (12) montre alors que les hypothèses $g'' \neq 0$ et $\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} \neq 0$ sont incompatibles. L'équation (13) doit donc être vérifiée identiquement, ce qui donne les conditions

(14) $$a_0 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = (a_0 z + b_0)\frac{\partial^3 m}{\partial z^3}$$

(15) $$a_0\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} + z\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}\right) + a_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = (a_1 z + b_1)\frac{\partial^3 m}{\partial z^3} + (a_0 z + b_0)\left(2\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} + z\frac{\partial^3 m}{\partial z^3}\right)$$

$$(16) \qquad a_1 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} + z \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \right) = (a_1 z + b_1) \left(2 \frac{\partial^2 m}{\partial z^2} + z \frac{\partial^3 m}{\partial z^3} \right)$$

$$(17) \quad a_0 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \, \partial z} + a_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = (a_0 z + b_0) \frac{\partial^3 m}{\partial y \, \partial z^2} + (a_2 z + b_2) \frac{\partial^3 m}{\partial z^3}$$

$$(18) \quad \begin{aligned} a_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \, \partial z} + a_2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} + z \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \right) &= (a_1 z + b_1) \frac{\partial^3 m}{\partial y \, \partial z^2} + \\ &+ (a_2 z + b_2) \left(2 \frac{\partial^2 m}{\partial z^2} + z \frac{\partial^3 m}{\partial z^3} \right) \end{aligned}$$

$$(19) \qquad a_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \, \partial z} = (a_2 z + b_2) \frac{\partial^3 m}{\partial y \, \partial z^2}.$$

Supposons d'abord $a_0 \neq 0$; on peut prendre $a_0 = 1$. On tire alors de (14), (15) et (16)

$$(b_1 - a_1 b_0) \left[2 \frac{\partial^2 m}{\partial z^2} + (z - a_1) \frac{\partial^3 m}{\partial z^3} \right] = 0;$$

si $b_1 - a_1 b_0 \neq 0$, on aura donc

$$\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} = m_1(x, y)(z - a_1)^{-2};$$

portant cette valeur dans (14) et (15) et remarquant que m_1 n'est pas nul, on est conduit à une impossibilité. On doit donc prendre

$$b_1 - a_1 b_0 = 0,$$

et les équations (14) et (15) donnent alors

$$\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} = m_1(x, y)(z + b_0)^{-2} \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 2 m_1 (z + b_0)^{-1}.$$

Portons dans (19) en remarquant qu'on ne peut avoir

$$b_2 - a_2 b_0 = 0,$$

car on en déduirait $g' = b_0$; on aura

$$\frac{\partial b_0}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial m_1}{\partial y} = 0$$

et l'équation (17) conduit alors à une impossibilité.

On a donc nécessairement $a_0 = 0$. Si $b_0 = 0$, on tire de (15) et (16)

$$a_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = (a_1 z + b_1) \frac{\partial^3 m}{\partial z^3} \qquad a_1 \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 2 (a_1 z + b_1) \frac{\partial^2 m}{\partial z^2};$$

on ne peut avoir $a_1 = 0$, donc on peut prendre $a_1 = 1$ et l'on a

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} = 2 m_1 (z + b_1)^{-1} \qquad \frac{\partial^2 m}{\partial z^2} = m_1 (z + b_1)^{-2}:$$

l'équation (17) donne alors

$$b_2 = a_2 b_1,$$

et l'on en tire $g' = b_1$. Par suite b_0 n'est pas nul, et l'on peut prendre $b_0 = 1$. L'équation (14) donne donc

$$\frac{\partial^3 m}{\partial z^3} = 0$$

et les équations (15) et (16) sont incompatibles avec l'hypothèse $\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} \neq 0$.

19. La seule hypothèse à conserver est donc l'hypothèse

$$\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} = 0 \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0.$$

Posons

$$m = m_0(x, y) z + m_1(x, y);$$

on aura d'après (10)

$$l = (n + 1)\,[m_0 z + m_2(x, y)].$$

Prenant alors le système de variables x, y, z, ϱ, on tire des équations (4), (5) et (9),

$$\overline{\omega} = \frac{\partial g}{\partial x} + (z + g')\left[\psi - \frac{\partial m_0}{\partial y} z - \frac{\partial m_1}{\partial y} - m_0(\varrho z + g)\right]$$

$$\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial z} = -2\left[\frac{\partial m_0}{\partial y} z + \frac{\partial m_2}{\partial y} + m_0(\varrho z + g)\right] - (n - 1)\psi.$$

La condition de compatibilité de ces deux dernières équations détermine ψ, et on arrive finalement à la conclusion suivante:

Les équations (1) qui vérifient les conditions (C) sont telles que l'on ait

$$(9) \qquad q = \varrho z + g(x, y, \varrho)$$

$$(20) \quad \omega = \frac{\partial g}{\partial x} + \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\varrho\right)(g' - nz) - (n + 1)\mu g + \mu_1\right](z + g'),$$

$g(x, y, \varrho)$, $\mu(x, y)$ et $\mu_1(x, y)$ désignant des fonctions arbitraires.

20. Si ces équations sont de genre 1 pour le système Y, on doit en outre avoir la relation fondamentale

$$(R) \qquad \frac{\partial \omega}{\partial z} + \varrho \frac{\partial \omega}{\partial q} = \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \omega \frac{\partial \varrho}{\partial q}.$$

Avec le système de variables x, y, z, ϱ, on a d'ailleurs

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} + \varrho \frac{\partial \omega}{\partial q} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \omega \frac{\partial \varrho}{\partial q} = \frac{1}{z+g'}\left(\bar{\omega} - \frac{\partial g}{\partial x}\right),$$

et la relation (R) s'écrit, compte tenu de (20),

$$-2nz\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\varrho\right) + g'\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\varrho\right)(1-n) - (n+1)\mu g + \mu_1$$
$$= \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\varrho\right)(g' - nz) - (n+1)\mu g + \mu_1,$$

ce qui exige $\mu = 0$. Les fonctions ϱ et ω sont donc définies par les relations

$$q = z\varrho + g(x, y, \varrho) \qquad \omega = \frac{\partial g}{\partial x} + (z+g')\mu_1(x, y).$$

Si l'on prend une nouvelle fonction inconnue $Z = \mu_0(x, y)z$ telle que

$$\frac{\partial^2 \log \mu_0}{\partial x \partial y} + \mu_1 = 0,$$

on aura une équation de même forme avec $\mu = 0$. En définitive, les équations cherchées peuvent se mettre, compte tenu de l'équation (9), sous la forme

$$(21) \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial x} + p\frac{\partial \varrho}{\partial z} + s\frac{\partial \varrho}{\partial q} = 0.$$

Les équations (21) admettent visiblement l'intégrale intermédiaire du premier ordre

$$q = Yz + g(x, y, Y),$$

où Y désigne une fonction arbitraire.

Proposons-nous maintenant de déterminer toutes les équations (21) qui sont de la 1ère classe. D'après ce que nous venons de voir, ces équations peuvent s'écrire indifféremment sous l'une ou l'autre des formes

$$s = f(x, y, z, p, q) = p\varrho + \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{avec} \quad q = \varrho z + g(x, y, \varrho),$$

ou

$$\frac{d\varrho}{dx} = 0.$$

On aura d'abord

$$\frac{df}{dx} = p_2 \varrho + p\frac{d\varrho}{dx} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \varrho}\frac{d\varrho}{dx} = p_2\varrho + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2},$$

et d'une façon générale

$$\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}} = p_k \varrho + \frac{\partial^k g}{\partial x^k}.$$

Soit

$$p_n + \lambda(x, y, z, p, \ldots p_{n-1}) = 0$$

l'involution d'ordre minimum pour le système X; on aura

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} + q\frac{\partial \lambda}{\partial z} + f\frac{\partial \lambda}{\partial p} + \frac{df}{dx}\frac{\partial \lambda}{\partial p_2} + \ldots + \frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}}\frac{\partial \lambda}{\partial p_{n-1}} + \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) = \lambda\frac{\partial f}{\partial p},$$

ou encore, en prenant ϱ comme variable indépendante à la place de q,

$$(22)\quad \begin{gathered} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + (\varrho z + g)\frac{\partial \lambda}{\partial z} + \left(\varrho p + \frac{\partial g}{\partial x}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial p} + \ldots + \\ + \left(\varrho p_{n-1} + \frac{\partial^{n-1} g}{\partial x^{n-1}}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial p_{n-1}} + \frac{\partial^n g}{\partial x^n} - \lambda\varrho = 0. \end{gathered}$$

Dérivons l'équation (22) par rapport à p_{n-1}, en posant $\frac{\partial \lambda}{\partial p_{n-1}} = \lambda'$; on aura

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial y} + (\varrho z + g)\frac{\partial \lambda'}{\partial z} + \ldots\ldots + \left(\varrho p_{n-1} + \frac{\partial^{n-1} g}{\partial x^{n-1}}\right)\frac{\partial \lambda'}{\partial p_{n-1}} = 0,$$

équation qui exprime que λ' est un invariant; on a donc

$$\lambda' = \xi_0 \quad \text{d'où} \quad \lambda = \xi_0 p_{n-1} + \lambda_1(x, y, z, p, \ldots, p_{n-2}).$$

L'équation (22) s'écrit alors

$$(23)\quad \begin{gathered} \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + (\varrho z + g)\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + \ldots + \left(\varrho p_{n-2} + \frac{\partial^{n-2} g}{\partial x^{n-2}}\right)\frac{\partial \lambda_1}{\partial p_{n-2}} + \\ + \xi_0\frac{\partial^{n-1} g}{\partial x^{n-1}} + \frac{\partial^n g}{\partial x^n} - \lambda_1\varrho = 0. \end{gathered}$$

En recommençant sur l'équation (23) le calcul que nous venons de faire sur l'équation (22), nous aurons

$$\lambda_1 = \xi_1 p_{n-2} + \lambda_2(x, y, z, p, \ldots, p_{n-3}),$$

avec

$$\begin{gathered} \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} + (\varrho z + g)\frac{\partial \lambda_2}{\partial z} + \ldots + \left(\varrho p_{n-3} + \frac{\partial^{n-3} g}{\partial x^{n-3}}\right)\frac{\partial \lambda_2}{\partial p_{n-3}} + \xi_1\frac{\partial^{n-2} g}{\partial x^{n-2}} + \\ + \xi_0\frac{\partial^{n-1} g}{\partial x^{n-1}} + \frac{\partial^n g}{\partial x^n} - \lambda_2\varrho = 0, \end{gathered}$$

et ainsi de suite. On arrivera de la sorte à l'équation

$$\frac{\partial \lambda_{n-1}}{\partial y} + (\varrho z + g)\frac{\partial \lambda_{n-1}}{\partial z} + \xi_{n-2}\frac{\partial g}{\partial x} + \xi_{n-3}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dots + \xi_0 \frac{\partial^{n-1} g}{\partial x^{n-1}} + \\ + \frac{\partial^n g}{\partial x^n} - \lambda_{n-1}\varrho = 0,$$

d'où l'on tirera encore

$$\lambda_{n-1} = \xi_{n-1} z + \lambda_n,$$

avec

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial y} + \xi_{n-1} g + \xi_{n-2}\frac{\partial g}{\partial x} + \dots + \xi_0 \frac{\partial^{n-1} g}{\partial x^{n-1}} + \frac{\partial^n g}{\partial x^n} - \varrho\lambda_n = 0. \tag{24}$$

On aura donc en définitive

$$\lambda = \xi_0 p_{n-1} + \xi_1 p_{n-2} + \dots + \xi_{n-2} p + \xi_{n-1} z + \lambda_n(x, y),$$

les ξ_i désignant des fonctions de la seule variable x.

On tire alors de l'équation (24), en désignant par des accents les dérivées par rapport à ϱ,

$$\frac{\partial^n g'}{\partial x^n} + \xi_0 \frac{\partial^{n-1} g'}{\partial x^{n-1}} + \dots + \xi_{n-1} g' + \lambda_n. \tag{25}$$

Soit $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$ un système fondamental de l'équation linéaire

$$\frac{d^n v}{dx^n} + \xi_0 \frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + \dots \xi_{n-1} v = 0;$$

on aura, en désignant par $\sigma_0(x, y)$ une intégrale particulière de l'équation (25) indépendante de ϱ,

$$g' = u_1'(\varrho, y)\, v_1(x) + \dots + u_n'(\varrho, y)\, v_n(x) + \sigma_0(x, y)$$

d'où

$$g = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n + \sigma_0(x, y)\varrho + \sigma_1(x, y). \tag{26}$$

Portons cette valeur dans l'équation (24); elle s'écrira

$$\frac{\partial^n \sigma_1}{\partial x^n} + \xi_0 \frac{\partial^{n-1} \sigma_1}{\partial x^{n-1}} + \dots + \xi_{n-1}\sigma_1 = -\frac{\partial \lambda_n}{\partial y};$$

on a d'ailleurs

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial y}\right) + \xi_0 \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial y}\right) + \dots + \xi_{n-1}\frac{\partial \sigma_0}{\partial y} = \frac{\partial \lambda_n}{\partial y},$$

et par suite

$$\sigma_1 + \frac{\partial \sigma_0}{\partial y} = Y_1 v_1 + Y_2 v_2 + \dots + Y_n v_n.$$

En changeant les u_i dans l'équation (26) on pourra prendre

$$Y_1 = Y_2 = \dots = Y_n = 0,$$

et alors, en changeant de fonction inconnue, on pourra poser $\sigma_0 = \sigma_1 = 0$, et écrire

$$g = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n. \tag{27}$$

L'équation (21) admet alors l'intégrale intermédiaire

$$q = -\frac{Y'}{Y} z + u_1\left(-\frac{Y'}{Y}, y\right) v_1(x) + \dots + u_n\left(-\frac{Y'}{Y}, y\right) v_n(x),$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} z = {} & \frac{v_1(x)}{Y} \int u_1\left(-\frac{Y'}{Y}, y\right) Y\, dy + \dots + \\ & + \frac{v_n(x)}{Y} \int u_n\left(-\frac{Y'}{Y}, y\right) Y\, dy + \frac{X}{Y}, \end{aligned} \tag{28}$$

X et Y désignant des fonctions arbitraires.

En résumé quand l'équation (21) admet pour le système X une involution elle est nécessairement de la 1[ère] classe. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la fonction g soit de la forme (27); l'intégrale générale s'exprime alors au moyen de la formule (28).

§ 3. Etude des conditions G et H.

21. Si l'on fait dans la formule (27) $n = 2$, on obtient des équations de genre 1 pour le système Y ayant une involution d'ordre 2 pour le système X. Comme elles sont de la 1[ère] classe, elles satisfont aux conditions G ou H. Nous allons voir qu'il n'en existe pas d'autres.

Les équations (1) cherchées doivent satisfaire d'une part à la relation fondamentale (R), d'autre part à l'équation

$$\Delta_1^x \psi - \psi \frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{df}{dx}\right) = 0 \tag{29}$$

qui exprime l'existence d'une involution d'ordre 2, étant entendu d'ailleurs que l'équation

$$\Delta_1^x \lambda + \lambda \frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

n'admet que la solution $\lambda = 0$.

Dérivons l'équation (29) par rapport à p, en remarquant qu'on a ici

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = p^2\left(\frac{\partial \varrho}{\partial z} + \varrho\frac{\partial \varrho}{\partial q}\right) + 2p\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \omega\frac{\partial \varrho}{\partial q}\right) + \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega\frac{\partial \omega}{\partial q};$$

on en déduira

$$\Delta_1^z \psi''' = 0, \quad \psi''' = 0, \quad \psi = \beta_0 p^2 + \beta_1 p + \beta_2,$$

les β_i désignant des fonctions de x, y, z. L'équation (29) fournit alors les trois équations

(30) $$\frac{\partial \beta_0}{\partial y} + q\frac{\partial \beta_0}{\partial z} + \varrho\beta_0 + \frac{\partial \varrho}{\partial z} + \varrho\frac{\partial \varrho}{\partial q} = 0$$

(31) $$\frac{\partial \beta_1}{\partial y} + q\frac{\partial \beta_1}{\partial z} + 2\,\omega\,\beta_0 + 2\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \omega\frac{\partial \varrho}{\partial q}\right) = 0$$

(32) $$\frac{\partial \beta_2}{\partial y} + q\frac{\partial \beta_2}{\partial z} + \omega\beta_1 - \varrho\beta_2 + \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega\frac{\partial \omega}{\partial q} = 0.$$

Si $\beta_0 \neq 0$, nous prendrons une nouvelle fonction inconnue $Z(x, y, z)$ telle que

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \beta_0(x, y, z)\frac{\partial Z}{\partial z};$$

on passe ainsi de l'équation (1) à une équation de même forme pour laquelle on a

(33) $$\frac{\partial \varrho}{\partial z} + \varrho\frac{\partial \varrho}{\partial q} = 0.$$

L'équation (30) donne alors

$$\Delta_1^z \beta_0 = 0 \quad \text{donc} \quad \beta_0 = 0.$$

On peut donc toujours supposer $\beta_0 = 0$; les équations (30) et (31) sont alors remplacées par l'équation (33) et l'équation

(34) $$\frac{\partial \beta_1}{\partial y} + q\frac{\partial \beta_1}{\partial z} + 2\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \omega\frac{\partial \varrho}{\partial q}\right) = 0.$$

On tire de (33)

$$q = \varrho z + g(x, y, \varrho),$$

puis de (34)

$$\omega = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{2}(z + g')\left[\frac{\partial \beta_1}{\partial y} + (\varrho z + g)\frac{\partial \beta_1}{\partial z}\right].$$

La relation (R) donne alors $\frac{\partial \beta_1}{\partial z} = 0$, et on est ramené aux équations étudiées au précédent paragraphe.

Nous avons ainsi achevé la détermination des équations de la première classe qui sont de genre 1 pour l'un des systèmes de caractéristiques.

CHAPITRE III.

Détermination des équations du groupe B.

22. Nous nous proposons, dans ce chapitre, la détermination des équations

(1) $$s = f(x, y, z, p, q)$$

qui sont de genre 2 pour le système X, et de genre $n \geqslant 3$ pour le système Y.

Notre étude fera ressortir une différence essentielle entre le cas où f est linéaire par rapport à q et le cas où il n'en est pas ainsi. Dans le premier cas une équation (1) qui est de genre 2 pour le système X n'admet pas nécessairement un invariant pour le système Y, donc n'est pas nécessairement de la première classe. Au contraire une équation (1) non linéaire par rapport à q et qui est de genre 2 pour le système X est toujours de la première classe: elle admet en effet pour le système Y un invariant qui est au plus d'ordre 3.

23. Supposons donc en premier lieu que l'équation (1), qui admet un invariant d'ordre 2 pour le système X, soit linéaire par rapport à q, et considérons la fonction $a(x, y, z, p)$ définie par la relation

$$p = z\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

où $\varphi(x, y, a)$ est une fonction arbitraire. M. Gosse a montré [1]) que les équations cherchées peuvent se ramener par des transformations *ponctuelles* à l'équation

(2) $$\frac{da}{dy} = \frac{\partial a}{\partial y} + q\frac{\partial a}{\partial z} + s\frac{\partial a}{\partial p} = z,$$

qui admet l'invariant du second ordre

$$\frac{da}{dx} - \varphi(x, y, a).$$

La transformation *de Bäcklund*

$$Z = a(x, y, z, p)$$

conduit alors de l'équation (2) à l'équation

$$S = Q\frac{\partial \varphi(x, y, Z)}{\partial Z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

[1]) *Annales de Toulouse,* t. XII, 1920, p. 117.

et il reste à déterminer la fonction φ de telle sorte que l'équation en Z soit de la première classe.

Appliquant à cette équation les conclusions des recherches de M. Gau[1]), j'ai obtenu les résultats suivants:

1°. Si φ est linéaire en a, l'équation (2) est une équation linéaire; on sait déterminer les équations linéaires de la première classe qui sont de genre 2 pour le système X.

2°. Si φ n'est pas linéaire en a, il n'y a que trois formes possibles pour la fonction φ:

α — ou bien

$$\varphi = X e^{\xi(a+u)} - \frac{\xi'}{\xi}(a+u) - \frac{\partial u(x.y)}{\partial x},$$

$X(x)$, $\xi(x)$ et $u(x, y)$ désignant des fonctions arbitraires; dans ce cas l'équation (2) se ramène par une transformation (T_0) à l'équation

$$s = p e^z$$

qui est une équation de M. Goursat;

β — ou bien

$$\varphi = X_1 e^{\xi(a+u)} + X_2 e^{-\xi(a+u)} - \frac{\xi'}{\xi}(a+u) - \frac{\partial u}{\partial x},$$

$X_1(x)$, $X_2(x)$, $\xi(x)$ et $u(x.y)$ désignant des fonctions arbitraires; dans ce cas l'équation (2) se ramène par une transformation (T'_0) à l'équation

$$s = e^z \sqrt{p^2 - 4}$$

qui est une équation de M. Goursat.

γ — ou bien

$$\varphi = \frac{\varrho}{\xi} e^{\xi a} - \frac{\xi'}{\xi} a + \psi,$$

$\xi(x)$ et $\psi(x, y)$ désignant des fonctions arbitraires, et $\varrho(x, y)$ une fonction telle que l'équation de Moutard

$$s = \frac{d}{dx}\left[\varrho(x, y) e^z\right]$$

soit de la première classe, ce qui exige que ϱ soit de la forme

$$\varrho = \xi_1(x)\,\eta_1(y) + \xi_2(x)\,\eta_2(y) + \dots + \xi_n(x)\,\eta_n(y);$$

l'équation (2) se ramène dans ce cas, par une transformation (T_0), à une équation de M. Gau.

---

[1]) Thèse, n° 30, et *Annales de Grenoble*, loc. cit.

Pour la démonstration de ces résultats, nous nous contenterons de renvoyer aux conclusions de M. Gau, dont ils sont des conséquences quasi-immédiates.

En résumé, l'équation (2), qui est toujours de genre 2 pour le système X, n'est pas toujours de la première classe; quand elle est de la première classe, elle se ramène, par une transformation *ponctuelle*, à un type déjà obtenu.

23. Examinons maintenant le cas où l'équation (1), supposée toujours de genre 2 pour le système X, n'est pas linéaire par rapport à q. M. Gosse a montré[1] que la fonction f doit alors être de la forme

$$f = \frac{b(x, y, z, q) - \dfrac{\partial a}{\partial y} - q \dfrac{\partial a}{\partial z}}{\dfrac{\partial a(x, y, z, p)}{\partial p}},$$

et il résulte de son analyse[2] que le seul cas qui puisse conduire à des équations distinctes de celles de M. Goursat est le cas où l'on a

$$b = \omega(x, y, z) q^{\frac{1}{2}} + \vartheta(x, y, z) q + \varphi(x, y, z);$$

on est ainsi conduit à chercher les équations

$$s = f = \alpha(x, z, p) [\omega(x, y, z) q^{\frac{1}{2}} + \omega_1(x, y, z, p) q],$$

où l'on a

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial p} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial z},$$

qui sont de genre 2 pour le système X, autrement dit à déterminer les fonctions α, ω et ω_1 de telle sorte que l'équation

$$\Delta_1^x \lambda - \lambda \frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{df}{dx}\right) = 0 \tag{3}$$

ait une solution $\lambda(x, y, z, p)$ indépendante de q.

Nous supposerons essentiellement $\alpha \neq 0$, $\omega \neq 0$ puisque f n'est pas linéaire par rapport à q, enfin $\omega_1 \neq 0$, l'hypothèse $\omega_1 = 0$ ramenant d'après les calculs de M. Gosse aux équations de M. Goursat.

Si l'on fait le changement de variable

$$\lambda = \alpha(x, z, p) u(x, y, z, p),$$

---

[1]) *Annales de Toulouse*, loc. cit. p. 113—114.

[2]) *Annales de Toulouse*, loc. cit. p. 120. Voir aussi *Comptes Rendus*, t. 182, 1926, p. 1127.

on voit que l'équation (3) est équivalente au système

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\alpha}{2}\omega^2 = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \log \omega}{\partial x} + \frac{p}{\alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{p}{\alpha}\frac{\partial \log \omega}{\partial z} + \frac{3}{2}\omega_1 = 0 \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{u}{\alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \omega_1\frac{\partial u}{\partial p} - u\frac{\partial \omega_1}{\partial p} + \frac{\omega_1}{\alpha^2}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \\ + p\left(\frac{\omega_1}{\alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \omega_1}{\partial z}\right) + \omega_1^2 = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

En posant

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\partial^2 \beta(x, z, p)}{\partial p^2} \quad \text{d'où} \quad \omega_1 = -\frac{\partial^2 \beta}{\partial p\, \partial z} + \frac{2}{3}\gamma(x, y, z)$$

et intégrant l'équation (5), on a

$$\begin{gathered}u = \frac{\partial^2 \beta}{\partial p\, \partial x} + p\frac{\partial^2 \beta}{\partial p\, \partial z} - \frac{\partial \beta}{\partial p}\frac{\partial \log \omega}{\partial x} - \left(p\frac{\partial \beta}{\partial p} - \beta\right)\frac{\partial \log \omega}{\partial z} + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial \beta}{\partial z} - p\gamma(x, y, z) + \gamma_0(x, y, z).\end{gathered}$$

On tire alors de l'équation (4)

$$\frac{1}{2\beta''} = A\beta' + B(p\beta' - \beta) + Cp + D, \tag{7}$$

les accents désignant des dérivées par rapport à p, avec

$$A = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \log \omega}{\partial x\, \partial y} \qquad B = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \log \omega}{\partial y\, \partial z} \qquad C = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial \gamma}{\partial y}$$

$$D = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial \gamma_0}{\partial y}.$$

Dérivons l'équation (7) par rapport à y, puis par rapport à p; on aura

$$\beta''\left(\frac{\partial A}{\partial y} + p\frac{\partial B}{\partial y}\right) + \frac{\partial C}{\partial y} = 0. \tag{8}$$

Supposons d'abord

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0;$$

on aura

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial B}{\partial y} = 0,$$

d'où, en posant

$$\omega = e^{\varphi(x, y, z)}$$

et désignant par $\psi(y)$ une fonction arbitraire de y,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \psi^2 - \psi',$$

et par suite

$$\omega = \frac{\sqrt{Y'(y)}\, \vartheta_2(x, z)}{\vartheta_1(x, z) - Y},$$

Y, ϑ_1 et ϑ_2 désignant des fonctions arbitraires.

On pourra alors écrire l'équation proposée sous la forme

$$s = \alpha(x, z, p)\left[\frac{\sqrt{Y' q}}{\vartheta_1 - Y} + \omega_1(x, y, z, p)\, q\right],$$

les fonctions α et ω_1 ne satisfaisant plus à aucune relation.

Si $\dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial z} \neq 0$, on aura, en prenant comme nouvelles variables x, Y, et ϑ_1, l'équation

$$\text{(I)} \qquad s = \alpha(x, z, p)\left[\frac{q^{\frac{1}{2}}}{z - y} + \omega_1(x, y, z, p)\, q\right];$$

si $\dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial z} = 0$, $\dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial x} \neq 0$, on aura, en prenant ϑ_1 et Y comme variables indépendantes, l'équation

$$\text{(II)} \qquad s = \alpha(x, z, p)\left[\frac{q^{\frac{1}{2}}}{x - y} + \omega_1(x, y, z, p)\, q\right];$$

enfin si ϑ_1 est constant, on aura l'équation

$$\text{(III)} \qquad s = \alpha(x, z, p)\left[\frac{q^{\frac{1}{2}}}{y} + \omega_1(x, y, z, p)\, q\right].$$

Supposons en second lieu

$$\frac{\partial C}{\partial y} \neq 0;$$

l'équation (8) donne

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial p^2} = 0.$$

Si α est indépendant de p, on aura

$$\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial p^2} = 0,$$

et on pourra mettre l'équation proposée sous la forme

$$s = \omega(x, y, z)\, q^{\frac{1}{2}} + [\omega_1(x, y, z) + \omega_2(x, z)\, p]\, q;$$

en prenant une nouvelle fonction inconnue $Z(x, z)$ telle que

$$\frac{\partial Z}{\partial z}\,\omega_2 + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

on fait disparaître le terme en p, et on arrive à l'équation

(IV) $$s = \omega(x, y, z)\, q^{\frac{1}{2}} + \omega_1(x, y, z)\, q.$$

Si α dépend de p, on arrive finalement, en faisant au besoin un changement de fonction inconnue, à l'équation

(V) $$s = p\left\{\omega(x, y, z)\, q^{\frac{1}{2}} + [\vartheta_1(x, z) \operatorname{Log} p + \omega_1(x, y, z)]\, q\right\}.$$

Nous allons étudier successivement chacune des équations (I) à (V).

24. Considérons d'abord l'équation

(I) $$s = \alpha(x, z, p)\left[\frac{q^{\frac{1}{2}}}{z - y} + \omega_1(x, y, z, p)\, q\right]$$

L'existence d'un invariant d'ordre 2 pour le système X exige [1]) que l'équation

$$\frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial z} + f\frac{\partial P}{\partial p} + P\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial q} = 0\right)$$

ait une solution non nulle; on aura ici

$$P = \frac{\vartheta(x, z)}{\alpha} = \frac{\partial}{\partial p}\,\varphi(x, z, p) \quad \text{et} \quad \omega_1 = -\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varphi_1(x, y, z).$$

Les équations (4), (5) et (6) ont été formées indépendamment de toute relation entre ω_1 et α. Si l'on remplace dans ces équations ω par $\dfrac{1}{z - y}$, on aura d'abord

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\alpha}{2}\,\frac{1}{(z - y)^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad u = -\frac{\alpha}{2(z - y)} + u_1(x, z, p),$$

puis

(9) $$-\frac{1}{2(z - y)}\frac{\partial \alpha}{\partial p} - \frac{p}{\alpha(z - y)} + \frac{\partial u_1}{\partial p} + \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + p\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right) + \\ + \frac{3}{2}\left(\varphi_1 - \frac{1}{\vartheta}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0.$$

---

[1]) Goursat, *Annales de Toulouse*, loc. cit. p. 36.

En dérivant l'équation (9) par rapport à y, on aura

$$(10)\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial p}+\frac{p}{\alpha}=\vartheta_1(x,z),$$

avec

$$\varphi_1=\frac{2\vartheta_1}{3(z-y)}+\vartheta_2(x,z)\qquad \omega_1=-\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial \varphi}{\partial z}+\frac{2\vartheta_1}{3(z-y)}+\vartheta_2(x,z),$$

et l'équation (9) se réduit à

$$(11)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial p}+\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}+p\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)+\frac{3}{2}\left(\vartheta_2-\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)=0.$$

L'équation (6) donne alors

$$(12)\qquad \begin{aligned}&\alpha\frac{\partial u}{\partial z}+u\frac{\partial \alpha}{\partial z}+\alpha^2\left(\omega_1\frac{\partial u}{\partial p}-u\frac{\partial \omega_1}{\partial p}\right)+\omega_1\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\alpha\frac{\partial \omega_1}{\partial x}+\\ &\qquad +p\left(\omega_1\frac{\partial \alpha}{\partial z}+\alpha\frac{\partial \omega_1}{\partial z}\right)+\alpha^2\omega_1^2=0.\end{aligned}$$

Le premier membre est un trinôme du second degré en $\dfrac{1}{z-y}$. En égalant à zéro le coefficient du terme $(z-y)^{-2}$, on aura d'abord

$$\vartheta_1=\frac{3\epsilon}{2}\qquad (\epsilon=\pm 1),$$

et l'équation (10) donne

$$\alpha=2\epsilon(\varrho+p)+2\epsilon_1\sqrt{\varrho(\varrho+p)}\qquad (\epsilon_1=\pm 1),$$

la fonction $\varrho(x,z)$ étant arbitraire.

Nous mettons à part les cas singuliers

$$\varrho=0\qquad \varrho=\infty$$

pour lesquels on a respectivement

$$\alpha=2\epsilon p\qquad \alpha=\epsilon p;$$

nous reviendrons plus loin sur ces deux cas.

On peut prendre alors

$$\varphi=\varepsilon\vartheta\,\mathrm{Log}\left[\varepsilon\varrho+\varepsilon_1\sqrt{\varrho(\varrho+p)}\right].$$

Egalant ensuite à zéro le coefficient du terme $(z-y)^{-1}$ dans l'équation (12), on aura

$$(13)\qquad \left(\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial \varphi}{\partial z}-\vartheta_2\right)(\varepsilon\alpha-p)-\frac{\partial \alpha}{\partial z}-\frac{\alpha^2}{2\vartheta}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\,\partial z}=0,$$

et il en résulte

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0.$$

En remplaçant φ par $\frac{\varphi}{\vartheta}$, on voit qu'on peut supposer partout

$$\vartheta = 1;$$

on aura alors

$$\omega_1 = \vartheta_2 - \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{z - y} \qquad \varphi = \varepsilon \operatorname{Log}\left[\varepsilon \varrho + \varepsilon_1 \sqrt{\varrho(\varrho + p)}\right] \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{1}{\alpha},$$

et l'équation (13) s'écrira

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \vartheta_2\right)(\varepsilon \alpha - p) - \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \vartheta_2 = \frac{\varepsilon_1}{2\sqrt{\varrho(\varrho + p)}} \frac{\partial \varrho}{\partial z} \qquad \vartheta_2 = \frac{\varepsilon}{2\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial z}.$$

L'équation (11) donne ensuite

$$u_1 = \vartheta_3(x, z) + \frac{\vartheta_4(x, z)}{\sqrt{\varrho(\varrho + p)}} + \vartheta_5(x, z)\sqrt{\varrho(\varrho + p)}$$

avec

$$\vartheta_4 = -\frac{\varepsilon_1}{2}\left(\varrho \frac{\partial \varrho}{\partial z} - \frac{\partial \varrho}{\partial x}\right) \qquad \vartheta_5 = \frac{\varepsilon_1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial z},$$

et, en annulant le terme indépendant de $(z - y)^{-1}$ dans l'équation (12), on aura

$$\frac{\partial \vartheta_3}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{4\varrho}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial z}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z^2} - \frac{1}{2\varrho}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial z}\right)^2 = 0.$$

Si $\frac{\partial \varrho}{\partial z}$ est nul, on arrive, en prenant comme nouvelles variables

$$\int \varrho\, dx \qquad y \qquad z + \int \varrho\, dx,$$

à une équation de M. Goursat.

Si $\frac{\partial \varrho}{\partial z} \neq 0$, on a

$$\varrho = \xi_0 (z + \xi_1)^2;$$

en prenant comme nouvelles variables

$$\int \xi_0\, dx \qquad y \qquad z,$$

on arrive finalement à l'équation

$$(14)\quad s = \left\{2\left[(z+X)^2+p\right]+2(z+X)\sqrt{(z+X)^2+p}\right\}\left\{\frac{q^{\frac{1}{2}}}{z-y}+\left[\frac{1}{z-y}-\frac{1}{\sqrt{(z+X)^2+p}}\right]q\right\}$$

où X est une fonction arbitraire de x.

Si X se réduit à une constante, on peut prendre $X=0$, et le changement de variables

$$x'=x \qquad y'=-\frac{1}{y} \qquad z'=\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$$

conduit à l'équation

$$sz = 2(1+p+\sqrt{1+p})\,(1+q+\sqrt{1+q})$$

qui rentre dans le type IV des équations de M. Goursat. Mais si X ne se réduit pas à une constante, l'équation (14) ne peut, on s'en assure sans peine, admettre un invariant du second ordre pour le système Y. Elle admet pour le système X l'invariant

$$\frac{r}{2p}\left[1-\frac{z+X}{\sqrt{(z+X)^2+p}}\right]-\frac{(z+X)^2+p+(z+X)\sqrt{(z+X)^2+p}}{z-y}+$$
$$+z+\frac{(z+X)^2+2p}{\sqrt{(z+X)^2+p}}.$$

25. Il nous reste à revenir sur les cas singuliers

$$\alpha=\varepsilon p \qquad \alpha=2\varepsilon p.$$

Dans le premier cas, on peut prendre

$$\varphi=\varepsilon\vartheta\,\mathrm{Log}\,p.$$

L'équation (13) montre que ϑ est indépendant de z; on peut donc prendre

$$\vartheta=1 \qquad \varphi=\varepsilon\,\mathrm{Log}\,p.$$

On tire ensuite de (11)

$$u_1=-\frac{3}{2}p\vartheta_2+\vartheta_3(x,z) \qquad \text{d'où} \qquad u=-\frac{\varepsilon p}{z-y}-\frac{3}{2}p\vartheta_2+\vartheta_3,$$

puis, de (12),

$$\frac{\partial\vartheta_3}{\partial z}+\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}=0 \qquad \varepsilon\frac{\partial\vartheta_2}{\partial z}+\vartheta_2^2=0 \qquad \vartheta_2=\frac{\varepsilon}{z-X_0}.$$

Si X_0 se réduit à une constante, on a une équation de M. Goursat. Sinon, on peut prendre X_0 comme variable à la place de x; on obtient ainsi l'équation

$$(15) \qquad s = p\left[\frac{q^{\frac{1}{2}}}{z-y} + q\left(\frac{1}{z-x} + \frac{1}{z-y}\right)\right],$$

qui admet pour le système X l'invariant du second ordre

$$\frac{r}{p} - \frac{p}{2}\left(\frac{1}{z-y} + \frac{3}{z-x}\right) + \frac{1}{z-x},$$

et il est facile de voir que cette équation n'admet pas d'invariant du second ordre pour le système Y.

L'hypothèse

$$\alpha = 2\,\varepsilon\,p$$

conduit d'autre part, on s'en assure sans peine, à une équation de M. Goursat.

26. Considérons maintenant l'équation

$$(\text{II}) \qquad s = \alpha(x, z, p)\left[\frac{q^{\frac{1}{2}}}{x-y} + \omega_1(x, y, z, p)\, q\right].$$

En raisonnant comme pour l'équation (I), on obtient

$$\alpha = \frac{\vartheta(x, z)}{\dfrac{\partial}{\partial p}\varphi(x, z, p)} \qquad \omega_1 = -\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{2\,\vartheta_1(x, z)}{3(x-y)} + \vartheta_2(x, z)$$

L'équation (12) est alors remplacée par une équation dont le premier membre est un trinôme du second degré en $\dfrac{1}{x-y}$; un calcul simple d'identification montre qu'on devrait avoir

$$\omega_1 = 0,$$

hypothèse exclue.

On étudie de la même façon l'équation (III). On a ici successivement

$$\alpha = \frac{\vartheta(x, z)}{\dfrac{\partial}{\partial p}\varphi(x, z, p)}, \qquad \omega_1 = \vartheta_2(x, z) - \frac{\vartheta_1(x, z)}{3\,y} - \frac{1}{\vartheta}\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\alpha = p\,\vartheta_1(x, z) + \vartheta_3(x, z):$$

un nouveau calcul d'identification, à partir des équations (9) et (12), conduit alors à l'équation

$$s = \frac{\xi(x)}{\vartheta}\,\frac{q^{\frac{1}{2}}}{y} + q\left[\xi_1(x) - \frac{2}{\vartheta}\,\frac{\partial\vartheta}{\partial x} - \frac{2p}{\vartheta}\,\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right].$$

En prenant comme nouvelles variables

$$\int \xi(x)\,dx \qquad y \qquad \int \vartheta^2\,dz$$

on aboutit à l'équation

$$s = \frac{q^{\frac{1}{2}}}{y} + q\varrho(x)$$

qui est une équation de M. Goursat. Elle admet en effet un invariant d'ordre 1 pour le système Y (nº 16).

On voit pareillement que l'équation (IV) se ramène à des équations de M. Goursat.

Enfin l'équation (V) se ramène par des calculs simples soit à des équations de M. Goursat, soit à l'équation (15).

En résumé, toutes les équations (1) qui sont de genre 2 pour le système X et qui se sont pas linéaires par rapport à q se ramènent, par des transformations ponctuelles, soit aux équations de M. Goursat, soit à l'une des équations (14) ou (15).

27. Les équations (14) et (15) sont elles-mêmes de la première classe. J'ai établi en effet qu'elles sont de genre 3 pour le système Y. Particularité curieuse: ces deux équations, si différentes de forme, admettent pour le système Y le même invariant,

$$\frac{q_3 - \dfrac{q_2^2}{2q} - q_2\,\dfrac{1 + 5q^{\frac{1}{2}} + 4q}{z - y} - \dfrac{2q + 2q^{\frac{3}{2}} - 6q^2 - 10q^{\frac{5}{2}} - 4q^3}{(z-y)^2}}{q_2 - 2\,\dfrac{q + 2q^{\frac{3}{2}} + q^2}{z - y}}.$$

Pour le vérifier, il suffit de montrer qu'en égalant à zéro le numérateur et le dénominateur de l'expression précédente, on obtient deux équations en involution avec chacune des équations (14) et (15). Cette vérification ne présente pas d'autre difficulté que la longueur des calculs.

J'ai pu d'autre part obtenir l'intégrale explicite de l'équation (15). L'intégration de cette équation se ramène à celle de l'équation différentielle

(16) $$\frac{r}{p} - \frac{p}{2}\left(\frac{1}{z-y} + \frac{3}{z-x}\right) + \frac{1}{z-x} = X(x),$$

X désignant une fonction arbitraire. Posons

(17) $$p = u(z-x)(z-y) \qquad X = \frac{\xi'''}{\xi''};$$

on tire de l'équation (16)

$$2\frac{\partial u}{\partial x} - u^2(x-y) = 2u\frac{\xi''}{\xi''},$$

d'où

$$u = \frac{2\xi''}{\xi - \xi'(x-y) + Y_1},$$

Y_1 désignant une fonction arbitraire de y.

Posant maintenant

$$z - y = v[\xi - \xi'(x-y) + Y_1]^2,$$

on tire de (17)

$$\frac{1}{v} = X_2 + Y_2 - 2\xi' Y_1 - \xi'^2 y,$$

Y_2 désignant une nouvelle fonction arbitraire de y, et X_2 une fonction de x telle que

(18) $$X'_2 = 2\xi''(\xi' x - \xi).$$

On a donc ainsi

(19) $$z = y + \frac{[\xi - \xi'(x-y) + Y_2]^2}{X_2 + Y_2 - 2\xi' Y_1 - \xi'^2 y}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (15), on trouve finalement

(20) $$Y_1'^2 + Y_2' = 0.$$

On satisfait à l'équation (18) en posant

(21) $$x = \varphi''(\alpha) \qquad \xi = \alpha\varphi''(\alpha) - \varphi'(\alpha) \qquad X_2 = 2\varphi(\alpha),$$

et à l'équation (20) en posant

(22) $$y = \psi''(\beta) \qquad Y_1 = \beta\psi''(\beta) - \psi'(\beta)$$
$$Y_2 = -\beta^2\psi''(\beta) + 2\beta\psi'(\beta) - 2\psi(\beta).$$

Les équations (19), (21) et (22) permettent alors d'écrire explicitement l'intégrale générale de l'équation (15) au moyen des fonctions arbitraires $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$.

Signalons enfin, d'après M. Gosse [1]), que la transformation *de Bäcklund*

$$x' = x \qquad y' = y \qquad p' = \frac{1}{z-x} \qquad q' = \frac{1+q+2q^{\frac{1}{2}}}{z-y} - \frac{q}{z-x}$$

ramène l'équation (15) à une équation appartenant au type I de M. Goursat.

CHAPITRE IV.

Etude d'un problème particulier relatif aux équations du groupe C.

28. La détermination des équations

$$s = f(x, y, z, p, q)$$

qui sont de la première classe est donc ramenée à celle des équations du groupe C, c'est-à-dire des équations qui sont de genre $n \geqslant 3$ pour chaque système de caractéristiques.

Cette recherche, comme nous l'avons dit, a pour préliminaire essentiel une étude de la compatibilité des systèmes de conditions Γ, G, H, C, et Γ', G', H', C', étude qui a été abordée par M Gosse dans les deux importants Mémoires déjà cités, mais qui est encore sans doute assez loin à l'heure actuelle de pouvoir être considérée comme terminée.

On est conduit naturellement à distinguer les équations qui sont linéaires par rapport à l'une des dérivées p ou q de celles qui ne le sont pas, ce caractère étant invariant pour toute transformation ponctuelle.

Nous nous proposons, dans ce dernier Chapitre, de rechercher les équations linéaires en p, par exemple, qui sont de genre 3 pour chaque système de caractéristiques. C'est sans doute un problème assez particulier, mais qui nous donnera, chemin faisant, l'occasion d'établir un certain nombre de propositions de portée générale: de plus les conclusions que nous obtiendrons déborderont en maint endroit le problème initial.

Nous aboutirons à un résultat négatif: il n'existe donc aucune équation linéaire par rapport à l'une des dérivées p ou q et qui soit de genre $n = 3$ pour chaque système de caractéristiques. Il paraît probable, conformément aux vues de M. Gosse, qu'il en est

---

[1]) *Comptes Rendus*, t. 184, 1927, p. 363.

encore ainsi pour $n > 3$. Ceci présente d'autant plus d'intérêt qu'il en est tout autrement pour les équations qui ne sont linéaires ni en p, ni en q. J'ai en effet obtenu des équations de la forme

$$s = Apq + Bp^{\frac{1}{2}}q + Cpq^{\frac{1}{2}} + Dp^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}$$

qui sont de genre 3 pour chaque système de caractéristiques; j'en donnerai un exemple en terminant.

Pour éviter des longueurs, je me contenterai le plus souvent, dans les pages qui suivent, d'indiquer la marche générale des calculs.

29. Nous cherchons les équations de la forme

$$s = f \equiv p\varrho(x, y, z, q) + \omega(x, y, z, q) \tag{1}$$

qui sont de genre 3 pour chaque système de caractéristiques et qui ne sont pas linéaires par rapport à q.

Une telle équation admet nécessairement une involution d'ordre 1 ou 2 pour chaque système de caractéristiques. Il résulte alors des conclusions du chapitre I que la fonction f doit satisfaire d'une part à l'un des systèmes

$$(\Gamma)\quad \begin{cases} \Delta_1^x \lambda + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial p} = 0 \\ \Delta_1^x \vartheta - \lambda X \left(\dfrac{df}{dx}\right) + K = 0 \end{cases} \qquad (G)\quad \begin{cases} \Delta_1^x \alpha + \xi \dfrac{\partial f}{\partial p} + K = 0 \\ \Delta_1^x \psi - \psi \dfrac{\partial f}{\partial p} + \left(\dfrac{df}{dx}\right) = 0, \end{cases}$$

d'autre part à l'un des systèmes

$$(\Gamma')\quad \begin{cases} \Delta_1^y \lambda_1 + \lambda_1 \dfrac{\partial f}{\partial q} = 0 \\ \Delta_1^y \vartheta_1 - \lambda_1 Y \left(\dfrac{df}{dy}\right) + K = 0 \end{cases} \qquad (G')\quad \begin{cases} \Delta_1^y \alpha_1 + \alpha_1 \dfrac{\partial f}{\partial q} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial q^2} = 0 \\ \Delta_1^y \psi - \psi_1 \dfrac{\partial f}{\partial q} + \left(\dfrac{df}{dy}\right) = 0 \end{cases}$$

où l'on a posé

$$K = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}.$$

On aura donc à examiner successivement la compatibilité des systèmes

$$\Gamma - \Gamma' \qquad \Gamma - G' \qquad G - \Gamma' \qquad G - G'.$$

§ 1. Etude du système $\Gamma - \Gamma'$.

30. Pour l'étude de ce système, comme pour l'étude du système $\Gamma - G'$, il est inutile de s'arrêter à l'hypothèse $\dfrac{\partial\lambda}{\partial p} = 0$.

En effet, on peut alors se ramener, par un changement de fonction inconnue, à une équation de la forme

(2) $$s = f(x, y, z, q).$$

Nous allons démontrer relativement à ces équations la proposition générale suivante:

Une équation de la forme (2) *ne peut être de la première classe que si elle est de genre* 2 *au plus pour le système* X *ou de genre* 1 *pour le système* Y.

En effet si $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, l'équation (2) est de genre 1 pour le système Y. Sinon, soit $n > 2$ le genre de l'équation relativement au système X; l'invariant d'ordre n est de la forme $p_n + \varphi(x, y, z, p, \ldots, p_{n-1})$, et l'on a

(3) $$\Delta_{n-1}^x \varphi + \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\varphi = X p_{n-1}^2 + \varphi_1 \, p_{n-1} + \varphi_2,$$

φ_1 et φ_2 étant des fonctions de $x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-2}$. Le premier membre de l'équation (3) est alors un binôme du 1^er degré en p_{n-1}, et le coefficient de p_{n-1} s'écrit

$$2X\left(p_{n-2} \frac{\partial f}{\partial z} + \vartheta_{n-2}\right) + \frac{\partial f}{\partial z},$$

ϑ_{n-2} ne dépendant que des variables $x, y, z, p, p_2, \ldots, p_{n-3}, q$; ce coefficient ne peut être identiquement nul, ce qui établit notre proposition.

31. Nous n'avons donc à examiner que l'hypothèse $\frac{\partial \lambda}{\partial p} \neq 0$. On tire alors de l'équation Γ_1

$$\lambda = \frac{1}{p + a(x, y, z)},$$

et, en prenant une nouvelle fonction inconnue $Z(x, y, z)$ telle que

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - a \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

on est ramené à une équation de la forme

(4) $$s = p\,\varrho(x, y, z, q),$$

pour laquelle l'équation Γ_1 admet la solution $\lambda = \frac{1}{p}$.

L'équation (4) supposée de genre 3 pour le système X admet alors une involution de la forme

$$p_3 + \varphi(x, y, z, p, p_2) = 0;$$

on doit donc avoir

$$\Delta_2^x \varphi - \varphi \frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = 0. \tag{5}$$

Posons

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \varrho_1 \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial z} + \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial q} = \varrho_2.$$

On aura

$$\frac{df}{dx} = p_2 \varrho + p \varrho_1 + p^2 \varrho_2$$

$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = p_2 (2 \varrho_1 + 3 p \varrho_2) + A_1 p + A_2 p^2 + A_3 p^3$$

avec

$$A_1 = \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}, \qquad A_2 = \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} + \varrho \frac{\partial \varrho_1}{\partial q} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial x}, \qquad A_3 = \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} + \varrho \frac{\partial \varrho_2}{\partial q}.$$

En dérivant deux fois de suite l'équation (5) par rapport à p_2 et appliquant un Lemme de M. Gosse [1]) on a d'abord

$$\varphi = \frac{X}{2p} p_2^2 + \varphi_1(x, y, z, p) p_2 + \varphi_2(x, y, z, p).$$

L'équation (5) fournit alors les deux équations

$$\Delta_1^x \varphi_1 + (X + 2) \varrho_1 + p (X + 3) \varrho_2 = 0 \tag{6}$$

$$\Delta_1^x \varphi_2 - \varrho \varphi_2 + p(\varrho_1 + p \varrho_2) \varphi_1 + A_1 p + A_2 p^2 + A_3 p^3 = 0. \tag{7}$$

En dérivant deux fois l'équation (6) par rapport à p on a ensuite

$$\varphi_1 = X_1 \operatorname{Log} p + p \varphi_3(x, y, z) + \varphi_4(x, y, z),$$

et l'équation (6) fournit les deux équations

$$(X + 2) \varrho_1 + X_1 \varrho + \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi_4}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

$$(X + 3) \varrho_2 + \varphi_3 \varrho + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0. \tag{9}$$

---

[1]) *Annales de Toulouse*, t. XII, 1920, p. 139.

On tire de même de l'équation (7), compte tenu de la valeur de φ_1,

$$\varphi_2 = \frac{X_0}{2} p (\operatorname{Log} p)^2 + (\beta_0 p + \beta_1 p^2) \operatorname{Log} p + \gamma_1 p + \gamma_2 p^2 + \gamma_3 p^3,$$

les β_i et γ_i étant des fonctions de x, y, z. L'équation (7) donne alors les équations

$$(10) \qquad X_1 \rho_2 + \rho \beta_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial y} + q \frac{\partial \beta_1}{\partial z} = 0$$

$$(11) \qquad X_1 \varrho + X_0 \varrho + \frac{\partial \beta_0}{\partial y} + q \frac{\partial \beta_0}{\partial z} = 0$$

$$(12) \qquad A_3 + \rho_1 \varphi_3 + 2 \rho \gamma_3 + \frac{\partial \gamma_3}{\partial y} + q \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} = 0$$

$$(13) \qquad A_2 + \rho_2 \varphi_4 + \rho_1 \varphi_3 + \rho (\beta_1 + \gamma_2) + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} + q \frac{\partial \gamma_2}{\partial z} = 0$$

$$(14) \qquad A_1 + \rho_1 \varphi_4 + \rho \beta_0 + \frac{\partial \gamma_1}{\partial y} + q \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} = 0.$$

Notons en outre que la condition Γ_1' donne la relation

$$(15) \qquad \frac{\partial}{\partial z} \mu(y, z, q) + \rho \frac{\partial \mu}{\partial q} = m(x, y, z).$$

32. 1^{er} Cas: $X + 2 = 0$.

Les équations (8), (10), et (11) donnent alors

$$X_0 = 0 \qquad X_1 = 0 \qquad \beta_0 = \xi_0(x) \qquad \beta_1 = 0 \qquad \varphi_4 = \xi_4(x).$$

Posons, d'après (15),

$$P = \frac{1}{\dfrac{\partial \mu}{\partial q}}, \qquad P_1 = - P \frac{\partial \mu}{\partial z}, \qquad \rho = m(x, y, z) P + P_1.$$

En dérivant deux fois par rapport à q l'équation (14), on a

$$(16) \qquad \frac{\partial^2 \rho''}{\partial x^2} + \xi_4 \frac{\partial \rho''}{\partial x} + \xi_0 \rho'' = 0,$$

c'est-à-dire

$$P'' \left(\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \xi_4 \frac{\partial m}{\partial x} + \xi_0 m \right) + \xi_0 P_1'' = 0.$$

On ne peut avoir $P' = 0$, car ρ serait linéaire en q. Si $P'' = 0$, on a

$$\mu = \sigma_0 \operatorname{Log}(q + \sigma_1)$$

$$\rho = m(q + \sigma_1) - \frac{\partial \sigma_1}{\partial z} - \frac{\partial \log \sigma_0}{\partial z}(q + \sigma_1) \operatorname{Log}(q + \sigma_1).$$

et l'équation (9) conduit à une impossibilité.

On a donc $P'' \neq 0$, et l'on tire de l'équation (16)

$$\rho'' = X_2 \mu_2''(y, z, q) + X_3 \mu_3''(y, z, q),$$

X_2 et X_3 désignant deux intégrales distinctes de l'équation

$$\frac{d^2 \omega}{d x^2} + \xi_1 \frac{d \omega}{d x} + \xi_0 \omega = 0.$$

On peut toujours supposer $X_2' \neq 0$; on a alors

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{X_2'} \frac{\partial m}{\partial x}\right) P'' = \left(\frac{X_3'}{X_2'}\right)' \mu_3''.$$

Supposons en premier lieu

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{X_2'} \frac{\partial m}{\partial x}\right) \neq 0,$$

ce qui exige $\left(\frac{X_3'}{X_2'}\right)' \neq 0$, et par suite $\xi_0 \neq 0$. On a dans ce cas

$$P'' = a_0(y, z) \mu_3'' \qquad \mu_2'' = \mu_3'' \vartheta_1(y, z),$$

et on en tire aisément

$$P_1 = \sigma_0(y, z) P + \sigma_1(y, z) q + \sigma_2(y, z).$$

L'équation (15) s'écrit alors

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} + (\sigma_1 q + \sigma_2) \frac{\partial \mu}{\partial q} + \sigma_0 = 0.$$

En changeant μ, on peut prendre $\sigma_0 = 0$, d'où $P_1'' = 0$, et

$$\rho = m(x, y, z) P(y, z, q) + \sigma_1(y, z) q + \sigma_2(y, z).$$

On tire ensuite de l'équation (14)

(17) $$\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \xi_1 \frac{\partial m}{\partial x} + \xi_0 m = 0,$$

puis

$$\sigma_1 = -\frac{1}{\xi_0} \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} \qquad \sigma_2 = -\frac{1}{\xi_0} \frac{\partial \gamma_1}{\partial y}.$$

En choisissant une nouvelle fonction inconnue $Z(y,z)$ telle que

$$\operatorname{Log} \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\gamma_1}{\xi_0},$$

on pourra poser

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \gamma_1 = 0 \qquad \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = 0,$$

et l'équation (1) prendra alors la forme

(18) $$s = m(x, y, z)\, p\, \varphi(y, q).$$

Supposons en second lieu

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{X_2'}\frac{\partial m}{\partial x}\right) = 0;$$

on a alors ou bien $\left(\frac{X_3'}{X_2'}\right)' = 0$, ou bien $\mu_3'' = 0$, et dans les deux cas on trouve

$$\rho = X_2\, \sigma_0(y, z, q) + \sigma_1(y, z, q)]$$

avec $\frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial q^2} \neq 0$. L'équation (1) s'écrit donc

(19) $$s = p\,[X_2\, \sigma_0(y, z, q) + \sigma_1(y, z, q).$$

Il nous reste en définitive à étudier les équations (18) et (19).

33. Occupons-nous d'abord de l'équation (19). On tire de (9), après deux dérivations par rapport à q,

$$\varphi_3 = \frac{c_0 X_2^2 + c_1 X_2 + c_2}{X_2 + c_3},$$

les c_i désignant des fonctions de y et z. L'équation obtenue en remplaçant ensuite φ_3 par sa valeur dans l'équation (9) doit être vérifiée identiquement, ce qui exige $\sigma_0' = 0$, hypothèse exclue.

Reste donc à étudier l'équation (18). On tire aisément de (9)

(20) $$\varphi\varphi' = Y_1 \varphi + Y_2 q + Y_3.$$

D'autre part la condition Γ_1' admet la solution $\frac{1}{\varphi}$ et la condition Γ_2' s'écrit

(21) $$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial z} + m\varphi \frac{\partial \vartheta_1}{\partial q} - Y\left[m \frac{\partial \log \varphi}{\partial y} + q \frac{\partial m}{\partial z} + m^2 \varphi\right] + \\ + \varphi \frac{\partial m}{\partial z} + m^2 (Y_1 \varphi + Y_2 q + Y_3) = 0.$$

En dérivant par rapport à x et remarquant que $\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} = 0$, on a

$$Y_3 = 0 \qquad Y \neq 0 \qquad Y_2 \neq 0 \qquad Y_2 + Y(Y_1 - Y) = 0$$

$$\varphi \frac{\partial \vartheta_1}{\partial q} - Y \frac{\partial \log \varphi}{\partial y} + \left(\frac{\varphi}{Y} - q\right) \sigma_0(y, z) = 0. \tag{22}$$

En écrivant que les équations (21) et (22) sont compatibles, on a ensuite

$$\left(\frac{\partial m}{\partial z} - \frac{m \sigma_0}{Y}\right) Y_2 + m^2 Y_2 (Y_1 - Y) + \frac{\partial \sigma_0}{\partial z} = 0,$$

et on en tire, en posant

$$\sigma_0 = - Y \frac{\partial^2 \sigma(y, z)}{\partial z^2} : \frac{\partial \sigma}{\partial z} = - Y \frac{\sigma''}{\sigma'} \qquad (\sigma' \neq 0),$$

$$m = \frac{1}{Y - Y_1} \frac{\sigma'' [\sigma + \psi(x, y)] + \sigma'^2}{\sigma'(\sigma + \psi)}. \tag{23}$$

L'équation (9) donne d'ailleurs

$$\frac{\partial m}{\partial z} + Y_1 m^2 + m \varphi_3 = 0 \qquad \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + m^2 Y_2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial^2 \log m}{\partial z^2} + Y_1 \frac{\partial m}{\partial z} - Y_2 m^2 = 0;$$

si l'on remplace dans cette équation m par sa valeur (23), on a

$$Y_1 = 0 \qquad \sigma'' = 0 \qquad m = \frac{\sigma'}{Y(\sigma + \psi)}.$$

Portant cette valeur de m dans l'équation (17) on est conduit à une impossibilité.

2ème Cas: $X + 3 = 0$.

Supposons d'abord $X_1 = 0$. Les équations (9), (10) et (11) donnent alors

$$\varphi_3 = 0 \qquad \beta_1 = 0 \qquad X_0 = 0 \qquad \beta_0 = \xi_0,$$

et l'équation (8) devient

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi_4}{\partial z}.$$

L'équation (15) donne ensuite

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial q} \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi_4}{\partial z}\right),$$

d'où l'on tire

$$\mu = \mu_1(y, z) \operatorname{Log}[q + \mu_2(y, z)];$$

en changeant de fonction inconnue on peut prendre $\mu_2 = 0$, et on a

$$\rho = a(x, y, z)\, q + a_1(y, z)\, q \operatorname{Log} q.$$

L'équation (13) conduit alors à une impossibilité.

On doit donc supposer $X_1 \neq 0$; l'équation (8) donne alors

$$\rho = \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial y} + q \frac{\partial \psi}{\partial z} + \xi_1 \rho_0(y, z, q) \qquad (\xi_1' \neq 0),$$

et l'on tire de (15)

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\xi_1'} \psi_{xy}\right) + q \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\xi_1'} \psi_{xz}\right)\right] \frac{\partial \mu}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\xi_1'} \frac{\partial m}{\partial x}\right) \tag{24}$$

Si $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\xi_1'} \frac{\partial m}{\partial x}\right) \neq 0$, on a, après un changement de fonction inconnue,

$$\rho = a(x, y, z)\, q + a_1(x, y, z)\, q \operatorname{Log} q,$$

et l'équation (10) donne $a_1 = 0$, ce qui est impossible.

L'équation (24) doit donc être une identité, ce qui permet de prendre $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$. Choisissant alors une nouvelle fonction inconnue $Z(y, z)$ telle que

$$\psi = -\operatorname{Log} \frac{\partial Z}{\partial z},$$

on est ramené à une équation de la forme

$$s = p\, \xi_1 \rho_0(y, z, q) \qquad (\xi_1' \neq 0)$$

On tire ensuite de (15)

$$m = \xi_1 m_1(y, z) + m_2(y, z) \qquad \rho_0 = m_1(y, z)\, \varphi(y, q):$$

portant ces valeurs dans l'équation (10) on est encore conduit à une impossibilité.

35. 3^ème^ Cas: $(X + 2)(X + 3) \neq 0$.

Alors si $X_1 \neq 0$, il n'y a rien à changer au raisonnement de la seconde partie du nº 34, où l'on a seulement utilisé l'hypothèse $X + 2 \neq 0$.

Si $X_1 = 0$, on trouve comme précédemment

$$\rho = a(x, y, z)\, q + a_1(y, z)\, q \operatorname{Log} q,$$

et l'équation (9) conduit à une impossibilité.

Observons enfin que nous n'avons pas utilisé l'hypothèse de l'existence d'un invariant d'ordre 3 pour le système Y. La conclusion du présent paragraphe est donc la suivante:

Il n'existe aucune équation (1) *qui soit de genre* 3 *pour le système* X *et qui satisfasse aux conditions* $\Gamma - \Gamma'$.

§ 2. Etude du système $\Gamma - G'$.

36. Les raisonnements du paragraphe précédent qui s'appuient sur les conditions Γ et sur l'existence d'un invariant du 3ème ordre pour le système X ne sont évidemment pas modifiés et conduisent aux mêmes conclusions. Nous avons donc à étudier les équations

$$s = p\,\rho(x, y, z, q)$$

qui satisfont d'une part aux équations (8) à (14), d'autre part (conditions G') aux équations

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + p\frac{\partial \alpha}{\partial z} + f\frac{\partial \alpha}{\partial q} + \alpha\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = 0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + p\frac{\partial \alpha_1}{\partial z} + f\frac{\partial \alpha_1}{\partial q} + \eta\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0. \tag{26}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + p\frac{\partial \psi}{\partial z} + f\frac{\partial \psi}{\partial q} - \psi\frac{\partial f}{\partial q} + \left(\frac{d f}{d y}\right) = 0. \tag{27}$$

37. 1er Cas: $X + 2 = 0$.

Les équations (8), (10) et (11) donnent d'abord

$$X_0 = X_1 = 0 \qquad \beta_0 = \xi_0 \qquad \beta_1 = 0 \qquad \varphi_4 = \xi_4,$$

et l'on tire de (14)

$$\frac{\partial^2 \rho''}{\partial x^2} + \xi_4\frac{\partial \rho''}{\partial x} + \xi_0\rho'' = 0. \tag{28}$$

Nous désignerons par X_2 et X_3 deux intégrales distinctes de l'équation

$$\Delta\omega \equiv \frac{d^2\omega}{d x^2} + \xi_4\frac{d\omega}{d x} + \xi_0\omega = 0.$$

Si l'on pose dans l'équation (25)

$$\alpha = \frac{\partial^2 \mu(y, z, q)}{\partial q^2} : \frac{\partial \mu}{\partial q} = \frac{\mu''}{\mu'},$$

on aura

$$\rho = \frac{\mu}{\mu'} h(x, y, z) + \frac{1}{\mu'} h_1(x, y, z) + \rho_0(y, z, q) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial z} + \rho_0\frac{\partial \mu}{\partial q} = 0.$$

Nous écarterons provisoirement les deux hypothèses

$$\left(\frac{\mu}{\mu'}\right)'' = 0 \qquad \left(\frac{1}{\mu'}\right)'' = 0.$$

On a alors, d'après (28),

$$(29) \qquad \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)'' \Delta h + \left(\frac{1}{\mu'}\right)'' \Delta h_1 + \xi_0 \rho_0'' = 0.$$

Supposons d'abord $\xi_0 \neq 0$. On tire de (29), en changeant μ,

$$h = X_2 l_2(y, z) + X_3 l_3(y, z) \qquad h_1 = X_2 m_2(y, z) + X_3 m_3(y, z)$$

$$\rho_0'' = 0,$$

$$\rho = \frac{\mu}{\mu'} h + \frac{1}{\mu'} h_1 + \lambda_0(y, z) q + \lambda_1(y, z).$$

L'équation (14) montre alors qu'en changeant de fonction inconnue on peut prendre $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$; nous écrirons donc

$$\rho = X_2 Q_2(y, z, q) + X_3 Q_3(y, z, q).$$

Les équations (26) et (27) sont alors des équations du second degré en X_2 et X_3. Elles sont indécomposables, car l'existence d'une relation linéaire entre X_2 et X_3 est incompatible avec l'hypothèse $\xi_0 \neq 0$. Elles doivent donc être identiques à un facteur près. On en déduit successivement

$$Q_2 = \sigma(y, z) Q_3, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0;$$

par suite on peut écrire

$$\rho = X_4 Q(y, z, q),$$

et l'équation (26) conduit à une impossibilité.

Supposons ensuite $\xi_0 = 0$. On peut prendre $X_3 = 1$, et l'on tire de (29)

$$\rho = X_2 Q(y, z, q) + Q_1(y, z, q):$$

l'équation (26) conduit encore à une impossibilité.

38. $2^{ème}$ Cas: $X + 2 \neq 0$.

Nous continuerons d'exclure les hypothèses

$$\left(\frac{\mu}{\mu'}\right)'' = 0 \qquad \left(\frac{1}{\mu'}\right)'' = 0.$$

On a alors comme précédemment

$$(30) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial z} + \rho \frac{\partial \mu}{\partial q} = \mu h(x, y, z) + h_1(x, y, z).$$

Si $X_1 = 0$, on a, d'après (8), $\frac{\partial \rho''}{\partial x} = 0$, ce qui est impossible. Si $X_1 \neq 0$, l'équation (8) donne

$$\rho = \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \xi \rho_0 (y, z, q) \qquad (\xi' \neq 0),$$

et l'on tire de (30)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi_{xy}}{\xi'} + q \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi_{xz}}{\xi'}\right) \frac{\partial \mu}{\partial q} = \mu \frac{1}{\xi'} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\xi'} \frac{\partial h_1}{\partial x},$$

équation qui doit se réduire à une identité. On peut donc prendre $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, et, en changeant de fonction inconnue, on est ramené à une équation

$$s = \xi p \rho_0 (y, z, q):$$

l'équation (26) conduit alors à une impossibilité.

39. Il ne reste donc à examiner que les hypothèses

$$\left(\frac{\mu}{\mu'}\right)'' = 0 \qquad \left(\frac{1}{\mu'}\right)'' = 0,$$

qui donnent pour μ l'une des valeurs suivantes

$$\mu = e^{\beta q} \qquad \mu = \operatorname{Log}(q + \beta) \qquad \mu = (q + \beta_1)^{\beta}.$$

Soit d'abord $\mu = e^{\beta q}$; on tire de (30)

$$\rho = - q \frac{\partial \log \beta}{\partial z} + \frac{h}{\beta} + h_1 e^{-\beta q}.$$

Il est facile de voir que l'équation $s = p\rho$ ne peut alors admettre d'invariant $\psi(x, y, z, p, p_2, \ldots, p_n)$ pour le système X: en effet $\frac{d^{n-1} f}{d x^{n-1}}$ contient un terme en $e^{-n\beta q}$ de coefficient

$$(-1)^{n-1} p^n h_1^n \beta^n (n-1)!,$$

terme qui est multiplié, dans le premier membre de l'équation

$$\Delta_n^z \psi = 0,$$

par $\frac{\partial \psi}{\partial p_n} \neq 0$ et qui ne peut se réduire avec aucun autre: on devrait donc avoir $h_1 = 0$ ou $\beta = 0$ ce qui est impossible.

Soit en second lieu $\mu = \operatorname{Log}(q + \beta)$. En changeant de fonction inconnue on est ramené à une équation de la forme

$$s = p(hq \operatorname{Log} q + h_1 q),$$

équation qui ne peut admettre d'invariant pour le système X.

Soit enfin $\mu = (q + \beta_1)^\beta$. On peut d'abord, au moyen d'un changement de fonction inconnue, supposer $\beta_1 = 0$; on a ensuite

$$\rho = -\frac{\partial \log \beta}{\partial z} q \operatorname{Log} q + \frac{h}{\beta} q + \frac{h_1}{\beta} q^{1-\beta},$$

et l'on s'assure, par un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait, que l'équation $s = p\rho$ ne peut avoir un invariant d'ordre n que si l'on a $\beta = \frac{1}{\mu}$, μ désignant un entier positif au plus égal à n. On a donc ici $\beta = \frac{1}{2}$ ou $\beta = \frac{1}{3}$; nous examinerons successivement ces deux hypothèses.

40. Première hypothèse: $\beta = \frac{1}{2}$.

On a alors

$$\rho = \lambda(x, y, z) q + \lambda_1(x, y, z) q^{\frac{1}{2}}.$$

Nous allons montrer que, sous les seules hypothèses $\frac{\partial \rho}{\partial x} \neq 0$, $\lambda_1 \neq 0$, les équations $s = p\rho$ qui admettent une involution d'ordre 2 pour le système Y se ramènent à l'équation

$$s = p\left[\frac{q^{\frac{1}{2}}}{z-y} + q\left(\frac{1}{z-x} + \frac{1}{z-y}\right)\right],$$

qui est comme nous l'avons vu de genre 2 pour le système X et de genre 3 pour le système Y.

De l'équation

$$\Delta_1^y \psi - \psi \frac{\partial f}{\partial q} + \left(\frac{df}{dy}\right) = 0 \tag{31}$$

on tire d'abord, après une discussion facile,

$$\psi = g_0 q^2 + g_1 q^{\frac{3}{2}} + g_2 q + g_3 q^{\frac{1}{2}},$$

les g_i étant des fonctions de y et z seulement; on a de plus

$$\lambda_1 = g(y, z)\lambda + h(y, z). \tag{32}$$

Remplaçant ψ par sa valeur dans l'équation (31), on obtient les équations

$$(33)\qquad \frac{\partial g_0}{\partial z} + \lambda g_0 + \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \lambda^2 = 0$$

$$(34)\qquad \frac{\partial g_1}{\partial z} + \frac{1}{2} g_1 \lambda + \frac{3}{2} g_0 \lambda_1 + \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + 2\lambda\lambda_1 = 0$$

$$(35)\qquad \frac{\partial g_2}{\partial z} + \lambda_1 g_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \lambda_1^2 = 0$$

$$(36)\qquad \frac{\partial g_3}{\partial z} + \frac{1}{2}\lambda_1 g_2 - \frac{1}{2}\lambda g_3 + \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} = 0.$$

De (32), (33) et (34) on tire

$$g = 0 \qquad g_0 = 2\frac{\partial \log \lambda_1}{\partial z} \qquad g_1 = -4\lambda_1,$$

puis de (36)

$$g_3 = 0 \qquad g_2 = -2\frac{\partial \log \lambda_1}{\partial y},$$

enfin de (35)

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 3\lambda_1^2 + 2\frac{\partial^2 \log \lambda_1}{\partial y\, \partial z}.$$

Il vient alors

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{Y'Z'}}{Z-Y} \qquad \lambda = Z'\left(\frac{1}{Z-Y} + \frac{1}{Z-X}\right),$$

et, en prenant comme nouvelles variables X, Y et Z, on est bien ramené à l'équation indiquée.

41. Seconde hypothèse: $\beta = \frac{1}{3}$.

On a alors

$$\rho = \lambda q + \lambda_1 q^{\frac{2}{3}}.$$

La discussion est entièrement analogue à celle qui précède: on est conduit cette fois à des impossibilités. Sous les seules hypothèses $\frac{\partial \rho}{\partial x} \neq 0$, $\lambda_1 \neq 0$, il n'existe donc aucune équation

$$s = p(\lambda q + \lambda_1 q^{\frac{2}{3}})$$

qui admette une involution d'ordre 2 pour le système Y.

La conclusion du présent paragraphe est donc qu'*il n'existe aucune équation* (1) *qui soit de genre* 3 *pour le système* X *et qui satisfasse aux conditions* $\Gamma - G'$.

§ 3. Etude des systèmes $G-\Gamma'$ et $G-G'$.

42. Nous allons d'abord établir quelques résultats généraux sur les équations (1) qui satisfont aux conditions G. On sait que f étant linéaire en p on peut satisfaire à la condition $G_2(\alpha)=0$ en prenant $\alpha=0$, et que dans la condition G_3 on peut prendre $\xi_0=1$.

Nous avons donc à satisfaire au système

$$\Delta_1^x \psi - \psi \frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{d f}{d x}\right) = 0 \tag{37}$$

$$\Delta_1^x \alpha_1 + \xi \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial p} = 0. \tag{38}$$

On tire d'abord de (37)

$$\psi = \beta_0 p^2 + \beta_1 p + \beta_2 .$$

En remplaçant ψ par sa valeur dans l'équation (37), on observe qu'en prenant une nouvelle fonction inconnue $Z(x, y, z)$ telle que

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \beta_0 \frac{\partial Z}{\partial z},$$

on peut poser $\beta_0=0$. D'autre part on constate aussi que dans ce cas l'équation (38) donne $\alpha_1=\gamma_1(x, y, z)$. Finalement les équations (37) et (38) sont remplacées par le système

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial q} = 0 \tag{39}$$

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial y} + q \frac{\partial \beta_1}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial x} + \omega \frac{\partial \rho}{\partial q} + \frac{\partial \omega}{\partial z} + \rho \frac{\partial \omega}{\partial q} = 0 \tag{40}$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial y} + q \frac{\partial \beta_2}{\partial z} + \omega \beta_1 - \rho \beta_2 + \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial q} = 0 \tag{41}$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial y} + q \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} - X\rho + \frac{\partial \omega}{\partial z} + \rho \frac{\partial \omega}{\partial q} = 0. \tag{42}$$

On satisfait aux équations (39), (40) et (42) en posant

$$q = \rho z + g(x, y, \rho) \qquad \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} = g'' \neq 0\right) \tag{43}$$

$$\omega = \frac{\partial g}{\partial x} + (z + g')\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} + q \frac{\partial \gamma}{\partial z} - X\rho\right) \tag{44}$$

$$(45)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \gamma}{\partial y} + q\frac{\partial \gamma}{\partial z} - X\rho + (z+g')\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial y\,\partial z} + q\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} + \rho\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) = \\ &\qquad = \frac{\partial \beta}{\partial y} + q\frac{\partial \beta}{\partial z} + X\rho. \end{aligned}$$

Il restera en outre à satisfaire à l'équation (41).

Nous allons montrer qu'on a nécessairement $X = 0$.

43. Supposons $X \neq 0$. On ne peut avoir $\frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0$, et l'équation (45) donne

$$g' = \frac{c_0\rho + c_1 g + c_2}{c_3\rho + c_4 g + c_5},$$

les c_i étant des fonctions de x et y. Remplaçant g' par sa valeur dans l'équation (45) on aura une équation de la forme

$$(46)\qquad A g^2 + g(B\rho + C) + D\rho^2 + E\rho + F = 0.$$

Si cette équation n'est pas vérifiée identiquement, on en déduit pour g l'une des formes

$$g = \lambda_0\rho + \lambda_1 + \sqrt{\mu_0\rho^2 + 2\mu_1\rho + \mu_2} \qquad (\mu_1^2 - \mu_0\mu_2 \neq 0)$$

$$g = \lambda_0\rho + \lambda_1 + \frac{\mu}{\rho + h} \qquad (\mu \neq 0)$$

$$g = \lambda_0\rho^2 + 2\lambda_1\rho + \lambda_2 \qquad (\lambda_0 \neq 0).$$

En portant ces valeurs de g dans l'équation (45) on est conduit chaque fois à des impossibilités.

L'équation (46) doit être par suite vérifiée identiquement. Une discussion simple montre alors que l'on doit prendre $c_4 = 0$ et

$$g' = \frac{\rho + c_1 g + c_2}{c_1\rho + c_5} \qquad \text{avec} \qquad c_5 = \frac{\partial c_1}{\partial y};$$

on aura donc

$$g = \frac{1}{c_1^2}(c_1\rho + c_5)\,\mathrm{Log}\,(c_1\rho + c_5) + \sigma_0(x,y)\rho + \sigma_1(x,y).$$

En portant dans l'équation (41) on est alors conduit à une impossibilité.

On a donc bien nécessairement $X = 0$.

44. Faisons maintenant intervenir les conditions Γ'. La première s'écrit

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + p\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + (p\rho + \omega)\frac{\partial \lambda_1}{\partial q} + \lambda_1\left(p\frac{\partial \rho}{\partial q} + \frac{\partial \omega}{\partial q}\right) = 0;$$

elle se décompose en deux autres

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \omega \frac{\partial \lambda_1}{\partial q} + \lambda_1 \frac{\partial \omega}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + \rho \frac{\partial \lambda_1}{\partial q} + \lambda_1 \frac{\partial \rho}{\partial q} = 0.$$

Posons $\lambda_1 = \frac{\partial}{\partial q} \mu_1 (x, y, z, q)$; on aura

(47) $$\frac{\partial \mu_1}{\partial x} + \omega \frac{\partial \mu_1}{\partial q} = m(x, y, z) \qquad \frac{\partial \mu_1}{\partial z} + \rho \frac{\partial \mu_1}{\partial q} = l(x, y, z).$$

La condition de compatibilité s'écrit

(48) $$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} + \omega \frac{\partial \rho}{\partial q} - \frac{\partial \omega}{\partial z} - \rho \frac{\partial \omega}{\partial q}\right) \frac{\partial \mu_1}{\partial q} = \frac{\partial l}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial z}.$$

Les équations (40) et (42) où l'on fait $X = 0$ montrent que le coefficient de $\frac{\partial \mu_1}{\partial q}$ se réduit à

$$\frac{\partial (\gamma - \beta)}{\partial y} + q \frac{\partial (\gamma - \beta)}{\partial z}.$$

S'il n'est pas identiquement nul, on aura

(49) $$\mu_1 = \sigma_0 (x, y, z) \operatorname{Log} [q + \sigma_1 (x, y, z)].$$

On tire alors de (47) et (49)

$$\rho = A(q + \sigma_1) \operatorname{Log} (q + \sigma_1) + B q + C,$$

et l'équation (39) montre qu'on devrait avoir $A = 0$, ce qui est impossible.

Le coefficient de $\frac{\partial \mu_1}{\partial q}$ dans l'équation (48) doit donc être identiquement nul, et l'on a

$$\frac{\partial (\gamma - \beta)}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial (\gamma - \beta)}{\partial z} = 0.$$

On tire ensuite de (45) $\frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0$, et de (44)

$$\omega = \frac{\partial g}{\partial x} + (z + g') \frac{\partial \gamma (x, y)}{\partial y}.$$

On obtient ainsi les équations

(50) $$s = p \rho (x, y, z, q) + \frac{\partial g}{\partial x} + (z + g') \frac{\partial \gamma}{\partial y},$$

où la fonction ρ est définie par la relation

$$q = \rho z + g(x, y, \rho).$$

Soit φ une fonction de x et y telle que $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \gamma$; on s'assure aisément que l'équation (50) admet pour le système de caractéristiques Y l'invariant du 1er ordre

$$\rho(x, y, z, q) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}:$$

c'est donc une équation du groupe A.

Nous arrivons ainsi à la conclusion qu'*il n'existe aucune équation* (1) *satisfaisant au système* $G - \Gamma'$ *qui soit de genre* $n \geqslant 3$ *pour chaque système de caractéristiques.*

45. Examinons en second lieu les conditions G'. La seconde s'écrit

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + p \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + f \frac{\partial \lambda_1}{\partial q} + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = 0,$$

et l'on en tire les deux équations

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \omega \frac{\partial \lambda_1}{\partial q} + \lambda_1 \frac{\partial \omega}{\partial q} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial q^2} = 0$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + \rho \frac{\partial \lambda_1}{\partial q} + \lambda_1 \frac{\partial \rho}{\partial q} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial q^2} = 0,$$

ou encore, en posant

$$\lambda_1 = \frac{\mu''(x, y, z, q)}{\mu'},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \omega \frac{\partial \mu}{\partial q} = h_1 \mu + h_2$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} + \rho \frac{\partial \mu}{\partial q} = h_3 \mu + h_4,$$

les h_i étant des fonctions de x, y, z.

La condition de compatibilité de ces deux équations s'écrit

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} + \omega \frac{\partial \rho}{\partial q} - \frac{\partial \omega}{\partial z} - \rho \frac{\partial \omega}{\partial q}\right) \frac{\partial \mu}{\partial q} =$$

$$= \left(\frac{\partial h_3}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial z}\right) \mu + \frac{\partial h_4}{\partial x} - \frac{\partial h_2}{\partial z} + h_2 h_3 - h_1 h_4.$$

On voit comme précédemment que le coefficient de $\frac{\partial \mu}{\partial q}$ ne peut être nul; la fonction μ satisfait donc à une équation de la forme

$$(Aq + B)\frac{\partial \mu}{\partial q} = C\mu + D.$$

La seule hypothèse à conserver, on s'en assure sans peine, est l'hypothèse $A \neq 0$, $C \neq 0$; on peut alors prendre

$$\mu = (q + \sigma)^{\sigma_0},$$

et l'équation (39) donne immédiatement

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}.$$

On a alors

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(q + \sigma) + \rho_2(q + \sigma)^{\frac{1}{2}},$$

ρ_0, ρ_1, ρ_2, et σ ne dépendant que de x, y, z; portant cette valeur de ρ dans l'équation (39) on voit aisément que l'on peut prendre

$$\rho_1 = \frac{1}{z}, \qquad \rho_2 = 2\lambda_2 z^{-\frac{3}{2}}, \qquad \rho_0 = \frac{\lambda_2^2}{z^2} + \lambda_0, \qquad \sigma = \lambda_1 - \lambda_0 z + \frac{\lambda_2^2}{z},$$

les fonctions λ_i ne dépendant que de x et y et λ_2 n'étant pas nul; on en déduit

$$g = 2\lambda_2\sqrt{\rho - \lambda_0} - \lambda_1.$$

On est ainsi ramené à une forme étudiée précédemment (n° 43) et qui conduit à des impossibilités.

En définitive, si l'on remarque que la seconde condition G' est identique à la condition C_1' de M. Gau, on aboutit à la conclusion suivante:

Il n'existe aucune équation (1) *de genre* $n \geqslant 3$ *pour chaque système de caractéristiques qui satisfasse aux conditions* $G - G'$ *ou* $G - C'$.

46. Cette conclusion, qui apporte aux vues de M. Gosse une confirmation au moins partielle, est d'autant plus digne de remarque qu'elle ne s'étend pas aux équations non linéaires. En faisant pour ces équations l'étude des conditions $G - G'$ j'ai en effet obtenu des équations qui sont de genre 3 pour chaque système de caractéristiques; telles sont par exemple les équations

$$s(x+y)\left[z(x+y)^3 + \frac{k^2}{3}\right] = Apq + Bpq^{\frac{1}{2}} + Cp^{\frac{1}{2}}q + Dp^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}},$$

où l'on a

$$A = 2(x+y)^4 \qquad B = C = 2k(x+y)^2 \qquad D = \frac{2k^2}{3} - 4z(x+y)^3,$$

et où k désigne une constante arbitraire *non nulle.* Il existe, pour le système X, une involution d'ordre 2,

$$p_2 - \frac{6(x+y)^3}{3z(x+y)^3+k^2}\left[p^2 + 2k(x+y)^{-2}p^{\frac{3}{2}} + k^2(x+y)^{-4}p\right] + \\ + \frac{8p}{x+y} - \frac{12z}{k}p^{\frac{1}{2}} = 0,$$

et une involution d'ordre 3

$$p_3 + \vartheta_0 p_2^2 + \vartheta_1 p_2 + \vartheta_2 = 0,$$

où l'on a, en posant $\varphi(x, y) = -\frac{k^2}{3}(x+y)^{-3}$:

$$\vartheta_0 = -\frac{1}{2p}, \qquad \vartheta_1 = \frac{4}{x+y} - \frac{k^2(x+y)^{-4} + 5k(x+y)^{-2}p^{\frac{1}{2}} + 4p}{z-\varphi}$$

$$\vartheta_2 = \frac{4p^3 + 10k(x+y)^{-2}p^{\frac{5}{2}}}{(z-\varphi)^2} + \left[\frac{6k^2(x+y)^{-4}}{(z-\varphi)^2} - \frac{8(x+y)^{-1}}{z-\varphi}\right]p^2 - \\ - \left[\frac{2k^3(x+y)^{-6}}{(z-\varphi)^2} + \frac{4k(x+y)^{-3}}{z-\varphi}\right]p^{\frac{3}{2}} - \left[\frac{2k^4(x+y)^{-8}}{(z-\varphi)^2} - \right. \\ \left. - \frac{4k^2(x+y)^{-5}}{z-\varphi} - \frac{4}{(x+y)^2}\right]p.$$

On a évidemment par raison de symétrie des résultats analogues pour le système Y. Leur vérification ne présente pas d'autre difficulté que la longueur des calculs.

Surfaces réglées algébriques; singularités; classification.

Par

M. Bertrand Gambier.

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

1. — **Introduction.** Les mathématiciens ont déjà étudié en détail la classification des courbes planes algébriques; d'autres, Halphen en particulier, ont abordé le même problème pour les courbes gauches, ce qui revient à étudier *deux* fonctions algébriques d'une variable et non plus une seule. Dans le même ordre d'idées, on peut dire que la classification des *surfaces algébriques réglées non développables* fait intervenir *trois* fonctions algébriques simultanées d'une même variable, bien que ces trois fonctions ne jouent pas un rôle symétrique.

Sur une surface réglée (algébrique ou non) j'appelle *génératrice* la droite qui, par un mouvement continu, engendre la surface; en dehors des génératrices proprement dites, la surface peut admettre des droites *exceptionnelles*, non génératrices (une, ou deux au plus) qui jouent le rôle de *directrice* au même titre qu'une courbe plane ou gauche non rectiligne; il peut arriver qu'une génératrice soit en même temps droite exceptionnelle [1]); elle est nécessairement, dans ce cas, ligne multiple de la surface.

---

[1]) Par exemple la surface cubique de Cayley $z^3 + 2xy^2 - 3zy = 0$ admet la génératrice Ox ($y = 0$, $z = 0$) qui est en même temps droite exceptionnelle. La génératrice *variable* (m paramètre arbitraire)

$$y = mz \qquad z + 2xm^2 - 3m = 0$$

rencontre l'axe Ox au point d'abscisse $\dfrac{3}{2m}$ et la nappe à laquelle appartient cette génératrice mobile admet au point correspondant pour plan tangent le plan $y - mz = 0$; considérée comme *génératrice*, Ox est génératrice *stationnaire* avec le plan tangent invariable $y = 0$.

Cela posé, si nous prenons une génératrice *quelconque* G de la surface réglée S, et un point M *quelconque* sur G, le plan tangent à S en M coupe G suivant une courbe plane C d'ordre $m-1$, si m est le degré de S; la courbe plane C coupe S d'abord en M qui compte pour une unité dans l'intersection de G et de C, puis en divers points $P_1, P_2, \ldots P_h$, comptant respectivement, dans l'intersection de G et C, pour $p_1, p_2, \ldots p_h$ unités, avec

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_h = m - 2$$

Chacun des points $P_1, P_2, \ldots P_h$ est indépendant de la position de M sur G et engendre, quand G varie, une ligne multiple de S: au fond la classification des surfaces algébriques réglées, pour le degré et le genre, revient à la détermination de ces lignes multiples (qui peuvent former les diverses branches d'une même courbe indécomposable, ou former plusieurs courbes analytiquement distinctes, qui peuvent comprendre plusieurs droites exceptionnelles) [1]. En chaque point d'une courbe multiple de cette espèce, passent un nombre fixe de génératrices: g_i pour la courbe lieu de P_i; chacune de ces g_i génératrices appartient à une nappe qui, prise isolément, n'admet aucune singularité en P_i et y admet un plan tangent déterminé par la loi de Chasles; il peut arriver qu'en P_i les g_i génératrices, fournissent chacune un plan tangent distinct de ceux fournis par les $g_i - 1$ autres; mais il peut arriver que plusieurs génératrices donnent en P_i le même plan tangent (et alors G étant *quelconque*, cette particularité doit se retrouver tout le long de la courbe lieu de P_i); on a alors une ligne de *raccord* de la surface avec elle-même, au lieu d'une ligne d'intersection.

Enfin on peut avoir une autre espèce de singularité: deux nappes, régulières sur la surface quand on les étudie seules, ou plusieurs peuvent avoir en commun une génératrice suivant laquelle elles se coupent ou se raccordent.

L'étude précédente faite au point de vue *ponctuel* doit être complétée au point de vue *tangentiel*. On sait qu'une surface réglée a même *degré* et même *classe*; nous avons étudié les points multiples de la surface, il y a lieu aussi d'étudier les plans tangents

---

[1]) Il y a donc lieu d'utiliser la classification des courbes gauches due à Halphen; mais ce dernier a laissé systématiquement de côté le cas où la courbe gauche a des points multiples; or nous verrons qu'ici ce cas des points multiples se présente au contraire systématiquement.

multiples et cette remarque permet de distinguer les surfaces réglées qui sont de même espèce que leur polaire réciproque et celles qui sont d'espèce différente: dans ce dernier cas, le travail de classification se trouve diminué de moitié. Si le degré et la classe de la surface S sont égaux à m, le cône circonscrit à la surface d'un point M de cette surface comprend d'abord la *génératrice* G considérée comme enveloppe de plans, puis un cône Σ de degré $m-1$: la direction asymptotique du plan tangent en M à S, autre que la génératrice G, est génératrice du cône Σ, le plan tangent correspondant étant le plan tangent à S en M; de G on peut donc mener à Σ, en dehors du plan tangent à S en M, exactement $m-2$ plans tangents et l'on reconnaît les raisonnements corrélatifs de ceux qui précèdent.

J'appliquerai ces principes à la classification complète des surfaces d'ordre 4 et 5; je donnerai quelques indications pour les degrés supérieurs (pour les degrés 2 et 3 les résultats sont connus et il est superflu d'y revenir).

Enfin je signale une application imprévue de la théorie des *polygones de Poncelet* relatifs à deux courbes qui ne sont plus des coniques. Cette application se présente automatiquement dès que l'on cherche une surface réglée admettant des plans tangents multiples d'ordre au moins égal à 3; nous avons vu que les surfaces réglées algébriques, d'ordre supérieur ou égal à 3, admettant nécessairement des points et des plans tangents multiples, mais il n'est pas nécessaire que l'ordre de multiplicité dépasse 2. Imaginous que la surface réglée admette ∞^1 plans tangents multiples d'ordre $n \geqslant 3$; les n génératrices situées dans chaque plan de cette série se coupent deux à deux et le lieu des points d'intersection ainsi obtenus engendre une des lignes multiples Γ déjà signalées sur la surface: dans chaque plan il y a au plus $\frac{n(n-1)}{2}$ points distincts, et la courbe Γ peut se composer d'une seule courbe ou de plusieurs analytiquement distinctes; or si nous faisons la perspective de la surface S sur un plan quelconque à partir d'une point de vue quelconque, les génératrices de S deviennent les tangentes au contour apparent (e) de S; la courbe Γ devient une courbe γ circonscrite à ∞^1 polygones de n côtés eux-mêmes circonscrits à (e).

2. — Etude des surfaces d'ordre 4. Classification.

Je rappelle, avec les notations déjà employées, que le plan tangent à S en M donne la génératrice G et une courbe C coupant G, en dehors de M, en $P_1 \dots P_h$, comptant pour $p_1, \dots p_h$ dans l'intersection (G, C); on a

$$p_1 + p_2 + \dots + p_h = m - 2$$

Si en P_1 il y a g_1 génératrices qui s'y croisent, la section par un plan quelconque issu de P_1 a g_1 tangentes distinctes au point P_1, si les plans tangents en P_1 sont distincts; en appliquant ceci au plan tangent en M, on voit que $p_1 = g_1 - 1$; si au contraire en P_1, il y a plusieurs plans tangents coïncidant, P_1 est, sur C, multiple d'ordre $g_1 - 1$ et G est une tangente à C de sorte que $p_1 \geqslant g_1$.

Ici pour $m = 4$, on voit que $h = 1$ ou 2 et que la courbe C est une cubique. La totalité des cas est facile à obtenir; en supposant d'abord $h = 2$, d'où $p_1 = p_2 = 1$, on a les cas:

A) deux droites doubles exceptionnelles, la surface est de genre 1 et ne possède aucune conique

B) deux droites doubles exceptionnelles et une génératrice double; la surface est de genre zéro et possède ∞^1 coniques.

C) une cubique gauche double: les génératrices appartiennent à un complexe linéaire non spécial; la surface possède ∞^1 coniques véritables dont les plans sont bitangents et enveloppent une développable de classe 3.

D) une cubique gauche double; les génératrices appartiennent à un complexe spécial; la surface admet ∞^1 plans tritangents pivotant autour d'une droite simple de la surface

E) une droite double exceptionnelle et une conique double se rencontrant en un point.

En supposant $h = 1$, on a $p_1 = 2$; le point P_1 peut être double sur C, ce qui correspond à une ligne triple de S, (droite exceptionnelle), d'où deux cas:

F) une seule droite exceptionnelle triple; on a le cas réciproque de D par dualité

G) une droite exceptionnelle triple et une autre simple.

Le point P_1 peut au contraire être simple sur C et correspondre au contact simple de G et C, d'où deux cas:

H) une droite exceptionnelle de raccord, la surface est de genre 1

K) une droite exceptionnelle de raccord et une génératrice double, la surface est de genre zéro.

On remarque que par dualité, chaque cas A, B, C, E, G, H, K se correspond à lui-même; D, F s'échangent; dans le tableau qui précède j'ai parlé de points doubles ou triples et de leur lieu; en tenant compte de la dualité, on voit que, pour le cas G par exemple, la droite triple (ponctuellement) est simple (tangentiellement) tandis que c'est l'inverse pour l'autre droite exceptionnelle; remarques analogues dans les autres cas.

3. — Cas A et B du quatrième ordre.

Du point M de S on a mené la génératrice G et marqué sur G les points singuliers, distincts, P_1 et P_2; par P_1 passe une autre génératrice G' qui contient un point singulier P_2'; le plan G, G' contient trois points singuliers. Quand G varie, les points P_1, P_2, P_2' engendrent une ligne multiple de S, qui ne peut être d'ordre supérieur à 3, car les sections planes de S ne sont pas toutes décomposées et sont de degré 3; la courbe multiple ne peut être de degré 1, puisque, sur chaque génératrice, il y a deux points multiples. Donc l'ordre de la ligne est 2 ou 3. Pour l'ordre 2, on ne peut admettre une conique (proprement dite ou formée de deux droites concourantes), parce que le plan de la conique épuiserait, par cette conique, la section de S, d'où contradiction, chaque génératrice rencontrant la conique en deux points. Il ne reste donc que le cas de deux droites non concourantes, l'une lieu de P_1 l'autre de P_2 ou le cas de la cubique (cubique indécomposable, ou formée d'une droite et d'une conique *sécantes* en un point).

Soit donc le cas de deux droites (exceptionnelles) doubles; en les choisissant (elles sont distinctes) pour arêtes opposées du tétraèdre de référence, on voit que l'équation de la surface devient

$$(1)\qquad \begin{aligned} &x^2(Az^2+2Bzt+Ct^2)+2xy(A_1z^2+2B_1zt+C_1t^2)+\\ &\qquad +y^2(A_2z^2+2B_2zt+C_2t^2)=0. \end{aligned}$$

Si l'on représente par P, Q, R les coefficients de x^2, $2xy$, y^2 dans cette équation (1), ces polynômes P, Q, R sont premiers entre eux dans leur ensemble; si Q^2-PR était carré parfait, on écrirait

$$(2)\qquad \begin{cases} Q^2-PR\equiv S^2 \qquad Q+S\equiv p_1r_1 \qquad Q-S\equiv p_2r_2 \\ P\equiv p_1p_2 \qquad\qquad R\equiv r_1r_2 \end{cases}$$

et l'équation (1) se décomposerait en

$$(3) \qquad (x p_2 + y r_1)(x p_1 + y r_2) = 0$$

où p_1, p_2, r_1, r_2, sont des polynômes linéaires homogènes en z, t et on aurait deux quadriques ayant en commun un quadrilatère gauche; écartons ce cas. Si donc $Q^2 - PR$ a quatre racines distinctes, la surface (1) est de genre 1, les deux droites exceptionnelles épuisent tous les points singuliers; si $Q^2 - PR$ a une racine double ou une racine triple, il y a une génératrice *double* recontrant les deux droites exceptionnelles. Le premier cas est le cas A; la surface ne possède aucune conique: on l'obtient en prenant deux droites D_1, D_2 non concourantes arbitraires, puis établissant entre un point M_1 de D_1 et un point M_2 de D_2 une correspondance (2, 2) algébrique arbitraire; à un point M_1 *quelconque* correspondent deux points de D_2, M_1 et M_2'; il y a *quatre* positions distinctes, dans le cas A, m_1, n_1, p_1, q_1 de M_1 pour lesquelles les deux points M_2 se confondent, m_1 donnant m_2; n_1 donne n_2, p_1 donne p_2 et q_1, q_2; inversement il existe sur D_2 quatre positions μ_2, ν_2, π_2, χ_2 pour lesquelles les poins M_1 correspondants sont confondus en un seul, μ_1, ν_1, π_1, χ_1 respectivement; on voit que le plan $m_1\ D_2$ est tangent à la surface le long de la génératrice *stationnaire* $m_1\ m_2$ (de même $n_1\ D_2$, $p_1\ D_2$, $q_1\ D_2$); de même le plan $\mu_2\ D_1$ (ou $\nu_2\ D_1$, $\pi_2\ D_1$, $\chi_2\ D_1$) est tangent tout le long de la génératrice stationnaire $\mu_1\ \mu_2$; cela fait donc *huit génératrices stationnaires.*

Pour le cas B, deux points m_1, n_1 se confondent, de sorte que m_2 et n_2 se cónfondent (entre eux et avec μ_1 et ν_1); nous trouvons une génératrice *double* $m_1 m_2$ (et non stationnaire); il reste *quatre génératrices stationnaires;* on voit aussitôt que l'on peut définir la surface ainsi: on se donne D_1, D_2, une droite $m_1\ m_2$ joignant un point m_1 de D_1 à un point m_2 de D_2, puis une conique C coupant m_1, m_2 en deux points a, b; la surface est le lieu d'une droite mobile assujétie à rencontrer D_1, D_2, C. Du point m_2 memons les tangentes $m_2\,\alpha$, $m_2\,\beta$ à C: le plan contenant D_2 et l'une $m_2\,\alpha$ perce D_1 en p_1 et la droite $p_1\,a$ est l'une des génératrices stationnaires annoncées, le plan $p_1\,\alpha\,D_2$ étant le plan tangent. Cette construction montre à quoi correspond le cas de dégénérescence de B, celui où $Q^2 - PR$ a une racine triple: la conique C serait tangente à la droite $m_1\ m_2$ au lieu de la couper en deux points distincts (a et b ne peuvent se confondre avec m_1 ou m_2 sans que le degré de la surface s'abaisse).

Pour en revenir au cas B non dégénéré, tout plan passant par $m_1\, m_2$ coupe S suivant une conique C' perçant $m_1\, m_2$ en deux points α et β qui se correspondent homographiquement, les points doubles de l'homographie étant m_1 et m_2 et a, b un couple correspondant; en effet $m_1\, m_2$ est génératrice *simple* snr la nappe qui correspond au déplacement sur la conique d'un point λ voisin de a; sur cette nappe la variation du plan tangent en un point α de $m_1\, m_2$ est fournie par l'égalité du rapport arharmonique $(m_1\, a\, \alpha\, m_2)$ et de celui des plans tangents correspondants: $(D_1\, m_1\, m_2$, plan de C, plan de C', $D_2\, m_1\, m_2)$. Si en considère de même le point μ variable sur C au voisinage de b, on aura donc

$$(m_1\, a\, \alpha\, m_2) = (m_1\, b\, \beta\, m_2)$$

ce qui justifie la proposition; dans le cas de B dégénéré, α et β coïncident constamment entre eux, ce qui est naturel par suite de la définition du cas B dégénéré.

On remarquera enfin que dans le cas B, (dégénéré ou non), les deux coniques C et C' se correspondent, par les génératrices, *homographiquement* (nous retrouverons cette notion plus bas, en étudiant C, D, E)..

Chaque cas: A, B, B dégénéré, se correspond évidemment à lui-même par dualité et l'on peut obtenir aisément les quadriques ou complexes linéaires par rapport auxquels la surface est sa propre conjuguée.

4. — Surface réglée de Clebsch; cas C.

Le lieu des points P_1, P_2 est une cubique gauche indécomposable. Une homographie de l'espace permet de supposer que la cubique gauche a pour équations paramétriques

(1) $$x = t \qquad y = t^2 \qquad z = t^3$$

L'équation générale des surfaces de degré 4 contenant cette cubique est

(2) $$\begin{gathered} A(xz - y^2)^2 + 2B(xz - y^2)(z - xy) + C(z - xy)^2 + \\ + 2D(xz - y^2)(y - x^2) + 2E(z - xy)(y - x^2) + \\ + F(y - x^2)^2 = 0. \end{gathered}$$

Un point de la droite joignant les points t_1, t_2 a pour coordonnées homogènes

(3) $$x = t_1 + \rho t_2 \qquad y = t_1^2 + \rho t_2^2 \qquad z = t_1^3 + \rho t_2^3 \qquad \theta = 1 + \rho$$

de sorte que l'on a

$$(4)\qquad \left|\begin{array}{l} xz - y^2 = \rho t_1 t_2 (t_1 - t_2)^2 \\ z\theta - xy = \rho (t_1 + t_2)(t_1 - t_2)^2 \\ y\theta - x^2 = \rho \qquad (t_1 - t_2)^2 \end{array}\right.$$

Je pose

$$(5)\qquad p = t_1 t_2 \qquad s = t_1 t_2$$

et l'équation (2) est remplacée par

$$(6)\qquad Ap^2 + 2Bps + Cs^2 + 2Dp + 2Es + F = 0$$

qui est l'équation d'une conique (p, s). Toutes les surfaces (2) sont réglées car la sécante double de la cubique, issue du point $(x, y. z)$ de la surface a 5 points communs avec la surface. D'autre part les coordonnées plückériennes (a, b, c, l, m, n) de la sécante (t_1, t_2) sont

$$(7)\qquad 1,\ s,\ s^2 - p,\ p^2,\ -ps,\ p$$

de sorte que l'équation (6) peut s'écrire

$$(8)\qquad Al - 2Bm + C(c + n) + 2Dn + 2Eb + Fa = 0$$

La génératrice appartient donc au complexe linéaire de coefficients

$$(9)\qquad A,\quad -2B,\quad C + 2D,\quad F,\quad 2E,\quad C.$$

On retrouve la construction indiquée par Clebsch en 1870 aux Mathematische Annalen: en un point M_1 de la cubique, le plan polaire de M_1 relativement au complexe perce de nouveau la cubique en M_2 ou M_2' et $M_1 M_2$, $M_1 M_2'$ sont les génératrices issues de M_1; les plans bitangents $M_1 M_2 M_2'$ enveloppent la développable polaire réciproque de la cubique relativement au complexe (si le complexe était celui auquel appartient la cubique, ou aurait une surface développable). Si le complexe n'est pas spécial, on a le cas C; si le complexe est spécial, on a le cas D caractérisé par la relation

$$(10)\qquad AF - 4BE + C(C + 2D) = 0$$

Nous retrouvons aisément ici la notion des polygones de Poncelet signalés en introduction; ici il s'agit même de ce probème pour des coniques et non des courbes de degré supérieur. En effet, si le centre 0 de la perspective est choisi sur la cubique double, celle-ci a pour perspective une conique C; d'autre part la cône circonscrit à S du point O est de degré 4, mais contient les deux génératrices issues de O, de sorte que le reste est un cône de degré 2; les perspectives des génératrices sont donc les tangentes à une conique C'; M_1 étant un point de la cubique gauche, les deux génératrices $M_1\,M_2$, $M_1\,M'_2$ issues de M_1 percent la cubique en M_2 et M'_2, le plan $M_1\,M_2\,M'_2$ étant le plan polaire de M_1 relativement au complexe (9). Pour qu'il existe un plan tritangent à S, il faudrait que $M_2\,M'_2$ fût une génératrice de S: dans ce cas, si M_1, M_2, M'_2 forment un véritable triangle, le plan $M_1\,M_2\,M'_2$ a trois foyers, en M_1, M_2, M'_2, de sorte que le complexe est nécessairement spécial, et réciproquement (cas D qut va être étudié à part). Si M_1, M_2, M'_2 ne forment pas un véritable triangle, il suffit que M'_2 coïncide avec M_1 la droite $M_2\,M'_2$ n'est autre que $M_1\,M_2$ et alors la tangente en M_1 à la cubique appartient au complexe linéaire: on a ainsi quatre points remarquables de la surface; tout cela est bien en accord avec la théorie des triangles de Poncelet pour deux coniques. Si on suppose que le centre O de perspective est le point à l'infini de la cubique et le plan de perspective celui des $x\,y$, la conique C est la parabole $y - x^2 = 0$, la perspective de la génératrice $M_1\,M_2$ a pour équation $X s - Y - p = 0$, de sorte que l'équation (6) est l'équation tangentielle de C' $\left(\text{en prenant } s = -\dfrac{u}{v},\ p = -\dfrac{w}{v}\right)$. Sans remonter à la théorie des polygones de Poncelet, remarquons que l'on a, d'après (C),

$$(11)\qquad t_2 + t'_2 = -\frac{2\,(B t_1^2 + D_1\, t_1 + E)}{A\, t_1^2 + 2 B t_1 + C} \qquad t_2\, t'_2 = \frac{C t_1^2 + 2 E t_1 + F}{A\, t_1^2 + 2 B t_1 + C}$$

en posant

$$(12)\qquad D_1 = C + D$$

Si on écrit que t_2 et t'_2 satisfont aussi à la relation (6), on obtient, après réduction,

$$(13)\qquad \begin{aligned}(C^2 + 2 D C + A F - 4 B E)\,[A t_1^4 + 4 B t_1^3 +\\ + (4 C + 2 D)\, t_1^2 + 4 B\, t_1 + F] = 0.\end{aligned}$$

Si le complexe n'est pas spécial, on doit annuler le second facteur, qui exprime précisément que la tangente en t_1 appartient au complexe (point de contact aves C d'une tangente commune à C et C').

Ici on peut se poser le problème de Poncelet d'interprétation différente: nous partons de M_1 avec *une* génératrice $M_1\,M_2$ jusqu'au point où elle rencontre la cubique en M_2: de M_2 on continue avec la génératrice, (autre que $M_2\,M_1$), $M_2\,M_3$, puis de $M_3 \ldots$: en général cette chaîne ne se ferme pas (sauf avec les chaînes dégénérées signalées par Halphen); si elle se ferme *une fois* (avec une chaîne non dégénérée) elle se ferme *quel que soit* M_1 et toujours avec le même nombre de chaînons.

Le nombre 3 correspond au complexe spécial; pour $n \geqslant 4$, on retrouve une équation de degré 4 en t_1, contenant un facteur fonction de A, B, C, D, E, F comme dans (13); la condition de fermeture s'obtient en annulant ce facteur. Ainsi, pour $n = 4$, le point M_1 donne M_2 et M'_2 racines de

$$(14) \qquad \begin{aligned} &(At_1^2 + 2Bt_1 + C)\,t_2^2 + 2\,(Bt_1^2 + D_1\,t_1 + E)\,t_2 + \\ &\quad + Ct_1^2 + 2Et_1 + F = 0 \end{aligned}$$

Il suffit d'exprimer qu'il existe un second point t_3 donnant les mêmes points t_2 et t'_2: on a ainsi à écrire (avec $t_1 \neq t_3$)

$$(15) \qquad \frac{At_1^2 + 2Bt_1 + C}{At_3^2 + 2Bt_3 + C} = \frac{Bt_1^2 + D_1\,t_1 + E}{Bt_3^2 + D_1\,t_3 + E} = \frac{Ct_1^2 + 2Et_1 + F}{Ct_3^2 + 2Et_3 + F}$$

Autrement dit les deux équations

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(AD_1 - 2B^2)\,t_1t_3 + (AE - BC)\,(t_1 + t_3) + 2BE - CD_2 = 0 \\ &2\,(AF - BC)\,t_1t_3 + (AF - C^2)\,(t_1 + t_3) + 2\,(BF - EC) = 0 \end{aligned} \right.$$

doivent se réduire à une seule, ce qui entraîne

$$(17) \qquad \frac{AD_1 - 2B^2}{2(AE - BC)} = \frac{AE - BC}{AF - C^2} = \frac{2BE - CD_1}{2\,(BF - EC)}$$

or les deux équations, ainsi obtenues, (17), ont le facteur commun

$$(18) \qquad AFD_1 - 2B^2F - C^2D_1 - 2AE^2 + 4BCE = 0$$

qui représente la condition d'existence des chaînes d'ordre 4.

Clebsch a fait remarquer que, si l'on considère deux plans bitangents à la surface, la génératrice mobile établit une correspondance homographique entre les deux coniques sections de la surface par les plans bitangents: on peut donc prendre comme équations paramétriques de S

$$(19) \qquad \left| \begin{aligned} x &= \alpha t^2 + 2\beta t + \gamma + \lambda(\alpha' t^2 + 2\beta' t + \gamma') \\ y &= \alpha_1 t^2 + 2\beta_1 t + \gamma_1 + \lambda(\alpha'_1 t^2 + 2\beta'_1 t + \gamma'_1) \\ z &= \alpha_2 t^2 + 2\beta_2 t + \gamma_2 + \lambda(\alpha'_2 t^2 + 2\beta'_2 t + \gamma'_2) \\ \theta &= \alpha_3 t^2 + 2\beta_3 t + \gamma_3 + \lambda(\alpha'_3 t^2 + 2\beta'_3 t + \gamma'_3) \end{aligned} \right.$$

où t et λ sont les coordonnées curvilignes; $t =$ const. donne une génératrice; $\lambda =$ const. donne une conique. Le plan de la conique $\lambda = l$ s'obtient en résolvant les équations

$$(20)\quad \left|\begin{array}{l} u(a+la')+v(a_1+la_1')+w(a_2+la_2')+h(a_3+la_3')=0\\ u(\beta+l\beta')+v(\beta_1+l\beta_1')+w(\beta_2+l\beta_2')+h(\beta_3+l\beta_3')=0\\ u(\gamma+l\gamma')+v(\gamma_1+l\gamma_1')+w(\gamma_2+l\gamma_2')+h(\gamma_3+l\gamma_3')=0\end{array}\right.$$

ce qui donne la développable double

$$(21)\quad \left|\begin{array}{l} u=Hl^3+Kl^2+Ll+M\\ v=H_1l^3+K_1l^2+L_1l+M_1\\ w=H_2l^3+K_2l^2+L_2l+M_2\\ h=H_3l^3+K_3l^2+L_3l+M_3\end{array}\right.$$

Si dans $ux+vy+wz+h\theta$ on remplace x, y, z, t par les valeurs (19). et u, v, w, h par les valeurs (21) on obtient une expression qui, en écrivant x sous la forme $at^2+2\beta t+\gamma+l(a't^2+2\beta't+\gamma')+$ $+(\lambda-l)(a't^2+2\beta't+\gamma')$ (et de même y, z, θ), se réduit manifestement à

$$(22)\quad \begin{array}{r}(\lambda-l)[(Hl^3+Kl^2+Ll+M)(a't^3+2\beta't+\gamma')+\ldots+\\ +(H_3l^3+\ldots)(a_3't^2+\ldots)].\end{array}$$

Le premier facteur $\lambda-l=0$ donne la conique; le second est de degré 2 en t et donne les deux génératrices $t=t_0$ et $t=t_1$; autrement dit dans le plan image (λ, t) l'image de la section est une cubique dégénérée en la droite $\lambda=l$ et les deux droites $t=t_0$ et $t=t_1$; $\lambda=l$, $t=t_0$ donne le point de contact M_0 sur la génératrice t_0 du plan l; $\lambda=l$, $t=t_1$ donne le second point de contact M_1 de ce plan sur la génératrice t_1; on remarquera que la droite M_0M_1 est la caractéristique de ce plan bitangent; la génératrice t_0 rencontre la conique en M_0, puis en P_0, point double de la surface: si pour P_0 on prend $\lambda=l$, on trouve comme t la valeur relative à la seconde génératrice issue de P_0. Si on se donne t, l'équation

$$(23)\quad (Hl^3+Kl^2+Ll+M)(a't^2+2\beta't+\gamma')+\ldots=0$$

qui est du second degré en l [car d'après (20) on a

$$Ha'+H_1a_1'+H_2a_2'+H_3a_3'=0]$$

donne les deux plans bitangents contenant la génératrice t.

Dans le cas du complexe non spécial, on voit qu'il ne peut y avoir de plan tritangent; les seuls cas de dégénérescence possible offerts par les formules (19) sont donc: d'abord le cas où les polynômes (21) admettent un diviseur commun du second degré en l et cela redonne le cas B, puis

$$1^0)\ \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \qquad 2^0)\ \alpha' = \alpha'_1 = \alpha'_2 = \alpha'_3 = 0$$
$$3^0)\ \beta = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 \qquad 4^0)\ \beta' = \beta'_1 = \beta'_2 = \beta'_3 = 0$$

Les deux premiers cas [1]) cerrespondent simplement à une surface de degré 3: on a établi une correspondance homographique entre une droite et une conique; la droite est simple et exceptionnelle sur la surface; il y a une ligne double qui est une droite exceptionnelle. Pour l'un ou l'autre des deux derniers cas, le troisième par exemple, la conique $\lambda = 0$, est une droite avec *représentation paramétrique impropre;* nous retrouverons ce cas à l'instant comme cas (E).

5. — Droite double, conique double: cas *E*.

La seule différence avec le numéro précédent est que la courbe (P_1, P_2) est de degré 3 mais décomposée en une droite et une conique; comme cet ensemble ne doit avoir, pour un point arbitraire de l'espace, qu'une corde double issue de ce point, il faut que la droite et la conique se rencontrent en un point; appelons Δ la droite, C la conique double, A leur point de rencontre; un plan bitangent peut donner deux génératrices se croisant sur Δ ou sur C; prenons le cas où les deux génératrices se croisent en un point P_2 de Δ et joignent P_2 à un point P_1 ou P'_1 de C; le plan $P_1\, P_2\, P'_1$ coupe S suivant une conique C' passant en P_1 et P'_1 et rencontrant $P_2\, P_1$ en M_1, $P_2\, P'_1$ en M'_1; la droite $M_1\, M'_1$ est la caractéristique du plan bitangent $P_2\, P_1\, P'_1$; on peut dire que S est le lieu d'une droite rencontrant Δ, C, C'. Si nous prenons un point π arbitraire sur Δ, nous devons couper le cône (π, C') par le cône (π, C) en supprimant les génératrices $\pi\, P_1$, $\pi\, P'_1$; le cône (π, C) a le long de Δ comme plan tangent *fixe* le plan contenant Δ et la tangente en A à C; si on le coupe par le plan de C' on a une conique γ engendrant un faisceau ponctuel (P_1, P'_1 sont fixes sur γ, P_2 et la tangente en P_2); donc cette conique γ coupe C' en deux points μ, μ' se correspondant *involutivement* sur C', donc la corde $\mu\, \mu'$ passe par un point fixe σ du plan de C'; σ est situé sur $M_1\, M'_1$, comme

---

[1]) Pour que la proposition du texte soit exacte, il faut avoir au préalable avoir effectué sur λ une substitution homographique telle que la conique réduite à une droite soit obtenue pour $\lambda = 0$ ou $\lambda = \infty$.

on le voit en faisant venir π en P_2; si π vient en A, le cône (π, C) dégénère en le plan de C, que l'on élimine, et le plan contenant Δ et la tangente en A à C que l'on garde; cela donne le point σ. On déduit aisément de ce qui précède, (π et la droite $\mu\,\mu'$ se correspondant homographiquement sur une droite Δ ou autour du point σ dans un plan) que le plan $\pi\,\mu\,\mu'$ enveloppe un cône du second degré, qui est une fraction de la développable double bitangente à S, décomposée ici en ce cône double et la droite Δ double: car les deux génératrices issues d'un point de C sont dans un même plan avec Δ. Ce cas est bien à lui-même son corrélatif: la ligne double Δ et la conique double C se rencontrent en un point A; de même la droite double Δ et le cône bitangent double σ ont un plan tangent commun (déterminé plus haut, contenant Δ et la tangente en A à C).

On retrouve aisément ces résultats par le calcul en se servant des notations du numéro précédent, car dans le système (20), puisque

$$\beta = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

on voit que la seconde équation se décompose et donne soit $l = 0$, soit $u\beta' + v\beta_1' + w\beta_2' + h\beta_3' = 0$; le facteur $l = 0$ donne un plan pivotant autour de la droite (a, a_1, a_2, a_3), $(\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ qui est la droite double Δ; l'autre facteur conduit au cône du second degré, dont le sommet est $(\beta', \beta_1', \beta_2', \beta_3')$.

On peut dire d'une façon simple comment procéder pour établir la correspondance entre la droite Δ et la conique C': la droite $\mu\,\mu'$ correspond involutivement à π; si θ est le paramètre de π sur Δ, on a entre le θ de π et le paramètre t de μ ou μ' sur C' une relation de la forme

$$(a\,t^2 + 2\,b\,t + c)\,\theta + a_1\,t^2 + 2\,b_1\,t + c_1 = 0$$

ce qui entraîne bien que la droite $\mu\,\mu'$ pivote autour d'un point fixe σ de son plan; ensuite on a exprimé les coordonnées de π en remplaçant

$$\theta \text{ par } -\frac{a_1\,t^2 + 2\,b_1\,t + c_1}{a\,t^2 + 2\,b\,t + c}$$

ce qui donne bien la correspondance homographique entre une droite (en représentation impropre) et une conique.

6. — Cas D: complexe spécial.

Si l'on coupe une cubique gauche Γ arbitraire par des plans pivotant autour d'une droite Δ quelconque (ne coupant pas Γ), on obtient à chaque fois trois points P_1, P_2, P_3 qui, joints deux à deux, donnent les droites $P_2\,P_3$, $P_3\,P_1$ et $P_1\,P_2$ dont le lieu est manifestement une surface S de degré 4. sur laquelle Δ est droite exceptionnelle simple et dont Γ est ligne double; il n'y a pas de plans bitangents, un plan tangent est monotangent ou tritangent; au point de vue tangentiel, Δ est une développable triplement circonscrite à S. La surface ne possède aucune conique.

On peut donner un exemple numérique simple: sur la cubique

(1) $$x = t \qquad y = t^2 \qquad z = t^3$$

les points de paramètre t_0, $t_0\,j$, $t_0\,j^2$ sont dans le plan $z = t_0^3$ qui, t_0 variant, pivote autour de la droite de l'infini. Puisque $t_0\,j$ et $t_0 j^2$ sont racines de $t^2 + t\,t_0 + t_0^2 = 0$, la droite

(2) $$t_0\,x + y + t_2^0 = 0 \qquad z = t_0^3$$

est manifestement celle qui joint les deux points de la cubique $t_0 j$ et $t_0\,j^2$; le lieu de cette droite est facile à obtenir: on écrit

(3) $$(y + t_0\,x + t_0^2)\,(y + t_0\,j\,x + t_0^2\,j^2)\,(y + t_0\,j^2 x + t_0^2\,j) = 0$$

en développant et remplaçant t_0^3 par z on a la surface S

(4) $$y^3 + z\,x^3 + z^2 - 3\,x\,y\,z = 0$$

ou

(4') $$(z - x\,y)^2 + (x^2 - y)\,(x\,z - y^2) = 0$$

qui est bien de la forme annoncée. Les équations (2) donnent les expressions paramétriques en x et t_0

(5) $$x = x \qquad y = -\,x\,t_0 - t_0^2 \qquad z = t_0^3$$

d'où les coordonnées tangentielles

(6) $$u = 3\,t_0^3 \qquad v = 3\,t_0^2 \qquad w = x + 2\,t_0 \qquad h = t_0^4 - t_0^3 x.$$

L'élimination de t_0 et x donne

(7) $$h\,v^3 + u^3\,w = u^2\,v^2$$

La surface polaire réciproque S'

(8) $$x^2 z^2 - z\,x^3 - y^3 = 0$$

admet la droite exceptionnelle triple $x = y = 0$, c'est le cas F.

7. — Cas F et G. Droite triple.

Quand chaque génératrice de S passe par un point triple, le lieu du point triple ne peut être qu'une droite D; en la prenant pour $x = 0$, $y = 0$, l'équation de S devient

$$(1) \qquad x^3 P + 3x^2 y Q + 3xy^2 R + y^3 S = 0$$

où P, Q, R, S sont des formes linéaires en x, y, z, t; en coupant par $y = mx$, on a bien une droite variable sur S; si les 4 plans $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$ n'ont pas de droite commune, on a le cas F, réciproque de D. Si les quatre plans ont une droite commune, l'équation de S peut recevoir la forme

$$(2) \qquad x^3(\lambda z + \mu t) + 3x^2 y(\lambda' z + \mu' t) + 3xy^2(\lambda'' z + \mu'' t) + \\ + y^3(\lambda''' z + \mu''' t) = 0.$$

On a le cas G qui est à lui-même son réciproque par dualité.

8. — Ligne de raccord.

Si une surface S réglée de degré quatre admet une ligne de raccord du second degré, chaque section plane admet deux points de contact avec elle-même, soit l'équivalent de quatre points doubles, donc se décompose, et la surface S est la réunion de deux quadriques se raccordant le long d'une conique commune.

La ligne de raccord est donc une droite Δ, que nous prendrons comme axe des z. En chaque point de Δ passent deux génératrices qui sont dans un même plan avec Δ et l'on a épuisé ainsi la sectiou de S par ce plan; le plan correspond donc homographiquement au point où les deux génératrices rencontrent Δ; on peut donc par une transformation homographique préalable, écrire, pour définir les génératrices,

$$(1) \qquad \left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = z_0 \qquad \dfrac{z - z_0}{y} = m \\ m^2 + 2A(z_0)m + B(z_0) = 0 \end{array} \right.$$

où A et B sont des fractions rationnelles en z_0; l'équation de la surface est

$$(2) \qquad (yz - x)^2 + 2y^2(yz - x)\, A\left(\frac{x}{y}\right) + y^4 B\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

Donc, pour avoir le degré 4, il est nécessaire et suffisant que

$$(3)\qquad \begin{cases} A(z) \equiv az^2 + 2bz + c \\ B(z) \equiv a_1 z^4 + 4b_1 z^3 + 6c_1 z^2 + 4d_1 z + e_1. \end{cases}$$

Comme on peut garder z_0 et y comme paramètres curvilignes avec

$$(4)\qquad m = -(az_0^2 + 2bz_0 + c) + \\ + \sqrt{(az_0^2 + 2bz_0 + c)^2 - (a_1 z_0^4 + 4b_1 z_0^3 + 6c_1 z_0^2 + 4d_1 z_0 + c_1)}$$

on voit qu'en général la surface est de genre 1; la quantité sous le radical ne peut être carré parfait, sans que la surface ne se décompose en deux quadriques se raccordant suivant l'axe Oz; donc, en général, on a le cas H, qui est son propre réciproque; si le radical a une racine double, on a une génératrice double et la surface est de genre zéro, c'est le cas K qui est à lui-même son réciproque.

Dans le cas H, on a quatre génératrices stationnaires fournies par les valeurs de z_0 racines du radical; pour le cas K, la génératrice double fait disparaître deux génératrices stationnaires, sans être stationnaire sur les deux nappes qui se croisent suivant elle; il y a une dégénéresence du cas K, c'est celui où l'une des deux génératrices stationnaires vient se confondre avec le génératrice double, le radical ayant une racine triple: dans ce cas, en chaque point de la génératrice double, les deux plans tangents sont confondus (correspondant toujours homographiquement au point de contact), et chaque section plane admet un point de rebroussement sur la génératrice double. On vérifie aisément ces résultats avec les surfaces suivantes:

$$(5)\qquad (yz - x)^2 + 2(yz - x)x^2 + a_1 x^4 + 4b_1 x^3 y + 4xy^3 = 0$$

$$(6)\qquad (yz - x)^2 + 2(yz - x)x^2 + a_2 x^4 + 4b_1 x^3 y - 9x^2 y^2 = 0$$

$$(7)\qquad (yz - x)^2 + 2(yz - x)x^2 + a_1 x^4 + 4b_1 x^3 y = 0.$$

La surface (5) est du type H, Oy est génératrice simple stationnaire, le plan tangent étant $x = 0$; chaque section plane est de genre 1 et classe 8.

La surface (6) est du type K non dégénéré, Oy est génératrice double, les plans tangents au point (o, h, o) étant $hz - x = \pm 3hx$; chaque section plane admet sur Oz un point de raccord avec elle-même, sur Oy un point double à tangentes distinctes: elle est donc de genre zéro et classe 6.

La surface (7) est du type K dégénéré; en chaque point de la génératrice Oy, soit (o, h, o) il y a un seul plan tangent $hz - x = 0$ et chaque section plane y présente un rebroussement, de sorte que chaque section plane est de genre 0, de classe 5.

On a ainsi épuisé le degré 4.

9. — Classification des surfaces d'ordre 5.

Dans chaque plan simplement tangent, la courbe C de degré 4 coupe la génératrice G, en dehors du point de contact, en trois points seulement, distincts ou confondus.

Si les trois points en jeu sont distincts, il existe une série continue de plans bitangents; deux d'entre eux coupent la surface suivant une cubique; les deux cubiques sont de même genre (zéro, ou un) et les génératrices établissent entre elles une correspondance biunivoque; nous verrons que la courbe double de la surface est soit une quintique de genre 1, soit une sextique de genre 1 ayant un point triple, soit une quintique unicursale ayant un point de rebroussement ou un point double complétée par une génératrice proprement dite elle-même de rebroussement ou double.

Si avec les trois points en jeu, communs à C et G, il existe une série continue de plans tritangents, chacun d'eux pivote autour d'une droite exceptionnelle double et le reste de la ligne double se compose d'une biquadratique gauche ayant un point commun avec la droite double.

S'il existe des plans quatre fois tangents, ils pivotent autour d'une droite exceptionnelle simple et la ligne double est une sextique gauche de genre 1.

Supposons maintenant que les trois points P_1, P_2, P_3 communs à G et C en dehors du point de contact soient, les deux premiers: P_1 et P_2, confondus, puis le troisième P_3 distinct d'eux; soit d'abord le cas où (P_1, P_2) forme un point double de C; la surface a une ligne triple qui est une droite exceptionnelle, complétée par une conique double ayant un point commun avec la droite triple; ce cas est corrélatif par dualité des surfaces à droite exceptionnelle double complétée par biquadratique double.

On peut avoir le cas de P_1 et P_2 confondus, correspondant à un point simple de C; ceci correspond à une ligne de raccordement de la surface S avec elle-même, ligne qui est une droite ou une conique.

Enfin P_1, P_2, P_3 peuvent être confondus; cela peut arriver si la surface a une droite exceptionnelle quadruple (cas corrélatif de celui étudié plus haut où il y a une série de plans quatre fois tangents pivotant autour d'une droite).

Examinons ces divers cas.

10. — Surfaces de degré 5, de genre 1, ayant des points doubles et des plans tangents doubles.

Nous avons pris la génératrice G et le plan tangent à S en un point M de G et obtenu sur G trois points singuliers *distincts* P_1, P_2, P_3, *doubles* sur S; par P_1 passe une nouvelle génératrice G' et sur G' marquons les deux points singuliers P'_2, P'_3, lui appartenant; nous supposons que le plan G, G' soit *exactement bitangent* à S; il coupe donc S suivant une cubique σ qui peut être de genre *un* ou *zéro*. Supposons d'abord le genre *un*; un autre plan bitangent donne une nouvelle cubique σ' plane de genre 1, et la génératrice variable de S établit une correspondance birationnelle de courbe à courbe entre σ et σ'. On remarquera que σ passe en P_2, P'_2, P_3, P'_3 et que, le nouveau plan bitangent étant supposé ne contenir ni $P_1 P_2 P_3$ ni $P_1 P'_2 P'_3$, les pieds sur le plan $P_1 P_2 P_3 P'_2 P'_3$ des deux génératrices de ce plan bitangent, g_1, g_2, sont sur σ, à la rencontre de σ avec la droite commune δ aux deux plans bitangents; cette droite δ perce σ en un troisième point A qui est commun à σ et σ'; δ perce $P_1 P_2 P_3$ en un point B qui appartient à σ'; de même, δ perce $P_1 P'_2 P'_3$ en B' qui est sur σ'. Les deux cubiques σ, σ' ont le même invariant; on pourra donc écrire les équations paramétriques de la surface sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll} x = Ap\overline{\omega+\omega_0} + Bp'\overline{\omega+\omega_0} + C & + \lambda[\alpha p\overline{\omega+\omega_1} + \beta p'\overline{\omega+\omega_1} + \gamma] \\ y = A_1p\overline{\omega+\omega_0} + B_1p'\overline{\omega+\omega_0} + C_1 & + \lambda[\alpha_1 p\overline{\omega+\omega_1} + \beta_1 p'\overline{\omega+\omega_1} + \gamma_1] \\ z = A_2p\overline{\omega+\omega_0} + \dots & + \lambda[\alpha_2 p\overline{\omega+\omega_1} + \dots \qquad] \\ t = A_3p\overline{\omega+\omega_0} + \dots & + \lambda[\alpha_3 p\overline{\omega+\omega_1} + \dots \qquad] \end{array}\right.$$

d'après les résultats classiques sur les cubiques de genre un en correspondance biunivoque.

Les lettres $A_i, B_i, C_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sont des constantes numériques, ω_0 et ω_1 aussi; ω et λ sont les paramètres curvilignes; on doit écrire que le point A $(\omega = 0)$ se correspond à lui-même, d'où

$$(2)\qquad \frac{A p\,\omega_0 + B p'\,\omega_0 + C}{a p\,\omega_1 + \beta p'\,\omega_1 + \gamma} = \frac{A_1 p\,\omega_0 + B_1 p'\,\omega_0 + C_1}{a_1 p\,\omega_1 + \beta_1 p'\,\omega_1 + \gamma_1} = \\ = \frac{A_2 p\,\omega_0 + \dots}{a_2 p\,\omega_1 + \dots} = \frac{A_3 p\,\omega_0 + \dots}{a_3 p\,\omega_1 + \dots}$$

Ces formules (1) mettent bien en évidence les génératrices: $\omega = \text{const}$, mais elles ne mettent en évidence que *deux* cubiques ($\lambda = 0$, $\lambda = \infty$).

On remarquera que le nombre de paramètres dont dépend la surface est 20; en effet la première cubique plane σ fait intervenir son plan (3 paramètres) et ses coefficients dans son plan (9). La seconde fait intervenir deux paramètres de moins que σ, car elle a le même invariant et rencontre σ; la correspondance biunivoque entre σ et σ' se trouve alors connue (on a le choix entre *deux* correspondances) par ce fait que le point de rencontre est à lui-même son homologue. Le nombre total ainsi obtenu 22 fixe S et le choix de *deux* plans bitangents; il reste donc, pour S, *20* paramètres stricts. C'est bien le nombre qui résulte des travaux d'Halphen sur la détermination des courbes gauches d'ordre cinq et genre un. Ce nombre concorde bien aussi avec les formules (1) et (2); il y entre en effet 12 paramètres *homogènes* A_i, B_i, C_i, soit onze paramètres; de même 12 paramètres *homogènes* a_i, β_i, γ_i, donc onze, car le facteur d'homogénéité peut être différent pour les deux séries grâce à λ qui peut être changé en $m\lambda$; il faut ajouter ω_0, ω_1 et pour la fonction p, son invariant; on a donc, en remarquant qu'il faut ensuite déduire le nombre 3 pour les relations (2), retrouvé le nombre 22, réduit encore à 20 parce que l'on a encore choisi, outre S, les cubiques $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$.

Si on écrit que les deux génératrices ω et Ω se rencontrent, on a l'équation

$$(3)\qquad 0 = \begin{vmatrix} Ap(\omega+\omega_0)+Bp'(\omega+\omega_0)+C & A_1p(\omega+\omega_0)+\dots & A_2p(\omega+\omega_0)+\dots & A_3p(\omega+\omega_0)+\dots \\ ap(\omega+\omega_1)+\beta p'(\omega+\omega_1)+\gamma & \dots & \dots & \dots \\ Ap(\Omega+\omega_0)+Bp'(\Omega+\omega_0)+C & \dots & \dots & \dots \\ ap(\Omega+\omega_1)+\beta p'(\Omega+\omega_1)+\gamma & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Il faut rejeter pour l'*inconnue* Ω, la solution double $\Omega = \omega$, et la solution simple $\Omega = 0$. Si donc on appelle Ω', Ω'', Ω''' les racines autres que ω et zéro de l'équation (3), on a d'après la théorie connue des fonctions elliptiques, remarquant que le déterminant a un pôle triple $\Omega = -\omega_0$ et un pôle triple $\Omega \equiv -\omega_1$, la relation

$$(4) \qquad \Omega' + \Omega'' + \Omega''' = -2\omega - 3\omega_0 - 3\omega_1$$

Chaque section plane de la surface est de degré 5 et genre 1 (quand le plan est arbitraire); elle n'a que *cinq* points doubles; il y a donc une ligne double, *quintique de genre 1.* La donnée de cette quintique Γ suffit pour construire S; le cône qui a son sommet en un point de Γ et pour directrice Γ est de degré 4, de genre 1; il admet deux génératrices doubles, sécantes triples de Γ; *la surface S est engendrée par ces sécantes triples.* Dans les oeuvres complètes d'Halphen, t 3, p 414, la quintique en jeu Γ est indiquée comme intersection partielle de deux surfaces cubiques issues d'une même quartique gauche unicursale; elle dépend de 20 paramètres arbitraires et cela confirme notre résultat précédent.

Il est facile de trouver les plans bitangents: en effet, la section de S par le plan (u, v, w, h) a pour *image*

$$(5) \quad \left|\begin{array}{l} (uA + vA_1 + wA_2 + hA_3)\,p\,\overline{\omega + \omega_0} + \\ + (uB + vB_1 + wB_2 + hB_3)\,p'\,\overline{\omega + \omega_0} + uC + vC_1 + wC_2 + hC_3 \\ + \lambda[(ua + va_1 + wa_2 + ha_3)\,p\,\overline{\omega + \omega_1} + \\ + (u\beta + v\beta_1 + w\beta_2 + h\beta_3)\,p'\,\overline{\omega + \omega_1} + u\gamma + v\gamma_1 + w\gamma_2 + h\gamma_3] = 0 \end{array}\right.$$

Or l'équation

$$(6) \quad \begin{array}{l} (uA + vA_1 + wA_2 + hA_3)\,p\,\overline{\omega + \omega_0} + (uB + \ldots)\,p'\,\overline{\omega + \omega_0} + \\ \qquad + uC + \ldots = 0 \end{array}$$

donne les points communs à la cubique σ et au plan; de même l'équation

$$(7) \quad \begin{array}{l} (ua + va_1 + wa_2 + ha_3)\,p\,\overline{\omega + \omega_1} + (u\beta + \ldots)\,p'\,\overline{\omega + \omega_1} + \\ \qquad + u\gamma + \ldots = 0 \end{array}$$

donne les points communs à σ' et au plan; si le plan est *mono-tangent*, les deux équations (6) et (7) en ω ont une racine commune (unique) et une seule; si le plan est *bi-tangent*, les deux équations ont deux racines communes. Les réciproques sont vaies. On a ainsi le moyen d'obtenir l'équation tangentielle de la surface. Or les racines ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 de (6), celles ψ_1, ψ_2, ψ_3 satisfont respectivement aux relations

$$(6') \qquad \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = -3\,\omega_0$$

$$(7') \qquad \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = -3\,\omega_1$$

On voit que si $\phi_1 = \psi_1$ et $\phi_2 = \psi_2$, on aura

$$(8) \qquad \phi_3 - \psi_3 = 3\,(\omega_1 - \omega_0)$$

de sorte que si $3\,(\omega_1 - \omega_0)$ n'est pas période de $p\,u$, la surface n'a pas de plan tritangent mais que si $3\,(\omega_1 - \omega_0)$ est période, tout plan contenant deux génératrices en contient automatiquement une troisième, en écartant le cas où le plan passe par le point $\omega = 0$.

Nous réservons ce cas de dégénérescence pour une étude ultérieure.

Le cas général de la représentation (1) est à lui-même son correspondant par dualité; il n'y a que des points doubles, que des plans tangents doubles; le genre est l'unité. Les plans bitangents enveloppent une développable de classe 5.

11. — Surfaces de degré 5, de genre zéro, ayant des points doubles et des plans tangents doubles Travaux d'Halphen.

Nous recommençons les raisonnements du numéro précédent: les plans bitangents donnent cette fois chacun une cubique σ unicursale, ayant donc un point double ou de rebroussement. Ce point double, à priori, peut être justifié, soit par la présence d'une génératrice double soit par ce fait que la ligne double de la surface est de degré 6, le point double de σ étant alors un point du plan (G, G') où se croisent deux génératrices non situées dans le plan (G, G'). Les divers cas énoncés ici sont possibles et il est facile d'en fournir des exemples précis. Pour le premier cas, la ligne double comprend, en dehors de la génératrice double, une quintique et il ne peut y avoir une génératrice double ou de rebroussement que si la quintique admet elle même un point double ou de rebroussement; cette quintique est nécessairement unicursale.

La quintique unicursale, ayant un point double ou de rebroussement est facile à obtenir: d'après Halphen nous devons partir de deux coniques arbitraires C_1, C_2 et construire deux surfaces cubiques Σ, Σ' contenant chacune C_1 et C_2; le reste de l'intersection de Σ et Σ' est une quintique gauche unicursale Q; chaque surface Σ et Σ' dépend, quand C_1 et C_2 sont connues, de 5 arbitraires; si Σ et Σ' sont quelconques, de chaque point P de Q sont issues 3 sécantes triples de Q, génératrices doubles du cône de sommet P et directrice Q; ces sécantes engendrent une surface réglée admettant Q pour ligne triple, *n'ayant pas d'autre ligne multiple* (*en dehors de génératrices éventuelles*), donc de degré 8. Il y a abaissement si Q admet un point double ou de rebroussement p: chaque corde Pp est à éliminer du décompte précédent et on a une surface S de degré 5; le cône de sommet p, de degré 3, admet une génératrice double unique (ou de rebroussement) $p\,p'\,p''$ et l'on voit que P décrivant chaque arc de Q passant en p, on obtient sur S deux nappes régulières ayant chacune $p\,p'\,p''$ pour génératrice; donc S admet Q pour ligne double et en plus la droite, $p\,p'\,p''$ comme *génératrice* double (ou de rebroussement). Tout revient donc à disposer des 5 paramètres de Σ' pour qu'elle soit tangente en un point à Σ ce qui est possible; on aura même le rebroussement si les cordes communes aux deux indicatrices du point de contact ont leurs deux sécantes communes confondues. Nous verrons un autre cas: celui où les deux surfaces cubiques Σ et Σ' ont en commun 3 droites D, D', D''; D' rencontre D et D''; D et D'' ne se rencontrent pas et D compte pour deux unités dans l'intersection de Σ et Σ'; le reste de l'intersection est une quintique unicursale à point double: c'est un cas particulier de celui indiqué par Halphen où Σ et Σ' sont issues d'une quartique unicursale; ici le système D, D', D'' est sur une seule quadrique, du moment que l'on a donné la loi des plans tangents suivant D.

Si, au contraire, la ligne double Q de la surface est de degré 6, et si nous voulons utiliser les résultats d'Halphen, comme pour le degré 5 (Oeuvres complètes, t 3, p 414) nous rencontrons cette fois une difficulté imprévue, que je vais faire comprendre. Le cas d'une courbe intersection d'une quadrique et d'une surface cubique s'élimine aussitôt. Si nous passons au cas suivant, nous prenons une cubique gauche Γ et en faisons partir deux surfaces cubiques Σ, Σ' (chacune dépend donc de 9 paramètres); le complément Q de l'intersection est de degré 6, de genre 3, car Q a, d'un point de vue *arbitraire*, 7 point doubles *apparents*; de chaque point de Q, sommet d'un cône de degré 5 et genre 3, partent donc trois sécantes triples de Q, engendrant une surface réglée qui serait exactement de degré 8 si deux sécantes triples de Q ne pouvaient se rencontrer que sur Q: or, cette fois, le degré de Q surpassant 5, il n'y a plus impossibilité à ce que deux sécantes triples se coupent hors de Q (nous verrons même que cette circonstance est à peu près certaine, par l'étude du cas des sextiques gauches de genre 1). — Or Σ' peut devenir tangente à Σ en 1 ou 2 points données à l'avance; et alors Q a 1 ou 2 points doubles; bornons-nous à un point de contact (Σ' dépendra encore de 6 paramètres); la courbe Q peut avoir conservé son genre 3 ou devenir de genre 2; dans le premier cas, la surface réglée lieu des sécantes triples de Q n'aurait pas, dans son ensemble, changé de degré, mais se décomposerait en un cône de degré 4 ayant son sommet au point de contact et une surface réglée qui serait de degré 4 si, avant le contact de Σ et Σ', on avait eu le degré 8: c'est impossible, Q étant de degré 6 et devant être ligne double de cette surface de degré 4; si le genre de Q est devenu 2, la contradiction disparait; c'est le degré de la surface réglée totale qui s'est élevé de 4 unités, par l'introduction du cône de degré 4. Je signale donc cette difficulté à résondre.

Or nous allons étudier directement les surfaces de degré 5 et obtenir, sans recours au travail d'Halphen, une courbe gauche double de genre 1, ayant un point triple et appartenant à deux surfaces cubiques Σ et Σ' dont le reste de l'intersection se compose de trois droites. C'est donc un cas particulier de celui donné par Halphen: les trois droites données, Σ et Σ' dépendent au moins de 7 paramètres; la courbe Q, du moins dans le cas *géuéral* est de genre 1, avec 9 points doubles apparents; d'un point de Q partent donc 5 sécantes triples de Q, donnant une surface réglée d'ordre 14 au moins; si Σ' devient tangente à Σ, ici le genre de Q se conserve (comme le prouve même le cas d'un point triple) et la surface réglée se décompose, l'un des morceaux étant un cône σ de degré 4; le degré minimum primitif 14 est inadmissible comme plus haut; admettons que le degré de la surface réglée, avant décomposition soit $14 + p$, c'est-à dire qu'à chaque sécante triple en correspondent p la rencontrant ; la contradiction disparaît, car il reste, après décomposition une surface réglée S de degré $10 + p$ ayant Q pour ligne multiple de multiplicité 4 [σ a deux génératrices doubles qui appartiennent aussi à S comme génératrices doubles; chaque génératrice de S rencontre σ en quatre points; il y a donc quatre sécantes triples de Q issues du point double qui rencontrent une sécante triple de Q non issue du point double et en même temps p sécantes triples ordinaires de S; chaque génératrice de σ rencontre S en $6 + p$ points hors du sommet de σ, il y a donc $6 + p$ sécantes triples de Q non issues du point double qui rencontrent une sécante triple issue du point double. Je signale ces faits pour montrer le genre de compléments à apporter aux recherches d'Halphen].

12. — Etude directe des surfaces de degré 5, de genre zero, ayant des points doubles et des plans tangents doubles.

D'après les raisonnements du paragraphe 10, on aura, en utilisant deux plans bitangents, $x=0$, $y=0$; une représentation paramétrique

$$(1)\quad \left|\begin{aligned} x &= At^3+Bt^2+Ct+D \\ y &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \lambda(\alpha_1 t^3+\beta_1 t^2+\gamma_1 t+\delta_1) \\ z &= A_2 t^3+B_2 t^2+C_2 t+D_2+\lambda(\alpha_2 t^3+\beta_2 t^2+\gamma_2 t+\delta_2) \\ \theta &= A_3 t^3+B_3 t^2+C_3 t+D_3+\lambda(\alpha_3 t^3+\beta_3 t^2+\gamma_3 t+\delta_3) \end{aligned}\right.$$

les deux cubiques $x=0$, $y=0$ ont un point commun que nous supposons obtenu pour $t=0$; d'où

$$\frac{A}{0}=\frac{0}{\alpha_1}=\frac{A_2}{\alpha_2}=\frac{A_3}{\alpha_3}$$

on prendra donc

$$(2)\qquad A=0 \qquad \alpha_1=0 \qquad A_2=\rho\alpha_2 \qquad A_3=\rho\alpha_3$$

où ρ est une constante numérique: on pourra donc écrire:

$$(3)\quad \left|\begin{aligned} x &= Bt^2+Ct+D \\ y &= -\rho(\beta_1 t^2+\gamma_1 t+\delta_1)+(\lambda+\rho)(\beta_1 t^2+\gamma_1 t+\delta_1) \\ z &= (B_2-\rho\beta_2)t^2+(C_2-\rho\gamma_2)t+D_2-\rho\delta_2+ \\ &\qquad\qquad +(\lambda+\rho)(\alpha_2 t^3+\beta_2 t^2+\gamma_2 t+\delta_2) \\ \theta &= (B_3-\rho\beta_3)t^2+(C_3-\rho\gamma_3)t+D_3-\rho\delta_3+ \\ &\qquad\qquad +(\lambda+\rho)(\alpha_3 t^3+\beta_3 t^2+\gamma_3 t+\delta_3) \end{aligned}\right.$$

De la sorte on a établi une correspondance birationnelle entre l'une des cubiques primitives et une conique; une homographie de l'espace permet donc d'écrire plus simplement

$$(4)\quad \left|\begin{aligned} x &= Bt^2+Ct+D \\ y &= \qquad\qquad\qquad\qquad \lambda(\alpha_1 t^3+\beta_1 t^2+\gamma_1 t+\delta_1) \\ z &= B_2 t^2+C_2 t+D_2+\lambda(\alpha_2 t^3+\beta_2 t^2+\gamma_2 t+\delta_2) \\ \theta &= B_3 t^2+C_3 t+D_3+\lambda(\alpha_3 t^3+\beta_3 t^2+\gamma_3 t+\delta_3) \end{aligned}\right.$$

En écrivant que les génératrices t et T se rencontrent, on obtient

$$(5)\quad \begin{vmatrix} Bt^2+Ct+D & 0 \\ 0 & \alpha_1 t^3+\beta_1 t^2+\gamma_1 t+\delta_1 \\ B_2t^2+C_2t+D_2 & \alpha_2 t^3+\beta_2 t^2+\gamma_2 t+\delta_2 \\ B_3t^2+C_3t+D_3 & \alpha_3 t^2+\beta_3 t^2+\gamma_3 t+\delta_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} BT^2+CT+D & 0 \\ 0 & \alpha_1 T^3+\beta_1 T^2+\gamma_1 T+\delta_1 \\ B_2T^2+C_2T+D_2 & \alpha_2 T^3+\beta_2 T^2+\gamma_2 T+\delta_2 \\ B_3T^2+C_3T+D_3 & \alpha_3 T^3+\beta_3 T^2+\gamma_3 T+\delta_3 \end{vmatrix} = 0$$

équation de degré 5 en T, dont il faut supprimer la racine double $T=t$; c'est une vérification de nos résultats, il y a trois génératrices rencontrant la génératrice t

Cherchons les plans bitangents, par la méthode indiquée plus haut. Les deux équations

$$(6)\quad \begin{cases} (uB+wB_2+hB_3)t^2+(uC+wC_2+hC_3)t+uD+wD_2+hD_3=0 \\ (v\alpha_1+w\alpha_2+h\alpha_3)t^3+(v\beta_1+w\beta_2+h\beta_3)t^2+(v\gamma_1+w\gamma_2+h\gamma_3)t+ \\ \quad +v\delta_1+w\delta_2+h\delta_3=0 \end{cases}$$

doivent avoir deux racines communes en t; or, si la première est identique, il y a trois racines communes: cela donne le plan de la conique et les trois génératrices qu'il contient: c'est un plan exceptionnel *tritangent*; ce cas écarté, on doit écrire que la seconde équation (6) s'obtient en multipliant la première par $\mu t+\rho$, ce qui donne

$$(7)\quad \begin{cases} v\alpha_1+w\alpha_2+h\alpha_3=(uB+wB_2+hB_3)\mu \\ v\beta_1+w\beta_2+h\beta_3=(uC+wC_2+hC_3)\mu+(uB+wB_2+hB_3)\rho \\ v\gamma_1+w\gamma_2+h\gamma_3=(uD+wD_2+hD_3)\mu+(uC+wC_2+hC_3)\rho \\ v\delta_1+w\delta_2+h\delta_3= \qquad\qquad (uD+wD_2+hD_3)\rho \end{cases}$$

Quand ces équations sont satisfaites, le plan (u, v, w, h) fournit d'abord les génératrices obtenues en égalant à zéro la première équation (6), puis la cubique obtenue en écrivant $1+\lambda(\mu t+\rho)=0$. Ce calcul nous donne en appelant P_1, P_2, P_3, P_4, les quatre formes linéaires en v, w, h qui sont dans les premiers membres, et Q_1, Q_2, Q_3 les formes en u, w, h qui sont aux seconds

$$(8)\quad \left|\begin{array}{l} \mu = \dfrac{P_1}{Q_1} \qquad \rho = \dfrac{P_4}{Q_4} \\ P_2 Q_3 Q_1 = P_1 Q_2 Q_3 + Q_1^2 P_4 \\ P_3 Q_3 Q_1 = P_1 Q_3^2 + Q_1 Q_2 P_4 \end{array}\right.$$

On voit que la développable (u, v, w, h) des plans bitangents est, *en général*, de classe 6, car les deux dernières équations sont de degré 3 et on doit éliminer les droites

$$(9)\quad \left|\begin{array}{l} Q_1 = Q_3 = 0 \\ P_1 = Q_1 = 0 \\ P_4 = Q_3 = 0 \end{array}\right.$$

On remarquera que la première droite est dans un même plan avec la seconde ($P_1 = Q_1 = Q_3 = 0$), dans un même plan avec la troisième ($P_4 = Q_1 = Q_3 = 0$), mais les deux dernières ne sont pas dans un même plan. Au lieu de déterminer ainsi l'enveloppe des plans bitangents, on peut au contraire éliminer u, v, w, h entre les équations (7): on a ainsi:

$$(10)\quad \begin{vmatrix} B\mu & \alpha_2 & B_2\mu - \alpha_2 & B_3\mu - \alpha_3 \\ C\mu + B\rho & \beta_1 & C_2\mu + B_2\rho - \beta_2 & C_3\mu + B_3\rho - \beta_3 \\ D\mu + C\rho & \gamma_1 & D_2\mu + C_2\rho - \gamma_2 & D_3\mu + C_3\rho - \gamma_3 \\ D\rho & \delta_1 & D_2\rho - \delta_2 & D_3\rho - \delta_3 \end{vmatrix} = 0$$

C'est l'équation d'une cubique en (ρ, μ); en général, elle est de genre *un;* accidentellement ello peut devenir de genre zéro ou s' abaisser au degré 2; u, v; w; h sont exprimés rationnellement en (ρ, μ) et inversement de sorte que la développable des plans bitangents est en général de genre *un*; d'autre part nous savons qu'elle admet le plan tangent triple $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$; accidentellement la développable pourra être unicursale ou encore s'abaisser à la classe 5.

Les surfaces étudiées en ce moment sont de même espèce que leurs transformées par dualité, de sorte que nous devons avoir une ligne double, *sextique gauche de genre un, à point triple*; au point triple se croisent trois génératrices t', t'', t'''; quand on étudie la portion de ligne multiple correspondant à deux génératrices sécantes voisines l'une de t', l'autre de t'' on obtient l'une des branches passant au point triple de la sextique; les trois combinaisons (t', t''), (t', t''') (t'', t''') fournissent les trois arcs; le cône circonscrit à S du point commun à ces génératrices (t, t', t'') est du second degré et l'on peut dire que la surface est le lieu de la droite commune à deux plans dont l'un enveloppe un cône de degré 2, l'autre une développable de classe 3, les paramètres de ces plans se correspondant homographiquement. Du reste nous retrouvons ceci en développant le déterminant (5), supprimant le facteur $(T-t)^2$ et prenant pour variables $T+t=s$, $Tt=p$; le résultat obtenu, d'après la théorie des fonctions symétriques est une équation $f(s,p)=0$, du degré 3 par rapport à l'ensemble des deux variables s, p et le point d'intersection des deux génératrices T, t a ses coordonnées exprimées rationnellement en s, p; on a la sextique annoncée; onremarquera qu'à un point (s,p) de la cubique $f=0$, *supposée de genre 1*, correspond un point de la ligne double, et un unique plan bitangent, de sorte que la ligne double et la développable bitangente se correspondent comme de juste, birationnellement par dualité; de plus ce plan bitangent recoupe la ligne double en un point unique, non situé sur les génératrices t ou T, de sorte que la sextique double admet ainsi une transformation birationnelle en elle-même. La sextique double est obtenue par l'intersection de deux surfaces Σ, Σ', cubiques ayant en commun trois droites dont l'une rencontre les deux autres; Σ et Σ' doivent encore avoir une position relative propre à donner un point triple dans le reste de l'intersection; ce point triple est au croisement de deux de ces trois droites.

Si la cubique (10) en (ρ, μ), ou si la cubique $f(s,p)$ est unicursale, il en est de même de l'autre courbe, car les deux courbes se correspondent toujours birationnellement, mais alors la développable bitangente se décompose en une développable unicursale de degré 5 et une droite (double sur S, tangentiellement et ponctuellement) qui est une génératrice commune à deux nappes; la ligne double se décompose en une quintique unicursale et la droite déjà indiquée; la quintique a un point double où passe la génératrice double. En effet le cône ayant son sommet au point double et pour directrice la ligne double est de degré 3 et admet une génératrice double sur lui et double sur la surface réglée.

Je donne des exemples numériques simples des deux cas. Pour celui de la sextique

$$(11) \qquad \left|\begin{array}{l} x=t^2+\lambda t \\ y=\qquad \lambda(t^3-1) \\ z=t+\lambda t^3 \end{array}\right.$$

L'équation de la surface peut s'obtenir en éliminant λ d'abord, d'où deux équations en t

$$z = t + \frac{y\,t^3}{t^2-1} \qquad z - x = t - t^2 + t\,y$$

que l'on ramène aisément au degré 2 en t:

$$(12) \qquad \begin{cases} t^2[(1+y)^2 - z] + t[(x-z)(1+y) - 1] + z = 0 \\ t^2 - t(1+y) + z - x = 0 \end{cases}$$

L'équation de la surface

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\{[(1+y)^2 - z](z-x) - z\}^2 - \\ &- \{[z - (1+y)^2](1+y) + 1 + (z-x)(1+y)\} \times \\ &\times \{z(1+y) + x - z - (x-z)^2(1+y)\} = 0 \end{aligned}$$

est de degré 5, les termes de degré 5 étant

$$[z\,y^2 - x(z-x)^2]\,y^2$$

La courbe double a pour équations

$$(14) \qquad \frac{(\theta+y)^2 - z\,\theta}{\theta} = \frac{(\theta+y)(z-x) + \theta^2}{\theta+y} = \frac{z\,\theta}{z-x}$$

On a deux surfaces cubiques

$$(15) \qquad \begin{cases} [(\theta+y)^2 - z\,\theta]\,[z-x] - z\,\theta^2 = 0 \\ (\theta+y)(z-x)^2 + \theta^2(z-x) - z\,\theta(\theta+y) = 0 \end{cases}$$

ayant en commun la partie parasite

$$(16) \qquad z = x = 0; \qquad z - x = 0,\ \theta = 0; \qquad \theta = y = 0$$

composée de trois droites, dont la seconde rencontre les deux autres. On a aisément au moyen d'un paramètre les coordonnées d'un point double x, y, z; en effet t_1 et t_2 étant les valeurs de t donnant les deux génératrices correspondantes, on a, en posant $t_1 + t_2 = s$, $t_1\,t_2 = p$, d'après (12), en tenant compte d'abord de la seconde

$$(17) \qquad z - x = p \qquad y = s - 1$$

puis, d'après la première

$$(18) \qquad \frac{s^2 - z}{1} = \frac{p\,s + 1}{s} = \frac{z}{p} = \frac{s^2}{1+p}$$

On a donc les formules définitives

$$(19)\quad \left|\begin{array}{l} z=\dfrac{ps^2}{1+p} \qquad z-x=p \qquad y=s-1 \\ s^3=(1+p)(1+ps) \quad \text{ou} \quad p^2s+(1+s)p+1-s^3=0 \end{array}\right.$$

qui montrent que la courbe gauche est de genre 1, degré 6, correspondant birationnellement à la cubique plane (s, p); on a en effet

$$(20)\qquad p=\frac{-(1+s)+\sqrt{(1-s)^2+4s^4}}{2s}.$$

Pour $s=0$, p a deux déterminations, $\dfrac{-(1+s)\pm(1-s+2s^4+\ldots)}{2s}$ qui donnent pour l'une $p=-1+s^3+\ldots$, pour l'autre $p=-\dfrac{1}{s}-s^3+\ldots$; $s=\infty$ est la seule valeur de s, autre que zéro, rendant p infini; on a en posant $s=\dfrac{1}{s'}$, pour s' petit,

$$p=\frac{1}{s'}-\frac{1}{2}-\frac{3s'}{8}\ldots \quad \text{ou} \quad p=-\frac{1}{s'}-\frac{1}{2}-\frac{5s'}{8}\ldots$$

De la sorte, si on substitue les valeurs, (19) de x, y, z dans le premier membre de l'équation du plan

$$(21)\qquad A(z-x)+By+Cz+D\theta=0$$

on trouve

$$(22)\qquad Ap(1+p)+B(s-1)(1+p)+Cps^2+D(1+p)$$

Cette expression (22) a, pour $s=0$, un pôle double et pour s infini deux pôles triples; elle a donc exactement *huit* zéros; mais il faut supprimer le zéro double parasite $s=0$, $p=-1+s^3+\ldots$ de sorte que nous avons bien vérifié que le degré est 6, le genre 1; pour C nul, nous avons l'équations

$$Ap+B(s-1)+D=0$$

dont le premier membre n'a plus que trois pôles et trois zéros, de sorte que le point à l'infini ($z=x$, $y=0$, $\theta=0$) est bien un point triple de la courbe; en effet nous constatous que la section de la surface par le plan $y=0$ donne, soit $\lambda=0$, soit $t=\pm 1$. Pour $\lambda=0$, on a sur la surface la parabole (P) $x=z^2$; pour $t=+1$, la génératrice $x=z$ qui perce P au point (0, 0, 0) de la courbe double ($p=0$, $s=1$) et au point simple (1, 0, 1) où le plan est tangent; pour $t=-1$, on a la génératrice $y=0$, $z=x-2$, qui perce P au nouveau point simple de contact du plan, $(1, 0, -1)$ et au point double $(4, 0, 2)$ obtenu pour $s = 1$, $p = -2$; l'intersection du plan $y = 0$ avec la surface se complète par la droite à l'infini de ce plan, comme on le voit en écrivant $t = \frac{1}{t'}$, $\lambda t = \lambda'$, d'où sur la surface les coordonnées homogènes

$$1 + \lambda' t'^2, \quad \lambda' t'(1 - t'^2), \quad t' + \lambda'; \quad t'^2$$

Pour $t' = 0$ on trouve la droite annoncée $(1, 0, \lambda', 0)$. Le point triple est donc obtenu pour

$$s = 0,\ p = -1 + \ldots; \quad s = \infty,\ p = \frac{1}{s'} - \frac{1}{2} \ldots; \quad s = \infty,\ p = -\frac{1}{s'} + \ldots$$

Pour la première branche, la tangente est à distance finie; pour les deux autres elles sont dans le plan de l'infini. On remarque que les coordonnées plückériennes de la génératrice sont

$$(23) \qquad t, \quad t^2 - 1, \quad t^3, \quad -t(t^2 - 1), \quad t^2 - t^5, \quad t^2(t^3 - 1)$$

de sorte que l'on a

$$(24) \qquad a - c - l = 0$$

équation d'un complexe linéaire non spécial, par rapport auquel la surface est évidemment sa propre réciproque; le plan des deux génératrices concourantes est le plan polaire du point double (s, p); le plan polaire de $(x_0, y_0, z_0, 1)$ est le plan $[1, z_0, -(y_0 + 1), z_0 - x_0]$

$$(25) \qquad X - Z + z_0 - x_0 - (y_0 Z - z_0 Y) = 0$$

on trouve donc le plan bitangent

$$(25') \qquad (1 + p) X + p s^2 Y - s(1 + p) Z + p(1 + p) = 0$$

La section de la surface par ce plan est donnée par la relation

$$(26) \qquad \begin{aligned} &[(1 + p) t^2 - s(1 + p) t + p(1 + p)] + \lambda[(1 + p) t + \\ &\qquad + p s^2 (t^3 - 1) - s(1 + p) t^3] = 0 \end{aligned}$$

qui se décompose en deux facteurs

$$(27) \qquad t^2 - st + p = 0$$

$$(28) \qquad (1 + p) - \lambda[(1 + p) s t + s^2] = 0$$

Le premier donne bien les génératrices t_1 et t_2; le second donne une cubique plane; remplaçant dans (11), λ par la valeur tirée de (28) on obtient les expressions unicursales en t de cette cubique;

le point double s'obtient sans difficulté : si on pose, pour ce point, $t' + t'' = s_1$ et $t' t'' = p_1$, on a aisément

$$(29) \qquad p_1 = \frac{s^2 - s - (1+p)^2}{(1+p)^2 - s^2} \qquad s_1 = \frac{1+p}{(1+p)^2 - s^2}$$

Ces formules réalisent la correspondance annoncée sur la sextique double (dans le cas particulier choisi, cette correspondance est involutive).

Soit maintenant l'exemple de la quintique gauche unicursale: il est fourni par la surface

$$(30) \qquad x = t^2 \qquad y = t + \lambda(t+1) \qquad z = 1 + \lambda t^2 \qquad \theta = \lambda t^3$$

En remplaçant λt par $\dfrac{\theta}{x}$, on voit qu'il faut éliminer t entre les équations

$$(31) \qquad \left| \begin{array}{l} t^2\left(\dfrac{\theta}{z} - \dfrac{x}{y}\right) + t\left(\dfrac{x}{z} - \dfrac{\theta}{y}\right) - \dfrac{\theta}{y} = 0 \\ t^2 \qquad\qquad - t\dfrac{\theta}{z} \qquad\qquad - \dfrac{x}{z} = 0 \end{array} \right.$$

On obtient l'équation

$$(32) \qquad \begin{gathered} (\theta z + x^2)^2 z - 2x\theta y(\theta z + x^2) = \theta^2(x-\theta)z^2 + \\ + z\theta x(2\theta x + \theta y - xy - \theta^2) - \theta^3 y(x-\theta) - (\theta - y)x^3 y \end{gathered}$$

qui montre que $\theta = x = 0$ est génératrice de rebroussement, le plan tangent tout du long étant le plan $\theta = 0$: la section de la surface par ce plan est la conique $(t^2, t, 1, 0)$ obtenue pour $\lambda = 0$ et la droite $x = \theta = 0$ obtenue pour $t^3 = 0$.

La ligne double est déterminée par les équations

$$(33) \qquad \frac{\theta y - xz}{z} = \frac{\theta z - xy}{\theta} = \frac{\theta z}{x}$$

On peut la considérer comme intersection des surfaces cubiques

$$(34) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \theta xy - x^2 z - \theta z^2 = 0 \\ \theta xz - x^2 y - \theta^2 z = 0 \end{array} \right.$$

qui ont en plus en commun les droites parasites $x = 0$, $z = 0$ comptant pour une unité; $y = 0$, $z = 0$ aussi, puis $x = 0$, $\theta = 0$ comptant pour deux; la première rencontre les deux dernières; en éliminant y qui figure au premier degré dans les équations (34) on a aussitôt pour la quintique unicursale les expressions paramétriques

(35) $$y = \frac{(x-1-x^3)(x-1)}{x^3} \quad \frac{x-1-x^3}{x}$$

(en faisant $\theta = 1$). On peut écrire les équations paramétriques de la courbe

(36) $$\begin{cases} X = x^4\theta & Y = (x\theta^2 - \theta^3 - x^3)(x-\theta)\theta \\ Z = (x\theta^2 - \theta^3 - x^3)x^2 & T = x^3\theta^2 \end{cases}$$

Pour $x = 0$ on a le point $(0, \theta^5, 0, 0)$ à l'infini sur Oy; pour $\theta = 0$, le point $(0, 0, -x^5, 0)$ à l'infini sur Oz; on voit aussitôt que le point à l'infini sur Oy est de rebroussement, la tangente de rebroussement étant $x = 0$, $\theta = 0$, génératrice double de rebroussement de la surface. Dans cet exemple les coordonnées plückériennes de la génératrice sont

(37) $$t^5, \quad t^4, \quad t^3, \quad t+1-t^3, \quad t^4, \quad -t^2(t+1)$$

de sorte que les génératrices appartiennent au complexe linéaire non spécial

(38) $$b - m = 0$$

On en déduit aussitôt que la surface se transforme en elle-même par dualité relativement à ce complexe; les plans bitangents s'obtiennent comme plan polaire du point défini par (35); on trouve ainsi comme homologue d'un point $(x, y, z, 1)$ le plan $(z, -1, -x, y)$.

13. — Surfaces de degré 5, de genre 1, ayant des points doubles et des plans tangents triples.

Nous revenons aux surfaces du paragraphe 10, en supposant $3(\omega_1 - \omega_0)$ période de $p u$. On a le droit de supposer $\omega_1 = \omega_0$; car, si cela n'a pas lieu, on a $\omega_1 = \omega_0 + \frac{2K}{3}$ où K est une certaine période de $p u$; nous remarquerons que

(1) $$a p(\omega+\omega_1) + \beta p'(\omega+\omega_1) + \gamma$$

a trois zéros dont la somme $-3\omega_1$ est congrue à $3\omega_0$; on peut donc trouver une expression

(2) $$\bar{a} p(\omega+\omega_0) + \bar{\beta} p'(\omega+\omega_0) + \bar{\gamma}$$

ayant les mêmes zéros que (1): le quotient

(3) $$\frac{a p(\omega+\omega_1) + \beta p'(\omega+\omega_1) + \gamma}{\bar{a} p(\omega+\omega_0) + \bar{\beta} p'(\omega+\omega_0) + \bar{\gamma}}$$

est une fonction elliptique ayant le zéro triple $\omega = -\omega_0$ et le pôle triple $\omega = -\omega_1$; appelons la: $\phi(\omega)$; si on forme l'expression

$$(4) \qquad \frac{[a_1 p(\omega+\omega_1) + \beta_1 p'(\omega+\omega_1) + \gamma_1]\,[\bar{a} p(\omega+\omega_0) + \bar{\beta} p'(\omega+\omega_0) + \bar{\gamma}]}{a p(\omega+\omega_1) + \beta p'(\omega+\omega_1) + \gamma}$$

on constate qu'elle n'a que le pôle triple $\omega = -\omega_0$ et que les zéros de $a_1 p(\omega+\omega_1) + \beta_1 p'(\omega+\omega_1) + \gamma_1$: on peut donc la représenter par

$$(5) \qquad \bar{a}_1 p(\omega+\omega_0) + \bar{\beta}_1 p'(\omega+\omega_0) + \bar{\gamma}_1$$

Autrement dit on détermine ainsi des coefficients nouveaux tels que

$$(6) \quad \left| \begin{aligned} \phi(\omega) &\equiv \frac{a p(\omega+\omega_1) + \beta p'(\omega+\omega_1) + \gamma}{\bar{a} p(\omega+\omega_0) + \bar{\beta} p'(\omega+\omega_0) + \bar{\gamma}} \equiv \\ &\equiv \frac{a_1 p(\omega+\omega_1) + \beta_1 p'(\omega+\omega_1) + \gamma_1}{\bar{a}_1 p(\omega+\omega_0) + \bar{\beta}_1 p'(\omega+\omega_0) + \bar{\gamma}_1} \\ &\equiv \frac{a_2 p(\omega+\omega_1) + \ldots}{\bar{a}_2 p(\omega+\omega_0) + \ldots} \equiv \frac{a_3 p(\omega+\omega_1) + \ldots}{\bar{a}_3 p(\omega+\omega_0) + \ldots} \end{aligned} \right.$$

On peut donc remplacer les formules paramétriques (1) du paragraphe 10, dans notre cas particulier. par

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= Ap(\omega+\omega_0) + Bp'(\omega+\omega_0) + C + \bar{\lambda}[\bar{a}p(\omega+\omega_0) + \bar{\beta}p'(\omega+\omega_0) + \bar{\gamma}] \\ y &= \ldots \\ z &= \ldots \\ t &= \ldots \end{aligned} \right.$$

où $\bar{\lambda}$ remplace $\lambda\phi(\omega)$ et peut être pris comme paramètre. Cela revient à garder les formules (1) du numéro 10, en supposant $\omega_1 = \omega_0$. Au fond, la propriété analytique employée revient à cette propriété géométrique: si trois points A, B, C, d'une cubique sont en ligne droite, joignons les à un point d'inflexion I; les droites IA, IB, IC percent la cubique en A'. B', C' qui sont en ligne droite. Nous avons donc les formules

$$(8) \quad \left| \begin{aligned} &x = Ap(\omega+\omega_0) + Bp'(\omega+\omega_0) + C + \lambda[ap(\omega+\omega_0) + \beta p'(\omega+\omega_0) + \gamma] \\ &y = \ldots \qquad z = \ldots \qquad t = \ldots \end{aligned} \right.$$

N'oublions pas que l'on a

$$(9) \quad \begin{aligned} &\frac{A p(\omega_0) + B p'(\omega_0) + C}{a p(\omega_0) + \beta p'(\omega_0) + \gamma} = \frac{A_1 p(\omega_0) + B_1 p'(\omega_0) + C_1}{a_1 p(\omega_0) + \beta_1 p'(\omega_0) + \gamma_1} = \\ &\frac{A_2 p(\omega_0) + \ldots}{a_2 p(\omega_0) + \ldots} + \frac{A_3 p(\omega_0) + \ldots}{a_3 p(\omega_0) + \ldots} \end{aligned}$$

Cette fois, toutes les courbes $\lambda = const.$ sont des cubiques ayant en commun le point $\omega = 0$. On peut simplifier les formules (8): appelons ρ la constante, valeur commune des rapports (9), et ajoutons à x les deux quantités qui se détruisent

$$-\rho a p(\omega + \omega_0) - \rho \beta p'(\omega + \omega_0) - \rho\gamma$$

et

$$\rho a p(\omega + \omega_0) + \rho \beta p'(\omega + \omega_0) + \rho\gamma$$

Remplaçons $C - \rho\gamma$ par $(\rho a - A) p(\omega_0) + (\rho\beta - B) p'(\omega_0)$ et on a, sans avoir désormais à tenir compte d'équations telles que (9), puisque l'on vient de les utiliser,

$$x = (A - \rho a)[p(\omega + \omega_0) - p(\omega_0)] + (B - \rho\beta)[p'(\omega + \omega_0) - p'(\omega_0)]$$
$$+ (\lambda + \rho)[a p(\omega + \omega_0) + \beta p'(\omega + \omega_0) + \gamma]$$

et quantités analogues pour y, z, t; *un changement de notations* évident conduit aux formules plus simples

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} x = A[p(\omega + \omega_0) - p(\omega_0)] + B[p'(\omega + \omega_0) - p'(\omega_0)] + \\ \qquad + \lambda[a\{p(\omega + \omega_0) - p(\omega_0)\} + \beta\{p'(\omega + \omega_0) - p'(p'(\omega_0)\} + \gamma] \\ y = A_1[p(\omega + \omega_0) - p(\omega_0)] + B_1[p'(\omega + \omega_0) - p'(\omega_0)] + \lambda[a_1 \ldots] \\ z = A_2[p(\omega + \omega_0) - p(\omega_0)] + B_2[p'(\omega + \omega_0) - p'(\omega_0)] + \lambda[a_2 \ldots \\ t = A_3[p(\omega + \omega_0) - p(\omega_0)] + B_3[p'(\omega + \omega_0) - p'(\omega_0)] + \lambda[a_3 \ldots \end{array}\right.$$

La cubique $\lambda = 0$ se réduit à une droite Δ en représentation impropre; la droite Δ joint les points $A(A, A_1, A_2, A_3)$ et $B(B, B_1, B_2, B_3)$. On pourrait croire que $\omega = 0$ conduit au seul point $C(\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$; mais chaque valeur de ω donne une génératrice; or, en réalité, on ne change pas la surface si on écrit, sans changer les coefficients

$$x = A\left\{\frac{p(\omega + \omega_0) - p(\omega_0)}{\omega}\right\} + B\left\{\frac{p'(\omega + \omega_0) - p'(\omega_0)}{\omega}\right\}$$
$$+ \lambda[a\{p(\omega + \omega_0) - p(\omega_0)\} + \beta\{p'(\omega + \omega_0) - p'(\omega_0)\} + \gamma]$$
$$y = \ldots \qquad z = \ldots \qquad t = \ldots$$

Sous cette forme on voit que $\omega = 0$ donne la droite joignant le point C au point

$$D[A p'(\omega_0) + B p''(\omega_0);\ A_1 p'(\omega_0) + B_1 p''(\omega_0);\ A_2 p'(\omega_0) + B_2 p''(\omega_0);$$
$$A_3 p'(\omega_0) + B_3 p''(\omega_0)]$$

Ce point D est sur la droite Δ

Chaque génératrice $\omega = c^{te}$ rencontre la droite Δ, le point de rencontre s'obtenant pour $\lambda = 0$. Appliquons notre méthode pour avoir les plans plusieurs fois (ou même une fois) tangents. Les équations

$$(11)\quad \begin{aligned} &(uA + vA_1 + wA_2 + hA_3)\,[p(\omega + \omega_0) - p(\omega_0)] + \\ &(uB + vB_1 + wB_2 + hB_3)\,[p'(\omega + \omega_0) - p'(\omega_0)] = 0 \end{aligned}$$

$$(12)\quad \begin{aligned} &(u\alpha + v\alpha_1 + w\alpha_2 + h\alpha_3)\,[p(\omega + \omega_0) - p(\omega_0)] + \\ &+ (u\beta + v\beta_1 + w\beta_2 + h\beta_3)\,[p'(\omega + \omega_0) - p'(\omega_0)] + \\ &+ u\gamma + v\gamma_1 + w\gamma_2 + h\gamma_3 = 0 \end{aligned}$$

ont autant de solutions communes que de génératrices contenues dans le plan. Si le plan contient la droite Δ, la première équation (11), est identique de sorte que les trois racines de (12) fournissent les *trois génératrices* suivant lesquelles le plan coupe surface S, en dehors de Δ, *qui est droite exceptionnelle double*: en effet, quel que soit la constante m, l'équation

$$m\,[p(\omega + \omega_0) - p(\omega_0)] + [p'(\omega + \omega_0) - p'(\omega_0)] = 0$$

a deux racines *variables*, vérifiant la relation,

$$(13)\qquad \omega' + \omega'' = -3\,\omega_0$$

fournissant le même point de Δ; chaque génératrice $\omega = \omega'$, $\omega = \omega''$ part de ce point de Δ. Les paramètres Ω_1, Ω_2, Ω_3 des génératrices contenues dans un même plan avec Δ satisfont à la relation

$$(14)\qquad \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = -3\,\omega_0$$

(On suppose que le point C n'est pas sur Δ, sinon la surface s'abaisserait au degré quatre, avec Δ comme droite exceptionnelle double). Supposons maintenant que le plan P ne contienne pas Δ: alors l'équation (11) fournit les deux valeurs ω', ω'', liées par (13) correspondant au point où le plan P perce Δ; les racines de (12) donnent les points où P perce la cubique obtenue pour $\lambda = \infty$, elles sont liées par (14): on veut obtenir $\Omega_1 = \omega'$, $\Omega_2 = \omega''$; donc on doit avoir $\Omega_3 = 0$ et le plan passera par le point C, d'où première relation

$$(15)\qquad u\gamma + v\gamma_1' + w\gamma_2 + h\gamma_3 = 0$$

et ensuite $\Omega_1 = \omega'$, $\Omega_2 = \omega''$ fournit

$$(16)\quad \begin{aligned} &(uA + vA_1 + wA_2 + hA_3)\,(u\beta + v\beta_1 + w\beta_2 + h\beta_3) - \\ &-(uB + vB_1 + wB_2 + hB_3)\,(u\alpha + v\alpha_1 + w\alpha_2 + h\alpha_3) = 0 \end{aligned}$$

On obtient donc une série de plans bitangents enveloppant un cône du second degré Γ ayant son sommet en C. Le plan Δ, C est manifestement un plan tangent à ce cône Γ: ce plan rentre dans la catégorie des plans bitangents; il donne la génératrice CD et deux autres se coupant en un point de Δ. Le cône circonscrit de C à la surface S comprend d'abord la droite CD (prise tangentiellement comme développable de classe 1), puis le cône Γ compté deux fois: quand un point M décrit Δ, les deux génératrices, issues sur S de M, donnent un plan tangent à Γ, les points de contact de ce plan avec S sont sur la génératrice de contact du plan et Γ et c'est ce qui explique que le cône Γ doit être compté deux fois. On remarquera que $\omega' = \omega''$ fournit $\omega' = -\frac{3\omega_0}{2} + \frac{1}{2}$ période, donc 4 valeurs de ω' et à chacune correspond une génératrice stationnaire.

Chaque section plane est du genre 1; donc elle possède cinq points doubles *exactement* (pour les plans bitangents on a deux génératrices et une cubique de genre 1, sans point double); en dehors de Δ, on trouve donc une courbe gauche de degré 4; dans chaque plan pivotant autour de Δ, il n'y a que 3 points doubles hors de Δ donc la courbe a nécessairement un point commun avec Δ. Or on constate directement que la donnée d'une droite Δ et d'une biquadratique gauche (B) ayant un point commun détermine une surface S de degré 5 ayant ces deux lignes Δ et (B) pour lignes doubles; il y a identité avec ce qui précède; la surface S peut être considérée comme lieu des sécantes triples du système $\Delta\ (B)$, en excluant les cordes de (B) issues du point commun à Δ et (B). Une biquadratique (B) dépend de 16 paramètres; une droite Δ la rencontrant dépend de 3 paramètres; on trouve ainsi 19 paramètres pour déterminer S: c'est bien ce que l'on a trouvé (20 quand la quintique double de S ne se décompose pas, cas étudié au paragraphe 10; 19 ici à cause de la relation $\omega_0 = \omega_1$).

La vérification analytique des propriétés indiquées se fait sans difficulté, sans se servir des fonctions elliptiques, en prenant Δ pour axe des z, puis la tangente à (B), au point commun avec Δ, comme axe des x; le plan Ozx coupe (B) en O d'abord comptant pour 2, puis en O_1 et O_2; ce plan xOz est celui qui rentre dans la catégorie des plans bitangents ou tritangents: OO_1, OO_2 sont deux génératrices se croisant sur Δ, et O_1O_2 est celle qui passe au sommet C du cône trouvé plus haut, enveloppe des plans bitangents; le plan zOx se trouve tangent en O à la nappe contenant OO_1 et aussi à la nappe contenant OO_2, de sorte que CO est génératrice du cône C.

La développable des plans bitangents à (B) perce Δ aux quatre points (autres que O) qui donnent les génératrices stationnaires.

Par dualité, les surfaces étudiées ici donneront les surfaces du cinquième degré ayant une droite exceptionnelle, lieu de points triples, enveloppe de plans bitangents, que nous signalerons plus bas. Un cas de dégénérescence est celui où la biquadratique a un point double, sans que la droite Δ y passe; la surface est alors unicursale et, ce cas s' obtient en reprenant les formules (4) du numéro 12 et supposant $C = C_2 = C_3 = 0$ de sorte que la conique mise en évidence soit une droite en représentation impropre.

14. — Surfaces de degré 5 à points doubles et à plans quadritangents.

Nous continuons l'étude des surfaces de degré 5 telles que dans chaque plan simplement tangent la quartique C perce G en 3 points distincts; la surface n'a comme points singuliers que des points multiples d'ordre 2; le cas où elle n'admet, comme plans tangents singuliers, que des plans bitangents a été étudié; quand il y a des plans tritangents formant une série continue, aucun d'eux ne peut couper la surface suivant une conique véritable, car, si l'on établit entre deux coniques une correspondance homographique, la droite qui joint les points homologues engendre la surface de Clebsch de degré 4 (ou une dégénérescence); donc chacun donne une droite double, la même pour tous et nous retrouvons les surfaces étudiées au numéro précédent. Il peut y avoir des plans quadritangents: ils pivotent autour d'une droite exceptionnelle simple (ponctuellement), mais quadruple tangentiellement, de sorte qu'il est plus commode d'étudier les surfaces réciproques, qui ont une droite exceptionnelle lieu de points quadruples et enveloppe de plans simplement tangents; on voit donc que toutes ces surfaces sont unicursales. On arrive, directement, au résultat, en remarquant que tout plan monotangent coupe la surface suivant une quartique unicursale qui correspond birationnellement à la droite exceptionnelle simple. On peut donc écrire les équations paramétriques de la surface sous la forme

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l} x = A_1 t^4 + B t^3 + C t^2 + D t + E \\ y = A_1 t^4 + B_1 t^3 + C_1 t^2 + D_1 t + E_1 \\ z = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \lambda t \\ \theta = A_2 t^4 + B_2 t^3 + C_2 t^2 + D_2 t + E_2 + \lambda \end{array}\right.$$

où λ et t sont les deux paramètres; l'axe Oz est la droite exceptionnelle et l'on a supposé que xOy le plan monotangent choisi; la courbe lieu des points multiples est de degré $6+h$, h étant le nombre des points où la courbe rencontre la droite exceptionnelle: or h est nul, car à chaque point de Oz correspond un seul point de la quartique et chaque point de Oz est simple, *sans exception.* Du reste la ligne double est déterminée par les équations aux inconnues λ, t, λ'. t'

$$(2)\qquad \frac{At^4+Bt^3+Ct^2+Dt+E}{At'^4+Bt'^3+Ct'^2+Dt'+E}=\frac{A_1t^4+\ldots}{A_1t'^4+\ldots}=\frac{\lambda t}{\lambda' t'}=\frac{A_2t^4+\ldots \qquad +E_2+\lambda}{A_2t'^4+\ldots \qquad +E_2+\lambda'}$$

Le premier rapport fournit la relation nécessaire et suffisante entre t et t'; le troisième rapport et le dernier, égalés au premier, fournissent, pour chaque couple (t, t') les valeurs de λ et λ'. En posant $t+t'=s$, $tt'=p$, la relation entre t et t', débarrassée du facteur $t-t'$ prend la forme $f(s,p)=0$, où f est une cubique en (s, p). Les coordonnées x, y, z, θ s'expriment rationnellement en s, p, de sorte que la courbe double Γ de la surface S étudiée est bien de degré 6, genre un; les sécantes triples de Γ donnant une surface S de degré 5, il est nécessaire, comme on l'a vu au paragraphe 11, que Γ ait des points multiples. Ces points se réduisent nécessairement à un point ω triple de Γ, point triple de S. où se croisent trois génératrices, g_1, g_2, g_3. On remarquera que le cône de sommet ω ayant Γ pour directrice est de degré 3 (au lieu du degré 5 pour un point quelconque ω' pris sur Γ) et n'a pas de génératrice double (tandis que le cône de sommet ω' et directrice Γ admet, hors de $\omega\omega'$, deux génératrices doubles); quand ω' tend vers ω sur l'une des branches, le cône correspondant peut être regardé comme toujours de degré 5, à condition de lui adjoindre les plans passant par la tangente ωt à la branche suivie et l'une ou l'autre des deux tangentes complémentaires $\omega t'$, $\omega t''$; mais alors le plan $\omega tt'$ (ou $\omega tt''$) coupe le cône C de sommet ω suivant une génératrice $\omega g''$ (ou $\omega g'$) qui doit être considérée comme limite d'une génératrice double du cône de sommet ω'; on a ainsi, en utilisant successivement chaque branche de la ligne triple, trois droites ωg, $\omega g'$, $\omega g''$ qui sont des limites de sécantes triples et sont génératrices de S; le cône C est de degré 3, de sorte que si on le coupe par un plan, on obtient une cubique γ et sur cette cubique γ les points t, t', t'', g, g', g'' correspondant aux droites $\omega t, \omega t', \ldots \omega g''$: les trois points g, g', g'' sont en ligne droite, ainsi que $(t' t'' g)$; $(t'' t g')$; $t t' g'')$; on en déduit aisément que les sommets opposés du quadrilatère complet ainsi obtenu (t, g), (t', g'), (t'', g'') sont cotangentiels sur la cubique γ. Le cône circonscrit à la surface S de ω comprend d'abord chaque droite $\omega g, \omega g', \omega g''$ (prise tangentiellement) puis un cône du second degré dont un plan tangent particulier est déterminé par ω et la droite exceptionnelle. Je signale le problème de géométrie intéressant auquel peut se ramener la recherche de ω; il doit exister trois valeurs du paramètre t, soient t', t'', t''' tels que les trois. génératrices correspondantes concourent au même point; or, en posant

$$(3) \qquad \left| \begin{array}{ll} t'' + t''' = s_1 & t'' t''' = p_1 \\ t''' + t' = s_2 & t''' t' = p_2 \\ t' + t'' = s_3 & t' t'' = p_3 \end{array} \right.$$

on a, avec la cubique $C_3, f(s, p) = 0$ les relations

$$(4) \qquad f(s_1, p_1) = 0 \qquad f(s_2, p_2) = 0 \qquad f(s_3, p_2) = 0$$

qui expriment que le triangle (s_1, p_1), (s_2, p_2), (s_3, p_3) est inscrit dans la cubique C_3; ensuite les deux équations

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} t^2 - s_2 t + p_2 = 0 \\ t^2 - s_3 t + p_3 = 0 \end{array} \right.$$

ont une racine commune t', donc on a

$$(6) \qquad (p_3 - p_2)^2 - (s_3 - s_2)(s_2 p_3 - s_3 p_2) = 0$$

relation qui exprime que la droite (s_2, p_2), (s_3, p_3) est tangente à la conique d'équation tangentielle $u^2 - vw = 0$, (l'équation des droites du plan s, p étant $us + vp + w = 0$). On est donc ramené à trouver un triangle inscrit dans une cubique et circonscrit à une conique.

15. — Surfaces de degré 5 ayant une droite triple et une conique double.

Nous avons épuisé tous les cas où sur chaque génératrice de S les trois points P_1, P_2, P_3 sont distincts. Supposons maintenant deux de ces points confondus, formant un point double de la quartique C. La surface S a une ligne triple; on voit immédiatement qu'une surface de degré 5 ne peut avoir une conique triple, ni deux droites triples non sécantes; la ligne triple est une droite Δ lieu des points P_1, P_2 confondus: le point P_3 engendre une certaine courbe double; par un point P_3 passent deux génératrices, dont le plan contient la droite Δ et épuise ainsi toute la section de S; donc le lieu de P_3 est une courbe rencontrée en un point par tout plan issu de Δ; si cette courbe est une droite Δ_1, ne rencontrant pas Δ, appelons x et x_1 les abscisses sur Δ et Δ_1 des pieds d'une génératrice: on aura une relation algébrique $f(x, x_1) = 0$ de degré 2 en x et 3 en x_1; Δ est triple ponctuellement, double tangentiellement; c'est l'inverse pour Δ_1; la surface se correspond à elle-même par dualité. Pour avoir le genre, écrivons la relation entre x et x_1

(1) $$x^2 P - 2xQ + R = 0$$

P, Q, R étant polynômes de degré 3 en x_1; on a

$$x = \frac{Q + \sqrt{Q^2 - PR}}{P}$$

$Q^2 - PR$ ne peut être carré parfait, sinon ont trouverait la réunion d'une surface cubique et d'une quadrique; donc si $Q^2 - PR$ n'a aucune racine multiple, on a une surface de genre 2; les racines de $Q^2 - PR$ donnent 6 génératrices stationnaires, pour lesquelles le plan tangent contient Δ et il y a de même 8 génératrices stationnaires pour lesquelles le plan tangent contient Δ_1, obtenues en exprimant que (1) a une racine double en x_1. Si $Q^2 - PR$ a une racine double, la courbe $f(x, x_1) = 0$ a un point double, la surface est de genre 1, parce qu'elle admet une génératrice double (qui a diminué de deux unités le nombre des génératrices stationnaires des 2 catégories); si $Q^2 - PR$ a une racine triple, on a une génératrice double avec deux plants tangents confondus en chaque point; la surface devient de genre zéro soit si $Q^2 - PR$ a deux racines doubles (deux génératrices doubles), soit si $Q^2 - PR$ a une racine double et une racine triple, soit si $Q^2 - PR$ a une racine qnadruple ou une racine quintuple: la racine quadruple donne une génératrice unique double, possédant la particularité qu'en chaque point il y a deux nappes régulières ayant le même plan tangent; la racine quintuple donne nne génératrice telle que toute section plane présente, sur cette génératrice, un point de rebroussement de seconde espèce; on a un exemple simple de ce type en prenant la relation

$$(1 - x_1^3)\, x^2 - 2xx_1 + x_1^2 = 0$$

Si la ligne double lieu de P_3 est une conique C_2, cette conique rencontre Δ en un point et nous avons le cas corrélatif des surfaces étudiées au n° 13. Ici de chaque point de Δ partent 3 génératrices et le plan de deux quelconques enveloppe une développable de classe 4. genre 1, Δ étant tangente à cette développable; le plan de la conique C_2 coupe S suivant une génératrice issue du point commun à Δ et C_2; du point commun à C_2 et Δ partent: d'abord la génératrice située dans le plan de C_2, puis, deux génératrices situées dans le plan contenant Δ et la tangente en ce point à C_2. Or on peut encore définir un point de Δ par son abscisse x, un point de C_2 par son paramètre unicursal x_1; on a encore une relation $f(x, x_1) = 0$, algébrique, de degré 2 en x, 3 en x_1; pour le point x^0 où Δ rencontre C_2, on doit avoir deux valeurs de x_1 égales à x_1^0, paramètre de ce point commun sur C_2; de même pour $x_1 = x_1^0$, on doit avoir deux valeurs de x égales à x^0; donc le point $x = x^0$, $x_1 = x_1^0$ est un point double de la relation $f(x, x_1) = 0$: cela confirme bien notre résultat que la surface S est de genre un, en général; si la relation $f(x, x_1) = 0$ a un autre point double, on aura une surface unicursale, avec une génératrice double complémentaire. On trouverait sans peine les génératrices stationnaires, comme dans l'exemple qui précède.

L'analogie des résultats montre comment on peut faire correspondre birationnellement deux surfaces réglées, l'une ayant une droite exceptionnelle Δ triple et une droite Δ double exceptionnelle, de *genre un*, et une surface réglée ayant une droite Δ triple et une conique C_2 double; toutes deux sont représentées à un certain point de vue par la même relation $f(x, x_1) = 0$, interprétée différemment.

16. — Surfaces de degré 5, ayant une droite exceptionnelle de raccord.

Sur chaque génératrice G, en supposant encore P_1 et P_2 confondus, il peut arriver que cette coïncidence tienne à ce que G et la section plane C sont tangentes: il y a une ligne de raccord, ligne double de la surface et le point P_3 engendre une autre ligne double. Toute section plane présente, au point où elle perce la ligne de raccord un point double comptant pour deux: comme le nombre maximum des points doubles est 6, on voit que la ligne de raccord ne peut être qu'une droite ou qu'une conique. Envisageons d'abord le cas de la droite de raccord: nous la prenons comme Oz; il né peut y avoir, en chaque point de Oz, qu'un unique plan tangent (comptant pour 2), donc les équations paramétriques de la surface peuvent être prises sous la forme

$$(1) \qquad \frac{x}{y} = z_0 \qquad \frac{z - z_0}{y} = m$$

z_0 étant la cote du point de contact, avec

$$(2) \qquad m^2 + 2A(z_0)m + B(z) = 0$$

A et B étant rationnelles en z_0. L'équation de la surface est alors

$$(3) \qquad (yz - x)^2 + 2y^2(yz - x)A\left(\frac{x}{y}\right) + y^4 B\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

Pour avoir le degré 5, il est nécessaire et suffisant de prendre

$$(4) \qquad \begin{aligned} A(z) &\equiv \frac{az^3 + 3bz^2 + 3cz + d}{a_2 z + b_3} \\ B(z) &\equiv \frac{a_1 z^5 + 5b_1 z^4 + 10b_2 z^3 + 10b_3 z^2 + 5b_4 z + b_5}{a_2 z + b_2} \end{aligned}$$

et l'on a la surface

$$(5) \qquad \begin{aligned} &(yz - x)^2(a_3 x + b_2 y) + 2(yz - x)(ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3) \\ &+ a_1 x^5 + 5b_1 x^4 y + 10b_2 x^3 y^2 + 10b_3 x^2 y^3 + 5b_4 xy^4 + b_5 x^5 = 0 \end{aligned}$$

Comme l'équation (2) donne

$$(6) \qquad m = \frac{-(az_0^3 + 3bz_0^2 + 3cz_0 + d) + \sqrt{(a_2 z_0^3 + \ldots)^2 - (a_2 z_0 + b_2)(a_1 z_0^5 + \ldots)}}{a_2 z_0 + b_2}$$

on voit que le genre de la surface est, *en général*, deux; on a aisément les génératrices stationnaires, ou les cas de dégénérescence, où le genre s'abaisse, certaines génératrices doubles s'introduisant; la discussion est analogue à celle qui a été faite au numéro précédent ou au numéro 8 (surfaces de degré 4 avec une droite de raccord). On remarque ici qu'en réalité l'axe Oz est *triple*, parce que cet axe est à la fois droite exceptionnelle et génératrice régulière: pour z_0 égal à $\dfrac{-b_2}{a_2}$ une valeur de m devient infinie et les équations de la génératrice deviennent $y = 0$, $x = 0$; (le résultat subsiste avec quelques modifications si $a_2 = 0$). Une section plane quelconque présente sur Oz un point triple avec deux branches tangentes entre elles, et ce point triple est l'équivalent de quatre points doubles. Au point de cote h, sur Oz, l'ensemble des plans tangents a pour équation

$$(yh - x)^2 (a_2 x + b_2 y) = 0$$

on trouve donc le plan tangent double variable et le plan fixe $a_1 x + b_2 y = 0$ correspondant à la nappe admettant Oz pour génératrice régulière (mais stationnaire).

17. — Surfaces de degré 5; ayant une conique de raccord.

Supposons maintenant que la ligne de raccord soit une conique C_2; le reste de la ligne multiple est rencontré en un seul point par chaque génératrice; ce ne peut être une droite, car les deux génératrices issues d'un point de C_2 seraient dans un même plan avec cette droite et ce plan serait tangent à C_3, d'où contradiction, car on devrait pouvoir mener de la droite ∞^1 plans tangents à C_2. Le reste de la ligne double est donc une conique C'_2; d'autre part, par dualité, le type de la surface se conserve; donc, en chaque point de C_2, le plan tangent double enveloppe un cône Γ_2 contenant C_2; en chaque point de C'_2, le plan tangent double enveloppe un cône Γ'_2 ne contenant pas C'_2. Toutes les sections planes de la surface sont unicursales, car elles ont l'équivalent de six points doubles; en un point M de C_2, le plan bitangent coupe la surface, d'abord suivant les deux génératrices MG, MG' issues de M, puis suivant une cubique unicursale ayant son point double en M; en effet la nappe engendrée par MG, en suivant M par continuité sur C_2, admet en M le plan MGG' comme plan tangent, de sorte que la *section de cette nappe* admet M comme point double, les tangentes étant MG (laquelle est un morceau de la section) et la seconde direction asymptotique de cette nappe; de même pour la nappe lieu de MG' et on a ainsi les deux tangentes à la cubique. En un point M' de C'_2, le plan bitangent donne dans S comme section d'abord les deux génératrices issues de M', puis une cubique unicursale qui a pour point double le nouveau point où son plan coupe C'_2. Nous voyons que les surfaces étudiées ici pourraient aussi être considérées comme dégénérescences de celles du numéro 12; seulement la sextique (de genre 1) de ce numéro 12 est ici décomposée en une conique C_2 (à compter pour 2) et une conique C'_2. Si on appelle t le paramètre unicursal de C_2, p celui de C'_2, on a encore une relation $f(t, p) = 0$ de degré 2 en t et p séparément, qui doit être de genre zéro, de sorte que cette courbe (t, p) qui est de degré 4 (ou 3) doit avoir un point double.

Remarquons d'ailleurs que si C_2 et C'_2 ne se coupaient pas en deux points, il y aurait au moins un point, commun à C'_2 et au plan de C_2, sans appartenir à C_2; ce point de C' aurait sur C_2 deux homologues, de sorte que le plan de C_2 couperait S suivant C_2 (comptant pour 4 au point de vue de l'intersection) et suivant ces deux génératrices: le degré de S surpasserait donc 5. Il est donc établi que C_2 et C'_2 se coupent en deux points. Ensuite le plan de C_2 coupe S, en dehors de C_2, suivant une seule génératrice *régulière*, et cette génératrice est nécessairement tangente à C_2 en l'un des deux points communs à C_2 et C'_2, soit m; ce point considéré comme appartenant à C'_2 a deux homologues sur C_2 confondus avec lui même; considéré comme appartenant à C_2 il a sur C'_2 deux homologues dont l'un est m, l'autre un point m'; la droite mm' est la génératrice nouvelle suivant laquelle le plan de C'_2 coupe S. Si maitenant nous considérons la second point n commun à C_2 et C'_2, si on appelle t_0, p_0 les paramètres de n sur C_2 et C'_2, le point (t_0, p_0) est précisément le point double de la relation $f(t, p) = 0$; les deux génératrices issues de n sont dans le plan contenant les tangentes à C_2 et C'_2 au point n. Corrélativement, les deux cônes Γ_2 et Γ'_2 ont deux plans tangents communs.

On vérifiera sans peine ces résultats sur un exemple simple tel que celui obtenu en éliminant t et m entre

$$(1) \qquad \left| \begin{array}{l} y - 2tx + t^2 + 2tz = 0 \\ z = m(x - t) \\ m^2 + m - t = 0 \end{array} \right.$$

La conique C_2 de raccord est la conique

$$(1) \qquad y - x^2 = 0 \qquad z = 0$$

La surface est unicursale comme on le voit en remplaçant t par $m^2 + m$; l'élimination de t et m se fait plus aisément en résolvant la première équation en t, d'où

$$(3) \qquad t = x - z - \sqrt{(x-z)^2 - y} \qquad m = \frac{z}{z + \sqrt{(x-z)^2 - y}}$$

Fn portant ces valeurs de t et m dans la dernière on a l'équation cartésienne de la surface

$$(4)\qquad \{(x-z)(4zx-4z^2-x^2)+2z^2+3zy-xy\}^2 = \\ =[(x-z)^2-y]\,[4zx-4z^2-x^2+z-y]^2$$

qui est bien de degré 5; la section de la surface par le plan $z=0$ est $y(x^2-y)^2=0$. En écrivant que les deux génératrices m et m' se rencontrent, on trouve la relation symétrique $(s=m+m'.\ p=mm')$

$$(5)\qquad (s+1)^2(2p-s)=0$$

Le facteur $s+1=0$ correspond aux deux génératrices qui se coupent sur C_2; en prenant $s=2p$ on trouve comme point de rencontre la parabole C_2'

$$(6)\qquad x=4p^2+p \qquad y=3p^2+p \qquad z=2p^2+p$$

qui coupe C_2 aux points

$$(7)\qquad \left|\begin{array}{lllll} x=y=z=0 & & & t=0 & p=0 \\ x=\frac{1}{2}, & y=\frac{1}{4}, & z=0, & t=\frac{1}{2}, & p=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

La relation entre t et p s'obtient en éliminant m entre les deux équations

$$(8)\qquad m^2+m-t=0 \qquad m^2-2pm+p=0$$

Cela donne la cubique unicursale

$$(9)\qquad (t+p)^2+(t+p)(1+2p)-t(1+2p)^2=0$$

Pour $t=0$, on trouve $p=0$, $p=-\frac{1}{3}$; pour $t=\frac{1}{2}$, on trouve la valeur double $p=-\frac{1}{2}$; pour $p=0$, on trouve la valeur double $t=0$; pour $p=-\frac{1}{2}$ on trouve la valeur double $t=\frac{1}{2}$; le point double est $p=-\frac{1}{2}$, $t=-\frac{1}{2}$; d'ailleurs les équations (8) donnent p et t unicursalement en m. Le cône Γ_2 est le cylindre parabolique d'équation $(x-z)^2-y=0$; le plan des deux génératrices sécantes au point p de C_2' est

$$(10)\qquad 4p^2X-Y+(2+2p-8p^2)Z-p(3p+1)=0$$

On trouve ainsi pour enveloppe un cône Γ_2' ayant son sommet au point $X=\frac{7}{4}$, $Y=1$, $Z=\frac{1}{2}$; du sommet de Γ_2', la développable circonscrite comprend d'abord Γ_2' deux fois, puis une génératrice $t=2$, $m=-2$, $p=-\frac{4}{5}$; du sommet de Γ_2, point à l'infini dans la direction $x=z$, $y=0$, la développable circonscrite comprend d'abord Γ_2 deux fois, puis une génératrice ($t=2$, $m=1$, $p=1$) appartenant d'ailleurs au cylindre Γ_2.

18. — **Surfaces de degré 5, ayant une droite quadruple.** Nous avons épuisé le cas où les trois points P_1, P_2, P_3 se réduisent à deux; il reste à élucider celui où ils se confondent; nous avons déjà rencontré (droite de raccord) celui où ils sont confondus, parce que la quartique C a un point double P, une branche étant tangente à G, et une autre branche étant non tangente à G. Le cas où P serait point simple, point d'inflexion avec G tangente d'inflexion, est impossible; en effet P devrait, pour une section plane quelconque y passant, représenter un point double unique équivalent à trois points doubles confondus; autrement dit il engendrerait une ligne de raccord, telles que les deux nappes soient coupées par un plan quelconque suivant deux courbes osculatrices: les indicatrices devraient coïncider, ce qui est impossible, puisque les deux génératrices sont asymptotes chacune d'une indicatrice et sont distinctes.

Il ne reste donc plus à étudier que le cas où P est point triple de C; P engendre une ligne quadruple de S, nécessairement rectiligne. On a les surfaces réciproques par dualité de celles étudiées au n⁰ 14. L'équation de la surface, en prenant la droite exceptionnelle quadruple comme axe Oz, est

$$\begin{aligned} & x^4(Ax+A_1y+A_2z+A_3)+x^3y(B_1y+B_2z+B_3)+ \\ (1)\qquad & +x^2y^2(C_1y+C_2z+C_3)+xy^3(D_1y+D_2z+D_3)+ \\ & +y^4(E_1y+E_2z+E_3)=0. \end{aligned}$$

De chaque point de Oz partent quatre génératrices; le plan de deux d'entre elles enveloppe une développable de classe 6, genre un, ayant un plan tangent triple: ce plan tangent correspond au point de Oz pour lequel trois des quatre génératrices sont dans un même plan; ce plan coupe la surface suivant une conique C_2 et l'on peut représenter la surface par la relation qui unit la cote h du pied de la génératrice courante sur Oz et le paramètre unicursal t de son pied sur C_2; h est une fraction rationnelle en t, de degré 4; si on suppose que C_2 est dans le plan xOy, l'équation (1) prendra la forme

$$
(2) \quad \begin{gathered} z(ax^4+bx^3y+cx^2y^2+dxy^3+ey^4)+(\alpha x+\beta y+\gamma x^2+2\delta xy+\epsilon y^2) \\ (\alpha' x+\beta' y)(\alpha'' x+\beta'' y)(\alpha''' x+\beta''' y)=0 \end{gathered}
$$

En posant $\dfrac{y}{x}=t$, t est le paramètre unicursal de C_2 et la relation annoncée est, entre h et t,

$$
(3) \quad \begin{gathered} h(a+bt+ct^2+dt^3+et^4)+(\alpha+\beta t)(\alpha'+\beta' t) \\ (\alpha''+\beta'' t)(\alpha'''+\beta''' t)=0 \end{gathered}
$$

Le polynôme $a+bt+ct^2+dt^3+et^4$ n'admet aucune des racines de $(\alpha'+\beta' t)(\alpha''+\beta'' t)(\alpha'''+\beta''' t)$; la valeur $t=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ fournit $h=0$ d'une part et le point où C_2 rencontre la ligne quadruple. Les divers cas à examiner résultent donc de la comparaison des nombres $\dfrac{-\beta'}{\alpha'}$, $\dfrac{-\beta''}{\alpha''}$, $\dfrac{-\beta'''}{\alpha'''}$, $\dfrac{-\beta}{\alpha}$ entre eux ou avec les racines de

$$
a+bt+ct^2+dt^3+et^4 \quad \text{et} \quad \gamma+2\delta t+\epsilon t^2
$$

On peut effectuer sur les variables x, y, z une substitution

$$
x=\lambda X+\mu Y \qquad y=\lambda' X+\mu' Y \qquad z=\nu Z
$$

pour avoir une forme réduite de la surface.

19. — Indications sur les surfaces réglées de degré quelconque.

Nous avons étudié complètement les degrés 4 et 5. Les mêmes principes permettraient de classer les surfaces d'un degré donné. Je me contente d'indiquer quelques résultats généraux.

Sur une surface réglée d'ordre n deux sections planes de la surface (par un plan non tangent ou tangent) se correspondent *birationnellement* par l'intermédiaire de la génératrice unissant les points homologues (si l'un des plans est tangent, on fait abstraction de la génératrice ou des génératrices qu'il contient). Exceptionnellement si la surface contient une droite exceptionnelle simple (ponctuellement), mais d'ordre $n-1$ (tangentiellement), la théorème en question cesse de s'appliquer aux plans pivotant autour de cette droite; on remarquera aussi qu'une surface ne peut avoir une série *continue* de plans $(n-2)$ fois tangents que si $n=4$, car on a correspondance birationnelle entre deux coniques. Il y a intérêt pour avoir les équations paramétriques d'une surface réglée à déterminer deux plans tangents d'ordre maximum ; il faut encore remarquer que si l'un des deux plans tangents coupe la surface suivant une ligne multiple d'ordre p de la surface, la correspondance obtenue n'est plus birationnelle (elle peut le redevenir *formellement* si l'une des courbes est soumise à une représentation paramétrique impropre). De la sorte, dans bien des cas, l'étude d'une surface réglée consiste à établir entre deux courbes C et C', planes ou gauches, une correspondance MM' telle qu'à un point M de C correspondent q points de C'' et, à un point M' de C', p points de C; C est alors d'ordre de multiplicité q, C' d'ordre p sur la surface réglée; on voit qu'on a ainsi le moyen d'établir une correspondance birationnelle entre deux surfaces réglées différentes, de même degré ou non: ainsi si l'on considère l'équation algébrique entière $f(x, x_1) = 0$, cette équation peut servir à définir une surface réglée S joignant le point de paramètre x sur une courbe unicursale C au point de paramètre x_1 sur une courbe unicursale C_1; la relation étant de degré p en x, q en x_1, si C et C_1 sont deux droites. on obtient une surface S d'ordre $p + q$ ayant C pour droite d'ordre q (ponctuellement), p (tangentiellement), avec les mêmes nombres inversés pour C_1; en conservant la même relation $f(x, x_1) = 0$ et prenant pour C et C_1 deux coniques n'ayant aucun point commun, on a une surface S' où C est ligne multiple d'ordre q, C_1 d'ordre p; à chaque point de C situé dans le plan de C_1 correspondent q génératrices situées dans le plan de C_1, de sorte que la nouvelle surface S' est de degré $2(p + q)$ et correspond birationnellement à S, par exemple en faisant correspondre les pieds des génératrices, puis sur chaque génératrice faisant correspondre les points qui partagent le segment des deux pieds dans le même rapport; si la conique C et la conique C_1 ont un point commun, se correspondant à lui-même par la relation $f(x, x_1) = 0$, le degré de S' s'abaisse. Nous avons rencontré de tels exemples en étudiant les surfaces d'ordre 5 (paragraphe 15): une surface S ayant une droite exceptionnelle triple et une autre double, puis une autre S' ayant une droite exceptionnelle triple et une conique double; je cite encore le cas de la surface S de degré 4 ayant deux droites doubles exceptionnelles et une génératrice double, puis une surface S' de degré 5 ayant une conique de raccord et une conique double; ces deux surfaces correspondent à une relation $f(x, x_1) = 0$ de degré 2 en x, 2 en x_1 et de genre zéro.

Dans ce même ordre d'idées on peut dire qu'en général une surface réglée de degré au moins égal à 5 est définie comme lieu des sécantes triples (ou n uples) de sa ligne double (ou de degré de multiplicité supérieur). Le problème ainsi posé reviendrait donc à reprendre purement et simplement la classification d'Halphen des courbes gauches. ce qui, nous l'avons dit en introduction, revient à étudier *deux* fonctions algébriques d'une variable, et non plus *trois*. Mais on rencontre les difficultés suivantes: la courbe gauche peut avoir des points multiples et on doit compléter le travail d'Halphen relatif exclusivement aux courbes dénuées de points multiples: ensuite la donnée de la courbe gauche (indécomposée ou décomposée) dont on prend les sécantes triples peut donner plusieurs surfaces et non une seule; il y a d'ailleurs à décider si les sécantes sont triples ou n uples: puis la surface réglée obtenue aura souvent d'autres lignes multiples, correspondant aux points de l'espace d'où l'on peut mener à la courbe plusieurs sécantes triples.

Je donne un exemple simple: sur la courbe gauche Γ

$$x = t^4 \qquad y = t^3 \qquad z = t^2 \tag{1}$$

quatre points sont dans un même plan moyennant la relation

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} = 0 \tag{2}$$

entre leurs paramètres. Considérons la surface obtenue en joignant le point t au point $t' = t^3$; on voit immédiatement que Γ est ligne quadruple de la surface S obtenue, laquelle a pour équations paramétriques

$$\left|\begin{aligned} X &= t^4 + \rho\, t^2 (t^4 + 1)(t^2 + 1) \\ Y &= t^3 + \rho\, t (t^4 - t^2 + 1) \\ Z &= t^2 + \rho (t^2 + 1) \end{aligned}\right. \tag{3}$$

et est de degré 11, comme on le voit en coupant par la droite *arbitraire*

$$\left|\begin{aligned} \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta &= 0 \\ \beta_1 Y + \gamma_1 Z + \delta_1 &= 0 \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Sur chaque génératrice G, le plan tangent en M donne une courbe C de degré 10, coupant G en trois points confondus en chacun des deux points où G rencontre Γ, en un point au point de contact, et en 3 autres points qui engendrent le reste de la ligne multiple.

Si on écrit que les deux génératrices (t, t^3) et (t_1, t_1^3) se rencontrent, on a d'après (2),

$$(t + t_1)(t^2 t_1^2 + t^2 + t_1^2 - t t_1) = 0 \tag{5}$$

La solution $t + t_1 = 0$ correspond à une quintique Γ' double de la surface, située dans le plan de symétrie $Y = 0$ de la surface S; Γ' est obtenue aussitôt en remplaçant ρ par $\frac{-t^2}{t^4 - t^2 + 1}$ puis remplaçant t^2 par θ. La section de S par $Y = 0$ comprend, en dehors de Γ', la génératrice $t = 0$ qui est l'axe Oz; en prenant ensuite la relation

$$t^2 t_1^2 + t^2 + t_1^2 - t t_1 = 0 \tag{6}$$

on a le reste Γ'' de la ligne multiple; en posant $t + t_1 = s$. $t t_1 = p$, la relation (6) devient

$$p^2 + s^2 - p = 0 \tag{7}$$

Or le point de rencontre des deux génératrices (t, t^3) et (t_1, t_1^3) s'obtient rationnellement en (s, p): la courbe Γ'' est donc unicursale, puisque la relation (7) est de genre zéro. Sans calcul on trouve le degré de Γ''; Γ'' est *double* sur S; chaque section plane de S est unicursale et admet l'équivalent de 45 points doubles; or on trouve 4 points quadruples sur Γ, soit l'équivalent de 24 points doubles, puis 5 points doubles sur Γ'; donc Γ'' est de degré 15. Toute génératrice de S rencontre Γ en deux points, Γ' en un point et Γ'' en deux points; la surface S peut donc être considérée comme lieu des sécantes *triples* de l'ensemble (Γ, Γ') ou de l'ensemble (Γ', Γ''); la donnée de (Γ, Γ') laisse échapper Γ''; de plus les sécantes triples de $(\Gamma. \Gamma')$ comprennent d'abord S puis une autre surface réglée Σ ayant Γ pour ligne multiple d'ordre 13 et Γ' pour ligne double; de même la donnée de Γ' et Γ'' introduirait une nouvelle surface réglée.

On voit comment le procédé suivi ici permet d'obtenir aisément des lignes de raccord de nature complexe: il suffit de se donner une courbe Γ, un plan attaché à chaque tangente de Γ, et de joindre le point de contact aux points où ce plan perce une autre courbe Γ' (distincte ou non de Γ). Par exemple avec la courbe Γ étudiée à l'instant on pourrait associer au point t, deux autres points t_1 et t_2 par l'ensemble des relations

$$\frac{2}{t}+\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=0,\ f(t_1, t)=0$$

où f est une fonction arbitraire.

19. — Triangles de Poncelet. Nombre fini.

Nous avons vu, en introduction, comment la considération de plans tri tangents ou n fois tangents, $n \geqslant 3$, conduit à généraliser les polygones de Poncelet. J'indique rapidement ici quelques résultats, d'après plusieurs notes que j'ai publiées aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t 179, 1924, p 745, 878, 1241.

Dans un plan, considérons une conique C_2 et une courbe Γ_n de classe n (n entier $\geqslant 2$). Si C_2 et Γ_n sont *quelconques* l'une vis-à-vis de l'autre, il existe un nombre *fini*, $\frac{1}{3}\,n(n-1)\,(n-2)$ de triangles *véritables* inscrits dans C_2, circonscrits à Γ_n; il existe $2\,n(n-1)$ solutions *impropres* du problème, obtenues ainsi: l'une des $2n$ tangentes communes à C_2 et Γ_n, soit T, touche C_2 en M_0; de M_0 on mène l'une des $(n-1)$ tangentes à Γ_n, autre que T, et elle coupe C_2 de nouveau en M_1: les trois points M_0, M_0, M_1, donnent un triangle impropre (un côté confondu avec la tangente en M_0 à C_2 et les deux autres avec $M_0\,M_1$), dont les sommets sont sur C_2 et les côtés tangents à Γ_n. Le résultat se justifie ainsi: soit M_0 un point *arbitraire* de C_2 et $M_0\,M_1$, $M_0\,M_1'$ deux tangentes issues de M_0 à Γ_n, recoupant C_2 en M_1 et M_1': il est nécessaire et suffisant que $M_1\,M_1'$ soit tangente à Γ_n; or si M_1 est donné arbitrairement, M_0 a n positions possibles sur C_2, et M_0 choisi, M_1' a $n-1$ positions seulement puisque nous éliminons M_1; la droite $M_1\,M_1'$ enveloppe une courbe $\Gamma_{n(n-1)}$ de clase $n(n-1)$; on est ramené à trouver les tangentes communes à Γ_n et $\Gamma_{n(n-1)}$, en nombre $n^2(n-1)$; nous avons vu que toute tangente commune à C_2 et Γ fournit $(n-1)$ solutions impropres, de sorte que le nombre des tangentes à conserver est $n^2(n-1) - 2n(n-1) = n(n-1)\,(n-2)$. D'autre part chaque triangle correspond à un ensemble de 3 tangentes. Pour $n=2$, le résultat est bien connu (voir Halphen, Théorie des fonctions elliptiques). Comme application de ceci, imaginons que sur la cubique

$$x=t \qquad y=t^2 \qquad z=t^3 \tag{1}$$

nous joignions les points de paramètres t_1 et t_2 liés par une relation symétrique en t_1, t_2 et de degré 3 en t_1 et t_2; en posant

$$t_1+t_2=s \qquad t_1\,t_2=p \tag{2}$$

cette relation peut s'écrire

(3) $As^3+Bs^2p+Csp^2+Dp^3+Es^2+Fps+Gp^2+Hs+Kp+L=0$

Or remarquons qu'en écrivant

(4) $x=t_1+\rho t_2, \quad y=t_1^2+\rho t_2^2, \quad z=t_1^3+\rho t_2^3, \quad \theta=1+\rho$

le point de coordonnées homogènes x, y, z, θ donne

(5) $y\theta-x^2=\rho(t_1-t_2)^2 \quad z\theta-xy=\rho s(t_1-t_2)^2 \quad zx-y^2=\rho p(t_1-t_2)^2$

de sorte que tous les points de la droite (t_1, t_2) satisfont d'après (3) à l'équation

$$(6)\quad \left|\begin{array}{l} A(z\theta-xy)^3+B(z\theta-xy)^2(zx-y^2)+C(z\theta-xy)(zx-y^2)^2+ \\ +D(zx-y^2)^3+E(z\theta-xy)^2(y\theta-x^2)+F(zx-y^2)(z\theta-xy) \\ (y\theta-x^2)+G(zx-y^2)^2(y\theta-x^2)+H(z\theta-xy)(y\theta-x^2)^2+ \\ +K(zx-y^2)(y\theta-x^2)^2+L(y\theta-x^2)^3=0 \end{array}\right.$$

qui est l'équation de la surface réglée S de degré 6 engendrée par cette droite; S admet la cubique pour ligne triple. Sur le plan horizontal, la perspective de la cubique à partir du point à l'infini sur Oz est la conique C_2, $y-x^2=0$; la perspective de la génératrice (t_1, t_2) a pour équation

$$(7)\qquad y-sx+p=0$$

de sorte que l'équation (3) est l'équation de la courbe Γ_3 de classe 3 enveloppe de cette projection (la développable circonscrite à S du point à ∞ sur Oz comprend trois génératrices et un cylindre de classe 3). D'après ce qui précède il existe deux plans PQR et $P'Q'R'$ tels que chacun des triangles PQR ou $P'Q'R'$ correspondant aux points d'intersection de ces plans et de la cubique (1) ait ses côtés formés de génératrices: ces plans sont tritangents et coupent la surface suivant une cubique plane, de genre 1. Cela permet donc d'obtenir encore la surface S comme lieu des droites joignant, sur deux cubiques planes de genre 1 et de même invariant, les points homologues dans une correspondance birationnelle; la surface S a ∞^1 plans bitangents, mais n'a que les deux plans tritangents fournis par notre procédé. Remarquons en passant que la génératrice variable de S est définie par (7) et par

$$(8)\qquad z+px=sy$$

plan passant par l'origine; l'équation (3), déjà interprétée comme équation tangentielle du cylindre de classe 3 circonscrit à S du point à l'infini sur Oz peut donc être encore interprétée comme équation tangentielle du cône circonscrit à S de l'origine; le cône et le cylindre se correspondent birationnellement par plans tangents, la droite intersection des plans homologues décrivant S. C'est toujours la notion corrélative de celle employée pour les droites joignant les points homologues de deux courbes se correspondant birationnellement.

On voit sans difficulté que toute relation de degré n en p, s définit une surface réglée de degré $2n$ ayant la cubique pour ligne multiple d'ordre n; réciproquement toute surface de degré $2n$ ayant la cubique pour ligne multiple d'ordre n est réglée, car d'un point M de la surface est issue une sécante double de la cubique, sécante ayant $2n+1$ points communs avec la surface, donc lui appartenant. Une telle surface a donc ∞^1 plans bitangents et exactement $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3}$ plans tritangents — sauf les surfaces spéciales que nous allons indiquer.

20. — Triangles de Poncelet: nombre infini.

Etant donnée une conique C_2, on peut trouver ∞^{2n} courbes Γ_n de classe n fournissant une infinité de triangles de Poncelet inscrits dans C_n, circonscrits à Γ_n: dans le paragraphe précédent, on a pris pour C_2 la parabole $y - x^2 = 0$, ce qui est toujours permis par une transformation homographique et la courbe Γ_n générale dépend de $\dfrac{n(n+3)}{2}$ paramètres, nombre supérieur à $2n$.

Choisissons, *au hasard*, $n+1$ points $M_0, M_1, \ldots M_n$ sur C_2, puis encore au hasard $(n+1)$ points $M'_0, M'_1 \ldots M'_n$ sur C_2; choisissons une représentation unicursale (t) de C_1 et désignons par

$$(1) \qquad A t^{n+1} + A_1 t^n + \ldots + A_{n+1} = 0$$

$$(2) \qquad B t^{n+1} + B_1 t^n + \ldots + B_{n+1} = 0$$

les équations définissant le système $(M_0, M_1 \ldots M_n)$ puis $(M'_0, M'_1 \ldots M'_n)$.

Considérons maintenant l'équation, contenant un paramètre variable ρ,

$$(3) \quad (A + B\rho) t^{n+1} + (A_1 + B_1\rho) t^n + \ldots + A_{n+1} + B_{n+1}\rho = 0.$$

Deux racines t', t'' de l'équation (3) satisfont à l'équation

$$(4)\quad \begin{vmatrix} At'^{n+1}+A_1t'^{n}+\ldots+A_{n+1} & At''^{n+1}+A_1t''^{n}+\ldots+A_{n+1} \\ Bt'^{n+1}+B_1t'^{n}+\ldots+B_{n+1} & Bt''^{n+1}+B_1t''^{n}+\ldots+B_{n+1} \end{vmatrix}=0$$

qui, après suppression du facteur $t'-t''$ est entière, *symétrique*, par rapport à t' et t'', de degré n par rapport à chacune: c'est l'équation tangentielle d'une courbe Γ_n de classe n, en prenant comme coordonnées droites les valeurs des paramètres t', t'' fixant l'intersection d'une droite et de C_2. Cette équation (4) exprime donc que les $\frac{(n+1)n}{2}$ droites joignant 2 à 2 les $(n+1)$ points définis par (3) sont, *quel que soit* ρ, tangentes à Γ_n. Prenons donc un point P *arbitraire* sur C_2; le t du point P fixe ρ de façon que (3) ait ce t pour solution; les n autres racines de (3) donnent donc $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons t', t'' telles que $P\,P'\,P''$ soit un triangle inscrit dans C_2, circonscrit à Γ_n: chaque point de C_2 est sommet de $\frac{n(n-1)}{2}$ tels triangles et chaque tangente de Γ_n porte $(n-1)$ triangles.

Cette fois si M est le point de contact avec C_2 d'une tangente T commune à C_2 et Γ_n, μ l'un des points d'intersection de C_2 et Γ_n, toutes les tangentes à Γ_n, issues d'un M et distinctes de la T correspondante se terminent sur C_2 en un μ et réciproquement la tangente à Γ_n en un μ se termine sur C_2 en un M

Pour voir que la courbe Γ_n dépend bien de n paramètres, il suffit d'écrire l'équation (4) sous forme du produit de deux matrices

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} A\;A_1\;A_2\ldots\ldots A_{n+1} \\ B\;B_1\;B_2\ldots\ldots B_{n+1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} t'^{n+1}\;t'^{n}\ldots\ldots t'\;1 \\ t''^{n+1}\;t''^{n}\ldots\;t''\;1 \end{vmatrix} = 0$$

Les coefficients de l'équation tangentielle de Γ_n ne sont autres que les mineurs de la matrice de gauche; dans l'espace à $n+1$ dimensions, ce sont les coordonnées plückériennes de la droite joignant les points de coordonnées homogènes $(A, A_1, \ldots A_{n+1})$ et $(B, B_1, \ldots B_{n+1})$ et cela montre aussitôt que les Γ_n dépendent effectivement de $2n$ paramètres non homogènes et que la donnée de deux groupes de $(n+1)$ points sur C_2 détermine, *sans exception et d'une façon unique*, la courbe Γ_n correspondante.

Nous avons même obtenu un résultat curieux que je traduis par dualité: $(n+1)$ tangentes à une conique C_2 se coupent deux à deux en $\frac{(n+1)n}{2}$ points; un nouvel ensemble de $(n+1)$ tangentes détermine $\frac{n(n+1)}{2}$ nouveaux points: les $n(n+1)$ points ainsi obtenus forment un groupe de points de surabondance $\frac{n(n-1)}{2}$ pour le degré n et sont contenus sur une unique C_n, courbe de degré n: il existe ∞^1 tels systèmes de $(n+1)$ tangentes à C_2 dont les points d'intersection sont sur C_n; on a ainsi ∞^1 triangles circonscrit à C_2 et inscrits dans C_n.

Nous avons ainsi, en utilisant la cubique gauche Γ. $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ liée à la conique C_2. $y-x^2=0$, obtenu des surfaces S de degré $2n$, admettant Γ pour ligne multiple d'ordre n, et ∞^1 plans tritangents; S n'a pas d'autre ligne multiple que Γ, et, en fait de plans tangents multiples, n'a que des plans tritangents; par dualité, on a une surface réglée S' de degré $2n$, n'ayant que des points multiples triples et des plans tangents multiples d'ordre n; S et S' sont de genre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$; la ligne multiple de S' est de degré $\frac{3n(n-1)}{2}$.

Nous avons le moyen de faire des vérifications des propriétés indiquées ici et au numéro précédent. En effet, si nous prenons les formules (1) du numéro 10, en y laissant les coefficients $A, B, C, \alpha\ldots$ tous arbitraires, le point $\omega=0$ ne se correspondra plus sur les deux cubiques $\lambda=0$ et $\lambda=\infty$ et nous aurons une surface de degré 6 (et non plus 5), avec des plans tangents simplement bitangents, tant que $3(\omega_1-\omega_0)$ n'est pas une période de pu; la surface a une ligne double qui est de degré 9 et qui est rencontrée par une génératrice en 4 points; on pourra, en particularisant convenablement les coefficients obtenir une surface de degré 6 ayant pour ligne multiple une cubique gauche triple: cette surface rentre dans celles signalées au numéro précédent et nous avons mis en évidence les deux plans tritangents exceptionnels, correspondant à des triangles de Poncelet en nombre fini. (Quand la surface est munie d'une courbe double de degré 9, si l'on met la surface en perspective à partir d'un point de cette courbe, le contour apparent devient une courbe Γ_4 de classe 4, la perspective de la ligne double est une courbe C_8 de degré 8, et on a seulement *deux* triangles inscrits dans C_8, circonscrits à Γ_4).

Quand $3(\omega_1 - \omega_0)$ est une période de pu, on peut supposer $\omega_1 = \omega_0$ et suivant que la ligne multiple sera double et de degré 9 ou triple et de degré 3, on aura ∞^1 triangles de Poncelet relatifs à une Γ_4 et C_8 ou à une Γ_3 et C_2.

21. — Triangles de Poncelet; solution générale pour une conique.

Si on réfléchit au procédé employé jusqu'ici, nous voyons qu'une tangente (t_1, t_2) à Γ_n, définie par ses intersections t_1 et t_2 avec C_2, jouit de la propriété que $t_3, t_4, \dots t_{n+1}$ déterminent avec la droite $(t_1\ t_2)$ un triangle de Poncelet; si on recommence avec (t_1, t_i), les points $t_2, \dots t_{i-1}, t_{i+1}, \dots t_{n+1}$ fournissent le même résultat avec (t_1, t_i); finalement chaque point du groupe $(t_2, \dots t_{n+1})$ jouit de la même propriété, vis à vis de t_1, que les autres points du groupe: cela n'a rien d'étonnant puisque. *quelles que soient Γ_n et C_2*, l'équation *tangentielle* de Γ_n, $f(t', t'') = 0$, permet d'obtenir *symétriquement* le total $(t_2, \dots t_{n+1})$ au moyen de t_1, mais alors les fonctions symétriques fondamentales $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$ des n quantités $(t_2, \dots t_{n+1})$ étant exprimées rationnellement en t_1, il en est de même des fonctions symétriques $S_1, S_2, \dots S_{n+1}$ de $(t_1, t_2, \dots t_{n+1})$; or, *dans le cas des triangles de Poncelet en nombre infini et du type étudié jusqu'ici*, la courbe $(S_1, S_2, \dots S_{n+1})$ *unicursale* est obtenue en *représentation impropre*, exactement $n+1$ fois, puisque chaque point $t_1, \dots t_{n+1}$ jouit des mêmes prérogatives vis à vis des autres; la courbe *unicursale* (S_1, S_2, S_{n+1}) de l'espace à $n+1$ dimensions est donc une *droite* et c'est ce qui donne la solution imaginée au numéro précédent, $S_1, S_2, \dots S_{n+1}$ étant exprimées linéairement au moyen d'une même quantité ρ.

Mais on peut modifier la construction: d'abord il n'est pas nécessaire qu'au point t_1 de C_2 corresponde un seul groupe $(t_2, \dots t_{n+1})$; ce point peut avoir pour correspondants q groupes $(t_2, \dots t_{n+1})$, $(t'_2, \dots t'_{n+1}) \dots$ les triangles de Poncelet étant formés avec t_1 et deux points quelconques d'un même groupe. Nous avons donc la solution *générale* par le procédé suivant: soit un polymôme *donné*, *arbitraire*, $P(\rho, t)$ de degré q en ρ et $n+1$ en t; éliminons ρ entre les deux équations

$$(1) \qquad P(\rho, t_1) = 0 \qquad P(\rho, t_2) = 0.$$

Le résultant débarrassé du facteur $(t_1 - t_2)^q$ donne l'équation, *en général indécomposable et symétrique*

(2) $$R(t_1, t_2) = 0$$

L'équation $R(t_1, t_2) = 0$ est l'équation tangentielle de la courbe Γ la plus générale cherchée.

En effet, t_1 donné, on a q valeurs de ρ, soit $\rho', \rho''\ldots$; adoptons ρ'; l'équation $P(\rho', t_2) = 0$ admet, en dehors de t_1 que nous rejetons, n racines $t_2, \ldots t_{n+1}$ que nous associons à t_1 et trois points distincts t_i, t_j, t_k du droupe $(t_1, t_2, \ldots t_{n+1})$ ainsi obtenu donnent manifestement un triangle inscrit dans C_2 et circonscrit à Γ; [ici les fonctions symétriques $(S_1, S_2, \ldots S_{n+1})$ ne sont plus rationnelles en ρ]. Chaque tangente (t_1, t_2) à Γ fournit un unique ρ, par les équations (1), d'où $n - 1$ triangles portés par cette droite t_1, t_2; chaque point de C_2 fournit q valeurs de ρ, et à chaque ρ choisi correspondent $\dfrac{n(n-1)}{2}$ choix de t_2 et t_3, de sorte que chaque point de C_2 est sommet de $\dfrac{qn(n-1)}{2}$ triangles de Poncelet. La différence avec ce qui précède consiste en ce que, primitivement, q était égal à l'unité et, qu'en partant de t_1 avec une droite $t_1\, t_2$, puis de t_2 avec une droite $t_2\, t_3$, on peut repartir de t_3 avec $t_3\, t_1$ ou avec $t_3\, t_4 \ldots$, mais, quel que soit le chemin adopté, on finira par revenir en t_1: on aura pu se donner l'illusion d'avoir des *polygones* de Poncelet, bien qu'en réalité il n'y ait lieu de parler que de *triangles;* au contraire si $q \geqslant 2$, on part de t_1 pour arriver en t_2: si de t_2 on part avec un autre ρ que celui commun à t_1 et t_2, on se lance dans une direction qui en général ne permettra plus de revenir en t_1.

On réalise donc des surfaces réglées, par le même procédé que plus haut, de degré $2qn$ admettant la cubique gauche comme ligne multiple d'ordre qn; la surface admet des plans tangents triples ($n - 1$ passant par chaque génératrice) et des plans tangents doubles [$n(q-1)$ passant par chaque génératrice].

Donnons une explication géométrique de ce procédé (valable pour $q = 1$ ou $q > 1$); j'ai déjà signalé que la conique C_2 peut servir pour former l'équation tangentielle d'une courbe Γ quelconque; chaque tangente à Γ est déterminée par les points t', t'' où elle perce C_2 et la relation $f(t', t'') = 0$ est une équation tangentielle de Γ; mais alors il y a deux cas à distinguer suivant que f est *symétrique* ou *dissymétrique* en $t'.\ t''$; si f est symétrique, la classe de Γ est le degré en t' ou t''; en posant alors

$$s = t' + t'' \qquad p = t'\,t''$$

la relation $f(t', t'') = 0$ se transforme en $\phi(s, p) = 0$ où ϕ est par rapport à l'ensemble (s, p) du degré de f en t'; la courbe Γ est transformée par dualité de la courbe (s, p) définie par $\phi = 0$. Dans le second cas la classe de Γ est la somme des degrés de f en t', t''; le point t' pourra être considéré comme *origine*, le point t'' comme *extrémité* de la tangente $t'.\ t''$; d'ailleurs pour obtenir l'équation tangentielle *ordinaire* $\phi(s, p) = 0$ de Γ, il faut considérer le produit $f(t', t'')\ f(t'', t') = 0$, qui rétablit la symétrie (si C_1 est la parabole $y - x^2 = 0$, la droite (t', t'') a pour équation $y \quad sx + p = 0$); on peut remarquer que l'équation tangentielle de Γ est alors de la forme $F(u, v, w) = \Phi^2(u, v, w)$, où F est le premier membre de l'équation tangenticlle de C_2. Ces principes rappelés, remarquons que dans les équations (1), (2) on peut regarder $\rho.\ t_1, t_2$ comme les coordonnées d'un point de C_2; l'équation $P(\rho, t) = 0$ est l'équation tangentielle d'une courbe auxiliaire γ; si P est dissymétrique en ρ, t (ce qui arrive nécessairement si P est du premier degré en ρ, ou $q = 1$), le procédé revient à considérer toutes les tangentes de γ qui ont la même *origine* ρ et à joindre deux à deux leurs *extrémités*: les cordes ainsi obtenues enveloppent la courbe Γ; si P est symétrique en ρ, t rien n'est changé en réalité à l'interprétation; on voit donc qu'il suffit de se donner une courbe arbitraire γ, mais comme l'équation $P(\rho, \mathrm{t}) = 0$ doit être au moins de degré 3 en t et de degré 1 en ρ, on voit que γ est de classe au moins 4 en cas de dissymétrie, de classe 6 au moins en cas de symétrie.

Une circonstance curieuse doit être signalée; même si l'équation $P(\rho.\ t) = 0$ est indécomposable, il peut arriver que l'élimination indiquée de ρ entre

(1) $$P(\rho, t_1) = 0 \qquad P(\rho, t_2) = 0$$

conduise à une relation

(2) $$R(t_1, t_2) = 0$$

décomposée: alors nos conclusions sont vraies encore, pour le plan et les triangles de Poncelet, pour l'espace et les plans tritangents à condition de conserver *tous* les morceaux de décomposition: on a une courbe Γ décomposée, une surface S décomposée. En réalité, quand les triangles ne se rapportent pas à un même morceau il y a intérêt à prendre chaque morceau de décomposition de Γ ou S, $\Gamma', \Gamma'' \ldots$ et $S', S'' \ldots$ Mais alors pour Γ' on a un *polygone* de Poncelet, et pour S' on n'obtient plus de plan tritangent: on a simplement sur S' une cubique gauche lieu de points doubles, et, à partir de chaque point de cette cubique, une suite fermée de λ chaînons consécutifs formée de segments de génératrices. Un exemple simple fait comprendre le résultat: supposons que C_2 soit le cercle $x^2+y^2=1$, que ρ et t désignent respectivement $\rho=e^{i\psi}$, $t=e^{i\theta}$, où ψ et θ les angles (Ox, OP), (Ox, OM); l'équation

$$\rho = t^{n+1} \tag{3}$$

peut être prise comme équation $P(\rho, t)=0$; la relation entre t_1 et t_2 (ou θ_1 et θ_2) est

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{2k\pi}{n+1} \tag{4}$$

où k est l'un des entiers $0, 1, 2, \ldots n$; la courbe Γ se décompose donc en un ensemble de cercles $\Gamma', \Gamma'', \ldots$ concentriques au proposé et correspondant aux polygones réguliers de $n+1$ côtés (ou d'un nombre de côtés diviseur de $n+1$): il n'y a plus à proprement parler de triangles, mais simplement des polygones de Poncelet; la courbe γ est ici une épicycloïde à n rebroussements obtenue en faisant rouler un cercle de rayon $\frac{1}{n+1}$ sur un cercle de rayon $\frac{n}{n+1}$ auquel il est tangent extérieurement; le cercle $x^2+y^2=1$ est celui qui a pour centre le centre du cercle fixe et est tangent à l'épicycloïde en ses n sommets. Si l'on considère maintenant deux coniques C_2 et C_2' qui ne sont plus bitangentes et admettent ∞^1 polygones de Poncelet de n côtés, chacun de ces polygones fournit une équation $P(\rho, t)=0$ moins simple que $\rho=t^{n+1}$, mais conduisant encore à une relation décomposable entre t_1 et t_2: cette fois on a la division des fonctions *elliptiques* et non plus des fonctions *circulaires*.

J'ai indiqué la solution *générale* des triangles de Poncelet pour une C_2; je viens de montrer comment, pour certaines équations particulières $P(\rho, t)=0$ la solution échoue pour les triangles proprement dits mais fournit des polygones. Je vais indiquer une autre *particularisation des triangles*: nous allons nous arranger pour que Γ se décompose et et que un ou plusieurs morceaux isolés admettent des triangles, tandis qu'à l'instant les côtés des triangles enveloppaient des morceaux différents. Le procédé le plus général consiste à écrire, pour réaliser ce cas particulier

$$(5) \qquad P(\rho, t) = 0 \qquad Q(t, \theta) = 0$$

où P a la signification déjà donnée, Q étant un nouveau polynôme *arbitraire* de degré r en t, p en θ; l'équation $P = 0$ est l'équation tangentielle de la courbe γ déjà définie; l'équation $Q(t, \theta) = 0$ est l'équation tangentielle d'une courbe γ' analogue, enveloppe de la corde joignant les points t et θ de C_2; de ρ *origine*, menons une tangente à γ', d'où l'extrêmité θ: la corde (ρ, θ) enveloppe une courbe $\bar{\gamma}$, en général irréductible, dont l'équation tangentielle s'obtient en éliminant t entre les équations (5), soit

$$(6) \qquad \bar{P}(\rho, \theta) = 0$$

Opérons, par le procédé indiqué, sur $\bar{\gamma}$; autrement dit éliminons ρ entre

$$(7) \qquad \bar{P}(\rho, \theta_1) = 0 \qquad \bar{P}(\rho, \theta_2) = 0$$

d'où $\quad (8) \qquad R(\theta_1, \theta_2) = 0$

L'équation $R(\theta_1\ \theta_2) = 0$ admet d'abord les solutions (θ_1, θ_2) provenant du système

$$(9) \qquad Q(t, \theta_1) = 0 \qquad Q(t, \theta_2) = 0$$

Le morceau correspondant s'obtient en opérant directement sur γ' (au lieu de γ); ce morceau enlevé, il restera à joindre deux points θ_1, θ_2 provenant d'une chaîne $(\rho, t_1. \theta_1)$ et d'une chaîne $(\rho. t_2, \theta_2)$ avec $t_1 \neq t_2$. La courbe Γ ainsi obtenue est de classe $rqnp$, car à θ_1, correspondent r valeurs de t; à un t choisi correspondent q valeurs de ρ; à ce ρ choisi correspondent seulement n valeurs de t' autres que t, et à ce t' correspondent p valeurs de θ_2. Chaque point de C_2 est sommet de $\dfrac{p^2 r q n(n-1)}{2}$ triangles et chaque tangente de Γ porte $p(n-1)$ triangles. En effet, pour un triangle $\theta_1\ \theta_2\ \theta_2'$, il suffira de considérer le schéma

$$\begin{array}{ccccccccc} \theta_1 & \overset{\frown}{r} & t & \overset{\frown}{q} & \rho & \overset{\frown}{n} & t_1 & \overset{\frown}{p} & \theta_2 \\ & & & & & \underset{\smile}{n-1} & t_1' & \underset{\smile}{p} & \theta_2' \end{array}$$

Il est nécessaire que θ_1 et θ_2, θ_1 et θ_2' soient liés par le même ρ.

intermédiaire: le ρ a rq déterminations pour un même θ_1; à ρ correspondent n valeurs de t_1, autres que le t primitif: cela donne $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons t_1, t'_1 possibles une fois ρ choisi; t_1 donne p valeurs de θ_2, et t'_1 p aussi pour θ'_1; cela donne bien $\frac{p^2 rq\, n(n-1)}{2}$ triangles ayant leur sommet en θ_1; une fois θ_1 et θ_2 adoptés, il reste $p(n-1)$ choix possibles pour θ'_2.

La répétition de ce procédé consisterait à écrire

$$(10)\quad P_1(\rho, \rho_1)=0 \quad P_2(\rho_1, \rho_2)=0 \ldots \quad P_h(\rho_{h-1}, \rho_h)=0 \quad P_{h+1}(\rho_h, \theta)=0$$

L'élimination de $\rho_1 . \rho_2, \ldots \rho_h$ entre les $h+1$ équations (10) conduirait à une relation

$$\bar{P}(\rho, \theta)=0$$

sur laquelle en recommencerait les raisonnements On a épuisé ainsi tous les cas possibles pour une courbe C_2 et les triangles de Poncelet.

22. — Polygones de Poncelet relatifs à une conique.

Nous avons rencontré, au paragraphe précédent, à propos des polygones réguliers, la propriété suivante: quand la courbe Γ obtenue dans la recherche des triangles de Poncelet se décompose en $\Gamma', \Gamma'', \ldots$ il peut arriver que ∞^1 triangles aient deux côtés tangents à Γ' et le troisième tangent à Γ'', puis que la suppression de Γ'' permette sur C_2 de revenir au point de départ par une succession de h tangentes à Γ' ($h \geqslant 4$). Cette circonstance est l'une de celles qui permettent d'obtenir des polygones de Poncelet par opposition aux triangles.

Au point de vue de l'application aux surfaces réglées, nous avons vu qu'il peut y avoir deux cas différents: avec une conique C_2 du plan et une cubique de l'espace nous n'avons à signaler que des chaînes de génératrices inscrites dans la cubique multiple et se refermant; elles ne donnent que des plans bitangents. On peut au contraire avoir des surfaces réglées ayant des plans n fois tangents ($n \geqslant 4$) et donnant donc des polygones plans de Poncelet dans l'espace: les surfaces réciproques de celles que nous avons obtenues dans le premier cas nous donnent souvent des exemples du second cas.

Amorçons le problème pour une conique C_2; si la courbe Γ peut se décomposer, une chaîne d'équations *arbitraires*

$$(1)\qquad f_1(t_1, t_2)=0, \qquad f_2(t_2, t_3)=0, \ldots \qquad f_{h-1}(t_{h-1}, t_g)=0$$

définit une chaîne polygonale ouverte $M_1 M_2 \dots M_h$ dont les côtés sont successivement tangents aux courbes $\Gamma^{(1)} \dots \Gamma^{(h-1)}$ d'équation correspondante: l'élimination de $t_2, t_3 \dots t_{h-1}$ fournit l'équation $f_h(t_h, t_1) = 0$ de la courbe Γ_h enveloppe de la corde $M_h M_1$ de fermeture. On a ainsi, suivant que $h = 3$ ou $h > 3$, une solution évidente des triangles et polygones de Poncelet pour C_2 et la courbe décomposée $\Gamma^{(1)} \Gamma^{(2)} \dots \Gamma^{(h-1)} \Gamma^{(h)}$. Pour être banale, cette solution suggère néanmoins d'intéressants problèmes que Cayley n'a pas dédaigné de traiter; M. Lebesgue a donné, aux Annales de Toulouse (1922) une belle démonstration géométrique des résultats de Cayley: si $\Gamma^{(h)} \dots \Gamma^{(h-1)}$ sont des coniques appartenant avec C_2 à un même faisceau linéaire, $\Gamma^{(h)}$ se décompose en 2^{h-2} coniques du même faisceau, et une permutation quelconque dans l'ordre des $(h-1)$ coniques $\Gamma^{(1)}, \dots \Gamma^{(h-1)}$ ne change pas le total des coniques résultantes.

J'ai cité aussi des solutions banales, au fond de même espèce: soient une conique C_2 et une courbe Γ_n de classe n $(n \geqslant 3)$ fournissant des triangles: chaque tangente à Γ_n porte $(n-1)$ triangles; prenons-en deux et supprimons le côté commun: on a un *quadrilatère* de Poncelet relatif à C_2 et Γ_n, $t_1 t_2 t_3 t_4$; de même avec un nouveau triangle de côté $t_3 t_4$, on pourra obtenir un pentagone... jusqu'à une certaine limite. Si donc nous pouvons réaliser divers circuits partant d'un point de C_2 pour y revenir, nous prendrons pour valeur du nombre des côtés du polygone le nombre *minimum* relatif aux circuits, à l'exclusion des autres.

Les coordonnées du point courant de C_2 étant exprimées toujours rationnellement en t, nous obtenons des quadrilatères P_4 en éliminant les paramètres ρ, σ entre les équations

$$(2) \qquad f(\rho, t_1) = 0, \qquad \phi(\sigma, t_2) = 0, \qquad \psi(\rho, \sigma) = 0$$

supposées algébriques entières, de degré respectif r, p_1, s, p_2, R, S en $\rho, t_1, \sigma, t_2, \rho$ et σ; en effet ρ, σ étant choisis et vérifiant $\psi = 0$, soient t_1' et t_1 deux valeurs de t_1 correspondant à ρ, t_2' et t_2 correspondant à σ: on aura le circuit $t_1 t_2 t_1' t_2' t_1$ qui donne bien un quadrilatère dont chaque côté enveloppe la courbe Γ d'équation

$$(3) \qquad R(t_1, t_2) = 0$$

obtenue par l'élimination indiquée; si les conditions de *symétrie* $f(u, v) \equiv \phi(u, v)$ et $\psi(u, v) \equiv \psi(u, v)$ sont réalisées, Γ est de classe $r S p_2$; s'il y a *dissymétrie*, la classe est $r S p_2 + s R p_1$.

Cet exemple, en cas de dissymétrie, est précieux pour nous montrer que certaines solutions sont défectueuses par certaines côtés et qu'il y a désaccord entre certains considérations analytiques ou géométriques. En effet, nous voyons bien que la conique C_2 peut disparaître complètement et qu'il suffit de garder une chaîne de nombres $t_1, t_2, \ldots t_{p-1}, t_p, t_1$ tels que, *dans cet ordre*, chacun se déduise du précédent par l'itération d'une même substitution algébrique. On doit donc avoir, avec la même fonction f, qui n'est pas nécessairement symétrique

(4) $\quad f(t_1, t_2) = 0 \quad f(t_2, t_3) = 0 \ldots \quad f(t_{p-1}, t_p) = 0 \quad f(t_p, t_1) = 0$

Or le quadrilatère $t_1\, t_2\, t_1'\, t_2'\, t$ ne répond pas à la question car $t_1\, t_2\, t_1'$ fournit deux origines en t_1 et t_1' et une même extrêmité en t_2, tandis qu'avec la définition analytique (4) l'extrêmité d'un maillon doit être origine du suivant: cette objection toutefois tombe dans le cas de *symétrie*.

Avec les conditions (4), les nombres $t_1, t_2, \ldots t_p$ devront être solutions d'une même équation $F(t, \rho) = 0$, algébrique en t et contenant un paramètre ρ; si $f(t_1, t_2)$ est du premier degré en t_2, l'équation F est *abélienne, quel que soit ρ, par rapport à t, et réciproquement, toute équation abélienne fournit une solution du problème précis traité ici.* En particulier, l'équation $t^p - \rho = 0$, déjà citée, fournit les polygones réguliers. L'exemple des polygones de Poncelet relatifs à deux coniques non bitangentes fournit cette fois une fonction $f(t_1, t_2)$ *symétrique* et du second degré en t_1 et t_2 séparément. Nous rentrons donc, en supposant le degré de f en t_1 et t_2 quelconque, dans le domaine si vaste de la résolution des équations algébriques. Je me contenterai donc de donner le moyen de fabriquer des solutions de plus en plus étendues à partir d'une solution déjà obtenue.

Remplaçons un point t de C_2 par l'un quelconque des points θ liés à t par l'équation *arbitraire* $\phi(t, \theta) = 0$ de degré a en t et α en θ; chaque polygone $t_1\, t_2 \ldots t_{p-1}\, t_p\, t_1$ fournira α^p polygones $\theta_1\, \theta_2 \ldots \theta_{p-1}\, \theta_p\, \theta_1$ relatifs à une nouvelle courbe Γ' dont la classe est celle de Γ multipliée par $a\alpha$.

23. — Triangles et polygones de Poncelet relatifs à une courbe quelconque.

Dans tout ce qui a été dit jusqu'ici, la conique C_2 n'entre que comme moyen de figurer géométriquement la variation d'une quantité numérique t; si donc en même temps que C_2 nous prenons une *conrbe unicursale quelconque* C, nous pouvons associer sur C et C_2 les points de même t; tout triangle de Poncelet, tout polygone de Poncelet obtenu sur C_2 donne une figure correspondante, du même nombre côtés sur C, car il n'y a que les relations entre les t des sommets successifs qui interviennent; si, ensuite, sur un cône admettant C pour directrice nous construisons une courbe C' n'ayant qu'un point commun avec chaque génératrice du cône, donc unicursale aussi, nous avons une surface réglée S' offrant les mêmes particularités que la surface réglée S, étudiée jusqu'ici, au point de vue des plans tangents multiples. Ici on peut encore dire que la relation $f(t', t'') = 0$ est une équation tangentielle de la courbe Γ; mais sur chaque corde (t', t'') de la courbe C, il y a lieu de considérer trois espèces de points: *l'origine* t', *l'extrêmité* t'' et les points communs *apparents*, c'est à-dire les nouveaux points communs à la corde et à C: dans l'espace, sur la surface réglée S', ils ne correspondent pas à une intersection de C' et de la génératrice. D'ailleurs si nous considérons les surfaces réglées avec cubique gauche multiple il suffit de remplacer le point de vue, pris jusqu'ici sur la cubique, par un points non situé sur elle pour que la projection de la cubique soit non plus une C_2 mais une cubique C_3.

Pour une courbe quelconque C, au lieu de C_2 ou d'une courbe unicursale, on peut d'ailleurs faire intervenir chaque point, non plus par un seul nombre t, mais par deux nombres (x, y) liés par une relation algébrique. Donc au lieu d'éliminer ρ entre $P(\rho, t_1) = 0$ et $P(\rho, t_2) = 0$, pour les triangles, on peut éliminer X, Y entre

$$(1) \qquad \begin{cases} P[X, Y; x_1, y_1] = 0 \qquad P[X, Y; x_2, y_2] = 0 \\ (fX, Y) = 0, \qquad f(x_1, y_1) = 0, \qquad f(x_2, y_2) = 0 \end{cases}$$

et l'on aura la courbe Γ la plus générale admettant avec C des triangles inscrits dans C, circonscrits à Γ; cela revient encore à introduire une courbe γ auxiliaire d'équation tangentielle $P[X, Y; x, y] = 0$. Il est inutile de recommencer les explications: la seule difficulté supplémentaire à surmonter se présente pour le calcul des entiers: classe de Γ, nombre de triangles ayant un sommet donné sur C, ou reposant sur une tangente de Γ.

Le méthode s'applique évidemment encore pour des courbes d'équation transcendante, pourvu que le premier membre de l'équation soit analytique. A ce point de vue il suffit de faire correspondre sur une courbe algébrique ou transcendante C et sur une conique C_2 les points qui sur C ont une abscisse x et sur C_2 un paramètre unicursal t égaux (ou encore les abscisses égales) pour avoir immédiatement des polygones sur C correspondants aux polygones obtenus sur C_2.

D'ailleurs le problème des quadrilatères, des pentagones... pour deux courbes algébriques admet toujours des solutions en nombre *fini* pour deux courbes quelconques: un certain nombre d'entre elles sont des chaînes *repliées* partant d'un point d'intersection ou du point de contact d'une tangente commune; nous avons étudié le cas où au lieu d'un nombre fini il y a un nombre infini de solutions. Dans le cas d'un nombre infini, les chaînes repliées se terminent en deux points d'intersection ou en deux points de contact des tangents communes si n est pair, en deux points d'espèce différente si n est impair, exactement comme dans le cas des coniques.

Sur quelques familles de quadriques attachées aux points d'une surface.

Par

Lucien Godeaux.

Professeur à l'Université de Liége.

Si l'on considère la représentation des droites de l'espace ordinaire S_3 par les points d'une hyperquadrique Q d'un espace linéaire à cinq dimensions S_5, le complexe des tangentes à une surface (x) de S_3 a pour image une variété à trois dimensions de Q formée de ∞^2 droites. La congruence formée par ces droites admet comme surfaces focales les surfaces (U), (V), qui représentent les tangentes asymptotiques de la surface (x). MM. Bompiani [1]) et Tzitzeica [2]) ont fait voir que les surfaces (U) et (V) sont les transformées de Laplace l'une de l'autre. Cette propriété a été utilisée depuis dans différentes recherches par les auteurs cités [3]), par M. Fubini [4]), par M. Terracini [5]) et par nous-même [6]). Nous

---

[1]) Bompiani. *Sull'equazione di Laplace* (Rend. del Circolo matem. di Palermo, 1912, t. XXXIV, pp. 383–407).

[2]) Tzitzeica. *Géométrie différentielle projective des réseaux* (Paris, Gauthier-Villars, 1924).

[3]) Bompiani. *La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1926, pp. 395—400). *Ancora sulla geometria delle superficie considerate nello spazio rigato* (Idem. 2° sem. 1926, pp. 262—267). *I fondamenti geometrici della teoria proiettiva delle curve e delle superficie.* Appendice II^a alla *Geometria proiettiva differenziale di* G. Fubini e E Cech (Bologne, Zanichelli, t. II, 1927). Voir aussi les applications à la théorie des congruences W dans l'ouvrage cité de M. Tzitzeica.

[4]) Fubini. *Sulla geometria di una superficie nel gruppo proiettivo e nel gruppo conforme* (Rend. R. Accad. Lincei, 1° sem. 1927, pp 373—377).

[5]) Terracini. *Sulla teoria delle congruenze W* (Rend. R. Istituto Lomb. 1927, pp. 657—674). *Nuove ricerche sulle congruenze W* (Atti R. Istituto Veneto, 1928, pp. 179—196).

[6]) Godeaux. *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé* (Bull. Acad. roy. de Belgique, 1927, pp. 812—826, 1928, pp. 31—41). *Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie* (Idem, pp. 158—186).

avons en particulier montré que la suite de Laplace déterminée par les surfaces (U), (V) est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q et nous en avons déduit l'existence d'une famille de quadriques attachée en chaque point x de la surface (x). La première surface de cette famille est la quadrique de Lie; deux surfaces consécutives de cette famille se touchent en quatre points. Nous nous proposons d'étendre ces propriétés de la manière suivante: Nous considérons une congruence W ayant la surface (x) comme surface focale; les points de Q images des droites de cette congruence forment une surface (J) conjuguée à la congruence des droites UV et cette surface (J) donne naissance à une suite de Laplace inscrite dans celle dont font partie les surfaces (U), (V). Cette nouvelle suite de Laplace donne naissance à deux familles de quadriques attachées en chaque point de la surface (x). Nous étudions ces familles dans leurs relations entre elles et avec la famille contenant la quadrique de Lie dont il a été question plus haut. Nous associons ensuite à la congruence W ayant pour image la surface (J), deux congruences dont nous déterminons les éléments focaux.

1. — Soit (x) une surface de S_3 rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 de Wilczyński[1]) d'un point x de (x) satisfont au système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable

$$x^{20} + 2\,bx^{01} + c_1\,x = 0,$$
$$x^{02} + 2\,ax^{10} + c_2\,x = 0,$$

où l'on a posé

$$x^{ik} = \frac{\partial^{i+k} x}{\partial u^i\,\partial v^k}.$$

Nous supposerons qne la surface (x) n'est pas réglée, ce qui revient à supposer que les fonctions a, b de u, v ne sont pas identiquement nulles.

Les coordonnées radiales de la tangente asymptotique en un point x à la ligne u (sur laquelle u varie) sont

$$U_{ik} = x_i x_k^{10} - x_k x_i^{10}, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Nous écrirons en abrégé

$$U = |x \;\; x^{10}|.$$

---

[1]) Wilczyński. *Projective differential geometry of curved surfaces* Trans. Americ. Mathem. Society, 1907, t. VIII, pp. 233—260; 1908, t. IX, pp. 79—120).

Les coordonnées du point U de Q satisfont à l'équation de Laplace

$$(1) \qquad U^{11} - (\log. b)^{01} U^{10} - 4abU = 0,$$

où l'on a posé

$$U^{ik} = \frac{\partial^{i+k} U}{\partial u^i \partial v^k},$$

$$(\log. b)^{01} = \frac{\partial}{\partial v} (\log. b).$$

De même, la tangente au point x à la ligne asymptotique v est représentée sur Q par le point

$$V = |x \; x^{01}|$$

dont les coordonnées satisfont à l'équation de Laplace

$$(2) \qquad V^{11} - (\log. a)^{10} V^{01} - 4abV = 0.$$

On a d'ailleurs

$$U^{10} + 2bV = 0,$$
$$V^{01} + 2aU = 0.$$

Posons

$$h_1 = -\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (\log. b) + 4ab = -(\log. b)^{11} + 4ab,$$
$$h_2 = -(\log. b h_1)^{11} + h_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$h_n = -(\log. b h_1 h_2 \ldots h_{n-1})^{11} + h_{n-1}, \ldots$$

et

$$k_1 = -(\log. a)^{11} + 4ab,$$
$$k_2 = -(\log. a k_1)^{11} + k_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$k_n = -(\log. a k_1 k_2 \ldots k_{n-1})^{11} + k_{n-1}, \ldots$$

Les invariants relatifs de l'équation (1) sont h_1 et $4ab$, ceux de l'équation (2) sont $4ab$ et k_1.

Appelons

$$U_1 = U^{01} - (\log. b)^{01} U,$$
$$U_2 = U_1^{01} - (\log. b h_1)^{01} U,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$U_n = U_{n-1}^{01} - (\log. b h_1 h_2 \ldots h_{n-1})^{01} U_{n-1}, \ldots$$

les transformés de Laplace successifs de U dans le sens des v,

$$V_1 = V^{10} - (\log. a)^{10} V,$$
$$V_2 = V_1^{10} - (\log. ak_1)^{10} V_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$V_n = V_{n-1}^{10} - (\log. ak_1 k_2 \ldots k_{n-1})^{10} V_{n-1}, \ldots$$

ceux de V dans le sens des u.

Les points U_n, V_n satisfont respectivement aux équations de Laplace.

$$U_n^{11} - (\log. bh_1 h_2 \ldots h_n)^{01} U_n^{10} - h_n U_n = 0,$$
$$V_n^{11} - (\log. ak_1 k_2 \ldots k_n)^{10} V_n^{01} - k_n V_n = 0,$$

dont les invariants relatifs sont h_n, h_{n-1} pour la première, k_n, k_{n-1} pour la seconde.

La suite de Laplace $\ldots U_n \ldots U_1 U V V_1 \ldots$ est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q. D'une manière précise,

les points	ont pour hyperplans polaires
U_n	$V_{n-2} V_{n-1} V_n V_{n+1} V_{n+2}$,
. .	. . . .
U_2	$V V_1 V_2 V_3 V_4$,
U_1	$U V V_1 V_2 V_3$,
U	$U_1 U V V_1 V_2$,
V	$U_2 U_1 U V V_1$,
V_1	$U_3 U_2 U_1 U V$,
. .	. . . . . .
V	$U_{n+2} U_{n+1} U_n U_{n-1} U_{n-2}$.

Les plans $U_n U_{n+1} U_{n+2}$ et $V_n V_{n+1} V_{n+2}$ sont donc conjugués par rapport à Q et les sections de cette hyperquadrique par ces plans représentent deux demi-quadriques de même support Φ_n de S_3. En particulier, les sections de Q par les plans $UU_1 U_2$, $VV_1 V_2$ représentent deux demi-quadriques ayant pour support commun la quadrique de Lie Φ.

La famille de quadriques Φ, Φ_1, $\Phi_2, \ldots, \ldots$ attachée au point x (supposé non parabolique) de la surface (x), possède les propriétés suivantes:

1) Deux quadriques consécutives Φ_n, Φ_{n+1} se touchent en quatre points.

2) Lorsque x décrit la surface (x), ces quatre points appartiennent à l'enveloppe des quadriques Φ_n, Φ_{n+1} et sont des points caractéristiques de ces quadriqnes.

Mous supposerons dans la suite, pour fixer les idées, que la suite de Laplace $\ldots U, V \ldots$ est illimitée dans les deux sens.

2. — Considérons une tangente j au point x à la surface (x) engendrant, lorsque x varie, une congruence W. Le point J, image de la droite j sur l'hyperquadrique Q, engendre une surface (J) conjuguée à la congruence des droites UV. Par suite, on a

$$J = \lambda U - \mu V,$$

les fonctions λ, μ de u, v satisfaisant aux équations

$$\mu^{10} + 2b\lambda = 0, \qquad \lambda^{01} + 2a\mu = 0.$$

Les coordonnées du point J satisfont à l'équation de Laplace

$$J^{11} - (\log. \mu)^{01} J^{10} - (\log. \lambda)^{10} J^{01} - [4ab - (\log. \lambda)^{10} (\log. \mu)^{01}] J = 0,$$

dont les invariants sont

$$H = -(\log. \mu)^{11} + 4ab,$$
$$K = -(\log. \lambda)^{11} + 4ab.$$

Le transformé de Laplace dans le sens des v du point J est donné par

$$J^{01} - (\log. \mu)^{01} J = \lambda \left[\left(\log. \frac{b}{\mu} \right)^{01} U + U_1 \right].$$

Nous représenterons ce point par J_1 et nous écrirons, pour déterminer ses coordonnées,

$$\lambda J_1 = J^{01} - (\log. \mu)^{01} J.$$

Les coordonnées du point J_1 satisfont à l'équation de Laplace

$$J_1^{11} - \left(\log. \frac{H\mu}{\lambda} \right)^{01} J_1^{10} - HJ = 0,$$

dont les invariants sont H et

$$H_1 = -\left(\log. \frac{H\mu}{\lambda} \right)^{11} + H.$$

Nous désignerons par J_2 le transformé de Laplace de J_1 dans le sens des v et nous écrirons

$$J_2 = J_1^{01} - \left(\log. \frac{H\mu}{\lambda} \right)^{01} J_1.$$

Plus généralement, nous désignerons par $J_3, J_4, \ldots, J_n, \ldots$ les transformés successifs de Laplace de J_2 dans le sens des v. Nous aurons

$$J_n = J_{n-1}^{01} - \left(\log. \frac{HH_1 \ldots H_{n-2}\mu}{\lambda}\right)^{01} J_{n-1},$$

moyennant

$$H_i = -\left(\log. \frac{HH_1 \ldots H_{i-1}\mu}{\lambda}\right)^{11} + H_{i-1}.$$

Les coordonnées de J_n satisfont à l'équation de Laplace

$$J_n^{11} - \left(\log. \frac{HH_1 \ldots H_{n-1}\mu}{\lambda}\right)^{01} J_n^{10} - H_{n-1} J_n = 0,$$

dont les invariants sont H_{n-1} et H_n.

Le transformé de Laplace de J dans le sens des u est

$$J^{10} - (\log. \lambda)^{10} J = -\mu\left[\left(\log. \frac{a}{\lambda}\right)^{10} V + V_1\right].$$

Nous réprésenterons ce point par

$$-\mu J_{-1} = J^{10} - (\log. \lambda)^{10} J.$$

Nous désignerons ensuite par $J_{-2}, J_{-3}, \ldots, J_{-n}$ les transformés de Laplace successifs de J_{-1} dans le sens des u. En définissant les nombres $K_1, K_2, \ldots$ par la formule

$$K_i = -\left(\log. \frac{KK_1 \ldots K_{i-1}\lambda}{\mu}\right)^{11} + K_{i-1},$$

nous aurons

$$J_{-n} = J_{-(n-1)}^{10} - \left(\log. \frac{KK_1 \ldots K_{n-2}\lambda}{\mu}\right)^{10} J_{-(n-1)}.$$

Les coordonnées de J_{-n} satisfont à l'équation de Laplace

$$J_{-n}^{11} - \left(\log. \frac{KK_1 \ldots K_{n-1}\lambda}{\mu}\right)^{10} J_{-n}^{01} - K_{n-1} J_{-n} = 0,$$

dont les invariants sont K_{n-1} et K_n.

La suite de Laplace $\ldots J_{-n} \ldots J_{-1} \ldots JJ_1 \ldots J_n$ est comme on sait inscrite dans la suite $\ldots V_n \ldots V_1\, VUU_1 \ldots U_n \ldots$ D'une manière précise, le point J_{-n} appartient à la droite $V_n V_{n-1}$ et le point J_n à la droite $U_n U_{n-1}$.

3. — Désignons par P_i le pôle de l'hyperplan $J_{i-2} J_{i-2} J_i J_{i+1} J_{i+2}$ par rapport à l'hyperquadrique Q On sait que les points P_i forment une suite de Laplace circonscrite à la suite $\dots UV \dots$

Nous pouvons obtenir une expression de P_0 ou P de la manière suivante:

Représentons par M_1, M_2, M_3, M_4 les points de Q images des arêtes du tétraède $x x^{10} x^{01} x^{11}$ distinctes des tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01}, en posant

$$M_1 = | x \quad x^{11} |, \quad M_2 = | x^{10} x^{01} |,$$
$$M_3 = | x^{10} x^{11} |, \quad M_4 = | x^{01} x^{11} |.$$

Tout point de S_5 peut être représenté par

$$p_{12} U + p_{13} V + p_{14} M_1 + p_{23} M_2 + p_{24} M_3 + p_{34} M_4.$$

Nous dirons que les quantités p_{ik} sont les coordonnées locales de ce point.

En particulier, on a

$$J_1 = M_1 - M_2 - (\log. \mu)^{01} U,$$
$$J_{-1} = M_1 + M_2 - (\log. \lambda)^{10} V,$$
$$J_2 = - \left[(\log. \mu)^{02} + 2(a^{10} + c_2) - (\log. \mu)^{01} \left(\log. \frac{H\mu}{\lambda} \right)^{01} \right] U + 4abV$$
$$- \left(\log. \frac{H\mu^2}{\lambda} \right)^{01} (M_1 - M_2) + 2 M_4,$$
$$J_{-2} = - \left[(\log. \lambda)^{20} + 2(b^{01} + c_1) - (\log. \lambda)^{10} \left(\log \frac{K\lambda}{\mu} \right)^{10} \right] V + 4abU$$
$$- \left(\log. \frac{K\lambda^2}{\mu} \right)^{10} (M_1 + M_2) + 2 M_3.$$

Posons

$$\Omega(p, q) = p_{12} q_{34} + \dots + p_{34} q_{12};$$

de sorte que l'équation de Q en coordonnées locales soit

$$\Omega(p, p) = 0.$$

Les coordonnées locales du point P doivent satisfaire aux équations

$$\Omega(J_i. P) = 0. \qquad (i = -2. -1, 0, 1, 2).$$

On en déduit

$$P = (4ab\lambda - \beta_1\mu) U + (4ab\mu - \alpha_1\lambda) V + \lambda^{10}(M_1 + M_2) + \mu^{01}(M_1 - M_2)$$
$$- 2\lambda M_3 - 2\mu M_4,$$

moyennant

$$2\alpha_1 = 2(\log\ \lambda)^{20} + \overline{(\log\ \lambda)^{10}}^{2} + 4(b^{01} + c_1),$$

$$2\beta_1 = 2(\log.\ \mu)^{02} + \overline{(\log.\ \mu)^{01}}^{2} + 4(a^{10} + c_2).$$

Observons que les hyperplans $J_{-2}J_{-1}JJ_1J_2$, $J_{-1}JJ_1J_2J_3$ ont en commun l'espace linéaire à trois dimensions $J_{-1}JJ_1J_2$. Par cet espace, passe un hyperplan contenant U_2 et par suite, U_1, U, V, V_1, c'est-à-dire l'hyperplan polaire de V par rapport à Q. Par suite, la droite PP_1 passe par V. De même, la droite $P_{-1}P$ passe par U et, d'une manière générale, la droite P_iP_{i+1} passe par V_i, la droite $P_{-i}P_{-(i+1)}$ par U_i.

4. — Considérons le plan JJ_1J_2. La section de Q par ce plan représente une demi-quadrique dont nous désignerons le support par Ψ. La demi-quadrique complémentaire a pour image la section de Q par le plan PP_1P_2 conjugué de JJ_1J_2 par rapport à cette hyperquadrique. La droite PP_1 passant par V et la droite P_1P_2 par V_1, le plan PP_1P_2 contient la droite VV_1. Celle-ci est tangente en V à l'hyperquadrique Q. D'autre part, les sections de Q par les plans UU_1U_2, VV_1V_2 représentent les demi-quadriques ayant pour support la quadrique de Lie attachée au point x. Les plans UU_1U_2 et JJ_1J_2 ont en commun la droite J_1J_2 qui coupe Q en général en deux points distincts. Par suite la quadrique Ψ se raccorde à la quadrique de Lie Φ suivant la droite xx^{01} et rencontre encore cette quadrique suivant deux génératrices de l'autre mode.

Considérons maintenant le plan $J_1J_2J_3$ et son conjugué $P_1P_2P_3$ par rapport à Q. Les sections de Q par ces plans représentent deux demi-quadriques ayant pour support commun une quadrique Ψ_1. Le plan $P_1P_2P_3$ contient la droite V_1V_2, le plan $J_1J_2J_3$ rencontre le plan UU_1U_2 suivant la droite J_1J_2, par suite les quadriques Ψ_1 et Φ ont en commun quatre droites et deux de ces droites appartiennent également à Ψ.

Les quadriques Ψ et Ψ_1 ont en commun quatre droites: deux appartiennent également à Φ; les deux autres ont pour images les sections de Q par la droite P_1P_2.

Plus généralement, désignons par Ψ_n la quadrique support des demi-quadriques ayant pour images les sections de Q par les plans $J_nJ_{n+1}J_{n+2}$, $P_nP_{n+1}P_{n+2}$. Le plan $P_nP_{n+1}P_{n+2}$ contient la droite

$V_n V_{n+1}$, par suite il existe deux droites (génératrices d'un même mode) communes aux trois quadriques Ψ_n, Φ_{n-1}, Φ_n.

D'autre part, les plans $J_{n-1} J_n J_{n+1}$, $J_n J_{n+1} J_{n+2}$, $U_{n-1} U_n U_{n+1}$ ont en commun la droite $J_n J_{n+1}$, par suite les quadriques Ψ_{n-1}, Ψ_n et Φ_{n-1} ont deux génératrices du même mode en commun.

Observons enfin que les quadriques Ψ_{n-1}, Ψ_n ont en commun les quatre droites dont les images sont les sections de Q par les droites $J_n J_{n+1}$, $P_n P_{n+1}$.

Nous avons ainsi attaché au point x (non parabolique) de la surface (x) et à la tangente j à cette surface en ce point, une suite de quadriques Ψ, Ψ_1. $\Psi_2, \ldots, \Psi_n, \ldots$ telles que deux quadriques consécutives se touchent en quatre points. La première quadrique Ψ se raccorde à la quadrique de Lie le long de la tangente à l'asymptotique v. Deux quadriques consécutives Ψ_{n-1}, Ψ_n ont en commun deux génératrices de même mode appartenant à la quadrique Φ_{n-1}. La quadrique Ψ_n a en commun avec les quadriques Φ_{n-1}, Φ_n deux génératrices de l'autre mode.

Dans notre note *sur les lignes asymptotiques des surfaces* citée plus haut, nous avons démontré que l'enveloppe d'une quadrique telle que Ψ_n, lorsque u et v varient, est le lieu des points communs aux droites ayant pour images les sections de l'hyperquadrique Q par les droites $J_n J_{n+1}$ et $P_n P_{n+1}$ d'une part, par les droites $J_{n+1} J_{n+1}$, $P_{n-1} P_{n+2}$ d'autre part. Il en résulte que l'enveloppe des quadriques Ψ_n se compose de deux nappes, l'une touchée en quatre points par les quadriques appartient à l'enveloppe des quadriques Ψ_{n-1}; l'autre, touchée également en quatre points par les quadriques, appartient à l'enveloppe des quadriques Ψ_{n+1}.

En considérant, au lieu des plans $J J_1 J_2$, $J_1 J_2 J_3, \ldots$, les plans $J J_{-1} J_{-2}$, $J_{-1} J_{-2} J_{-3}, \ldots$, on obtient une seconde famille de quadriques analogues à la famille Ψ, $\Psi_1, \ldots$ Nous désignerons ces quadriques par Ψ', $\Psi'_1, \ldots$ La quadrique Ψ' se raccorde à la quadrique de Lie le long de la droite $x x^{10}$.

Nous pouvons résumer les résultats obtenus dans l'énoncé suivant:

Etant données une congruence W et une surface focale (x) de cette congruence, à chaque point x de la surface (x) sont attachées trois familles de quadriques:

1) *Une famille de quadriques Φ, Φ_1, $\Phi_2, \ldots$ dont la première est la quadrique de Lie de la surface (x). Deuv quadriques consécutives se touchent en quatre points.*

2) *Une famille de quadriques Ψ, Ψ_1, Ψ_2,... dont la première se raccorde à la quadrique de Lie le long d'une droite tangente en x à une asymptotique de (x). Deux quadriques consécutives de la famille se touchent en quatre points. Les quadriques Ψ_{n-1}, Ψ_n, Φ_{n-1}, ont en commun deux génératrices de même mode et les quadriques Ψ_n, Φ_{n-1}, Φ_n deux génératrices de l'autre mode.*

3) *Une famille de quadriques Ψ', Ψ'_1, Ψ'_2,... analogue à la précédente et dont on obtient les propriétés en permutant, dans l'énoncé précédent, les rôles des deux modes de génératrices des quadriques Φ, Φ_1, Φ_2,...*

Dans ce qui précède, nous avons d'ailleurs supposé la suite de Laplace ... UV ... illimitée dans les deux sens S'il en était autrement, les familles de quadriques ne contiendraient qu'un nombre fini de surfaces.

On peut encore observer que si la congruence W considérée a ses deux surfaces focales confondues, c'est-à-dire si la droite j coïncide soit avec xx^{10}, soit avec xx^{01} les quadriques Ψ_n, Ψ'_n coïncident avec Φ_n.

5. — On peut former les équations des quadriques Ψ, Ψ' de la manière suivante.

Un point quelconque du plan JJ_1J_2 a des coordonnées de la forme

$$\xi_0 J + \xi_1 J_1 + \xi_2 J_2, \tag{1}$$

et la section de Q par le plan considéré est le lieu des points donnés par

$$\Omega(\xi_0 J + \xi_1 J_1 + \xi_2 J_2,\ \xi_0 J + \xi_1 J_1 + \xi_2 J_2) = 0,$$

c'est à dire par

$$2\xi_2(\beta_1\xi_2 - \lambda\xi_0) + \left[\xi_1 - \left(\log.\frac{H\mu}{\lambda}\right)^{01}\xi_2\right]^2 = 0. \tag{2}$$

Tout point de S_3 a d'autre part des coordonnées de la forme

$$xz_1 + x^{10}z_2 + x^{01}z_3 + x^{11}z_4.$$

Nous dirons que z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales du point considéré. Cela étant, la droite de S_3 représentée par le point (1) de S_5, ξ_0, ξ_1, ξ_2 satisfaisant à (2), a pour équations en coordonnées locales

$$\xi_1 z_4 - \xi_2 \left[2 z_2 + z_4 \left(\log. \frac{H\mu^2}{\lambda}\right)^{01}\right] = 0.$$

$$\mu \xi_0 z_4 + \xi_1 z_3 - \xi_2 \left[2 z_1 + 4 ab z_4 + z_3 \left(\log. \frac{H\mu^3}{\lambda}\right)^{01}\right] = 0.$$

En éliminant les ξ entre ces équations et l'équation (2), on obtient l'équation de la quadrique Ψ:

$$2\mu\beta_1 z_4^2 - 4\lambda(z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2 ab z_4^2) + \mu[2 z_2 + z_4 (\log. \mu)^{01}]^2 = 0.$$

De même, l'équation de la quadrique Ψ' est

$$2\lambda\alpha_1 z_4^2 - 4\mu(z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2 ab z_4^2) + \lambda[2 z_3 + z_4 (\log. \lambda)^{10}]^2 = 0.$$

Les quadriques Ψ et Ψ' ont en commun la droite j, dont les équations en coordonnées locales sont

$$z_4 = 0, \; \mu z_2 + \lambda z_3 = 0,$$

et une cubique gauche d'équations

$$\left\| \begin{matrix} z_4 & \mu z_2 + \lambda z_3 \\ 4 z_2 & 4\lambda z_1 - 4\mu^{01} z_2 - \mu z_4 [2\beta_1 + \overline{(\log. \mu)^{01}}^2] \\ 4 z_3 & 4\mu z_1 - 4\lambda^{10} z_3 - \lambda z_4 [2\alpha_1 + \overline{(\log. \lambda)^{10}}^2] \end{matrix} \right\| = 0.$$

Cette cubique gauche passe par le point x ($z_2 = z_3 = z_4 = 0$). Elle est en général irréductible.

Considérons maintenant deux surfaces Ψ_n, Ψ_n. Les plans $J_n J_{n+1} J_{n+2}$ et $P_{-n} P_{-(n+1)} P_{-(n+2)}$ ont en commun un seul point, J_{n+1}. Ce point n'appartient pas en général à l'hyperquadrique Q. De même, les plans $J_{-n} J_{-(n+1)} J_{-(n+1)}$ et $P_n P_{n+1} P_{n+2}$ ont en commun le seul point $J_{-(n+1)}$ qui n'appartient pas en général à Q. Par suite, les quadriques Ψ_n, Ψ'_n n'ont aucune droite en commun et se rencontrent en général suivant une courbe gauche du quatrième ordre.

6. — A la congruence W formée par les droites j, on peut associer des couples de congruences de la manière suivante: La droite $J_n J_{-n}$ n'appartient pas en général à Q et rencontre cette hyperquadrique en deux points. Ces points représentent deux droites de S_3 qui, lorsque le point x décrit la surface (x), engendrent deux congruences associées à la congruence (j). Nous nous occuperons des deux premières congruences ainsi obtenues, en faisant $n = 1$.

Les points de rencontre de la droite $J_1 J_{-1}$ avec Q sont

$$T_1 = J_1 + J_{-1} = 2 M_1 - (\log. \mu)^{01} U - (\log. \lambda)^{10} V,$$
$$T_2 = - J_1 + J_{-1} = 2 M_2 + (\log. \mu)^{01} U - (\log. \lambda)^{10} V.$$

Le premier de ces points représente une droite t_1 de S_3 passant par x, le second une droite t_2 située dans le plan $x x^{10} x^{01}$ tangent à la surface (x) au point x. Les droites t_1, t_2 sont d'ailleurs conjuguées par rapport à la quadrique de Lie Φ.

Dans la congruence (j), les foyers de la droite j sont le point x et le point

$$y = (\mu^{01} - \lambda^{10}) x + 2 \lambda x^{10} - 2 \mu x^{01}.$$

Les plans focaux de cette droite sont, en coordonnées locales,

$$z_4 = 0, \; 2(\mu z_2 + \lambda z_3) + (\lambda^{10} + \mu^{01}) z_4 = 0.$$

Les équations locales de la droite t_1 sont

$$\frac{z_2}{(\log. \mu)^{01}} = \frac{z_3}{(\log. \lambda)^{10}} = \frac{z_4}{-2},$$

et cette droite appartient donc au second des plans focaux de la droite j. Les équations locales de la droite t_2 sont

$$z_4 = 0, \; 2 z_1 + z_2 (\log. \lambda)^{10} + z_3 (\log. \mu)^{01} = 0.$$

Cette droite appartient au plan focal $z_4 = 0$ de la droite j et passe par le foyer y de cette droite.

La détermination des points et des plans focaux des droites t_1, t_2 peut se faire de la manière suivante. Envisageons la congruence (t_1) et la surface (T_1) qui la représente sur Q. Aux développables de la congruence (t_1) correspondent sur la surface (T_1) des courbes dont les tangentes appartiennent à Q. La détermination des plans focaux et des foyers d'une droite (t_1) revient donc à celle des tangentes en T_1 à la surface (T_1) qui appartiennent à Q. Les points de rencontre de ces tangentes avec la droite $T_1^{10} T_1^{01}$ sont donnés par

(1) $$\Omega(\xi T_1^{10} + \eta T_1^{01}, \; \xi T_1^{10} + \eta T_1^{01}) = 0.$$

Nous avons

$$T_1^{10} = \left[4ab + 2b \frac{b}{\mu} \left(\log. \frac{b}{\mu}\right)^{01}\right] U - [(\log. \lambda)^{20} + 2(c_1 + 2b^{01}) -$$
$$- 2b (\log. \mu)^{01}] V - (\log. \lambda)^{10} (M_1 + M_2) + 2 M_3,$$

$$T_1^{01} = \left[4\,ab + 2\,a\frac{\mu}{\lambda}\left(\log.\,\frac{a}{\lambda}\right)^{10}\right]V - [(\log.\,\mu)^{02} + 2(c_2 + 2\,a^{10}) -$$
$$- 2\,a\,(\log.\,\lambda)^{10}]\,U - (\log.\,\mu)^{01}\,(M_1 - M_2) + 2\,M_4.$$

L'équation (1) devient donc

$$\left[\alpha_1 + 2\,b\left(\log.\,\frac{b}{\mu}\right)^{01}\right]\xi^2 + 2\left[b\,\frac{\lambda}{\mu}\left(\log.\,\frac{b}{\mu}\right)^{01} - a\,\frac{\mu}{\lambda}\left(\log.\,\frac{a}{\lambda}\right)^{10}\right]\xi\eta$$
$$(2) \qquad - \left[\beta_1 + 2\,a\left(\log.\,\frac{a}{\lambda}\right)^{10}\right]\eta^2 = 0.$$

L'équation donnant les points de rencontre de la droite $T_2^{10}\,T_2^{01}$ avec les tangentes au point T_2 à la surface (T_2) et appartenant à Q, est de même

$$\left[\alpha_1 - 2\,b\left(\log.\,\frac{b}{\mu}\right)^{01}\right]\xi^2 + 2\left[b\,\frac{\lambda}{\mu}\left(\log.\,\frac{b}{\mu}\right)^{01} - a\,\frac{\lambda}{\mu}\left(\log\,\frac{a}{\lambda}\right)^{10}\right]\xi\eta$$
$$(3) \qquad - \left[\beta_1 - 2\,a\left(\log.\,\frac{a}{\lambda}\right)^{10}\right]\eta^2 = 0.$$

Désignons par ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2 les racines de l'équation (2). Les points

$$\xi_1\,T_1^{10} + \eta_1\,T_1^{01},\ \ \xi_2\,T_1^{10} + \eta_2\,T_1^{01}$$

représentent deux droites de S_3 qui rencontrent la droite t_1 aux foyers et qui déterminent avec cette droite les plans focaux.

Les plans focaux de la droite t_1 sont par suite

$$2\,\eta_i\,z_2 - 2\,\xi_i\,z_3 - z_4\,[\xi_i\,(\log.\,\lambda)^{10} - \eta_i\,(\log.\,\mu)^{01}] = 0. \qquad (i = 1,\,2).$$

Les foyers de la droite t_1 ont pour coordonnées locales

$$\rho\,z_1 = 2\left[\alpha_1 + 2\,b\left(\log.\,\frac{b}{\mu}\right)^{01}\right]\xi_i + \left[(\log.\,\lambda)^{10}\,(\log.\,\mu)^{01} -\right.$$
$$\left. - 8\,ab - 4\,a\,\frac{\mu}{\lambda}\left(\log.\,\frac{a}{\lambda}\right)^{10}\right]\eta_i,\ \ \rho\,z_2 = -\,2\,\eta_i\,(\log.\,\mu)^{01}, \qquad (i = 1, 2)$$
$$\rho\,z_3 = -\,2\,\eta_i\,(\log.\,\lambda)^{10},\ \ \rho\,z_4 = 4\,\eta_i.$$

Si nous désignons par ξ_1', η_1' et ξ_2', η_2' les racines de l'équation (3), nous trouvons de même pour les foyers de la droite t_2,

$$\begin{aligned}&\rho\,z_1 = \xi_i'\,(\log.\,\lambda)^{10} + \eta_i'\,(\log.\,\mu)^{01},\ \ \rho\,z_2 = -\,2\,\xi_i',\\ &\rho\,z_3 = -\,2\,\eta_i',\ \ z_4 = 0,\end{aligned} \qquad (i = 1, 2),$$

et pour ses plans focaux

$$z_1\,[\xi_i'\,(\log.\,\lambda)^{10} + \eta_i'\,(\log.\,\mu)^{01}] -$$

$$
\begin{aligned}
&- z_2 \left[\xi'_i \{(\log.\lambda)^{20} + 2b(\log.\mu)^{01} + 2c_1\} + \right.\\
&\left. + 2a\eta'_i \left\{2b - \frac{\mu}{\lambda}\left(\log.\frac{a}{\lambda}\right)^{10}\right\}\right] \qquad (i=1,2)\\
&- z_3 \left[2b\xi'_i \left\{2a - \frac{\lambda}{\mu}\left(\log.\frac{b}{\mu}\right)^{01}\right\} + \eta'_i\{(\log.\mu)^{02} + \right.\\
&\left. + 2a(\log.\lambda)^{10} + 2c_2\}\right] = 0.
\end{aligned}
$$

On peut donner une construction géométrique des droites t_1, t_2.

Les quadriques Ψ, Ψ_1 se touchent eu quatre points sommets d'un tétraèdre dont quatre arêtes appartiennent aux deux quadriques. Les deux autres arêtes sont les droites communes aux quatre complexes linéaires dont les secondes images sont les points J_1, J_2, P_1, P_2. L'espace linéaire à trois dimensions déterminé par ces points coupe Q suivant l'image d'une congruence linéaire ayant ces deux arêtes comme directrices; cet espace contient les points T_1, T_2, donc les droites t_1, t_2 s'appuient sur les deux arêtes en question. On peut répéter ce raisonnement en considérant les quadriques Ψ', Ψ'_1. Par suite :

Les droites t_1, t_2 s'appuient sur les arêtes des deux tétraèdres ayant pour sommets les points de contact des quadriques Ψ, Ψ_1 d'une part, des quadriques Ψ', Ψ'_1 d'autre part, et n'appartenant pas à ces quadriques.

On observera que si la droite j coïncide avec une des tangentes asymptotiques de la surface (x), les droites t_1, t_2 coïncident avec les directrices de Wilczyński de cette surface.

Liége, le 28 mai 1928.

Sur quelques points de la théorie de la longueur.

Par

S. Gołąb (Cracovie).

Je démontre dans cet article le théorème suivant (§ 3):

Si $\{C_\nu\}$ est une suite de continus rectifiables ayant comme limite au sens de Hausdorff *un continu C, alors on a*

$$\lim_{\nu/\infty} \mathit{int}\ \text{longueur}\ C_\nu \geqslant \text{longueur}\ C.$$

Je prouve ensuite deux généralisations de ce théorème (§ 4 et 5) que j'utiliserai dans un article ultérieur.

J'obtiens comme conséquence de ce théorème une condition suffisante (§ 7) pour que la longueur du continu C_ν tende vers la longueur de C lorsque C_ν tend vers C au sens de Hausdorff d'où résulte immédiatement un théorème antérieur de M. Ważewski.

Le paragraphe 6 contient un corollaire rentrant dans l'Analyse fonctionnelle.

Pour les raisons de la clarté la démonstration du théorème du § 3 est précédée par quelques théorèmes préliminaires (§ 1 et 2).

L'idée d'examiner le sujet du présent travail m'est venue à l'occasion de l'étude d'un problème posé par M. Ważewski. C'est le premier théorème du § 7 qui présente la solution du problème en question.

Notations. A et B étant deux ensembles nous désignons par

$$A\,.\,B,\quad A+B,\quad A-B$$

respectivement la partie commune de A et B, leur somme et leur différence.

$$A=0,\quad A\subset B,\quad a\,\varepsilon\, A$$

veut dire que respectivement: A est un ensemble vide, A est une partie de B, a est un élément de A.

a, b étant deux points et A, B deux ensembles (non vides) de points, nous désignons par

$\rho(a, b)$ la distance de ces points.

$\rho(a, A)$ la borne inférieure de $\rho(a, x)$ lorsque x varie dans A.

$\rho(A, B)$ la borne inférieure de $\rho(x, B)$ lorsque x varie dans A.

$\rho_H(A, B)$ la distance entre A et B au sens de Hausdorff [1]) c.-à-d. le plus grand des deux nombres suivants:

borne supérieure de $\rho(y, A)$, où $y \in B$,

borne supérieure de $\rho(x, B)$, où $x \in A$.

$m(A) = mA$ désigne la mesure de A au sens de Lebesgue.

long A = longueur de A [2]).

$g(t)$ étant une fonction définie dans un intervalle Δ, $g(A)$ désigne la classe de toutes les valeurs $g(t)$, que l'on obtient lorsque t varie dans A.

Soit

$$G(t) = \{g_1(t), \ldots, g_n(t)\}$$

un point mobile de l'espace cartésien à n dimensions ($n \geqslant 1$). Nous appelons [3]) $G(t)$ transformation absolument continue lorsque les fonctions $g_i(t)$ (composantes de cette transformation) sont absolument continues.

Si la transformation $G(t)$ est définie dans un intervalle Δ et si $A \subset \Delta$, alors $G(A)$ désigne la classe de tous les points $G(t)$, que l'on obtient en faisant varier t dans A.

Si $L \subset G(\Delta)$, alors $G^{-1}(L)$ désigne la classe de tous les t pour lesquels le point $G(t)$ appartient à L.

Nous posons enfin

$$|G'(t)| = \sqrt{\sum_{i/1}^{n} \left(\frac{d g_i(t)}{dt}\right)^2}.$$

On sait que, $G(t)$ étant une transformation absolument continue dans Δ, $|G'(t)|$ existe presque partout dans Δ.

§ 1. **Théorème.** *Soit* $\{g_\nu(t)\}$ *une suite de fonctions définies dans un intervalle fermé et borné* Δ *qui satisfont aux conditions suivantes:*

1° $|g_\nu(t') - g_\nu(t'')| \leqslant k|t' - t''|$, *lorsque* t' et t'' *appartiennent à* Δ $(\nu/1, 2, \ldots)$.

---

[1]) Hausdorff, Grundrüge der Mengenlehre, 1 édition p. 293.

[2]) Comme nous ne traiterons que des parties des continus rectifiables toutes les définitions (Janzen, Peano — Gross, Caratheodory, Ważewski) de la longueur sont compatibles.

[3]) D'après M. Ważewski (cf. T. Ważewski, Contribution à la théorie de la longueur. Annales de la Soc. Pol. des Math. T. VII).

2⁰ $\lim_{\nu/\infty} g_\nu(t) = g(t)$, *lorsque* t *appartient à* Δ.

Soit A *une partie mesurable de* Δ. *Ceci étant on a*:

$$\liminf_{\nu/\infty} m[g_\nu(A)] \geqslant m[g(A)].$$

Ce théorème reste encore vrai si l'on suppose que les fonctions $g_\nu(t)$ satisfont à la condition que voici:

1⁰. A tout $\epsilon > 0$ correspond un δ positif et independant de ν, tel que $m[g_\nu(A)] \leqslant \epsilon$ lorsque $m(A) \leqslant \delta$.

2⁰ les fonctions $g_\nu(t)$ sont continues et tendent uniformément vers $g(t)$.

L'exemple qui suit, montre à quel point les conditions précédentes sont essentielles.

Considérons une suite de divisions (D_ν) de l'intervalle $[0, 1]$ en un nombre pair d'intervalles fermés consécutifs. Arrangons-nous de façon que le maximum des longueurs des intervalles de la division D_ν tende vers zéro lorsque $\nu \to \infty$.

Désignons par B_ν l'ensemble-somme des intervalles pairs de la division D_ν. Soumettons les divisions D_ν à la condition $\sum_{\nu/1}^{\infty} m(B_\nu) < 1$.

Nous désignons par $g_\nu(t)$ la fonction

1⁰ constante dans tout intervalle impair $[\alpha, \beta]$ de la division D_ν et égale à α.

2⁰ linéaire dans chaque intervalle pair de D_ν.

Les fonctions $g_\nu(t)$ sont absolument continues et tendent dans $[0, 1]$ uniformément vers $g(t) = t$.

Posons $A = [0, 1] - \sum_{\nu/1}^{\infty} B_\nu$. On a $m\,g(A) = m(A) > 0$, $m\,g_\nu(A) = 0$, donc $\liminf_{\nu/\infty} m\,g_\nu(A) < m\,g(A)$.

La démonstration de ce théorème sera ramenée à quelques lemmes que nous énoncerons sous l'hypothèse que les prémisses du théorème précedent sont vérifiées.

Remarques. On observe facilement que

α) $|g(t') - g(t'')| \leqslant k|t' - t''|$,

β) les fonctions $g(t)$ et $g_\nu(t)$ sont absolument continues,

γ) on a presque partout dans Δ $|g'(t)| \leqslant k$, $|g'_\nu(t)| \leqslant k$, $(\nu/1, 2, \dots)$,

δ) les fonctions $g_\nu(t)$ tendent dans Δ uniformément vers $g(t)$[1].

Lemme 1. Si $\epsilon > 0$, il existe une somme finie d'intervalles partiels de Δ et disjoints

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_p,$$

[1]) Ascoli, Mem. Accad. Linc (3), 18 (1884) p. 545/80.

telle que
$$m(A - S) + m(S - A) < \epsilon$$ [1].

Lemme 2. Si
$$|f(t') - f(t'')| \leqslant k|t' - t''|$$
pour toute couple t', t'' des points appartenant à Δ, alors

(1) $$mf(A) \leqslant km(A).$$

Démonstration. On a [2])

(2) $$mf(A) = \int_A \frac{|f'(t)|}{k_A(t)}\, dt \leqslant \int_A |f'(t)|\, dt.$$

En raison de la Remarque γ) on obtient:

(3) $$\int_A |f'(t)|\, dt \leqslant k.\, m(A).$$

(2) et (3) impliquent (1).

Lemme 3. S étant une partie mesurable de Δ on a

(4) $$|mg_\nu(A) - mg_\nu(S)| \leqslant k[m(A - S) + m(S - A)].$$

Démonstration. On a
$$g_\nu(A) = g_\nu(S.A) + g_\nu(A - S)$$
$$g_\nu(S) = g_\nu(S.A) + g_\nu(S - A)$$
d'où

(5) $$\begin{cases} mg_\nu(A) \geqslant mg_\nu(SA) \\ mg_\nu(S) \geqslant mg_\nu(SA) \end{cases}$$

Du Lemme 2 découlent les inégalités:

(6) $$\left|\begin{aligned} mg_\nu(A) &\leqslant mg_\nu(SA) + mg_\nu(A - S) \leqslant \\ &\leqslant mg_\nu(SA) + km(A - S) \leqslant \\ &\leqslant mg_\nu(SA) + km(A - S) + km(S - A) \\ mg_\nu(S) &\leqslant mg_\nu(SA) + km(A - S) + km(S - A) \end{aligned}\right.$$

De (5) et (6) résulte (4).

---

[1]) On couvre A par une somme d'intervalles disjoints $\Sigma = S_1 + S_2 + \ldots$, telle que $m(\Sigma - A) < \frac{\epsilon}{2}$. On garde un nombre fini des intervalles S_ν de façon que la somme des mesures des intervalles supprimés soit inférieure à $\frac{\epsilon}{2}$.

[2]) T. Ważewski, Contribution etc. l. c. Théorème 1, p. 25 — par $k_A(t)$ nous désignons le nombre des solutions en u de l'équation $f(u) = f(t)$, où $u \in A$. Nous posons $\frac{1}{k_A(t)} = 0$ lorsque $k_A(t)$ n'est pas fini.

Démonstration du Théorème.

α) Cas particulier. $A = S$ est une somme finie d'intervalles disjoints $S_1 + S_2 + \ldots + S_p$. Il s'agit de prouver que

$$\liminf_{\nu/\infty} m g_\nu(S) \geqslant m g(S). \tag{7}$$

Si quelques uns des $g(S_\pi)$ se reduisaient à des points, il suffirait évidemment démontrer le théorème relativement à la somme des autres S_π. Nous supposons donc qu'aucun $g(S_\pi)$ ne se réduit à un seul point. Chaque $g(S_\pi)$ est, par conséquent, un intervalle.

Soit $\epsilon > 0$. Soit T_π un intervalle contenu *à l'interieur* de $g(S_\pi)$ $(\pi/1, 1, \ldots, p)$ et tel que

$$m(g(S_\pi) - T_\pi) \leqslant \frac{\epsilon}{p}.$$

On a apparemment

$$0 < m g(S) - m\left(\sum_{\pi/1}^{p} T_\pi\right) \leqslant \epsilon. \tag{8}$$

D'après la Remarque δ) il existe un indice ν^0 à partir duquel

$$\sum_{\pi/1}^{p} T_\pi \subset g_\nu(S).$$

De là et de (8) on a

$$\liminf_{\nu/\infty} m g_\nu(S) \geqslant m\left(\sum_{\pi/1}^{p} T_\pi\right) \geqslant m g(S) - \epsilon,$$

d'où résulte (7), car ϵ est arbitraire.

β) Cas général. Soit $\epsilon > 0$. D'après le Lemme 1 il existe une somme finie S d'intervalles disjoints, telle que

$$m(A - S) + m(S - A) \leqslant \epsilon,$$

d'où on obtient en vertu du Lemme 3 (qui subsiste pour $g(t)$)

$$m g_\nu(S) - k\epsilon \leqslant m g_\nu(A),$$
$$m g(A) - k\epsilon \leqslant m g(S)$$

et de là selon (7)

$$\liminf_{\nu/\infty} m g_\nu(A) \geqslant \liminf_{\nu/\infty} m g_\nu(S) - k\epsilon \geqslant$$
$$\geqslant m g(S) - k\epsilon \geqslant m g(A) - 2k\epsilon,$$

d'où il s'ensuit que

$$\liminf_{\nu/\infty} mg_\nu(A) \geqslant mg(A) \qquad \text{c. q. f. d.}$$

§ 2. **Lemme 1.** Soit

$$G_\nu(t) = \{g_1^\nu(t), \ldots, g_n^\nu(t)\}$$

une suite infinie de transformations absolument continues, définies dans un intervalle $\varDelta$ et telles que

$$|g_\mu^\nu(t') - g_\mu^\nu(t'')| \leqslant k|t' - t''|$$

lorsque t' et t'' appartiennent à $\varDelta$. Supposons en plus que pour tout t de $\varDelta$ on a

$$\lim_{\nu/\infty} G_\nu(t) = G(t) = \{g_1(t), \ldots, g_n(t)\}.$$

Soit L un arc simple aux extrémités a et b, contenu dans $G(\varDelta)$. Posons

$$T = G^{-1}(L).$$

Ceci étant on a

$$\liminf_{\nu/\infty} \operatorname{long} G_\nu(T) \geqslant \rho(a, b).$$

Démonstration. Les ensembles $G_\nu(T)$ sont rectifiables car T est un ensemble fermé [1]. On peut assujettir l'espace à n dimensions à une transformation cartésienne de façon que le segment a, b passe en un segment α, β $[\rho(a, b) = \beta - a > 0]$ situé sur l'axe nouveau y_1.

Les fonctions $G(t)$ et $G_\nu(t)$ passent respectivement en fonctions

$$H(t) = \{h_1(t), \ldots, h_n(t)\}, \; H_\nu(t) = \{h_1^\nu(t), \ldots, h_n^\nu(t)\}.$$

On a presque partout dans $\varDelta$ (cf. § 1, Rem γ)

$$\sqrt{\sum_{\mu/1}^{n} \left(\frac{d}{dt} h_\mu^\nu(t)\right)^2} = \sqrt{\sum_{\mu/1}^{n} \left(\frac{d}{dt} g_\mu^\nu(t)\right)^2} \leqslant k\sqrt{n}$$

et de là

$$|h_\mu^1(t') - h_\mu^1(t'')| \leqslant k\sqrt{n}\,|t' - t''|.$$

On a
$$H(T) = L,$$
$$\operatorname{long} G_\nu(T) = \operatorname{long} H_\nu(T) \text{ [2]}.$$

[1] T. Ważewski, Contribution etc. l. c. p. 28, Théorème 1.

[2] Ibidem p. 14, Remarque 2 et p. 28, Théorème 1.

La projection $h_1(T)$ de L sur l'axe y_1 est un segment contenant l'intervalle $[\alpha, \beta]$, donc

$$m h_1(T) \geqslant \beta - \alpha.$$

On a donc (cf. (1) et le Théorème du § 1)

$$\liminf_{\nu/\infty} m h_1^\nu(T) \geqslant m h_1(T) \geqslant \beta - \alpha. \tag{2}$$

Mais

$$m h_1^\nu(T) \leqslant \text{long } H_\nu(T) = \text{long } G_\nu(T),$$

car $h_1^\nu(T)$ est la projection de $H_\nu(T)$ sur l'axe y_1. De là d'après (2) il s'ensuit que

$$\liminf_{\nu/\infty} \text{long } G_\nu(T) \geqslant \beta - \alpha = \rho(a, b), \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Lemme 2. Sous les hypothèses du lemme précédent on a

$$\liminf \text{long } G_\nu(\varDelta) \geqslant \text{long } G(\varDelta)$$

Démonstration. Observons que la représentation est absolument continue, car ses fonctions composantes satisfont à la condition de Lipschitz (cf. Rem α), § 1). $G(\varDelta)$ est donc un continu rectifiable.

Soit $\epsilon > 0$. D'après un résultat de M. Ważewski [1]) il existe une suite finie d'arcs simples rectifiables et disjoints

$$B_1, B_2, \ldots, B_w$$

tels que

$$\text{long} \sum_{i/1}^{w} B_i = \sum_{i/1}^{w} \text{long } B_i \geqslant \text{long } G(\varDelta) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Sur chaque B_i il existe une suite finie de sous-arcs simples et disjoints, tels que la somme des longueurs des cordes rectilignes correspondant à ces sous-arcs est plus grande que

$$\text{long } B_i - \frac{\epsilon}{2w}. \text{ [2])}$$

---

[1]) cf. T. Ważewski, Kontinua prostowalne etc., Dodatek do Rocznika Pol. Tow. Mat. Théorème du § 29 p. 49.

[2]) On choisit, en ce déplaçant sur B_i dans un certain sens, une suite finie de points q_λ, telle que $\Sigma \rho(q_\lambda, q_{\lambda+1}) > \text{long } B_i - \frac{\epsilon}{2w}$. On choisit ensuite à l'intérieur de l'arc $(q_\lambda, q_{\lambda+1})$ deux points $p_\lambda, p_{\lambda+1}$ de façon que

$$\Sigma \rho(p_\lambda, p_{\lambda+1}) > \text{long } B_i - \frac{\epsilon}{2w}.$$

En désignant par

$$L_1, L_2, \ldots, L_S$$

la suite de tous les sous-arcs de tous les B_l et par a_i et b les extrémités de L_i, on a

(3) $$L_i \,.\, L_j = 0 \qquad (i \neq j),$$

(4) $$\rho(L_i, L_j) > 0 \qquad (i \neq j),$$

(5) $$\sum_{i/1}^{S} \rho(a_i, b_i) \geqslant \text{long } G(\Delta) - \epsilon.$$

Nous posons

$$A_i = G^{-1}(L_i).$$

On a

(6) $$L_i = G(A_i)$$

et d'après (3)

$$A_i \,.\, A_j = 0 \qquad (i \neq j).$$

Comme $G_\nu(t)$ tend uniformément vers $G(t)$ (cf. Rem δ), § 1), donc

$$\rho_H(G_\nu(A_i), G(A_i)) \to 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots S)$$

et par conséquent on a, selon (4) et (6), à partir d'un certain indice ν

$$G_\nu(A_i) \,.\, G_\nu(A_j) = 0 \qquad (i \neq j).$$

De là

(7) $$\text{long} \sum_{i/1}^{S} G_\nu(A_i) = \sum_{i/1}^{S} \text{long } G_\nu(A_i).$$

D'après le lemme précédent on a

$$\liminf_{\nu/\infty} \text{long } G_\nu(A_i) \geqslant \rho(a_i, b_i). \qquad (i/1, \ldots S)$$

De là selon (7) et (5) il résulte que

$$\liminf_{\nu/\infty} \text{long} \sum_{i/1}^{S} G_\nu(A_i) \geqslant \sum_{i/1}^{S} \rho(a_i, b_i) \geqslant \text{long } G(\Delta) - \epsilon.$$

Comme $\sum_{i/1}^{S} G_\nu(A_i) \subset G_\nu(\Delta)$, on a

$$\liminf_{\nu/\infty} \text{long } G_\nu(\Delta) \geqslant \liminf_{\nu/\infty} \text{long} \sum_{i/1}^{S} G_\nu(A_i).$$

ϵ étant arbitraire on obtient de deux inégalités précédentes

$$\liminf_{\nu/\infty} \operatorname{long} G_\nu(\Delta) \geqslant \operatorname{long} G(\Delta), \qquad \text{c. q. f. d.}$$

§ 3. **Théorème.** *Soit* $\{C_\nu\}$ *une suite de continus rectifiables ayant comme limite au sens de* Hausdorff *un continu* C:

(1) $$\lim_{\nu/\infty} \rho_H(C_\nu, C) = 0.$$

On a

(2) $$\liminf_{\nu/\infty} \operatorname{long} C_\nu \geqslant \operatorname{long} C.$$

Remarque 1. Le théorème précédent peut être généralisé au cas où l'hypothèse (1) est remplacée par l'hypothèse:

$$\lim_{\nu/\infty} \left\{ \max_{x \varepsilon C} \rho(x, C_\nu) \right\} = 0.$$

Remarque 2. Il est intéressant de remarquer que ce théorème devient faux lorsqu'on y remplace la notion de la longueur d'un continu par celle de son aire. Soient en effet O un orbe de Jordan ayant une aire positive [1]) et I son intérieur. Posons $C = O + I$. Soit $\{P_\nu\}$, une suite de polygones simples, fermés, contenus dans I, ayant les intérieurs I_ν et tels qu'on ait, en posant $C_\nu = I_\nu + P_\nu$,

$$\lim_{\nu/\infty} \rho_H(C_\nu, C) = 0.$$

On a évidemment

$$\limsup \text{aire } C_\nu \leqslant \text{aire } C - \text{aire } O < \text{aire } C.$$

Démonstration. Nous traitons le seul cas intéressant où

(3) $$\operatorname{long} C > 0.$$

Supposons que (2) n'a pas lieu; il existe donc une suite partielle que nous désignons aussi par $\{C_\nu\}$ pour laquelle on a

(4) $$l = \lim \operatorname{long} C_\nu = \lim l_\nu < \operatorname{long} C \leqslant +\infty.$$

On a

(5) $$l > 0,$$

car dans le cas contraire le diamètre de C_ν tenderait vers O ce qui est imcompatible avec (1) et (3).

On peut supposer que

(6) $$l_\nu > 0. \qquad (\nu/1, 2, \ldots).$$

---

1) Un tel orbe existe, cf. par exemple W. Sierpiński: Sur une courbe non carrable, Bull. de l'Académie des Science de Cracovie, Serie A. 1913, p. 254.

D'après un résultat de M. Ważewski[1]) il existe une représentation absolument continue de C_ν

$$H_\nu(s) = \{h_1^\nu(s), \ldots, h_n^\nu(s)\}$$

définie dans l'intervalle $[0, 2l_\nu]$ telle que

$$|h_\mu^\nu(s') - h_\mu^\nu(s'')| \leqslant |s' - s''| \qquad (\mu/1, \ldots, n;\ \nu/1, 2, \ldots, \infty).$$

Posons

$$g_\mu^\nu(t) = h_\mu^\nu\left(\frac{l_\nu}{l}t\right) \qquad (\mu/1, \ldots, n;\ \nu/1, 2, \ldots, \infty)$$

et $\quad G_\nu(t) = \{g_1^\nu(t), \ldots, g_n^\nu(t)\}$.

On a dans l'intervalle $[0, 2l] = \Delta$:

$$(7) \quad \left|\begin{array}{l} |g_\mu^\nu(t') - g_\mu^\nu(t'')| \leqslant \dfrac{l_\nu}{l}|t' - t''|, \\ \qquad\qquad G_\nu(\Delta) = C_\nu. \end{array}\right.$$

D'après (4) on peut supposer, sans restreindre la généralité du raisonnement, que $\dfrac{l_\nu}{l} < 2$.

On a alors dans Δ

(8) $\quad |g_\mu^\nu(t') - g_\mu^\nu(t'')| \leqslant 2|t' - t''|$ pour $\mu = 1, \ldots n;\ \nu = 1, 2, \ldots$.

J'affirme que les C_ν, à partir d'un certain ν, sont bornés dans leur ensemble. Soit en effet c un point de C. On a

$$\lim_{\nu/\infty} \rho(c, C_\nu) = 0.$$

Le diamètre de C_ν étant inférieur à $2l$, tous les C_ν (à partir d'un certain ν) sont contenus dans le cercle de centre c et de rayon $3l$. On peut supposer que c'est le cas pour tous les C_ν.

Les fonctions $g_\mu^\nu(t)$ sont donc bornées dans leur ensemble. D'après un théorème d'Ascoli[2]) il existe une suite partielle de $\{G_\nu(t)\}$ convergente. Nous la désignons aussi par $\{G_\nu(t)\}$.

Posons

(9) $$\lim_{\nu/\infty} G_\nu(t) = G(t) = \{g_1(t), \ldots, g_n(t)\}.$$

---

[1]) T. Ważewski, Kontinua prostowalne etc. l. c. § 17 et § 24, p. 34 et 46.

[2]) cf. p. ex. Tonelli, Calcolo delle Vaziazioni, T. I. p. 76.

On a

$$\lim_{\nu/\infty} g_\mu^\nu(t) = g_\mu(t), \qquad (\mu/1, \ldots, n)$$

et (cf. Rem. α), § 1)

(10) $$|g_\mu(t') - g_\mu(t'')| \leqslant 2\,|t' - t''|,$$

lorsque t' et t'' appartiennent à Δ et $\mu = 1, 2, \ldots, n$.

La convergence des $g_\mu^\nu(t)$ étant uniforme (cf. Rem. δ, § 1) on a selon (7)

$$0 = \lim_{\nu/\infty} \rho_H(G_\nu(\Delta),\ G(\Delta)) = \lim_{\nu/\infty} \rho_H(C_\nu, G(\Delta))$$

d'où d'après (1)

$$\rho_H(G(\Delta),\ C) = 0$$ [1]

et comme C et $G(\Delta)$ sont fermés on en déduit

$$C = G(\Delta).$$

Ceci étant on a selon (4) et (7)

$$\lim_{\nu/\infty} \operatorname{long} C_\nu = \lim_{\nu/\infty} \operatorname{long} G_\nu(\Delta) < \operatorname{long} G(\Delta)$$

ce qui est contraire au résultat du Lemme 2, § 2 (cf. (10) et (8)).

Notre théorème est ainsi démontré.

§ 4. Théorème. *Soient S_0 et S_ν $(\nu/1, \ldots, \infty)$ sommes finies des continus rectifiables composées au plus de k continus (k est un entier fixe ne dépendant pas de ν). Si*

(1) $$\lim \rho_H(S_\nu, S_0) = 0,$$

on a

(2) $$\liminf_{\nu/\infty} \operatorname{long} S_\nu \geqslant \operatorname{long} S_0.$$

Démonstration. Désignons par

$$C_1^\nu, \ldots, C_{p_\nu}^\nu$$

les p_ν continus *disjoints* qui sont composantes de S_ν $(\nu/0, 1, 2, \ldots)$. On a

$$p_\nu \leqslant k \ (\nu/0, 1, \ldots),\ C_i^\nu \cdot C_j^\nu = 0 \text{ lorsque } i \neq j.$$

Posons

$$\liminf_{\nu/\infty} \operatorname{long} S_\nu = \omega.$$

---

[1]) Car: $\rho_H(G(\Delta), C) \leqslant \rho_H(G(\Delta), C_\nu) + \rho_H(C_\nu, C)$

Soit $\{\alpha_\nu\}$ une suite partielle des indices ν pour laquelle

$$\lim_{\nu/\infty} \operatorname{long} S_{\alpha_\nu} = \omega.$$

La suite bornée des nombres entiers $\{p_{\alpha_\nu}\}$ renferme une suite partielle p_{β_ν} aux termes fixes égaux à un certain nombre p.

Les suites infinies des continus $C_i^{\beta_\nu}$ sont bornées dans leur ensemble. Il existe donc une suite partielle des indices $\{\beta_\nu\}$, appelons-la $\{\gamma_\nu\}$ et un nombre fini de continus

$$C_1, C_2, \ldots, C_p,$$

tels que

$$\lim_{\nu/\infty} \rho_H(C_i^{\gamma_\nu}, C_i) = 0\ ^{1}), \qquad (i = 1, \ldots p).$$

On a (cf. le théorème du § 3)

$$\liminf_{\nu/\infty} \operatorname{long} C_i^{\gamma_\nu} \geqslant \operatorname{long} C_i, \qquad (i = 1, \ldots p).$$

Les continus: $C_1^{\gamma_\nu}, \ldots, C_p^{\gamma_\nu}$ étant disjoints, il s'ensuit que

$$\omega = \lim \operatorname{long} S_{\gamma_\nu} \geqslant \sum_{i=1}^{p} \operatorname{long} C_i \geqslant \operatorname{long}\left(\sum_{i=1}^{p} C_i\right).$$

Mais, comme il est facile à vérifier,

$$\lim_{\nu/\infty} \rho_H\left(\sum_{i=1}^{p} C_i^{\gamma_\nu}, \sum_{i=1}^{p} C_i\right) = \lim_{\nu/\infty} \rho_H\left(S_{\gamma_\nu}, \sum_{i=1}^{p} C_i\right) = 0,$$

donc (cf. la fin du § 3)

$$\sum_{i/1}^{p} C_i = S_0 \text{ et par suite}$$

$$\omega \geqslant \operatorname{long} S_0, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

§ 5. **Théorème.** *Soit $\{G_\nu(t)\}$ une suite de transformations absolument continues définies dans un intervalle fermé et borné Δ et soit A une partie mesurable de Δ. Supposons qu'on a presque partout dans Δ*

$$|G'_\nu(t)| \leqslant k < +\infty$$

et que partout dans Δ:

$$\lim G_\nu(t) = G(t).$$

---

[1]) T. Ważewski, Sur un continu singulier, Fund. Math. T. IV. p. 229, Remarque 2.

On a alors

$$\liminf \operatorname{long} G_\nu(A) \geqslant \operatorname{long} G(A).$$

Démonstration. Il est facile de prouver que $G(t)$ est une transformation absolument continue et qu'on a presque partout dans Δ

$$|G'(t)| \leqslant k.$$

On prouve ensuite facilement que pour tout B mesurable on a [1])

(1) $$\operatorname{long} G_\nu(B) \leqslant k\, m(B), \operatorname{long} G(B) \leqslant k\, m(B).$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe [2]) une suite finie d'intervalles disjoints $\Delta_1, \ldots, \Delta_p$ qui sont contenus dans Δ et tels qu'en posant

$$S = \sum_{i/1}^{p} \Delta_i \quad \text{on a}$$

(2) $$m(A - S) + m(S - A) \leqslant \epsilon.$$

On déduit facilement du théorème du § 4

(3) $$\liminf_{\nu/\infty} \operatorname{long} G_\nu(S) \geqslant \operatorname{long} G(S).$$

Mais d'après (1) et (2)

$$\operatorname{long} G_\nu(A) \geqslant \operatorname{long} G_\nu(S) - k\epsilon \qquad (\nu/1, 2, \ldots),$$
$$\operatorname{long} G(S) \geqslant \operatorname{long} G(A) - k\epsilon$$

et par conséquent (cf. (3))

$$\liminf \operatorname{long} G_\nu(A) \geqslant \operatorname{long} G(A) - 2k\epsilon.$$

ϵ étant un nombre positif arbitraire le théorème est ainsi démontré.

§ 6. **Théorème.** *Soit E une classe contenue dans un espace pour lequel on a défini la limite d'une suite d'éléments.*

Soit $F(x)$ une fonction définie dans E ayant pour valeurs des continus rectifiables (ou bien ensembles composés d'un nombre fini $\leqslant k$ de continus rectifiables, où k est indépendant de x), fonction continue au sens de Hausdorff.

Ceci étant la fonction

$$\operatorname{long} F(x)$$

est sémicontinue inférieurement.

C'est une conséquence immédiate du théorème du § 4.

[1]) T. Ważewski, Contribution etc. l. c. p. 28, Th. 1.

[2]) cf. Lemme 1 du § 1.

§ 7. Théorème. *Soit C un continu rectifiable et soit $\{C_\nu\}$ une suite de continus partiels de C tendant, au sens de* Hausdorff, *vers un continu C_0. On a alors*

$$\lim_{\nu/\infty} \operatorname{long} C_\nu = \operatorname{long} C_0. \tag{1}$$

Démonstration. C_0 appartient évidemment à C. C_0 et C_ν sont rectifiables comme parties fermées de C[1])

Nous avons selon le théorème du § 3

$$\liminf_{\nu/\infty} \operatorname{long} C_\nu \geqslant \operatorname{long} C_0. \tag{2}$$

Soit D_n la classe de tous les points x de C pour lesquels

$$\rho(x, C_0) \leqslant \frac{1}{n}.$$

D_n $(n/1, 2, 3, \ldots)$ est un ensemble fermé donc rectifiable. On a

$$C_0 = \prod_{n/1}^{\infty} D_n, \quad D_{n+1} \subset D_n,$$

$$D_n = C_0 + \sum_{i/n}^{\infty} (D_i - D_{i+1}), \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$C_0 \cdot (D_{i+1} - D_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

$$(D_i - D_{i+1}) \cdot (D_j - D_{j+1}) = 0 \qquad (i \neq j).$$

Les différences $(D_i - D_{i+1})$ sont rectifiables. On a par conséquent

$$\operatorname{long} D_n = \operatorname{long} C_0 + \sum_{i/n}^{\infty} \operatorname{long} (D_i - D_{i+1}) \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

De là il résulte que la série

$$\sum_{i/1}^{\infty} \operatorname{long} (D_i - D_{i+1})$$

est convergente.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe un indice N, tel que

$$\sum_{i/N}^{\infty} \operatorname{long} (D_i - D_{i+1}) \leqslant \epsilon$$

[1]) T. Ważewski, Contribution etc. l. c. p. 33. Théorème 5 et p. 31, Théorème 3.

donc selon (3)

$$\text{long}\, D_N \leqslant \text{long}\, C_0 + \epsilon. \tag{4}$$

Comme
$$\lim_{\nu/\infty} \rho_B(C_\nu, C_0) = 0$$

donc, à partir d'un certain indice, la distance de tous les points de C_ν au continu C_0 est inférieure à $\frac{1}{N}$ et par conséquent, à partir de cet indice, on a

$$C_\nu \subset D_N.$$

De là et de (4) il résulte

$$\limsup_{\nu/\infty} \text{long}\, C_\nu \leqslant \text{long}\, D_N \leqslant \text{long}\, C_0 + \epsilon.$$

ϵ étant arbitraire on a

$$\limsup_{\nu/\infty} \text{long}\, C_\nu \leqslant \text{long}\, C_0$$

et ceci donne avec (2)

$$\limsup_{\nu/\infty} \text{long}\, C_\nu \leqslant \text{long}\, C_0 \leqslant \liminf_{\nu/\infty} \text{long}\, C_\nu$$

d'où résulte immédiatement (1).

Nous obtenons, comme un corollaire immédiat de ce théorème, le suivant

Théorème de M. Ważewski: *Soit C_ν une suite de continus tels que*

$$C_\nu \subset C_{\nu+1}, \ \text{long}\, C_\nu \leqslant l < +\infty.$$

On a

$$\text{long}\,(\overline{\Sigma\, C_\nu}) - \text{long}\,(\Sigma\, C_\nu) = 0\ ^{1)}.$$

---

[1]) Présenté par M. Ważewski au cours du 1-er Congrès Polon. de Math. (Lwów, 9 Septembre 1927). La démonstration de M. Ważewski est basée sur un principe tout à fait différent. $\overline{A}$ désigne la somme de A et de la classe de points d'accumulation de A.

Sistemi principali di normali ad una varietà giacenti nel suo σ_2.

Nota di

Giuseppe Vitali a Padova.

In un mio recente lavoro [1]) ho considerato, per ogni superficie il cui σ_2 sia di $2+k$ dimensioni ($k=2, 3$), un sistema ortogonale di k direzioni del σ_2 perpendicolari alla superficie, sistema che risponde ad una definizione simmetrica rispetto all'insieme delle sue direzioni, e che ho chiamato *sistema principale.*

I risultati ottenuti in detto lavoro suggeriscono anche la definizione di analoghi *sistemi principali* per le varieta' a piu' di due dimensioni.

Nella parte 1ª della presente nota io do' la descrizione di tali sistemi.

La trattazione della questione in forma generale suggerisce altri modi di introdurre dei sistemi ortogonali di perpendicolari alla varieta' giacenti nel σ_2, la cui definizione ha il carattere di simmetria richiesto, e che conducono ad altri sistemi, contrariamente a quanto avevo ritenuto probabile durante la compilazione della mia nota citata.

Le molteplici maniere di introdurre tali sistemi ortogonali, e che sono suggerite dal contenuto della 1ª parte di questa nota, sono esposte nella 2ª parte, e fra queste ve ne e' una che conduce ad un sistema di normali che per le superficie generiche dello spazio lineare a 4 dimensioni coincide con quello che il Tonolo [2]) ha recentemente trovato con considerazioni geometriche.

---

[1]) G. Vitali. „Sopra alcuni invarianti associati ad una varieta' e sopra i sistemi principali di normali delle superficie". [Annales de la Société Polonaise de Mathématique. T. VII. Année 1928. pp. 43—67].

[2]) A. Tonolo. „Determinazione di un particolare sistema di normali delle superficie dell' S_4. [Memoria della R. Acc. di Torino] in corso di stampa.

PARTE 1ª.

1. Sia

$$f = f(t, u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

l'equazione di una varieta' V_n ad n dimensioni dello spazio hilbertiano [1]), ed indichiamo con g il campo di variabilita' della t.

Indichiamo poi con f_i la derivata di f rispetto ad u_i, e poniamo

[1] $$a_{r,s} = \int_g f_r f_s \, dt.$$

La forma

[2] $$\sum_1^n {}_{rs} \, a_{r,s} \, du_r \, du_s$$

da' il quadrato dell'elemento lineare della V_n, ed il suo discriminante a e' diverso da zero.

Poniamo

$$W_{r,s;p,q} = (2 a_{r,s} a_{p,q} - a_{r,p} a_{s,q} - a_{r,q} a_{s,p}) : 2$$

ed indichiamo con W il determinante di ordine

$$\nu = \binom{n+1}{2}$$

formato coi $W_{r,s;p,q}$ facendo percorrere nello stesso ordine alle coppie rs e pq tutte le ν combinazioni con ripetizione a 2 a 2 dei numeri

[3] $$1, 2, \ldots, n,$$

e mettendo in una medesima riga tutti gli elementi colla stessa coppia rs, ed in una stessa colonna quelli colla medesima coppia pq.

In un altro mio recente lavoro [2]) dimostro che

$$W = (-1)^{\binom{n+1}{2}} . (1 - n) \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}} . a^{n+1},$$

e quindi si puo' concludere che

$$W \neq 0.$$

Indico con $W^{r,s;p,q}$ il reciproco moltiplicato per $2^{\varepsilon_{rs} + \varepsilon_{pq}} : 4$ di $W_{r,s;pq}$ in W, dove ϵ_{rs} vale *zero* od 1 secondo che r ed s sono differenti od uguali.

---

[1]) G. Vitali. „Geometria nello spazio hilbertiano". [Atti del R. Istituto Veneto. 1927—28. Tomo LXXXVII — Parte seconda, pp. 349—428].

[2]) G. Vitali. „Calcolo indiretto di alcuni determinanti". [R. Istituto Veneto. Tomo LXXXVIII — 1928—29] in corso di stampa

Il sistema $W^{r,s;p,q}$ e' un sistema controvariante a 4 apici di 1ª classe (cioe' nel calcolo assoluto di Ricci).

2. Indichiamo con $f_{r,s}$ le derivate seconde covarianti di f rispetto alla forma [2].

Se

$$x_{r,s}$$

e' un covariante a 2 indici di 1ª classe, noi diremo il suo *pseudo-reciproco* il controvariante

$$x^{r,s} = \sum_{1}^{n}{}_{pq} W^{r,s;p,q} x_{p,q}.$$

Si vede facilmente che si ha

$$x_{r,s} = \sum_{1}^{n}{}_{pq} W_{r,s;p,q} x^{p,q},$$

e diremo che $x_{r,s}$ e' lo *pseudo-reciproco* del controvariante $x^{r,s}$.

Se

$$x_{r,s} \quad \text{ed} \quad y_{r,s}$$

sono due covarianti a due indici di 1ª classe, e se

$$x^{r,s} \quad \text{ed} \quad y^{r,s}$$

sono i loro pseudo-reciproci, noi porremo

$$(x, y) = \sum_{1}^{n}{}_{rs} x_{r,s} y^{r,s}.$$

Si ha subito

$$(x, y) = \sum_{1}^{n}{}_{rs} x_{r,s} \sum{}_{pq} W^{r,s;p,q} y_{p,q}$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_{pq} y_{p,q} \sum_{1}^{n}{}_{rs} W^{r,s;p,q} x_{r,s} = \sum_{1}^{n}{}_{pq} y_{p,q} x^{p,q} = (y, x).$$

In particolare sara'

$$(x, x) = \sum_{1}^{n}{}_{rs} x_{r,s} x^{r,s} = \sum_{1}^{n}{}_{rspq} W^{r,s;p,q} x_{r,s} x_{p,q} = \sum_{1}^{n}{}_{rspq} W_{r,s;p,q} x^{r,s} x^{p,q}.$$

3. Def. Se $n + k$ $(k \leq \nu)$ e' il numero delle dimensioni del σ_2 di una V_n, noi diremo *sistema principale* di normali di V_n in σ_2, ogni insieme di k parametri normali

$$\underset{i}{X} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

per cui sia

$$(\underset{i}{x}, \underset{j}{x}) = 0$$

per ogni coppia i, j di numeri diversi scelti fra i numeri

$$1, 2, \ldots, k,$$

dove

$$\underset{i}{x}_{r,s} = \int_g \underset{i}{X} f_{r,s}\, dt.$$

4. Teor. Ogni varieta' ammette uno od infiniti sistemi principali di normali nel σ_2.

Dim. Consideriamo l'equazione

[4] $$\Delta(\rho) = 0$$

in cui $\Delta(\rho)$ indica il determinante formato cogli elementi

$$\Delta_{r,s;\, p,q} = A_{r,s;\, p,q} - \rho\, W_{r,s;\, p,q} \qquad \left(A_{r,s;\, p,q} = \int_g f_{r,s} f_{p,q}\, dt\right).$$

come il determinante W e' stato formato coi $W_{r,s;\, p,q}$. Poiche' $W \neq 0$ il grado di [4] e' $= \nu$.

Poniamo

$$F_x = \sum_1^n {}_{rspq}\, A_{r,s;\, p,q}\, x^{r,s} x^{p,q} \qquad (x^{r,s} = x^{s,r}).$$

Io dico che per ogni sistema reale delle $x^{r,s}$ e'

$$F_x \geq 0,$$

infatti e'

$$F_x = \int_g \left(\sum_1^n {}_{rs}\, f_{r,s}\, x^{r,s}\right)^2 dt \geq 0.$$

Per noti teoremi [1]) noi possiano affermare che la [4] ha tutte radici reali, e che se ρ_1 e' una sua radice reale τ — upla, la caratteristica della matrice $\Delta(\rho_1)$ e' uguale a $\nu - \tau$.

Le radici di [4] diverse da zero sono in numero di k. Sia ρ_1 una radice diversa da zero di [4], e supponiamo che essa sia τ – upla. La caratteristica della matrice di $\Delta(\rho_1)$ sara' $\nu - \tau$, ed il sistema di equazioni lineari nelle $\lambda^{r,s}$ $(\lambda^{r,s} = \lambda^{s,r})$

[5] $$\sum_1^n {}_{rs}\, (A_{r,s;\, p,q} - \rho_1 W_{r,s;\, p,q})\, \lambda^{r,s} = 0$$

ha, se $\tau > 1$, infinite soluzioni che sono tutte le combinazioni lineari

---

[1]) A. Capelli. „Istituzioni di analisi algebrica" [Napoli. Ed. Pellerano Quarta edizione. pag. 923—4. n° 1567, pag. 926—8, n°. 1569].

di τ di esse fra loro indipendenti, e quindi i parametri di direzioni

[6] $$\sum_{1}^{n}{}_{rs} f_{r,s} \lambda^{r,s}$$

corrispondenti a tutte queste soluzioni danno tutte le direzioni di uno spazio lineare a τ dimensioni. Scegliamo un sistema di τ soluzioni delle [5] in modo che i corrispondenti parametri [6] formino un sistema ortogonale di parametri normali, il che, nella nostra ipotesi di $\tau > 1$, si puo' fare in infiniti modi. Se $\tau = 1$ si ha un solo parametro normale [6] (individuato all'infuori del segno, il che non ha importanza), e noi prenderemo questo parametro.

Fatto questo per tutte le radici $\neq 0$ di [4] si arriva (ed anche in piu' maniere) in possesso di k parametri normali

[6'] $$\underset{i}{X} = \sum_{1}^{n}{}_{rs} f_{r,s} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

ciascuno dei quali corrisponde ad una radice ρ_i della [4] e corrispondentemente ad essa si ha

$$\sum_{1}^{n}{}_{rs} (A_{r,s;\,p,q} - \rho_i W_{r,s;\,p,q}) \underset{i}{\lambda}^{r,s} = 0,$$

ossia

[7] $$\int_g f_{p,q} (\sum_{1}^{n}{}_{rs} f_{r,s} \underset{i}{\lambda}^{r,s}) dt = \rho_i \sum_{1}^{n}{}_{rs} W_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s}.$$

Poniamo

$$\underset{i}{x}_{p,q} = \int_g f_{p,q} \underset{i}{X} dt = \int_g f_{p,q} (\sum_{1}^{n}{}_{rs} f_{r,s} \underset{i}{\lambda}^{r,s}) dt,$$

ed abbiamo

[7'] $$\underset{i}{x}_{p,q} = \sum_{1}^{n}{}_{rs} W_{r,s;\,p,q} (\rho_i \underset{i}{\lambda}_{r,s}),$$

e quindi i sistemi

$$\underset{i}{x}_{p,q} \quad \text{e} \quad \rho_i \underset{i}{\lambda}^{p,q}$$

sono pseudo-reciproci, e noi potremo scrivere

[7''] $$\underset{i}{x}^{p,q} = \rho_i \underset{i}{\lambda}^{p,q}.$$

Moltiplicando i due membri della [7] per $\underset{j}{\lambda}^{p,q}$ $(j \neq i)$ e sommando rispetto a pq, si ha

[8] $$\sum_{1}^{n}{}_{rspq} A_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{j}{\lambda}^{p,q} = \rho_i \sum_{1}^{n}{}_{rspq} W_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{j}{\lambda}^{p,q}$$

e tenendo conto delle [6]

$$\int_g \underset{i}{X} \cdot \underset{j}{X} dt = \rho_i \sum_1^n{}_{rspq} \; W_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{j}{\lambda}^{p,q}.$$

Ora se $\rho_i = \rho_j$, i parametri $\underset{i}{X}$ ed $\underset{j}{X}$ sono fra loro ortogonali, ossia

[9] $$\int_g \underset{i}{X} \cdot \underset{j}{X} dt = 0,$$

e, poiche' $\rho_i \neq 0$, sara'

[10] $$\sum_1^n{}_{rspq} W_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{j}{\lambda}^{p,q} = 0.$$

Se poi $\rho_i \neq \rho_j$, la [8] scambiando fra loro i e j diventa

[8′] $$\Sigma_{rspq} A_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{j}{\lambda}^{p,q} = \rho_j \Sigma_{rspq} W_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{j}{\lambda}^{p,q}$$

e dalle [8] ed [8′] si deducono le [9] e [10]. Allora i parametri [6] formano un sistema ortogonale. Resta a provare che per ogni coppia i, j $(i \neq j)$ e'

[11] $$(\underset{i}{x}, \underset{j}{x}) = 0.$$

Ora, tenendo presente le [7′], [7″] e [10], si ha

$$(\underset{i}{x}, \underset{j}{x}) = \Sigma_{pq} \underset{i}{x}_{p,q} \underset{j}{x}^{p,q} = \sum_1^n{}_{pq} (\Sigma_{rs} W_{r,s;\,p,q} \, \rho_i \underset{i}{\lambda}^{r,s}) \cdot \rho \; \lambda^{r,s}$$

$$= \rho_i \rho_j \Sigma_{rspq} W_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{j}{\lambda}^{p,q} = 0.$$

Dunque il sistema [6] e' un sistema principale di normali in σ_2 ed il teor. e' dimostrato.

E' interessante calcolare le $(\underset{i}{x}, \underset{i}{x})$.

Si ha subito

$$(\underset{i}{x}, \underset{i}{x}) = \rho_i^2 \sum_1^n{}_{rspq} \; W_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{i}{\lambda}^{p,q}.$$

Ma dalle [8], tenendo conto del fatto che i parametri [6] sono normali si ha

$$1 = \rho_i \Sigma_{rspq} W_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{i}{\lambda}_{p,q},$$

dunque

[12] $$(\underset{i}{x}, \underset{i}{x}) = \rho_i.$$

5. Consideriamo i parametri [6] come un sistema cartesiano ortogonale nello spazio S_k (euclideo a k dimensioni) appartenente

al σ_2 e perpendicolare alla V_n, indichiamo con x_l le coordinate di un punto rispetto a questo sistema, e consideriamo il cono quadrico Q di equazione

$$\sum_1^n{}_{rs} \frac{x_l{}^2}{\rho_l} = 0.$$

Il sistema delle [6'] e' un k-edro ortogonale autopolare di questo cono.

Per gli studi da me fatti per $n = 2$, si sa che per $n = 2$ e $k = 3$ questo cono e' il cono geodetico.

Per $n > 2$, il cono geodetico non e' in generale un cono quadrico, ma ha qualche relazione con il cono Q. Vale il

Teor. Il cono geodetico e' contenuto nel cono Q.

Dim. Un punto del cono geodetico sia dato da

$$f + \sum_1^k{}_l x_l \underset{l}{X}.$$

Ricordando le [6'], esso e' allora dato

$$f + \sum_{rs} \mu^{r,s} f_{r,s}$$

dove

[13] $$\mu^{r,s} = \sum_1^k x_l \underset{i}{\lambda^{r,s}} = \sum_1^k{}_i x_i \underset{l}{x^{r,s}} : \rho_i,$$

e dovranno essere le $\mu^{r,s}$ proporzionali alle $du_r du_s$. Sia $\mu^{r,s}$ lo pseudo-reciproco di $\mu^{r,s}$. Allora

$$(\mu, \mu) = \sum_1^n{}_{rs} \mu^{r,s} \mu_{r,s} = \sum_1^n{}_{rspq} W_{r,s;\,p,q} \mu^{r,s} \mu^{p,q} =$$

$$K \sum_1^n{}_{rspq} W_{r,s;\,p,q} du_r du_s du_p du_q,$$

dove K e' un conveniente fattore di proporzionalita'. Ma, tenendo presente l'espressione di $W_{r,s;\,p,q}$,

$$\sum_1^n{}_{rspq} W_{r,s;\,p,q} du_r du_s du_p du_q = (2\,U^1 - U^3 - U^2) : 2 = 0,$$

dove

$$U = \sum_1^n{}_{rs} a_{r,s} du_r du_s,$$

dunque

$$(\mu, \mu) = 0.$$

Ed osservando che da [13] si ricava

$$\mu_{r,s} = \sum_1^k{}_i x_i \underset{i}{x_{r,s}} : \rho_i;$$

si ha, tenendo conto delle [11] e delle [12],

$$0=(\mu,\mu)=\sum_1^k{}_i\ x_i^2\,.\,(x,x):\rho_i^2=\sum_1^k{}_i\,x_i^2:\rho_i,$$

e questo prova appunto che il cono geodetico appartiene al cono Q.

Cor. Se $k=n$, il cono geodetico coincide col cono Q, e quindi e' un cono quadrico.

Dim. Infatti se $k=n$, il cono geodetico ha lo stesso numero di dimensioni del cono Q, dunque esso coincide con Q.

PARTE 2^a.

1. Le considerazioni della parte 1^a, escluse quelle del n° 5, si possono ripetere anche quando al posto del sistema $W_{r,s;p,q}$ si mettesse un altro sistema simmetrico rispetto agli indici di ciascuna delle coppie rs e pq e rispetto a queste due coppie, col corrispondente determinante W diverso da zero, ed in particolare se si pone

$$W_{r,s;p,q}=\lambda a_{r,s}\,a_{p,q}+\mu(a_{r,p}\,a_{s,q}+a_{r,q}\,a_{s,p}),$$

con $\mu\neq 0$ ed $n\lambda+2\mu\neq 0$, oppure se, indicando con $a^{r,s}$ il reciproco di $a_{r,s}$, e se il sistema

$$\alpha_{r,s}=\xi\,.\,a_{r,s}+\zeta\,.\sum_1^n{}_{pq}A_{r,s;p,q}\,a^{p,q}$$

in cui ξ e ζ sono numeri noti, ha il discriminante diverso da zero, ponendo

$$W_{r,s;p,q}=\lambda\alpha_{r,s}\,\alpha_{p,q}+\mu(\alpha_{r,p}\,\alpha_{s,q}+\alpha_{r,q}\,\alpha_{s,p}),$$

con $\mu\neq 0$ e $n\lambda+2\mu\neq 0$. In questo ultimo caso, se $\lambda=2$ e $\mu=-1$, si possono ripetere anche le considerazioni del n° 5.

2. Siano

$$\underset{i}{z}_{r,s}\qquad(i=1,2,\ldots\nu)$$

ν covarianti a 2 indici di 1^a classe, ed indichiamo con Z il determinante di ordine ν che ha per elementi della i-esima riga le

$$2\underset{i}{z}_{r,s}:2^{\varepsilon_{rs}},$$

e costante in ogni colonna la coppia di indici rs. Evidentemente una sostituzione invertibile che porta dalle variabili u alle variabili v muta il determinante Z in

$$Z'=PZ,$$

dove P e' il determinante formato cogli elementi $P_{r,s;\,p,q}$ definiti dalle relazioni

$$P_{r,s;\,p,q} = \frac{\partial u_r}{\partial v_p} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial v_q} + \frac{\partial u_r}{\partial v_q} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial v_p}, \text{ se } r \neq s$$

$$P_{r,r;\,p,q} = \frac{\partial u_r}{\partial v_p} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial v_q},$$

come il determinante W e' stato formato coi $W_{r,s;\,p,q}$. Ma P e' un determinante di Scholtz-Hunyady [1]) formato col determinante funzionale Δ delle u rispetto alle v, e vale Δ^{n+1}.

Dunque

$$Z : (\sqrt{a})^{n+1}$$

e' un invariante, e se noi indichiamo con Z^{rs} i complementi algebrici divisi per $(\sqrt{a})^{n+1}$ degli elementi della prima riga di Z, si vede che

[14] $$\sum_{1}^{n}{}_{rs} Z^{r,s} \underset{1}{z}_{r,s}$$

e' un invariante.

Ora, se noi teniamo fissi gli ultimi $\nu - 1$ $\underset{i}{z}_{r,s}$, vediamo che il sistema $Z^{r,s}$ e' fisso. Questo sistema e' tale che, qualunque sia il sistema $\underset{i}{z}_{r,s}$, la funzione [14] e' un invariante. Si puo' dunque concludere che il sistema $Z^{r,s}$ e' un controvariante a due indici di 1ª classe.

3. Supponiano ora di poter associare alla varieta' V_n $\nu - 2$ covarianti simmetrici a due indici di classe 1 indipendenti da t. Ad essi accompagniamo il sistema $f_{r,s}$ e con questi $\nu - 1$ covarianti fabbrichiamo un sistema controvariante come il precedente $Z^{r,s}$, e che noi indicheremo con $F^{r,s}$.

Poniamo poi

$$\phi_{r,s} = \sum_{1}^{n}{}_{pq} W_{r,s;\,p,q} F^{p,q},$$

dove il $W_{r,s;\,p,q}$ ha lo stesso significato che ha nella parte 1ª di questa nota.

Allora tutte le considerazioni precedenti si possono ripetere sostituendo alle $f_{r,s}$ le $\phi_{r,s}$, ossia alle $A_{r,s;\,p,q}$ le $\int_g \phi_{r,s} \phi_{p,q} \, dt$.

[1]) E. Pascal. „I determinanti" [U. Hoepli ed. Milano. Seconda edizione. 1923. pp. 156–160].

4. Nel caso di $n=2$ si ottengono le normali di Tonolo prendendo al posto delle $A_{r,s;p,q}$ le $\int_g \phi_{r,s}\,\phi_{p,q}\,dt$, e le $F^{r,s}$ uguali ai minori di 2° ordine presi con segno alternato e divisi per $(\sqrt{a})^3$ della matrice

$$\begin{vmatrix} f_{1,1} & 2f_{1,2} & f_{2,2} \\ a_{1,1}:2 & 2(a_{1,2}:2) & a_{2,2}:2 \end{vmatrix}$$

e quindi, essendo

$$W_{1,1;1,1}=W_{2,2;2,2}=W_{1,1;1,2}=W_{1,2;2,2}=0$$
$$W_{1,1;2,2}=a,\ W_{1,2;1,2}=-(a:2),$$

con

$$\phi_{1,1}=(a_{1,2}\,f_{1,1}-a_{1,1}\,f_{1,2}):\sqrt{a}$$
$$\phi_{1,2}=(a_{2,2}\,f_{1,1}-a_{1,1}\,f_{2,2}):(2\sqrt{a})$$
$$\phi_{2,2}=(a_{2,2}\,f_{1,2}-a_{1,2}\,f_{2,2}):\sqrt{a}\,.$$

Effettivamente il Tonolo ha trattato il solo caso delle superficie nell'S_4, ma sono le formule da lui trovate che mi hanno suggerito le estensioni che sono contenute ai n^i. 2 e 3 della parte 2ª.

Correzionida apportarsi alla nota di G. Vitali „Sopra alcuni invarianti. etc.“ pubblicata in questo volume pp. 43– 67.

Pag.	Riga	ERRATA	CORRIGE
47	25	$R_{\varrho\sigma,\,\pi\varkappa} . P_{\varrho\sigma,\,rs}[u]$	$R_{\varrho\sigma,\,\pi\varkappa}[u] . P_{\varrho\sigma,\,rs}$
48	ultima	$A_{hk,\,pq}$	$A^{hk,\,pq}$
49	3	$\omega_{hk,\,pq}$	$\omega^{hk,\,pq}$
	6	(u)	$[u]$
51	9	$R^{rs,\,pq}$	$R_{rs,\,pq}$
	12	$\rho_{rs,\,pq}$	$\rho^{rs,\,pq}$
	24	$\alpha_{rs,\,pq}$	$\alpha^{rs,\,pq}$
	25	id.	id.
56	[14′]	ρ^3+2	ρ^3-2
65	[14″]	ρ^2+2	ρ^2-2
67	18	$K=1+\frac{\Delta}{(1+\Delta)^2}$	$K=\frac{1}{1+\Delta}$

COMPTES-RENDUS ET ANALYSES

Nouveaux fascicules du „Mémoriel des Sciences mathématiques“ [1]).

Fascicule XXI. *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, par M. MAURICE JANET, Professeur à l'Université de Caen. Voici comment l'auteur lui-même formule le but de son ouvrage: „Nous nous proposons d'étudier, pour les systèmes les plus généraux d'équations différentielles, le *degré d'indétermination* de la solution.

D'une manière plus précise, étant donné un système d'équations aux dérivées partielles, à un certain nombre (fini) de fonctions inconnues de n variables indépendantes, comment reconnaître:

1° Si ce système est compatible;

2° Quelles sont les données supplémentaires susceptibles de déterminer une solution et une seule [1]).

J'ajoute que M. JANET se place au point de vue des fonctions analytiques et étudie les questions qu'il envisage au point de vue local, c'est à dire en astreignant les variables que l'on a à considérer à rester dans un voisinage assez restreint de certaines valeurs particulières. L'ouvrage est écrit avec beaucoup de précision et de clarté et rendra de précieux services à ceux qui voudront se renseigner sur l'état actuel des questions auxquelles cet ouvrage est consacré.

Fascicule XXII. *Les transformations birationnelles du plan*, par M. LUCIEN GODEAUX. L'auteur, après avoir rappelé les points essentiels de la théorie des points singuliers des courbes algébriques planes et de celle des systèmes linéaires de courbes planes, expose la théorie générale des transformations birationnelles du plan qu'il applique ensuite à la géométrie algébrique plane.

Le sujet très intéressant de l'ouvrage est traité avec beaucoup de clarté et de précision et, à la fin de l'opuscule, on trouve une

---

[1]) Voir les tomes: III, p. 142, IV, p. 122 et V p. 98 de ces „Annales“.

bibliographie très complète des questions étudiées dans le corps de l'ouvrage.

Fascicule XXIII. *Extension aux fonctions algébroïdes du théorème de M. Picard et de ses applications*, par Georges Rémoundos, Professeur à l'Université d'Athènes. Le présent fascicule du „Mémorial des Sciences mathématiques“ donnera au lecteur le moyen de se renseigner sur la théorie à laquelle il est consacré avec le minimum d'efforts. M. Rémoundos, l'un des principaux fondateurs de la théorie des fonctions algébroïdes, a pris le peine d'énoncer d'une façon complète chacun des théorèmes sur lesquels il a à s'appuyer et, lorsqu'il présente la démonstration d'un théorème, il le fait avec un soin qui en rend la lecture aussi facile que le permet la nature du sujet. Grâce aux circonstances précédentes l'ouvrage qui nous occupe est rédigé avec une clarté exceptionnelle.

Fascicule XXIV. *Sur la „somme“ d'une fonction*, par N. E. Nörlund. Le présent fascicule traite du problème qui consiste à déterminer une fonction $f(x)$ vérifiant l'équation

$$\frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega}=\phi(x)$$

où ω et $\phi(x)$ sont une constante et une fonction données.

La solution générale, qu'on appellera *somme indéfinie* de $\phi(x)$, est de la forme

$$f(x)=F(x)+\pi(x)$$

où $F(x)$ est une solution particulière et $\pi(x)$ une fonction périodique quelconque de période ω.

Dans certains cas il est possible, en imposant à la fonction $f(x)$ des conditions supplémentaires, convenablement choisies, de faire en sorte que la fonction $f(x)$ soit parfaitement déterminée à une constante additive près; la fonction $f(x)$ prend alors le nom de *somme principale* ou plus brièvement celui de *somme* de $\phi(x)$. C'est aux cas où la circonstance precédente se présente que l'ouvrage est, comme son titre l'indique, spécialement consacré. Inutile d'ajouter que le livre est écrit avec la compétence bien connue de l'auteur.

Fascicule XXV. *Les équations de la gravitation einsteinienne*, par M. Georges Darmois, Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy.

Le titre de l'ouvrage indique à lui-seul dans les grandes lignes la nature du sujet auquel cet ouvrage est consacré. Pour le lire avec fruit il est indispensable de s'être assimilé préalablement certains ouvrages que M. Darmois a d'ailleurs eu soin d'indiquer lui-même. Grâce au cachet personnel que M. Darmois a su imprimer à son travail ainsi qu'aux indications bibliographiques que l'on y trouve, son ouvrage rendra certainement des services à ceux qui voudront approfondir les questions qui y sont traitées.

Fascicule XXVI. *Déformation des surfaces étudiées du point de vue infinitésimal*, par M. Bertrand Gambier, Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

M. Gambier étudie la question indiquée dans le titre du fascicule considéré pour les surfaces situées dans l'espace euclidien à trois dimensions. Grâce à l'exposition sobre, claire et précise des matières traitées, l'ouvrage de M. Gambier permettra au lecteur de se renseigner rapidement et avec une facilité relative sur les sujets auxquels il est consacré.

Fascicule XXVII. *Le problème géométrique des déblais et remblais*, par M. Paul Appell, Membre de l'Institut, Recteur honoraire de l'Université de Paris.

Le recueil des Mémoires de l'Académie des Sciences, pour 1781, renferme un mémoire de Monge consacré au problème suivant:

Deux volumes équivalents étant donnés, les décomposer en particules infiniment petites se correspondant deux à deux, de telle façon que la somme des produits des chemins parcourus en transportant chaque parcelle sur celle qui lui correspond, par le volume de la parcelle transportée, soit un minimum.

Pour simplifier le langage, Monge donne le nom de *déblai* et de *remblai* aux volumes qu'il considère, sans prétendre d'ailleurs traiter une question relative à l'art de l'ingénieur.

Le problème précédent est intéressant à divers titres, en particulier parce que c'est à l'occasion de ce problème que Monge a découvert les propriétés fondamentales des congruences de droites et des normales aux surfaces. D'ailleurs le problème des déblais et remblais est très difficile et les résultats obtenus par Monge en ce qui concerne ce problème laissent beaucoup à désirer.

L'opuscule qui nous occupe est consacré à une forme généralisée du problème de Monge que M. Appell a étudié autrefois et où il a obtenu une série de remarquables résultats:

Inutile d'ajouter que l'ouvrage est écrit avec la belle clarté et la précision qui distinguent les écrits de l'illustre auteur.

Fascicule XXVIII. *Approximations successives et équations différentielles*, par Emile Cotton, Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

C'est à l'application de la méthode des approximations successives à l'intégration des équations différentielles ordinaires que le fascicule actuel est consacré. M. Cotton, qui a apporté lui-même d'importantes contributions aux questions étudiées dans son ouvrage, y passe en revue, à partir des célèbres travaux de M. Picard sur la méthode des approximations successives jusqu'à nos jours, la longue série de recherches relatives à la même méthode et suggérées d'une façon plus ou moins directe par les travaux de M. Picard. Tout mathématicien sera reconnaissant à M. Cotton de lui avoir donné, par son ouvrage, le moyen de se renseigner rapidement et d'une façon complète sur tout ce qui concerne les questions fondamentales auxquelles son travail est consacré.

Fascicule XXIX. *Les courbes de l'espace à n dimensions*, par M. C. Guichard, Correspondant de l'Institut, Professeur à la Sorbonne, avec une préface de M. G. Koenigs, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne. Pour donner une idée du présent fascicule du „Mémorial des Sciences mathématiques" nous commencerons par citer le début de la préface de M. Koenigs: „Le travail qu'on trouvera dans ces pages a été rédigé d'après les Notes laissées par l'éminent et regretté géomètre Cl. Guichard, concernant le sujet de son cours à la Sorbonne pendant l'année scolaire 1919—1920. M. Raymond Jacques, Professeur à l'Université de Montpellier, et dont on connaît les beaux travaux sur la Géométrie, a bien voulu se charger de mettre au point cette rédaction. Il a manifestement su interpréter avec élégance la pensée du maître disparu, et placer en évidence la grande fécondité des idées directrices de cet ouvrage".

Ajoutons, pour terminer, que les matières, traitées dans l'ouvrage considéré rentrent dans la Géométrie *euclidienne* de l'espace à n dimensions.

Fascicule XXX. *Les principes de la Mécanique classique*, par M, Ludovic Zoretti, Professeur à la Faculté des Sciences de Caen. L'auteur présente un aperçu extrêmement intéressant, instructif et très documenté sur l'évolution des conceptions fondamentales sur lesquelles on peut baser la construction déductive de la Mécanique. Les questions étudiées par M. Zoretti appartiennent en grande partie à la classe des questions difficiles et délicates sur lesquelles il est à peu près impossible de s'exprimer de façon à satisfaire toutes les personnes compétentes; il pourrait donc se faire que certains des énoncés de M. Zoretti ne satisfassent pas complètement le lecteur mais cela ne diminuerait en rien l'estime et l'intérêt que lui inspirerait l'ouvrage.

Fascicule XXXI. *Applicabilité des surfaces étudiée au point de vue fini*, par M. Bertrand Gambier, Professeur à la Faculté des Sciences de Lille. Le titre du présent fascicule indique suffisamment la nature des questions qui y sont traitées. M. Gambier qui a apporté lui-même des contributions importantes à la théorie des surfaces applicables a adopté un mode d'exposition claire et sobre, très propre à mettre en évidence les idées directrices autour desquelles on peut grouper les nombreuses recherches qui se rapportent au sujet de son ouvrage. M. Gambier insiste avec raison sur la différence des notions d'*isométrie* et d'*applicabilité* et précise (p. 49, 3. *Isométrie* et *applicabilité*) la notion d'applicabilité de deux surfaces l'une sur l'autre au moyen d'une condition qu'il semble être le premier à avoir remarqué. Ajoutons pour terminer qu'une bibliographie très complète, se trouvant à la fin de l'ouvrage, permettra au lecteur d'approfondir à son gré telle des questions étudiées dans l'ouvrage qu'il voudra.

Fascicule XXXII. *La Méthode des Fonctions majorantes et les systèmes d'Équations aux dérivées partielles*, par M. Ch. Riquier, Correspondant de l'Institut, Professeur honoraire à l'Université de Caen. La méthode des fonctions majorantes due à Cauchy et destinée à établir des théorèmes d'existence des intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles est, comme le remarque M. Riquier, exclusivement applicable au cas où l'on ne considère que des fonctions analytiques mais, dans ce domaine, elle est d'une très grande puissance. C'est à M. Riquier lui-même que l'on doit l'immense majorité des résultats acquis actuellement par la méthode des fonctions majorantes dans la théorie des systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles et par conséquent, par la nature même des choses, l'ouvrage qui nous occupe a le caractère d'un aperçu sur l'oeuvre de l'auteur lui-même dans le domaine auquel l'ouvrage est consacré, sans que, bien entendu,

M. Riquier ait négligé de tenir compte scrupuleusement des travaux des autres mathématiciens. L'ouvrage de M. Riquier intéressera vivement tous ceux qui aiment à approfondir les principes généraux de l'Analyse mathématique.

Fascicule XXXIII. *Aperçus modernes sur la théorie des groupes continus et finis*, par M. A. Buhl, Professeur à la faculté des Scienes de Toulouse. La place strictement mesurée accordée à tout auteur d'un fascicule du „Mémorial des Sciences mathématiques" interdisait à l'auteur, comme il l'a fait remarquer lui-même dans l'introduction, de présenter un tableau d'ensemble des théories dérivant de la notion de groupe et fondées par Sophus Lie. Toutefois, en s'inspirant principalement des travaux fondamentaux de M. Cartan, M. Buhl présente un aperçu original sur la théorie des groupes dont le lecteur qui aura préalablement étudié l'ouvrage de M. Goursat et celui de M. Cartan cités au début même du chapitre I, prendra connaissance avec intérêt et profit. Ajoutons que la bibliographie très complète qui termine l'ouvrage permettra au lecteur de pousser l'étude de la théorie des groupes aussi loin qu'il lui plaira.

S. Z.

Leçons sur les invariants intégraux, par M. Cartan, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, chez A. Hermann & fils, rue de la Sorbonne 6.

L'éminent auteur de cet ouvrage a réussi à présenter sous une forme particulièrement simple et attrayante la théorie si importante des *invariants intégraux*, fondée par H. Poincaré, avec l'extension qu'il a apportée lui-même à la notion *d'invariant intégral.* L'attrait de l'ouvrage dérive en grande partie de ce que l'auteur, tout en exposant la théorie des invariants intégraux, en fait connaître de nombreuses et de très intéressantes applications et, avant de présenter la notion d'invariant intégral sous sa forme générale, la fait apparaître sous une forme particulière à l'occasion du *principe de la moindre action* d'Hamilton. En terminant nous nous permettons de recommander chaudement à tout mathématicien et même à tout physicien l'étude du bel ouvrage dont nous avons cherché à caractériser brièvement l'esprit.

S. Z.

Leçons sur le Géométrie des Espaces de Riemann, par E. Cartant, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. Paris 1928, chez Gauthier-Villars et Cie.

Le présent ouvrage est, comme on pouvait s'y attendre étant donné la compétence exceptionnelle de l'auteur dans le domaine auquel cet ouvrage se rapporte, extraordinairement intéressant et instructif. A cause de la richesse des matières contenues sous une forme condensée dans l'ouvrage considéré, l'étude de cet ouvrage exigera quelque effort de la part du lecteur mais il en sera largement dédommagé par le profit qu'il en retirera. Sans pouvoir, faute de place, donner une idée de tout ce que contiennent les belles leçons qui nous occupent, je crois devoir faire remarquer que l'on y trouvera en particulier une étude assez détail.ée des espaces de Riemann qui, tout en étant localement euclidiens, diffèrent au point de vue de l'*Analysis situs* de notre espace ordinaire.

S. Z.

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, par Henri Lebesgue, Membre de l'Institut, Professeur au Collège de France, Professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Paris, 2-ième édition, Paris 1928, chez Gauthier-Villars et Cie.

Dans cette 2-ième édition de ses célèbres „Leçons sur l'intégration etc." M. Lebesgue donne un aperçu sur l'essentiel de ce qui a été fait, dans l'ordre d'idées auquel se rapporte l'ouvrage, pendant les 24 années qui se sont écoulées depuis la publication de la 1-ière édition; on y trouvera en particulier une exposition lumineuse et originale de la totalisation de M. Denjoy; pour assurer une base solide à cette théorie, M. Lebesgue a développé considérablement la note sur les nombres transfinis qu'il avait jointe à la 1-ière édition de ses leçons. Ajoutons que, dans l'édition actuelle des Leçons qui nous occupent, M. Lebesgue a enrichi son ouvrage par un très intéressant chapitre sur l'intégrale de Stiltjes.

S. Z.

Leçons sur les séries divergentes, par Emile Borel, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne, deuxième édition revue et entièrement remaniée avec le concours de M. Georges Bouligand, Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers. Paris 1928, chez Gauthier-Villars et Cie.

Voici comment M. Borel s'exprime dans la préface à la 2-ième édition de ses leçons, si remarquables, sur les série divergentes:

„Depuis l'apparition de la première édition, les travaux sur les séries divergentes ont été si nombreux et si importants qu'il était nécessaire de complètər et de remanier cet ouvrage. Je dois remercier de tout coeur M. Bouligand d'avoir bien voulu m'apporter pour cette tâche, son inappréciable concours. Grâce à lui, les lecteurs trouveront ici, non seulement les principes généraux de la théorie des séries divergentes, mais un exposé des travaux les plus récents et aussi des renseignements bibliographiques qui leur permettront de s'orienter parmi les recherches nouvelles. Nous osons espérer que cətte nouvelle édition sera ainsi parfaitement adaptée au but que visent tous les ouvrages de cette collection: mettre le plus directement possible les chercheurs au courant de l'état actuel d'une branche de la science et les placer ainsi à pied d'oeuvre pour entreprendre avec profit de nouvelles recherches".

Ajoutons que deux notes de M. Bouligand, terminant le volume, rehaussent encore l'intérêt de l'ouvrage.

S. Z.

Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles avec des applications à la Physique mathématique, par Emile Picard de l'Académie française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur à l'Université de Paris, Paris 1927, chez Gauthier-Villars et C^{ie}.

Dans l'avertissement M. Picard a caractérisé lui-même la nature et l'esprit de l'ouvrage dans les termes suivants:

„On trouvera dans ce volume les leçons que j'ai faites à la Faculté des sciences en 1907 et reprises avec quelques additions en 1925. J'y étudie des types très simples d'équations aux dérivées partielles, qui se rencontrent en Analyse et en Physique mathématique. On sait qu'il y a des rapports étroits entre ces équations et certaines équations intégrales; on en trouvera ici des exemples empruntés à la théorie de la chaleur et à celle de l'électricité.

Cette rédaction est la reproduction de notes prises par quelques-uns de mes auditeurs. Elle garde l'allure d'un enseignement oral, ne prétendant pas à une forme didactique soignée et étant plutôt une conversation sur des sujets mathématiques réunis par un lien plus ou moins lâche, ce qui lui permet d'être plus vivant".

Il est sans doute inutile d'ajouter que l'on trouvera dans ces belles leçons, consacrées presque exclusivement aux équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes des types paraboliques et hyperboliques, une foule de rapprochements et de remarques aussi intéressants qu'instructifs.

S. Z.

Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications, par M. Paul Montel, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, recueillies et rédigées par M. J. Barbotte, Paris 1927, chez Gauthier-Villars et Cie.

La considération des familles de fonctions analytiques et, plus particulièrement des familles normales dont la notion est due à M. Montel donne lieu à une méthode de recherche aussi féconde que puissante. C'est ce qui résulte tant des travaux de M. Montel lui-même que de ceux des nombreux géomètres qui se sont engagés dans la voie ouverte par lui.

L'ouvrage est donc destiné à rendre de grands services et cela d'autant plus qu'il est écrit avec une remarquable clarté et n'exige de la part du lecteur qu'un ensemble modeste de connaissances préalables. Ajoutons que l'auteur, en réunissant, dans la première partie du premier chapitre, celles des notions empruntées à la théorie des ensembles qui interviennent dans la suite a sensiblement facilité l'étude de l'ouvrage.

S. Z.

Leçons snr les nombres transfinis, par M. Waclaw Sierpiński, Professeur à l'Université de Varsovie, membre de l'Académie polonaise des Sciences et des Lettres, Paris 1928, chez Gauthier-Villars et Cie.

M. Sierpiński est l'un des mathématiciens qui estiment que l'on peut, sans risquer d'arriver à des résultats inexacts, admettre dans toute sa généralité le célèbre postulat de M. Zermello. On sait que beaucoup de savants et des plus distingués ne partagent pas cette opinion. Toutefois, quelle opinion que l'on ait quant à la validité du postulat de M. Zermello et pour peu que l'on s'intéresse à la théorie des ensembles, on lira avec fruit et intérêt le livre de M. Sierpiński.

En somme, même si l'on doute de l'exactitude du postulat de

M. Zermello, considéré dans toute sa généralité, on peut trouver quelque avantage à savoir s'en servir puisque certaines propositions, établies d'abord au moyen du postulat en question, ont été démontrées plus tard sans s'appuyer sur ce postulat, circonstance qui prouve que le postulat de M. Zermello peut être utile en tant qu'instrument de recherche. Ajoutons que l'ouvrage est écrit avec beaucoup de clarté et n'exige, pour être compris, que des connaissances préalables modestes en mathématiques.

S. Z.

Les Espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'Analyse générale, par M. Maurice Frechet, Professeur à l'Université de Strasbourg, Paris 1928, chez Gauthier-Villars et C[ie].

Pour permettre au lecteur de se faire rapidement une idée de la portée et de l'intérêt considérable que présente cet ouvrage, nous ne croyons pas pouvoir mieux faire que de reproduire la notice, publiée par les éditeurs. Voici cette notice:

„Depuis plusieurs années, il était devenu nécessaire de faciliter la tâche de ceux qui, attirés par les nouvelles conceptions constituant l'analyse générale, désiraient se mettre au courant de cette théorie. Un nombre croissant de mathématiciens lui ont apporté — et lui apportent chaque jour — des contributions extrêmement importantes La liste bibliographique contenue à la fin de cet ouvrage, sans viser à être complète, n'en contient pas moins environ 150 références. L'auteur a voulu remédier au désordre apparent résultant de la publication de ces nombreux mémoires dans de multiples périodiques parfois difficilement accessibles.

Il a donc rédigé un exposé systématique de l'ensemble de ces travaux. Mais pour éviter de mettre immédiatement en contact avec une multiplicité d'idées nouvelles, un lecteur peu familiarisé avec la théorie des variables abstraites, l'auteur a sérié les difficultés.

Dans une Première Partie, on trouvera introduites celles de ces idées qui sont les plus fécondes et se présentent le plus naturellement: généralisation de la notion de distance, généralisation de la notion de nombre de dimensions.

Une fois le lecteur familiarisé par ce moyen avec le maniement des ensembles de nature quelconque, il lui sera plus facile d'aborder dans la Seconde Partie l'étude d'espaces abstraits plus généraux. Cette étude a une grande portée philosophique et permet de pénétrer plus intimement la nature des notions de distance, de limite de voisinage.

Ainsi si trouve réalisé le souhait, exprimé en 1912 par M. Hadamard: qu'il fut remédié à notre ignorance des propriétés du continu fonctionnel par la création à son usage, d'un chapitre de la théorie des ensembles".

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique, Section de Varsovie, anné 1928.

10. II. 1928[1]). S. Saks: „Un théorème sur la condition (N) de M. Lusin".

M. S prouve le théorème suivant: *si la dérivée inférieure* (le plus petit des quatre nombres dérivés de Dini) *d'une fonction satisfaisant à la condition (N) de M. Lusin est majorée par une fonction totalisable* (au sens strict), *cette fonction est une totale.*

M. Kerner: „Le principe de Hamilton et l'holonomisme. Sur le cas singulier dans le problème de Lagrange".

M. K. montre, que le principe de Hamilton ne s'applique qu'aux systèmes holonomes, en complétant ainsi le résultat de Hertz (Die Prinzipien der Mechanik, 1894, p. 23—24) qui a montré des systèmes non holonomes auxquels ce principe ne s'applique pas.

Dans ce but on suppose que le principe de Hamilton s'applique au système à liaisons différentielles données. En d'autres termes, on suppose l'équivalence complète (bien entendu, les équations de liaison étant remplies) des équations mécaniques de Lagrange avec celles déduites du principe de Hamilton par les méthodes du calcul des variations. Après quelques calculs élementaires on obtient de ces propositions les conditions d'intégrabilité complète du système des équations de liaison. Donc, le système mécanique doit être holonome.

Comme une autre application des mêmes calculs, M. K. montre que dans le problème le plus général du calcul des variations (le

[1]) Pour les Comptes-rendus des séances antérieures voir tome VI, p. 126 de ces Annales.

problème de L a g r a n g e) on ne peut appliquer le théorème d'existence aux extrèmales singulières que si les équations de condition sont complètement intégrables. Mais alors, comme on sait, les solutions ne sont pas univoques.

17. II. 1928. W. S i e r p i ń s k i: „Sur la décomposition de l'ensemble dénombrable en un ensemble de puissance du continu d'ensembles infinis presque disjoints".

Deux sous-ensembles d'un ensemble dénombrable seront dits *presque disjoints*, s'ils n'ont qu'un ensemble fini ($\geqslant 0$) d'éléments communs. Le but de cette communication est de prouver que *tout ensemble dénombrable peut être regardé comme une somme d'un ensemble de puissance du continu d'ensembles presque disjoints.*

Il suffit évidemment de prouver la proposition pour l'ensemble de tous les nombres naturels.

A tout nombre réel x de l'intervalle $(0, 1)$ dont le développement en fraction dyadique infinie est

$$x = (0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots)_2$$

faisons correspondre la suite infinie S_x de nombres naturels

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, \tag{1}$$

où

$$u_n = (1\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_{n-1})_2 = 2^{n-1} + 2^{n-2}\, a_1 + 2^{n-3} a_2 + \\ + \ldots + 2\, a_{n-2} + a_{n-1} \tag{2}$$

On voit sans peine que les suites S_x et S_y sont presque disjointes pour $x \neq y$. En effet, soit $y \neq x$,

$$y = (0, \beta_1\, \beta_2\, \beta_3 \ldots)_2, \tag{3}$$

et soit

$$v_1, v_2, v_3, \ldots \tag{4}$$

la suite S_y.

On a évidemment

$$u_p \neq v_q \text{ pour } p \neq q$$

(puisque, d'après (2), $2^{p-1} \leqslant u_p < 2^p$ et, pareillement, $2^{q-1} \leqslant v_q < 2^q$.

Or, soit k le plus petit indice tel que $a_k \neq \beta_k$: on a évidemment

$$(1\, a_1\, a_2 \ldots a_{n-1}) \neq (1\, \beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_{n-1}) \text{ pour } n > k,$$

donc

$$u_n \neq v_n \text{ pour } n > k,$$

ce qui prouve que les suites (1) et (3) sont presque disjointes.

On obtient une décomposition de l'ensemble de tous les nombres rationnels en une somme de $2^{\aleph_0}$ ensembles presque disjoints, en faisant correspondre à tout nombre réel x la suite U_x $(r_1, r_2, r_3, \ldots)$, où

$$r_n = \frac{Enx}{n},$$

E désignant le plus petit entier $\leqslant x$.

Il est à remarquer encore que l'on peut démontrer, en modifiant ce raisonnement, que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une décomposition du continu en une somme de $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles ayant deux à deux un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs.

S. Banach comunique quelques remarques concernant le problème de généralisation de la notion de mesure sur des espaces fonctionnels.

S. Mazurkiewicz: „Sur la somme des fonctions satisfaisant à la condition (N) de M. Lusin".

M. M. donne la construction d'une telle fonction $f(x)$ satisfaisant à la condition (N) de M. Lusin, et même à la condition (S) de M. Banach, que la fonction $f(x) + x$ ne satisfait pas à la condition (N).

24. II. 1928. S. Mazurkiewicz: „Sur un problème de M. Menger", Fund. Math. XII, p. 111.

S. Mazurkiewicz: „Sur le problème d'unicité concernant les fonctions assujetties à la condition (N) de M. Lusin".

M. M. donne la construction, trouvée par lui et par M. Saks, de deux fonctions assujetties à la condition (N) de M. Lusin (et même à la condition (S) de M. Banach), presque partout dérivables, ayant les dérivées presque partout égales et dont la différence n'est pas une constante.

W. Sierpiński: „Sur la décomposition des ensembles en ensembles presque disjoints", Monatshefte für Math. und Phys. XXXV (1928), p. 241.

9. III. 1928. A. Zygmund: „Sur la convergence absolue des séries de Fourier", Journal of the London Math. Soc., July 1928.

M. Z. démontre que la série de Fourier d'une fonction à variation bornée et vérifiant la condition de Lipschitz d'ordre positif converge absolument.

A. Zygmund: „Sur le problème d'unicité pour certains systèmes orthogonaux".

M. Z. considère l'application de la multiplication formelle des séries trigonométriques dans la théorie riemannienne (unicité, localisation) de certains systèmes orthogonaux, p. ex. ceux de Legendre, Jacobi Sturm, Liouville, Bessel etc. Les ensembles d'unicité y sont les mêmes que dans le cas des séries trigonométriques.

Pour certains systèmes de polynômes orthogonaux, p. ex. pour celui de Legendre, on peut construire tout pareillement que pour les séries trigonométriques une théorie de la multiplication formelle qui permet de résoudre la question de localisation aussi dans le voisinage des points singuliers tels que les points ± 1 pour les polynômes de Legendre. Les théorèmes obtenus engendrent comme cas particuliers toutes les propositions connues sur ce sujet.

C. Zarankiewicz: „Ueber die Zerschneidungspunkte der zusammenhängenden Mengen", Fund. Math. XII, p. 121.

A. Tarski: „Sur les groupes de Abel ordonnés".

M. T. apelle une classe K *groupe de Abel ordonné* (cf. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 196, où dans le même sens est employé le terme *„Grössensystem"*) *par rapport à la relation* $\lesssim$ *et à l'opération* $+$, lorsque

(1) K est un ensemble ordonné par la relation $\lesssim$;

(2) K est un groupe de Abel donné par l'opération $+$;

(3) pour tous éléments α, β et γ de K la formule $\alpha \lesssim \beta$ entraîne la formule $\alpha + \gamma \lesssim \beta + \gamma$ (*loi de monotonie*).

En posant $1 \cdot \alpha + \alpha$ et $(n+1) \cdot \alpha = n \cdot \alpha$ pour un élément quelconque α de K et pour un nombre naturel arbitraire n, M. T. démontre le théorème suivant:

I. *Soit K un groupe de Abel donné par l'opération $+$. Pour qu'il existe alors une relation $\lesssim$ telle que K soit un groupe abelien ordonné envers la relation $\lesssim$ et la même opération $+$, il faut et il suffit que la condition suivante soit remplie:*

(0) *pour tous deux éléments α et β de K et pour tout n naturel la formule $n \cdot \alpha = n \cdot \beta$ entraîne toujours l'égalité $\alpha = \beta$.*

M. T. envisage ensuite les groupes abeliens ordonnés qui remplissent le postulat d'Archimède: pour tous deux éléments α et β de K où $\alpha \prec 2.\alpha$, il existe un n naturel tel que $\beta \prec n.\alpha$. Il est clair que parmi les groupes de Abel ordonnés ceux et tous ceux qui remplissent le postulat d'Archimède sont isomorphes avec un ensemble de nombres réels. Par analogie au th. I M. T. démontre le théorème suivant:

II. *K étant un groupe de Abel donné par l'opération* $+$, *pour qu'il existe une relation* $\prec$ *telle que K soit un groupe ordonné de Abel donné par cette relation et par la même opération* $+$, *satisfaisant en outre au postulat d'Archimède, il faut et il suffit que la condition* (0) *soit remplie et que l'on ait:* $\overline{\overline{K}} \leqslant 2^{\aleph_0}$.

30. III. 1928. J. Spława-Neyman: „Sur la vraisemblance des hypothèses".

27. IV. 1928. C. Zarankiewicz: „Sur le problème de Menger concernant les points d'ordre n".

M. Z. prouve que des tels points sont pour $n = 2$ des extrémités communes de deux arcs simples indépendants, le continu étant supposé localement connexe.

11. V. 1928. S. Mazurkiewicz: „Sur les ensembles faiblement n-dimensionnels", Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 1928 (à paraître).

W. Sierpiński: „Sur les images continues et biunivoques des complémentaires analytiques", Fund. Math. XII, p. 211.

15. VI. 1928. G. Poprugénko: Sur l'extension des fonctions de Baire définies sur les sous-ensembles relativement fermés", Bull. de la Soc. des Sc. de Varsovie 1928 (à paraître).

G. Poprugénko: „Sur la propriété de Darboux des fonctions continues d'ensemble", Fund. Math. XII, p. 254.

22. VI. 1928. C. Kuratowski: „Une caractérisation topologique de la surface de la sphère", Fund. Math. XIII, p. 307.

M. K. annonce les théorèmes suivants: pour qu'un espace Péanien (image continue de l'intervalle) soit homéomorphe à la surface de la sphère il faut et il suffit que 1⁰: aucun point ne coupe cet espace, 2⁰: si l'on décompose un continu C qui n'est pas une coupure en deux sous-continus K et L, le produit KL est un continu. Dans les espaces Péaniens la cond. 2⁰ (qui est identique au II^{me} theor. de Janiszewski sur les coupures du plan) équivaut au I^{er} théor. de Janiszewski, d'après lequel A et B étant deux ensembles fermés dont aucun ne coupe le plan entre deux points p et

q, si AB est un continu, $A+B$ ne coupe non plus le plan entre p et q.

Pour qu'un continu Péanien situé sur le plan soit homéomorphe au cercle il faut et il suffit qu'il ne coupe pas le plan et qu'il ne soit coupé par aucun point.

26. X. 1928. W. Sierpiński: „Sur les plus petits types de dimensions incomparables“, Fund. Math. XIII, p. 117.

S. Steckel: „Un théorème sur les ensembles abstraits“.

M. S. envisage un espace E quelconque (métrique ou non) et une famille F d'ensembles situés dans E assujettie aux conditions:

1) le produit d'un nombre fini d'ensembles appartenant à F appartient à F,

2) si pour $k=1, 2, \ldots\ M_k \neq 0$, $M_k \in F$ et $M_{k+1} \subset M_k$, on a: $\prod_{k=1}^{\infty} M_k \neq 0$,

3) si $M \in F$, l'ensemble $E-M$ est un ensemble (B), c'est-à-dire appartient à la famille de tous les ensembles boreliens obtenus des ensembles M de F.

En désignant encore du nom „ensemble (A)“ tout ensemble de Souslin (cf. Hausdorff. *Mengenlehre*, p. 91) obtenu des ensembles M de F, c'est-à-dire appartenant à la famille de tous les ensembles obtenus par l'opération A effectuée sur des ensembles M de F, M. S. démontre sous les conditions 1)—3) énoncées plus haut le théorème suivant:

Pour qu'un ensemble Z soit un ensemble (B), il faut et il suffit que Z et $E-Z$ soient des ensembles (A).

16. XI. 1928. S. Mazurkiewicz: „Sur l'espace de Hilbert“.

M. M. démontre le théorème suivant: toute courbe péanienne remplissant la partie compacte de l'espace de Hilbert, déterminée par par les inégalités $x_n \leqslant \frac{1}{n}$, admet des points multiples d'ordre c.

A. Rajchman: „Sur une classe des fonctions à variation bornée“, CR. de l'Acad des Sc. Paris vol. 187, p. 1026, et „Sur une classe des séries trigonométriques qui convergent presque partout“, Math. Annalen 1929 (à paraître).

23. XI. 1928. C. Zarankiewicz: „Ueber eine Umkehrung des Jordanschen Kurvensatzes“, Fund Math. XIII, p. 264.

J. Spława-Neyman: „Sur un théorème de la théorie de la vraisemblance des hypothèses“.

7. XII. 1928. W. Sierpiński: „Une généralisation du théorème de M. Lusin concernant les ensembles analytiques", à paraître aux Comptes-rendus des Séances de la Soc. des Sc. de Varsovie 1929.

14. XII. 1929. C. Kuratowski: „Quelques applications des „éléments cycliques" de M. Whyburn".

M. K. prouve que, si chaque élément cyclique (voir Whyburn, Am. J. of Math. 1928) d'un continu donné est *uni-cohérent* (c. à. d. que, pour toute décomposition de cet élément en deux sous continus, leur produit est un continu), le continu entier l'est également et réciproquement. Il en est de-même de la propriété de Janiszewski (qui éxige que chaque continu qui n'est par une coupure soit uni-cohérent).

La dimension du continu entier = la borne supérieure des dimensions des éléments cycliques (sauf le cas, où le continu est une dendrite).

En s'appuyant sur un résultat présenté antérieurement, M. K. déduit de là que pour toute décomposition semi-continue de la surface sphérique en sous-continus, l'espace de cette décomposition est $\leqslant$ 2-dimensionnel.

En outre, M. K. pose plusieurs problèmes qui s'y rattachent.

A. Tarski: „Remarques sur les notions fondamentales de la Méthologie des Mathématiques".

L'objet d'études de la Méthologie des Mathématiques (nommée aussi par l'école de Hilbert „Métamathématique") sont des théories mathématiques dans un sens tout à fait analogue à celui, dans lequel les nombres sont l'objet d'études pour l'Arithmétique et les figures le sont pour la Géometrie. Au point de vue de cette Méthodologie les théories mathématiques sont des ensembles d'expressions ou d'écritures construites selon certaines règles de procéder. Des telles expressions, M. T. les appelle *propositions pourvues de sens* (terme introduit par M. Leśniewski) et désigne leur ensemble par S; il n'est possible de préciser cette notion de „propositions pourvues de sens" que lorsqu'on a choisi comme objet d'étude une théorie mathématique bien déterminée.

A tout ensemble X de telles propositions correspond un autre ensemble $X_\varkappa$ dit l'*ensemble des conséquences de l'ensemble* X. Il est défini comme le plus petit ensemble contenant X et fermé envers certaines opérations; la manière de les préciser dépend encore des propriétés spécifiques de la théorie envisagée. En tous cas, ce sont des opérations (pas nécessairement univoques) effectuées sur un nombre fini d'éléments de l'ensemble S et donnant comme résultats aussi des éléments de S.

M. T. signale quelques propriétés élémentaires de la notion X_x: *$X \subset S$ entraîne $X \subset X_x \subset S$; $X \subset Y$ entraîne $X_x \subset Y_x$; on a toujours $X_{xx} = X_x$; si l'on a pour tout n naturel $X_n \subset X_{n+1}$, alors* $\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_x = \sum_{n=1}^{\infty} (X_n)_x$.

A l'aide de ces deux notions, à savoir, celle de proposition pourvue de sens et celle de conséquence d'un ensemble X de telles propositions, on peut définir une série d'autres notions importantes de la Méthodologie des Mathématiques. Ainsi on appelle *système déductif* tout ensemble X de propositions pourvues de sens qui remplit la condition: $X = X_x$. L'ensemble X de propositions pourvues de sens est dit *système compatible*, lorsque $X_x \neq S$; il s'appelle *système complet*, lorsque $X \subset Y \subset S$ entraîne $X_x = Y_x$ ou $Y_x = S$; il est dit *système indépendant* (ou système de propositions indépendantes), lorsque les conditions $Y \subset X$ et $X_x = Y_x$ entraînent l'égalité $X = Y$. On appelle *base* d'un ensemble X tout système de propositions indépendantes Y tel que $X_x = Y_x$; tout ensemble X qui admet une base finie porte le nom de *système axiomatisable.*

M. T. établit ensuite une série des théorèmes concernant les notions qui viennent d'être introduites. Voici quelques exemples de ces théorèmes: Si pour tout n naturel X_n est un système déductif (ou bien un système compatible) et $X_n \subset X_{n+1}$, l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ est également un système déductif (ou bien un système compatible). Pour tout système compatible X il existe un système compatible et complet Y tel que $X \subset Y$ (théorème de M. Lindenbaum). Si X admet une base infinie, il n'admet aucune base finie et parsuite il n'est pas un système axiomatisable.

M. T. illustre ses considérations par l'exemple concret de la plus simple théorie mathématique, à savoir de l'ainsi dite *Théorie de la déduction.* Il montre en particulier que la classe de tous les systèmes déductifs compatibles et complets, formés de propositions pourvues de sens dans la Théorie de la déduction, est de puissance

2$^{\text{do}}$ (tandis que M. Lindenbaum avait démontré que l'ensemble de tous les systèmes déductifs compatibles, aussi bien complets qu'incomplets, est de cette puissance).

Comptes-rendus des séances à Cracovie de la Société Polonaise de Mathématique.

21. I. 1928. A. Rosenblatt: „Sur la théorie des arcs élastiques".

4. II. 1928. A. Turowicz: „Une généralisation d'un théorème de M. Peano".

Voir la note publiée dans ce volume.

11. II. 1928. A. Rosenblatt: „Sur un point de la théorie des fluides visqueux".

18. II. 1928. W. Wilkosz: „Sur un théorème de M. Vitali".

25. II. 1828. J. Spława-Neyman: „Sur la probabilité des hypothèses I".

3. III. 1928. S. Nikodymowa: „Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-continu de Jordan soit un continu de Jordan".

Voir „Fundamenta Mathematicae" tome XI.

17. III. 1928. J. Spława-Neyman: „Sur la probabilité des hypothèses II".

5. V. 1928. T. Ważewski: „Contribution à la théorie de la longueur I".

12. V. 1928. T. Ważewski: „Contribution à la théorie de la longueur II".

(cf. ce volume p. 1—38).

19. 5. 1928. S. Nikodymowa: „Sur les ensembles localement connexes".

cf. „Fundamenta Mathematicae" tome XI.

26. V. 1928. T. Ważewski: „Un point de la théorie de la longueur".

$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots$ étant une suite de continus rectifiables on a lim longueur $K_n =$ longueur lim K_n. La démonstration de ce théorème est basée sur le fait (établi auparavant par l'auteur) qu'un continu rectifiable possède presque partout une tangente ou sens intrinsèque.

2. VI. 1928. S. Gołąb: „Un théorème sur la longueur“.
cf. ce volume p. 227—241.

26. VI. 1928. T. Ważewski: „Sur le changement de variable dans une intégrale simple“.

L'auteur démontre la formule

$$\int_{g(A)} f(x)\,dx = \int_{A} f t\,[g(t)] \cdot \frac{1\, g'(t)}{K_a(t)}\,\mathrm{dt}$$

valable dans l'dypothèse qu'un des deux termes de cette formule présente une intégrale au sens de Lebesgue et que $g(t)$ est une fonction absolument continue. $K_a(t)$ désigne le nombre de solutions en u de l'équation

$$g(t) = g(u), \ u \epsilon A.$$

A est supposé mesurable.

Il en déduit une généralisation d'un théorème de M. Banach (Fund. Math. t. VII. p. 228).

13. X. 1928. J. Spława-Neyman: „Un point de la théorie de la probabilité“.

20. X. 1928. T. Ważewski: „Sur le changement de variable dans l'intégrale simple“.

L'auteur présente une généralisation du théorème communiqué dernièrement à la Société pour le cas ou $g(t)$ est d'une nature plus générale.

1. XII. 1928. H. Härlen: „Sur la théorie des ensembles convexes de K. Menger publiées dans les Math.“. Ann. t. 100. année 1928.

État
de la Société Polonaise de Mathématique à la fin de l'année 1927.

Président: M. W. Sierpiński.
Vice-Présidents: MM. W. Staniewicz et S. Zaremba.
Secrétaire: M. J. Spława-Neyman.
Vice-Secrétaire: MM. A. Turowicz et S. Turski.
Trésorier: M. St. K. Zaremba.

Autres Membres du Bureau: MM. A. Hoborski, A. Rosenblatt et W. Wilkosz.

Commission de Contrôle: MM. L. Chwistek, T. Ważewski et M-me I. Wilkosz.

Il existe quatre sections de la Société, l'une à Lwów, présidée par M. E. Żyliński, la seconde à Varsovie, présidée par M. S. Mazurkiewicz, la troisième à Poznań, présidée par M. Z. Krygowski, la quatrième à Wilno, présidée par M. W. Staniewicz.

Liste des Membres de la Société.

Malgré le soin avec lequel cette liste a été établie, certaines fautes ont pu s'y glisser; MM. les Membres sont priés instamment de vouloir bien envoyer les rectifications au Secrétaire (Cracovie, rue Gołębia 20, Institut de Mathématique) et de le prévenir de tous les changements d'adresses.

Abréviations: L — membre de la Section de Lwów, Wa — membre de la Section de Varsovie, P — membre de la Section de Poznań, Wl — membre de la Section de Wilno.

Dr. Kazimierz Abramowicz (P), Poznań, ul. Wyspiańskiego 8.
Herman Auerbach (L), Lwów, ul. Szaszkiewicza 1.
Prof. Dr. Stefan Banach (L), Lwów, Uniwersytet Jana Kazimierza. Mikołaja 4.
Prof. Tadeusz Banachiewicz, Kraków, Obserwatorjum Astronomiczne, ul. Kopernika 27.
Jan Baran, Toruń, Gimnazjum Męskie, Małe Garbary.
Prof. Dr. Kazimierz Bartel (L), Warszawa, Prezydjum Rady Ministrów.
Prof. Dr. Nina Bary (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Pokrowka 29, kw. 22.
Prof. Czesław Białobrzeski, Warszawa, ul. Hoża 69.
Mieczysław Biernacki (Wa), Paris XV, 39, rue Bargue.
Mag. Zygmunt Birnbaum (L), Lwów, ul. Św. Anny 1.
Inż. Dr. Izydor Blumenfeld (L), Lwów, ul. Kąpielna 6.
Prof. Dr. Georges Bouligand, Poitiers (Vienne, France), 50, rue Renaudot.
Mag. Karol Borsuk (Wa), Warszawa Adama Pługa 6, m. 2.
Doc. Dr. Łucjan Böttcher (L), Lwów, ul. Sadowa 4.
Franciszek Brablec, Kraków, ul. Studencka 4.

Dr. Feliks Burdecki (Wa), Zambrów (pow. Łomżyński), Gimnazjum.
Dr. Celestyn Burstin (L), Wien VIII (Autriche), Laudonstrasse 8.
Prof. Dr. Élie Cartan, Le Chesnay (Seine-et-Oise, France), 27, Avenue de Montespan.
Antoni Chromiński (Wa), Warszawa, Politechnika, Wydział Inżynierji Lądowej.
Dr. Leon Chwistek, Kraków, ul. Szujskiego 7.
Dr. Jakób Cukierman (Wl), Wilno, ul. Mickiewicza 22 m. 30.
Dr. Kazimierz Cwojdziński (P), Poznań, ul. Szamarzewskiego 13.
Jadwiga Czarnecka (P), Przybysław, poczta Żerków (województwo Poznańskie).
Dr. Bohdan Dehryng, Warszawa, ul. Topolowa, Wojenna Szkoła Inżynierji.
Prof. Dr. Samuel Dickstein (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 117.
Pułk. Gerhard Długowski, Rembertów, Centrala badań poligonalnych.
Prof. Dr. Wacław Dziewulski (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 13.
Prof. Dr. Władysław Dziewulski (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 15.
Prof. Dr. Placyd Dziwiński (L), Lwów, ul. Kleinowska 3.
Prof. Dr. Marcin Ernst (L), Lwów, ul. Długosza 25, Instytut Astronomiczny.
Kazimierz Fijoł, Kraków-Podgórze, ul. Józefińska 31.
Prof. Dr. Paul Flamant, Chermont-Ferrand (Puy de Dôme, France) 22 rue Morel-Ladeuil.
Prof. Ing. Godofredo Garcia (Wa), Lima (Peru) Apartodo 1979.
Dr. Stefan Glass (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 5a.
Prof. Dr. Lucien Godeaux, Liège (Belgique), 75 rue Frédéric Nyst.
Stanisław Gołąb, Kraków, ul. Lenartowicza 12.
Prof. Dr. Lucjan Grabowski (L), Lwów, Politechnika.
Dr. Henryk Greniewski (Wa), Warszawa, ul. Opaczewska 54 m. 12.
Dr. Aleksander Grużewski (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 1 m. 25.
Dr. Halina Grużewska (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 1 m. 25.
Dr. Hasso Härlen, (Allemagne), Eislingen Fils (Würtemberg)
Prof. Dr Antoni Hoborski, Kraków, ul. Smoleńska 26.
Marja Hommé (L), Lwów, ul. Łyczakowska 151.
Dr. Janina Hossiasson (Wa), Warszawa, ul. Trębacka 6 m. 5.
Prof. Dr. Maksymiljan Huber (Wa), Lwoska 12 m. 5.
Doc. Dr. Witold Hurewicz (Wa), Amsterdam (Hollande), Université.
Dr. Mojżesz Jacob (L), Wien II (Autriche), Wolfgang-Schmälzlgasse 10/16.

Prof. Dr. Maurice Janet, Caen (Calvados) (France), 7, rue de la Délivrande.
Wincenty Janik, Kraków, ul. Studencka, Gimnazjum.
Prof. Dr. Kazimierz Jantzen (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 9 m. 3.
Dr. Stefan Kaczmarz (L), Lwów, Politechnika.
Dr. Stanisław Kalandyk (P), Poznań, ul. Słowackiego 29.
Dr. Bazyli Kalicun-Chodowicki (L), Lwów, ul. Kubali 4.
Prof. Dr. Joseph Kampé de Fériet, Lille (France), 16, rue des Jardins.
Prof. Dr. Stefan Kempisty (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 24 m. 5.
Dr. Michał Kerner (Wa), Warszawa, ul. Pańska 20 m. 17.
Stefania Klawekówna (P), Poznań, ul. Młyńska 11.
Prof. Dr. J. R. Kline (Wa), Philadelphia (U. S. A.), University of Pensylvania.
Doc. Dr. Bronisław Knaster (Wa), Warszawa, ul. Narbuta 9 m. 3.
Prof. Dr. Zdzisław Krygowski (P), Poznań, ul. Głogowska 74/75.
Dr. Marjan Kryzan (P), Poznań, ul. Krasińskiego 9.
Prof. Dr. Kazimierz Kuratowski (Wa), Lwów, ul. Nabielaka 12 m. 5.
Dr. Stefan Kwietniewski (Wa), Warszawa, ul. Nowy Świat 72, Seminarjum Mat.
Prof. Dr. Edward Lainé, Angers (France). 3 rue de Rebelais.
Prof. Dr. Franciszek Leja (Wa), Warszawa, Koszykowa 75 m. 16.
Prof. Dr. Stanisław Leśniewski (Wa), Warszawa, ul. Brzozowa 12.
Gustaw Leśnodorski, Kraków, ul. Sobieskiego 10.
Prof. Dr. Tullio Levi-Civita, Roma 25 (Italie), via Sardegna 50.
Władysław Lichtenberg (L), Lwów, Wulecka Droga 78.
Prof. Dr. Leon Lichtenstein (Wa), Leipzig (Allemagne), Grossgörschenstrasse 3.
Dr. Adolf Lindenbaum (Wa), Warszawa, ul. Złota 45 m. 4.
Prof. Dr. Stanisław Loria (L), Lwów, ul. Sykstuska 37.
Prof. Dr. Antoni Łomnicki (L), Lwów, ul. Kosynierska 18.
Zbigniew Łomnicki (L), Lwów, ul. Nabielaka 19.
Prof. Dr. Jan Łukasiewicz (Wa), Warszawa, ul. Brzozowa 12.
Mag. Wacław Łukasiewicz (Wl), Wilno, ul. Zakrętowa 5 m. 7.
Prof. Dr. Mikołaj Łuzin (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Arbat 25/8.
Dr. Adam Maksymowicz (L), Lwów, ul. Batorego 5.
Stanisław Malecki, Dębica, Gimnazjum.
Andrzej Marconi (P), Poznań, ul. Kosińskiego 26.
Prof. Dr. Stefan Mazurkiewicz (Wa), Warszawa, ul. Oboźna 11.

Prof. Dr. Karl Menger (Wa), Wien IX (Autriche), Fruchthallergasse 2.
Doc. Inż. Dr. Meyer (L), Wien (Autriche), Université.
Prof. Dr. Dymitr Mieńszow (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Dievitchie Pole, Bojeninowski per. 5 kw. 14.
Prof. Dr. R. L. Moore (Wa), Austin (U. S. A.), University of Texas.
Władysław Moroń (L), Lwów, Uniwersytet Jana Kazimierza.
Sir Thomas Muir, F. R. S. etc., Rondebosch (South Africa).
Zofja Napadiewiczówna (L), Lwów, ul. Bonifratrów 8.
Dr. Jerzy Spława Neyman (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 22 m. 15.
Doc. Dr. Władysław Nikliborc (L), Lwów, ul. Listopada 44 a.
Doc. Dr. Otton Nikodym, Kraków, ul. Kochanowskiego 23.
Dr. Stanisława Nikodymowa (Wa), Kraków, ul. Kochanowskiego 23.
Szymon Ohrenstein, Drohobycz, I. pryw. Gimnazjum żeńskie.
Władysław Orlicz (L), Lwów, ul. Nabielaka 3.
Józef Orłowski (P), Poznań, ul. Matejki 44.
Ludwik Ostrzeniewski (P), Poznań, ul. Ogrodowa 2.
Inż. Jan Pankalla (P), Poznań, ul. Ratajczaka 12.
Dr. Aleksander Pareński (L), Lwów, ul. Szeptyckich 10.
Prof. Dr. Józef Patkowski (Wl), Wilno, ul. Nowogrodzka 22.
Dr. Egon Sharpe Pearson, London W. C. 1, University College, Galton Laboratory.
Prof. Dr. Karl Pearson, London W. C. 1, University College.
Prof. Dr. Tadeusz Pęczalski (P), Poznań, ul. Krasińskiego 14.
Prof. Dr. Antoni Plamitzer (L), Lwów, ul. Gipsowa 32.
Prof. Dr. Gonesh Prasad (Wa), Calcutta (East India) Samavaya Manrions 2 Corporation str.
Prof. Dr. Antoni Przeborski (Wa), Warszawa, Nowy Zjazd 5.
Inż. Józef Przygodzki (P), Poznań, ul. Rybaki, Szkoła Budowlana.
Doc. Dr. Aleksander Rajchman (Wa), Warszawa, ul. Zajęcza 7 m. 9.
Prof. Dr. Alfred Rosenblatt, Kraków, ul. Krowoderska 47.
Stefan Rozental, Łódź, ul. Nawrot 4.
Antoni Rozmus, Piotrków, Gimnazjum państwowe.
Prof. Dr. Juljusz Rudnicki (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 22.
Prof. Dr. Stanisław Ruziewicz (L), Lwów, Uniwersytet Jana Kazimierza, ul św. Mikołaja 4.
Walerja Sabatowska (L), Lwów, ul. Zielona, Gimn. Strzałkowskiej.
Doc. Dr. Stanisław Saks (Wa), Warszawa, ul. Natolińska 9 m. 4.
Doc. Dr. Juljusz Schauder (L), Lwów, ul. Zielona 3.

Dr. Lidja Seipeltówna (P), Poznań, ul. Gajowa 4.
Prof. Dr. Pierre Sergesco, Cluj (Roumanie), Seminar matematic universital.
Ks. Dr. Franciszek Sieczka (Wa) Płock, Seminarjum Duchowne.
Prof. Dr. Wacław Sierpiński (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 55 m. 1.
Prof. Dr. Jan Sleszyński, Kraków, ul. Wygoda 7.
Kazimierz Smoliński (P), Poznań, ul. Żupańskiego 16.
Helena Smoluchowska (P), Poznań, ul. Chełmońskiego 8.
Władysław Smosarski (P), Poznań, Uniwersytet.
Dr. Edward Stamm, Lubowidz, p. Zieluń nad Wkrą (pow. Mława).
Prof. Dr. Wiktor Staniewicz (Wl), Wilno, ul. Uniwersytecka 7.
Inż. Ksawery Stankiewicz, Kraków, ul. Długa 50.
Zofja Starosolska-Szczepanowska (L), Chełmno, Korpus Kadetów Nr. 2.
Dr. Samuel Steckel (Wa), Białystok, Gimnazjum Druskina, ul. Szlachecka 4.
Prof. Dr. Hugo Steinhaus (L), Lwów, ul. Kadecka 14.
Prof. Dr. Włodzimierz Stożek (L), Lwów, ul. Ujejskiego 1.
Prof. Dr. Stefan Straszewicz (Wa), Warszawa-Mokotów, ul. Rejtana 17.
Mjr. Karol Szczepanowski (L), Chełmno, Korpus Kadetów Nr. 2.
Mag. Henryk Szutowicz (Wl), Oszmiana Gimn. państw.
Dr. Piotr Szymański (Wa), Warszawa, ul. Żelazna 29 m. 17.
Władysław Ślebodziński (P), Poznań, ul. Głogowska 51.
Doc. Dr. Alfred Tarski (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 51.
Inż. Henryk Titz, Kraków, ul. Św. Tomasza 27.
Mag. Andrzej Turowicz, Kraków, ul. Sobieskiego 7.
Mag. Stanisław Turski, Kraków, ul. Ks. Józefa 29.
Włodzimierz Urbański, Kraków-Podgórze, ul. Krzemionki, Ak. Górn.
Prof. Dr. Giuseppe Vitali Podova (29) (Italia), Via J. Facciolati 16.
Inż. Kazimierz Vetulani, Kraków, ul. Smoleńska 14.
Dr. Arnold Walfisz (Wa), Warszawa, ul. Królewska 27 m. 16.
Doc. Dr. Tadeusz Ważewski, Kraków, ul. Św. Jana 20.
Prof. Dr. Kasper Weigel (L), Lwów, Politechnika.
Dr. Sala Weinlösówna (L), Lwów, ul. Klonowicza 18.
Prof. Dr. Jan Weyssenhoff (Wl), Wilno, ul. Słowackiego 11.
Leopold Węgrzynowicz, Kraków, ul. Krowoderska 74.
Marjan Węgrzynowicz (P), Poznań, ul. Łazarska 2a.
Dr. Antoni Wilk, Kraków, ul. Wybickiego 4.
Prof. Dr. Witold Wilkosz, Kraków, ul. Zyblikiewicza 5/7.
Irena Wilkoszowa, Kraków, ul. Zyblikiewicza 5/7.

Dr. Franciszek Włodarski (P), Poznań, Przecznica 6.
Mag. Aleksander Wundheiler (Wa), Warszawa, ul. Pawia 39.
Stanisław Zakrocki, Kraków, ul. Smoleńska 21.
Dr. Zygmunt Zalcwasser (Wa), Warszawa, ul. Leszno 51.
Doc. Dr. Kazimierz Zarankiewicz (Wa), Warszawa, ul. Śniadeckich 18 m. 9.
Prof. Dr. Stanisław Zaremba, Kraków, ul. Żytnia 6.
Mag. Stanisław Krystyn Zaremba, ul Żytnia 6.
Miron Zarycki (L), Lwów, Gimnazjum IX, ul. Chocimska 6.
Doc. Dr. Zygmunt Zawirski (L), Lwów, ul. Leona Sapiehy 51.
Doc. Dr. Antoni Zygmund (Wa), Warszawa, ul. Złota 83 m. 8.
Prof. Dr. Kazimierz Żórawski (Wa), Warszawa, Nowy-Zjard 5.
Prof. Dr. Eustachy Żyliński (L), Lwów, ul. Długosza 27.

Membres dont les adresses manquent.

Bohdan Babski.
Władysław Bogucki.
Dr. Juljan Chmiel.
Dr. Stanisław Dobrowolski (Wa).
Inż. Ludwik Kaszycki.
Władysław Majewski (L).
Jan Sobaczek.

Membres décédés.

† X. Feliks Hortyński, S. J.
† Dr. Bohdan Zaleski (P).

Liste des publications périodiques avec lesquelles la Société polonaise de Mathématique échange ses Annales.

1. Acta litterarum et scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae.
2. Abhandlungen des Mathematischen Seminars der Universität in Hamburg.

3. Bulletin de la Société Mathématique de France et Comptes Rendus des Séances.
4. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society.
5. Annales scientifiques de l'Université de Jassy.
6. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker - Vereinigung.
7. Monatshefte für Mathematik und Physik.
8. Publications de l'Institut de Mathematiques de l'Université de Strasbourg.
9. Seminario Mathematico della Faculta di Science della R. Università di Roma.
10. Bulletin Scientifique de l'ecole Polytechnique de Temisvara.
11. Contributions al Estudis de las Ciencias Fisicas y Matematicas (La Plata, Argentina).
12. Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk.
13. Fundamenta Mathematicae.
14. Prace Matematyczno-Fizyczne.
15. Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich.
16. Annals of Mathematics.
17. Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse.
18. Transactions of the American Mathematical Society.
19. Journal de l'Ecole Polytechnique.
20. Revue semestrielle des publications math.
21. Wiskundige apgaren met de Oplasingen.
22. Archief voor Wiskunde.
23. Leningradzkie Tow. Fizyczno-Matematyczne.
24. Journal of the Faculty of Science, Imperial University of Tokyo.
25. Universitätsbibliothek, Basel.
26. Academia Românâ, Buenresti.
27. Societe Scientifique de Bruxelles.
28. Bayerische Akademie der Wissenschaften, München.
29. Uniwersytet hebrajski w Jerozolimie.
30. Edinburgh Mathematical Society.
31. Société Hollandaise des Sciences.
32. Societe Mathematique de Klarkow.
33. La Sociedad Matematica Espanola, Madrid.
34. Koninklijke Akademia van Wetenschappen, Amsterdam.
35. Mathematische Gesellschaft in Hamburg.
36. Unterrichtsblätter für Mathematik u. Naturwissenschaften.
37. London Mathematical Society.

38. Real Academia de Ciencias Exactas, Madrid.
39. Philosophical Society, Cambridge.
40. Norsk Matematisk Forening, Oslo.
41. Académie Royale des Sciences, Bruxelles.
42. Mathematisches Seminar der Universität, Giessen.
43. Societas Scientiarum Fennice, Helsingfors.
44. Matematisk Tidsskrift, Copenhaghe.
45. Société Physico-Mathematique de Kazan.
46. Heidelberger Akademie der Wissenschaften.
47. The Tôhoku Mathematical Journal, Sendai.
48. Naturforscher Gesellschaft bei der Universität Dorpat.
49. Sächsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig.
50. The Mathematical Gazette.
51. The Benares Mathematical Society.
52. Smithsonian Institution, Waschington.
53. Royal Society of Edinburgh.
54. Akademja Górnicza, Kraków.
55. Societatea Romàna de Stiinte.
56. Société Royale des Sciences de Liège.
57. Recueil Mathematique de la Société Math. de Moscou.
58. Journal of Mathematics and Physics, Mossachusetts Institute of Technology.
59. Bolletin del Seminario Mathemático Argentino, Buenos Aires.

Ouvrages reçus.

1. Fréchet. Théorie des éspaces abstraits.
2. Sierpiński. Leçons sur les nombres transfinis.
3. Borel-Bouligand. Leçons sur les Séries divergentes.
4. Banach. Rachunek różniczkowy i całkowy t. I. (Calcul différentiel et intégral t. I, en langue polonaise).

Table des matières.