ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME VIII

ANNÉE 1929

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LA RÉDACTION S'ADRESSER
A M. STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE XVI, RUE ŻYTNIA, 6

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW 1930

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

Les publications de la Société polonaise de mathématique ont paru pour la première fois en 1921 sous le titre de „Rozprawy Polskiego Towarzystwa matematycznego“ en un volume comprenant aussi bien des mémoires de langue polonaise que des mémoires rédigés en d'autres langues. Depuis 1922 l'organe de la Société porte le titre d'Annales de la Société polonaise de mathématique; les travaux de langue polonaise paraissent dans un Supplément, le corps du volume étant réservé aux travaux de langues française, anglaise, italienne et allemande.

Pour tout ce qui concerne les échanges et l'administration des Annales de la Société Polonaise de Mathématique, s'adresser au Secrétariat de la Société, 20, rue Gołębia, Cracovie (Pologne).

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME VIII

ANNÉE 1929

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LA RÉDACTION S'ADRESSER
A M. STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE XVI, RUE ŻYTNIA, 6

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW 1930
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

Les publications de la Société polonaise de mathématique ont paru pour la première fois en 1921 sous le titre de „Rozprawy Polskiego Towarzystwa matematycznego“ en un volume comprenant aussi bien des mémoires de langue polonaise que des mémoires rédigés en d'autres langues. Depuis 1922 l'organe de la Société porte le titre d'A n n a l e s d e l a S o c i é t é p o l o n a i s e d e m a t h é m a t i q u e; les travaux de langue polonaise paraissent dans un S u p p l é m e n t, le corps du volume étant réservé aux travaux de langues française, anglaise, italienne et allemande.

Pour tout ce qui concerne les échanges et l'administration des Annales de la Société Polonaise de Mathématique, s'adresser au Secrétariat de la Société, 20, rue Gołębia, Cracovie (Pologne).

Relazioni geometriche fra due sistemi di normali di una superficie dello spazio hilbertiano.

Nota di

Angelo Tonolo (Padova).

In due recenti lavori [1]) pubblicati in questi „Annales“ il Prof. Vitali ha determinato per ogni varietà dello spazio hilbertiano dei sistemi „privilegiati“ di normali ortogonali fra loro due a due. In particolare, per le superficie il cui spazio 2-tangente è a quattro dimensioni, Egli ha trovato due coppie differenti di normali ortogonali. La prima [2]), che indico con N_1, è ottenuta usufruendo, con un certo criterio, del sistema derivato covariante f_{rs} della funzione f [$f = f(t, u_1, u_2)$ equazione della superficie]; mentre la seconda, che indico con N_2, si ricava con analogo procedimento dal sistema derivato covariante $\phi_{r,s}$ [3]).

Io provo in questa Nota che queste due coppie di normali sono intimamente collegate fra loro, e precisamente pervengo al risultato seguente: A ciascuna di queste coppie si puo associare una conica, la quale, se è a centro, ha per assi due rette parallele alle normali dell' altra coppia, e se invece è una parabola, il suo asse e la tangente al vertice sono paralleli alle normali suddette.

Ho posto fine alla Nota facendo vedere che soltanto per le superficie minime il centro della conica (per tali superficie la co-

---

[1]) G. Vitali: *Sopra alcuni invarianti associati ad una varieta e sopra i sistemi principali di normali delle superficie.* [Annales de la Société polonaise de mathématique, T. VII, (1928)]. In segnito questa Nota verrà indicata con (A). *sistemi principali di normali ad una varietà giacenti nel suo* σ_2. [Idem]: In segnito questa Nota verrà indicata con (B).

[2]) Cfr. Nota (A).

[3]) Cfr. Nota (B).

nica non è mai una parabola) associata alle normali N_2 cade sulla superficie stessa. E con questo risultato si ottiene una interpretazione geometrica di quella equazione di minimo (caratteristica per tali superficie) che ho dato in un recente lavoro [1]).

1. Interpretazione geometrica delle normali N_1.

Sia

$$f = f(t, u_1, u_2) \tag{1}$$

l'equazione di una superficie Σ dello spazio hilbertiano, il cui spazio 2-tangente sia a quattro dimensioni; la forma

$$a_{11}\, du_1^2 + 2\, a_{12}\, du_1\, du_2 + a_{22}\, du_2^2, \tag{2}$$

il cui discriminante indicheremo con a, dia il quadrato dell'elemento lineare di Σ. In un punto f di questa superficie si consideri il piano normale ν, e su di esso le normali N_1 che assumeremo come assi cartesiani di riferimento. Le coordinate dei punti di questo piano rispetto a questo sistema di assi, noi le indicheremo con ξ, η.

Perciò, se x_{rs}, y_{rs} $(r, s = 1, 2)$ sono i sistemi covarianti associati alle normali N_1, varrà la relazione (Nota (A)).

$$(x, y) = x_{11}\, y_{22} - 2\, x_{12}\, y_{12} + x_{22}\, y_{11} = 0. \tag{3}$$

Poniamo [2]):

$$\begin{aligned} \phi_{1,1} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} f_{12} & f_{11} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix}, \\ \phi_{1,2} = \phi_{2,1} &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \begin{vmatrix} f_{22} & f_{11} \\ a_{22} & a_{11} \end{vmatrix} \\ \phi_{2,2} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} f_{22} & f_{12} \\ a_{22} & a_{12} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

ove f_{rs} sono le derivate covarianti della funzione (1), fatte con referenza alla forma (2).

---

[1]) A. Tonolo: *Eine Eigenschaft der Minimalflächen des hilbertischen Raumes.* [Math. Zeitschrift: in corso di stampa].

[2]) Con queste $\phi_{r,s}$, il Vitali costruisce le normali N_2 in modo analogo a quello seguito nella Nota (A) per formare le normali N_1 a mezzo delle funzioni f_{rs}. [Cfr. Nota (B)].

Sul piano ν si fissi il punto F definito ponendo

$$F = f + \frac{\sqrt{a}}{\begin{vmatrix} du_1^2 & -du_1\,du_2 & du_2^2 \\ x_{22} & x_{12} & x_{11} \\ y_{22} & y_{12} & y_{11} \end{vmatrix}} \Sigma_{rs}\, \phi_{r,s}\, du_r\, du_s .$$

Vogliamo dimostrare il seguente.

Teorema 1°: *Al variare della direzione* $\dfrac{du_2}{du_1}$ *attorno a* f, *il punto* F *genera una conica, la quale, se è centrale, ha per assi due rette parallele alle normali* N_1, *e se è una parabola, il suo asse e la tangente al vertice sono paralleli alle suddette normali.*

Dimostrazione: Se X, Y sono parametri normali delle direzioni N_1, si ha:

$$f_{rs} = x_{rs}\, X + y_{rs}\, Y. \tag{6}$$

Ponendo le (6) nelle (4), e sostituendo nella (5) le expressioni così ottenute delle ϕ_{rs}, si ottiene:

$$F = f + \frac{X \Sigma_{rs}\, \bar{x}_{rs}\, du_r du_s + Y \Sigma_{rs}\, \bar{y}_{rs}\, du_r du_s}{\Sigma_{rs}\, \bar{z}_{rs}\, du_r\, du_s}, \tag{7}$$

avendo posto:

$$\bar{x}_{11} = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} x_{12} & x_{11} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix}, \quad \bar{x}_{12} = \bar{x}_{21} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \begin{vmatrix} x_{22} & x_{11} \\ a_{22} & a_{11} \end{vmatrix}, \quad \bar{x}_{22} = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} x_{22} & x_{12} \\ a_{22} & a_{12} \end{vmatrix}; \tag{8}$$

$$\bar{y}_{11} = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} y_{12} & y_{11} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix}, \quad \bar{y}_{12} = \bar{y}_{21} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \begin{vmatrix} y_{22} & y_{11} \\ a_{22} & a_{11} \end{vmatrix}, \quad \bar{y}_{22} = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} y_{22} & y_{12} \\ a_{22} & a_{12} \end{vmatrix}; \tag{9}$$

$$\bar{z}_{11} = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} x_{12} & x_{11} \\ y_{12} & y_{11} \end{vmatrix}, \quad \bar{z}_{12} = \bar{z}_{21} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \begin{vmatrix} x_{22} & x_{11} \\ y_{22} & y_{11} \end{vmatrix}, \quad \bar{z}_{22} = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} x_{22} & x_{12} \\ y_{22} & y_{12} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

La (7) ci dice che le coordinate ξ, η del punto F rispetto agli assi N_1, sono:

$$\xi = \frac{\Sigma_{rs}\, \bar{x}_{rs}\, du_r\, du_s}{\Sigma_{rs}\, \bar{z}_{rs}\, du_r\, du_s}, \quad \eta = \frac{\Sigma_{rs}\, \bar{y}_{rs}\, du_r\, du_s}{\Sigma\, \bar{z}_{rs}\, du_r\, du_s}. \tag{11}$$

Per trovare l'equazione cartesiana del luogo descritto del punto F al variare della direzione $\frac{du_2}{du_1}$ attorno a f, osserviamo che le (11) possono essere scritte così:

$$\begin{aligned} &(\xi\bar{z}_{11} - \bar{x}_{11})\, du_1^2 + 2(\xi\bar{z}_{12} - \bar{x}_{12})\, du_1\, du_2 + (\xi\bar{z}_{22} - \bar{x}_{22})\, du_2^2 = 0 \\ &(\eta\bar{z}_{11} - \bar{y}_{11})\, du_1^2 + 2(\eta\bar{z}_{12} - \bar{y}_{12})\, du_1\, du_2 + (\eta\bar{z}_{22} - \bar{y}_{22})\, du_2^2 = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Da queste equazioni (12) si conclude intanto che deve essere

$$du_1^2 : du_1\, du_2 : du_2^2 = 2 \begin{vmatrix} \xi\bar{z}_{12} - \bar{x}_{12} & \xi\bar{z}_{22} - \bar{x}_{22} \\ \eta\bar{z}_{12} - \bar{y}_{12} & \eta\bar{z}_{22} - \bar{y}_{22} \end{vmatrix} : -$$

$$: - \begin{vmatrix} \xi\bar{z}_{11} - \bar{x}_{11} & \xi\bar{z}_{22} - \bar{x}_{22} \\ \eta\bar{z}_{11} - \bar{y}_{11} & \eta\bar{z}_{22} - \bar{y}_{22} \end{vmatrix} : 2 \begin{vmatrix} \xi\bar{z}_{11} - \bar{x}_{11} & \xi\bar{z}_{12} - \bar{x}_{12} \\ \eta\bar{z}_{11} - \bar{y}_{11} & \eta\bar{z}_{12} - \bar{y}_{12} \end{vmatrix}.$$

Indi scriviamo che deve aver luogo l'identità

$$du_1^2\, du_2^2 = (du_1\, du_2)^2.$$

Si arriva così all'equazione

$$\begin{aligned} 2 &\begin{vmatrix} \xi\bar{z}_{12} - \bar{x}_{12} & \xi\bar{z}_{22} - \bar{x}_{22} \\ \eta\bar{z}_{12} - \bar{y}_{12} & \eta\bar{z}_{22} - \bar{y}_{22} \end{vmatrix} \times 2 \begin{vmatrix} \xi\bar{z}_{11} - \bar{x}_{11} & \xi\bar{z}_{12} - \bar{x}_{12} \\ \eta\bar{z}_{11} - \bar{y}_{11} & \eta\bar{z}_{12} - \bar{y}_{12} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \xi\bar{z}_{11} - \bar{x}_{11} & \xi\bar{z}_{22} - \bar{x}_{22} \\ \eta\bar{z}_{11} - \bar{y}_{11} & \eta\bar{z}_{22} - \bar{y}_{22} \end{vmatrix}^2, \end{aligned} \tag{13}$$

la quale non è altro che il risultante delle (12) considerate come equazioni di secondo grado nel rapporto $\frac{du_2}{du_1}$.

La (13) equivale alla sequente:

$$\begin{aligned} &2\left\{ \begin{vmatrix} \bar{z}_{22} & \bar{z}_{12} \\ \bar{y}_{22} & \bar{y}_{12} \end{vmatrix} \xi + \begin{vmatrix} \bar{z}_{12} & \bar{z}_{22} \\ \bar{x}_{12} & \bar{x}_{22} \end{vmatrix} \eta + \begin{vmatrix} \bar{x}_{12} & \bar{x}_{22} \\ \bar{y}_{12} & \bar{y}_{22} \end{vmatrix} \right\} \times \\ &2\left\{ \begin{vmatrix} \bar{z}_{12} & \bar{z}_{11} \\ \bar{y}_{12} & \bar{y}_{11} \end{vmatrix} \xi + \begin{vmatrix} \bar{z}_{11} & \bar{z}_{12} \\ \bar{x}_{11} & \bar{x}_{12} \end{vmatrix} \eta + \begin{vmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{12} \\ \bar{y}_{11} & \bar{y}_{12} \end{vmatrix} \right\} = \\ &\left\{ \begin{vmatrix} \bar{z}_{22} & \bar{z}_{11} \\ \bar{y}_{22} & \bar{y}_{11} \end{vmatrix} \xi + \begin{vmatrix} \bar{z}_{11} & \bar{z}_{22} \\ \bar{x}_{11} & \bar{x}_{22} \end{vmatrix} \eta + \begin{vmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{22} \\ \bar{y}_{11} & \bar{y}_{22} \end{vmatrix} \right\}^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Si consideri il determinante

$$(15)\qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ x_{11} & x_{12} & x_{22} \\ y_{11} & y_{12} & y_{22} \end{vmatrix}$$

e *supponiamo che esso non sia nullo.* Il suo determinante complementare, con le posizioni (8), (9), (10), è:

$$a\sqrt{a}\begin{vmatrix} -\bar{z}_{22} & 2\bar{z}_{12} & -\bar{z}_{11} \\ -\bar{y}_{22} & 2\bar{y}_{12} & -\bar{y}_{11} \\ \bar{x}_{22} & -2\bar{x}_{12} & \bar{x}_{11} \end{vmatrix}.$$

In forza di un noto teorema sui determinanti complementari, i determinanti che figurano nella (14) sono uguali rispettivamente a $-\frac{1}{2}y_{22}$, $\frac{1}{2}x_{22}$, $\frac{1}{2}a_{22}$; $-\frac{1}{2}y_{11}$, $\frac{1}{2}x_{11}$, $\frac{1}{2}a_{11}$; $-y_{12}$, x_{12}, a_{12}, a meno del fattore $\frac{D}{a}$, il quale non ha influenza sull'equazione stessa.

Si ha perciò, dalla (14),

$$(16)\qquad \begin{aligned} (-y_{22}\xi + x_{22}\eta + a_{22})(-y_{11}\xi + x_{11}\eta + a_{11}) &= \\ = (-y_{12}\xi + x_{12}\eta + a_{12})^2. \end{aligned}$$

Sviluppiamo il prodotto e il quadrato che figurano nella (16), e facciamo la posizione

$$(h, k) = h_{11}k_{22} - 2h_{12}k_{12} + h_{22}k_{11},$$

essendo h_{rs}, k_{rs} due sistemi doppi simmetrici. Si trae l'equazione, in forza della relazione (3),

$$(y, y)\xi^2 + (x, x)\eta^2 - 2(a, y)\xi + 2(a, x)\eta + (a, a) = 0.$$

Il luogo descritto dal punto F al variare della direzione $\frac{du_2}{du_1}$ attorno a f è quindi una conica. Se essa è a centro, i suoi assi sono paralleli agli assi coordinati, cioè alle normali N_1; se invece è una parabola, il suo asse e la tangente al vertice sono paralleli alle suddette normali. Il teorema I° è così dimostrato. Chiaremo k_1 questa conica [1]).

---

[1]) Se la superficie Σ è immersa in uno spazio lineare S_4 la conica k_1 ruotata di 90 gradi attorno al centro nel suo piano (o attorno al vertice, se è una parabola), diventa il luogo dei punti Q che sono intersezione di due piani normali in due punti di Σ infinitamente vicini. Ciò risulta dalla mia ricerca: ***Determinazione di un particolare sistema di normali delle superficie dello spazio*** S_4. [Atti dell'Acc. di Torino: in corso di stampa].

Osservazione. Abbiamo visto che per dimostrare il Teorema I°, si è dovuto supporre che il determinante D non fosse nullo. Nel coso opposto, avendosi proporzionalità fra i minori complementari degli elementi di due qualunque linee parallele, le (11) ci dicono che il punto F non si sposta al variare della direzione $\frac{du_2}{du_1}$ attorno a f. Nasce perciò la domanda se questo è un fatto possibile. Che lo sia, lo si può vedere coll'esempio seguente, che io devo all'amabilità del Prof. Vitali. Siano $\phi_l = \phi_l(t)$ quattro parametri normali fra loro ortogonali, e poniamo:

$$f = \phi_1 \operatorname{sen} u_1 + \phi_2 \cos u_1 + \phi_3 \operatorname{sen} u_2 + \phi_4 \cos u_2.$$

Le derivate prime della f rispetto ad u_1, u_2, sono:

$$f_1 = \phi_1 \cos u_1 - \phi_2 \operatorname{sen} u_1$$
$$f_2 = \phi_3 \cos u_2 - \phi_4 \operatorname{sen} u_2.$$

Quindi:

$$a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{12} = 0.$$

I simboli di Christoffel sono tutti nulli, e quindi le derivate covarianti f_{rs} coincidono con le ordinarie.

Perciò:

$$f_{11} = -\phi_1 \operatorname{sen} u_1 - \phi_2 \cos u_1$$
$$f_{12} = 0$$
$$f_{22} = -\phi_3 \operatorname{sen} u_2 - \phi_4 \cos u_2.$$

Le direzioni f_1, f_2, f_{11}, f_{22} sono fra loro a due a due perpendicolari, come è facile riconoscere, quindi lo spazio 2-tangente della superficie considerata è a quattro dimensioni. Indicando a con X, Y parametri normali delle direzioni f_{11}, f_{22}, dovendo essere

$$f_{rs} = x_{rs} X + y_{rs} Y,$$

si conclude che si ha:

$$y_{11} = 0, \quad x_{12} = y_{12} = 0, \quad x_{22} = 0.$$

Il determinante D è quindi nullo. Si noti che il suo annullarsi non dipende dalla scelta dei parametri X, Y.

2. Interpretazione geometrica delle normali N_2.

Ora indichiamo con ξ, η le coordinate di un punto del piano normale ν a Σ riferito alla coppia N_2. Sia F' un punto di ν definito ponendo

(17) $$F' = f + \frac{\Sigma_{rs} f_{rs}\, du_r\, du_s}{\Sigma_{rs} a_{rs}\, du_r\, du_s}.$$

Vale il seguente

Teorema II⁰: *Al variare della direzione* $\frac{du_2}{du_1}$ *attorno a f, il punto F' genera una ellisse che ha per assi due rette parallele alle normali N_2.*

Dimostrazione: Per la scelta che abbiamo fatto degli assi di riferimento nel piano ν, vale la relazione

(18) $$(\overline{x}, \overline{y}) = 0.$$

Se surroghiamo nella (17) le derivate covarianti con le loro espressioni (6), vediamo subito che le coordinate del punto F' rispetto al sistema N_2, sono:

(19) $$\xi = \frac{\Sigma_{rs}\, x_{rs}\, du_r\, du_s}{\Sigma_{rs}\, a_{rs}\, du_r\, du_s} \quad \eta = \frac{\Sigma_{rs}\, y_{rs}\, du_r\, du_s}{\Sigma\, a_{rs}\, du_r\, du_s}.$$

Confrontando allora le equazioni (19) con le (11), si vede che il luogo del punto F' viene dato dalla equazione (14), ove in questa le $\overline{x}_{rs}$, $\overline{y}_{rs}$, $\overline{z}_{rs}$ siano rimpiazzate dalle x_{rs}, y_{rs}, a_{rs}. Ricorrendo allora alle notazioni (8), (9), (10), e dividendo per $2\sqrt{a}$ l'equazione stessa, in forza della relazione (18), si ottiene

$$(\overline{y}, \overline{y})\, \xi^2 + (\overline{x}, \overline{x})\, \eta^2 + 2\, (\overline{z}, \overline{y})\, \xi - 2\, (\overline{z}, \overline{x})\, \eta + (\overline{z}, \overline{z}) = 0.$$

Il punto F' descrive quindi una conica. Questa conica è una ellisse. Infatti, ho dimostrato nel lavoro citato a pagiua 5, che le funzioni (8), (9), (10) formano tre sistemi cavarianti doppi. Se quindi dividiamo ogni coefficiente della suddetta equazione per a, i nuovi coefficienti diventano altrettanti invarianti. Scegliamo allora come variabili u_1, u_2 quelle per cui $a_{12} = x_{12} = 0$, e questa scelta la possiamo sempre fare, perche, la forma (2) è definita (positiva). Con queste variabili risulta $\overline{x}_{11} = \overline{x}_{22} = 0$, e un virtù della (18) $\overline{y}_{12} = 0$, non potendo essere $\overline{x}_{12} = 0$, perchè in tal caso il determinante (15) sarebbe nullo. Per questa ragione anche y_{12} è diverso da zero, Abbiamo perciò:

$$(\overline{x}, \overline{x})\, (\overline{y}, \overline{y}) = -\, \overline{x}_{12}^2\, \overline{y}_{11}\, \overline{y}_{22} = a_{11}\, a_{22}\, \overline{x}_{12}^2\, y_{12}^2 > 0.$$

3. Superficie minime.

Per le superficie minime Σ vale il seguente

Teorema III°: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie Σ sia minima, è che il centro della conica k_1 sia situato sulla superficie* [1]).

Dimostratione: Sia Σ una superficie minima dellò spazio hilbertiano: diciamo $a^{(rs)}$ gli elementi della forma reciproca della (2). Allora le classiche equazioni di Eulero-Lagrange (in numero naturalmente infinito) relative alla superficie Σ si possono riassumere nella sola equazione [2])

$$\Sigma a^{(rs)} f_{rs} = 0. \tag{20}$$

Ora questa equivale alla sequente:

$$\Sigma a^{(rs)} (x_{rs} X + y_{rs} Y) = 0; \tag{21}$$

e poichè X, Y sono parametri liberi, si trae che deve essere separatamente

$$\Sigma a^{(rs)} x_{rs} = 0, \quad \Sigma a^{(rs)} y_{rs} = 0, \tag{22}$$

cioè:

$$(a, x) = 0, \qquad (a, y) = 0. \tag{23}$$

E queste ci dicono che il centro della conica k_1 è sulla superficie Σ.

Viceversa, se ciò accade per una superficie Σ, valgono le (23), che sono equivalenti alle (22). E valida quindi anche la (21), e infine la (20). La superficie Σ è quindi minima [3]).

Infine dimostriamo che per le superficie minime, le conica k_1 non può essere una parabola. Nel determinante D del numero 2, non tutti i minori estratti dalla matrice

$$\left\| \begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{22} \\ y_{11} & y_{12} & y_{22} \end{matrix} \right\|$$

possono essere tutti nulli; perchè nel caso opposto lo spazio 2-tangente avrebbe meno di quattro dimensioni. Per fissare le idee si supponga non nullo il minore

---

[1]) Diciamo „centro“ perchè verrà dimostrato che nelle superficie Σ che sono minime, la conica k_1 non è una parabola.

[2]) Cfr. A. Tonolo loc. cit. [4]).

[3]) Intendiamo con ciò che se $f = f(t, u_1, u_2)$ è l'equazione della superficie Σ, la f soddisfa all'equazione (20).

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ y_{11} & y_{12} \end{vmatrix}.$$

Se la conica k_1 fosse una parabola, si dovrebbe avere, ad esempio,

$$(x, x) = 0.$$

Associando questa identità scritta così:

$$x_{11}\, x_{22} - 2\, x_{12}\, x_{12} + x_{22}\, x_{11} = 0,$$

alle due sequenti

(24) $$(x, y) = 0$$

(25) $$(a, x) = 0,$$

si conclude che deve essere nullo il determinante D. Ora da questo determinante si trae:

$$a_{11}\, D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & (a\, a) \\ x_{11} & x_{12} & (a, x) \\ y_{11} & y_{12} & (a, y) \end{vmatrix}.$$

E un forza delle (23) si ha:

$$a_{11}\, D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & (a, a) \\ x_{11} & x_{12} & 0 \\ y_{11} & y_{12} & 0 \end{vmatrix} = (a, a) \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ y_{11} & y_{12} \end{vmatrix}.$$

Il secondo membro è diverso da zero. Il determinante D non può quindi essere nullo.

Invariants projectifs de quatre droites. Complexes particuliers. Sous-groupes du groupe des homographies.

Par

M. Bertrand Gambier.

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

1. Invariants projectifs de quatre droites.

Je rappelle quelques résultats classiques. Soient quatre droites $T_i (i = 0, 1, 2, 3)$ et leurs coordonnées plückériennes $(a_i, b_i, c_i, l_i, m_i, n_i)$. Je pose

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (ik) \equiv (ki) \equiv a_i l_k + b_i m_k + c_i n_k + l_i a_k + m_i b_k + n_i c_k \\ A \equiv (01)(23) \qquad B \equiv (02)(31) \qquad C \equiv (03)(12) \end{array} \right. .$$

Si la droite T_i est définie par les deux points $(x_i, y_i, z_i, \theta_i)$ et $(X_i, Y_i, Z_i, \Theta_i)$, il est clair que l'on peut prendre

$$(2) \qquad (ik) \equiv | x_i X_i x_k X_k |$$

et que, par suite, au cours d'une même transformation homographique de l'espace, quel que soit le facteur par lequel on multiplie les coordonnées, anciennes ou nouvelles, de chaque point séparément, les rapports mutuels de A, B, C restent invariables et constituent les deux seuls invariants projectifs distincts appartenant à ce système de 4 droites. Ceci explique pourquoi, bien qu'un système de 4 droites dépende de 16 paramètres métriques et que la transformation homographique de l'espace dépende de 15 paramètres, il y ait d e u x (et non u n e s e u l e) conditions pour pouvoir passer d'un premier système (T_i^0) à un second (T_i) par une homographie, mais que, par compensation, quand ces deux conditions sont remplies, il y ait ∞^1 façons d'opérer le passage [dans certains cas ∞^2 on même ∞^3].

Ecartons le cas où il y a un ou plusieurs couples de droites sécantes et même le cas où les droites seraient génératrices d'un même stystème d'une quadrique. Si les deux sécantes communes sont distinctes, les rapports anharmoniques découpés par les T_i sur ces sécantes sont des invariants projectifs et doivent pouvoir se calculer par une équation du second degré dont les coefficients sont homogènes en A, B, C. Il suffit en effet, pour définir les T_i, de choisir les points

$$(3)\quad \left|\begin{array}{l} T_0 \ \ (x_0, y_0, z_0, \theta_0), (X_0, Y_0, Z_0, \Theta_0) \\ T_1 \ \ (x_1, y_1, z_1, \theta_1), (X_1, Y_1, Z_1, \Theta_1) \\ T_2 \ \ (x_0+\lambda x_1,\ y_0+\lambda y_1, \ldots), (X_0+\lambda' X_1,\ Y_0+\lambda' Y_1, \ldots) \\ T_3 \ \ (x_0+\mu x_1,\ y_0+\mu y_1, \ldots), (X_0+\mu' X_1,\ Y_0+\mu' Y_1, \ldots) \end{array}\right.$$

Les rapports anharmoniques des points en jeu sont, pour l'ordre $T_0 T_1 T_2 T_3$

$$(4)\qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \qquad \rho' = \frac{\lambda'}{\mu'}$$

Or, on a aisément

$$(5)\quad \left|\begin{array}{l} (02) = \lambda\lambda'(01) \quad (03) = \mu\mu'(01) \quad (12) = (13) = (01) \\ (23) = (\mu - \lambda)(\mu' - \lambda')(01) \\ \ \ A = (\mu-\lambda)(\mu'-\lambda')(01)^2 \ \ B = \lambda\lambda'(01)^2 \ \ C = \mu\mu'(01)^2. \\ \qquad \rho\rho' = \dfrac{B}{C} \qquad \dfrac{A}{C} = (1-\rho)(1-\rho') \end{array}\right.$$

L'équation annoncée est donc

$$(6)\qquad C\rho^2 + (A - B - C)\rho + B = 0.$$

Le signe de l'expression

$$(7)\qquad R = A^2 + B^2 + C^2 - 2BC - 2CA - 2AB$$

indique si les deux sécantes communes sont réelles et distinctes ($R > 0$), imaginaires conjuguées ($R < 0$), confondues en une seule droite réelle ($R = 0$). Si l'on appelle (d) et (D) les deux sécantes, supposées distinctes, et (p_0, p_1, p_2, p_3), (P_0, P_1, P_2, P_3) les points de rencontre de (d) et (D) avec les T_i, il est clair que ρ et ρ' se rapportent aux points (p_i), (P_i) pris dans le même ordre que les (T_i); un échange des (T_i) entre elles ne donne donc que 6 systèmes pour

ρ et ρ' et l'on voit immédiatement que les ordres

$$(8)\qquad T_0\,T_1\,T_2\,T_3,\quad T_1\,T_0\,T_3\,T_2,\quad T_2\,T_3\,T_0\,T_1,\quad T_3\,T_2\,T_1\,T_0$$

où T_0 occupe successivement les rangs 1, 2, 3, 4 donnent les mêmes valeurs A, B, C, d'où le même système ρ, ρ'. Il suffit donc de laisser T_0 au premier rang et d'effectuer les 6 permutations de $T_1\,T_2\,T_3$, ce qui fournit les échanges

$$(9)\qquad \left|\begin{array}{ll} T_0\,T_1\,T_2\,T_3 & A\,B\,C \\ T_0\,T_2\,T_3\,T_1 & B\,C\,A \\ T_0\,T_3\,T_1\,T_2 & C\,A\,B \\ \hline T_0\,T_1\,T_3\,T_2 & A\,C\,B \\ T_0\,T_3\,T_2\,T_1 & C\,B\,A \\ T_0\,T_2\,T_1\,T_3 & B\,A\,C \end{array}\right. \cdot$$

Les échanges (8) s'obtiennent à partir de l'un d'entre eux en échangeant les droites (i, j) entre elles en même temps que les deux autres (k, l) entre elles: nous retrouverons plus loin les échanges en question en étudiant les homographies qui transforment en lui-même le total des quatre droites.

On peut, si l'on veut, regarder (A, B, C) comme les coordonnées homogènes d'un point α d'un plan auxiliaire π rapporté à un triangle équilatéral comme triangle de référence; on achève de fixer les coordonnées en attribuant le système $(1, 1, 1)$ au centre ω de ce triangle. De la sorte à un système donné de 4 droites correspondent 6 points, comme l'indique le tableau (9), provenant de l'un d'eux par rotation de $\dfrac{2\pi}{3}$ autour de ω ou par symétries autour des bissectrices du triangle. La région $R < 0$ correspond à l'intérieur du cercle inscrit γ, $R > 0$ à l'extérieur. On peut remarquer que si $B = C$, le point (A, B, C) est situé sur un axe de symétrie; le rapport $\rho = (p_0\,p_1\,p_2\,p_3)$ est alors égal à $(P_0\,P_1\,P_3\,P_2)$ de sorte qu'il y a une homographie conservant T_0 et T_1 mais échangeant T_2 et T_3, puis (d) et (D); si $A = B = C$, autrement dit si α coïncide avec ω, chaque division $(p_0\,p_1\,p_2\,p_3)$ et $(P_0\,P_1\,P_2\,P_3)$ est équianharmonique, l'une donnant $\rho = -j$, l'autre $\rho' = -j^2$ et l'on peut échanger deux q u e l c o n q u e s des droites entre elles, en conservant les deux autres.

Etant données 3 droites, T_1, T_2, T_3, quel est l'ensemble des droites T, telles que $(T\,T_1\,T_2\,T_3)$, dans cet ordre, donnent toujours les deux mêmes invariants, autrement dit le même point a? Considérons les droites (d) et (D): elles doivent d'abord être génératrices (second système) de la quadrique Q déterminée par T_1, T_2, T_3 (premier système); puis, le point inconnu p est sur la génératrice θ du premier système correspondant au rapport anharmonique ρ de l'ensemble $(\theta\, T_1\, T_2\, T_3)$ sur Q; de même P doit être sur la génératrice Θ correspondant à ρ': autrement dit, la droite T engendre la congruence linéaire dont θ et Θ sont les directrices. Cherchons à obtenir θ et Θ, étant donnés A_0, B_0, C_0: nous pouvons convenir de faire correspondre homographiquement les génératrices du premier système de Q et les point de γ de façon que T_1, T_2, T_3 correspondent respectivement aux points de contact des côtés $A=0$, $B=0$, $C=0$; les génératrices θ et Θ correspondent alors aux points de contact avec γ des tangentes issues du point $\alpha(A_0, B_0, C_0)$. En effet l'équation $\lambda A + \mu B + \nu C = 0$ représente dans le plan π, si λ, μ, ν sont des constantes, une droite; mais dans l'espace, cette même équation écrite.

(10) $$[(23)\lambda l_1 + (31)\mu l_2 + (12)\nu l_3]\, a + \ldots = 0$$

représente un complexe linéaire: pour que ce complexe linéaire contienne la congruence linéaire relative au point (A_0, B_0, C_0) il faut que l'on ait

(11) $$\lambda A_0 + \mu B_0 + \nu C_0 = 0.$$

Si l'on désire ensuite que ce complexe soit spécial, il faut que les coefficients du complexe (10) satisfassent à la relation classique

(12) $$\Sigma[(23)\lambda l_1 + (31)\mu l_2 + (12)\nu l_3][(23)\lambda a_1 + (31)\mu a_2 + (12)\nu a_3] = 0$$

qui. après développement et suppression du facteur (23) (31) (12), devient

(12′) $$\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu = 0.$$

Or c'est l'équation *tangentielle* de la conique γ, de sorte que les complexes spéciaux en jeu sont bien représentés par les tangentes issues de (A_0, B_0, C_0) à γ; le point de contact d'une de ces tangentes avec γ représente une génératrice de Q qui est l'axe de ce complexe spécial.

Ceci montre bien encore que si T est tangente à la quadrique Q, les deux droites (d) et (D) se confondent, $\rho = \rho'$, et (A, B, C) vient sur γ; à un point a de γ correspond donc la congruence *singulière* dont les deux directrices sont confondues avec la génératrice qui, (dans cette correspondance supplémentaire introduite plus haut uniquement entre γ et Q), a pour image ce point a, les droites de la congruence singulières étant de plus tangentes à Q.

2. Définition et étude de certains complexes particuliers.

Si donc on considère une courbe Γ quelconque du plan π, à chaque point μ de Γ correspond une congruence linéaire (g); donc à Γ correspondent ∞^1 congruences linéaires, donc un complexe C de nature très particulière; on peut dire que la courbe Γ', polaire réciproque de Γ vis-à-vis du cercle γ, sert, par ses tangentes, à établir une correspondance entre deux points de γ ou entre deux génératrices de Q, directrices de la congruence linéaire (g).

Si deux courbes Γ, Γ_1 sont étudiées ensemble, leurs points d'intersection donnent les congruences linéaires communes aux complexes linéaires C et C_1 correspondants. Si Γ et Γ_1 sont tangentes en un point μ, à ce point μ correspond une congruence linéaire (g), suivant laquelle C et C_1 se raccordent; autrement dit, pour toute droite D, prise dans (g), et pour un point M quelconque de D, les deux cônes de sommet M relatifs à C et C_1 ont D pour génératrice de contact; donc toute tangente à Γ représente le complexe linéaire tangent à C tout le long de la congruence linéaire correspondant au point de contact; c'est d'ailleurs pour cela que le cercle γ représente non pas seulement la demi-quadrique Q, mais le complexe spécial formé de toutes les tangentes à Q.

On obtient aisément l'ordre r du complexe C, quand Γ est une courbe algébrique; car, pour tout point M pris sur Q, le cône du complexe, qui a M pour sommet, se décompose en r plans s'appuyant sur les génératrices du premier système correspondant à celle G, du premier système aussi, issue de M sur Q. Si donc on mène la tangente à γ au point g correspondant à G, cette tangente perce Γ en divers points $P_1, P_2, \ldots$ et chaque tangente nouvelle à γ issue de P_1, ou $P_2, \ldots$ donne une génératrice de Q associée à G, de sorte que r est égal au degré de Γ ou à la classe de Γ', polaire réciproque de Γ par rapport à γ; comme chaque tangente à Γ' perce γ en deux points g, g_1, il peut arriver que sur γ la correspondance entre les points g, g_1 soit symétrique, ou dissymétrique; dans le premier cas, si à g correspondent r points g_1, la classe de Γ' et le degré de C sont égaux à r; dans le second, à un point de γ considéré comme point g correspondent ρ points g_1 et à un point considéré comme g_1 correspondent ρ_1 points g: la classe de Γ' et le degré de C sont égaux alors à $\rho + \rho_1$.

3. Homographies transformant le système (T_i^0) en le système (T_i) de mêmes invariants.

Soient deux espaces E^0, E se correspondant homographiquement; une quadrique Q^0 du premier a pour homologue une quadrique Q du second; si l'on connaît la correspondance ponctuelle entre Q_0 et Q, on obtient immédiatement l'homologue de M^0, M^0 étant un point quelconque de E^0; car une droite arbitraire issue de M^0 perce Q^0 en u^0, v^0; on marque sur Q les homologues $u\,v$; une autre sécante issue de M^0 conduit de même à une autre droite portant M. Le construction ainsi présentée réussit en remplaçant Q^0 et Q par deux surfaces homologues coupées par une droite au moins en deux points; l'emploi de quadriques est avantageux, parce qu'elles sont doublement réglées: les génératrices d'un système de Q^0 ont pour homologues les génératrices d'un système de Q et il suffit de donner 3 couples homologues pour définir cette correspondance; de même pour la correspondance entre les génératrices de l'autre système.

Cela posé soient deux systèmes de droites $(T^0, T_1^0, T_2^0, T_3^0)$ et (T, T_1, T_2, T_3) se correspondant dans cet ordre, de telle façon que les invariants soient égaux; supposons d'abord les deux sécantes (d^0), (D^0) distinctes (réelles ou non, peu importe); (d), (D) sont elles aussi distinctes; construisons les quadriques Q^0, Q déterminées par (T_1^0, T_2^0, T_3^0) ou (T_1, T_2, T_3); (d^0), (D^0) appartiennent à Q^0, (d), (D) à Q, dans le second système de génératrices; en faisant correspondre homographiquement les génératrices du premier système dans Q^0 et Q, avec les couples homologues (T_1^0, T_1), (T_2^0, T_2), (T_3^0, T_3), puis celles du second avec les deux couples (d^0, d) et (D^0, D), il n'y a plus qu'un paramètre arbitraire, c'est celui qui fixe la génératrice δ du second système de Q homologue d'une génératrice fixe δ^0 du second système de Q^0; et alors il est clair que ρ, ρ' étant les mêmes sur (d^0, d) et (D^0, D), la droite T^0 a pour homologue T: les opérations décrites ici ont évidemment un caractère nécessaire et la construction même prouve leur caractère suffisant.

Si le point (A, B, C) correspondant à la fois aux deux systèmes (T_i^0), $T_i)$ est sur le cercle γ, il y a des précautions à prendre avant d'affirmer que le passage est possible; la droite T est ou bien simplement tangente à la quadrique Q déterminée par T_1, T_2, T_3 ou bien elle est elle aussi génératrice de Q, et de même système que T_1, T_2, T_3. Pour T^0 et Q^0, il y a les deux hypothèses analogues; pour que le passage soit possible, il est nécessaire (et suffisant) que l'hypothèse réalisée soit la même de part et d'autre; si T est génératrice de Q, mais non T^0 de Q^0, le passage est impossible, bien que les invariants soient les mêmes. Ceci explique l'existence sur les complexes C, définis précédemment, de droites singulières: en effet la courbe Γ définie comme image de C perce γ en divers points; à l'un d'eux, g, correspond la congruence linéaire singulière des tangentes à Q le long de la génératrice G; les droites de cette congruence, G exclue, ont, en général, les propriétés qui ont servi à définir le complexe C; quant à G, qui appartient à la congruence, donc à C; elle ne possède pas ces propriétés.

Si T^0 et T appartiennent toutes deux l'une à Q^0, l'autre à Q^0, l'autre à Q, le passage du système (T_i^0) au système (T_i) est possible par ∞^3 (et non plus ∞^1) homographies: on peut, en effet, disposer librement de l'homographie associant sur Q^0 et Q les génératrices du second système.

Reste enfin le cas où T^0 et T sont simplement tangentes à Q^0 ou Q; prenons un point A^0 fixe de T^0 et faisons lui correspondre — c'est là l'unique paramètre qui va jouer — un point A arbitraire de T; l'homographie des espaces E^0 et E où baignent Q^0 et Q se trouve définie, car M^0 étant un point de E^0, joignons le à A^0: la droite ainsi obtenue perce Q^0 en u^0, ν^0; les génératrices du premier système issues de u^0, ν^0, soient U^0 et V^0 sont connues et ont pour homologues U et V sur Q; A n'étant pas sur Q n'est ni sur U ni sur V de sorte que par A passe une droite et une seule s'appuyant sur U, V, perçant Q en u, v; le point M est sur Auv et le birapport $(AMuv)$ est égal à $(A^0 M^0 u^0 \nu^0)$ ce qui achève de déterminer M (remarquons que ce genre de raisonnement aurait réussi pour le premier cas).

Il y a lieu, pour être complet, d'envisager le cas où T coupe T_1, sans être tangente à la quadrique Q déterminée par T_1, T_2, T_3; on a $A = 0$, $B \neq C$; l'équation formée au n° 1,

$$(1) \qquad C\rho^2 + (A - B - C)\rho + B = 0$$

dont dépend la recherche des sécantes communes aux quatre droites, admet la racine $\rho = 1$ comme racine simple; pour le système (T_i^0) qui a les mêmes invariants, l'équation $A = 0$ prouve que: ou bien T_1^0 et T^0 se coupent, ou bien T_2^0 et T_3^0 se coupent; si T^0 et T_1^0 se coupent on passe par ∞^1 homographies du système $(T\,T_1\,T_2\,T_3)$ à $(T^0\,T_1^0\,T_2^0\,T_3^0)$ par les mêmes raisonnements que précédemment; mais il y a cette différence avec ce qui précède que les passages de

$$\left\{\begin{array}{ll} T_2^0\,T_3^0\,T^0\,T_1^0 & \text{à} \quad T\,T_1\,T_2\,T_3 \\ T_3^0\,T_2^0\,T_1^0\,T^0 & \end{array}\right.$$

par homographie, dans cet ordre, ne sont plus possibles, comme dans le cas général; seuls sont restés possibles les passages

$$\left\{\begin{array}{l} T^0\,T_1^0\,T_2^0\,T_3^0 \\ T_1^0\,T^0\,T_3^0\,T_2^0 \end{array}\right. \quad \text{à} \quad T\,T_1\,T_2\,T_3.$$

Le point (A, B, C) a été placé sur le côté $A = 0$ sans coïncider avec le point de contact de ce côté avec γ; si on le place au point de contact, $A = 0$, $B = C$, l'équation (1) admet la racine double $\rho = 1$; supposons que T_1^0 rencontre T^0 (et de même $(T_1$ et $T)$; T^0 est tangente à Q_0, supposons la distincte de T_1^0 et de l'autre génératrice de Q^0 issue du point commun à T^0 et T_1^0; si T satisfait aux mêmes restrictions, le passage se fait par ∞^1 homographies, avec les mêmes constructions que précédemment; si T^0 coïncide avec T_1^0, il faut qu'il en soit de même pour T et T_1 (si non il y aurait impossibilité) et il y a ∞^3 homographies; si T^0 coïncide avec la génératrice de système opposé, il faut qu'il en soit de même pour T, et alors il y a ∞^2 homographies.

On doit remarquer d'ailleurs que tous les complexes C définis plus haut contiennent comme droites singulières toutes les droites s'appuyant sur T_1, T_2, T_3: on a, en effet, pour chacune d'elles $A = B = C = 0$, mais alors ce système (A, B, C) ne correspond plus à un point du plan π.

On peut remarquer qu'au lieu de prendre une demi-quadrique Q pour établir une correspondance entre ses génératrices par couples, on pourrait faire la même opération pour une surface réglée arbitraire Σ: on aurait donc un complexe C encore décomposable en ∞^1 congruences linéaires et l'on pourrait donner encore une image de ce complexe en coupant Σ par un plan arbitraire et faisant correspondre à chaque génératrice de Σ son pied sur la courbe γ ainsi obtenue (ou bien remplacer ensuite γ par une transformée birationnelle γ').

4. Sous-groupes du groupe des homographies.

Dans ce qui précède rien ne suppose que les espaces E^0, E soient distincts; s'ils sont confondus, on pourra obtenir des résultats intéressants en cherchant les points doubles, ou en cherchant des sous-groupes du groupe des homographies.

Si nous considérons 3 droites T_1, T_2, T_3 que nous supposons sans point commun deux à deux, il y a ∞^3 homographies échangeant chaque droite, dans son ensemble, avec elle-même; dans chacune de ces homographies isolées, la quadrique Q déterminée par T_1, T_2, T_3 se conserve et il y a deux génératrices du second système qui se conservent chacune point pour point, de sorte que nous obtenons une homographie biaxiale. Les homographies en jeu forment un sous-groupe fini continu du groupe général des homographies.

On obtient d'autres sous-groupes en supposant que T_1, T_2, T_3 s'échangent, ou circulairement, ou d'une façon quelconque; on a encore des sous-groupes à 3 paramètres; d'ailleurs si on considère la quadrique Q portant T_1, T_2, T_3 cela revient au fond à cataloguer les homographies conservant, dans son ensemble, chaque système de génératrices; dans une de ces homographies, il y a deux génératrices de chaque système dont chacune, dans son ensemble, reste fixe, et on obtient ainsi quatre points invariants dans l'homographie.

Revenons au cas de quatre droites $T\ T_1\ T_2\ T_3$ que nous supposons sans point commun deux à deux et qui possédent deux sécantes communes (d) et (D) (et deux seulement), distinctes. Les ∞^1 homographies h conservant chacune dans son ensemble sont les homographies biaxiales d'axes (d) et (D); (d) et (D) sont conservées point pour point; toute droite de la congruence linéaire d'axes (d), (D) est conservée dans son ensemble, ainsi que toute surface réglée de cette congruence. On a un groupe à 1 paramètre.

Il y a ∞^1 homographies H, qui, cette fois ne forment plus un groupe, produisant l'échange

(1) $$(T\,T_1\,T_2\,T_3),\ (T_1\,T\,T_3\,T_2).$$

Marquons sur (d) les points où elle rencontre les droites (T_i), soient p, p_1, p_2, p_3, et de même P, P_1, P_2, P_3 sur (D); chacune des homographies en jeu échange (d) en elle-même et sur (d) échange p et p_1, p_2 et p_3, de sorte que la trace des ces ∞^1 homographies sur (d) est la même: c'est l'involution, relative à cette droite, définie par les couples $(p\,p_1)$ et $(p_2\,p_3)$; soient i, j les points doubles de cette involution et I, J les points analogues sur (D); chaque point i, j, I, J reste invariable dans les ∞^1 homographies en jeu. On peut remarquer que le couple (T, T_1), ainsi que le couple (T_2, T_3), est conjugué par rapport aux quadriques du faisceau linéaire (ponctuel aussi bien que tangentiel) contenant le quadrilatère gauche $i\,I\,j\,J$; soit q une quadrique de ce faisceau, c l'un des complexes linéaires contenant la congruence linéaire (d), (D); deux transformations dualistiques successives, l'une par rapport à q, l'autre à c (ou dans l'ordre inverse) équivalent à l'une des transformations homographiques qui nous occupe en ce moment; réciproquement toute transformation homographique de ce système est de ∞^1 façons décomposable en une telle chaîne de deux dualités, le premier élément de la chaîne pouvant être choisi arbitrairement (ou le second) et déterminant l'autre.

On peut de même considérer les ∞^1 homographies H' produisant l'échange

(2) $$(T\,T_1\,T_2\,T_3),\quad (T_2\,T_3\,T\,T_1)$$

avec le couple (i', j') sur (d), (I', J') sur (D) et enfin considérer les ∞^1 homographies H'' relatives à l'échange

(3) $$(T\,T_1\,T_2\,T_3),\quad (T_3\,T_2\,T_1\,T)$$

et les couples (i'', j''), (I'', J'').

Il est clair que la composition des opérations h, H, H', H'' conduit aux égalités symboliques

$$H^2 = h \quad H'^2 = h \quad H''^2 = h \quad H'\,H'' = H \quad H''\,H = H' \quad H\,H' = H''$$

qu'il ne faut pas prendre au sens étroit, car chaque membre a une infinité de déterminations: cela signifie, par exemple pour la première, qu'une opération H répétée deux fois est une certaine opération h; on pourrait d'ailleurs écrire $H\,H = h$, en composant une opération H avec une opération H différente. En tous cas les opérations h forment un groupe et il en est de même de l'ensemble des opérations h, H, H', H'': ce dernier groupe est celui des homographies qui conservent le bloc des quatre droites.

Considérons maintenant les systèmes $i j i' j'$ et $I J I' J'$: ayan le même rapport anharmonique (-1), ils déterminent sur (d) et (D) deux divisions en homographie; I'' est l'homologue, dans ce cas, de l'un des deux points i'', j'' et nous pouvons choisir les notations de façon que i'' et I'' se correspondent; de la sorte nous obtenons trois couples remarquables de génératrices d'un même système d'une quadrique q_1 en joignant les points correspondants

$$(4) \qquad \left| \begin{array}{cccccc} i & j & i' & j' & i'' & j'' \\ I & J & I' & J' & I'' & J'' \end{array} \right.$$

et sur cette quadrique q_1 chacun des 3 couples de génératrices $(i\, I, j\, J)$ divise harmoniquement les deux autres. On a des quadriques analogues par les associations

$$(5) \left\{ \begin{array}{cccccc} i & j & i' & j' & i'' & j'' \\ J & I & I' & J' & J'' & I'' \end{array} \right. \qquad (6) \left\{ \begin{array}{cccccc} i & j & i' & j' & i'' & j'' \\ I & J & J' & I' & J'' & I'' \end{array} \right.$$

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{cccccc} i & j & i' & j' & i'' & j'' \\ J & I & J' & I' & I'' & J'' \end{array} \right.$$

qui sont les seules possibles ici en tenant compte de ce que le couple $(I\, J)$ par exemple, dans son ensemble, a pour homologue nécessairement $(i\, j)$, puis, que si l'on permute les points d'un même couple en seconde ligne, il faut aussi permuter l'un des deux autres couples (et un seul; tout cela se vérifie aussitôt en prenant $0, \infty, 1, -1, i, -i$ pour abscisses des points i, j, i', j', i'', j'').

Or si nous considérons le tableau (4), nous voyons que l'involution biaxiale d'axes $i\, I$ et $j\, J$ permute T et T_1, T_2 et T_3, $i'\, I'$ et $j'\, J'$, $i''\, I''$ et $j''\, J''$, et conserve la quadrique q_1 dans son ensemble, l'homographie sur les génératrices du système $i\, I$ étant une involution, dont $i\, I$ et $j\, J$ sont les génératrices doubles. Mais alors nous avons découvert un sous-groupe fini discontinu du groupe des homographies: à savoir les 3 involutions biaxiales dont les axes sont donnés successivement par les colonnes du tableau (4); les tableaux (5), (6), (7) conduisent à des remarques semblables. Nous avons ainsi obtenu, et d'une façon nécessaire, pour quatre droites, qui ont deux sécantes communes distinctes et qui ne comprennent aucun couple de droites sécantes:

a) un groupe fini continu d'homographies conservant chaque droite;

b) un groupe fini continu d'homographies conservant le bloc des quatre droites;

c) six involutions biaxiales conservant le bloc en échangeant, par couples, les quatre droites [l'échange de T et T_1 donne l'involution $(i\,I,\ j\,J)$ ou l'involution $(i\,J,\ j\,I)$]; ces six involutions peuvent être réparties en 4 groupes ternaires fournis par les tableaux (4), (5), (6), (7); (à chacun de ces groupes ternaires on doit en réalité adjoindre la transformation identique).

5. Groupe ternaire-tétraèdre. Groupe ternaire-quadrique.

Jusqu'ici le groupe des homographies n'a été étudié, au point de vue de ses sous-groupes, que partiellement; les géomètres, surtout pour les sous-groupes discontinus, n'ont guère déterminé que les sous-groupes du groupe des déplacements (avec bien entendu le transformé, par une transformation homographique arbitraire, d'un tel sous-groupe). Les sous-groupes ainsi obtenus reviennent à chercher ceux qui doivent transformer une sphère (quadrique à génératrices imaginaires) en elle-même. Il y a lieu d'étendre, avec les modifications convenables dues au souci de la réalité, ces résultats au cas où une quadrique à génératrices réelles doit rester invariante, dans son ensemble, par le sous-groupe cherché.

Je signale un sous-groupe évident; pour une quadrique invariante, si on appelle λ, μ les paramètres des génératrices, l'homographie de l'espace est, comme nous l'avons vu, parfaitement caractérisée par sa trace sur la quadrique et cette trace revient à l'ensemble de deux homographies séparées sur la variable λ et sur la variable μ, de sorte que l'on écrit soit

$$(1)\qquad \lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} \qquad \mu' = \frac{a'\,\mu' + b'}{c'\,\mu' + d'}$$

soit

$$(2)\qquad \lambda' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d} \qquad \mu' = \frac{a'\lambda + b'}{c'\lambda + d'}.$$

Or on sait trouver une substitution (λ, λ') réelle qui, itérée p fois, conduise à la substitution identique; il suffit de prendre sur un cercle le point de paramètre $\lambda = \operatorname{tg}\frac{\phi}{2}$, ϕ étant l'angle au centre compris entre un rayon fixe et le rayon passant par le point mobile, puis de prendre $\phi' = \phi + \frac{2\pi}{p}$ et $\lambda' = \operatorname{tg}\frac{\phi'}{2}$; en faisant l'opération semblable sur μ, avec un entier q égal ou non à p, la substitution $(\lambda, \mu; \lambda', \mu')$ donne évidemment un sous-groupe discontinu des homographies. La quadrique étant à génératrices réelles, on a une transformation réelle. Je me borne à ces indications rapides pour revenir au sujet de ce travail.

Nous avons défini l'involution biaxiale; c'est une transformation réelle si les deux axes sont réels ou imaginaires conjugués. Comment doit-on prendre trois involutions biaxiales pour obtenir un groupe ternaire I, I', I'', ce qui se traduira par les égalités symboliques

$$I'I'' = I \quad I''I = I' \quad II' = I''. \tag{3}$$

Remarquons que cela entraînera en multipliant, à droite, la dernière égalité par I'

$$I = II'I' = I''I' \tag{4}$$

de sorte que la composition de deux opérations est réciproque. On peut écrire, en multipliant la dernière égalité, à gauche, par I',

$$I'II' = I'I'' = I \tag{5}$$

donc, puisque $I' = (I')^{-1}$, la transformée de I par I' n'est autre que I; or les deux axes de I, à savoir A et B deviennent, si on transforme l'opération I par I' deux droites $\overline{A}, \overline{B}$; d'après l'égalité (5), ces deux droites $\overline{A}, \overline{B}$ doivent coïncider (dans leur ensemble) avec A, B; il y a donc deux cas à séparer: soit $\overline{A} = A$, $\overline{B} = B$, soit $\overline{A} = B$, $\overline{B} = A$. Dans le premier, A, devant se conserver, rencontre les axes A' et B' de I', et pour la même raison B les rencontre; la figure $AA'BB'$ est un quadrilatère gauche qui, réuni à ses diagonales, donne un tétraèdre; une transformation homographique transforme ce tétraèdre en un trièdre de coordonnées rectangulaires joint au plan de l'infini et nous retrouvons cette circonstance bien connue que la symétrie (Ox) composée avec la symétrie (Oy) fournit la symétrie (Oz); car, si les axes A, B sont devenus Ox et la droite à l'infini du plan yOz, l'involution biaxiale (A, B) devient la symétrie Ox. Donc nous avons trouvé le groupe t e r n a i r e - t é t r a è d r e: les 3 involutions biaxiales se rapportent aux 3 couples d'arêtes opposées. Dans le second cas, l'involution biaxiale I' transforme A en B, de sorte que (A, B) et (A', B') sont sur une même quadrique et se partagent harmoniquement: mais alors nous retrouvons la disposition trouvée directement en étudiant un groupe de 4 droites: la troisième involution a pour axes le couple (A'', B'') qui partage harmoniquement les deux premiers; on sait que sur 3 tels couples, il ne peut y en avoir que deux réels (ou zéro); si on suppose (A, B) et (A', B') réels, le couple (A'', B'') est imaginaire conjugué, de sorte que l'involution biaxiale I'' est une transformation réelle, chose d'ailleurs évidente à priori puisqu'elle est la résultante des opérations réelles I et I'.

Supposons donc que nous ayons nos quatre droites réelles T, T_1, T_2, T_3 avec les mêmes restrictions et que les sécantes (d), (D) soient réelles; on peut prendre les notations de sorte que sur (d) l'ordre des points de rencontre des points avec les T_i soit justement $p_0\, p_1\, p_2\, p_3$; les points appelés i, j divisant harmoniquement $(p_0\, p_1)$ et $(p_2\, p_3)$ sont réels; de même i'', j'' qui divisent harmoniquement $p_0\, p_3$ et $p_1\, p_2$; mais i', j' sont imaginaires conjugués. Sur (D), si les segments $P_0\, P_2$ et $P_1\, P_3$ empiètent l'un sur l'autre, nous aurons 3 transformations involutivec successives réelles dans chacun des quatre groupes ternaires indiqués au numéro précédent [formules (4), (5), (6), (7)], parce que I' et J' aussi seront imaginaires conjugués. Mais si cela n'arrive pas, supposons (I, J) imaginaires conjugués, nous voyons que dans chacun des quatre groupes ternaires, il y a une seule involution biaxiale réelle, les deux autres étant imaginaires conjuguées, l'involution réelle correspondant à $(i''\, I'', j''\, J'')$ ou $(i''\, J'', j''\, I'')$ et ayant ses axes réels.

Si maintenant (d) et (D) sont imaginaires conjuguées, comme le couple $(i\, j)$ est formé de deux points imaginaires ayant pour conjugués le total $(I\, J)$, de même $(i'\, j')$ et $(I'\, J')$, et $(i''\, j'')$ et $(I''\, J'')$ on peut choisir les notations de sorte que i, j, i', j' aient pour conjugués respectifs $I, J, I'\, J'$; ce choix fixe I'' car le birapport $(i\, j\, i'\, i'')$ doit égaler $(I\, J\, I'\, I'')$; dans ce cas on voit que les droites $i\, I$, $j\, J$, $i'\, I'$, $j'\, J'$ sont réelles, donc I'' est le conjugué de j'', et J'' celui de i''; on voit alors que les combinaisons (4), (5), (6) du numéro précédent donnent chacune un groupe ternaire de 3 involutions réelles, dont deux ont leurs axes réels, mais la combinaison (7) fournit 3 involutions réelles à axes tous imaginaires.

6. Etude du cas spécial où les sécantes communes aux quatre droites sont confondues en une seule.

T, T_1, T_2, T_3 sont encore supposées ne contenir aucun couple sécant; nous traçons l'unique sécante commune (D) qui coupe les droites en P_0, P_1, P_2, P_3; si nous considérons, comme plus haut, une homographie H qui échange T avec T_1, et T_2 avec T_3, (il y en a ∞^1), la trace de cette homographie sur (D) est l'involution définie par les couples (P_0, P_1) et $(P_1 P_3)$; appelons I, J les points doubles de cette involution; considérons la quadrique Q admettant pour génératrices du premier système T, T_1, T_2 et la quadrique Q' analogue relative à T_1, T, T_3; H échange Q en Q', les génératrices du premier système se correspondant; ces deux quadriques ont, de de plus, D comme génératrice commune, du second système, et se raccordent, par hypothèse en T, T_1, T_2, T_3, donc tout du long de D; leur intersection se complète par deux génératrices du premier système et ces génératrices A, B passent par I et J respectivement, de sorte que A se conserve dans toutes ces homographies H, ainsi que B [1]). Parmi ces homographies H (qui ne sont pas biaxiales, car A se conserve, mais simplement dans son ensemble), il y a l'unique involution biaxiale d'axes A et B; l'homographie générale H s'obtient en prenant un point a de A considérée comme appartenant à Q et choisissant arbitrairement son homologue a' (sur A). On peut alors considérer les ∞^1 homographies H', ou H'' comme plus haut, et les ∞^1 homographies h. Les homographies h forment encore un groupe; de même l'ensemble h, H, H', H''. Nous avons pour H' les points I', J' de (D) et pour H'' les points I'', J'', avec les droites correspondantes A', B', A'', B''. Les trois involutions biaxiales (A, B), (A', B'), (A'', B'') forment un groupe ternaire; les quatre droites ne donnent plus qu'un tel groupe, au lieu de quatre; c'est facile à comprendre en nous reportant au cas général et faisant tendre (d) vers (D), quand les deux sécantes sont distinctes; on choisit les notations de façon que chaque point i, j, i', j',

---

[1]) A la rigueur la raisonement n'écarte pas l'objection suivante: les génératrices communes A et B, au lieu de se conserver chacune, ne pourraient-elles pas s'échanger? Or on peut concevoir le cas étudié ici comme limite du cas où les sécantes (d) et (D) sont voisines; or dans ce cas les quadriques Q et Q' existent encore, et leur intersection se complète par $i\,I$ et $j\,J$, $i\,I$ se correspondant à elle-même, et $j\,J$ aussi à elle-même.

i'', j'' tende respectivement vers I, J, $I'J'$ I'', J''; alors iI tend vers A, et le tableau (4), du numéro 4, nous donne à la limite le groupe ternaire trouvé ici; mais chaque tableau (5), (6), (7) ne nous donne plus rien, car il fait intervenir une involution biaxiale dont les deux axes tendent à se confondre, de sorte que tout point de l'espace a son homologue sur l'axe unique et qu'inversement tout point de cet axe a son homologue indéterminé.

7. Etude du cas où les droites T, T_1, T_2, T_3 sont génératrices, d'un même système, d'une quadrique.

Le raisonnement du numéro 4 est basé uniquement sur l'existence de deux sécantes communes distinctes; ici nous pourrons prendre deux génératrices quelconque (d), (D) du second système de la quadrique Q qui contient les droites (T_i). Les points i, j, i' j', i'', j'' étant déterminés, les génératrices du premier système qui en partent donnent les points I, J, I', J' I'', J'' sur (D); nous avons encore les 6 involutions biaxiales indiquées plus haut et leur association en trois groupes ternaires; mais cette fois, il y a deux paramètres arbitraires à savoir le choix de (d) et celui de (D); les droites iI et jJ qui constituent un couple d'axes associés, ainsi que $i'I'$, $j'J'$ ou $i''I''$, $j''J''$ sont indépendantes du choix de ces deux paramètres et donnent un groupe ternaire toujours le même; mais iJ est l'une quelconque des droites de la congruence linéaire qui est déterminée par les deux génératrices de Q, iI et jJ, de sorte que les groupes ternaires (5), (6), (7) indiqués au numéro 4, dépendent effectivement de ces deux paramètres: on remarquera que, dans chaque groupe ternaire, il y a une involution biaxiale indépendante du choix des deux paramètres qui fixent ce groupe ternaire.

Mais ici nous trouvons en outre ∞^3 groupes ternaires-tétraèdre échangeant les droites entre elles. D'abord si nous considérons une droite arbitraire T et ses transformées par rapport aux involutions d'un même groupe ternaire-tétraèdre, il est bien clair que nous obtenons quatre génératrices d'un même système d'une quadrique. D'après les principes de la théorie des groupes, il suffit de raisonner sur un système d'axes rectangulaires $Oxyz$, auquel on a adjoint le plan de l'infini de façon à avoir le tétraèdre utilisé pour le groupe ternaire; la proposition est alors évidente; cette condition que les droites soient sur une même quadrique est donc nécessaire pour qu'elles s'échangent par les opérations d'un groupe ternaire-tétraèdre; elle est d'ailleurs suffisante. Remarquons en effet que si on se donne le trièdre trirectangle $Oxyz$ et une droite T^0, puis les symétriques T_1^0, T_2^0, T_3^0 de T^0 par rapport à Ox, Oy, Oz, puis les symétriques Θ^0, Θ_1^0, Θ_2^0, Θ_3^0 des T_i^0 par rapport à O, nous avons 8 droites d'une même quadrique, 4 dans un système, 4 dans l'autre, avec le même rapport anharmonique dans chaque système; la donnée des seules 8 droites T_i^0, Θ_i^0 permet de reconstituer les 4 faces du tétraèdre $(Oxyz\,\infty)$, car chaque droite T_i^0 perce les quatre droites Θ_j^0 en un total de 4 points et les 16 points obtenus sont répartis par groupes de 4 dans les faces du tétraèdre. Cela posé, soient quatre droites T, T_1, T_2, T_3 génératrices d'un même système d'une quadrique Q; prenons arbitrairement trois génératrices Θ, Θ_1, Θ_2 du système opposé et prenons le génératrice Θ_3 déterminée, d'une façon unique, par l'égalité des birapports $(T\,T_1\,T_2\,T_3)$, $(\Theta\,\Theta_1\,\Theta_2\,\Theta_3)$. Le système T, T_1, T_2, T_3 donne lieu, par ses invariants, au point (A, B, C) qui, comme il a été expliqué au numéro 1, est sur le cerle γ; nous pouvons construire, dans le système rectangulaire $Oxyz$ une droite T^0, qui jointe à ses symétriques relativement à Ox, Oy, Oz, donne le même point (A, B, C). La quadrique Q_0 portant ces droites (T_i^0) et les droites Θ_i^0 définies comme symétriques relativement à O est transformable homographiquement en Q de sorte que les (T_i) et (T_i^0) d'une part, les (Θ_i) et (Θ_i^0) se correspondent: mais alors les axes Ox, Oy, Oz et les droites à l'infini de yOz, zOx, zOy deviennent les arêtes du tétraèdre donnant les échanges du système (T_i) en lui-même. On a ainsi ∞^3 groupes ternaires-tétraèdres échangeant (T_i) en lui-même. Tout revient à montrer que l'on peut réaliser effectivement le même point (A, B, C) avec les (T_i^0); pour cela érivous les coordonnées plückériennes

$$(1)\qquad \left|\begin{array}{lcccccc} T^0 & -a & -b & -c & -l & -m & -n \\ T_1^0 & -a & b & c & -l & m & n \\ T_2^0 & a & -b & c & l & -m & n \\ T_3^0 & a & b & -c & l & m & -n \end{array}\right.$$

On obtient aussitot, en se rappelant $al + bm + cn = 0$,

$$(2)\qquad A = 16\,a^2 l^2 \qquad B = 16\,b^2 m^2 \qquad C = 16\,c^2 n^2.$$

Ces équations montrent que l'on a ∞^2 choix possibles pour la droite T^0.

Nous pouvons maintenant faire une remarque intéressante: les quatre droites T, T_1, T_2, T_3 appartenant à une même quadrique Q, nous savons qu'il y a ∞^3 homographies échangeant chaque droite (dans son ensemble) avec elle-même et aussi ∞^3 échangeant T avec T_1, T_2 avec T_3: dans chacune de ces dernières homographies les génératrices de Q qui divisent harmoniquement $(T\,T_1)$ et $(T_2\,T_3)$ restent invariantes chacune dans son ensemble: nous avons rencontré ces droites U, V plus haut, ainsi que les couples analogues U', V' et U'', V'' obtenus en associant T à T_2 ou T_3. Nous avons vu que les involutions (U, V), $(U'\,V')$, (U'', V'') forment un groupe quadrique, isolé, échangeant le bloc (T_i) en lui-même. Nous avons ensuite rencontré ∞^2 groupes ternaires-quadriques échangeant aussi les (T_i) en bloc: il y en a 3 séries; dans l'une des séries, les axes (U, V) sont fixes et les axes des 2 autres involutions engendrent la congruence linéaire (U', V') ou (U'', V''); propriétés analogues pour les deux autres séries. Si nous considérons ensuite les groupes ternaires-tétraèdre en nombre ∞^3, nous constatons encore que les axes de chaque involution rencontrent l'un (U, V) l'autre $(U'\,V')$, l'autre $(U''\,V'')$: on le voit immédiatement en supposant que Q se réduit à un hyperboloïde de révolution autour de Oz ayant O pour centre, T étant une génératrice quelconque; de la sorte U et V ont leur pied sur Ox, U' et V' sur Oy; U'' et V'' ont leur pied rejoté à l'infini aux points cycliques du plan xOy. Nous avons ainsi découvert toutes les involutions biaxiales (en nombre ∞^2) échangeant les (T_i) entre elles es toutes les façons de les associer en groupes ternaires.

8. Equations réduites des transformations formant un groupe ternaire.

Pour le groupe ternaire tétraèdre nous avons les équations

$$
(1) \quad \left|\begin{array}{lllll}
I_1 & X = x & Y = -y & Z = -z & T = t \\
I_2 & X = -x & Y = y & Z = -z & T = t \\
I_3 & X = -x & Y = -y & Z = z & T = t
\end{array}\right.
$$

obtenues précisément en choisissant le tétraèdre en jeu comme tétraèdre de référence.

Pour le groupe ternaire-quadrique, nous pouvons prendre l'équation de la quadrique Q sous la forme

$$(2) \qquad Q \quad xt - yz = 0$$

puisque, au point de vue projectif, il n'y a qu'une quadrique (sans point double); nous pouvons supposer aussi que les axes des involutions I et I' sont

$$(3) \qquad \left| \begin{array}{lll} I & (x = 0,\ z = 0), & (y = \quad 0,\ t = 0) \\ I' & (x = y,\ z = t), & (x = -y,\ z = -t) \end{array} \right.$$

car, au point de vue projectif toujours, il n'y a, sur une quadrique, qu'un seul système de 4 génératrices se divisant harmoniquement; l'involution I'' s'obtient immédiatement en remarquant que les axes de I, I' appartiennent au système

$$(4) \qquad \frac{x}{y} = \frac{z}{t} = \lambda$$

où λ est une constante qui a pour valeurs:

$$(5) \qquad 0, \quad \infty, \quad 1, \quad -1$$

pour les axes de I et I'; pour I'' on trouve donc $\lambda = = i$ et $-i$, d'où

$$(6) \qquad I'' \quad (x = iy,\ z = it), \quad (x = -iy, \quad z = -it).$$

On trouve sans difficulté les équations des involutions:

$$(7) \qquad \left| \begin{array}{lllll} I & X = -x, & Y = y, & Z = -z, & T = t \\ I' & X = \quad y, & Y = x, & Z = \quad t, & T = z\,. \\ I'' & X = -y, & Y = x, & Z = -t, & T = z \end{array} \right.$$

On constate alors qu'une droite $T\,(a, b. c, l, m, n)$ a les transformées

$$(8) \qquad \left| \begin{array}{ccccccc} T & a & b & c & l & m & n \\ T_1 & -a & b & -c & -l & m & -n \\ T_2 & -l & m & -c & -a & b & -n \\ T_3 & l & m & c & a & b & n \end{array} \right.$$

et l'on a

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{A} = 4bm & \sqrt{B} = -a^2 + b^2 - 2cn - l^2 + m^2 \\ & \sqrt{C} = \quad a^2 + b^2 + 2cn + l^2 + m^2 \end{array} \right.$$

d'où

$$(10)\quad\left|\begin{array}{l}\sqrt{C}+\sqrt{B}+\sqrt{A}=2(b+m)^2\\ \sqrt{C}+\sqrt{B}-\sqrt{A}=2(b-m)^2\\ \sqrt{C}-\sqrt{B}+\sqrt{A}=2(a-l)^2\\ \sqrt{C}-\sqrt{B}-\sqrt{A}=2[(a+l)^2+4cn]\end{array}\right.$$

de sorte que le signe de $A^2+B^2+C^2-2BC-2CA-2AB$ est celui de $(a+l)^2+4cn$. On remarque qu'une droite T, exceptionnelle parce qu'elle rencontre les axes de l'une des involutions, ne donne qu'une transformée par l'ensemble du groupe: par exemple les droites qui rencontrent les axes de I vérifient $b=m=0$ et coïncident avec leur transformée par I; mais alors les transformées par I' et I'' coïncident, car l'opération I'' équivaut à l'opération $(I\,I')$; de même les droites recontrant les axes de I' vérifient les relations $a-l=0$, $b+m=0$ et celles qui rencontrent les axes de I'' vérifient $a-l=0$, $b-m=0$.

En dehors de ces droites exceptionnelles, cherchons celles qui donnent un bloc $T\,T_1\,T_2\,T_3$ appartenant à une quadrique; il est nécessaire et suffisant qu'il y ait une même relation linéaire et homogène entre les colonnes du tableau (8); (d'ailleurs l'un des facteurs du tableau (10) sera nul). On obtient ainsi

$$(11)\quad\left|\begin{array}{ll}a(\rho-\rho')+l(\rho'''-\rho'')=0 & \\ l(\rho-\rho')+a(\rho'''-\rho'')=0 & b(\rho+\rho')+m(\rho'''+\rho'')=0\\ c[(\rho-\rho')+(\rho'''-\rho'')]=0 & m(\rho+\rho')+b(\rho'''+\rho'')=0\\ n[(\rho-\rho')+(\rho'''-\rho'')]=0 & \end{array}\right.$$

où $\rho, \rho', \rho'', \rho'''$ sont des constantes qui ne doivent pas être toutes nulles. Si donc $b^2-m^2\neq 0$, on a

$$\rho+\rho'=0 \qquad \rho'''+\rho''=0$$

et alors il est nécessaire que $\rho-\rho'$ et $\rho'''-\rho'$ ne soient pas nulles toutes deux, ce qui entraîne $a^2-l^2=0$. Le même raisonnement prouve qui si $a^2-l^2\neq 0$, on a $\rho-\rho'=0$, $\rho'''-\rho''=0$ et par suite $b^2-m^2=0$.

Prenons donc d'abord:
$a^2-l^2=0$, $b^2-m^2\neq 0$; Si l'on a, $a=l$, on a une solution en prenant $\rho, \rho', \rho'', \rho'''$ égaux à $1, -1, 1, -1$. Si l'on a $a^2-l^2=0$, $b^2-m^2\neq 0$ avec $a=-l$, il faudra avoir $c=n=0$, et l'on peut prendre $\rho, \rho', \rho'', \rho'''$ égaux à $1, -1, -1, 1$.

Prenons ensuite:
$a^2 - l^2 \neq 0$, $b^2 - m^2 = 0$: il n'y a pas d'autre conditions à exprimer; on a $\rho - \rho' = 0$, $\rho''' - \rho'' - 0$ et $\rho + \epsilon\rho'' = 0$, si $b = \epsilon m$ ($\epsilon = \pm 1$).

Donc, en récapitulant, on a les solutions suivantes:

1°) toutes les droites du complexe linéarie $a - l = 0$;

2°) toutes les droites de coordonnées

$$1 \quad b \quad 0 \quad -1 \quad \frac{1}{b} \quad 0$$

c'est-à-dire les génératrices de la quadrique fondamental $xt - yz = 0$ de même système que les axes des trois involutions;

3°) toutes les droites des deux complexes linéaires $b \pm m = 0$.

Ces résultats concordent bien avec ceux que l'on a trouvés en cherchant à transformer en lui-même un système de quatre génératrices d'une quadrique.

Enfin, pour toutes les droites T du complexe d'ordre 2, d'équation $(a + l)^2 + 4cn = 0$, il y a cette simple particularité que le groupe de 4 droites (T_i) n'admet qu'une sécante commune (double). Nous avons ainsi trouvé d'une façon satisfaisante l'explication de chaque facteur (10).

9. Propriétés spéciales aux courbes unicursales.

Les considérations qui précèdent font immédiatement songer aux transformations involutives qui peuvent appartenir à une courbe unicursale. Les paramètres t et t' des deux points correspondants M et M' sont liés par une involution

(1) $$Att' + B(t + t') + C = 0.$$

Supposons qu'il existe une autre involution liant les points M et M'', d'où

(2) $$A_1 tt'' + B_1(t + t'') + C_1 = 0.$$

Les points M'' et M'' sont liés par la relation, en géneral simplement homographique,

(3) $$\begin{vmatrix} At' + B & Bt' + C \\ A_1 t'' + B_1 & B_1 t'' + C_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation devient involutive si l'on a

$$(4) \qquad A C_1 + A_1 C - 2 B B_1 = 0$$

autrement dit si les points doubles de chaque involution $(M M')$, $(M M'')$ sont des points correspondants dans l'autre involution. Mais alors les t des points doubles de chaque involution $(M M')$, $(M M'')$, $(M' M'')$ divisant harmoniquement les t des points doubles de chacune des deux autres et les trois involutions forment un groupe ternaire. C'est une propriété importante que nous allons comparer avec les résultats des paragraphes précédents.

Démontrons qu'une courbe unicursale ne peut avoir trois plans de symétrie rectangulaires. Commençons par examiner une courbe unicursale qui admet $x O z$, $x O y$ pour plans de symétrie: ces deux involutions entraînent une troisième involution, à savoir la symétrie par rapport à $O x$; donc une homographie convenable sur t permet de ramener l'ensemble des trois involutions en jeu à la forme réduite

$$(5) \qquad t + t' = 0 \qquad t t'' - 1 = 0 \qquad t' t'' + 1 = 0.$$

Si donc M est un point de la courbe, le plan perpendiculaire à $O x$, issu de M, perce la courbe en un groupe de 4 points associés $M M' M'' M'''$ de paramètres respectifs

$$(6) \qquad t \quad -t \quad \frac{1}{t} \quad -\frac{1}{t}$$

(sans préciser davantage le sommet du rectangle auquel appartient chacune de ces valeurs et sans se préoccuper des autres groupes contenus dans le même plan). — Supposons maintenant que la courbe admette, en outre le plan $y O z$ comme plan de symétrie; M a pour symétrique M_1 de paramètre t_1, lié à t par une relation involutive

$$(7) \qquad A t t_1 + B(t + t_1) + C = 0.$$

Or chaque point donné par (6) a son symétrique par rapport à $y O z$ donné par la valeur correspondante

$$(8) \qquad t_1 \quad -t_1 \quad \frac{1}{t_1} \quad \frac{-1}{t_1}$$

car la symétrie $y O z$ respecte la disposition du rectangle $M_1 M_1' M_1'' M_1'''$; on a donc d'abord

(9) $$A t t_1 - B(t + t_1) + C = 0$$

en passant à M' et M'_1 et cette relation (9) est vérifiée quel que soit t: la comparaison de (8) et (9) donne

$$A t t_1 + C = 0 \qquad B(t + t_1) = 0$$

et comme $t + t_1$ n'est pas nul, puisque $M_1 \neq M'$, on a $C = 0$. Mais alors, passant à M'', et M'', on a simultanément

(12) $$A t t_1 + C = 0 \qquad A + C t t_1 = 0$$

de sorte qu'il faudrait avoir $A = \pm C$ et $t t_1 = \pm 1$; mais c'est impossible, parce que M_1 est différent de M'' et M'''. La proposition et donc établie. De la sorte on est certain que la courbe gauche

(13) $$y^2 = 1 - x^2 \qquad z^2 = 1 - k^2 x^2$$

n'est pas unicursale.

Dans le même ordre d'idées, constatons qu'une courbe algébrique unicursale d'ordre pair peut admettre un groupe ternaire tétraèdre, mais non admettre un groupe ternaire quadrique; c'est l'inverse pour le degré impair. En effet l'une des involutions du groupe, obtenue en changeant t en $-t$, peut être supposée réalisée pour les axes ($z = 0$, $x = 0$) et ($y = 0$, $\theta = 0$) (axe des y et droite à l'infini du plan $z O x$). Les deux autres involutions seront obtenues pour $t t' = k$ et $t t'' = -k$. Ecrivons les coordonnées en fonction de t, en supposant le degré pair.

(14) $$\left| \begin{array}{l} x = A t^{2m} + A_1 t^{2m-2} + \ldots + A_m \\ y = B t^{2m-1} + B_1 t^{2m-3} + \ldots + B_{m-1} t \\ z = C t^{2m} + C_1 t^{2m-2} + \ldots + C_m \\ \theta = D t^{2m-1} + D_1 t^{2m-3} + \ldots + D_{m-1} t \end{array} \right.$$

Sous cette forme, nous voyons que le changement de t en $-t$ remplace le point de la courbe par un autre point de la courbe, transformé du premier dans l'involution biaxiale d'axes ($y = \theta = 0$), ($x = z = 0$). Le changement de t en $\frac{k}{t}$ doit remplacer le point de la courbe par un autre, transformé de ce premier dans une autre involution biaxiale. Or si nous regardons, au numéro 8 de ce travail, les formules (1), nous pourrons écrire les formules de la seconde involution (dans le cas du groupe ternaire tétraèdre), sous la forme

$$(15)\qquad \frac{x_1}{ax+bz}=\frac{y_1}{a'y+b'\theta}=\frac{z_1}{a''x+b''z}=\frac{\theta_1}{a'''y+b'''\theta}$$

parce que, à la rigueur, nous ne connaissons pas la position précise, autour de l'axe $x=z=0$, des deux faces du tétraèdre des involutions, non plus que la position des deux autres faces autour de $y=\theta=0$; on en déduit, quelles que soient les constantes λ, μ,

$$(16)\qquad \frac{x_1+\lambda z_1}{y_1+\mu\theta_1}=\frac{(a+a''\lambda)x+(b+b''\lambda)z}{(a'+a'''\mu)y+(b'+b'''\mu)\theta}.$$

On aura donc en prenant pour $(x_1, y_1, z_1, \theta_1)$ le point $\frac{k}{t}$ et pour (x, y, z, θ) le point t

$$(17)\qquad \frac{(A+\lambda C)k^{2m}+\ldots+(A_m+\lambda C_m)t^{2m}}{(B+\mu D)k^{2m-1}t+\ldots+(B_{m-1}+\mu D_{m-1})t^{2m-1}}=$$

$$=\frac{[(a+a''\lambda)A+(b+b''\lambda)C]t^{2m}+\ldots}{[(a'+a'''\mu)B+(b'+b'''\mu)D]t^{2m-1}+\ldots}.$$

Cette identité en t est de forme non contradictoire; supposons au contraire que l'on ait cherché à obtenir le groupe ternaire-quadrique: en nous reportant aux formules (7) du numéro (8), nous voyons que les équations de la seconde involution I' s'écrivent

$$(15')\qquad \frac{x_1}{ay+b\theta}=\frac{y_1}{a'x+b'z}=\frac{z_1}{a''y+b''\theta}=\frac{\theta_1}{a'''x+b'''z}$$

d'où, comme plus haut,

$$(16')\qquad \frac{x_1+\lambda z_1}{y_1+\mu\theta_1}=\frac{(a+a''\lambda)y+(b+b''\lambda)\theta}{(a'+a'''\mu)x+(b'+b'''\mu)z}.$$

On prend encore pour $(x_1, y_1, z_1, \theta_1)$ le point $\frac{k}{t}$ et pour (x, y, z, θ) le point t: on obtient une identité en t de forme analogue à (17), sauf que le second membre est retourné; le premier membre de cette identité (17') est une fraction en t *irréductible*, car λ et μ sont quelconques; le numérateur est de degré $2m$, le dénominateur de degré $2m-1$; au second membre les degrés sont inversés et il y a manifestement impossibilité, les degrés étant *exactement* ceux qui ont été indiqués. La conclusion est donc obtenue pour les degrés pairs; pour les degrés impairs elle se démontre de même, avec le résultat opposé: cela tient à ce que le changement de t en $\frac{k}{t}$ laisse la même forme à la fraction

$$\frac{\alpha t^{2m} + \ldots + \alpha_m}{\beta t^{2m-1} + \ldots + \beta_{m-1} t}$$

mais remplace la fraction

$$\frac{\alpha t^{2m+1} + \ldots + \alpha_m t}{\beta t^{2m} + \ldots + \beta_m}$$

par une fraction de même forme que l'inverse de cette fraction.

Ces résultats peuvent paraître assez inattendus. J'en ferai l'application à un exemple extrêmement général.

Note. — Depuis la rédaction de ce Mémoire, M. Cartan m'a signalé un article du mathématicien allemand Study (Götting. Ges. d. Wiss. Nachr., Gruppen zweiseitiger Kollineationen, 1912, 27 pages), se rapportant à l'étude indiquée au paragraphe 5 de ce Mémoire.

Configurations remarquables de quatre tangentes à une même courbe gauche.

Par

M. Bertrand Gambier.

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

1. Introduction.

Un type de problèmes qui a beaucoup exercé la sagacité des géomètres est celui où les équations (réduites, bien entendu, à celles qui sont distinctes) et les inconnues sont en même nombre et où, pourtant, il n'y a pas de solutions, (du moins si les données sont quelconques). Il y a lieu de distinguer les problèmes dont l'impossibilité est absolue et ceux dont l' impossibilité résulte, non pas de l' incompatibilité des équations, mais du fait que les solutions — en nombre fini ou infini — correspondent à des éléments géométriques dégénérés. Le premier cas est réalisé pour le problème: trouver le point de rencontre de deux mobiles parcourant une droite avec la même vitesse à chaque instant; en général ce premier cas ne comprend que des problèmes numériques, dont l'intérêt pour nous n' existe pas. Je donne un exemple simple du second cas: dans un cône C donné, du second degré, inscrire un trièdre trirectangle; on peut ramener le problème à la recherche d' une génératrice SI telle que le plan perpendiculaire mené par le sommet S coupe le cône C suivant deux génératrices rectangulaires; il y a quatre solutions correspondant à chaque génératrice isotrope SI de C; malheureusement, dans chacun des systèmes de 3 arêtes obtenu, deux arêtes coïncident, de sorte que les solutions sont impropres; si donc on présente le problème autrement, en partant d'un trièdre trirectangle $Oxyz$ donné et circonscrivant un cône C à ce trièdre, le problème posé pour ce cône C particulier admet alors une infinité de solutions, car l' équation résolvante, qui est toujours de degré 4, admet une cinquième solution et disparaît identiquement.

Nous nous bornons donc aux problèmes de ce second cas: en données *quelconques*, un tel problème se traduit par p équations, distinctes, à p inconnues, *compatibles* et admettant un nombre fini ou infini de solutions impropres: l' ingéniosité du chercheur consiste à trouver comment particulariser les données pour obtenir de nouvelles solutions propres, se superposant à ces solutions impropres, (dont on néglige même le plus souvent de parler); les circonstances les plus usuelles sont les suivantes: dans le cas général nombre fini de solutions impropres, puis, dans le cas particularisé, réduction du nombre d'équations de p à $p-h$, de façon à obtenir ∞^h solutions propres; h est le plus souvent égal à 1, mais nous verrons ici-même, numéros 4 et suivants, un exemple où $h=3$.

Au point de vue philosophique, il est bon de rappeler que p équations distinctes et compatibles à p inconnues peuvent admettre un nombre infini de solutions: exemple, trois quadriques ayant en commun une cubique gauche; un exemple différent est celui de trois quadriques ayant en commun une conique, car, en dehors de la série infinie et continue de points communs, on trouve deux points communs isolés. De la sorte, nous pouvons, dans les problèmes signalés, rencontrer bien des circonstances diverses; l' apparition, dans le cas particulier, de solutions nouvelles propres, *même en nombre infini*, peut se produire, même sans que le nombre des équations *distinctes* s' abaisse

Je rappelle des exemples classiques: *deux coniques C_1 et C_2 étant données, trouver un polygone de n côtés inscrit dans C_1, circonscrit à C_2*: dans le cas général, 4 solutions impropres (polygones repliés d' Halphen); moyennant une condition unique imposée à C_1 et C_2, ∞^1 solutions véritables. Ou bien: *étant donnés 9 points A_1, $A_2 \dots A_9$, trouver une courbe C_{3m} de degré $3m$ admettant les A_i comme poins multiples d'ordre m*: en général, une solution impropre, fournie par la cubique circonscrite aux A_i, prise m fois; mais, si A_9 est pris sur une courbe, déterminée par Halphen, et ne dépendant que de A_1, $A_2, \dots A_8$, on trouve un *faisceau* de courbes C_{3m}.

Pour les deux problèmes que nous venons de citer et ceux que nous devons étudier ici, on doit: dénombrer les équations et les inconnues, puis vérifier que les équations sont distinctes et compatibles et enfin que les solutions sont impropres: tout cela, avant de passer au cas particulier de solutions propres. Ces opérations, théoriquement nécessaires pour la satisfaction de l' esprit, sont, en général, très pénibles et pour cette raison, esquivées. Il est donc intéressant de signaler une circonstance favorable, non réalisée dans les problèmes précédents, c'est le cas où *la définition de l' être géométrique inconnu, en même temps que les conditions imposées, sont invariantes vis-à-vis d' un groupe continu de transformations à h paramètres*: dans ce cas, s' il existe un être géométrique de l'espèce indiquée, il en existe sûrement ∞^h. Nous aurons des exemples nombreux en cherchant certaines courbes gauches tangentes à quatre droites données.

2. Cubiques gauches; résultats de Voss.

On sait que, pour une courbe gauche, la donnée d' une tangente *non remarquable* équivaut à 3 conditions; celle d' une tangente *remarquable* à 4 conditions.

Il existe ∞^3 transformations homographiques de l' espace à 3 dimensions conservant trois droites T_1, T_2, T_3 (chacune est conservée dans son ensemble, les points de cette droite correspondant homographiquement à leurs transformés); la quadrique Q déterminée par T_1, T_2, T_3 (supposées chacune sans point commun avec les deux autres) se conserve aussi; chaque génératrice de même système que T_1 se conserve, dans son ensemble; une génératrice de système opposé est remplacée par une autre de ce second système; bien qu' un point M, non situé sur Q, balaie tout l' espace au cours de ces ∞^3 transformations, l' ensemble des transformées d' une droite D forme un système ∞^2 et non un système ∞^3; cela tient à ce que les deux points u, v communs à D et Q décrivent sur Q les génératrices U, V de même système que T_1, issues de u et v, et D engendre ainsi une congruence linéaire; d' ailleurs D recouvre ∞^1 fois chaque droite de cette congruence et cela est lié à ce fait, important pour la suite, qu' il existe ∞^1 transformations homographiques de l' espace conservant 4 droites données D, T_1, T_2, T_3. Dans les ∞^3 transformations conservant T_1, T_2, T_3, *une surface réglée R, développable ou non, engendre, non pas la totalité des ∞^4 droites de l' espace, mais un complexe.* Dans les ∞^1 transformations qui conservent D, T_1, T_2, T_3 chaque droite de la congruence linéaire, (spéciale ou non) , déterminée par D, T_1, T_2, T_3, se conserve dans son ensemble tandis que les deux directrices de la congruence se conservent chacune point pour point.

Une cubique gauche Γ est déterminée, d' une façon unique, par 6 points (distincts ou non). Etant donné trois droites T_1, T_2, T_3, il existe donc une seule cubique gauche Γ_0 tangente à T_1 en A_1, à T_2 en A_2, à T_3 en A_3; or il existe une transformation homographique et une seule conservant T_1, T_2, T_3, mais faisant venir A_1 en A_1', A_2 en A_2', A_3 en A_3'; Γ_0 engendre ainsi, dans ces ∞^3 homographies, les ∞^3 cubiques Γ tangentes à T_1, T_2, T_3 (et chacune une seule fois); la surface développable R, de degré 4, formée par les tangentes à Γ_0 engendre donc un complexe $\mathcal{C}$ bien défini par T_1, T_2, T_3.

Conclusion: cherchons à construire une cubique gauche Γ tangente à 4 droites données, *prises au hasard*, T, T_1, T_2, T_3; nous avons autant d' équations que d' inconnues (12 de part et d' autre); il y a impossibilité, d' après ce qui précède, puisque T n'est pas choisie sur $\mathcal{C}$; ou plutôt, si nous définissons une cubique comme intersection de deux quadriques qui ont une droite commune nous avons ∞^3 solutions impropres formées par une sécante d commune à T, T_1, T_2, T_3, prise deux fois, et une droite arbitraire d' recontrant d. Prenons au contraire T sur $\mathcal{C}$: cette condition imposée à l' ensemble des droites T, T_1, T_2, T_3 diminue d' une unité les douze équations du problème et il existe ∞^1 solutions propres.

C' est le mathématicien allemand A. Voss qui a le premier signalé cette propriété de 4 tangentes quelconques à une même cubique (Mathematische Annalen t. 13 1878, p. 168—174). Je me suis inspiré de sa méthode pour exposer ce résultat, mais avec des modifications assez importantes. En particulier, je signale que les 12 équations, *distinctes*, à 12 inconnues, sont compatibles avec ∞^3 solutions impropres (et non seulement un nombre fini); dans le cas particulier, seul à retenir, il y a ∞^1 solutions propres, nouvelles, qui se superposent aux ∞^3 impropres.

Voss indique une quantité de résultats élégants; je ne retiens que celui-ci: les ∞^1 cubiques Γ engendrent une surface réglée Σ admettant T, T_1, T_2. T_3 comme génératrices ee rebroussement; Σ admet deux droites triples, qui ne sont pas génératrices: ce sont les deux sécantes communes à T, T_1, T_2, T_3. Le complexe $\mathcal{C}$ est de degré 4.

3. Biquadratique de genre 1.

M. Hans Mohrmann a dédié, à son professeur A. Voss, un travail élégant où il reprend une question analogue (Mathematische Zeitschrift, t. 5, 1919, p. 268—283). A titre de mémoire, je cite un travail hollandais paru, sous la signature de M. Kluyver, aux Comptes Rendus de l'Académie d'Amsterdam (1891) et que M. Mohrmann complète. Une biquadratique B, gauche, de genre 1, dépend de 16 paramètres et possède 16 points où le plan osculateur est stationnaire; chacune des tangentes correspondantes est une tangente remarquable de B, de sorte que la donnée de cette tangente (sans préciser le point où elle touche B), équivaut à 4 conditions.

Sur les 16 points en jeu, on peut trouver quatre groupes de quatre points, tels que les tangentes du même groupe concourent: il existe ∞^5 biquadratiques admettant pour tangentes remarquables de cette espèce quatre droites concourantes quelconques, résultat d' accord avec le dénombrement d' équations et d'inconnues: nous ne nous occupons pas d' un tel système; nous négligeons de même les associations de quatre tangentes comportant un ou plusieurs couples de tangentes sécantes; il existe alors 64 combinaisons de 4 tangentes non sécantes dont les points de contact sont dans un même plan (*première espèce*), puis 3 autres systèmes de 64 combinaisons de 4 tangentes ne remplissant pas cette condition (*deuxième espèce*). Le raisonnement déjà fait, comme application des homographies conservant 3 ou 4 droites, conduit encore à associer à trois premières tangentes T_1, T_2, T_3 de cette espèce un certain complexe $\mathcal{C}$: si T, quatrième tangente, n'est pas choisie parmi les droites de $\mathcal{C}$, on n'a que deux solutions impropres, qui sont l'une ou l'autre des sécantes, communes aux 4 tangentes, prise quatre fois; si T est choisie sur $\mathcal{C}$, il y a a ∞^1 courbes gauches B; (la *première espèce* fournit un complexe, chacun des 3 systèmes de la *seconde espèce* fournit un complexe). Tout cela correspond, si l'on veut, à une hiérarchie des 16 paramètres: 12 pour fixer T_1, T_2, T_3; 3 pour fixer les points de contact de T_1, T_2, T; la courbe B dépend alors d'un unique paramètre, qui est son invariant projectif et la quatrième tangente T décrit une surface réglée R; le dernier paramètre est utilisé pour choisir l' invariant, ou ce qui est équivalent, choisir T

sur R. Quand on rend leur liberté aux points de contact de T_1, T_2, T_3, les ∞^8 surfaces réglées R engendrent le complexe $\mathcal{C}$, chaque droite du complexe étant engendrée ∞^1 fois.

4. Courbes gauches unicursales d'ordre m n'ayant que 4 points à plan osculateur stationnaire, les m points d'intersection de la courbe et de ce plan osculateur étant réunis au point de contact.

Ce qui précède peut être répété, sans modification appréciable, pour toute courbe gauche, ne dépendant que de 12, 13, 14, 15 ou 16 paramètres métriques, à qui on imposera 4 tangentes (remarquables ou quelconques de façon à ce que le nombre de conditions reproduise celui des paramètres), pourvu que la définition de la courbe ait un caractère projectif. C'est précisément le cas pour les courbes V_m dont la définition constitue le titre de ce paragraphe; le nombre de pararamètres métriques dont elles dépendent est 16. Je présente le résultat sous forme synthétique.

Nous disposons des quinze paramètres de la substitution homographique la plus générale (ou, si on préfère, du changement de tétraèdre de référence), puis de la substitution $t = \dfrac{\alpha T + \beta}{\gamma T + \delta}$ sur le paramètre rationnel t; nous profitons des quinze premiers pour écrire les coordonnées de la courbe sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} X &= t^m + C_m^4\, a\, t^{m-4} - C_m^5\, a_1\, t^{m-5} + \dots \\ C_m^1 Y &= - t^{m-1} C_m^1 + C_m^4\, b\, t^{m-4} - C_m^5\, b_1\, t^{m-5} + \dots \\ C_m^2 Z &= t^{m-2} C_m^2 + C_m^4\, c\, t^{m-4} - C_m^5\, c_1\, t^{m-5} + \dots \\ C_m^3 \Theta &= - t^{m-3} C_m^3 + C_m^4\, d\, t^{m-4} - C_m^5\, d_1\, t^{m-5} + \dots \end{aligned}\right.$$

où a, b, c, d, a_1, $b_1 \dots$ sont constants. Le plan

$$(2)\qquad X + S_1 Y + + S_2 Z + S_3 \Theta = 0$$

donne les points racines de l'équation

$$(3)\qquad t^m - S_1 t^{m-1} + S_2 t^{m-2} - S_3 t^{m-3} + S_4 t^{m-4} \dots = 0$$

et l'on a, de $p = 0$ à $p = m - 4$ les relations

$$
(4)\quad \left|\begin{array}{l}
S_4 \;\;= C_m^4 \left[a \;+ b\,\dfrac{S_1}{C_m^1} + c\,\dfrac{S_2}{C_m^2} + d\,\dfrac{S_3}{C_m^3}\right] \\
S_5 \;\;= C_m^5 \left[a_1 + b_1\dfrac{S_1}{C_m^1} + c_1\dfrac{S_2}{C_m^2} + d_1\dfrac{S_3}{C_m^3}\right] \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
S_{p+4} = C_m^{p+4}\left[a_p + b_p\dfrac{S_1}{C_m^1} + c_p\dfrac{S_2}{C_m^2} + d_p\dfrac{S_p}{C_m^p}\right]
\end{array}\right.
$$

Pour avoir m points réunis au point t, il faut et il suffit que l'on ait, d'après (4),

$$
(5)\quad \left|\begin{array}{l}
t^4 = a \quad\; + b\,t \quad\; + c\,t^2 \quad\; + d\,t^3 \\
t^5 = a_1 \quad + b_1\,t \quad + c_1\,t^2 \quad + d_1\,t^3 \\
\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\
t^m = a_{m-4} + b_{m-4}\,t + c_{m-4}\,t^2 + d_{m-4}\,t^3
\end{array}\right.
$$

Suivant que les équations (5) ont zéro, une, deux, trois, quatre racines communes, on a 0, 1, 2, 3, 4 points de l'espèce annoncée. Pour obtenir le maximum 4, on prend *arbitrairement* a, b, c, d, puis de la première équation (5) on déduit

$$
(6)\qquad t^5 = a\,t + b\,t^2 + c\,t^3 + d(a + b\,t + c\,t^2 + d\,t^3)
$$

et la comparaison donne

$$
(7)\qquad a_1 = a\,d \quad b_1 = a + b\,d. \quad c_1 = b + c\,d \quad d_1 = c + d^2
$$

On recommence ensuite sur la seconde équation (5), d'où

$$
t^6 = a_1\,t + b_1\,t^2 + c_1\,t^3 + d_1\,(a + b\,t + c\,t^2 + d\,t^3)
$$

et ainsi de suite: les coefficients $a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots$ s'expriment tous sous forme de polynômes entiers en a, b, c, d; le calcul ainsi présenté a l'anvantage de se poursuivre indéfiniment, quel que soit m: la valeur précise de m n'est utile à connaître que pour savoir à quel moment arrêter le calcul. On profite de la substitution homographique sur t pour réduire l'*équation fondamentale*

$$
(8)\qquad t^4 = a + b\,t + c\,t^2 + d\,t^3
$$

à une forme canonique simple; si les racines sont distinctes, ce que nous supposerons, on peut adopter

$$
(9)\qquad b = d = 0 \quad c = 1
$$

et a joue le rôle d'invariant projectif (irrationnel). Les équations (5) se réduisent à

$$
(5') \qquad \left| \begin{array}{ll} t^4 = a \ + t^2 & t^5 = a\,t \ + t^3 \\ t^6 = a_2 + c_2\, t^2 & t^7 = a_2\, t + c_2\, t^3 \\ t^8 = a_4 + c_4\, t^2 & t^9 = a_4\, t + c_4\, t^3 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array} \right.
$$

avec

$$
(10) \qquad c_{2p+2} = a_{2p} + c_{2p} \quad a_{2p+2} = a\, c_{2p}
$$

Il y a avantage, pour la commodité des calculs, à supposer $c = 1$ plutôt que $c = 6$, comme semblerait y conduire la théorie des invariants; avec $c = 1$, on obtient des coefficients entiers beaucoup plus simples, croissant bien moins vite qu'avec $c = 6$. Il y a avantage à bien respecter les formules (1), sauf peut-être à remplacer la courbe (X, Y, Z, Θ) par la courbe $X_1 = X$, $Y_1 = hY$, $Z_1 = kZ$, $\Theta_1 = l\,\Theta$, h, k, l étant certains entiers, égaux soit à $-C_m^1$, C_m^2, $-C_m^3$ soit à des diviseurs convenablement choisis de ces nombres: il est clair que cela revient en effet à une transformation homographique très simple, opération indifférente au point de vue de ce travail.

Rappelons que pour passer de la forme (8) à la forme $T^4 = = A + T^2$ adoptée définitivement, on doit déterminer un couple $(\Theta'\, \Theta'')$ divisant harmoniquement les couples (t_1, t_2) et (t_3, t_4), ces nombres t_1, t_2, t_3, t_4 étant les racines de (8); suivant que l'on associe t_1 à t_3 ou t_4 plutôt qu'à t_2, on trouve trois tels couples (Θ', Θ''); ensuite, on doit effectuer sur t une substitution homographique telle qu'au couple (Θ', Θ'') de la variable t corresponde pour T soit $(0, \infty)$, soit $(\infty, 0$; adopter $(0, \infty)$ plutôt que $(\infty, 0)$ ne change d'ailleurs pas A, de sorte qu'il y a en réalité *six* façons d'obtenir les équations réduites des courbes étudiées ici (et nous verrons plus bas l'intérêt de cette remarque) et que le coefficient invariant A est susceptible pour une même courbe V_m de 3 valeurs différentes. Je rappelle encore que la forme binaire

$$
(11) \qquad a_0\, t^4 + 4\, a_1\, t^3\, \Theta + 6\, a_2\, t^2\, \Theta^2 + 4\, a_3\, t\, \Theta^3 + a_4\, \Theta^4
$$

a pour invariants relatifs

$$
(12) \qquad S = a_0\, a_4 - 4\, a_1\, a_3 + 3\, a_2^2 \qquad T = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}
$$

et pour unique invariant absolu

$$\rho = \frac{S^3 - 27\,T^2}{27\,T^2} \tag{13}$$

Ici avec la forme adoptée $t^4 - t^2 - a$, on a

$$\rho = \left(\frac{3\,u - u^3}{1 - 3\,u^2}\right)^2, \quad a = -\frac{u^2}{12} \tag{14}$$

en introduisant pour la simplicité une variable auxiliaire u; l'on voit que a possède bien 3 valeurs correspondant aux valeurs de u

$$\pm u, \quad \pm \frac{u + \sqrt{3}}{1 - u\sqrt{3}}, \quad \pm \frac{u - \sqrt{3}}{1 + u\sqrt{3}} \tag{15}$$

Nous avons ainsi déterminé, pour chaque valeur de m, une courbe V_m de l'espèce annoncée et ne dépendant que du seul invariant projectif a. Si les quatre poins remarquables sont réels sur la coube V_m réelle, il y a deux façons réelles de ramener les équations de V_m à cette forme réduite; si les quatre points comprennent un couple réel et un couple imaginaire ou quatre points imaginaires, le problème devient moins intéressant pour notre but, mais il y a encore une réduction réelle à la forme $t^4 \pm t^2 - a = 0$ pour l'équation fondamentale.

Nous remarquerons enfin, qu'avec la forme réduite adoptée, les coordonnées X, Z ne contiennent que des puissances de t toutes de même parité que m, et Y et Θ toutes de la parité opposée: le changement de t en $-t$ produit donc une transformation homographique simple de la courbe en elle même, échangeant deux à deux les tangentes remarquables (et leurs points de contact). Il y a 3 telles transformations de la courbe en elle-même, réelles toutes les 3 si les quatre tangentes sont réelles (en supposant que le plan $\Theta = 0$ est le plan de l'infini, et que les axes $O\,X\,Y\,Z$ sont rectangulaires, l'une des transformations est une symétrie autonr de $O\,Y$). Nous allons y revenir un peu plus bas.

En prenant les coordonnées plückériennes (A, B, C, L, M, N) de la tangente générale, déduites du tableau

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & \Theta \\ \dfrac{dX}{dt} & \dfrac{dY}{dt} & \dfrac{dZ}{dt} & \dfrac{d\Theta}{dt} \end{vmatrix} \tag{16}$$

on voit que A, C, L, N sont des fonctions paires de t et B, M des fonctions impaires. Quand il s'agit des points remarquables, on peut réduire les fonctions paires A, C, L, N et les deux coordonnées-points qui sont paires à la forme $\alpha t^2 + \beta$ et les fonctions B, M ainsi que les deux coordonnées impaires à la forme $\alpha t^3 + \beta t$, en tenant compte de l'équation fondamentale.

5. Complexes attachés aux diverses courbes V_m. Involutions biaxiales.

Le raisonnement employé pour les biquadratiques, reproduit sans modification, prouve que si les quatre tangentes remarquables en jeu sont choisies au hasard il n'y aura d'autre solution que chacune des deux sécantes communes (prise m fois); pour obtenir une véritable solution, on remarque que:

pour un degré $2m$ *pair*, les quatre tangentes sont sur une même quadrique Q; leur rapport anharmonique, en tant que génératrices du même système sur Q est l'unique invariant projectif de la courbe; si on choisit au hasard quatre génératrices d'un même système sur Q, nous verrons qu'il existe $(2m - 4)$ séries ∞^3 de courbes V_{2m} tangentes à ces 4 droites, les courbes d'une même série étant transformées homographiques de l'une quelconque de la série.

pour un degré $2m + 1$ *impair* trois droites données T_1, T_2, T_3 comme tangentes remarquables déterminent un complexe C_{2m+1} du type très spécial que j'ai étudié dans mon Mémoire sur les invariants projectifs de 4 droites: T étant choisie dans C_{2m+1}, il y a ∞^1 courbes tangentes à T, T_1, T_2, T_3, transformées homographiques de l'une quelconque d'entre elles; le complexe C_{2m+1} comprend certaines congruences linéaires multiples d'ordre $p > 1$ et pour une droite T d'une de ces congruences, on a p séries ∞^1 de courbes V_{2m+1} au lieu d'une seule série.

Nous avons déjà remarqué que, sur les équations réduites trouvées au numéro précédent, le changement de t en $-t$ donne une transformation de la courbe en elle-même, trace sur cette courbe d'une involution biaxiale portant sur tout l'espace et d'axes ($x = 0$, $z = 0$), ($y = 0$, $\Theta = 0$). Or il y a 3 façons de faire la réduction de sorte que la courbe possède trois transformations en elle-même qui sont, sur la courbe, des involutions sur t; les points doubles de ces trois involutions se divisent harmoniquement et correspondent comme nous l'avons dit aux trois involutions définies chacune par un couple (t_i, t_j), puis (t_k, t_l), de racines de l'équation fondamentale; cette disposition des points doubles entraîne, comme je l'ai montré dans le Mémoire déjà cité, que ces involutions sur la courbe forment un cycle ternaire; d'autre part les involutions biaxiales de l'espace, se trouvant comme toute homographie, détermiuées *d'une façon unique* par un nombre fini de points, il en résulte que ces involutions biaxiales forment elles-mêmes un groupe ternaire tétraèdre pour les courbes V_{2m} de degré pair, ternaire quadrique pour les courbes V_{2m+1}, de degré impair; dans une de ces involutions biaxiales, le tangente T s'échange avec T_1, T_2 avec T_3 et les points de contact s'échangent en même temps.

Prenons donc une courbe V_{2m}: les tangentes T, T_1, T_2, T_3 s'échangent dans un groupe ternaire tétraèdre; or les formules écrites pour V_{2m} donnent les résultats indiqués par le tableau

$$\begin{array}{lll} X & t^{2m} & t^0 \\ Y & t^{2m-1} & t \\ Z & t^{2m-2} & t^0 \\ \Theta & t^{2m-3} & t \end{array}$$

où je n'ai marqué que les termes extrêmes des polynômes X, Y, Z, Θ; le point $t=0$, double de l'involution biaxiale $(t, -t)$, est sur la droite $Y=0$, $\Theta=0$; l'autre point double $t=\infty$ est sur la même droite, en un sommet du tétraèdre actuel de référence $(Y=Z=\Theta=0)$; nous en concluons que le tétraèdre des involutions admet comme arêtes les trois droites joignant les points doubles d'une même involution; ces trois arêtes ne peuvent être que concourantes en un même point (on le vérifie immédiatement pour $m=2$ ou V_4) et non côtés d'un triangle. Cela suffit pour déterminer les trois autres arêtes; car soient A_1, A_2, A_3 ces trois arêtes concourantes; A_1 rencontre la courbe V_{2m} en deux points invariants, ainsi que leurs tangentes, dans l'involution ayant pour axes A_1 et l'arête inconnue associée B_1; les deux tangentes en jeu coupent le plsn $A_1 A_2$ chacune en un point appartenant à B_1.

Si nous prenons une courbe V^{2m+1} nous avons le tableau

$$\begin{array}{lll} X & t^{2m+1} & t \\ Y & t^{2m} & t^0 \\ Z & t^{2m-1} & t \\ \Theta & t^{2m-2} & t^0 \end{array}$$

Le point $t =$ est sur l'axe $X = Z = 0$, le point. $t = \infty$ sur l'autre axe, (en une entrêmité), $Y = \Theta = 0$; de la sorte, cette fois, les axes des 3 involutions s'obtiennent en menant par les divers points doubles de chaque involution les droites s'appuyant sur (d) et (D).

Tout revient maintenant à déterminer une courbe V_m^0 dépendant de l'unique paramètre a (opération faite au numéro 4), puis à calculer en fonction de a les quantités homogènes (A, B, C), comme je l'ai expliqué dans le Mémoire cité, dont les rapports mutuels sont les invariants projectifs des quatre tangentes; le point (A, B, C) décrit dans le plan π (introduit dans le Mémoire cité) la courbe Γ, image du complexe $\mathcal{C}$ auquel appartient la quatrième tangente, quand les trois premières sont données. Or nous prenons comme équation fondamentale l'équation

$$(1) \qquad t^4 - t^2 - a = 0$$

dont j'appelle les racines t_1, t_2, t_3, t_4; nous pouvons tout exprimer provisoirement, au moyen du paramètre ϕ par les formules

$$(2) \qquad t_1 = - t_2 = \cos\phi \quad t_3 = -t_4 = \sin\phi \quad a = - \sin^2\phi\cos^2\phi$$

Les tangentes T_1, T_2, T_3, T_4 sont ainsi obtenues séparément et rationellement, ainsi que les quantités

$$A = (41)(23) \quad B = (42)(31) \quad C = (43)(22)$$

Ceci suffit à prouver que la courbe Γ est unicursale; mais, au point de vue de Γ seule, cette représentation est impropre; il suffit de regarder les échanges

$$(5) \qquad t_4 \left| \begin{array}{rcccccccc} \phi & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & A & B & C \\ \pi + \phi & t_2 & t_1 & t_4 & t_3 & A & B & C \\ \dfrac{\pi}{2} - \phi & t_3 & t_3 & t_1 & t_2 & A & B & C \\ -\dfrac{\pi}{1} - \phi & t_4 & t_3 & t_2 & t_1 & A & B & C \end{array} \right.$$

Cela correspond, comme nous le savons, aux involutions biaxiales transformant la courbe V_m en elle-même, échangeant deux tangentes entre elles en même temps que les deux autres. Il suffit de pendre comme paramètre $\sin\phi\cos\phi = \dfrac{u}{2\sqrt{3}}$ pour avoir la représentation unicursale propre de Γ; le paramètre u est celui qui a été introduit au numéro 4 de ce travail; les 6 valeurs de u

$$(5)\quad \begin{cases} u_1 = u \quad u_2 = -u \quad u_3 = \dfrac{u+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}, \quad u_4 = \dfrac{-u-\sqrt{3}}{1-u\sqrt{3}} \\[2ex] u_5 = \dfrac{u-\sqrt{3}}{1+u\sqrt{3}} \quad u_6 = \dfrac{-u+\sqrt{3}}{1-u\sqrt{3}} \end{cases}$$

donnent les 6 points (A, B, C) déduits les uns des autres par les symétries et rotations du triangle équilatéral pris pour triangle de référence: ces 6 points, qui forment un groupe, résultent du fait que si 4 droites T_1, T_2, T_3; T_4 doivent être les tangentes remarquables de la courbe V_m, ces quatre droites (dans leur ensemble) doivent pouvoir se transformer en les quatre tangentes T_1^0, T_2^0, T_3^0, T_4^0 de la courbe particulière V_m^0, mais rien n'indique comment on doit associer deux à deux les droites de l'un ou l'autre gronpe, et il y a 6 façons distinctes d'y arriver, (à cause des transformations en lui-même de l'un des systèmes, on a bien 6 au lieu de 24); on peut convenir de faire correspondre T_4 et T_4^0; mais, au lieu de permuter T_1^0, T_2^0, T_3^0, il suffit de remplacer u successivement par les 6 valeurs (5); de la sorte nous décomposons chaque complexe $\mathcal{C}_m$ en congruences linéaires (g) correspondant à chaque valeur de u, et même en groupes de 6 telles congruences. [Dans certains cas, il peut arriver qu'il y ait séparation de la courbe plane Γ en 3 courbes s'échangeant par rotation: c'est le cas pour les biquadratiques gauches et le cas, dit par M. Mohrmann de deuxième espèce; on trouve alors les 3 courbes unicursales

$$\begin{aligned} (B+C-A)^4 - 64\,A^2 B\,C &= 0 \\ (C+A-B)^4 - 64\,A\,B^2\,C &= 0 \\ (A+B-C)^4 - 64\,A\,B\,C^2 &= 0 \end{aligned}$$

tandis que le cas de première espèce donne l'unique relation

$$A+B+C=0].$$

Formons donc les coordonnées plückériennes $(a_i, b_i, c_i, l_i, m_i, n_i)$ des tangentes remarquables; nous avons aussitôt:

$$(6)\quad \begin{cases} A = (a_1 l_3 - b_1 m_3 + c_1 n_3 + a_3 l_1 - b_3 m_1 + c_3 n_1)^2 \\ B = (a_1 l_3 + b_1 m_3 + c_1 n_3 + a_3 l_1 + b_3 m_1 + c_3 n_1)^2 \\ C = 4\,(a_1 l_1 - b_1 m_1 + c_1 n_1)(a_3 l_3 - b_3 m_3 + c_3 n_3) \end{cases}$$

et cette forme suffit à prouver que tout s'exprime bien rationellement en u; pour la commodité des calculs, u n'ayant été introduit que pour se servir de la formule exprimant $tg\,3\,\omega$ en $tg\,\omega$, il est préférable de poser

$$(7) \qquad a = -\frac{v^2}{4} \quad u = v\sqrt{3}$$

de façon à éviter les irrationnelles numériques. Ces substitutions (5) deviennent

$$(8) \quad v_1 = v,\ v_2 = -v,\ v_3 = \frac{v+1}{1-3v},\ v_4 = \frac{v+1}{3v-1},\ v_5 = \frac{v-1}{1+3v},$$
$$v_6 = \frac{1-v}{1+3v}.$$

Le calcul de A, B, C peut sembler pénible: nous allors montrer qu'il suffiit, en réalité, de calculer C (à un facteur *numérique* près d'ailleurs). Nous avons ramené a_i, c_l, l_i, n_l chacun à la forme $\alpha t_i^2 + \beta$, et b_l, m_l chacun à la forme $\alpha t_i^3 + \beta t_i$; or A et B, exprimés en v, sont polynômes entiers, carrés parfaits; si dans A, on remplace v par $\frac{v+1}{1-3v}$ ou $\frac{v-1}{1+3v}$, A devient une fraction rationnelle dont le numérateur, toujours carré parfait, coïncide, sauf facteur numérique, avec B ou C [ou C et B, mais, au fond, peu importe]; donc *C'est carré parfait.* Grâce à l'identité $a_l l_l + b_i m_i + c_i n_i \equiv 0$, on peut écrire simplement

$$(9) \qquad C = 16\, b_1\, b_3\, m_2\, m_3$$

Cette forme prouve que le calcul de C se fait rapidement: on peut écrire

$$\begin{aligned} b_1 &= \alpha t_1^3 + \beta t_1 \quad m_1 = \alpha' t_1^3 + \beta' t_1 \\ b_1 m_1 &= t_1^2[\alpha t_1^2 + \beta][\alpha' t_1^2 + \beta'] \\ &= t_1^2[\alpha\alpha'(t_1^2 + a) + (\beta\alpha' + a\beta')t_1^2 + \beta\beta'] \\ &= (\gamma t_1^2 + \delta)\, t_1^2 \end{aligned}$$

Donc

$$b_1\, m_1\, b_3\, m_5 = t_1^2\, t_3^2 (\gamma t_1^2 + \delta)(\gamma t_3^2 + \delta)$$

Par suite, en faisant abstraction d'un facteur constant, *indépendant de v*, on peut écrire

$$(10) \qquad C = v^2 \left[-\gamma^2 \frac{v^2}{4} + \gamma\delta + \delta^2 \right].$$

L'extraction de la racine fournit $\sqrt{C}$; puis la substitution $\left(v, \frac{v+1}{1-3v}\right)$ fournit $\sqrt{B}$ (à moins que ce ne soit $\sqrt{A}$) à un facteur numérique près inconnu; pour déterminer ce facteur qui, cette fois pour avoir la courbe (A, B, C), est indispensable, on voit que si $v = 0$, on a $a = 0$ et deux tangentes principales coïncident; avec les définitions

$$A = (41)(23) \qquad B = (42)(31) \qquad C = (43)(12)$$

on voit que si T_4 coïncide avec T_3, on a $C = 0$, $B = A$; donc comme $\sqrt{A}$ s'obtient en changeant v en $-v$ dans $\sqrt{B}$, le facteur numérique qui intervient dans les deux substitutions $\left(v, \frac{v+1}{1-3v}\right)$ et $\left(v, \frac{1-v}{1+3v}\right)$ pour passer de $\sqrt{C}$ à $\sqrt{B}$ et $\sqrt{A}$ (ou $\sqrt{A}$ et $\sqrt{B}$) est le même; pour $v = 1$, C n'est pas nul, B non plus, mais A l'est, à cause de la substitution $\left(v, \frac{1-v}{1+3v}\right)$; donc la valeur $v = 1$, faisant coïncider T_4 avec T_1 et T_3 avec T_2, (l'équation fondamentale étant devenue $t^4 - t^2 + \frac{1}{4} = 0$), on doit avoir pour $v = 1$, $B = C$ et cette remarque donne le facteur numérique sans ambiguité. En changeant ensuite, dans B, v en $-v$, on a A; comme le changement de v en $-v$ laisse C invariable, on voit que si on a confondu les noms de A et B, finalement cette confusion est sans importance. Le calcul se réduit donc, au fond, au calcul de b, m; le calcul de a, c, l, n est inutile. D'ailleurs, si on tient à vérifier le résultat par un calcul direct, on peut écrire

$$C = 16\, b_1 b_4 m_1 m_3$$
$$\sqrt{A} = a_1 l_3 - b_1 m_3 + c_1 n_3 + a_3 l_1 - b_3 m_1 + c_3 n_1$$

et en retranchant l'expression nulle

$$a_1 l_1 + b_1 m_1 + c_1 n_1 + a_3 l_3 + b_3 m_3 + c_3 n_3$$

on obtient

$$(11) \begin{cases} \sqrt{A} = (a_1 - a_3)(l_3 - l_1) + (c_1 - c_3)(n_3 - n_1) - (b_1 + b_3)(m_1 + m_3) \\ \sqrt{B} = (a_1 - a_3)(l_3 - l_1) + (c_1 - c_3)(n_3 - n_1) + (b_1 - b_3)(m_3 - m_1) \end{cases}$$

Le calcul s'achève simplement:

$$a_1 = \alpha t_1^2 + \beta \qquad a_3 = \alpha t_3^2 + \beta \qquad a_1 - a_3 = \alpha(t_1^2 - t_3^2)$$
$$(a_1 - a_3)(l_3 - l_1) = -\alpha\alpha'(t_1^2 - t_3^2)^2 = -\alpha\alpha'[1 + 4a) =$$
$$-\alpha\alpha'(1 - v^2).$$

Nons verrons plus bas les conséquences intéressantes du calcul de $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$, $-\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$, $\sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C}$, $\sqrt{A}+\sqrt{B}-$ $-\sqrt{C}$; c'est d'ailleurs facile à prévoir en se reportant au Mémoire déjà cité.

Une remarque simple va nous prouver que pour un degré pair $2m$, on a nécessairement

$$b_i = (\alpha t_i^3 + \beta t_i) f(a) \qquad m_i = (\alpha t_i^3 + \beta t_i)\phi(a)$$

où $f(a)$ et $\phi(a)$ sont des polynômes entiers en a; en effet, écrire $b_i = 0$ revient à dire que la tangente T_i rencontre l'axe $y = \theta = 0$; la tangente T_j provenant du remplacement de t_i par $(-t_i)$ rencontre donc T_i sur cet axe $y = \theta = 0$, à cause de l'involution biaxiale I d'axes $(y = \theta = 0)$ et $(x = z = 0)$; mais le degré étant pair, I' est une involution qui remplace l'axe $y = \theta = 0$ par lui-même, donc T_i et T_j, concourant sur cet axe, sont remplacées par T_k, et T_l qui concourent encore sur l'axe $y = \theta = 0$; donc pour la valeur a considérée, les 4 valeurs des b_i sont nulles ensemble, mais non les m_i: a est racine du polynôme $f(a)$; les racines de $\phi(a)$ correspondent à 4 tangentes principales réparties en couples concourant sur l'axe $x = z = 0$. Enfin les racines de $\alpha t_1^3 + \beta t_i$ correspondent à une dégénérescence de la courbe. Pour un degré impair $2m + 1$, les circonstances changent: si b_i s'annule, T_i et T_j comme plus haut se coupent sur l'axe $y = \theta = 0$, mais l'involution I' échangeant les axes $y = \theta = 0$ et $x = z = 0$, les deux autres tangentes T_k et T_l se coupent sur l'autre axe de l'involution I, $x =$ $= z = 0$ et cette fois b_i et m_i ne sont plus proportionnelles. On se rend ainsi compte à nouveau de l'influence de la parité du degré; la condition nécessaire et suffisante pour que les quatre tangentes T_i appartiennent à une même quadrique est d'ailleurs l'existence de 4 nombres ρ_i tels que l'on ait

(12) $$\sum_i \rho_i a_i = 0 \qquad \sum_i \rho_i c_i = 0 \qquad \sum_i \rho_i l_i = 0 \qquad \sum_i \rho_i n_i = 0$$

(13) $$\sum_i \rho_i b_i = 0 \qquad \sum_i \rho_i m_i = 0.$$

Les équations de la première ligne reviennent à deux; en raison de la parité

(12′) $\qquad \sum_i \rho_i = 0 \qquad \sum_i \rho_i t_i^2 = 0$

ou simplement, si a est quelconque,

(14) $\qquad \rho_1 = -\rho_2 \qquad \rho_3 = -\rho_4.$

Si les b_i ne sont pas proportionnels aux m_i (le facteur étant rationnel en a) les égalités (13) deviennent, en tenant compte de (14),

$$\rho_1 t_1 + \rho_3 t_3 = 0 \qquad \rho_1 t_1^3 + \rho_3 t_3^3 = 0.$$

et entraînent $\rho_1 = \rho_3 = 0$. Or, pour un degré pair, la quadrique Q existe, quel que soit a; donc on doit bien s'attendre à trouver b et m proportionnels.

Le calcul des ρ met d'ailleurs, pour les degrés impairs, en évidence les valeurs de a, 0 et $-\frac{1}{4}$ qui correspondent à des racines multiples pour l'équation fondamentale $t^4 - t^2 - a = 0$.

6. Exemple numérique: $m = 4$.

On a, avec les notations employées jusqu'ici, sauf changement de signe de Y et Θ, ce qui importe peu

(1) $\qquad X = t^4 + a \qquad Y = t^3 \qquad Z = t^2 + \frac{1}{6} \qquad \Theta = t.$

L'équation fondamentale est

$$t^4 = t^2 + a.$$

On trouve pour les coordonnées plückériennes $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$,

(3) $$\left|\begin{array}{lll} \alpha = 3t^2 + 2a & \beta = 2t^3 & \gamma = t^2 - \frac{1}{6} \\ \lambda = -\dfrac{3t^2}{2} - a & \mu = \dfrac{8t^3}{3} & \nu = (2-1)t^2 - a. \end{array}\right.$$

On calcule sans peine, directement, $\sqrt{C}$ et $\sqrt{B}$; $\sqrt{A}$ se déduit de $\sqrt{B}$ par changement de v en $-v$; on a ainsi

(4) $$\left|\begin{array}{l} 6\sqrt{A} = (1+v)^3(1-3v) \\ 6\sqrt{B} = (1-v)^3(1+3v) \\ 6\sqrt{C} = 16v^3 \end{array}\right. \qquad \sqrt{B} - \sqrt{A} - \sqrt{C} = 0$$

Ici la courbe (A, B, C) n'est autre que la conique γ sous forme impropre (obtenue *quatre* fois); si l'on se donne T_1, T_2, T_3, il existe pour toute droite T tangente à la quadrique T_1, T_2, T_3, *quatre* séries de courbes V_4 admettant T_1, T_2, T_3, T comme tangentes remarquables; on calcule les coordonnées du point (A, B, C) correspondant aux droites (T, T_1, T_2, T_3) et l'on choisit les déterminations des racines $\sqrt{B}$, $\sqrt{A}$, $\sqrt{C}$ de sorte qu'elles soient liées par la relation $\sqrt{B} - \sqrt{A} - \sqrt{C} = 0$; on calcule ensuite v par l'équation de degré 4

$$(5) \qquad (1-v)^3(1+3v)\sqrt{C} - 16\,v^3\sqrt{B} = 0$$

Pour chaque racine v de (5), on prend $a = -\dfrac{v^2}{4}$ et les formules (1) déterminent une courbe V_4^0 qui, par transformation homographique à un paramètre, devient tangente à T, T_1, T_2, T_3 et les admet pour tangentes principales; les 4 racines de (5) donnent donc les 4 séries annoncées et ces séries ne sont pas homographiques d'une série à l'autre. Si on avait appliqué strictement la règle pratique indiquée plus haut, on aurait tout de suite trouvé pour $\sqrt{C}$ la valeur v^3; pour effectuer la substitution $\left(v, \dfrac{v+1}{1-3v}\right)$ il aurait fallu regarder $\sqrt{C}$ comme polynôme en v de degré *4* et non 3; cette remarque est vraie pour toutes les valeurs paires du degré.

Les valeurs $v = \frac{1}{3}$, $v = -\frac{1}{3}$, $v = \infty$ donnent les points du cercle γ sur les axes de symétrie du triangle de référence, autres que les points de contact; pour $v = \frac{1}{3}$ par exemple, $A = 0$, $B = C$: on a ce cas exceptionnel que le système des 4 tangentes principales peut s'échanger avec lui-même par échange de deux tangentes, chacune des 2 autres restant invariable; sur la quadrique Q qui les porte, elles se divisent harmoniquement.

7. Exemple numérique: $m = 5$.

Nous écrivons, au lieu de

$$X = t^5 + 5\,a\,t, \qquad -5\,Y = 5\,t^4 + a, \qquad 10\,Z = 10\,t^3 + 5\,t,$$
$$-10\,\Theta = 10\,t^2 + 1.$$

les formules plus simples

$$(1) \quad X = t^5 + 5\,a\,t \quad Y = 5\,t^4 + a \quad Z = 2\,t^3 + 1 \quad \Theta = 10\,t^2 + 1$$

car la transformation homographique ainsi faite indiffère. On calcule aisément les coordonnées plückérieunes *réduites* pour les tangentes principales

$$(2)\quad \left|\begin{array}{ll} \alpha = (35 - 20\,a)t^2 + 40\,a & \beta = 120\,t^3 + 80\,a\,t \\ \gamma = 16\,t^2 + 20\,a + 1 & \lambda = -(25 + 4\,a)t^2 + 24\,a \\ \mu = (8 - 16\,a)\,t^3 + 8\,a\,t & \nu = (60\,a - 5)t^2 + 120\,a^2 - 65\,a. \end{array}\right.$$

La proportionalité des β aux μ entraîne $a(1 + 4\,a) = 0$ et l'on retrouve ainsi les valeurs remarquables $a = 0$, $a = -\frac{1}{4}$ pour lesquelles les racines de l'équation fondamentale ne sont pas toutes distinctes, ce qui est une vérification des calculs. La méthode pratique indiquée plus haut, (pour laquelle le calcul de β et μ eût suffi) donne sans difficulté, en négligeant des facteurs *numériques* pour C

$$t_1^2 t_3^2 [\{3\,t_1^2 + 2\,a\}\{(1 - 2\,a)\,t_1^2 + a\}][\{3\,t_3^2 + 2\,a\}\{(1 - 2\,a)\,t_3^2 + a\}]$$

ou en abaissant chaque crochet au second degré en t

$$a\,[(3 - a - 4\,a^2)\,t_1^2 + 3\,a - 4\,a^2][(3 - a - 4\,a^2)\,t_3^2 + 3\,a - 4\,a^2)$$

d'où finalement

$$(3)\qquad \sqrt{C} = 16\,v^4(3 + v^2).$$

Les substitutions indiquées pour v donnent

$$(4)\quad \left|\begin{array}{l} \sqrt{A} = (1 + v)^4(1 - 4\,v + 7\,v^2) = 1 - 3\,v^2 + 8\,v^3 + 27\,v^4 + \\ \qquad + 24\,v^5 + 7\,v^6 \\ \sqrt{B} = (1 - v)^4(1 + 4\,v + 7\,v^2) = 1 - 3\,v^2 - 8\,v^3 + 27\,v^4 - \\ \qquad - 24\,v^5 + 7\,v^6 \\ \sqrt{C} = 16\,v^4(3 + v^2). \end{array}\right.$$

On a ici

$$(5)\quad \left|\begin{array}{l} \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} = 2(1 - 3\,v^4 + 51\,v^4 + 15\,v^6 \\ \sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C} = 2\,(1 - v^2)^3 \\ \sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C} = 16\,v^3(1 + v)^3 \\ \sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C} = 16\,v^3(1 - v)^3. \end{array}\right.$$

Le complexe $\mathscr{C}$ que l'on obtient pour $m = 5$ est donc de degré 12; on voit aisément que

(6) $A = 1 - 6v^2 + \ldots \quad A - B = 32v^3 + \ldots \quad C = 256\,v^8(9 + \ldots)$

donc $v = 0$ fournit pour Γ un cycle au sens d'Halphen de degré 3 et classe 5; les équations $A - B = 0$, $C = 0$ représentent la congruence linéaire singulière formée des tangentes à Q le long de T_3; $C = 0$ représente le complexe linéaire spécial d'axe T_3 et ce complexe est tangent à $\mathcal{C}$ le long de la congruence linéaire précédente; si nous considérons un point M quelconque, puis le plan polaire de M par rapport à Q, ce plan perce T_1, T_2, T_3 en m_1, m_2, m_3; d'après ce qui précède chaque droite Mm_1, Mm_2, Mm_3, est génératrice triple du cône du complexe de sommet M; sur chacune de ces génératrices, par exemple Mm_1, le plan tangent est unique, à savoir le plan MT_1 et a en commun avec le cône *huit* génératrices confondues avec Mm_1. (Quel que soit le degré m impair, on obtient des propriétés analogues). D'ailleurs toutes les droites du complexe, tangentes à Q le long de T_1, T_2, T_3, sont, au fond, inacceptables; elles proviennent de ce que pour $v = 0$, $v = \pm 1$ l'équation fondamentale n'a plus ses racines distinctes et que le système $(T_1^0\, T_2^0\, T_3^0\, T_4^0)$ où deux droites sont confondues a bien mêmes invariants que $(T_1, T_2, T_3\, T)$ (où il n'y a aucune droite confondue avec une autre), sans qu'il y ait de passage par homographie: c'est l'un des cas critiques que j'ai signalés dans le Mémoire déjà cité. L'intersection de la courbe Γ et du cercle γ comprend $v = 0$, $v = 1$, $v = -1$ comptant chacun pour 6 unités; il reste 6 points imaginaires, simples dans l'intersection donnés par l'équation à racines imaginaires

$$1 - 3v^2 + 51v^4 + 15v^6 = 0. \tag{7}$$

Chacune de ces racines correspond au cas où la quadrique contenant trois tangentes principales est tangente à la quatrième; on trouve ainsi sur Q 6 génératrices avec la congruence linéaire des tangentes à Q le long de chacune d'elles; chaque génératrice appartient au complexe, mais doit être rejetée (toujours en raison du cas critique pour le passage homographique). Les racines de (7) sont liées à l'une quelconque d'entre elles par les substitutions (8) indiquées au numéro 5.

La coube Γ est coupée par le côté $C = 0$ au point $v = 0$ déjà étudié, comptant pour 8 intersections et aux deux points imaginaires $v = \pm i\sqrt{3}$ comptant chacun pour 2. Le point $v = i\sqrt{3}$

donne une congruence linéaire dont une directrice est T_3 et l'autre une génératrice G de Q; chaque droite s'appuyant sur G et T_3 est une solution acceptable: pour $a = \frac{3}{4}$, l'équation $t^4 - t^2 - \frac{3}{4} = 0$ devient $(t^2 - \frac{3}{2})\ (t^2 + \frac{1}{2}) = 0$; les deux tangentes obtenues pour $t = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ annulent β, donc rencontrent l'axe $y = \theta = 0$ au même point. Les deux tangentes obtenues pour $t = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}$ annulent μ, donc rencontrent l'axe $x = z = 0$ au même point; c'est bien conforme à ce que nous avons prévu en fin du numéro 5.

Il n'y a plus qu'à trouver les points doubles de Γ. La substitution $v' = \dfrac{v+1}{1-3v}$ relative aux rotations de Γ fournit, en prenant $v' = v$, les valeurs $v = \pm\dfrac{i}{\sqrt{3}}$ qui correspondent toutes deux au centre ω du triangle de référence, qui est un point double ornaire de Γ à tangentes isotropes; on peut remarquer que les directrices de la congruence linéaire double correspondante s'obtiennent en coupant le cercle γ par la polaire de ω; cela donne donc les 2 droites hessiennes de T_1, T_2, T_3, c'est-à-dire les 2 génératrices de Q dont chacune, réunie à T_1, T_2, T_3 donne un birapport équianharmonique.

Remarquons maintenant que si une courbe unicursale plane admet un axe de symétrie, elle coupe cet axe en 0,1 ou 2 points simples et en une série de points multiples; prenons donc l'axe $A - B = 0$; il donne d'abord les racines de $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ ou de $v^3(1+3v^2) = 0$ déjà rencontrées $\left(\text{un point triple } v = 0, \text{ un point double } v = \pm\dfrac{i}{\sqrt{3}}\right)$, puis celles de $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0$ ou de $1 - 3v^2 + 27v^4 + 7v^6 = 0$; cette dernière équation n'a que des racines imaginaires et donne 3 points doubles ordinaires; le point simple unique où l'axe $A - B = 0$ perce la courbe est fourni par $v = \infty$ et a pour coordonnées 49, 49, 256. Or la courbe Γ, de degré 12, a l'équivalent de 55 points doubles; on a déjà obtenu l'origine et trois points sur chacun des axes de symétrie, ce qui fait 10 points doubles ordinaires; chaque point de contact de γ et du triangle de référence compte pour $3 + 2u$ unités et l'on a ensuite $6d$ points doubles répartis par groupes de 6, d'où $d = 6 - u$, u étant un entier égal à l'un des nombres $0, 1, \ldots 6$.

On a à résoudre le système

$$\frac{X^2}{X'^2} = \frac{Y^2}{Y'^2} = \frac{Z^2}{Z'^2} \tag{8}$$

où X, Y, Z sont les fonctions $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, $\sqrt{C}$ trouvées plus haut et X', Y', Z' ces mêmes fonctions X, Y, Z où v est remplacé par v'. Ce système se décompose en quatre systèmes: d'abord

$$\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'}, \tag{9}$$

qui est résolu, car on obtient ainsi les points doubles de la sextique unicursale

$$X = (1 + v)^4 (1 - 4v + 7v^2) \qquad Y = (1 - v)^4 (1 + 4v + 7v^2)$$
$$Z = 16\, v^3 (3 + v^2).$$

Or ces points ont été signalés: ω centre de γ, point double ordinaire $\left(v = \pm \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$, puis chaque point de contact de γ avec le triangle de référence, qui est triple (cycle de degré 3 et classe 1). Il reste donc 3 systèmes, dont il suffit de discuter l'un:

$$\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{-Z}{Z'}$$

une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ dans un sens ou l'autre autour de ω donnant les solutions des deux autres. On peut prendre ce système sous la forme

$$\frac{X + Y}{X' + Y'} = \frac{X - Y}{X' - Y'} = -\frac{Z}{Z'}$$

ce qui revient à

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{1 - 3v^2 + 27v^4 + 7v^6}{1 - 3v'^2 + 27v'^4 + 7v'^6} = \dfrac{v^3 + 3v^5}{v'^3 + 3v'^5} \\[2ex] \dfrac{1 + 3v^2}{1 + 3v'^2} + \dfrac{v(3 + v^2)}{v'(3 + v'^2)} = 0 \end{array}\right. \tag{10}$$

Ce système fournit $2d$ points doubles, 2 à 2 symétriques par rapport à l'axe $A - B = 0$ [(v, v') pour l'un des points, $(-v, -v')$

pour son symétrique]. En rendant entier et supprimant le facteur $v' - v$ dans la première équation et $v + v'$ dans la seconde, puis posant

$$(11) \qquad v + v' = s \qquad v v' = p$$

on obtient aisément

$$(12) \quad \left| \begin{array}{l} 7\,p^3(s^2 + 3\,p^3) - 88\,p^4 + 3\,p^2 s^2 - 3\,s^4 + 24\,p^3 + 9\,p s^2 - \\ \qquad - s^2 + p = 0 \\ s^2 + 3\,(p+1)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Le mode de calcul adopté pourrait avoir introduit les solutions étrangères provenant de $1 + 3\,v^2 = 0$, $1 + 3\,v'^2 = 0$: mais grâce à la suppression des facteurs $v \pm v'$ en passant de (10) à (12), cette éventualité a disparu; on voit que la seconde équation (12) se décompose en deux équations linéaires; si, dans la première, on remplace $7\,p^3(s^2 + 3\,p^2)$ par $-7\,p^3(6\,p + 3)$, on a à résoudre une équation de degré 4 en p, puis l'équation

$$V^2 \pm (p+1)\,i\sqrt{3}\;V + p = 0$$

pour calculer le couple (v, v') correspondant à cette valeur de p; nous obtenons ainsi 8 couples, donc huit points doubles; donc $d = 4$, $u = 2$ et chaque point triple de Γ compte pour la réunion de 7 points doubles.

Ce qui précède montre qu'étant donnée une droite du complexe, il existe en général *une* seule série ∞^1 de courbes unicursales gauches de degré 5 et de l'espèce indiquée ayant T_1, T_2, T_3 et cette droite pour tangentes remarquables; pour les points doubles de Γ, il y a au contraire *deux* séries de telles courbes; ici les points doubles sont tous imaginaires, sauf ω qui est d'ailleurs isolé: étant donné un point réel M, la droite issue de M et s'appuyant sur les deux génératrices imaginaires conjuguées correspondant à ω est réelle et on a deux séries de courbes, $\left(a = -\dfrac{v^2}{4} = \dfrac{1}{12}\right)$, imaginaires, parce qu'il faut transformer en quatre droites réelles les tangentes fournies par l'équation $t^4 - t^2 - \frac{1}{12} = 0$ qui n'a que deux racines réelles.

Je ferai remarquer qu'au point de vue de la réalité des courbes V_m le problème peut se poser autrement: jusqu'ici, en prenant trois droites T_1, T_2, T_3 réelles, nous nous sommes bornés au cas où l'équation fondamentale a ses racines réelles; on pourrait envisager le cas où elle a deux racines imaginaires conjuguées et deux réelles; l'équation fondamentale, par une transformation *réelle* peut être réduite à la forme $t^4 - t^2 - a = 0$, où a est positif de façon que les deux racines imaginaires soient imaginaires pures; on peut prendre T_1 et T_2 imaginaires conjuguées, T_3 réelle et chercher le complexe lieu de la droite réelle T; je me contente de ces indications.

8. Exemple numérique: $m = 6$.

Nous obtenons la courbe V_6

(1) $$X = t^6 + 15\,a\,t^2 + a \qquad Y = t^5 + a\,t$$
$$Z = 15\,t^4 + 15\,t^2 + a + 1 \qquad \Theta = 10\,t^3 + 3\,t.$$

Nous nous bornons au calcul de b et m:

(2) $$b = 32\,(t^3 + a\,t) \qquad m = 96\,(1 - 4\,a)(t^3 + a\,t).$$

Ce résultat, conforme aux prévisions, prouve bien que les quatre tangentes principales sont sur une même quadrique. Par le procédé indiqué on trouve

(3) $$\left|\begin{array}{l} \sqrt{C} = 128\,v^5(1 + v^2) \\ \sqrt{A} = (1 + v)^5(1 - 2\,v + 5\,v^2)(1 - 3\,v) = (1 + v)^5(1 - \\ \qquad - 5\,v + 11\,v^2 - 15\,v^3) \\ \sqrt{B} = (1 - v)^5(1 + 2\,v + 5\,v^2)(1 + 3\,v) = (1 - v)^5(1 + \\ \qquad + 5\,v + 11\,v^2 + 15\,v^3) \end{array}\right.$$

$\sqrt{C}$ pour la substitution $\left(v;\ \dfrac{1 - v}{1 + 3\,v}\right)$ a dû être considéré comme polynôme de degré 8. On vérifie

(4) $$\sqrt{B} - \sqrt{A} = 128\,(v^5 + v^7) = \sqrt{C}.$$

La courbe Γ se réduit bien au cercle γ en représentation impropre: pour quatre génératrices d'une quadrique, il y a 8 séries ∞^3 de courbes V_6 les admettant connue tangentes principales.

9. Exemple numérique: $m = 7$.

Nous prenons

(1) $$\left\{\begin{array}{ll} X = t^7 + 35\,a\,t^3 + 7\,a\,t & Y = 7\,t^3 + 21\,a\,t + a \\ Z = 3\,t^5 + 5\,t^3 + (a + 1)\,t & \Theta = 35\,t^4 + 21\,t^2 + (a + 1) \end{array}\right.$$

On peut prendre, à un facteur numérique près b et m égaux à

$$-5t^3+(4a^2-5a)t, \qquad (4a^2+7a-1)t^2+(8a-1)t.$$

La proportionalité de b et m exige $a(4a+1)^2=0$, ce qui est une vérification des calculs. Puis on trouve

$$(2)\qquad \left|\begin{aligned} \sqrt{A} &= (1+v)^6(1-6v+16v^2-26v^3+31v^4) \\ \sqrt{B} &= (1-v)^6(1+6v+16v^2+26v^3+31v^4) \\ \sqrt{C} &= 2^6v^6(5+10v^2+v^4) \end{aligned}\right.$$

Le complexe est de degré 20. On trouve

$$(3)\qquad \left|\begin{aligned} \sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C} &= 2[1-5v^2+10v^4+310v^6+642v^8+63v^{10}] \\ \sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C} &= 2(1-v^2)^5 \\ \sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C} &= 65v^5(1+v)^5 \\ \sqrt{A}-\sqrt{B}-\sqrt{C} &= 64v^5(1-v)^5 \end{aligned}\right.$$

10. Exposé synthétique du résultat obtenu pour m quelconque.

Sans le calcul effectif de A, B, C pour $m=4, 5, 6, 7$, j'aurais été incapable de donner par induction les valeurs générales de A, B, C pour m quelconque. Les formules que je donne n'ont pas été démontrées directement, mais, comme elles répondent bien à l'alternance due à la parité de m, la vraisemblance équivaut presque à la certitude. D'ailleurs nous avons vu au n^0 4 que nous obtenons les courbes V_m successives

$$(1)\qquad \left|\begin{aligned} &t^m+C_m^4\,a\,t^{m-4}+C_m^6\,a_2\,t^{m-6}+C_m^8\,a_4\,t^{m-8} \\ &C_m^1t^{m-1}+C_m^5\,a\,t^{m-5}+C_m^7\,a_2\,t^{m-7}+C_m^9\,a_4\,t^{m-9}+\ldots \\ &C_m^2t^{m-2}+C_m^4\,t^{m-4}+C_m^6\,c_2\,t^{m-6}+C_m^8\,c_4\,t^{m-8}+- \\ &C_m^3t^{m-3}+C_m^5\,t^{m-5}+C_m^7\,c_2\,t^{m-7}+C_m^8\,c_4\,t^{m-9}+\ldots \end{aligned}\right.$$

avec les formules de récurrence, indépendantes de m,

$$(2)\qquad a_{2p+2}=a\,a_{2p} \qquad c_{2p+2}=a_{2p}+c_{2p}$$

de sorte que les coordonnées plückériennes $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ doivent pouvoir elles-aussi se calculer par récurrence; quoi qu'il en soit, je n'ai pas aperçu de méthode simple.

Je pose à priori

$$(1)\quad \left|\begin{aligned} X_m &= 2^{m-1} v^{m-2} (v-1)^{m-2} = 2\,[2\,v(v-1)]^{m-2} \\ Y_m &= 2^{m-1} v^{m-2} (v+1)^{m-2} = 2\,[2\,v(v+1)]^{m-2} \\ Z_m &= 2\,(1-v^2)^{m-2} \end{aligned}\right.$$

Le changement de v en $(-v)$ permute X_m et Y_m et laisse Z_m invariable. Remplacer v par $\frac{v+1}{1-3v}$, remplace $v+1$ par $\frac{2(1-v)}{1-3v}$ et $v-1$ par $\frac{4v}{1-3v}$, d'où les échanges

$$\begin{array}{ccc} 2\,v(v-1) & 2\,v(v+1) & 1-v^2 \\ \frac{4}{(1-3v)^2}\,.\,2\,v(v+1) & \frac{4}{(1-3v)^2}\,.\,(1-v^2) & \frac{4}{(1-3v)^2}\,.\,2\,v(v-1) \end{array}$$

ce qui prouve que le point de coordonnées homogènes (X_m, Y_m, Z_m) est remplacé par le point de coordonnées homogènes (Y_m, Z_m, X_m). Pour m impair, nous écrivons pour définir $A_{2m+1}, B_{2m+1}, C_{2m+1}$

$$(2)\quad \left|\begin{aligned} 2\sqrt{A_{2m+1}} &= Y_{2m+1} + Z_{2m+1} & X_{2m+1} &= \sqrt{B_{2m+1}} + \sqrt{C_{2m+1}} - \sqrt{A_{2m+1}} \\ 2\sqrt{B_{2m+1}} &= Z_{2m+1} + X_{2m+1} & Y_{2m+1} &= \sqrt{C_{2m+1}} + \sqrt{A_{2m+1}} - \sqrt{B_{2m+1}} \\ 2\sqrt{C_{2m+1}} &= X_{2m+1} + Y_{2m+1} & Z_{2m+1} &= \sqrt{A_{2m+1}} + \sqrt{B_{2m+1}} - \sqrt{C_{2m+1}} \end{aligned}\right.$$

et nous avons ainsi les coordonnées homogènes A_{2m+1}, B_{2m+1}, C_{2m+1} relatives à la courbe V_{2m+1}: la vérification est immédiate pour V_5 et V_7; la courbe (X_m, Y_m, Z_m) possède bien les symétries et rotations provenant des substitutions à v de $\pm v$, $\pm \frac{v+1}{1-3v}$ et $\pm \frac{v-1}{1+3v}$; donc la courbe $(A_{2m+1}, B_{2m+1}, C_{2m+1})$ les possède également. On a d'ailleurs

$$\sqrt{A_{2m+1}} + \sqrt{B_{2m+1}} + \sqrt{C_{2m+1}} = X_{2m+1} + Y_{2m+1} + Z_{2m+1}$$

de sorte que la courbe Γ_{2m+1} ne se réduit pas au cercle γ.

Pour m pair nous prenons

$$(3)\qquad \pm 2\sqrt{A_{2m}} = Z_{2m} - Y_{2m} \qquad \pm 2\sqrt{B_{2m}} = X_{2m} - Z_{2m}$$
$$\pm 2\sqrt{C_{2m}} = Y_{2m} - X_{2m}$$

et cette fois la courbe (A_{2m}, B_{2m}, C_{2m}) se réduit au cercle γ; pour les degrés 4, 6 nous trouvons bien le résultat relatif à V_4 et V_6.

On remarquera que, quelle que soit la parité de m, on peut écrire

$$(4)\quad \left|\begin{array}{l} \sqrt{A_m} = \pm (v+1)^{m-2}\,[(v-1)^{m-2} - 2^{m-1} v^{m-2}] = \pm \tfrac{1}{2}[Z_m - \\ \qquad -(-1)^m Y_m] \\ \sqrt{B_m} = \pm (v-1)^{m-2}\,[(v+1)^{m-2} - 2^{m-2} v^{m-2}] = \pm \tfrac{1}{2}[X_m - \\ \qquad -(-1)^m Z_m] \\ \sqrt{C_m} = \pm\, 2^{m-2} v^{m-2}\,[(v+1)^{m-2} - (1-v)^{m-2}] = \pm \tfrac{1}{2}[Y_m - \\ \qquad -(-1)^m X_m \end{array}\right.$$

Dans les formules (4), le second membre est calculé *sans hypothèse sur l'entier* m et la courbe Γ_m ainsi obtenue coïncide avec le cercle γ ou en diffère suivant que m est pair ou impair. Nous pouvons donc considérer comme certain que ces formules correspondent bien, quel que soit l'entier m, aux courbes V_m définies dans travail.

La courbe Γ_{2m} se réduit au cercle γ en représentation impropre, donné $4m-4$ fois; étant donné 4 génératrices quelconques d'un même système sur une quadrique, il existe $4m-4$ séries ∞^3 de courbes V_{2m} tangentes à ces 4 droites prises pour tangentes remarquables, l'invariant a différant d'une série à l'autre.

Le complexe $\mathcal{C}_{2m+1}$ relatif à une courbe V_{2m+1} est de degré $8m-4$ comme la courbe Γ_{2m+1}; cette courbe admet chaque point de contact du cercle γ avec le triangle de référence comme point multiple d'ordre $2m-1$, de classe $2m+1$; la tangente en ce point à Γ_{2m+1} coupe la courbe en $4m$ points réunis avec le point de contact et le côté du triangle donne encore $2m-2$ points de contact tous simples (et imaginaires) avec la courbe Γ_{2m+1}: on les obtient en effet par l'équation $\sqrt{C_{2m+1}}=0$, par exemple, débarrassée de la racine $v=0$, d'où l'équation binôme

$$(5)\qquad \frac{(v+1)^{2m-1}-(1-v)^{2m-1}}{2v}=0.$$

De même $\sqrt{A_{2m+1}}=0$ admet la racine $v=-1$ au degré $2m$ [et non $2m-1$ comme on pourrait le croire d'après les formules (4)].

La courbe Γ_{2m+1} a avec le cercle γ comme points communs: d'abord les points de contact avec le triangle de référence comptant chacun pour $4m-2$, et il reste $4m-2$ points tous imaginaires racines de l'équation

$$(6)\qquad [2v(v-1)]^{2m-1}+[2v(v+1)]^{2m-1}+(1-v^2)^{2m-1}=0.$$

Pour chaque racine v de cette équation, on trouve le groupe de racines associées

$$(7) \qquad \pm v, \qquad \pm \frac{v+1}{1-3v}, \qquad \pm \frac{v-1}{1-3v}$$

de sorte que si m est égal à $3p$, l'équation (6) admet $v = \pm \frac{i}{\sqrt{3}}$ comme racines doubles (points cycliques de γ); si m est égal à $3p+1$, l'équation (6) admet $v = \pm \frac{i}{\sqrt{3}}$ comme racines simples; si m est égal à $3p+2$, l'équation n'admet plus les racines $\pm \frac{i}{\sqrt{3}}$. L'équation (6) n'a que des racines imaginaires: en effet si une racine était réelle, l'une des substitutions (7) pourrait la ramener à être comprise entre 0 et 1: mais alors dans l'équation (6), le premier terme est seul négatif et a une valeur absolue inférieure à celle du second terme; donc le résultat ne peut être nul [1]).

La courbe Γ_{2m+1} perce l'axe de symétrie $A = B$ au point de coordonnées $A = B = (2^{2m-1}-1)^2$, $C = 2^{4m}$ obteuu pour $v = \infty$; ce point est extérieur au cercle γ. La discussion relative aux points doubles est assez pénible, je n'y insiste pas; ils sont probablement

---

[1]) Pour résoudre l'équation (6), on peut prendre pour inconnue auxiliaire $\rho = \left(\frac{v-v^3}{1-9v^2}\right)^2$. Mais il est plus rapide de remarquer que la courbe $[2v(v-1)$, $2v(v-1)$, $1-v^2]$ est unicursale et l'on peut écrire $\frac{2v(v-1)}{x} = \frac{2v(v+1)}{y} = \frac{1-v^2}{z}$ avec $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$; les permutations (7) reviennent à permuter x, y, z de toubes les façons possibles. Le point (x, y, z) étant connu, on a, par exemple, $\frac{v-1}{v+1} = \frac{x}{y}$. L'équation (6) s'écrit $x^{2m-1}+y^{2m-1}+z^{2m-1}=0$ et on peut supposer x, y, z racines de l'équation auxiliaire $X^3 = X^2 + p$, où p est l'unique inconnue; or la méthode des fonctions symétriques donne $Sx = 1$; $Sx^2 = 1$; $Sx^3 = 1 + 3p$; $Sx^r = Sx^{r-1} + pSx^{r-3}$; donc Sx^{2m-1} est un polynôme en p que l'on égale à zéro et ensuite x, y, z sont les racines, dans un ordre arbitraire de $X^3 - X^2 - p = 0$. Avoir supposé $Sx = 1$ est permis eu vertu de l'homogénéité et écarte automatiquement les racines $v = \pm \frac{i}{\sqrt{3}}$ qui correspondent pour (x, y, z) au point $(1, j, j^2)$. Ainsi $m = 2$ donne $p = -\frac{1}{3}$; $m = 3$ donne $p = -\frac{1}{5}$; $m = 4$ donne $3p^2 + 6p + 1 = 0$, etc.

tous imaginaires. Ce qui précède montre que la courbe ne traverse pas les côtés du triangle de référence, non plus que le cercle γ; elle se compose d'un seul ovale compris entre le cercle γ et le triangle de référence; quand m augmente indéfiniment, Γ_{2m+1} tend à se confondre de plus en plus avec le périmètre du triangle de référence. On trouve aisément l'équation irrationnelle du complexe: on a en effet

$$(8) \qquad \frac{2(v^2-v)}{\sqrt[2m-1]{X_{2m+1}}} = \frac{2(v^2+v)}{\sqrt[2m-1]{Y_{2m+1}}} = \frac{1-v^2}{\sqrt[2m-1]{Z_{2m+1}}}$$

d'où l'équation

$$(9) \qquad \frac{1}{\sqrt[2m-1]{X_{2m+1}}} + \frac{1}{\sqrt[2m-1]{Y_{2m+1}}} + \frac{1}{\sqrt[2m-1]{Z_{2m+1}}} = 0.$$

L'équation rationnelle respecte la symétrie des droites T, T_1, T_2, T_3 et, comme on a posé

$$(10) \qquad A=(01)(23) \qquad B=(02)(31) \qquad C=(03)(12)$$

cette équation rationnelle doit être de la forme

$$(11) \qquad f\left[\frac{BC+CA+AB}{(A+B+C)^2}, \quad \frac{ABC}{(A+B+C)^3}\right]=0.$$

Dans le cas présent chaque fraction

$$(12) \qquad \xi=\frac{BC+CA+AB}{(A+B+C)^2}, \qquad \eta=\frac{ABC}{(A+B+C)^3}$$

dépend rationnellement du paramètre $\left(\frac{v-v^3}{1-9v^2}\right)^2$; la courbe (ξ, η) est unicursale et de degré $(4m-2)$ seulement, tandis que Γ_{2m+1} est du degré double $8m-4$.

On pourra remarquer encore que, dans l'expression de B_m

$$\pm\sqrt{B_m}=(v-1)^{m-2}[(v+1)^{m-2}-2^{m-2}v^{m-2}]$$

l'expression $\frac{(v+1)^{m-2}-2^{m-2}v^{m-2}}{1-v}$ est un polynôme entier en v

$$P_m=1+(m-1)v+\ldots$$

dont tous les coefficients sont entiers et positifs et s'obtiennent par le tableau triangulaire

	1							
P_4	1	3						
P_5	1	4	7				α	β
P_6	1	5	11	15				γ
P_7	1	6	16	26	31			
P_8	1	7	22	42	57	63		

Sur chaque ligne le coefficient de gauche est 1; ensuite chaque terme est obtenu par le schéma $\gamma = \alpha + \beta$ mis en regard du tableau, tant que γ ne dépasse pas à droite la ligne déjà écrite au dessus; la ligne de rang $(n+1)$ compend un terme de plus que la ligne de rang (n) et ce terme est le double, plus un, du dernier terme de la ligne (n). Dans chaque ligne P_n, la somme des termes équidistants des extrêmes est constante et égale à 2^{n-2}. On a donc

$$\pm\sqrt{B_m} = (v-1)^{m-1} P_m$$

et $\pm\sqrt{A_m}$ se déduit de ce résultat en changeant v en $(-v)$. Quant à C_m, écrit sous la forme

$$\pm\sqrt{C_m} = 2^{m-1} v^{m-2} \left[\frac{(v+1)^{m-2} - (1-v)^{m-2}}{2}\right]$$

on remarque que le polynôme

$$Q_m = \frac{(1+v)^{m-2} - (1-v)^{m-2}}{2}$$

a ses coefficients entiers et positifs, égaux à ceux du binôme $(1+x)^{m-2}$, de 2 en 2; or dans la ligne P_m les différences successives des termes donnent précisément $C^1_{m-2}, C^2_{m-2}, \dots C^{m-3}_{m-2}$.

11. Autres exemples de courbes avec configurations remarquables de quatre tangentes.

Les transformées par dualité des courbes V_m déterminées ici sont de nouveaux exemples de courbes gauches unicursales avec quatre tangentes remarquables; par exemple, pour une courbe V_4, on a une développable, formée par les tangentes, de classe 6; pour un point à plan osculateur stationnaire, le plan osculateur compte pour 4 dans les 6 plans tangents à la développable, issus de ce point. Par dualité, on a donc une courbe unicursale de degré 6, ayant 4 points de rebroussement ordinaire (une courbe ordinaire gauche unicursale de degré 6 admet 12 points à plan osculateur stationnaire; ici chaque point de rebroussement absorbe 3 de ces points). La transformée par dualité de chaque courbe V_m est une courbe toujours avec 4 points de rebroussement (d'espèce de plus en plus compliquée à mesure que m augmente), avec 4 tangentes remarquables correspondantes. Toutes ces courbes dépendent de 16 paramètres métriques et introduisent les complexes transformés par dualité des complexes étudiés précédemment (pour m impair), tandis que pour m pair, on retrouve quatre droites appartenant à une même quadrique.

Pour toutes ces courbes V_m, ou pour leurs transformées par dualité on a les remarques suivantes à faire; soit le complexe $\mathcal{C}_{2m+1}$ relatif à 3 droites T_1, T_2, T_3 données; dans toute transformation homographique conservant T_1, T_2 T_3 (chacune dans son ensemble, ou les échangeant les unes avec les autres), le complexe $\mathcal{C}_{2m+1}$ se transforme en lui-même; donc bien que la transformation homographique générale de l'espace dépende de 15 paramètres, les transformés de $\mathcal{C}_{2m+1}$ ne contiennent que 12 paramètres, parce que l'on peut disposer des 15 paramètres de la façon suivante: trois pour ne pas changer le bloc T_1, T_2, T_3 et ensuite 12 pour le transformer eu un autre bloc (T'_1, T'_2, T'_3) où les nouvelles droites sont choisies arbitrairement. D'autre part $\mathcal{C}_{2m+1}$ se transforme évidemment en lui-même dans toute transformation dualistique qui conserve T_1, T_2, T_3. En effet si T est une droite du complexe $\mathcal{C}_{2m+1}$, on peut imaginer l'un des ∞^1 complexes linéaires $\mathcal{C}$ contenant T_1, T_2, T_3 et T; par dualité relativement à $\mathcal{C}$, la courbe V_{2m+1} devient une courbe W_{2m+1} à quatre rebroussements avec T, T_1, T_2, T_3 comme tangentes principales; donc si 4 droites T, T_1. T_2, T_3 sont tangentes principales d'une courbe V_{2m+1} (ou W_{2m+1}) elles sont aussi tangentes principales d'une courbe W_{2m+1} (ou V_{2m+1}): donc le complexe $\mathcal{C}_{2m+1}$ coïncide bien avec son transformé dans toute dualité qui conserve T_1, T_2, T_3, (et il y a 6 séries ∞^3 de telles dualités), en bloc.

Si nous prenons une courbe V_m, on peut obtenir encore quatre tangentes remarquables en prenant la forme hessienne de $t^4 - t^2 - a$; pour m pair, on a encore quatre génératrices d'une quadrique; pour m impair, on définit un nouveau complexe (donnant lieu aux mêmes remarques pour les homographies et dualités). Pour $m = 4$, le résultat est bien connu; car la forme hessienne donne les points où la tangente à la courbe V_4 rencontre de nouveau la courbe, de sorte que ces tangentes appartiennent à la quadrique lieu des cordes triples de la courbe.

On peut imaginer bien d'autres droites remarquables liées à la courbe: on peut prendre par exemple les points doubles des trois involutions possédées par la courbe et les tangentes correspondantes, ou les droites joignant ces points deux à deux, ou les droites d'intersection des plans osculateurs ...; on peut combiner des droites remarquables d'espèce différente; la conclusion est que quatre droites remarquables donnent lieu en général à un certain complexe.

Je prends maintenant une courbe qui dépend de moins de 16 paramètres: par exemple la courbe Γ_0 de degré 4

$$(1) \qquad x = t^4 \qquad y = t^3 \qquad z = t \qquad \theta = 1$$

admet deux points d'inflexion $t = 0$, $t = \infty$ qui absorbent chacun deux des points à plan osculateur stationnaire auxquels a droit une courbe gauche unicursale de degré 4; les quinze paramètres de la transformation homographique générale peuvent se répartir ainsi: un premier, λ, pour la transformation

$$(2) \qquad X = \lambda^4 x \qquad Y = \lambda^3 y \qquad Z = \lambda z \qquad \Theta = \theta$$

qui reproduit la courbe et quatorze qui sont les paramètres métriques dont dépendent les courbes gauches Γ unicursales d'ordre 4 à 2 inflexions. Une telle courbe semblerait donc définie par les 2 tangentes inflexionnelles (8 conditions), puis deux tangentes quelconques (6 conditions nouvelles). Le raisonnement déjà fait montre que si l'on considère trois droites fixes, dont deux sont T_1 et T_2 tangentes d'inflexion, et la troisième T_3 tangente quelconque, il y a ∞^3 courbes tangentes à T_1, T_2, T_3; Γ_0 étant l'une et R_0 la développable des tangentes à Γ_0, la développable R_0 au cours des ∞^3 homographies conservant T_1, T_2, T_3 engendre un complexe $\mathcal{C}$ dans lequel on doit choisir la quatrième tangente, pour obtenir une véritable solution.

Pour obtenir ce complexe, remarquons d'abord que, dans la transformation (2) qui ne change pas Γ, le point t est remplacé par le point $T = \lambda t$, de sorte que nous pouvons, sans restreindre, supposer que la tangente T_3 correspond à $t = 1$; quant aux tangentes inflexionnelles, elles correspondent toujours à $t = 0$ et $t = \infty$. Les coordonnées plückérieunes de la tangente t sont

(3) $\quad a = 4t^3, \; b = 3t^2, \; c = 1, \; l = -2t^3, \; m = 3t^4, \; n = -t^6$

et nous avons pour les tangentes T_1, T_2, T_3, T_4 ou $(0, \infty, 1, t)$ le tableau

$$\begin{array}{lcccccc} T_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ T_2 & 4 & 3 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ T_4 & 4t^3 & 3t^2 & 1 & -2t^3 & 3t^4 & -t^6 \end{array}$$

On calcule aussitôt

$$(4) \quad \begin{cases} (12) = 1 \quad (13) = -1 \quad (14) = -t^6 \quad (23) = 1 \quad (24) = 1 \\ (34) = -t^6 + 9t^4 - 16t^3 + 9t^2 - 1 \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} A = (14)(23) = -t^6 \qquad B = (24)(31) = -1 \\ C = (34)(12) = -t^6 + 9t^4 - 16t^3 + 9t^2 - 1 \end{cases}$$

Nous avons donc un complexe de degré 6, correspondant à la courbe unicursale γ

$$\alpha = \frac{A}{B} = t^6 \qquad \beta = \frac{A - C + B}{B} = 9t^4 - 16t^3 + 9t^2$$

Cette courbe γ a deux de rebroussement de seconde espèce $t = 0$. $t = \infty$ dont chacun est équivalent à 3 points doubles; il reste pour γ quatre points doubles imaginaires; on constate enfin que l'expression

$$A^2 + B^2 + C^2 - 2BC - 2CA - 2AB = (A + B - C)^2 - 4AB = \\ = \beta^2(\beta^2 - 4\alpha)$$

est toujours positive, car

$$\beta^2 - 4\alpha = (9t^4 - 18t^3 + 9t^2)(9t^4 - 14t^3 + 9t^2) = 9t^4(t-1)^2(9t^2 - \\ - 14t + 9).$$

De la sorte, deux tangentes quelconques réunies aux deux tangentes inflexionnelles (supposées réelles) ont toujours deux sécantes réelles et distinctes. Je ne traite pas le cas d'une courbe Γ ayant deux tangentes inflexionnelles imaginaires conjuguées.

Sur certains sous-groupes du groupe de Fredholm.

Par

J. Delsarte.

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Nancy.

Préliminaires.

Nous nous proposons dans ce mémoire d'étudier le „groupe de Fredholm". Rappelons d'abord la définition de ce groupe. Considérons pour cela l'espace fonctionnel des fonctions de carré sommable $f(s)$, où nous supposons que la variable s varie dans l'intervalle $(0,1)$. Nous appellerons transformation linéaire de Fredholm la transformation

$$g(s) = f(s) + \int_0^1 K(st) f(t)\, dt$$

que nous désignerons souvent par le symbole

$$g = K[f].$$

Nous dirons que $K(st)$ en est le noyau. Cette transformation fait correspondre à une fonction de carré sommable quelconque $f(s)$ une fonction $g(s)$ de même nature pourvu que le noyau $K(st)$ soit de carré sommable par rapport à la variable t. Nous supposerons en outre que $K(st)$ est aussi de carré sommable par rapport à la variable s de telle sorte que la transformation associée existe également.

Soient K et H deux tels noyaux. Des relations

$$g(s) = f(s) + \int_0^1 K(st) f(t)\, dt$$

$$h(s) = g(s) + \int_0^1 H(st)\, g(t)\, dt$$

on tire

$$h(s) = f(s) + \int_0^1 L(st) f(t)\, dt$$

en posant

$$L(st) = K(st) + H(st) + \int_0^1 H(su)\, K(ut)\, du.$$

Nous écrirons symboliquement

$$L = KH.$$

On voit sans peine que le noyau produit L est de carré sommable par rapport à s et t pourvu qu'il en soit ainsi de K et H. Si donc nous nous bornons à considérer les noyaux $K(st)$ vérifiant cette condition nous voyons que les transformations

$$g = K[f]$$

forment un groupe que nous appellerons le groupe de Fredholm. La théorie classique de Fredholm s'applique comme il est bien connu à ces noyaux. Il en résulte que la transformation

$$g = K[f]$$

est en général résoluble. (Il faut et il suffit pour cela que $\lambda = -1$ ne soit pas une valeur singulière pour le noyau $K(st)$)

Nous désignerons par K^{-1} la valeur prise par le noyau résolvant de $K(st)$ pour $\lambda = -1$ changée de signe. Par suite les équations

$$g = K[f]; \qquad f = K^{-1}[g]$$

sont conséquences l'une de l'autre.

Continuant une série de recherches instaurée dans notre thèse, à laquelle nous renvoyons [1]) pour la compréhension de ce qui suit, nous nous occuperons ici de l'étude de ce groupe de Fredholm et plus particulièrement de la détermination des sous-groupes de toute nature qui y sont contenus:

---

[1]) Thèse. Les rotations fonctionnelles, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. 1928.

Sous-groupes discontinus finis, continus finis et continus infinis. Nous étudierons aussi les équations intégro-différentielles et aux dérivées fonctionnelles attachées à certains de ces sous-groupes.

Dans la première partie de ce travail nous nous attachons à l'étude des groupes discontinus finis contenus dans le groupe de Fredholm.

PREMIERE PARTIE.

Les sous-groupes discontinus finis[1]).

I.

Sommaire. — Forme quadratique invariante. — Groupe de rotations fonctionnelles non-euclidiennes. — Théorème de la dilatation. — Les groupes discontinus. — Généralisations.

1-Forme quadratique invariante.

Un tel groupe discontinu d'ordre n sera formé par n transformations de Fredholm ayant pour noyaux:

$$K_1;\ K_2;\ \ldots\ldots;\ K_n.$$

Ces noyaux seront distincts et l'un d'eux correspondant à la transformation identique sera nul. De plus on aura puisqu'il y a groupe

$$K_i K_j = K_k \qquad (i; j; k = 1; 2; 3; \ldots\ldots; n)$$

Soit $f(s)$ une fonction quelconque de carré sommable, et

$$f_i(s) = K_i[f]$$

ses différentes transformées. La quantité

$$S\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\} = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 f_i^2(s)\, ds$$

considérée comme une fonctionnelle de $f(s)$ est évidemment invariée par les transformations du groupe. On a

---

[1]) Les principaux résultats contenus dans cette section out été énoncés dans une note présentée aux C-R de l'Académie des Sciences le 13—2—1928 et intitulée: note sur les transformations linéaires fonctionnelles et les rotations fonctionnelles non-euclidiennes.

$$S\{|\overset{1}{\underset{0}{f_i}}|\} = S\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\} \qquad (i = 1; 2; 3; \ldots; n)$$

Elle est de plus essentiellement positive et ne peut s'annuler que si f est une fonction presque partout nulle. On a en tenant compte de la valeur de f_i,

$$\int_0^1 f_i^2(s)\,ds = \int_0^1 f^2(s)\,ds + \int_0^1\int_0^1 \mathcal{H}_i(s\,t) f(s) f(t)\,ds\,dt,$$

où $\mathcal{H}_i(s\,t)$ est un noyau symétrique ne dépendant que de K_i, et donné par la formule

$$\mathcal{H}_i(st) = \mathcal{H}_i(ts) = R\{|K_i(st)|\} = K_i(st) + K_i(ts) + \int_0^1 K_i(us) K_i(ut)\,du,$$

de telle sorte que l'on a

$$\frac{1}{n} S\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\} = \int_0^1 f^2(s)\,ds + \int_0^1\int_0^1 \Sigma(s\,t) f(s) f(t)\,ds\,dt = F\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\}$$

avec

$$\Sigma(s\,t) = \frac{1}{n}\sum_{i1}^{n} \mathcal{H}_i(s\,t).$$

$F\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\}$ est donc une forme quadratique fonctionnelle de f, rentrant dans le type de Fredholm, elle est essentiellement positive, nulle seulement quand f l'est presque partout. De plus elle est invariée par les substitutions du groupe fini considéré.

Nous sommes donc amenés au problème préliminaire suivant:

Déterminer le sous-groupe continu infini du groupe de Fredholm qui laisse invariante une forme quadratique positive donnée. Les sous-groupes discontinus cherchés seront alors tous les groupes discontinus finis contenus dans un quelconque de ces groupes continus infinis. Remarquons que le groupe des rotations fonctionnelles étudiées par nous dans notre thêse, et défini par l'invariant positif

$$F\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\} = \int_0^1 f^2(1)\,ds$$

est un cas particulier des groupes infinis précédents. Nous donnerons, par analogie, à ces derniers le nom de groupes de rotations fonctionnelles non-euclidiennes. C'est à leur détermination que nous allons consacrer les paragraphes suivants.

II.

Dilatations fonctionnelles.

Théorème de la dilatation.

Définition. — Nous appellerons „dilatation fonctionnelle" une transformation de Fredholm dont le noyau est symétrique.

Nous aurons besoin dans la suite du théorème suivant qui généralise un fait bien connu dans les espaces à un nombre fini de dimensions:

Toute transformation de Fredholm est le produit d'une dilatation fonctionnelle et d'une rotation fonctionnelle euclidienne.

Nous avons rencontré dans la théorie des rotations fonctionnelles euclidiennes deux quantités attachées à un noyau $K(st)$ et qui jouent un rôle important: ce sont les expressions

$$R\{|K(st)|\} = K(st) + K(ts) + \int_0^1 K(us)K(ut)\,du = R(st);$$

$$S\{|K(st)|\} = K(st) + K(ts) + \int_0^1 K(su)K(tu)\,du = S(st)$$

ce sont deux noyaux symétriques qui s'annulent simultanément lorsque $K(st)$ est un noyau de rotation, ce fait caractérisant alors un tel noyau.

Ajoutons que si K et H sont deux noyaux quelconques et L le noyau produit:

$$L(st) = KH = K(st) + H(st) + \int_0^1 H(su)K(ut)\,du$$

on a

$$R[L] = K(st) + K(ts) + H(st) + H(ts) + \int_0^1 H(su)K(ut)\,du +$$

$$+ \int_0^1 H(tu)K(us)\,du$$

$$+\int_0^1 K(us)K(ut)\,du+\int_0^1 H(us)H(ut)\,du+\int_0^1 K(us)H(ut)\,du+$$

$$+\int_0^1 H(us)K(ut)\,du$$

$$+\int_0^1\int_0^1 H(uv)K(vs)K(ut)\,du\,dv+\int_0^1\int_0^1 H(uv)K(vs)H(ut)\,du\,dv$$

$$+\int_0^1\int_0^1 K(us)H(uv)K(nt)\,du\,dv+\int_0^1\int_0^1 H(us)H(uv)K(vt)\,du\,dt$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 H(uv)K(vs)H(uw)K(ut)\,du\,dv\,dw;$$

et une formule analogue pour $S[L]$. On a ensuite par quelques transformations simples:

$$R\{|L(st)|\}=R\{|K(st)|\}+R\{|H(st)|\}$$

$$+\int_0^1 R\{|H(su)|\}K(ut)\,du+\int_0^1 R\{|H(tu)|\}K(us)\,du$$

$$+\int_0^1\int_0^1 K(us)K(vt)R\{|H(uv)|\}\,du\,dv$$

et de même:

$$S\{|L(st)|\}=S\{|K(st)|\}+S\{|H(st)|\}$$

$$+\int_0^1 H(su)S\{|K(ut)|\}\,du+\int_0^1 H(ut)S\{|K(us)|\}\,du$$

$$+\int_0^1\int_0^1 H(su)H(tv)S\{|K(vu)|\}\,du\,dv$$

Nous retiendrons de ces formules les faits suivants:

Si H est un noyau de rotation fonctionnelle euclidienne on a

$$R\{|H|\}=S\{|H|\}=0$$

et par suite

$$R[L]=R[KH]=R[K]$$

quel que soit le noyau K. De même si K est un noyau de rotation fonctionnelle euclidienne, on a

$$R[K] = S[K] = 0$$

et par suite

$$S[L] = S[KH] = S[H]$$

quel que soit le noyau H. Ceci posé considérons deux noyaux distincts K et H tels que l'on ait

$$R[K] = R[H]$$

et les transformations de Fredholm correspondantes:

$$g(s) = K[f] = f(s) + \int_0^1 K(st) f(t)\, dt$$

$$k(s) = H[f] = f(s) + \int_0^1 H(st) f(t)\, dt;$$

Nous avons alors

$$\int_0^1 g^2(s)\, ds = \int_0^1 f^2(s) ds + \int_0^1 \int_0^1 R\{|K(st)|\} f(s) f(t)\, ds\, dt;$$

$$\int_0^1 k^2(s)\, ds = \int_0^1 f^2(s) ds + \int_0^1 \int_0^1 R\{|H(st)|\} f(s) f(t)\, ds\, dt;$$

et par suite

$$\int_0^1 g^2(s)\, ds = \int_0^1 k^2(s)\, ds$$

quel que soit $f(s)$. Or si par exemple K est un noyau résoluble on a

$$f = K^{-1}[g]$$

puis

$$k = H[f] = L[g]$$

en posant

$$L = K^{-1} H$$

La fonction g peut alors être considérée comme arbitraire et la relation

$$\int_0^1 k^2(s)\,ds = \int_0^1 g^2(s)\,ds$$

ayant lieu quel que soit g nous voyons que L doit être un noyau de rotation euclidienne. Par suite on a alors

$$H = KL$$

L étant de rotation. De même L étant toujours résoluble, on a aussi

$$K = HL^{-1} = HL'$$

où L' est de rotation. De plus H est alors aussi résoluble.

Nous désignerons par $\overline{K}$ le noyau associé de K:

$$\overline{K}(s\,t) = K(t\,s)$$

et nous remarquerons que

$$S[\overline{K}] = R[K]$$

et de plus que si

$$L = KH$$

on a

$$\overline{L} = \overline{H}\,\overline{K}$$

comme le montrent immédiatement les formules de composition.

Dans ces conditions si K et H sont tels que

$$S[K] = S[H]$$

$\overline{K}$ et $\overline{H}$ sont tels que

$$R[\overline{K}] = R[\overline{H}]$$

Si donc K et par suite $\overline{K}$ sont résolubles, on a, d'aprés ce qui précéde

$$\overline{H} = \overline{K}L$$

où L est de rotation, et par suite

$$H = \overline{L}K = L'K$$

où L' est de rotatation comme son associé L.

Toutes ces remarques étant faites nous allons montrer que K étant donné, quelconque et résoluble, on peut toujours trouver deux noyaux symétriques et résolubles σ et ς, tels que

$$R[\sigma] = R[K]; \quad S[\varsigma] = S[K]$$

Considérons par exemple

$$R[K] = \Sigma(s\,t)$$

C'est un noyau symétrique, il est de plus tel que la forme quadratique fonctionnelle

$$F\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\} = \int_0^1 f^2(s)\,ds + \int_0^1\int_0^1 \Sigma(s\,t) f(s) f(t)\,ds\,dt$$

soit essentiellement positive, (toujours positive et jamais nulle). On a en effet

$$F\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\} = \int_0^1 f^2(s)\,ds + \int_0^1\int_0^1 R\{|K(s\,t)\} f(s) f(t)\,ds\,dt$$

$$= \int_0^1 \left[f(s) + \int_0^1 K(s\,t)(t)\,dt \right]^2 ds$$

égalité qui prouve notre assertion; $[K(s\,t)$ étant résoluble, la fonction

$$f(s) + \int_0^1 K(s\,t) f(t)\,dt$$

ne peut être presque partout nulle que s'il en est ainsi pour $f(s)$;]

Ceci étant, désignant par ϕ une fondamentale du noyau symétrique Σ, et par ρ la valeur singulière correspondante, telle que

$$\phi(s) = \rho \int_0^1 \Sigma(s\,t)\phi(t)\,dt$$

on a

$$F\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\} = \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) . \int_0^1 \phi^2(s)\,ds,$$

et la condition

$$F\{|\overset{1}{\underset{0}{\phi}}|\} > 0$$

entraîne

$$1 + \frac{1}{\rho} > 0$$

et donc

$$\rho > 0 \quad \text{ou} \quad \rho > -1$$

Les valeurs singulières de Σ sont donc extérieures à l'intervalle (0; — 1). En particulier aucune n'est égale à — 1; et Σ est résoluble.

Passons maintenant à la recherche de σ. On a

$$R[\sigma] = 2\,\sigma(s\,t) + \sigma^2(s\,t) = S[\sigma]$$

puisque σ est symétrique. Remarquons que nous avons là le noyau de la dilatation carrée de σ.

Nous avons donc à résoudre l'équation fonctionnelle

$$2\,\sigma(s\,t) + \sigma^2(s\,t) = \Sigma(s\,t)$$

ou encore à chercher le noyau de la dilatation racine carrée de celle de noyau $\Sigma(st)$.

1). Toute fondamentale ϕ de $\sigma(st)$ est fondamentale pour $\Sigma(st)$.

Soit $\phi(st)$ cette fondamentale, et ρ la valeur singulière correspondante, telle que

$$\phi(s) = \rho \int_0^1 \sigma(st)\,\phi(t)\,dt$$

Calculons

$$\int_0^1 \Sigma(st)\,\phi(t)\,dt = 2\int_0^1 \sigma(st)\,\phi(t)\,dt + \int_0^1 \sigma^{(2)}(st)\,\phi(t)\,dt = \left(\frac{2}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\right)\phi(s)$$

égalité qui démontre notre assertion. De plus les valeurs singulières μ et ρ de Σ et de σ, correspondant à la même fondamentale $\phi(s)$ sont liées par la relation

$$\frac{1}{\mu} = \frac{2}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} = \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)^2 - 1$$

d'où on tire

$$\frac{1}{\rho} = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{\mu}}$$

ρ est certainement réel puisque μ est extérieur à l'intervalle (0; — 1).

De plus μ étant différent de -1, il en est de même de ρ; donc σ s'il existe est résoluble.

2). **Toute fondamentale de Σ est fondamentale pour σ.**

Soit ϕ une fondamentale pour Σ, μ la valeur singulière correspondante telle que

$$\phi(s) = \mu \int_0^1 \Sigma(st)\phi(t)\,dt,$$

posant

$$\psi(s) = \int_0^1 \sigma(st)\phi(t)\,dt$$

à cause de la valeur de Σ, on a

$$\frac{1}{\mu}\phi(s) = \int_0^1 \Sigma(st)\phi(t)\,dt = 2\,\psi(s) + \int_0^1 \sigma(st)\psi(t)\,dt$$

La fonction $\psi(s)$ est donc solution de l'équation de Fredholm

$$\psi(s) = \frac{1}{2\,\mu}\phi(s) - \frac{1}{2}\int_0^1 \sigma(st)\psi(s)\,dt$$

équation qui est résoluble et a une solution unique si $\frac{-1}{2}$ n'est pas une valeur singulière pour le noyau. Or c'est bien le cas car si on fait $\rho = -\frac{1}{2}$ dans la relation

$$\frac{1}{\mu} = \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)^2 - 1$$

qui lie deux valeurs singulières correspondantes ρ et μ de σ et Σ, on trouve

$$\frac{1}{\mu} = 0$$

ce qui est impossible.

D'autre part ϕ étant une fondamentale de Σ, c'est d'aprés ce qui précéde une fondamentale de σ, ou une fonction orthogonale à toutes les fondamentales de σ (puisque deux fondamentales distinctes d'un noyau symétrique sont orthogonales). Dans le premier cas $\psi(s)$ est de la forme $\frac{1}{\rho}\phi(s)$ et dans le second $\psi(s)$ est nulle d'aprés une propriété classique des noyaux symétriques. Or cette seconde hypothèse est incompatible avec l'équation de Fredholm vérifiée par $\psi(s)$; on a donc forcément

$$\psi(s)=\frac{1}{\rho}\phi(s)$$

Il y a donc en définitive identité entre les fondamentales de Σ et de σ. Soient alors

$$\phi_1 ; \phi_2 ; \ldots\ldots ; \phi_n ; \ldots$$

le système orthogonal et normal formé par ces fondamentales.

$$\mu_1 ; \mu_2 ; \ldots\ldots ; \mu_n ; \ldots$$

les valeurs singulières correspondantes pour Σ.

$\Sigma(st)$ admet le développement de Fourier convergeant en moyenne

$$\Sigma(st) \sim \sum_{i\ 1}^{\infty} \frac{\phi_i(s)\,\phi_i(t)}{\mu_i}$$

et la série

$$\sum_i \frac{1}{\mu_i^2}$$

converge.

De même si

$$\rho_1 ; \rho_2 ; \ldots\ldots ; \rho_n ; \ldots$$

sont les valeurs singulières correspondantes pour σ, liées aux μ par les formules

$$\frac{1}{\rho_i}=-1\pm\sqrt{1+\frac{1}{\mu_i}}$$

$\sigma(st)$ sera donnée par le développement de Fourier convergeant en moyenne

$$\sigma(st) \sim \sum_{i\ 1}^{\infty} \frac{\phi_i(s)\,\phi_i(t)}{\rho_i}$$

pourvu que la série

$$\sum_i \frac{1}{\rho_i^2}$$

converge. Or la série

$$\sum_i \left[-1+\sqrt{1+\frac{1}{\mu_i}}\right]^2$$

converge évidemment en même temps que

$$\sum_i \frac{1}{\rho_i^2}$$

et

$$\sum_i \left[-1-\sqrt{1+\frac{1}{\mu_i}}\right]^2$$

est évidemment divergente. Il suffit donc pour que $\sum_i \frac{1}{\rho_i^2}$ converge de prendre pour un nombre *fini* d'indices le signe — devant le radical, et pour les autres le signe $+$. Nous voyons donc qu'il y a une infinité *dénombrable* de solutions et de noyaux σ tels que

$$R[\sigma] = \Sigma$$

qui sont donnés par les développements de Fourier précédents.

Une analyse toute semblable s'applique à la recherche des noyaux ς tels que

$$S[\sigma] = S[K] = \Theta(st)$$

Connaissant ensuite les noyaux résolubles σ et ς nous avons vu plus haut que l'on avait

$$K = \sigma r = r' \sigma$$

où r et r' sont des noyaux de rotations euclidiennes.

Nous voyons donc qu'un noyau résoluble quelconque se met d'une double infinité (dénombrable) de manières sous la forme d'un produit d'une dilatation et d'une rotation euclidienne.

On peut encore préciser ce résultat. Nous aurons besoin pour cela de quelques définitions.

Nous appellerons transformé d'un noyau H par un noyau K le produit symbolique

$$K^{-1} H K$$

dont la valeur est, d'après la formule de composition:

$$\dot{H}(st) = H(st) + \int_0^1 K(su)\,H(ut)\,du + \int_0^1 H(su)\,K^{-1}(ut)\,du$$

$$+ \int_0^1\int_0^1 K(su)\,H(uv)\,K^{-1}(vt)\,du\,dv\,;$$

Dans le cas où $K(st)$ est un noyau de rotation euclidienne, on a:

$$K^{-1}(st) = K(ts)$$

et par suite

$$\dot{H}(st) = H(st) + \int_0^1 K(su)\,H(ut)\,du + \int_0^1 H(su)\,K(tu)\,du$$

$$+ \int_0^1\int_0^1 K(su)\,H(uv)\,K(tv)\,du\,dv\,;$$

Si de plus $H(st)$ est symétrique on a

$$\dot{H}(ts) = H(ts) + \int_0^1 K(tu)\,H(us)\,du + \int_0^1 H(tu)\,K(su)\,du$$

$$+ \int_0^1\int_0^1 K(tu)\,H(uv)\,K(sv)\,du\,dv$$

$$= H(st) + \int_0^1 K(su)\,H(ut)\,du + \int_0^1 H(su)\,K(tu)\,du$$

$$+ \int_0^1\int_0^1 K(su)\,H(uv)\,K(tv)\,du\,dv = \dot{H}(st)\,.$$

Ce qui montre que le transformé d'un noyau symétrique par un noyau de rotation est encore symétrique.

Remarquons encore que d'une manière générale, si on désigne par $\dot{H}$ le transformé de H par K: et si on désigne par ϕ une fondamentale de H et par ρ la valeur singulière correspondante, on a:

$$H[\phi] = \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \cdot \phi$$

puis

$$\dot{H}\{K[\phi]\} = K|H\{K^{-1}[K[\phi]]\}| = \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) K[\phi]$$

qui montre que $K[\phi]$ est une fondamentale de $\dot{H}$ avec la valeur singulière ρ. Inversement d'ailleurs, comme

$$H = K \dot{H} K^{-1}$$

est transformé de $\dot{H}$ par le noyau K^{-1}; si ψ est une fondamentale de $\dot{H}$ et ρ la valeur singulière correspondante, $K^{-1}[\psi]$ est une fondamentale pour H avec la même valeur singulière.

(Remarque. Dans tout ceci K est naturellement supposé résoluble de telle sorte que $K[\phi]$ et $K^{-1}[\psi]$ ne soient pas nulles partout, sauf le cas où il en est ainsi de ϕ et ψ).

On vérifie d'ailleurs sans peine que H et $\dot{H}$ ont mêmes traces et partant même déterminante fondamentale. Par exemple soit A_1 la première trace de H et $\dot{A}_1$ celle de $\dot{H}$; on a

$$\dot{A}_1 = A_1 + \int_0^1 \int_0^1 \left[K(su) + K^{-1}(su) + \right.$$
$$\left. + \int_0^1 K^{-1}(sv) K(vu)\, dv \right] H(us)\, du\, ds = A_1$$

ceci à cause de la relation

$$K K^{-1} = 0$$

qui exprime que K^{-1} est l'inverse de K.

Ceci posé revenons aux équations

$$K = \sigma r = r' \varsigma$$

où σ et ς sont symétriques et où r et r' sont des noyaux de rotations. Considérons le noyau

$$\sigma_1 = r^{-1} \sigma r$$

symétrique d'aprés ce qui précède. Il a mêmes valeurs singulières que σ et ses fonctions fondamentales forment un système orthogonal qu'on obtient en appliquant la rotation de noyau r au système orthogonal formé par les fondamentales de σ. De plus on a évidemment.

$$K = \sigma r = r\sigma_1 = r'\varsigma$$

et

$$S[K] = S[r\sigma_1] = S[\sigma_1] = S[\varsigma]$$

donc σ_1 est solution de l'équation

$$S[\varsigma] = S[K]$$

De plus les fonctions fondamentales de $S[\varsigma] = \Theta(st)$ sont les mêmes que celles de σ_1 et de ς, et les valeurs singulières μ de Θ liées aux valeurs singulières correspondantes ρ de ς et de σ_1, par les formules:

$$\frac{1}{\mu} + 1 = \left(\frac{1}{\rho} + 1\right)^2$$

sont les mêmes que celles du noyau

$$\Sigma(st) = R[K]$$

car ces dernières μ' sont liées à celles ρ' correspondantes de σ par les formules

$$\frac{1}{\mu'} + 1 = \left(\frac{1}{\rho'} + 1\right)^2$$

et nous avons vu que σ et σ_1 avaient les mêmes valeurs singulières

$$\rho = \rho'$$

(Remarquons qu'à la valeur singulière μ de Σ et de Θ correspond la même valeur singulière ρ pour σ et σ_1: à savoir l'une des racines de

$$\frac{1}{\mu} + 1 = \left(\frac{1}{\rho} + 1\right)^2$$

mais que la valeur singulière correspondante de ς pourra être l'autre racine de cette équation. C'est pour cela que σ et σ_1 sont deux noyaux différents. Mais ils ont un nombre *infini* de noyaux canoniques communs et ne diffèrent que par un nombre *fini* de noyaux canoniques).

Nous voyons donc qu'en résumé:

Quelque soit le noyau résoluble K, les deux noyaux symétriques

$$R[K] = \Sigma(st); \quad S[K] = \Theta(st)$$

ont les mêmes valeurs singulières. Les fonctions fondamentales correspondantes forment deux systèmes orthogonaux semblablement ordonnés; c'est à dire que l'on peut passer de l'un à l'autre par une rotation fonctionnelle euclidienne, la correspondance biunivoque ainsi réalisée étant de plus telle que deux fonctions se correspondant aient les mêmes valeurs singulières dans Σ et dans Θ. Le noyau K peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme du produit d'une rotation euclidienne et d'une dilatation

$$K = \sigma r = r' \varsigma$$

Parmi ces formes de K il faut remarquer les formes en correspondance

$$K = \sigma r = r \sigma_1$$

où figure la même rotation de noyau r; σ_1 est alors le transformé de σ par r, et la rotation r est l'une de celles faisant passer du système des fonctions fondamentales de σ_1, (ou de ς, ou de Θ) à celles de σ, (ou de Σ).

Ajoutons enfin que les deux formes quadratiques

$$\int_0^1 f^2(s)\,ds + \int_0^1\int_0^1 \Sigma(st) f(s) f(t)\,ds\,dt$$

et

$$\int_0^1 f^2(s)\,ds + \int_0^1\int_0^1 \Theta(st) f(s) f(t)\,ds\,dt$$

sont définies, et que par suite les valeurs singulières de Σ, (et de Θ) sont extérieures à l'intervalle (0; — 1).

III.

Groupe de rotations fonctionnelles non euclidiennes.

Il est maintenant bien aisé, en se servant des résultats du paragraphe précédent, de déterminer le grouve continu infini des rotations non euclidiennes invariant la forme quadratique définie donnée

$$F\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\} = \int_0^1 f^2(s)\,ds + \int_0^1\int_0^1 S(st) f(s) f(t)\,ds\,dt\,;$$

Cette forme étant définie, les valeurs singulières du noyau S sont extérieures à l'intervalle $(0; -1)$; et on peut par suite trouver un noyau K tel que

$$R[K] = S.$$

Il suffira par exemple de résoudre comme nous l'avons indiqué l'équation

$$R[\sigma] = S$$

et de prendre ensuite

$$K = \sigma r$$

où r est un noyau de rotation quelconque et σ un noyau symétrique. Remarquons qu'on a

$$\sigma^2 = S$$

et par suite

$$F\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\} = \int_0^1 \left[f(s) + \int_0^1 K(st) f(t)\, dt \right]^2 ds.$$

Soit alors

$$g = k[f] = f(s) + \int_0^1 k(st) f(t)\, dt$$

une transformation quelconque du groupe cherché; on a par hypothèse

$$F\{|\overset{1}{\underset{0}{g}}|\} = F\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\}$$

ou encore

$$\int_0^1 \{K[g]\}^2 ds = \int_0^1 \{K[f]\}^2 ds$$

posant alors

$$f_1 = K[f]; \qquad g_1 = K[g]$$

puis

$$\dot{k} = K^{-1} k K$$

on a évidemment

$$g_1 = \dot{k}[f_1]$$

et la transformation de noyau $\dot{k}$, transformée ou noyau k par K, invarie la distance euclidienne

$$\int_0^1 f_1^2(s)\,ds$$

c'est donc une rotation euclidienne.

Nous voyons donc par suite que la forme des noyaux de rotations non euclidiennes attachés au noyau symétrique $S(st)$ est

$$k = K \rho K^{-1}$$

où ρ est un noyau de rotation euclidienne, et où le noyau K est tel que

$$R[K] = S.$$

Tenant compte de

$$K = \sigma r; \qquad K^{-1} = r^{-1} \sigma^{-1}$$

on a

$$k = \sigma r \rho r^{-1} \sigma^{-1}$$

et comme

$$r \rho r^{-1}$$

est encore une rotation euclidienne nous voyons que:

Le groupe infini de rotations non euclidiennes attachées au noyau symétrique S est le transformé du groupe des rotations euclidiennes par tout noyau K^{-1} *tel que*

$$R[K] = S$$

et plus particulièrement par un quelconque des noyaux symétriques σ^{-1} *tels que*

$$\sigma^2 = S$$

noyaux que nous avons appris à former.

IV.

Formation des groupes discontinus.

La détermination des groupes discontinus contenus dans le groupe de Fredholm est maintenant tout à fait immédiate. Soit un tel groupe, d'ordre n, formé de transformations ayant pour noyaux

$$K_1;\ K_2; \ldots;\ K_n.$$

Nous avons vu que toutes ces transformations laissaient invariante une certaine forme quadratique définie

$$\int_0^1 f^2(s)\,ds + \int_0^1\!\!\int_0^1 S(st)\,f(s)\,f(t)\,ds\,dt.$$

Elles font donc partie du groupe des rotations non euclidiennes attachées au noyau S, et par suite sont de la forme

$$K_i = \sigma\, k_i\, \sigma^{-1}$$

où σ est un noyau symétrique déterminé, et où k_i est une rotation euclidienne.

Le groupe considéré est donc le transformé, par le noyau σ^{-1}, d'un groupe fini de rotations euclidiennes. J'ai montré dans ma thèse, et dans un mémoire à paraître [1]), que ces groupes étaient isomorphes aux groupes des polyèdres réguliers des espaces euclidiens à n dimensions, n étant aussi grand que l'on veut. On sait depuis longtemps que ces groupes sont mériédriquement isomorphes à ceux des polyèdres à trois dimensions [2]). On a donc le résultat suivant:

Les groupes finis contenus dans le groupe de F r e d h o l m *sont isomorphes aux groupes finis de rotations fonctionnelles; partant ils sont isomorphes aux groupes des polyèdres réguliers des espaces à n dimensions, et donc aux cinq groupes polyédraux classiques.*

V.

Retour sur le groupe des rotations non-euclidiennes. Généralisation de la théorie.

Nous consacrerons ce paragraphe à quelques propriétés du groupe infini continu de rotations fonctionnelles non-euclidiennes rencontré plus haut. Nous avons vu que ce groupe était constitué

---

[1]) *Sur les groupes finis de rotations fonctionnelles.* Rendiconti del circolo matematico di Palermo. 1929.

[2]) Je ne connais pas de démonstrations générales de ce résultat. Cependant il est démontré pour l'espace à quatre dimensions, ce qui donne les six polyèdres de S t r e n g h a m. On sait d'autre part que les seuls polyèdres des espaces à plus de quatre dimensions sont le tétraèdre, le cube, et l'octaèdre généralisés. Le résultat en question apparait donc comme trés probable.

de transformations ayant pour noyaux

$$H = \sigma r \sigma^{-1}$$

où r est un noyau de rotation fonctionnelle euclidienne et où σ est un noyau symétrique tel que

$$\sigma^2 = S.$$

Les transformations du groupe laissent alors invariante la forme quadratique

$$F\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\} = \int_0^1 f^2(s)\,ds + \int_0^1\int_0^1 S(st)\,f(s)\,f(t)\,ds\,dt.$$

L'associé $\overline{H}$ de H est évidemment

$$\overline{H} = \overline{\sigma^{-1}}\,\overline{r}\,\overline{\sigma} = \sigma^{-1}\,\overline{r}\,\sigma$$

puisque σ est symétrique. L'inverse de $\overline{H}$ est par suite

$$\overline{H}^{-1} = \sigma^{-1}\,\overline{r}^{-1}\,\sigma.$$

Mais r étant de rotation on a

$$\overline{r} = r^{-1}$$

et

$$\overline{r}^{-1} = r$$

donc

$$\overline{H}^{-1} = \sigma^{-1}\,r\,\sigma = \sigma^{-2}\,\sigma\,r\,\sigma^{-1}\,\sigma^{-2} = S^{-1}\,H\,S.$$

Nous voyons par suite que l'inverse de l'associé de H est le transformé de H par le noyau S. Cette propriété généralise celle des noyaux euclidiens qui sont tels que l'inverse de leur associé soit le noyau lui-même.

Remarquons d'autre part que les conditions vérifiées par un noyau de rotation euclidienne

$$R[r] = 0 \qquad 'S[r] = 0$$

peuvent s'écrire

$$\overline{r}\,r = 0 \qquad r\,\overline{r} = 0.$$

Elles expriment justement le fait précédent.

Nous sommes donc amenés à considérer les opérateurs

$$R_S[H] = S^{-1}\,H\,S\,\overline{H}; \qquad 'S_S[H] = \overline{H}\,S^{-1}\,H\,S$$

Les équations
$$R_S[H]=0; \qquad {}^{c}S_S[H]=0$$
sont vérifiées par tout noyau de rotation fonctionnelle non euclidienne relativement au noyau S; elles sont alors équivalentes. Développées elles s'écrivent

$$R_S[H]=H(st)+H(ts)+\int_0^1 H(us)\,H(ut)\,du+\int_0^1 S(us)\,H(ut)\,du$$
$$+\int_0^1 H(su)\,s^{-1}(tu)\,du+\int_0^1\int_0^1 S(su)\,H(uv)\,S^{-1}(vt)\,du\,dv$$
$$+\int_0^1\int_0^1 H(us)\,S(uv)\,H(vt)\,du\,dv+\int_0^1\int_0^1 H(us)\,H(uv)\,S^{-1}(vt)\,du\,da$$
$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 H(us)\,S(uv)\,H(vw)\,S^{-1}(wt)\,du\,dv\,dw=0$$

et de même pour ${}^{c}S_S[H]$.

On les obtiendrait directement en écrivant l'invariance de $F\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\}$. De plus on a évidemment
$$R_S[HK]=S^{-1}HKS\overline{K}\overline{H}=S^{-1}HS\,.\,\{R_S[K]\}\,.\,\overline{H}$$
et
$${}^{c}S[HK]=\overline{K}\,\overline{H}S^{-1}HKS=\overline{K}\,.\,\{{}^{c}S_S[H]\}\,.\,S^{-1}KS$$
de sorte que si
$$R_S[K]=0$$
on a
$$R_S[HK]=R_S[H]$$
et si
$${}^{c}S_S[H]=0$$
on a
$${}^{c}S_S[HK]={}^{c}S_S[K].$$

On est alors conduit à rechercher pour tout noyau résoluble une décomposition analogue à celle trouvée plus haut en une dilatation et une rotation euclidienne.

Nous nous sommes servis pour cela de l'identité

$$\int_0^1 g^2(s)\,ds = \int_0^1 f^2(s)\,ds + \int_0^1\int_0^1 R\{|K(st)|\} f(s) f(t)\,ds\,dt$$

vérifiée quand

$$g = K[f].$$

Ici posons

$$F_S\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\} = \int_0^1 f^2(s)\,ds + \int_0^1\int_0^1 S(st) f(s) f(t)\,ds\,dt$$

et introduisons la notation

$$[\alpha\,.\,\beta] = \int_0^1 \alpha(s)\beta(s)\,ds.$$

Alors

$$F_S\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\} = [f\,.\,S[f]].$$

Nous nous appuierons sur l'identité

$$[f\,.\,\overline{K}[g]] = [K[f]\,.\,g]$$

qui est immédiate. Dés lors posant pour K quelconque résoluble

$$g = K[f]$$

on a

$$F_S\{|\overset{1}{\underset{0}{g}}|\} = [g\,.\,S[g]] = [S[g]\,.\,K[f]] = [f\,.\,\overline{K}\{S[g]\}] = [f\,.\,(KS\overline{K})[f]]$$

en remplacant g par sa valeur. Soient donc deux noyaux H et K tels que

$$R_S[H] = R_S[K]$$

donc tels que

$$S^{-1} H S \overline{H} = S^{-1} K S \overline{K}$$

par suite on a

$$H S \overline{H} = K S \overline{K}$$

et si

$$g = K[f]; \qquad k = H[f]$$

nous voyons que

$$F_S\{|\overset{1}{\underset{0}{g}}|\} = F_S\{|\overset{1}{\underset{0}{k}}|\}$$

quelque soit $f(s)$. Le raisonnement s'achève ensuite sans peine. Supposant K résoluble on a

$$f = K^{-1}[g]$$
$$k = H[f] = L[g]$$

avec

$$L = K^{-1} H$$

la fonction g peut alors être considérée comme arbitraire et la relation

$$F_S\{|\overset{1}{\underset{0}{k}}|\} = F_S\{|\overset{1}{\underset{0}{g}}|\}$$

ayant lieu quel que soit g, le noyau L est un noyau de rotation non euclidienne relativement à S:

$$L = \sigma r \sigma^{-1}$$

où r est de rotation euclidienne, et par suite

$$H = K \sigma r \sigma^{-1}$$

et de même

$$K = H \sigma \bar{r} \sigma^{-1}$$

H et K sont résolubles.

Nous voyons donc que si

$$R_S[K] = R_S[H]$$

on a, K étant résoluble: $H = K \sigma r \sigma^{-1}$.

De plus en remarquant que

$$'S_S[K] = \bar{K} S^{-1} K S = S^{-1} S \bar{K} S^{-1} S S^{-1} K S$$
$$= S^{-1}(S \bar{K} S^{-1}) S \overline{(S \bar{K} S^{-1})}$$
$$= R_S[S K S^{-1}]$$

nous voyons que si K et H sont tels que

$$'S_S[K] = 'S_S[H]$$

en supposant K résoluble on a

$$S \bar{K} S^{-1} = S \bar{H} S^{-1} \sigma r \sigma$$

d'où en tenant compte de

$$\sigma^2 = S$$

et simplifiant

$$\overline{K} = \overline{H}\,\sigma^{-1} r\,\sigma$$

puis

$$K = \sigma\,\bar{r}\,\sigma^{-1} H$$

et

$$H = \sigma\, r\,\sigma^{-1} K$$

donc H est aussi résoluble.

Qu'est-ce-qui va jouer maintenant le rôle de dilatation fonctionnelle non euclidienne?

Les noyaux symétriques sont comme nous l'avons vu caractérisés par le fait que leur transformé par un noyau de rotation euclidienne est encore symétrique.

Si nous prenons ici les noyaux

$$\Sigma = \sigma\varsigma\sigma^{-1}$$

où ς est symétrique, le transformé de Σ par la rotation non euclidienne

$$\sigma\, r\,\sigma^{-1}$$

est

$$\sigma r^{-1}\sigma^{-1}\sigma\varsigma\sigma^{-1}\sigma r\sigma^{-1} = \sigma r^{-1}\varsigma r\sigma^{-1} = \sigma\varsigma'\sigma^{-1} = \Sigma'$$

où ς' est symétrique; il est donc du même type que Σ. Il est à remarquer que, de plus, pour de tels noyaux Σ on a

$$R_S[\Sigma] = S_S[\Sigma] = \sigma^{-1}\varsigma^2\sigma$$

de la même manière que pour les noyaux symétriques ς on a

$$R[\varsigma] = S[\varsigma] = \sigma^2.$$

Enfin tout noyau K peut se mettre sous l'une des formes:

$$K = \Sigma\sigma r\sigma^{-1} = \sigma\varsigma\sigma^{-1}\sigma r\sigma^{-1} = \sigma\varsigma r\sigma^{-1}$$

où

$$K = \sigma r'\sigma^{-1}\Sigma' = \sigma r'\sigma^{-1}\sigma\varsigma'\sigma^{-1} = \sigma r'\varsigma'\sigma^{-1}.$$

Il suffit en effet de mettre $\sigma^{-1}K\sigma$ sous la forme ςr ou sous la forme $r'\varsigma'$, ce qui est possible pourvu que $\sigma^{-1}K\sigma$, c'est à dire K, soit résoluble. L'analogie est donc complète et il est naturel de prendre comme noyau de dilatation fonctionnelle non euclidienne les noyaux de la forme

$$\Sigma = \sigma\varsigma\sigma^{-1}$$

ajoutons encore que parmi les différentes formes d'un noyau résoluble K

$$K = \Sigma \sigma r \sigma^{-1} = \sigma r' \sigma^{-1} \Sigma'$$

il faut retenir les formes en correspondance

$$K = \Sigma \sigma r \sigma^{-1} = \sigma r \sigma^{-1} \Sigma_1$$

où figure le même noyau de rotation non euclidienne

$$\sigma r \sigma^{-1}.$$

Σ_1 est le transformé du noyau de dilatation non euclidienne Σ par le noyau de rotation non euclidienne $\sigma r \sigma^{-1}$, c'est aussi le transformé par le noyau symétrique σ^{-1} du noyau symétrique

$$\varsigma_1 = r^{-1} \varsigma r$$

si

$$\Sigma = \sigma \varsigma \sigma^{-1}.$$

Par suite ς et ς_1, donc Σ et Σ_1 ont mêmes valeurs fondamentales, et si l'on applique la dilatation euclidienne de noyau σ au système des fonctions caractéristiques de Σ et de Σ_1 on obtient deux systèmes orthogonaux semblablement ordonnés se déduisant l'un de l'autre par la rotation euclidienne de noyau r.

Tenant compte de ces deux formes particulières d'un noyau quelconque K on voit que l'on a

$$R_S[K] = R_S[\Sigma] = \sigma^{-1} \varsigma^2 \sigma$$

et

$$'S_S[K] = {}'S_S[\Sigma_1] = \sigma^{-1} \varsigma_1^2 \sigma.$$

Par suite, quelque soit le noyau K, les deux noyaux $R_S[K]$ et $'S[K]$ ont les mêmes valeurs singulières extérieures à l'intervalle $(0; -1)$; (Comme celles des noyaux ς^2 et ς_1^2). De plus si l'on applique la dilatation fonctionnelle de noyau σ^{-1} aux fonctions fondamentales de ces deux noyaux on obtient deux systèmes orthogonaux semblablement ordonnés, la correspondance biunivoque ainsi réalisée entre les fonctions des deux systèmes étant telle que deux fonctions se correspondant aient les mêmes valeurs singulières dans les deux noyaux.

Notons encore un fait utile: nous avons vu que tout noyau de rotation fonctionnelle euclidienne est la valeur prise pour $\lambda = \frac{1}{2}$ par le noyau résolvant $\Gamma(st;\lambda)$ d'un noyau symétrique gauche $h(st)$. Quelle est la propriété correspondante dans la théorie actuelle?

Remarquons d'abord que l'inverse du transformé du noyau K par le noyau σ est le transformé par σ de l'inverse K^{-1} de K et en second lieu que le transformé par σ du produit par une constante ρ du noyau K est le produit par la même constante ρ du transformé de K par σ. Ceci résulte immédiatement de la formule qui donne le transformé de K par σ.

Ceci posé de noyau résolvant $\gamma(st;\lambda)$ d'un noyau de rotation euclidienne r, est égal pour $\lambda = -\frac{1}{2}$ à un noyau symétrique gauche $h(st)$. Donc le noyau symétrique gauche $-\frac{1}{2}h(st)$ est l'inverse du noyau $\frac{-r}{2}$, par suite le noyau $\sigma\cdot\left[\frac{-h}{2}\right]\cdot\sigma^{-1}$ est l'inverse du noyau $\sigma\cdot\left[\frac{-r}{2}\right]\cdot\sigma^{-1}$ ou encore le noyau $-\frac{1}{2}(\sigma r \sigma^{-1})$ a pour inverse $-\frac{1}{2}(\sigma h \sigma^{-1})$, ce qu'on peut également exprimer en disant que la valeur prise par le noyau résolvant du noyau de rotation non euclidienne $\sigma r \sigma^{-1}$ pour $\lambda = -\frac{1}{2}$ est le transformé du noyau symétrique gauche $h(st)$ par le noyau σ^{-1}. Donc

Tout noyau de rotation fonctionnelle non euclidienne relativement au noyau symétrique S est la valeur prise pour $\lambda = \frac{1}{2}$ par le noyau résolvant du transformé d'un noyau symétrique gauche quelconque par le noyau symétrique σ^{-1} avec la condition

$$\sigma^2 = S.$$

Nous avons enfin remarqué que le noyau d'une rotation fonctionnelle infinitésimale était symétrique gauche; cherchons encore la propriété correspondante. Partons pour cela de la condition suivante pour que K soit de rotation fonctionnelle non euclidienne relativement à S

$$S^{-1} K S \overline{K} = 0$$

elle s'écrit encore

$$K S \overline{K} = S$$

ou bien en employant la notation

$$(\alpha\cdot\beta) = \int_0^1 \alpha(su)\beta(ut)\,du;$$

$$K + \overline{K} + (K\,.\,\overline{K}) + (K\,.\,S) + (S\,.\,\overline{K}) + ((K\,.\,S)\,.\,\overline{K}) = 0.$$

Introduisons maintenant l'hypothèse que K est infiniment petit du premier ordre; il vient

$$K+\overline{K}+(K.S)+(S.\overline{K})=0$$

qui peut s'exprimer encore, en remarquant que l'associé de $(K.S)$ est $(S.\overline{K})$, en disant que le noyau

$$K+(K.S)=h(st)$$

est symétrique gauche. Cette condition s'écrit encore

$$S.K=h+S$$

où $h(st)$ est symétrique gauche. On en déduit

$$K=S^{-1}(h+S)$$

ou en développant

$$K=S^{-1}h-S^{-1}$$

c'est-à-dire

$$K(st)=h(st)+\int_0^1 h(su)\,S^{-1}(ut)\,du;$$

telle est la forme du noyau de rotation fonctionnelle non euclidienne infinitésimale relativement au noyau S.

DEUXIEME PARTIE.

Les groupes continus finis.

Sommaire. — Définition. — Le groupe de Volterra. — L'équation intégro differentielle de Volterra. — Une équation aux dérivées fonctionnelles. — Digression sur les systèmes coordonnés fonctionnels obliques. — Digression sur les multiplicités invariantes dans une transformation de Fredholm. — Résolution de l'équation aux dérivées fonctionnelles. — Les noyaux symétroïdes. — Le groupe à deux paramètres, équations intégro-differentielles et équations finies.

I) — Definition des groupes continus finis; Le groupe a un paramètre ou groupe de Volterra.

Il est naturel d'appeler groupe continu fini à r paramètres un ensemble r fois étendu de transformations de Fredholm formant un groupe. Les noyaux des transformations de ce groupe dépendent donc de r paramètres a_i $(i=1; 2; \ldots\ldots; r)$, et le produit de deux transformations dont les noyaux ont respectivement pour paramètres a_i et b_i est une transformation dont le noyau a pour paramètres c_i où les c ne dépendent que des a et des b.

Le cas de $r=1$ a déja été considéré par différents auteurs [1]). Bornons-nous ici à rappeler rapidement la construction de ce groupe.

Désignons par t le paramètre du groupe tellement choisi que la transformation identique ait pour paramètre 0. Soit

$$g(z)=f(z)+\int_0^1 K(zy\,|\,t)\,f(y)\,dy$$

la transformation courante du groupe. En écrivant qu'il y a groupe on a en posant

$$g(z)=f(z)+\int_0^1 K(zy\,|\,t)\,f(y)\,dy$$

et

$$h(z)=g(z)+\int_0^1 K(zy\,|\,\theta)\,g(y)\,dy$$

$$h(z)=f(z)+\int_0^1 K(zy\,|\,\tau)\,f(y)\,dy$$

où τ ne dépend que de t et de θ.

$$\tau=\phi(t,\theta).$$

On a ensuite par une méthode classique, en choisissant convenablement les variables

---

(1) Gerhard Kowalewski; Über Funktionenräume, *Wiener Berichte*, 1911, vol. 120. II. A et D. Michal; Integro-Différential invariants of one-parameter Groups of Fredholm transformations, *Bulletin of the american Mathematical Society*; 1924, vol. XXX, Number 7.

$$\frac{\delta}{\delta t} g(x) = -\frac{\delta \theta}{\delta t} \int_0^1 h(xy\,|\,\theta)\, g(y)\, dy$$

en posant

$$h(xy\,|\,\theta) = \frac{\delta}{\delta \theta} K(xy\,|\,\theta) + \int_0^1 K^{-1}(xu|\theta) \cdot \frac{\delta}{\delta \theta} K(uy\,|\,\theta)\, du$$

où $K^{-1}(xu\,|\,\theta)$ est le noyau de la transformation inverse de celle ayant pour noyau $K(xu\,|\,\theta)$. On montre ensuite par un raisonnement bien connu que $h(xy\,|\,\theta)$ est de la forme $a(\theta)\, k(xy)$. On a donc l'équation intégro-différentielle du groupe

$$\frac{\delta}{\delta t} g(x) = -\frac{\delta \theta}{\delta t} \cdot \phi(\theta) \int_0^1 k(xy)\, g(y)\, dy,$$

qui par un changement de variable convenable prend la forme

$$\frac{\delta}{\delta t} g(x) = \int_0^1 k(xy)\, g(y)\, dy.$$

La résolution en est classique; on trouve sans peine comme équation finie du groupe

$$g(x) = f(x) + \int_0^1 K(xy\,|\,t)\, f(y)\, dy$$

où le noyau $K(xy\,|\,t)$ est donné par le développement en série toujours uniformément et absolument convergent

$$K(xy\,|\,t) = \frac{t}{1} k(xy) + \frac{t^2}{2!} k^{(2)}(xy) + \ldots. + \frac{t}{n!} k^{(n)}(xy) + \ldots.$$

De plus il satisfait au théorème d'addition intégral de Volterra

$$K(xy\,|\,t) + K(xy\,|\theta) + \int_0^1 K(xu\,|\,t)\, K(uy\,|\,\theta)\, du = K(xy\,|\,t + \theta);$$

qui montre que le nouveau paramètre est canonique.

Ajoutons enfin, chose essentielle, que le noyau $k(xy\,|\,t)$ de la transformation courante du groupe est, par hypothèse, une fonction de carré sommable par rapport aux variables x et y, et analytique par rapport à la variable jouant le rôle de paramètre.

Considérons maintenant une fonctionnelle dérivable de la fonction f, et désignons par g la transformée de f par la substitution du groupe ayant pour paramètre t. la valeur prise par cette fonctionnelle $F\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\}$ pour $f = g$ est une fonction analytique de t; et on a

$$\frac{\delta}{\delta t} F\{|\overset{1}{\underset{0}{g}}|\} = \int_0^1 F'_{g(x)}\{|\overset{1}{\underset{0}{g}}|\,\Big|\, x\} \cdot \frac{\delta}{\delta t} g(x)\, dx$$

ou

$$\frac{\delta}{\delta t} F\{|\overset{1}{\underset{0}{g}}|\} = \int_0^1\int_0^1 k(xu)\, g(u)\, F'_{g(x)}\{|\overset{1}{\underset{0}{g}}|\,\Big|\, x\} du\, dx = \mathscr{H}[F];$$

Nous voyons ainsi apparaître un opérateur différentiel fonctionnel $\mathscr{H}$ analogue à l'opérateur différentiel classique dans la théorie des groupes de Lie. De la même manière que dans cette théorie on a

$$\frac{\delta^2}{\delta t^2} F\{|\overset{1}{\underset{0}{g}}|\} = \frac{\delta}{\delta t}\{\mathscr{H}[F]\}$$

et si on considère à son tour $\mathscr{H}[F]$ comme une fonctionnelle de f

$$\frac{\delta^2}{\delta t^2} F\{|\overset{1}{\underset{0}{g}}|\} = \mathscr{H}^{(2)}[F] = \mathscr{H}[\mathscr{H}[F]];$$

puis de la même manière

$$\frac{\delta^n}{\delta t^n} F\{|\overset{1}{\underset{0}{g}}|\} = \mathscr{H}^{(n)}[F];$$

avec la convention d'écriture

$$\mathscr{H}^{(n)}[F] = \mathscr{H}[\mathscr{H}^{(n-1)}[F]].$$

En particulier on a, pour t suffisamment petit en module, puisque F est analytique au voisinage de $t = 0$;

$$F\{|\overset{1}{\underset{0}{g}}|\} = F\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\} + \frac{t}{1}\,\mathscr{H}[F] + \ldots\ldots;$$

Si de plus F est une fonctionnelle linéaire $F'_{f(x)}\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\,\Big|\, x\}$ ne dépend plus de f, mais de x seulement; posant alors

$$G\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\} = \mathscr{H}[F]$$

on a

$$G'_{f(x)}\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\,x\} = \int_0^1 k(ux(F'_{f(u)}\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\,u\}du$$

puis

$$\mathscr{H}[G] = \mathscr{H}^{(2)}[F] = \int_0^1\int_0^1 k^{(2)}(xu)\,f(u)\,F'_{f(x)}\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\,x\}\,du\,dx;$$

et en général

$$\mathscr{H}^{(n)}[F] = \int_0^1\int_0^1 k^{(n)}(xu)\,f(u)\,F'_{f(x)}\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\,x\}\,du\,dx;$$

Cherchons maintenant les fonctionnelles invariées par le groupe. On doit avoir

$$F\{|\overset{1}{\underset{0}{g}}|\} = F\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\};$$

quelque soit t. D'après le développement qui donne $F\{|\overset{1}{\underset{0}{g}}|\}$ pour t assez petit, on voit, en se bornant à la recherche des fonctionnelles invariées analytiques, qu'il est nécessaire et suffisant pour cela que

$$\mathscr{H}[F] = 0.$$

Nous avons donc à résoudre l'équation linéaire aux derivées fonctionnelles

$$\int_0^1\int_0^1 k(xu)\,f(u)\,F'_{f(x)}\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\,x\}\,du\,dx = 0.$$

Cette résolution va mettre en évidence un certain nombre de faits importants mais il est tout d'abord nécessaire de préciser quelques notions essentielles.

II) — Digression sur les systèmes coordonnés fonctionnels obliques.

Considérons un système de fonctions

$$f_1;\ f_2;\ \ldots;\ \text{etc.}$$

que nous supposons linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'aucune relation linéaire, homogène, à coefficients constants, (dans laquelle n'entrent qu'un nombre fini de fonctions) n'existe entre elles. Il est alors possible d'orthogonaliser ce système à la Schmidt par les formules

$$\begin{aligned} \phi_1 &= a_{11} f_1 \\ \phi_2 &= a_{21} f_1 + a_{22} f_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \phi_n &= a_{n1} f_1 + a_{n2} f_2 + \ldots + a_{nn} f_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

avec les conditions

$$[\phi_i \phi_j] = \epsilon_{ij}; \qquad (\epsilon_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j; \text{ et} = 1 \text{ si } i = j)$$

Supposons en effet connues $\phi_1; \ldots; \phi_n$ et cherchons ϕ_{n+1}

$$\phi_{n+1} = c_1 f_{n+1} + c_2 \phi_1 + c_3 \phi_2 + \ldots + c_{n+1} \phi_n$$

les conditions

$$[\phi_{n+1} \cdot \phi_i] = 0 \qquad (i \leqslant n)$$

donnent

$$0 = c_1 [f_{n+1} \cdot \phi_i] + c_{i+1}$$

d'où

$$\phi_{n+1} = c_1 [f_{n+1} - \phi_1 [f_{n+1} \cdot \phi_1] - \phi_2 [f_{n+1} \cdot \phi_2] - \ldots - \phi_n [f_{n+1} \cdot \phi_n]];$$

et la condition

$$[\phi_{n+1}^2] = 1$$

donne c_1 au signe prés pourvu que

$$[(f_{n+1} - \phi_1 [\phi_1 \cdot f_{n+1}] - \phi_2 [\phi_2 \cdot f_{n+1}] - \ldots \phi_n [\phi_n \cdot f_{n+1}])^2] \neq 0$$

ou

$$[f_{n+1}]^2 > [f_{n+1} \cdot \phi_1]^2 + \ldots + [f_{n+1} \cdot \phi_n]^2;$$

cette condition est équivalente à celle que f_{u+1} soit différent de

$$\phi_1 [\phi_1 \cdot f_{n+1}] + \phi_2 [\phi_2 \cdot f_{n+1}] + \ldots + \phi_n [\phi_n \cdot f_{n+1}];$$

Or si cela n'avait pas lieu il y aurait une relation linéaire et homogène entre $f_{n+1}; \phi_1; \phi_2; \ldots; \phi_n$ ou encore $f_1; f_2; \ldots; f_{n+1}$ à cause de la forme des ϕ_i.

Dans ces hypothèses l'orthogonalisation à la Schmidt est donc possible. Le tableau des a_{ij} a quelques propriétés importantes.

Les a_{nn} sont différents de 0, c'est ce que montre le calcul précédent où

$$c_1 = a_{n+1,\,n+1}$$

par suite ce tableau est résoluble de proche en proche par les formules

$$\begin{aligned} f_1 &= b_{11}\phi_1 \\ f_2 &= b_{21}\phi_1 + b_{22}\phi_2 \\ &\ldots\ldots \\ f_n &= b_{n1}\phi_1 + \ldots + b_{nn}\phi_n \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

et aucun des b_{nn} n'est nul. De plus si le système des f_i est complet il en est de même de celui des ϕ_i et réciproquement car si g est une fonction quelconque on a

$$\begin{aligned} [g \cdot \phi_1] &= a_{11}[g \cdot f_1]; \\ &\ldots\ldots \\ [g \cdot \phi_n] &= a_{n1}[g \cdot f_1] + \ldots a_{nn}[g \cdot f_n] \end{aligned}$$

d'où il résulte que si tous les $[g \cdot f_i]$ sont nuls il en est de même des $[g \cdot \phi_i]$.

Nous supposerons le système des f_i complet, celui des ϕ_i l'est alors et g étant une fonction quelconque de carré sommable, en posant

$$[g \cdot \phi_i] = g_i$$

les g_i ne sont pas tous nuls et les fonctions

$$g^n = \sum_{i1}^{n} g_i\phi_i$$

convergent en moyenne vers g. Remplaçons les ϕ_i par leur expression en f_i, il vient

$$g^n = \sum_{i1}^{n} \alpha_i^n f_i$$

les α_i^n linéaires en g_i sont donnés par

$$\alpha_i^n = \sum_{i1}^{n} a_{ki} g_k$$

ils dépendent en général de n. Ceci posé les α_i^n peuvent ou non converger quand n devient infini. On a le théorème suivant:

Pour que, quel que soit g les α_i^n aient tous des limites pour n infini, il faut et il suffit que le système des f_i soit biorthogonalisable, c'est-à-dire qu'il existe un système de fonctions

$$k_1; k_2; \ldots; k_n; \ldots \text{etc.}$$

tel que

$$[f_i \,.\, k_j] = \epsilon_{ij}.$$

En effet si cela a lieu les séries

$$\sum_{kl}^{\infty} a_{kl} g_k$$

convergent quels que soient les nombres g_k rendant la série

$$\sum_{kl}^{\infty} g_k^2$$

convergente. Il faut et il suffit pour cela que les séries

$$\sum_{kl}^{\infty} a_{kl}^2$$

convergent quel que soit i (théorème de Landau). Alors

$$\sum_{ki}^{\infty} a_{ki} \phi_k$$

converge en moyenne vers une fonction unique k_i déterminée à un ensemble de mesure nulle prés, car le système ϕ_i est complet et on a

$$a_{ki} = [k_i \,.\, .\phi_k]$$

et

$$a_i^n = [k_i \,.\, g^n]$$

et comme g^n tend en moyenne vers g,

$$a_i^n = [k_i \,.\, g^n]$$

tend vers

$$a_i = [k_i \,.\, g].$$

Ceci posé calculons

$$[f_j \cdot k_i]$$

on a

$$f_j = \sum_{kl} b_{jk} \phi_k = \sum_{kl} \beta_{jk} f_k$$

avec

$$\beta_{jk} = \sum_{lk}^{j} a_{lk} b_{jl}$$

Dans le cas actuel il est bien clair que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_i^n &= \beta_{ji} \qquad (i \leqslant j) \\ &= 0 \qquad (i > j) \end{aligned}$$

or le tableau (b) étant le résolvant du tableau (a), on a

$$\sum_{lk}^{j} a_{lk} b_{jl} = \epsilon_{jk} = \beta_{jk}$$

donc

$$\beta_{jl} = \epsilon_{jl}$$

et par suite

$$[k_i \cdot f_j] = \epsilon_{ij} \, .$$

La condition est donc nécessaire et il est immédiat qu'elle est suffisante, car si le système (k_i) existe, on a

$$a_i^n = [k_i \cdot g^n];$$

donc...

De plus (f_i) étant complet, (k_i) est unique, car s'il y avait deux tels systèmes (k_i) et (k_i'), les fonctions

$$k_i'' = k_i - k_i'$$

seraient orthogonales à toutes les fonctions du système complet (f_i).

Ajoutons encore que le tableau des a_{ij} a ses éléments fonctions chacun d'un nombre fini d'éléments du géométral symétrique du système f_i d'éléments courants

$$\eta_{ij} = \eta_{ji} = [f_i \cdot f_j] .$$

Par suite la condition nécessaire et suffisante de biorthogonalisabilité qui est la convergence des séries

$$\sum_{kl}^{\infty} a_{kl}^2$$

s'exprime par un ensemble dénombrable de conditions sur les éléments du géométral.

Nous dirons que le système (f_l) est fermé si:

1) — il est biorthogonalisable,

2) — si le système (k_l) biorthogonalisant est complet;

alors il n'existe aucune fonction g telle que ses coefficients a_i relatifs au système (f_l)

$$a_l = [g \,.\, k_l]$$

soient tout nuls.

Conditions nécessaires et suffisantes de fermeture.

1) — Condition de biorthogonalisabilité: à savoir convergence quel que soit i des séries

$$\sum_{kl}^{\infty} a_{kl}^2$$

alors le système (k_l) existe et son géométral d'éléments

$$\zeta_{ij} = \zeta_{jl} = [k_l \,.\, k]$$

est défini par

$$\zeta_{ij} = \sum_{k1}^{\infty} [k_i \,.\, \phi_k][k \,.\, \phi_k] = \sum_{k1}^{\infty} a_{kl} a_{kj}$$

ou

$$\zeta_{ij} = \sum_{kl}^{\infty} a_{kl} a_{kj} \qquad (j \leqslant i)$$

Il est d'autre part aisé de constater qu'il n'existe entre les fonctions du système (k_l) aucune relation linéaire homogène à coefficients constants où n'entre qu'un nombre fini de fonctions, car si on avait une telle relation

$$\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \dots, + \lambda_n k_n = 0$$

il en résulterait

$$\lambda_1 [k_1 \,.\, f_l] + \lambda_2 [k_2 \,.\, f_l] + \dots + \lambda_n [k_n \,.\, f_l] = 0$$

d'où pour

$$(1 \leqslant i \leqslant n) \qquad \lambda_i = 0$$

On peut donc orthogonaliser à la Schmidt le système (k_l) par les formules

$$\psi_1 = c_{11} k_1$$
$$\psi_2 = c_{21} k_1 + c_{22} k_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi_i = c_{i1} k_1 + c_{i2} k_2 + \ldots + c_{ii} k_i;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Pour que le système (k_i) soit complet il est nécessaire et suffisant que le système (ψ_i) le soit. Or (ϕ_i) étant complet il est nécessaire et suffisant pour cela que

$$\sum_k [\phi_i \psi_k]^2 = [\phi_i]^2 = 1$$

Il peut être plus commode de transformer cette condition. Nous allons montrer qu'il est nécessaire et suffisant pour que (ϕ_i) soit complet que

$$\sum_k [f_i \psi_k]^2 = [f_i]^2 = \eta_{ii}$$

La condition est nécessaire d'après celle de Lauricella. Montrons qu'elle est suffisante, pour cela montrons que pour toute fonction f de la forme

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_n f_n;$$

on a

$$\sum_k [f \cdot \psi_k]^2 = [f^2]$$

en effet

$$[f \cdot \psi_k] = \sum_{l1}^{n} a_l [f \cdot \psi_k]$$

$$[f \cdot \psi_k]^2 = \sum_{l,\, m\, 1}^{n} a_l a_m [f_l \cdot \phi_k][f_m \cdot \psi_k]$$

d'autre part les relations

$$\sum_k [f_i \cdot \psi_k]^2 = [f_i]^2; \qquad \sum_k [f_j \cdot \psi_k] = [f_j]^2$$

entraînent

$$\sum_k [f_i \cdot \psi_k][f_j \cdot \psi_k] = [f_i \cdot f_j]$$

on a donc

$$\sum_k [f \cdot \psi_k]^2 = \sum_{l\,m\,1}^{n} a_l a_m [f_l \cdot f_m] = [f^2]$$

or les fonctions ϕ_i sont du type indiqué, donc...

Calculons maintenant les $[f_l \cdot \psi_k]$, on a

$$[f_i \cdot \psi_k] = \sum_{l\,1}^{k} c_{kl} [k_l \cdot f_i] = \sum_{l\,1}^{k} c_{kl} \epsilon_{li}$$

donc

$$[f_i \psi_k] = \begin{cases} c_{ki}; & (i \leqslant k) \\ 0\;; & (i > k) \end{cases}$$

Nous avons par suite les conditions

$$\sum_{k\,i}^{\infty} (c_{ki})^2 = \eta_{ii}$$

et il faut noter que les conditions de fermeture du système ne dépendent que de son géométral. Ceci suggère immédiatement une généralisation qui peut être quelquefois utile. Dans les formules

$$\begin{aligned} f_1 &= b_{11} \phi_1 \\ f_2 &= b_{21} \phi + b_{22} \phi_2 \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_n &= b_{n1} \phi_1 + \ldots + b_{nn} \phi_n \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

qui donnent les (f_l) en fonction des (ϕ_i), remplaçons le système orthogonal complet (ϕ_l) par un système orthogonal incomplet quelconque $(\dot{\phi}_l)$ et considérons le système des fonctions

$$\dot{f}_1 ; \dot{f}_2 ; \ldots ; \dot{f}_l ; \ldots \text{etc.}$$

données par les formules

$$\dot{f}_1 = b_{11}\dot{\phi}_1$$
$$\dot{f}_2 = b_1\dot{\phi}_1 + b_{22}\dot{\phi}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\dot{f}_n = b_{n1}\dot{\phi}_1 + \dots b_{nn}\dot{\phi};$$

Il est bien clair que

$$[f_i \cdot f_j] = [\dot{f}_i \cdot \dot{f}_j] = \eta_{ij}$$

et que par suite les deux systèmes f_i et $\dot{f}_i$ ont même géométral. Comment interpréter pour le système $\dot{f}_i$ la condition de fermeture vérifiée par le système f_i? Considérons la multiplicité linéaire formée par les fonctions g limites en moyenne de fonctions g_n de la forme

$$g_n = \sum_{i1}^{n} a_i^n f_i$$

Si on prend maintenant les fonctions données par les développements convergeant en moyenne

$$k_i \sim \sum_{ki}^{\infty} a_{ki}\dot{\phi}_k$$

il est bien clair que le système formé par ces fonctions biorthogonalise le système $\dot{f}_i$ et qu'il est le seul ayant cette propriété et formé uniquement de fonctions appartenant à la multiplicité linéaire considérée plus haut. De plus ce système est complet dans cette multiplicité, c'est-à-dire qu'il n'existe dans la multiplicité aucune fonction non presque partout nulle et orthogonale à toutes les fonctions du système. En définitive si le géométral d'un système non complet vérifie la condition de fermeture cela veut dire que ce système est biorthogonalisable et que les composantes des fonctions du système biorthogonalisant sur la multiplicité linéaire coordonnée par les fonctions données forment dans cette multiplicité un système complet.

Reprenons maintenant le cas d'un système (f_i) complet et fermé. Soient comme plus haut

$$f_1; f_2; \dots; f_i; \dots$$

ce système et

$$k_1; k_2; \ldots; k_l; \ldots$$

le système biorthogonalisant; à toute fonction f de carré sommable non presque partout nulle correspond un ensemble de „coefficients" $a_i = [f . k_i]$ non tous nuls, et deux fonctions distinctes f et g ont des coefficients non tous égaux. sans quoi la fonction non nulle $f - g$ aurait des coefficients tous nuls. On peut donc dire que la fonction f est déterminée sans ambiguïté par le développement *symbolique*

$$f \approx a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Il faut remarquer que la série au second membre ne converge pas en moyenne en général, mais la donnée des a_i détermine les $\gamma_i = [f . \phi_l]$ d'une manière univoque. On peut aisément se rendre compte de l'ordre de difficulté de cette détermination, tout se ramène à résoudre le système linéaire infini

$$a_l = \sum_{k l}^{\infty} a_{kl} \gamma_k$$

On sait d'ailleurs à priori que s'il a une solution, cette solution est unique. Partons des formules

$$f_i = \sum_{k 1}^{i} b_{ik} \phi_k$$

d'où on tire

$$[f \cdot f_i] = \sum_{k 1}^{i} b_{ik} \gamma_k$$

Si on connaîssait les $[f . f_i]$ on aurait les γ_k de proche en proche par un algorithme fini, à savoir par les formules

$$\gamma_i = [f \cdot \phi_i] = \sum_{k 1}^{i} a_{ik} [f \cdot f_k];$$

tout revient donc au calcul des $[f . f_k]$, or on a

$$[f \cdot f_k] = \sum_{l} [f \cdot \psi_l][\psi_l \cdot f_k]$$

et il est bien clair que

$$[f \cdot \psi_l] = \sum_{m1}^{l} c_{lm}\, a_m$$

à cause de

$$\psi_l = \sum_{m1}^{l} c_{lm}\, k_m$$

de ces formules on tire de la même manière

$$[\psi_l \cdot f_k] = \sum_{m1}^{l} c_{lm}[f_k \cdot k_m] = \left| \begin{array}{ll} c_{lk} & \text{pour } k \leqslant l \\ 0 & \text{pour } k > l \end{array} \right.$$

puisque (k_i) biorthogonalise (f_i), on a donc

$$[f \cdot f_k] = \sum_{lk}^{\infty} c_{lk}[f \cdot \psi_l]$$

ou

$$[f \cdot f_k] = \sum_{lk}^{\infty} c_{lk} \left| \sum_{m1}^{l} c_{lm}\, a_m \right|;$$

qui donne $[f \cdot f_k]$ par un développement convergent, on peut remarquer que

$$[f_i \cdot f_j] = \eta_{ij} = \sum_{k1}^{\infty} [f_i \cdot \psi_k] = \sum_{ki}^{\infty} c_{ki}\, c_{kj}; \qquad (i \geqslant j)$$

et que par suite le développement précédent, qui considéré comme une série double n'est pas absolument convergent en général, peut s'écrire *symboliquement*

$$[f \cdot f_k] \approx \sum_{m1}^{\infty} a_m [f_m \cdot f_k]$$

sous cette forme il apparaît comme une conséquence immédiate de la formule également symbolique

$$f \approx \sum_{m1}^{\infty} a_m f_m.$$

Une fois les γ déterminés par ce procédé f est donné par un développement convergent en moyenne pourvu que

$$\sum_i \gamma_i^2$$

converge; cette dernière condition est équivalente à une certaine condition de convergence pour les a_i, condition assez complexe que nous n'expliciterons pas et que nous désignerons par le symbole ($\mathcal{C}$), ce qui nous importe seulement c'est de savoir que si elle est remplie, les a_i déterminent f d'une manière univoque à un ensemble de mesure nulle près.

De tout ceci résulte que toute fonctionnelle $F\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\}$ de la fonction f est une fonction de l'infinité de variables a_i vérifiant la condition ($\mathcal{C}$).

III. — Digression sur les multiplicités linéaires fonctionnelles invariées par une transformation de Fredholm.

Considérons un noyau $K(st)$ que comme d'habitude nous supposons de carré sommable par rapport à chacune des variables prises séparément; supposons en outre que la déterminante fondamenle $D(\lambda)$ n'ait que des racines simples

$$\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n; \ldots$$

soient

$$\phi_1; \phi_2 \ldots; \phi_n; \ldots$$

les fonctions fondamentales directes. Nous faisons la convention de répétition des λ, c'est-à-dire que nous supposons que dans la suite des λ chacun d'eux est répété autant de fois que le noyau canonique correspondant contient de termes de la forme

$$\phi(s)\,\psi(t).$$

Désignons enfin par

$$\psi_1; \psi_2; \ldots; \phi_n; \ldots$$

les fonctions fondamentales associées, telles que

$$[\phi_i \cdot \psi_j] = \epsilon_{ij}.$$

Soient

$\mathcal{A}$ la multiplicité linéaire orthogonale à tous les ϕ_i
$\mathcal{B}$ la multiplicité linéaire orthogonale à tous les ψ_i

$\mathcal{C}$ la multiplicité linéaire complètement orthogonale à $\mathcal{A}$

$\mathcal{D}$ la multiplicité linéaire complètement orthogonale à $\mathcal{B}$

Toute fonction f de carré sommable peut se mettre d'une seule manière sous l'une des deux formes

$$f = f_{\mathcal{A}} + f_{\mathcal{C}} = f_{\mathcal{B}} + f_{\mathcal{D}}$$

$f_{\mathcal{A}}$ dans $\mathcal{A}$, $f_{\mathcal{B}}$ dans $\mathcal{B}$, $f_{\mathcal{C}}$ dans $\mathcal{C}$, $f_{\mathcal{D}}$ dans $\mathcal{D}$, en particulier ϕ_i est dans $\mathcal{C}$ et ψ_i dans D. De même

$$\phi_i = \dot{\phi}_i + \ddot{\phi}_i; \qquad \psi_i = \dot{\psi}_i + \ddot{\psi}_i;$$

avec $\ddot{\phi}$ appartenant à $\mathcal{B}$, $\dot{\phi}_i$ appartenant à $\mathcal{D}$, $\ddot{\psi}$ appartenant a $\mathcal{A}$, $\dot{\psi}_i$ appartenant à $\mathcal{C}$. Designons par

$\mathcal{A}_1$ la portion de $\mathcal{A}$ orthogonale à tous les $\ddot{\psi}_i$.
$\mathcal{A}_2$ " " " $\mathcal{A}$ complètement orthognale à $\mathcal{A}_1$,
$\mathcal{B}_1$ " " " $\mathcal{B}$ orthogonale à tous les $\ddot{\phi}_i$,
$\mathcal{B}_2$ " " " $\mathcal{B}$ complètement orthogonale á $\mathcal{B}_1$,
$\mathcal{C}_1$ " " " $\mathcal{C}$ orthogonale à tous les $\dot{\phi}_i$,
$\mathcal{C}_2$ " " " $\mathcal{C}$ complètement orthogonale à $\mathcal{C}_1$,
$\mathcal{D}_1$ " " " $\mathcal{D}$ orthogonale à tous les $\dot{\phi}_i$,
$\mathcal{D}_2$ " " " $\mathcal{D}$ complètement orthogonale à $\mathcal{D}_1$,

on a, quel que soit f, d'une seule manière

$$f = f_{\mathcal{A}_1} + f_{\mathcal{A}_2} + f_{\mathcal{C}_1} + f_{\mathcal{C}_2} = f_{\mathcal{B}_1} + f_{\mathcal{B}_2} + f_{\mathcal{D}_1} + f_{\mathcal{D}_2}$$

en particulier

$\dot{\phi}_i$ est dans $\mathcal{D}_2$
$\dot{\psi}_i$ " " $\mathcal{C}_2$
$\ddot{\phi}_i$ " " $\mathcal{B}_2$
$\ddot{\psi}_i$ " " $\mathcal{A}_2$

Remarquons que

$\mathcal{A}_1$ portion de $\mathcal{A}$ orthogonale à tous les $\ddot{\psi}_i$, donc à tous les ψ_i appatient à $\mathcal{B}$

$\mathcal{B}_1$ portion de $\mathcal{B}$ orthogonale à tous les $\ddot{\phi}_i$, donc à tous les ϕ_i appartient à $\mathcal{A}$.

Donc $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}_1 =$ multiplicité commune à $\mathcal{A}$ et à $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{E}$. De même

$\mathcal{C}_1$ portion de $\mathcal{C}$ orthogonale à tous los $\dot{\psi}_i$, donc à tous les ψ_i appartient à $\mathcal{B}$

$\mathcal{D}_1$ portion de $\mathcal{D}$ orthogonale à tous les $\dot{\phi}_i$, donc à tous les ϕ_i appartient à $\mathcal{A}$.

Donc $\mathcal{C}_1$ est la multiplicité commune à $\mathcal{B}$ et à $\mathcal{C}$, et
$\mathcal{D}_1$ „ „ „ „ „ $\mathcal{A}$ „ „ $\mathcal{D}$; par suite
$\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}_2$ sont disjointes,
$\mathcal{B}$ „ $\mathcal{C}_2$ „ „
$\mathcal{A}$ „ $\mathcal{B}_2$ „ „
$\mathcal{B}$ „ $\mathcal{A}_2$ „ „
en entendant que deux multiplicités disjointes n'ont pas d'autres fonctions communes que les fonctions presque partout nulles.

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}_2$ étant disjointes, il n'existe aucune fonction orthogonale à la fois à toutes celles de $\mathcal{C}$ et à toutes celles de la multiplicité complètement orthogonale à $\mathcal{D}_2$, laquelle s'obtient en réunissant les deux multiplicités complètement orthogonales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}_1$. Donc $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}_1$ forment un ensemble complet et par suite aussi $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}_1$ puisque $\mathcal{C}_1$ est commun à $\mathcal{B}$ et à $\mathcal{C}$. Donc

$\mathcal{C}_2 + \mathcal{B} + \mathcal{D}_1$ forment un ensemble complet, de même
$\mathcal{D}_2 + \mathcal{A} + \mathcal{C}_1$ „ „ „ „ ainsi que $\mathcal{C} + \mathcal{E} + \mathcal{D}$

Nous allons maintenant porter exclusivemeut notre attention sur les noyaux tels que la multiplicité $\mathcal{C}_1$ n'existe pas, alors $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont évidemment disjointes. Voyons quelles sont les conséquences de cette hypothèse. Reprenons une fonction f de $\mathcal{B}$ que je décompose en

$$f = g + h$$

où g appartient à $\mathcal{A}$, et décrit dans $\mathcal{A}$ la multiplicité $\mathcal{B}'$ et où h appartient à $\mathcal{C}$.

Désignons par $\mathcal{B}''$ la multiplicité qui dans $\mathcal{A}$ est complètement orthogonale à $\mathcal{B}'$. Toute fonction de $\mathcal{B}''$ est orthogonale à toutes celles de $\mathcal{B}$, donc appartient à $\mathcal{D}$, et $\mathcal{B}''$ se confond avec $\mathcal{D}_1$. Ceci posé f appartenant à $\mathcal{B}$ on a

$$[f \cdot \psi_i] = 0$$

donc

$$[g \cdot \psi_i] + [h \cdot \psi_i] = 0$$

mais

$$\psi_i = \dot{\psi}_i + \ddot{\psi}_i;$$

où $\dot{\psi}_i$ appartient à $\mathcal{C}$ et $\ddot{\psi}_i$ à $\mathcal{A}$, donc

$$[g \cdot \dot{\psi}_i] = [h \cdot \ddot{\psi}_i] = 0$$

et par suite

$$[g \cdot \ddot{\psi}_i] + [h \cdot \dot{\psi}_i] = 0.$$

D'autre part $\mathcal{C}_1$ est nul, et il n'y a dans $\mathcal{C}$ aucune fonction orthogonale à tous les $\dot{\psi}_i$, on peut donc affirmer que quels que soient f les $[h \cdot \dot{\psi}_i]$ ne sont pas tous nuls, et que les $[g \cdot \ddot{\psi}_i]$ ne sont pas non plus tous nuls. Il n'y a donc dans $\mathcal{B}'$ aucune fonction orthogonale à tous les $\ddot{\psi}_i$; autrement dit encore $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{E}$ sont disjointes; on peut encore dire que $\mathcal{E}$ ne contient aucune fonction orthogonale à toutes celles de $\mathcal{D}_1$ qui comme nous l'avons vu est la portion de $\mathcal{A}$ complétement orthogonale à $\mathcal{B}'$. Or $\mathcal{D}_1$ appartient à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{B}$, et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ sont complètement orthogonales. Par suite dans $\mathcal{A}$; $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}_1$ sont complètement orthogonales; donc $\mathcal{E}$ ne peut contenir aucune fonction orthogonale à toutes celles de $\mathcal{D}_1$ que si $\mathcal{E} = 0$. Nous voyons donc que $\mathcal{C}_1 = 0$ entraîne $\mathcal{E} = 0$. Il y a cependant une exception au raisonnement précédent; reprenons en effet l'égalité

$$[g \cdot \ddot{\psi}_i] + [h \cdot \dot{\psi}_i] = 0$$

nous avons vu que de $\mathcal{C}_1 = 0$ on déduisait que les $[h \cdot \dot{\psi}_i]$ n'étaient pas tous nuls, sauf cependant si $h = 0$ quel que soit f dans $\mathcal{B}$. Cela a lieu si toute fonction de $\mathcal{B}$ est orthogonale à $\mathcal{C}$, c'est à dire appartient à $\mathcal{A}$. Dans ce cas $\mathcal{E}$ se confond avec $\mathcal{B}$.

$\mathcal{C}_1 = 0$ entraîne donc, soit $\mathcal{E} = 0$; soit $\mathcal{E} = \mathcal{B}$.

Examinons séparément chacun de ces différents cas.

1) $\mathcal{E} = 0$.

Prenons une fonction f quelconque de $\mathcal{A}$, elle se met sous la forme

$$f = g + h$$

où g est dans $\mathcal{B}$ et h dans $\mathcal{D}$. Or f étant dans $\mathcal{A}$ on a

$$[f \cdot \phi_i] = 0$$

c'est-à-dire

$$[g \cdot \phi_i] + [h \cdot \phi_i] = 0$$

mais

$$\phi_i = \dot{\phi}_i + \ddot{\phi}_i$$

$\dot{\phi}_i$ étant dans $\mathcal{D}$ et $\ddot{\phi}_i$ étant dans $\mathcal{B}$; donc

$$[g \cdot \dot{\phi}_i] = [h \cdot \ddot{\phi}_i] = 0$$

et

$$[g \cdot \ddot{\phi}_i] + [h \cdot \dot{\phi}] = 0$$

Comme $\mathcal{E} = 0$ il n'y a dans $\mathcal{B}$ aucune fonction orthogonale à tous les $\ddot{\phi}_i$. Il n'y a donc aucune fonction f telle que les $[g \cdot \ddot{\phi}_i]$ soient nuls, c'est à dire telle que les $[h \cdot \dot{\phi}_i]$ soient tous nuls. Si $\mathcal{D}'$ est la portion de $\mathcal{D}$ décrite par h quand f décrit $\mathcal{A}$, nous voyons que $\mathcal{D}'$ est disjointe de $\mathcal{D}_1$. Soit $\mathcal{D}''$ la portion de $\mathcal{D}$ complètement orthogonale à $\mathcal{D}_1$, toute fonction de $\mathcal{D}''$ est orthogonale à toutes celles de $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{D}''$ est la partie commune à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{C}$ soit $\mathcal{F}$. $\mathcal{D}_1$ étant disjointe de $\mathcal{D}'$, il n'y a dans $\mathcal{D}_1$ aucune fonction orthogonale à toutes celles de $\mathcal{F}$. Or $\mathcal{D}_1$ appartient à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{C}$. et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ sont complétement orthogonales. Il faut donc pour qu'il n'y ait pas contradiction que $\mathcal{D}_1 = 0$.

Il y a encore une exception si g est nul quel que soit f dans $\mathcal{A}$. Cela a lieu si toute fonction de $\mathcal{A}$ est orthogonale à $\mathcal{B}$, c'est-à-dire appartient à $\mathcal{D}$, dans ce cas $\mathcal{D}_1 = \mathcal{A}$.

Il apparait donc maintenant que dans le cas où $\mathcal{C}_1 = 0$ trois cas sont possibles:

$$\text{A)} \quad \mathcal{C}_1 = \mathcal{E} = \mathcal{D}_1 = 0.$$

Il en résulte immédiatement

$$\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}$$
$$\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$$

par suite

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont disjointes et $\mathcal{B} + \mathcal{C}$ est complet.
$\mathcal{A}$ „ $\mathcal{D}$ „ „ „ $\mathcal{D} + \mathcal{A}$ „ „
$\mathcal{B}$ „ $\mathcal{C}$ „ „ „ $\mathcal{C} + \mathcal{D}$ „ „

$\mathcal{C}$ „ $\mathcal{D}$ peuvent d'ailleurs ne pas être disjointes et $\mathcal{F}$ être différentes de 0.

$$\text{B)} \quad \mathcal{C}_1 = 0; \ \mathcal{E} = 0; \ \mathcal{D}_1 = \mathcal{A}.$$

Alors

$$\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}$$

comme $\mathcal{D}_1 = \mathcal{A}$ il est bien clair que $\mathcal{D}$ contient $\mathcal{A}$, et par suite $\mathcal{B}$ est contenue dans $\mathcal{C}$. Or comme $\mathcal{C}_1 = 0$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont disjointes; on a donc certainement $\mathcal{B} = 0$, et dans ce cas $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}$; $\mathcal{B} = 0 : \mathcal{D}$ est complet; $\mathcal{D}_1 = \mathcal{A}$ et $\mathcal{D}_2 = \mathcal{C}$.

$$\text{C)}\quad \mathcal{C}_1 = 0,\ \mathcal{E} = \mathcal{B}.$$

Alors

$$\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}$$

comme $\mathcal{E} = \mathcal{B}$ il est bien clair que $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{B}$, et par suite $\mathcal{D}$ contient aussi $\mathcal{C}$. Enfin $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont disjointes; $\mathcal{D}_1$ est complètement orthogonale, dans $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$; par suite $\mathcal{D}_2$ se réduit à $\mathcal{C}$.

Il est à remarquer que le cas B est une dégénérescence du cas C. En effet si dans le cas C on suppose

$$\mathcal{B} = 0$$

$\mathcal{D}_1$ complètement orthogonale dans $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$ se réduit évidemment à $\mathcal{A}$. On a donc en fait seulement deux cas distincts: A et C.

Revenons maintenant au noyau $K(st)$ et considérons les fonctions f telles que

$$\int_0^1 K(us) f(u)\, du = 0;$$

il est bien connu que ces fonctions sont orthogonales à tous les ϕ_i, elles forment donc une multiplicité linéaire appartenant à $\mathcal{A}$; soit $\mathcal{J}$ cette multiplicité. Supposons la coordonnée par un système complet dans $\mathcal{J}$

$$\rho_1;\ \rho_2;\ \ldots;\ \rho_n;\ \ldots$$

Portons notre attention sur les noyaux K tels que le système

$$(\rho) + (\phi)$$

soit complet. Il est immédiat que cette condition entraîne

$$\mathcal{J} = \mathcal{A}$$

Pour un tel noyau, toute fonction f orthogonale à tous les ϕ_i est telle que

$$\int_0^1 K(us) f(u)\, du = 0.$$

Il en résulte que K n'a que des valeurs singulières simples; en effet sinon il y aurait pour la valeur singulière multiple λ, une fondamentale ψ du noyau associé

$$\psi(s) = \lambda \int_0^1 K(us)\, \psi(us)\, du$$

orthogonale à tous les ϕ, et qui par suite devrait être telle que

$$\int_0^1 K(us)\psi(u)\,du = 0$$

ce qui est contradictoire. On peut donc appliquer à ce noyau K la théorie précédente.

Reprenons le système

$$\rho_1\,;\rho_2\,;\ldots;\rho_n\,;\ldots;\phi_1\,;\phi_2\,;\ldots;\ldots;\phi_n\,;\ldots$$

que nous supposonc donc complet

Cherchons à biorthogonaliser ce système par le système

$$\mu_1\,;\ \mu_2\,;\ldots;\mu_n\,;\ldots;\chi_1\,;\chi_2\,;\ldots;\chi_n\,;\ldots$$

Le système (μ_i) biorthogonalise dans $\mathfrak{A}$ le système (ρ_i) qui doit donc être biorthogonalisable, de plus posant

$$\chi_i = \psi_i + \nu_i$$

et tenant compte de

$$[\psi_i \cdot \phi_j] = \epsilon_{ii}$$

nous voyons que les fonctions ν_i doivent être orthogonales à tous les ϕ_i et sont par suite dans $\mathfrak{A}$. μ_i étant pris dans $\mathfrak{A}$ on a

$$[u_i \cdot \phi_j] = 0$$

il reste donc seulement à vérifier les conditions

$$[\rho_i \cdot (\psi_j + \nu_j)] = 0$$

qui expriment que $\psi_i + \nu_i$ est dans $\mathfrak{C}$, comme

$$\psi_i = (\psi_i + \nu_i) - \nu_i$$

nous voyons que

$$\psi_i + \nu_i = \dot{\psi}_i; \qquad -\nu_i = \ddot{\psi}_i$$

On peut toujours supposer que le système (ρ_i) a été pris orthogonal et normal dans $\mathfrak{A}$, alors le système biorthogonalisant cherché est

$$\rho_1\,;\rho_2\,;\ldots;\dot{\psi}_1\,;\dot{\psi}_2\,;\ldots;\dot{\psi}_n\,;\ldots$$

Voyons maintenant à quelles conditions le système initial

$$\rho_1\,;\rho_2\,;\ldots;\rho_n\,;\ldots;\phi_1\,;\phi_2\,;\ldots;\phi_n\,;\ldots$$

est fermé, il suffit que

$$\rho_1; \rho_2; \ldots; \rho_n; \ldots; \dot{\psi}_1; \dot{\psi}_2; \ldots; \dot{\psi}_n; \ldots$$

soit complet, ou que

$$\dot{\psi}_1; \dot{\psi}_2; \dot{\psi}_3; \ldots \dot{\psi}_n; \ldots$$

soit complet dans $\mathcal{C}$; connu par définitions $\mathcal{C}_1$ est la portion de $\mathcal{C}$ orthogonale à tous les $\dot{\psi}_i$, nous voyons qu'il faut et qu'il suffit pour cela que $\mathcal{C}_1 = 0$. On est ramené à la discussion précédente, d'où comme plus haut deux cas:

$$\text{A)} \quad \mathcal{C}_1 = \mathcal{E} = \mathcal{D}_1 = 0$$
$$\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}; \quad \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$$

$$\begin{array}{l|l}
\mathcal{A} \text{ disjointe de } \mathcal{B} & \mathcal{B} + \mathcal{C} \text{ complet.} \\
\mathcal{A} \quad „ \quad „ \quad \mathcal{D} & \mathcal{D} + \mathcal{A} \quad „ \\
\mathcal{B} \quad „ \quad „ \quad \mathcal{C} & \mathcal{C} + \mathcal{D} \qquad \text{(pas forcément disjointes).}
\end{array}$$
$$\mathcal{J} = \mathcal{A}$$

Nous donnerons aux noyaux vérifiant ces conditions le nom de *noyaux symétroïdes de la première sorte*

$$\text{B)} \quad \mathcal{C}_1 = 0; \qquad \mathcal{E} = \mathcal{B}$$
$$\mathcal{C}_2 = \mathcal{C} = \mathcal{D}_2$$

$\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ contenant $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ disjointes $\mathcal{D}_1$ complètement orthogonale dans $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{J} = \mathcal{A}$$

Nous donnerons aux noyaux vérifiant ces conditions le nom de *noyaux symétroïdes de la deuxième sorte.*

Ce dernier cas est celui des noyaux symétriques ordinaires qui vérifient les conditions

$$\mathcal{E} = \mathcal{A} = \mathcal{B}; \qquad \mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathcal{C}_2 = \mathcal{D}_2$$
$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{D}_1 = 0; \qquad \mathcal{J} = \mathcal{A}$$

Ces deux types de noyaux, généralisant à un certain point de vue les noyaux symétriques, ont une définition commune, qu'on aurait pu donner à priori, et qui est caractéristique. Soit $K(st)$ un tel noyau; la transformation de Fredholm

$$g = K[f] = f(s) + \int_0^1 K(st) f(t)\, dt;$$

est *entièrement* définie si on se donne, au lieu de $K(st)$ ses valeurs singulières λ_i, le système des fonctions fondamentales

$$\psi_1\,;\,\psi_2\,;\ldots;\,\psi_n\,;\ldots$$

et la multiplicité $\mathcal{A}$, en effet remarquons tout d'abord que connaissant la multiplicité $\mathcal{A}$ on en déduit immédiatement la multiplicité complètement orthogonale $\mathcal{C}$, puis en décomposant ensuite chacune des fonctions ψ_i en la somme d'une fonction de $\mathcal{A}$ et d'une fonction de $\mathcal{C}$, on détermine les fonctions $\dot\psi_i$ et $\ddot\psi$ par

$$\psi_i = \dot\psi_i + \ddot\psi_i$$

Désignant ensuite comme plus haut par (ρ_i) le système orthogonal et normal qui coordonne la multiplicité $\mathcal{A}$, nous voyons que nous connaissons maintenant le système par hypothèse fermé

$$\rho_1\,;\,\rho_2\,;\ldots;\,\dot\psi_1\,;\,\dot\psi_2\,;\ldots;\,\dot\psi_i\,;\ldots$$

D'autre part on a

$$\overline{K}[\rho_i] = \rho_i$$

et

$$\overline{K}[\psi_i] = \left(1+\frac{1}{\lambda_i}\right)\psi_i; \qquad \overline{K}[f] = f$$

si f est une fonction appartenant à la multiplicité $\mathcal{A}$, mais comme $\ddot\psi_i$ appartient à $\mathcal{A}$, on a

$$\overline{K}[\ddot\psi_i] = \ddot\psi_i$$

d'où

$$\overline{K}[\dot\psi_i] = \left(1+\frac{1}{\lambda_i}\right)\psi_i - \ddot\psi_i$$

nous connaissons donc les transformées de chacune des fonctions de ce système fermé par la transformation de Fredholm associée de la transformation en question. Désignons maintenant par f une fonction quelconque, par $K[f]$ sa transformée, et cherchons les coefficients de cette transformée par rapport au système fermé

$$\rho_1\,;\,\rho_2\,;\ldots;\,\rho_i\,;\ldots;\,\phi_1\,;\,\phi_2\,;\ldots;\,\phi_i\,;\ldots$$

biorthogonalisé par le système

$$\rho_1\,;\,\rho_2\ldots;\,\rho_i\,;\ldots;\,\dot\psi_1\,;\,\dot\psi_2\,;\ldots;\,\dot\psi_i\,;\ldots$$

on a

$$[K[f] \cdot \rho_i] = [f \cdot \overline{K}[\rho_i]] = [f \cdot \rho_i]$$

puis

$$[K[f] \cdot \dot{\psi}] = [f \cdot \overline{K}[\dot{\psi}_i]] = \left(1 + \frac{1}{\lambda_i}\right) \cdot [f \cdot \psi_i] - [f \cdot \ddot{\psi}_i]$$

ces coefficients sont donc connus; on doit d'autre part considérer comme connu le système

$$\rho_1; \rho_2; \cdots; \rho_n; \phi_1; \phi_2; \cdots; \phi_n; \cdots$$

car il biorthogonalise un système *complet* donné

$$\rho_1; \rho_2; \cdots; \rho_n; \cdots; \dot{\psi}_1; \dot{\psi}_2; \cdots; \dot{\psi}_n; \cdots$$

enfin $K[f]$ donnée maintenant par ses coefficients relativement à un système complet et fermé donné doit être, comme il résulte du paragraphe précédent, regardée comme connue.

Les données ne peuvent d'ailleurs être quelconques, il est d'abord nécessaire que $(\dot{\psi}_i)$ soit fermé dans la multiplicité qu'il coordonne, ensuite les λ_i doivent être tels que quelle que soit la fonction f les coefficients obtenus pour $K[f]$ vérifient la condition appellée plus haut $(\mathcal{C})$ relativement au système

$$\rho_1; \rho_2; \cdots; \rho_n; \cdots; \phi_1; \phi_2; \cdots; \phi_n; \cdots$$

Il est d'ailleurs à prévoir que cette condition sera équivalente à celle qui exprime que la déterminante fondamentale de $K(st)$ est au plus de genre 2. Enfin il est bien clair que les noyaux symétroïdes sont les seuls à avoir la propriété indiquée, puisque cette propriété repose sur ce que

1) $\mathcal{A}$ est ponctuellement invariée par la transformation $\overline{K}$
2) Le système

$$\rho_1; \rho_2; \cdots; \rho_n; \cdots; \phi_1; \phi_2; \cdots; \phi_n; \cdots$$

est fermé

ce que nous avons justement pris comme définition de ces noyaux.

IV.

Résolution de l'équation aux dérivées fonctionnelles rencontrées plus haut.

Soit F une fonctionnelle solution. L'équation

$$F = Con^{te}$$

représente une famille à un paramètre de multiplicités fonctionnelles et il en passe une par chaque point de l'espace. Considérons une de ces multiplicités passant par le point f, elle à pour équation

$$F\{|\overset{1}{\underset{0}{g}}|\} = F\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\}$$

où g est le point courant. Prenons un point g infiniment voisin de f

$$g = f + h$$

où h est une fonction infiniment petite. Toutes les fonctions h possibles seront telles que

$$\int_0^1 F'_{f(s)}\{s \,\Big|\, |\overset{1}{\underset{0}{f}}|\} h(s)\, ds = 0$$

autrement dit appartiendront à la multiplicité linéaire complètement orthogonale à la fonction

$$F'_{f(s)}\{s \,\Big|\, |\overset{1}{\underset{0}{f}}|\}$$

La multiplicité linéaire parallèle à cette dernière et passant par le point f est la multiplicité linéaire tangente à la multiplicité

$$F\{|\overset{1}{\underset{0}{g}}|\} = F\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\}.$$

Si la fonctionnelle F est solution de

$$\mathcal{H}[F] \equiv \int_0^1 \int_0^1 K(st) f(t) F'_{f(s)}\{s \,\Big|\, |\overset{1}{\underset{0}{f}}|\} ds\, dt = 0$$

la fonction

$$\int_0^1 K(st) f(t)\, dt$$

est orthogonale à la fonction

$$F'_{f(s)}\{s \,\Big|\, |\overset{1}{\underset{0}{f}}|\};$$

on connaît donc en chaque point f de l'espace une direction contenue dans la multiplicité linéaire tangente en ce point à la multiplicité de la famille

$$F = Cons^{te}$$

qui y passe. Ceci laisse à penser que comme dans le cas d'un nombre fini de variables, les courbes intégrales de l'équation intégro-différentielle

$$\frac{\delta}{\delta t} f(s \mid t) = \int_0^1 K(su) f(u \mid t)\, du;$$

vont former une congruence caractéristique de l'équation considérée. Il est aisé de montrer que si F est une solution de cette équation, et $f(s \mid t)$ une solution de l'équation intégro-différentielle,

$$F\{\,|f(\overset{1}{\underset{0}{s}}|t)|\,\}$$

est indépendante de t; on a en effet

$$\frac{\delta F}{\delta t} = \int_0^1 F'_{f(s)}\{s \,\Big|\, |f(\overset{1}{\underset{0}{s}}|t)|\,\} \frac{\delta}{\delta t} f(s|t)\, ds$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 K(su) f(u|t) F'_{f(s)}\{s \,\Big|\, |f(\overset{1}{\underset{0}{s}}|t)|\,\}\, du\, ds = \mathscr{H}[F] = 0.$$

Nous voyons donc que si une courbe de la congruence caractèristique a un point commun avec une multiplicité de la famille

$$F = Cons^{te}$$

elle lui appartient toute entière. D'ailleurs tout cela résulte immédiatement de ce que l'équation aux dérivées fonctionnelles considérée donne les fonctionnelles invariées par le groupe de Volterra.

Nous connaissons les équations finies de ce groupe, données par les formules

$$f(s\ t) = f(s) + \int_0^1 K(su|t) f(u)\, du$$

qui résolvent l'équation intégro-différentielle des caractèristiques, tout revient par suite maintenant à déterminer les fonctionnelles solutions par la condition nécessaire et suffisante que

$$F\{\,|f(\overset{1}{\underset{0}{s}}|t)|\,\}$$

soit indépendant de t; avant de faire cette détermination, nous démontrerons le théorème suivant:

Si on transforme un système complet et fermé par une transformation de Fredholm de noyau K résoluble, on obtient un nouveau système complet et fermé.

Soit

$$f_1; f_2; \ldots; f_n; \ldots$$

le système complet et fermé considéré, et

$$g_1; g_2 \ldots; g_n; \ldots$$

le système complet (et fermé) qui le biorthogonalise, on a

$$[f_i \cdot g_j] = \epsilon_{ij}.$$

Nous partons de l'identité évidente

$$[K[f] \,.\, h] = [f \,.\, \overline{K}[h]]$$

d'où résulte

$$[K[f] \,.\, \overline{K}^{-1}[g]] = [f \cdot g].$$

Par suite le système transformé est biorthogonalisé par le système

$$\overline{K}^{-1}[g_1]; \overline{K}^{-1}[g_2]; \ldots; \overline{K}^{-1}[g_i]; \ldots$$

car

$$[K[f_i] \,.\, \overline{K}^{-1}[g_j]] = [f_i \cdot g_j] = \epsilon_{ij};$$

De plus ces deux systèmes sont complets, et par suite fermés. En effet si une fonction non presque partout nulle était telle que l'on ait, en désignant par k cette fonction,

$$[k \,.\, K[f_i]] = 0$$

quel que soit i, on aurait, puisque

$$[k \,.\, K[f]] = [f \,.\, \overline{K}[k]]$$

en général

$$[f_i \,.\, \overline{K}[k]] = 0$$

quel que soit i, et la fonction $\overline{K}[k]$ n'est pas presque partout nulle, à moins que k ne le soit, puisque K est résoluble. Par suite le système (f_i) ne serait pas complet. Un raisonnement analogue montre que le système $(\overline{K}^{-1}[g_i])$ est aussi complet.

Ceci posé reprenons le système complet et fermé

$$f_1; f_2; \ldots; f_n; \ldots$$

biorthogonalisé par le système

$$g_1; g_2; \dots; g_n; \dots$$

A toute fonction f de carré sommable correspondent les coefficients

$$a_i = (f \cdot g_i)$$

qui, comme nous l'avons vu détermine cette fonction d'une manière unique, à un ensemble de mesure nulle prés. pourvu qu'ils satisfassent à une certaine condition de convergence $(\mathcal{C})$. Par suite toute fonctionnelle F est une fonction de l'infinité de variables a_i vérifiant la condition $(\mathcal{C})$. Si on remplace maintenant f par $f(s|t)$ les a_i deviennent des fonctions de t

$$a_i(t) = [g_i \cdot f(s|t)] = \int_0^1 g_i(s)\left[f(s) + \int_0^1 K(su|t) f(u)\,du\right] ds$$

$$= \int_0^1 f(s)\left|g_i(s) + \int_0^1 K(us|t)\, g_i(u)\,du\right| ds$$

$$= [f \cdot g_i(s|t)]$$

en posant

$$g_i(s|t) = g_i(s) + \int_0^1 K(us|t)\, g_i(u)\,du;$$

Or le noyau $K(us|t)$ est résoluble, par suite, d'aprés le théorème précédent, le système

$$g_i(s|t)$$

est complet, fermé, et biorthogonalisé par le système, aussi complet et fermé

$$f_i(s|t)$$

en posant

$$f_i(s|t) = f_i(s) + \int_0^1 K(su|-t)\, f_i(u)\,du$$

puisque l'inverse de l'associé du noyau $K(us|t)$ est le noyau $K(su|-t)$. Nous voyons donc que les variables

$$a_i(t) = [f \cdot g_i(s|t)]$$

qui sont les coefficients de f dans le système des $f_i(s|t)$, définissent d'une manière unique la fonction f. quand une certaine condition de convergence est remplie sur les $a_i(t)$, doit $(\mathcal{C}_t)$ cette condition, il est à remarquer que cette condition équivaut à la condition, $\mathcal{C}$ sur les a_i.

Dès lors toute fonctionnelle

$$F\{|\overset{1}{\underset{0}{f}}|\}$$

solution de la proposée sera une fonction des fonctionnelles $a_i(t)$ indépendante de t, et réciproquement. Pratiquement le problème se ramène donc à former tous les éliminants possibles de la variable t entre les fonctionnelles connues $a_i(t)$. C'est tout ce que l'on peut dire en général, mais il y a un cas particulier important où on peut effectuer complètement cette élimination.

Reprenons les notations du paragraphe précédent et supposons que la déterminante fondamentale de $K(su)$ n'ait que des racines simples

$$\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n; \ldots$$

Si ce noyau est symétroïde. servons-nous comme système coordonné du système alors complet et fermé

$$\rho_1; \rho_2, \ldots; \rho_n; \ldots; \phi_1; \phi_2; \ldots; \phi_n; \ldots$$

il est biorthogonalisé par le système

$$\rho_1; \rho_2; \ldots; \rho_n; \ldots; \psi_1; \psi_2; \ldots; \psi_n; \ldots$$

Appliquons la méthode précédente On a

$$\int_0^1 k^{(n)}(us)\,\rho_i(u)\,du = 0$$

et

$$\int_0^1 K(us|t)\,\rho_i(u)\,du = 0$$

puis

$$\int_0^1 k^{(n)}(us)\,\psi_i(u)\,du = \frac{1}{\lambda_i^n}\,\psi_i(s);$$

et

$$\int_0^1 K(us|t)\,\psi_i(u)du = \psi_i(s)\,[e^{\frac{t}{\lambda_i}} - 1].$$

On est donc amené à considérer le système

$$\rho_1; \rho_2; \ldots; \rho_n; \ldots$$

$$(e^{\frac{t}{\lambda_1}}\psi_1 - \ddot{\psi}); (e^{\frac{t}{\lambda_2}}\psi_2 - \ddot{\psi}_2); \ldots; (e^{\frac{t}{\lambda_i}}\psi_i - \ddot{\psi}_i); \ldots$$

et les coefficients

$$\alpha_i = [f \cdot \rho_i]; \beta_i = e^{\frac{t}{\lambda_i}}[f. \psi_i] - [f. \ddot{\psi}_i]$$

D'après ce qui précède toute fonctionnelle F solution est une fonction des α_i et β_i indépendante de t, et réciproquement. C'est donc une fonction des

$$\alpha_i$$

et des

$$\gamma_i = \lambda_{i+1} \text{ Log nep } [\beta_{i+1} + [f \cdot \ddot{\psi}_{i+1}]] - \lambda_1 \text{ Log nep } [\beta_1 + [f \cdot \ddot{\psi}_1]]$$
$$= \lambda_{i+1} \text{ Log nep } [f \cdot \psi_{i+1}] - \lambda_1 \text{ Log nep } [f \cdot \psi_1];$$

On peut d'ailleurs vérifier aisément que ces variables sont indépendantes comme conséquence du fait que le système coordonné choisi est fermé. Nous avons donc ainsi simplement la solution générale de l'équation dans le cas où le noyau est symétroïde. Ces solutions sont encore valables pour un noyau quelconque, mais il y en a d'autres, indépendantes de celles là, ce qui fait que la solution générale est une fonction de ces variables α_i et γ_i, et d'autres encore qu'il faudra déterminer dans chaque cas particulier.

V.

Retour sur les noyaux symétroïdes et sur quelques unes de leur propriétés.

Nous avons vu dans un paragraphe précédent qu'un noyau symétroïde était complètement déterminé quand on se donnait:

1) Les valeurs singulières

$$\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n; \ldots$$

2) Les fonctions fondamentales du noyau associé

$$\psi_1; \psi_2; \ldots; \psi_n; \ldots$$

3) La multiplicité linéaire fonctionnelle $\mathcal{A}$ orthogonale à toutes les fonctions fondamentales directes du noyau qui par hypothèse est supposée invariée ponctuellement par la transformation associée. Il résulte alors de ces données que l'on connait le système dénoté plus haut par

$$\dot{\psi}_1; \dot{\psi}_2 \cdots; \dot{\psi}_n; \cdots$$

qui doit être complet et fermé quand on lui adjoint le système

$$\rho_1; \rho_2; \cdots; \rho_n; \cdots$$

orthogonal et normal, coordonnant la multiplicité $\mathcal{A}$. Le système

$$(\rho_i) + (\dot{\psi}_i)$$

est alors biorthogonalisé par le système complet, fermé et unique

$$\rho_1; \rho_2; \cdots; \rho_n; \phi_1; \phi_2 \cdots; \phi_n; \cdots$$

où les ϕ_i sont les fondamentales directes du noyau, et sont par suite connues. Nous avons vu que ces données déterminaient complètement la transformation de Fredholm directe correspondant à ce noyau, et permettaient de plus de résoudre entièrement l'équation aux dérivées fonctionnelles

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 K(su) f(u) F'_{f(s)}\{s \,\big|\, \big|\overset{1}{\underset{0}{f}}\big|\} \, du\, ds = 0.$$

Rappelons de plus que pour établir qu'un noyau est symétroïde il suffit de démontrer les points suivants

1) Les valeurs singulières du noyau sont toutes simples

2) La multiplicité $\mathcal{A}$ est invariée ponctuellement par la transformation associée

3) En désignant par (ρ_i) le système orthogonal normal coordonnant cette multiplicité $\mathcal{A}$, le système

$$(\rho_i) + (\dot{\psi}_i)$$

doit être complet. Remarquons que pour démontrer ce point, il suffit de faire voir que le système

$$(\rho_i) + (\psi_i)$$

est complet. En effet si $(\rho_i) + (\dot{\psi}_i)$ est complet, je dis que $(\rho_i) + (\psi_i)$

est aussi complet. sinon il existerait une fonction f telle que l'on ait

$$[f \cdot \rho] = 0 \text{ et } [f \cdot \psi_i] = 0$$

quel que soit i et quel que soit ρ dans $\mathcal{A}$. Or

$$\psi_i = \dot{\psi}_i + \ddot{\psi}_i$$

et $\ddot{\psi}$ appartient à $\mathcal{A}$, donc

$$[f \cdot \ddot{\psi}_i] = 0$$

et on aurait aussi quel que soit i

$$[f \cdot \dot{\psi}_i] = 0$$

ce qui est impossible si f n'est pas presque partout nul. Inversement si $(\rho_i) + (\psi_i)$ est complet, je dis que $(\rho_i) + (\dot{\psi}_i)$ est aussi complet, sinon il existerait une fonction f telle que l'on ait

$$[f \cdot \rho] = 0 \quad \text{et} \quad [f \cdot \dot{\psi}_i] = 0$$

quel que soit ρ dans $\mathcal{A}$. Or

$$\psi_i = \dot{\psi}_i + \ddot{\psi}_i$$

et $\ddot{\psi}_i$ appartient à $\mathcal{A}$, donc

$$[f \cdot \ddot{\psi}_i] = 0$$

et on aurait aussi quel que soit i

$$[f \cdot \psi_i] = [f \cdot \dot{\psi}_i] + [f \cdot \ddot{\psi}_i] = 0$$

ce qui est impossible si f n'est pas presque partout nul.

Cette remarque étant faite, nous allons maintenant établir quelques propriétés des noyaux symétroïqes. Nous montrerons d'abord que l'ensemble des noyaux symétroïdes forme dans le groupe de Fredholm un ensemble invariant distingué: c'est à dire que S étant symétroïde, et K quelconque et résoluble, le noyau

$$\overline{S} = K^{-1} S K$$

est encore symétroïde

1) La déterminante fondamentale de $\overline{S}$ est la même que celle de S, donc les singulières de $\overline{S}$ sont toutes simples

2) On a

$$\overline{\overline{S}} = \overline{K}\,\overline{S}\,\overline{K}^{-1}$$

nous voyons donc que si ϕ est une fondamentale directe de S, $K[\phi]$ est une fondamentale directe de $\overline{S}$; si ψ est une fondamentale inverse de S, $\overline{K}^{-1}[\psi]$ est une fondamentale inverse de $\overline{S}$ et si ρ est ponctuellement invariée par $\overline{S}$, $\overline{K}^{-1}[\rho]$ est ponctuellement invariée par $\overline{\overline{S}}$. Inversement comme

$$S = K\,\overline{S}\,K^{-1} \quad \text{et} \quad \overline{S} = \overline{K}^{-1}\,\overline{\overline{S}}\,\overline{K}$$

nous voyons que si ϕ' est une fondamentale directe de $\overline{S}$, $K^{-1}[\phi']$ est une fondamentale directe de S; si ψ' est une fondamentale inverse de $\overline{S}$. $\overline{K}[\psi']$ est une fondamentale inverse de S et si ρ' est ponctuellement invariée par $\overline{S}$; $\overline{K}[\rho']$ est ponctuellement invarié par $\overline{\overline{S}}$. Par suite les fondamentales directes de $\overline{S}$ sont les fonctions $K[\phi_i]$ et celles là seulement, si donc ρ' est telle que

$$[\rho' \,.\, K[\phi_i]] = 0$$

quel que soit i, et si on a

$$\rho = \overline{K}[\rho']$$

il vient

$$[\rho \cdot \phi_i] = [\overline{K}[\rho'] \cdot \phi_i] = [\rho' \,.\, K[\phi_i]] = 0$$

quel que soit i, par suite ρ appartient à la multiplicité $\mathcal{A}$ et il en résulte que

$$\rho' = \overline{K}^{-1}[\rho]$$

est ponctuellement invariée par $\overline{S}$. Nous voyons donc que la multiplicité $\overline{\mathcal{A}}$ relative au noyau S est ponctuellement invariée par la transformation associée de noyau $\overline{S}$.

3) Nous venons de voir que les fondamentales inverses du noyau $\overline{S}$ sont les fonctions $\overline{K}^{-1}[\psi_i]$ et celles-là seulement. Montrons maintenant qu'en désignant par (ρ_i') un système orthogonal normal coordonnant la multiplicité $\overline{\mathcal{A}}$ le système

$$(\rho_i') + (\overline{K}^{-1}[\psi_i])$$

est complet. En effet dans le cas contraire il existerait une fonction g telle que l'on ait

$$[g \,.\, \rho'] = 0 \quad \text{et} \quad [g \,.\, \overline{K}^{-1}[\psi_i]] = 0$$

quel que soit i et quel que soit ρ' dans $\mathfrak{A}$. On aurait alors en posant

$$f = K^{-1}[g]$$

$$[f \,.\, \overline{K}[\rho']] = 0 \quad \text{et} \quad [f \,.\, \psi_i] = 0$$

g n'étant pas presque partout nul, et le système

$$(\overline{K}[\rho_i']) + (\psi_i)$$

ne pourrait être complet. La proposition annoncée est donc démontrée. Ceci nous permet d'indiquer une classe étendue de noyaux symétroïdes. Nous avons vu en effet que les noyaux symétriques étaient symétroïdes, par suite les transformés d'un noyau symétrique par un noyau quelconque sont symétroïdes. En remarquant que tout noyau est le produit d'un noyau symétrique par un noyau de rotation euclidienne, et que le transformé d'un noyau symétrique par un noyau de rotation euclidienne est encore symétrique, nous voyons que le transformé d'un noyau symétrique par un noyau symétrique est symétroïde. On peut montrer aisément que ces noyaux peuvent être considérés aussi comme des produits de noyaux symétriques. Soit en effet K un tel noyau, transformé du noyau symétrique S par le noyau symétrique σ

$$K = \sigma^{-1} S \sigma$$

on a alors

$$S = \sigma K \sigma^{-1}$$

puis

$$S = \overline{S} = \sigma K \sigma^{-1} = \sigma^{-1} (\overline{\overline{\sigma K}}) = \sigma^{-1} \overline{K} \sigma$$

donc

$$\overline{K} = \sigma^2 K \sigma^{-2}$$

ou

$$\sigma^{-2} \overline{K} = K \sigma^{-2}$$

posant ensuite

$$K \sigma^{-2} = H$$

nous voyons que

$$\sigma^{-2} \overline{K} = \overline{H}$$

et donc que H est symétrique, si donc $H = \varsigma$ symétrique, on a

$$K = \varsigma \sigma^2$$

produit d'un noyau symétrique ς par un noyau symétrique positif (à la **F r e d h o l m**) σ^2. Inversement si

$$K = \varsigma\sigma^2$$

on a

$$\varsigma = K\sigma^{-2} = \overline{\varsigma} = \sigma^{-2}\overline{K}$$

et

$$\overline{K} = \sigma^2 K \sigma^{-2}$$

puis

$$\sigma^{-1}\overline{K}\sigma = \sigma K \sigma^{-1}$$

d'où en posant

$$S = \sigma K \sigma^{-1} = \sigma^{-1}\overline{K}\sigma = \overline{S}$$

ce qui montre que S est symétrique et que

$$K = \sigma^{-1} S \sigma$$

est le transformé du noyau symétrique S par le noyau symétrique σ.

Si nous considérons d'une manière générale ces noyaux K produit de deux noyaux symétriques ς et Σ, nous dirons qu'ils sont symétrisables par composition avec un noyau symétrique, car on a

$$\varsigma = K\Sigma^{-1} \quad \text{ou} \quad \Sigma = \sigma^{-1} K$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\varsigma(st) = K(st) + \Sigma^{-1}(st) + \int_0^1 \Sigma^{-1}(su)\,K(ut)\,du$$

ou

$$\Sigma(st) = K(st) + \sigma^{-1}(st) + \int_0^1 K(su)\,\sigma^{-1}(ut)\,du$$

ou bien encore en remarquant que $\varsigma - \Sigma^{-1}$ est aussi symétrique, nous voyons qu'il existe alors des noyaux symétriques ς et Σ tels que les noyaux

$$K(st) + \int_0^1 \Sigma^{-1}(su)\,K(ut)\,du$$

et

$$K(st) + \int_0^1 K(su)\,\sigma^{-1}(ut)\,du$$

soient symétriques. Cette définition est à rapprocher de celle des noyaux symétrisables de Marty[1]. et on peut dire que cette nouvelle définition s'obtient en ordonnaut au sens de M. Bouligand[2]) la définition de Marty.

On peut aisément, en appliquant les méthodes indiquées par Marty, montrer directement que ces noyaux ont des valeurs singulières réelles et simples, et qu'ils en ont au moins une. Il est à remarquer d'ailleurs que ces démonstrations sont plus simples que celles de Marty, en ce sens qu'elles exigent moins d'hypotbèses sur le noyau symétrisant (il suffit ici qu'il soit positif au sens de Fredholm, cela entraînant alors qu'il est défini, tandis que dans le cas de Marty, les deux choses étaient distinctes). Ce fait est une conséquence de ce que la nouvelle définition est bien ordonnée, alors que l'autre ne l'était pas. Inversement d'ailleurs il est juste de dire que ces nouveaux noyaux forment un ensemble moins étendu que celui des noyaux de Marty proprement dits. En particulier il n'est plus exact que tout noyau à valeurs singulières distinctes et réelles soit symétrisable à ce nouveau point de vue, alors que ces noyaux sont symétrisables au point de vue de Marty.

Cette digression faite, je vais maintenant montrer que l'on peut résoudre pour les noyaux symétroïdes le problème posé par M. Vito Volterra de la permutabilité de seconde espèce.

On dit que deux noyaux sont permutables de seconde espèce, au sens de Volterra, si l'on a dans nos notations

$$HS = SH$$

alors

$$S = H^{-1} S H$$

et le transformé de S par H est identique à S. Proposons-nous de trouver tous les noyaux H permutables à un noyau symétroïde donné S. Reprenons les notations employées plus haut, nous avons vu que si on pose

$$\dot{S} = H^{-1} S H$$

et si on désigne $\mathcal{A}$ la multiplicité ponctuellement invariée par $\bar{S}$,

---

[1]) Voir au sujet des noyaux de Marty: Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences. 6 Juin 1910, et Goursat, Traité d'Analyse, tome III, pages 466 & 483.

[2]) Voir à ce sujet une note de cet auteur au Bulletin des Sciences Mathématiques de Mai 1927.

la multiplicité ponctuellement invariée par $\dot{S}$ est $\mathfrak{A}$ transformé de $\mathfrak{A}$ par $\overline{H}^{-1}$. De même si on appelle $\mathfrak{M}_i$ la multiplicité linéaire formée par les fonctions ψ_i, fondamentales associées correspondant à la même valeur singulière λ_i, la multiplicité $\dot{\mathfrak{M}}_i$, formée par les fonctions ψ'_i, fondamentales associées du noyau S correspondant à cette même valeur singulière λ_i, est la transformée de $\mathfrak{M}_i$ par $\overline{H}^{-1}$. Pour que

$$S = \dot{S}$$

il est donc nécessaire que les multiplicités $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{M}_i$ soient invariées séparément (chacune dans son ensemble et d'une manière qui peut être quelconque) par le noyau $\overline{H}$. Si S est symétroïde ces conditions sont de plus suffisantes pour la permutabilité de S et H car la donnée, alors la même pour S et $\dot{S}$, des multiplicités $\mathfrak{M}_i$, des rapports d'homotétie correspondant à chacune d'elles, et de la multiplicité $\mathfrak{A}$ (formant avec les $\mathfrak{M}_i$ un système complet et fermé) détermine une seule transformation de Fredholm, celle justement qui a pour noyau S, on a donc

$$S = \dot{S}$$

(à un ensemble de mesure nulle près). Pour trouver donc les noyaux H permutables avec le noyau symétroïde S, il suffit de prendre les noyaux invariant les multiplicités $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{M}_i$, et de former ensuite leur associé.

Nous allons mettre en évidence dans le paragraphe qui suit une autre propriété des noyaux symétroïdes, propriété qui laisse prévoir que ces noyaux doivent jouer un rôle important dans la théorie des groupes continus finis et infinis de transformations de Fredholm.

VI.

Le groupe continu à deux paramètres.

Nous allons d'abord déterminer la transformation courante d'un tel groupe, soit

$$g(s) = f(s) + \int_0^1 K(st|ab)\, f(t)\, dt$$

le noyau $K(st|at)$ de carré sommable en s et t pour

$$0 \leqslant s \leqslant 1; \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

est continu et dérivable en a et b dans un certain domaine $\mathfrak{D}$ de variation de a et de b. Nous supposons de plus que ce domaine contient le point

$$a = 0; \qquad b = 0$$

et que

$$K(st|OO) = 0$$

de telle sorte qu'à ce point correspond dans le groupe la transformation identique. Nous désignerons enfin par $H(st|ab)$ le noyau inverse de $K(st|ab)$ de telle sorte que

$$f(s) = g(s) + \int_0^1 H(st|ab) g(t)\, dt$$

et que

$$H(st|ab) + K(st|ab) + \int_0^1 H(su|ab) K(ut|ab)\, du = 0$$

de plus

$$H(st|ab) = K(st|a'; b')$$

où a' et b' sont fonctions de a et de b Ecrivons qu'il y a groupe. Posant

$$g(s) = f(s) + \int_0^1 K(st|ab) f(t)\, dt$$

et

$$h(s) = g(s) + \int_0^1 K(st|cd) g(t)\, dt$$

on doit avoir

$$h(s) = f(s) + \int_0^1 K(st|\alpha\beta) f(t)\, dt$$

où α et β sont fonctions de a, b, c, d. Prenons, comme il est classique a, b, α, β, comme variables indépendantes. Alors c et d sont des fonctions de a, b, α, β; $g(s)$ est fonction de s, a, b, et on a identiquement

$$g(s) + \int_0^1 K(st|cd) g(t)\, dt = f(s) + \int_0^1 K(st|\alpha\beta) f(t)\, dt$$

le deuxième membre est fonction seulement des s, α, β, donc

$$\frac{\delta}{\delta a}\left[g(s)+\int_0^1 K(st|cd)g(t)\,dt\right]=\frac{\delta}{\delta b}\left[g(s)+\int_0^1 K(st|cd)g(t)\,dt\right]=0$$

on a par exemple

$$\frac{\delta}{\delta a}g(s)+\int_0^1\left[\frac{\delta}{\delta c}K(st|cd)\frac{\delta c}{\delta a}+\frac{\delta}{\delta d}K(st|cd)\frac{\delta d}{\delta a}\right]g(t)\,dt$$

$$+\int_0^1 K(st|cd)\frac{\delta}{\delta a}g(t)\,dt=0$$

et de même en dérivant en b Puis ensuite

$$\frac{\delta}{\delta a}g(s)=-\int_0^1\left[\frac{\delta}{\delta c}K(st|cd)\frac{\delta c}{\delta d}+\frac{\delta}{\delta d}K(st|cd)\frac{\delta d}{\delta a}\right]g(t)\,dt$$

$$-\int_0^1 H(st|cd)\,.\left[\int_0^1\left[\frac{\delta}{\delta c}K(tu|cd)\frac{\delta c}{\delta a}+\frac{\delta}{\delta d}K(tu|cd)\frac{\delta d}{\delta a}\right]g(u)\,du\right]dt$$

$$=-\int_0^1\left\{\frac{\delta c}{\delta a}\left[\frac{\delta}{\delta c}K(st|cd)+\int_0^1 H(su|cd)\frac{\delta}{\delta c}K(ut|cd)\,du\right]\right.$$

$$\left.+\frac{\delta d}{\delta a}\left[\frac{\delta}{\delta d}K(st|cd)+\int_0^1 K(su|cd)\frac{\delta}{\delta d}K(ut|cd)\,du\right]\right\}g(t)\,dt$$

d'où

$$\frac{\delta}{\delta a}g(s)=-\frac{\delta c}{\delta a}\int_0^1\gamma(st|cd(g(t)\,dt-\frac{\delta d}{\delta a}\int_0^1\delta(st|cd)g(t)\,dt$$

et

$$\frac{\delta}{\delta b}g(s)=-\frac{\delta c}{\delta b}\int_0^1\gamma(st|cd)g(t)\,dt-\frac{\delta d}{\delta b}\int_0^1\delta(st|cd)g(t)\,dt$$

en posant

$$\gamma(st|cd)=\frac{\delta}{\delta c}K(st|cd)+\int_0^1 H(su|cd)\frac{\delta}{\delta c}K(u|tcd)\,du,$$

et

$$\delta(st|cd) = \frac{\partial}{\partial a} K(st|cd) + \int_0^1 H(su|cd) \frac{\partial}{\partial d} K(ut|cd)\, du,$$

a) considérons maintenant le noyau $K(st|\epsilon\eta)$ où ϵ et η sont des infiniments petits équivalents d'un ordre que nous considérons comme le premier. On a au second ordre près

$$K(st|\epsilon\eta) = \epsilon\, A(st) + \eta\, B(st)$$

avec

$$A(st) = \left[\frac{\partial}{\partial a} K(st|ab)\right]_{\substack{a=0\\b=0}}$$

et

$$B(st) = \left[\frac{\partial}{\partial b} K(st|ab)\right]_{\substack{a=0\\b=0}}$$

les deux noyaux $A(st)$ et $B(st)$ sont naturellement indépendants de a et b.

b) considérons maintenant la transformation de noyau

$$K(st|a+\epsilon, b+\eta) = K(st|ab) + \epsilon\left[\frac{\partial}{\partial a} K(st|ab)\right] + \eta\left[\frac{\partial}{\partial b} K(st|ab)\right];$$

au second ordre près; posons

$$g(s) = f(s) + \int_0^1 K(st|a+\epsilon, b+\eta) f(t)\, dt$$

et

$$h(s) = g(s) + \int_0^1 H(st|a, b)\, g(t)\, dt$$

il vient

$$h(s) = f(s) + \int_0^1 \left| K(st|a+\epsilon, b+\eta) + H(st|ab) + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 H(su|a, b)\, K(ut|a+\epsilon, b+\eta)\, du \right| f(t)\, dt;$$

ou au second ordre près, en tenant compte de la relation entre H et K,

$$h(s) = f(s) + \int_0^1 [\epsilon\gamma(st|ab) + \eta\delta(st|ab)] f(t)\, dt\,;$$

et cette transformation étant infiniment voisine de la transformation identique, on a

$$\epsilon\gamma(st|ab) + \eta\delta(st|ab) = EA(st) + HB(st)$$

où E et H tendent vers 0 avec ϵ et η et sont des fonctions de ϵ, η, a, b, seulement. De là on tire

$$\gamma(st|ab) = p(ab)\, A(st) + q(ab)\, B(st)$$
$$\delta(st|ab) = r(ab)\, A(st) + s(ab)\, B(st)$$

puis

$$\frac{\partial}{\partial a} g(s) = -\left[p(cd)\frac{\partial c}{\partial a} + r(cd)\frac{\partial d}{\partial a}\right]\int_0^1 A(st)\, g(t)\, dt -$$
$$-\left[q(ad)\frac{\partial c}{\partial a} + s(cd)\frac{\partial d}{\partial a}\right]\int_0^1 B(st)\, g(t)\, dt;$$

$$\frac{\partial}{\partial b} g(s) = -\left[p(cd)\frac{\partial c}{\partial b} + r(cd)\frac{\partial d}{\partial b}\right]\int_0^1 A(st)\, g(t)\, dt -$$
$$-\left[q(cd)\frac{\partial c}{\partial b} + s(cd)\frac{\partial d}{\partial b}\right]\int_0^1 B(st)\, g(t)\, dt;$$

et les premiers membres ne dépendant que de a et b, on aura

$$\frac{\partial}{\partial a} g(s) = P(ab)\int_0^1 A(st)\, g(t)\, dt + Q(ab)\int_0^1 B(st)\, g(t) dt;$$

$$\frac{\partial}{\partial b} g(s) = R(ab)\int_0^1 A(st)\, g(t)\, dt + S(ab)\int_0^1 B(st)\, g(t)\, dt\,;$$

qui sont les équations intégro-différentielles du groupe.

Intégration et conditions d'intégrabilité.

En exprimant de deux manières la dérivée seconde $\frac{\partial^2}{\partial a \partial t} g(s)$ et en posant

$$(K \cdot g) = \int_0^1 K(st)\, g(t)\, dt;$$

il vient la condition

$$\left(\frac{\delta P}{\delta b} - \frac{\delta R}{\delta a}\right)(A \cdot g) + \left(\frac{\delta Q}{\delta b} - \frac{\delta S}{\delta a}\right) \cdot (B \cdot g) +$$
$$+ P\left(A \cdot \frac{\delta g}{\delta b}\right) + Q\left(B \cdot \frac{\delta g}{\delta b}\right) - R\left(A \cdot \frac{\delta g}{\delta b}\right) - S\left(B \cdot \frac{\delta g}{\delta a}\right) = 0$$

et tenant compte des valeurs de $\dfrac{\delta g}{\delta a}$ et de $\dfrac{\delta g}{\delta b}$,

$$\left(\frac{\delta P}{\delta b} - \frac{\delta R}{\delta a}\right) \cdot (A \cdot g) + \left(\frac{\delta Q}{\delta b} - \frac{\delta S}{\delta a}\right) \cdot (B \cdot g +$$
$$+ P[A \cdot \{R(A \cdot g) + S(B \cdot g)\}] + Q[B \cdot \{R(A \cdot g) + S(B \cdot g)\}] -$$
$$- R[A \cdot \{P(A \cdot g) + Q(B \cdot g)\}] - S[B \cdot \{P(A \cdot g) + Q(B \cdot g)\}] = 0$$

ou

$$\left(\frac{\delta P}{\delta b} - \frac{\delta R}{\delta a}\right) \cdot (A \cdot g) + \left(\frac{\delta Q}{\delta b} - \frac{\delta S}{\delta a}\right) \cdot (B \cdot g) +$$
$$[PS - QR]\{[A \cdot (B \cdot g] - [B \cdot (A \cdot g)]\} = 0$$

avec

$$[A \cdot (B \cdot g)] = \int_0^1 [AB](st)\, g(t)\, dt;$$

en posant

$$[AB](st) = \int_0^1 A(su)\, B(ut)\, du;$$

puis

$$[A \cdot (B \cdot g)] - [B \cdot (A \cdot g)] = (\{AB\} \cdot g) = \int_0^1 \{AB\}(st)\, g(t)\, dt;$$

avec

$$\{AB\} = [AB] - [BA]$$

on doit donc avoir identiquement

$$(PS - QR)\{AB\} = \left(\frac{\delta R}{\delta a} - \frac{\delta P}{\delta b}\right) A + \left(\frac{\delta S}{\delta a} - \frac{\delta Q}{\delta b}\right) B;$$

Remarquons d'abord que $PS - QR$ ne peut être identiquement nul. En effet faisant dans les équations intégro-différentielles du groupe

$$a = b = 0$$

il vient

$$\left[\frac{\delta}{\delta a} g(s)\right]_{\substack{a=0\\b=0}} = P(oo)\int_0^1 A(st)g(t)\,dt + Q(oo)\int_0^1 B(st)g(t)\,dt;$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta b} g(s)\right]_{\substack{a=0\\b=0}} = R(oo)\int_0^1 A(st)g(t)\,dt + S(oo)\int_0^1 B(st)g(t)\,dt;$$

D'ailleurs pour ϵ et η infiniment petits on a au second ordre près

$$g(s) = f(s) + \epsilon\int_0^1 A(st)f(t)\,dt + \eta\int_0^1 B(st)f(t)\,dt;$$

donc

$$P(oo) = 1;\quad Q(oo) = 0;\quad R(oo) = 0;\quad S(oo) = 1$$

et

$$(PS - QR)_{\substack{0\\0}} = 1$$

ne peut donc être identiquement nul, et la condition d'intégrabilité trouvée plus haut donne

$$\{AB\} = \frac{1}{PS - QR}\left(\frac{\delta R}{\delta a} - \frac{\delta P}{\delta b}\right)A + \frac{1}{PS - QR}\left(\frac{\delta S}{\delta a} - \frac{\delta Q}{\delta b}\right)B;$$

le premier membre étant indépendant de a et de b, ceci exige

$$\{AB\} = \alpha A + \beta B$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{PS - QR}\left(\frac{\delta R}{\delta a} - \frac{\delta P}{\delta b}\right);\qquad \beta = \frac{1}{PS - QR}\left(\frac{\delta S}{\delta a} - \frac{\delta Q}{\delta b}\right):$$

où α et β sont des constantes de structure. De ces équations on tire immédiatement, puisque α et β sont des constantes

$$\frac{\delta}{\delta a}\Big[\beta R - \alpha S\Big] = \frac{\delta}{\delta b}\Big[\beta P - \alpha Q\Big];$$

Distinguons maintenant différents cas.

1) α et β sont tous deux différents de 0.

On a alors à cause de la condition précédente

$$\beta R - \alpha S = \frac{\delta U}{\delta b};\qquad \beta P - \alpha Q = \frac{\delta U}{\delta a}$$

où U est une fonction arbitraire dérivable de a et de b dans le domaine $\mathfrak{D}$. Il vient ensuite, puisque α et β sont tous deux différents de 0

$$P=\frac{1}{2\beta}\left[\frac{\delta U}{\delta a}+V\right]; \qquad Q=\frac{1}{2\alpha}\left[-\frac{\delta U}{\delta a}+V\right];$$

$$R=\frac{1}{2\beta}\left[\frac{\delta U}{\delta b}+W\right]; \qquad S=\frac{1}{2\alpha}\left[-\frac{\delta U}{\delta b}+W\right];$$

où V et W sont indéterminées. Ces formules donnent

$$PS-QR=\frac{1}{2\alpha\beta}\left[W\frac{\delta U}{\delta a}-V\frac{\delta U}{\delta b}\right];$$

et

$$\frac{\delta R}{\delta a}-\frac{\delta P}{\delta b}=\frac{1}{2\beta}\left[\frac{\delta W}{\delta a}-\frac{\delta V}{\delta b}\right]; \quad \frac{\delta S}{\delta a}-\frac{\delta Q}{\delta b}=\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{\delta W}{\delta a}-\frac{\delta V}{\delta b}\right]$$

d'où la condition

$$\frac{\delta W}{\delta a}-\frac{\delta V}{\delta b}=W\frac{\delta U}{\delta a}-V\frac{\delta V}{\delta b}$$

ou

$$W\frac{\delta U}{\delta a}-\frac{\delta W}{\delta a}=V\frac{\delta U}{\delta b}-\frac{\delta V}{\delta b}$$

posant pour un instant

$$U=\operatorname{Log} v$$

il vient, en multipliant les deux membres par v

$$W\frac{\delta v}{\delta a}-v\frac{\delta W}{\delta a}=V\frac{\delta v}{\delta b}-v\frac{\delta V}{\delta b}$$

ou

$$\frac{\delta}{\delta a}\left[\frac{W}{v}\right]=\frac{\delta}{\delta b}\left[\frac{V}{v}\right]$$

puis

$$W=v\frac{\delta T}{\delta b}; \qquad V=\frac{\delta T}{\delta a}$$

où T est une fonction de a et de b définie et dérivable dans le domaine $\mathfrak{D}$, on a ensuite

$$P=\frac{1}{2\beta}\left[\frac{1}{v}\frac{\delta v}{\delta a}+v\frac{\delta T}{\delta a}\right]; \qquad Q=\frac{1}{2\alpha}\left[-\frac{1}{v}\frac{\delta v}{\delta a}+v\frac{\delta T}{\delta a}\right];$$

$$R=\frac{1}{2\beta}\left[\frac{1}{v}\frac{\delta v}{\delta b}+v\frac{\delta T}{\delta b}\right]; \qquad S=\frac{1}{2a}\left[-\frac{1}{v}\frac{\delta v}{\delta b}+v\frac{\delta T}{\delta b}\right];$$

et en revenant à la fonction U

$$P=\frac{1}{2\beta}\left[\frac{\delta U}{\delta a}+e^{U}\frac{\delta T}{\delta a}\right]; \qquad Q=\frac{1}{2a}\left[-\frac{\delta U}{\delta a}+e^{U}\frac{\delta T}{\delta a}\right];$$

$$R=\frac{1}{2\beta}\left[\frac{\delta U}{\delta b}+e^{U}\frac{\delta T}{\delta b}\right]; \qquad S=\frac{1}{2a}\left[-\frac{\delta U}{\delta b}+e^{U}\frac{\delta T}{\delta b}\right];$$

inversement il est bien clair que

$$\frac{\delta U}{\delta a}=\beta P-aQ \qquad \frac{\delta U}{\delta b}=\beta R-aS$$

$$\frac{\delta T}{\delta a}=e^{-U}[aQ+\beta P] \qquad \frac{\delta T}{\delta b}=e^{-U}[aS+\beta R]$$

et ces conditions sont compatibles à cause des relations entre P, Q, R, S.

De plus il faut remarquer que pour $a=b=0$ on a

$$P(oo)=1; \quad Q(oo)=0; \quad R(oo)=0; \quad S(oo)=1$$

et donc

$$\left(\frac{\delta U}{\delta a}\right)_0=\beta; \qquad \left(\frac{\delta U}{\delta b}\right)_0=-a$$

$$\left(\frac{\delta T}{\delta a}\right)_0=\beta e^{-U_0}; \qquad \left(\frac{\delta T}{\delta a}\right)_0=ae^{-U_0}$$

U et T sont déterminés à une constante additive près et comme leurs dérivées existent pour $a=b=0$ on peut toujours supposer que

$$U(oo)=T(oo)=0$$

2) Passons maintenant au cas où l'une des constantes de structure est nulle, soit par exemple

$$\beta=0; \qquad a\neq 0$$

on a alors les conditions

$$a=\frac{1}{PS-QR}\left(\frac{\delta R}{\delta a}-\frac{\delta P}{\delta b}\right); \qquad 0=\frac{\delta S}{\delta a}-\frac{\delta Q}{\delta b}$$

il existe alors une fonction U, définie et dérivable dans le domaine $\mathfrak{D}$ telle que

$$S = -\frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial b}; \qquad Q = -\frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial a};$$

on a ensuite

$$PS - QR = \frac{1}{a}\left[R\frac{\partial U}{\partial b} - P\frac{\partial U}{\partial b}\right]$$

et la seconde condition

$$\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{\partial P}{\partial b} = R\frac{\partial U}{\partial a} - P\frac{\partial U}{\partial b}$$

qui s'écrit encore

$$R\frac{\partial U}{\partial a} - \frac{\partial R}{\partial a} = P\frac{\partial U}{\partial b} - \frac{\partial P}{\partial b}$$

ou en posant

$$U = \operatorname{Log} v$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{R}{v}\right) = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{P}{v}\right)$$

puis

$$R = v\frac{\partial T}{\partial b}; \qquad P = v\frac{\partial T}{\partial a}$$

où T est une fonction de a et de b définie et dérivable dans le domaine $\mathfrak{D}$, on a ensuite en revenant à la fonction U

$$P = e^U\frac{\partial T}{\partial a}; \qquad Q = -\frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial a};$$

$$R = e^U\frac{\partial T}{\partial b}; \qquad S = -\frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial b};$$

et inversement

$$\frac{\partial U}{\partial a} = -aQ; \qquad \frac{\partial U}{\partial b} = -aS;$$

$$\frac{\partial T}{\partial a} = e^{-U}P; \qquad \frac{\partial T}{\partial b} = e^{-U}R;$$

tenant ensuite compte des valeurs de P, Q, R, S pour $a = b = 0$, on a comme plus haut

$$\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_0 = 0; \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial b}\right)_0 = -\alpha$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)_0 = e^{-U_0}; \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial b}\right)_0 = 0$$

U et T sont déterminés à une constante additive près et comme leurs dérivées existent pour $a=b=0$ on peut toujours supposer que

$$U(o, o)=T(o, o)=0$$

3) Dans le cas maintenant où α et β sont tous deux nuls, on a les conditions

$$\frac{\delta P}{\delta a}=\frac{\delta P}{\delta b}; \qquad \frac{\delta S}{\delta a}=\frac{\delta Q}{\delta b}$$

d'où on tire immédiatement

$$P=\frac{\delta T}{\delta a}; \qquad Q=\frac{\delta U}{\delta a}; \qquad R=\frac{\delta T}{\delta b}; \qquad S=\frac{\delta U}{\delta b}$$

où U et T sont deux fonctions définies et dérivables dans le domaine $\mathfrak{D}$ que comme plus haut on peut supposer toutes deux nulles pour

$$a=b=0$$

Nous allons maintenant, dans chacun de ces trois cas faire un changement de variables ramenant les équations intégro différentielles du groupe à une forme canonique. Nous prendrons dans chacun des trois cas U et T comme nouvelles variables. On a alors en reprenant les notations employées plus haut

$$\frac{\delta g}{\delta U}=(A \cdot g)\left[P \frac{\delta a}{\delta U}+R \frac{\delta b}{\delta U}\right]+(B \cdot g)\left[Q \frac{\delta a}{\delta U}+S \frac{\delta b}{\delta U}\right];$$

$$\frac{\delta g}{\delta T}=(A \cdot g)\left[P \frac{\delta a}{\delta T}+R \frac{\delta b}{\delta T}\right]+(B \cdot g)\left[Q \frac{\delta a}{\delta T}+S \frac{\delta b}{\delta T}\right];$$

d'ailleurs les conditions

$$1=\frac{\delta U}{\delta a} \frac{\delta a}{\delta U}+\frac{\delta U}{\delta b} \frac{\delta b}{\delta U}; \qquad 0=\frac{\delta T}{\delta a} \frac{\delta a}{\delta U}+\frac{\delta T}{\delta b} \frac{\delta b}{\delta U};$$

$$0=\frac{\delta U}{\delta a} \frac{\delta a}{\delta T}+\frac{\delta U}{\delta b} \frac{\delta b}{\delta T}; \qquad 1=\frac{\delta T}{\delta a} \frac{\delta a}{\delta T}+\frac{\delta T}{\delta b} \frac{\delta b}{\delta T};$$

donnent

$$\frac{\delta a}{\delta U}=\frac{1}{\Delta} \frac{\delta T}{\delta b}; \qquad \frac{\delta b}{\delta U}=-\frac{1}{\Delta} \frac{\delta T}{\delta a};$$

$$\frac{\delta a}{\delta T}=-\frac{1}{\Delta} \frac{\delta U}{\delta b}; \qquad \frac{\delta b}{\delta T}=\frac{1}{\Delta} \frac{\delta U}{\delta a};$$

en posant

$$\Delta = \frac{\delta U}{\delta a}\frac{\delta T}{\delta b} - \frac{\delta U}{\delta b}\frac{\delta T}{\delta a}$$

par suite

$$\frac{\delta g}{\delta U} = \frac{1}{\Delta}\left\{(A\,.\,g)\left[P\frac{\delta T}{\delta b} - R\frac{\delta T}{\delta a}\right] + (B\,.\,g)\left[Q\frac{\delta T}{\delta b} - S\frac{\delta T}{\delta a}\right]\right\};$$

$$\frac{\delta g}{\delta T} = \frac{1}{\Delta}\left\{(A\,.\,6)\left[R\frac{\delta U}{\delta a} - P\frac{\delta U}{\delta b}\right] + (B\,.\,g)\left[S\frac{\delta U}{\delta a} = Q\frac{\delta U}{\delta b}\right]\right\};$$

distinguons maintenant les différents cas.

1) On a, d'après les valeurs de P, Q, R, S

$$\Delta = 2\,a\beta e^{-U}(PS - QR)$$

et Δ n'est pas identiquement nul puisque $PR - QS$ ne l'est pas, le changement de variables est donc légitime; il vient ensuite

$$\frac{\delta g}{\delta U} = \frac{1}{\Delta}\left[(A\,.\,g)\frac{\Delta}{2\,\beta} - (A\,.\,g)\frac{\Delta}{2\,a}\right]$$

$$\frac{\delta g}{\delta T} = \frac{1}{\Delta}\left[(A\,.\,g)\frac{e^{U}\Delta}{2\,\beta} + (B\,.\,g)\frac{e^{U}\Delta}{2\,a}\right]$$

ou

$$\frac{\delta}{\delta U}g(s) = \frac{1}{2\,a\beta}\int_0^1 [aA(st) - \beta A(st)]\,g(t)\,dt$$

$$\frac{\delta}{\delta T}g(s) = \frac{1}{2\,a\beta}e^{U}\int_0^1 [a\,A(st) + \beta B(st)]\,g(t)\,dt$$

2) On a dans ce cas

$$\Delta = ae^{-U}(PS - QR)$$

le changement de variables est légitime pour la même raison que précédemment; ensuite

$$\frac{\delta g}{\delta U} = \frac{1}{\Delta}\left[-(B\,.\,g)\frac{\Delta}{a}\right]$$

$$\frac{\delta g}{\delta T} = \frac{1}{\Delta}[(A\,.\,g)e^{-U}\,.\,\Delta]$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial U} g(s) = -\frac{1}{a} \int_0^1 B(st)\, g(t)\, dt$$

$$\frac{\partial}{\partial T} g(s) = e^U \int_0^1 A(st)\, g(t)\, dt$$

3) Enfin dans ce cas

$$\Delta = QR - PS$$

le changement de variables est encore légitime, et

$$\frac{\partial g}{\partial U} = (B \,.\, g); \qquad \frac{\partial g}{\partial T} = (A \,.\, g)$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial U} g(s) = \int_0^1 B(st)\, g(t)\, gt; \qquad \frac{\partial}{\partial T} g(s) = \int_0^1 A(st)\, g(t)\, dt;$$

Revenons maintenant sur le cas 1, si les noyaux A et B sont linéairement indépendants, on peut poser pour simplifier

$$\mathcal{A}(st) = \frac{\alpha A(st) - \beta B(st)}{2\alpha\beta}; \qquad \mathcal{B}(st) = \frac{\alpha A(st) + \beta B(st)}{2\alpha\beta};$$

et ces nouveaux noyaux ne sont pas identiquement nuls on a ensuite à cause de

$$\{A \,.\, B\} = \alpha A + \beta B$$

$$[\mathcal{A} \,.\, \mathcal{B}] = \frac{1}{4\alpha^2\beta^2} [\alpha^2 [A \,.\, A] + \alpha\beta \{A \,.\, B\} - \beta^2 [B \,.\, B]]$$

$$[\mathcal{B} \,.\, \mathcal{A}] = \frac{1}{4\alpha^2\beta^2} [\alpha^2 [A \,.\, A] - \alpha\beta \{A \,.\, B\} - \beta^2 [B \,.\, B]]$$

puis

$$\{\mathcal{A} \,.\, \mathcal{B}\} = \mathcal{B}$$

et le système intégro-différentiel prend dans ce cas la forme canonique

$$\frac{\partial}{\partial U} g(s) = \int_0^1 \mathcal{A}(st)\, g(t)\, dt;$$

$$\frac{\delta}{\delta T} g(s) = e^U \int_0^1 \mathfrak{B}(st)\, g(t)\, dt\,;$$

Remarquons que les noyaux A et B peuvent très bien vérifier la condition

$$\{A\,.\,B\} = \alpha A + \beta B$$

en étant linéairement dépendants, il suffit que

$$\alpha A + \beta B \equiv 0$$

alors

$$\{A\,.\,B\} \equiv 0$$

et c'est là le seul cas où ces deux conditions sont simultanément remplies; la transformation indiquée n'est plus alors possible mais il faut remarquer que le système intégro-différentiel devient

$$\frac{\delta}{\delta U} g(s) = \frac{1}{\beta} \int_0^1 A(st)\, g(t)\, dt\,; \qquad \frac{\delta}{\delta T} g(s) = 0$$

Nous reviendrons sur ce cas singulier un peu plus loin. Dans le cas 2, A et B sont certainement linéairement indépendants, sans quoi

$$\{A\,.\,B\} = 0$$

ce qui est contradictoire avec

$$\{A\,.\,B\} = \alpha A;$$

ici encore on peut poser pour simplifier

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{\alpha}\,.\,B\,; \qquad \mathfrak{B} = A$$

et à cause de

$$\{A\,.\,B\} = \alpha A$$

on a

$$\{\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{B}\} = -\frac{1}{\alpha}[B\,.\,A] + \frac{1}{\alpha}[A\,.\,B] = \frac{1}{\alpha}\{A\,.\,B\} = \mathfrak{B}$$

et le système intégro-différentiel devient

$$\frac{\delta}{\delta U} g(s) = \int_0^1 \mathfrak{A}(st)\, g(t)\, dt\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial T} g(s) = e^U \int_0^1 \mathcal{B}(st)\, g(t)\, dt;$$

Il y a donc identité entre les cas 1 et 2 qui sont réductibles à la même forme canonique

$$\frac{\partial}{\partial U} g(s) = \int_0^1 \mathcal{A}(st)\, g(t)\, dt;$$

$$\frac{\partial}{\partial T} g(s) = e^U \int_0^1 \mathcal{B}(st)\, g(t)\, dt;$$

avec

$$\{\mathcal{A} \,.\, \mathcal{B}\} = \mathcal{B};$$

ceci à la restriction près, dans le cas 1., que A et B sont linéairement indépendants.

Enfin dans le cas 3 on a à résoudre le système intégro-différentiel

$$\frac{\partial}{\partial U} g(s) = \int_0^1 B(st)\, g(t)\, dt\,; \qquad \frac{\partial}{\partial T} g(s) = \int_0^1 A(st)\, g(t)\, dt\,;$$

avec

$$\{A \,.\, B\} = 0$$

ce qui revient à dire que A et B sont permutables de seconde espèce au sens de Volterra. Occupons-nous d'abord de ce dernier cas.

Soit $g(s \mid U, T)$ la transformée de la fonction $f(s)$ pour les valeurs U et T des paramètres, on a

$$\frac{\partial}{\partial U} g(s \mid U, T) = \int_0^1 B(st)\, g(t \mid U, T)\, dt\,;$$

et

$$\frac{\partial}{\partial T} g(s \mid U, T) = \int_0^1 A(st)\, g(t \mid U, T)\, dt\,;$$

et

$$g(s \mid o, o) = f(s);$$

posons

$$g(s|o, T) = \gamma(s|T)$$

on a

$$\gamma(s|o) = f(s)$$

et faisant $U = 0$ dans la seconde équation du système

$$\frac{\delta}{\delta T}\gamma(s|T) = \int_0^1 A(st)\gamma(t|T)\,dt\,;$$

ou

$$\frac{\delta}{\delta T}g(s|oT) = \int_0^1 A(st)g(t|o\,T)\,dt\,;$$

c'est l'équation intégro-différentielle d'un groupe de Volterra et par suite

$$\gamma(s|T) = f(s) + \int_0^1 M(st|T)f(t)\,dt$$

où $M(st|T)$ désigne la somme de la série uniformément convergente pour toutes valeurs de T

$$M(st|T) = \sum_{n\,1}^{\infty}\frac{T^n}{n!}A^{(n)}(s)$$

connaissant $\gamma(s|T)$, $g(s|U, T)$ est donnée par l'équation intégro-différentielle

$$\frac{\delta}{\delta U}g(s|U, T) = \int_0^1 B(st)g(t|U, T)\,dt$$

où on fixe le paramètre T et où

$$g(s|o, T) = \gamma(s\,T)$$

c'est celle du groupe de Volterra à un paramètre engendré par le noyau B, on a donc

$$g(s|U, T) = \gamma(s|T) + \int_0^1 N(st|U)\gamma(t|T)\,dt$$

où $N(st|U)$ désigne la somme de la série uniformément convergente pour toutes valeurs de U

$$N(st|U) = \sum_{n\,i}^{\infty} \frac{U}{n!} B^{(n)}(st);$$

tenant compte de la forme de $\gamma(s|T)$ il vient

$$g(s|U,T) = f(t) + \int_0^1 L(st|U,T) f(t)\, dt$$

avec

$$L(st|U,T) = M(st|T) + N(st|U) + \int_0^1 N(s\sigma|U) M(\sigma t|T)\, d\sigma;$$

Si on remplace $M(st|T)$ et $N(st|U)$ par leur développement en série il vient pour $L(st|UT)$ un développement en série uniformément convergent pour toutes valeurs de U et de T:

$$L(st|U,T) = -1 + \sum_{m,\,n}^{\infty} \frac{U^m}{m!} \frac{T^n}{n!} [B^{(m)} \,.\, A^{(n)}];$$

Groupons dans cette série aussi absolument convergente les termes homogènes de degré p, on trouve

$$\frac{1}{p!}[U^p \,.\, B^{(p)} + C_p^1 U^{p-1} T \,.\, [B^{(p-1)} \,.\, A] + C_p^2 U^{p-1} T^2 [B^{(p-2)} \,.\, A^{(2)}] + \ldots]$$

avec

$$C_p^q = \frac{p!}{q!\,(p-q)!}$$

si d'autre part on cherche le p^ème^ itéré du noyau

$$UB(st) + TA(st)$$

on trouve, à cause de la permutabilité supposée de A et de B, précisément

$$(UB + TA)^{(p)} = U^p B^{(p)} + C_p^1 U^{p-1} T [B^{(p-1)} \,.\, A] + \\ + C_p^2 U^{p-2} T^2 [B^{(p-2)} \,.\, A^{(2)}] + \ldots$$

on a en effet successivement

$$(UB+TA)^{(1)} = UB+TA$$

$$(UB+TA)^{(2)} = U^2B^{(2)} + UT[B.A] + UT[A.B] + T^2A^{(2)}$$
$$= U^2B^{(2)} + 2\,UT[B.A] + T^2A^{(2)}$$

$$(UB+TA)^{(3)} = U^3B^{(3)} + 2\,U^2T[[B.A].B] + UT^2[A^{(2)}.B]$$
$$+ U^2T[B^{(2)}.A] + 2\,UT^2[B.A^{(2)}] + T^3.A^{(3)}$$
$$= U^3B^{(3)} + 3\,U^2T[B^{(2)}.A] + 3\,UT^2[B.A^{(2)}] +$$
$$+ T^3.A^{(3)}; \ldots$$

et la loi est évidemment générale. On a donc sous une forme plus concise

$$L(st\,|\,U,T) = \sum_{p\,1}^{\infty} \frac{1}{p!}(UB+TA)^{(p)}$$

ou en employant un symbolisme de sens évident

$$L(st\,|\,UT) = e^{(UB+TA)} - 1.$$

Cette dernière forme permet de trouver un théorème d'addition intégral pour $L(st\,|\,UT)$. En faisant le produit à la Fredholm des deux noyaux $L(st\,|\,UT)$ et $L(st\,|\,U'\,T')$ on trouve

$$[(e^{(UB+TA)} - 1).(e^{(U'B+T'A)} - 1)] + e^{(UB+TA)} + e^{(U'B+T'A)} - 2$$

ou en simplifiant

$$e^{[(U+U')+(T+T')A]} - 1;$$

on a donc le théorème d'addition intégral

$$L(st\,|\,(U+U'),(T+T')) = L(st\,|\,U,T) + L(s\,|\,U',T') +$$
$$+ \int_0^1 L(sa\,|\,UT)\,L(at\,|\,U'\,T')\,da;$$

Le calcul que nous venons de faire pour déterminer $L(st\,|\,U,T)$ prouve que si la solution existe elle est de la forme trouvée, il faut maintenant vérifier que l'expression obtenue satisfait bien au système considéré, ou bien, ce qui revient au même, que le noyau $L(st\,|\,U,T)$ satisfait au système intégro-différentiel

$$\frac{\delta}{\delta U} L(st\,|\,U,T) = B(st) + \int_0^1 B(sa)\,L(at\,|\,U,T)\,da;$$

$$\frac{\delta}{\delta T} L(st\,|\,U,T) = A(st) + \int_0^1 A(sa)\,L(at\,|\,U,T)\,da;$$

cette vérification est aisée, on a en effet

$$\frac{\delta}{\delta U} L(st \mid U, T) = B(st) + \sum_{p\,1}^{\infty} \frac{1}{p!} [B \,.\, (UB + TA)^{(p)}]$$

$$\frac{\delta}{\delta T} L(st \mid U, T) = A(st) + \sum_{p\,1}^{\infty} \frac{1}{p!} [A \,.\, (UB + TA)^{(p)}]$$

et

$$[B \,.\, L] = \sum_{p\,1}^{\infty} \frac{1}{p!} [B \,.\, (UB + TA)^{(p)}]$$

$$[B \,.\, L] = \sum_{p\,1}^{\infty} \frac{1}{p!} [A \,.\, (UB + TA)^{(p)}]$$

d'où la propriété annoncée. Il faut bien remarquer que tous ces calculs reposent essentiellement sur l'hypothèse que A et B sont permutables, ce qui permet d'y traiter les symbôles $[A^{(m)} \,.\, B^{(n)}]$ comme des produits.

Nous trouvons donc ainsi un groupe fonctionnel fini continu qui, comme il résulte du théorème d'addition intégral, est abèlien et isomorphe au groupe des translations dans un plan. Ce groupe est l'extension immédiate, au cas de deux paramètres, du groupe de Volterra dont nous avons rappelé plus haut la définition. On peut maintenant aisément imaginer la forme du groupe de Volterra à r paramètres dont la transformation finie est

$$g(s) = f(s) + \int_0^1 L(st \mid U_i) f(t)\, dt \qquad (i = 1; 2; \ldots r)$$

avec symboliquement

$$L(st \mid U_i) = e^{\sum_{i1}^{r} U_i A_i (st)} - 1$$

les noyaux $A_i(st)$ étant deux à deux permutables Le système intégro-différentiel attaché à ce groupe est

$$\frac{\delta g}{\delta U} = \int_0^1 A_i(st)\, g(t)\, dt \qquad (i = 1; 2; r)$$

les paramètres U_i sont les paramètres canoniques, le groupe est abèlien et isomorphe au groupe des translations dans l'espace à r dimensions.

Passons maintenant à l'autre alternative qui seule donne des choses vraiment nouvelles. Auparavant nous dirons un mot du cas singulier signalé plus haut, à savoir celui où le système intégro-différentiel se réduit à

$$\frac{\delta}{\delta U} g(s) = \frac{1}{\beta} \int_0^1 A(st) g(t) \, dt; \qquad \frac{\delta}{\delta T} g(s) = 0$$

il est alors bien clair que $g(s)$ ne dépend pas de T, et que l'on a

$$g(s) = f(s) + \int_0^1 L(st \,|\, U) f(t) \, dt,$$

avec

$$L(st \,|\, U) = \sum_{n\,1}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{U}{\beta} \right)^n A^{(n)}(st)$$

Les paramètres initiaux a et b ne sont donc pas essentiels, et le groupe se réduit à un groupe de Volterra à un paramètre.

Abordons le système intégro-différentiel canonique

$$\frac{\delta}{\delta U} g(s \,|\, U, T) = \int_0^1 \mathcal{A}(st) g(t \,|\, U T) \, dt;$$

$$\frac{\delta}{\delta T} g(s \,|\, \mathrm{U}, T) = e^U \int_0^1 \mathcal{B}(st) g(t \,|\, U T) \, dt;$$

avec la condition de structure ou d'intégrabilité

$$\{\mathcal{A} \,.\, \mathcal{B}\} = \mathcal{B}$$

soit la condition initiale

$$g(s \,|\, o o) = f(s)$$

posons

$$g(s \,|\, U, o) = v(s \,|\, U) \qquad g(s \,|\, o, T) = \theta(s \,|\, T);$$

avec

$$v(s \,|\, o) = \theta(s \,|\, o) = f(s)$$

on a en faisant successivement $T = 0$ et $U = 0$ dans la première et dans la seconde

$$\frac{\partial}{\partial U} v(s|U) = \int_0^1 \mathcal{A}(st)\, v(t|U)\, dt$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\, \theta(s|T) = \int_0^1 \mathcal{B}(st)\, \theta(t|T)\, dt$$

qui sont des équations intégro-différentielles de groupes de Volterra de telle sorte que

$$v(s|U) = f(s) + \int_0^1 \mathcal{M}(st|U) f(t)\, dt$$

$$\theta(s|T) = f(s) + \int_0^1 \mathcal{N}(st|T)\, f(t)\, dt$$

où $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ désignent les sommes de séries absolument et uniformément convergentes pour toutes les valeurs de U et T

$$\mathcal{M}(st|U) = \sum_{n\,1}^{\infty} \frac{U^n}{n!} \mathcal{A}^{(n)}(st); \quad \mathcal{N}(st|T) = \sum_{u\,1}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \mathcal{B}^{(n)}(st);$$

on a ensuite par les mêmes formules, soit

$$g(s|U,T) = \theta(s|T) + \int_0^1 \mathcal{M}(st|U)\, \theta(t|T)\, dt;$$

soit

$$g(s|U,T) = v(s|U) + \int_0^1 \mathcal{N}(st|e^U T)\, v(t|U)\, dt;$$

qui donnent respectivement

$$g(s|U,T) = f(s) + \int_0^1 L_1(st|U,T) f(t)\, dt;$$

et

$$g(s|U,T) = f(s) + \int_0^1 L_2(st|U,T) f(t)\, dt;$$

avec

$$L_1(st|UT) = \mathcal{N}(st|T) + \mathcal{M}(st|U) + \int_0^1 \mathcal{M}(s\sigma|U)\, \mathcal{N}(\sigma t|T)\, d\sigma;$$

et

$$L_2(st\,|\,UT) = \mathfrak{M}(st\,|\,U) + \mathfrak{N}(st\,|\,e^U T) +$$
$$+ \int_0^1 \mathfrak{N}(s\sigma\,|\,e^U T)\,\mathfrak{M}(\sigma t\,|\,U)\,d\sigma;$$

il faut maintenant montrer l'identité de L_1 et de L_2 moyennant la condition

$$\{\mathcal{A}\,.\,\mathcal{B}\} = \mathcal{B}$$

Partons de

$$[\mathcal{A}\,.\,\mathcal{B}] = [\mathcal{B}\,.\,\mathcal{A}] + \mathcal{B}$$

que nous écrivons symboliquement

$$[\mathcal{A}\,.\,\mathcal{B}] = [\mathcal{B}\,.\,(\mathcal{A} + 1)]$$

on a

$$[\mathcal{A}^{(2)}\,.\,\mathcal{B}] = [\mathcal{A}\,.\,[\mathcal{A}\ \ \mathcal{B}]] = \mathcal{A}\,.\,[\mathcal{B}\,.\,(\mathcal{A}+1)]] = [[\mathcal{A}\,.\,\mathcal{B}]\,.\,(\mathcal{A}+1)]$$
$$= [\mathcal{B}\,.\,(\mathcal{A}+1)^2]$$

qui se développe en

$$[\mathcal{A}^{(2)}\,.\,\mathcal{B}] = [\mathcal{B}\,.\,\mathcal{A}^{(2)}] + 2\,[\mathcal{B}\,.\,\mathcal{A}] + \mathcal{B}$$

puis

$$[\mathcal{A}^{(3)}\,.\,\mathcal{B}] = [\mathcal{A}\,.\,[\mathcal{B}\,.\,(\mathcal{A}+1)^2]] = [[\mathcal{A}\,.\,\mathcal{B}]\,.\,(\mathcal{A}+1)^2] = [\mathcal{B}\,.\,(\mathcal{A}+1)^3]$$

qui se développe en

$$[\mathcal{A}^{(3)}\,.\,\mathcal{B}] = [\mathcal{B}\,.\,\mathcal{A}^{(3)}] + 3\,[\mathcal{B}\,.\,\mathcal{A}^{(2)}] + 3\,[\mathcal{B}\,.\,\mathcal{A}] + \mathcal{B}$$

la loi est évidemment générale et on a par suite

$$[\mathcal{A}^{(n)}\,.\,\mathcal{B}] = [\mathcal{B}\,.\,(\mathcal{A}+1)^{(n)}]$$

Il vient en second lieu

$$[\mathcal{A}^{(n)}\,.\,\mathcal{B}^{(2)}] = [[\mathcal{B}\,.\,(\mathcal{A}+1)^{(n)}]\,.\,\mathcal{B}] = \left[\left[\sum_{p\,o}^{n} c_n^p[\mathcal{B}\,.\,\mathcal{A}^{(p)}]\right].\,\mathcal{B}\right]$$
$$= \sum_{p\,o}^{n} c_n^p\,[[\mathcal{B}\,.\,\mathcal{A}^{(p)}]\,.\,\mathcal{B}] = \sum_{p\,o}^{n} c_n^p[\mathcal{B}^{(2)}\,.\,(\mathcal{A}+1)^p]$$
$$= [\mathcal{B}^{(2)}\,.\,(2+\mathcal{A})^p]$$

On verrait ainsi de proche en proche que

$$[\mathcal{A}^{(n)}\,.\,\mathcal{B}^{(m)}] = [\mathcal{B}^{(n)}\,.\,(m+\mathcal{A})^{(n)}].$$

Proposons nous inversement de développer $[\mathcal{B}^{(n)} . \mathcal{A}^{(m)}]$ en une somme de termes de la forme

$$[\mathcal{A}^{(p)} . \mathcal{B}^{(q)}];$$

Partons cette fois de

$$[\mathcal{B} . \mathcal{A}] = [\mathcal{A} . \mathcal{B}] - \mathcal{B} = [(\mathcal{A} - 1)\mathcal{B}];$$

d'où

$$[\mathcal{B} . \mathcal{A}^{(2)}] = [(\mathcal{A} - 1) . [\mathcal{B} . \mathcal{A}]] = [(\mathcal{A} - 1)^2 . \mathcal{B}]$$

qui se développe en

$$[\mathcal{B} . \mathcal{A}^{(2)}] = [\mathcal{A}^{(2)} . \mathcal{B}] - 2\,[\mathcal{A} . \mathcal{B}] + \mathcal{B}$$

puis on a ensuite comme plus haut

$$[\mathcal{B} . \mathcal{A}^{(n)}] = [(\mathcal{A} - 1)^{(n)} . \mathcal{B}]$$

et il vient en second lieu

$$[\mathcal{B}^{(2)} . \mathcal{A}^{(n)}] = \left|\mathcal{B} . \left[\sum_{p\,o}^{n} (-1)^p c_n^p [\mathcal{A}^{(n-p)} . \mathcal{R}]\right]\right| = [(\mathcal{A} - 2)^{(n)} . \mathcal{B}^{(2)}];$$

enfin on a de la même manière

$$[\mathcal{B}^{(m)} . \mathcal{A}^{(n)}] = [(\mathcal{A} - m)^{(n)} . \mathcal{B}^{(m)}]$$

nous sommes maintenant en mesure de transformer tôut symbôle de la forme

$$[\ldots \mathcal{A}^{(p_1)} . \mathcal{B}^{(q_1)} . \mathcal{A}^{(p_2)} . \mathcal{B}^{(q_2)} \ldots]$$

en une somme de termes de la forme $[\mathcal{A}^{(m)} . \mathcal{B}^{(n)}]$ ou $[\mathcal{B}^{(m)} . \mathcal{A}^{(n)}]$ au choix.

Ceci posé on a

$$L_1(st \mid U, T) = \sum_{p\,1}^{\infty} \frac{U^p}{p!} \mathcal{A}^{(p)}(st) + \sum_{q\,1}^{\infty} \frac{T^q}{q!} \mathcal{B}^{(q)}(st) +$$

$$+ \sum_{pq\,1}^{\infty} \frac{U^p\,T^q}{p!\,q!} [\mathcal{A}^{(p)} . \mathcal{B}^{(q)}] = \sum_{pq\,0}^{\infty} \frac{U^p\,T^q}{p!\,q!} [\mathcal{A}^{(p)} . \mathcal{B}^{(q)}] - 1$$

portons maintenant notre attention sur L_2 et tout d'abord sur l'intégrale

$$\int_0^1 \mathfrak{N}(s\sigma \mid e^U T)\, \mathfrak{M}(\sigma t \mid U)\, d\sigma$$

$\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ étant des séries absolument et uniformément convergentes, cette intégrale est égale à la somme de la série aussi absolument et uniformément convergente

$$\sum_{pq\,1}^{\infty} \frac{1}{p!}\frac{1}{q!} T^p e^{pU} U^q [\mathcal{B}^{(p)} \cdot \mathcal{A}^{(q)}];$$

si dans cette série on remplace l'exponentielle e^{pU} on obtient une série à triple entrée qui sera elle aussi absolument et uniformément convergente, cherchons dans cette dernière série le terme en $T^p U^q$, il s'écrit évidemment

$$T^p U^q \frac{1}{p!}\left\{\frac{1}{q!}[\mathcal{B}^{(p)} \cdot \mathcal{A}^{(q)}] + \frac{1}{(q-1);1!}\frac{p}{1!}[\mathcal{B}^{(p)} \cdot \mathcal{A}^{(q-1)}] + \right.$$
$$\left. + \dots \frac{1}{1!}\frac{p^{q-1}}{(q-1)!}[\mathcal{B}^{(p)} \cdot \mathcal{A}]\right\}$$

si on lui adjoint le terme en $T^p \cdot U^q$ provenant du développement de

$$\mathfrak{N}(st\,|\,e^U T) = \sum_{p\,1}^{\infty} \frac{1}{p!} T^p e^{pU} \mathcal{B}^{(p)} = \sum_{p\,1}^{\infty}\sum_{q\,0}^{\infty} \frac{1}{p!}\frac{1}{q!} T^p p^q U^q \mathcal{B}^{(p)};$$

on trouve sans peine comme coefficient de $T^{(p)} U^{(q)}$ dans le développement définitif

$$\frac{1}{p!\,q!}[\mathcal{B}^{(p)} \cdot (p+\mathcal{A})^q] = \frac{1}{p!\,q!}\mathcal{A}^{(q)} \cdot \mathcal{B}^{(p)};$$

et on suppose dans ce calcul $p \geqslant 1$, si nous ajoutons les termes provenant de $\mathfrak{M}(st\,|\,U)$ on voit immédiatement que le développement définitif de L_2 est

$$\sum_{pq\,0}^{\infty} \frac{T^p \cdot U^q}{p!\,q!}[\mathcal{A}^{(q)} \cdot \mathcal{B}^{(p)}] - 1;$$

on a donc

$$L_1(st\,|\,U, T) \equiv L_2(st\,|\,U, T);$$

et les deux expressions trouvées plus haut pour $g(s\,|\,UT)$ sont donc identiques, et la manière dont on les a obtenues montre que $g(s\,|\,UT)$ est la solution unique, avec les conditions initiales données, des deux équations intégro-différentielles, alors compatibles, moyennant la condition

$$\{\mathcal{A} . \mathcal{B}\} = \mathcal{B}$$

du groupe, et l'équation indéfinie de celui-ci est en définitive

$$g(s \mid U, T) = f(s) + \int_0^1 L(st \mid U. T) f(t) \mathrm{d},$$

avec

$$L(st\, U, T) = \sum_{pq\, 0}^{\infty} \frac{T^p\, U^q}{p!\, q!} [\mathcal{A}^{(q)} . \mathcal{B}^{(p)}] - 1;$$

Mais cette fois $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ n'étant plus permutables, il n'y a plus de théorème d'addition intégral pour le noyau $L(st \mid U, T)$ et le groupe n'est plus abèlien.

Il est intéressant de déterminer les paramètres U'' et T'', de la transformation du groupe obtenue en composant les transformations correspondant respectivement aux paramètres U, T et U', T'. Partons pour cela des deux noyaux $L(st \mid UT)$ et $L(st \mid U'T')$ et calculons l'intégrale

$$\int_0^1 L(s\sigma \mid UT)\, L(\sigma t \mid U'T')\, ds$$

tenons compte de

$$L(st \mid UT) = \sum_{p\, q}^{\times} \frac{U^p\, T^q}{p!\, q!} [\mathcal{A}^{(p)} . \mathcal{B}^{(q)}]$$

où le sigma astérisqué signifie que dans la sommation on prend toutes les combinaisons d'indices p et q sauf la combinaison $p = q = 0$, dans ces conditions l'intégrale $[L . L']$ est la somme de la série uniformément et absolument convergente

$$\sum_{pqrs} \frac{U^p}{p!} \frac{T^q}{q!} \frac{U'^r}{r!} \frac{T'^s}{s!} [[\mathcal{A}^{(p)} . \mathcal{B}^{(q)}]] ;$$

avec la même convention de sommation, or on a

$$[[\mathcal{A}^{(p)} . \mathcal{B}^{q}] . [\mathcal{A}^{(r)} . \mathcal{B}^{(s)}]] = [\mathcal{A}^{(p)} . [\mathcal{B}^{(q)} . \mathcal{A}^{(r)}] . \mathcal{B}^{(s)}] =$$
$$= [\mathcal{A}^{(p)} . (\mathcal{A} - q)^{(r)} . \mathcal{B}^{(q+s)}] ;$$

et par suite

$$[\mathcal{A}^{(p)} . \mathcal{B}^{(q)} . \mathcal{A}^{(r)} . \mathcal{B}^{(s)}] = \sum_{\alpha\, 0}^{r} (-1)^{r-\alpha} C_r^\alpha\, q^{r-\alpha} [\mathcal{A}^{(p+\alpha)} . \mathcal{B}^{(q+s)}]$$

remplaçant les produits symboliques $[\mathcal{A}^{(p)} . \mathcal{B}^{(q)} . \mathcal{A}^{(r)} . \mathcal{B}^{(s)}]$ par leur valeur l'intégrale considérée apparaît comme une somme à quintuple entrée dont le terme général est

$$(-1)^{r-\alpha} \frac{U^p}{p!} \frac{T^q}{q!} \frac{U'^r}{r;} \frac{T'^s}{s!} q^{r-\alpha} c_r^\alpha [\mathcal{A}^{(p+\alpha)} . \mathcal{B}^{(q+s)}]$$

ou mieux

$$\frac{U^p}{p!} \cdot \frac{T^q}{q!} \cdot \frac{U'^\alpha}{\alpha!} \cdot \frac{T'^s}{s!} \cdot \frac{(-qU')^{r-\alpha}}{(r-\alpha)!} [\mathcal{A}^{(p+\alpha)} . \mathcal{B}^{(q+s)}]$$

avec les conventions de sommation suivantes:
p et q varient tous deux de 0 à l'infini, et ne sont pas simultanément nuls, r et s varient tous deux de 0 à l'infini et ne sont pas simultanément nuls, enfin α vérifie les inégalités

$$0 \leqslant \alpha \leqslant r$$

On voit aisément que cette série à quintuple entrée est absolument convergente. Posant en effet

$$|U| = \upsilon; \quad |T| = \theta; \quad |U'| = \upsilon'; \quad |T'| = \theta'$$

la valeur absolue du terme général est

$$\frac{\upsilon^p}{p!} \frac{\theta^q}{q!} \frac{\upsilon'^\alpha}{\alpha!} \frac{\theta'^s}{s!} \frac{(q\upsilon')^{r-\alpha}}{(r-\alpha)!} \left| [\mathcal{A}^{(p+\alpha)} . \mathcal{B}^{(q+s)}] \right| ;$$

et cette nouvelle série converge. Pour le montrer il suffit de faire voir que cela a lieu quand on la somme dans un ordre quelconque, puisqu'elle est à termes positifs. Faisons d'abord la somme par p, q, α, et s constants, et faisons varier r de α à l'infini. On trouve évidemment comme somme

$$\frac{\upsilon^p}{p!} \frac{\theta^q}{q!} \frac{\upsilon'^\alpha}{\alpha!} \frac{\theta'^s}{s!} e^{q\upsilon'} \left| [\mathcal{A}^{(p+\alpha)} . \mathcal{B}^{(q+s)}] \right| ;$$

Si nous supposons maintenant que pour toutes valeurs des variables on a, en désignant par A et B deux constantes positives

$$|\mathcal{A}| \leqslant A; \qquad |\mathcal{B}| \leqslant B$$

(si cela n'avait pas lieu pour $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, ce serait certainement le cas pour $\mathcal{A}^{(2)}$ et $\mathcal{B}^{(2)}$) il est bien clair qu'il en résulte

$$|[\mathcal{A}^{(p+\alpha)} . \mathcal{B}^{(q+s)}]| \leqslant A^{p+\alpha} B^{q+s}$$

et le terme général de la proposée est inférieur en valeur absolue à

$$\frac{v^p}{p!}\frac{\theta^q}{q!}\frac{v'^\alpha}{\alpha!}\frac{\theta'^s}{s!}\frac{(qv')^{r-\alpha}}{(r-\alpha)!}A^{p+\alpha}B^{q+1}$$

sommant cette dernière série par p, q, α, s, constants, on trouve comme plus haut

$$\frac{v^p}{p!}\frac{\theta^q}{q!}\frac{v'^\alpha}{\alpha!}\frac{\theta'^s}{s!}e^{qv'}A^{p+\alpha}B^{q+s}$$

on achève facilement la sommation en faisant d'abord la somme des termes où

$$p+\alpha=P; \qquad q+s=Q;$$

il y a un nombre fini de tels termes dont la somme est

$$\frac{1}{P!}\frac{1}{Q!}(v+v')^P\cdot(\theta'+\theta e^{v'})^Q\cdot A^P\cdot B^Q;$$

Il y a cependant une petite discussion à faire à cause des conditions aux limites:

1) $P\neq 0$, $Q\neq 0$ — Nous venons de faire la sommation pour toutes les solutions entières positives ou nulles des équations

$$p+\alpha=P; \qquad q+s=Q$$

mais il faut éliminer la combinaison

$$p=0; \quad \alpha=P; \qquad q=0; \quad s=Q$$

et donc retrancher le terme

$$\frac{v'^P}{P!}\cdot\frac{\theta'^Q}{Q!}A^P\cdot B^Q$$

de même pour la combinaison

$$p=P; \quad \alpha=0; \quad q=Q; \quad s=0$$

il faut retrancher du terme correspondant, qui est

$$\frac{v^P}{P!}\frac{\theta^Q}{Q!}e^{Qv'}A^P\cdot B^Q$$

la portion provenant du cas où r est nul, à savoir

$$\frac{v^P}{P!}\frac{\theta^Q}{Q!}A^P\cdot B^Q$$

et la véritable somme est dans ce cas

$$\frac{A^P \cdot B^Q}{P!\,Q!}\{(v+v')^P(\theta e^{v'}+\theta')^Q - v^P\theta^Q - v'^P\theta'^Q\}$$

2) une discussion toute identique montre que si $P=0$; $Q\neq 0$, la véritable somme est

$$\frac{B^Q}{Q!}\{(\theta e^{v'}+\theta')^Q - \theta^Q - \theta'^Q\}$$

et que si $P\neq 0$, $Q=0$ la véritable somme est

$$\frac{A^P}{P!}\{(v+v')^P - v^P - v'^P\};$$

enfin il faut exclure le cas où $P=Q=0$. La série double que nous venons ainsi d'obtenir est convergente et a évidemment pour somme

$$[e^{A(v+v')+B(\theta e^{v'}+\theta')}-1]-[e^{Av+B\theta}-1]-[e^{Av'+B\theta'}-1]$$

ou

$$e^{A(v+v)+B(\theta e^{v'}+\theta v')} - e^{Av+B\theta} - e^{Av'+B\theta'} + 1;$$

L'absolue convergence de la proposée est donc démontrée, pour la sommer nous procéderons comme plus haut et nous chercherons le coefficient du produit symbolique

$$\{\mathcal{A}^{(P)}\cdot\mathcal{B}^{(Q)}\}$$

Une analyse toute semblable donne comme coefficient de $\{\mathcal{A}^{(P)}\cdot\mathcal{B}^{(Q)}\}$;

$$\frac{1}{P!\,Q!}\{(U+U')^P(Te^{-U'}+T')^Q - U^PT^Q - U'^PT'^Q\};$$

comme coefficient de $\mathcal{B}^{(Q)}$

$$\frac{1}{Q!}\{(Te^{-U'}+T')^Q - T^Q - T'^Q\}$$

et comme coefficient de $\mathcal{A}^{(P)}$

$$\frac{1}{P!}\{(U+U')^P - U^P - U'^P\}$$

la combinaison $P=Q=0$ est exclue. La sommation définitive est immédiate en tenant compte du développement de $L(st\,|\,UT)$; on trouve

$$L[st|(U+U');(Te^{-U'}+T')] - L(st|UT) - L(st|U'T');$$

et par suite le produit à la Fredholm des noyaux $L(st|UT)$ et $L(st|U'T')$ est

$$L(st|(U+U');(Te^{-U'}+T'))$$

la question que nous nous étions posée initialement est donc résolue et la loi de composition des paramètres canoniques U et T est

$$U''=U+U'; \qquad T''=Te^{-U'}+T'$$

en particulier la transformation inverse de celle de paramètres U et T a ses paramètres définis par

$$U+U'=0; \qquad Te^{-U'}+T'=0$$

d'où

$$U'=-U; \qquad T'=-Te^{U}.$$

Nous voyons donc en résumé qu'il y a deux types de groupes à deux paramètres: le groupe permutable ou de Volterra généralisé et le groupe non abèlien que nous venons de déterminer. Le premier est attaché à tout système de deux noyaux permutables et le second à tout système de deux noyaux A et B admettant une structure, c'est-à-dire linéairement indépendants et tels que l'on ait

$$\{A.B\}=\alpha A+\beta B;$$

avec α et β différents de 0. Nous allons maintenant donner quelques propriétés d'un tel système de noyaux.

Il est particulièrement intéressant d'étudier ce qui se passe pour deux tels noyaux A et B au point de vue des valeurs singulières et des fonctions fondamentales. Si f est une fonction fondamentale du noyau A, nous dirons que ρ est la *„valeur spectrale"* correspondante si on a

$$A[f]=\rho f.$$

Cette valeur spectrale est liée à la valeur singulière correspondante à la même fonction fondamentale par la formule

$$\rho=1+\frac{1}{\lambda}$$

A une valeur spectrale différente de 1, correspondent un nombre fini de fonctions fondamentales linéairement indépendantes. Si

ρ est égal à 1 (cas d'une valeur singulière infinie) on a comme fonctions fondamentales correspondantes, les fonctions fondamentales spéciales telles que

$$A[f] = f$$

qui sont invariées par la transformation de noyau A. Ajoutons encore que nous donnerons à toute différence de deux valeurs spectrales le nom de raison spectrale.

Ceci posé considérons deux noyaux A et B admettant une structure de constantes α et β, et désignons par f une fondamentale du noyau A, de valeur spectrale ρ,

$$A[f] = \rho f.$$

On a en général

$$\{AB\}[f] = A\{B[f]\} - B\{A[f]\} + f$$

et puisque A et B admettent une structure

$$\{AB\}[f] = \alpha A[f] + \beta B[f] - (\alpha + \beta)f + f$$

d'où

$$A[B[f]\} - B\{A[f]\} = \alpha A[f] + \beta B[f] - (\alpha + \beta)f$$

mais f étant fondamentale directe pour A

$$A[f] = \rho f$$

posant donc

$$B[f] = g$$

on a

$$A[g] - \rho g = \alpha\rho f + \beta g - (\alpha + \beta)f$$

ou

$$A[g] - (\rho + \beta)g = [\alpha(\rho - 1) - \beta]f;$$

De la même manière si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ désignent comme de coutume les noyaux associés de A et B, ces noyaux admettent la structure

$$\{\overline{A}\overline{B}\} = -\alpha\overline{A} - \beta\overline{B}$$

donc si f est une fonction quelconque, on a

$$\overline{A}\{\overline{B}[f]\} - \overline{B}\{\overline{A}[f]\} = f(\alpha + \beta) - \alpha\overline{A}[f] - \beta\overline{B}[f]$$

et si h est une fondamentale associée correspondant à la valeur spectrale ρ, telle que l'on ait on a en posant

$$\bar{A}[h] = \rho h$$

$$\bar{B}[h] = k$$

$$\bar{A}[k] - (\rho - \beta)k = -[\alpha(\rho - 1) - \beta]h$$

k et h sont donc solutions d'équations de Fredholm, qui, selon les valeurs des constantes sont de première ou de seconde espèce avec ou sans second membre. Mais dans tous les cas, si on cherche pour ces équations des solutions respectivement des formes

$$g = \lambda f; \qquad k = \lambda_1 h$$

on trouve immédiatement que de telles solutions existent toujours en prenant pour λ et λ_1 les valeurs (pouvant être nulles)

$$\lambda = \lambda_1 = \left[1 - (\rho - 1)\frac{\alpha}{\beta}\right];$$

et celà quelles que soient les valeurs de la constante spectrale ρ et des constantes de structure α et β (essentiellement différentes de 0). Achevons maintenant la discussion. Prenons d'abord le cas des fondamentales directes. Si $\rho + \beta$ n'est pas une valeur spectrale, l'équation en g a une solution unique, qui est donc

$$g = \left[1 - (\rho - 1)\frac{\alpha}{\beta}\right] \cdot f.$$

Si au contraire $\rho + \beta$ est spectrale on a

$$g = \left[1 - (\rho - 1)\frac{\alpha}{\beta}\right] f + f_1$$

où f_1 est solution de l'équation homogène

$$A[f_1] = (\rho + \beta) f_1$$

et si $\rho + 2\beta$ n'est pas spectrale, on peut affirmer de la même manière que

$$g_1 = B[f_1] = \left[1 - (\rho + \beta - 1)\frac{\alpha}{\beta}\right] f_1$$

un calcul aisé montre alors que

$$B\left[f + \frac{f_1}{\alpha}\right] = \left[1 - (\rho - 1)\frac{\alpha}{\beta}\right] \cdot \left[f + \frac{f_1}{\alpha}\right].$$

et ainsi de suite de proche en proche. S'il existe une „série spectrale“ à n termes de raison β, c'est-à-dire si

$$\rho;\ \rho+\beta;\ \rho+2\beta;\ldots;\ \rho+(n-1)\beta;$$

sont des valeurs spectrales, et si $\rho+n\beta$ n'est pas spectrale, on a successivement

$$A[f]=\rho f$$

et

$$B[f]=\left[1-(\rho-1)\frac{\alpha}{\beta}\right]f+f_1$$

avec

$$A[f_1]=(\rho+\beta)f_1$$

puis

$$B[f_1]=\left[1-(\rho+\beta-1)\frac{\alpha}{\beta}\right]f_1+f_2$$

avec

$$A[f_2]=(\rho+2\beta)f_2$$

etc., et enfin

$$B[f_{n-1}]=\left[1-[\rho+(n-1)\beta-1]\frac{\alpha}{\beta}\right]f_{n-1}$$

puisque $\rho+n\beta$ n'est pas spectrale. On peut d'ailleurs remarquer qu'on peut prolonger indéfiniment ces formules en écrivant pour toutes valeurs de m les formules récurrentes

$$B[f_m]=\left|1-[\rho+m\beta-1]\frac{\alpha}{\beta}\right]f_m+f_{m+1}$$

avec

$$A[f_{m+1}]=[\rho+(m+1)\beta]f_{m+1}$$

$\rho+n\beta$ n'étant pas spectrale f_n est nul, donc aussi tous les f_m pour $m\geqslant n$. Enfin par un calcul facile on voit que, d'après ces formules

$$B\left[f+\frac{1}{1!}\frac{f_1}{\alpha}+\frac{1}{2!}\frac{f_2}{\alpha^2}+\ldots+\frac{1}{m!}\frac{f_m}{\alpha^m}\right]=$$

$$\left[1-(\rho-1)\frac{\alpha}{\beta}\right]\cdot\left[f+\frac{1}{1!}\frac{f}{\alpha}+\frac{1}{2!}\frac{f_2}{\alpha^2}+\ldots+\frac{1}{m!}\frac{f_m}{\alpha^m}\right]+\frac{1}{m!}\frac{f_{m+1}}{\alpha^m};$$

ce qui montre que

$$f+\frac{1}{1!}\frac{f_1}{\alpha}+\frac{1}{2!}\frac{f_2}{\alpha^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\frac{f_{n-1}}{\alpha^{n-1}};$$

est une fondamentale pour le noyau B, correspondant à la valeur spectrale $\left[1-(\rho-1)\frac{\alpha}{\beta}\right]$.

Ajoutons encore un fait important. Employons la notation

$$(Af)=\int_0^1 A(st)f(t)\,dt;$$

on a, pour toutes valeurs de l'indice m,

$$f_{m+1}=B[f_m]-\left[1-(\rho+m\beta-1)\frac{\alpha}{\beta}\right]f_m=$$

$$=(Bf_m)+(\rho+m\beta-1)\frac{\alpha}{\beta}f_m;$$

et

$$(Af_m)=(\rho+m\beta-1)f_m;$$

donc

$$f_{m+1}=(Bf_m)+\frac{\alpha}{\beta}(Af_m)=\frac{1}{\beta}[\alpha A+\beta B)f_m];$$

et de proche en proche

$$f_m=\frac{1}{\beta^m}[(\alpha A+\beta B)^{(m)}.f_m];$$

en désignant par $(\alpha A+\beta B)^{(m)}$ le m-ème itéré du noyau $(\alpha A+\beta B)$. On peut donc écrire, puisque f_m devient nulle pour $m\geqslant n$,

$$f+\frac{1}{1!}\frac{f_1}{\alpha}+\frac{1}{2!}\frac{f_2}{\alpha^2}+\dots+\frac{1}{(n-1)!}\frac{f_{n-1}}{\alpha^{n-1}}=S[f]$$

en désignant par S la somme de la série absolument convergente

$$S=\sum_{m\,1}^{\infty}\frac{1}{m!}\left[\frac{\alpha A+\beta B}{\alpha\beta}\right]^{(m)};$$

Le même résultat subsiste s'il existe une série spectrale infinie, c'est-à-dire si

$$\rho+m\beta$$

est une valeur spectrale pour toute valeur entière positive ou nulle de l'indice. On voit alors que la série

$$f+\frac{1}{1!}\frac{f_1}{\alpha}+\ldots+\frac{1}{m!}\frac{f_m}{\alpha^m}+\ldots$$

converge absolument et a pour somme $S[f]$, par suite que $\frac{1}{m!}\frac{f_m}{\alpha^m}$ tend vers 0 pour m infini, et donc, d'après la formule

$$B\left[f+\frac{1}{1!}\frac{f_1}{\alpha}+\ldots+\frac{1}{m!}\right]=$$

$$\left[1-(\rho-1)\frac{\alpha}{\beta}\right].\left[f+\frac{1}{1!}\frac{f}{\alpha}+\ldots+\frac{1}{m!}\frac{f_m}{\alpha^m}\right]+\frac{1}{m!}\frac{f_{m+1}}{\alpha^m};$$

que $S[f]$ est fondamentale pour B avec la valeur spectrale

$$1-(\rho-1)\frac{\alpha}{\beta};$$

On préciserait sans peine le raisonnement, nous ne nous y attarderons pas.

Un calcul tout semblable donne les résultats correspondants pour les noyaux associés $\bar{A}$ et $\bar{B}$. Posant successivement

$$\bar{A}[h]=\rho h;$$

$$\bar{B}[h]=\left[1-(\rho-1)\frac{\alpha}{\beta}\right]h+h,$$

avec

$$\bar{A}[h_1]=(\rho-\beta)h_1$$

puis indéfiniment

$$\bar{B}[h_m]=\left[1-(\rho-m\beta-1)\frac{\alpha}{\beta}\right]h_m+h_{m+1}$$

avec

$$\bar{A}[h_{m+1}]=(\rho-(m+1)\beta)h_{m+1}$$

enfin comme plus haut on vérifie que

$$\bar{B}\left[h-\frac{h_1}{1!\,\alpha}+\frac{h_2}{2!\,\alpha^2}+\ldots+(-1)^m\frac{h_m}{m!\,\alpha^m}\right]=$$

$$\left[1-(\rho-1)\frac{\alpha}{\beta}\right]\left[h-\frac{h_1}{1!\,\alpha}+\frac{h_2}{2!\,\alpha^2}+\ldots+(-1)^m\frac{h_m}{m!\,\alpha^m}\right]+$$

$$+(-1)^n\frac{h_{m+1}}{m!\,\alpha^m};$$

si donc il existe à partir de la valeur spectrale ρ une série spectrale décroissante d'ordre n, c'est-à-dire si on a les valeurs spectrales successives

$$\rho;\ \rho-\beta;\ \rho-2\beta;\ \rho-3\beta;\ldots;\ \rho-(n-1)\beta$$

et si

$$\rho-n\beta$$

n'est pas spectrale, h_m est nulle pour $m\geqslant n$ et

$$h-\frac{h_1}{1!\,\alpha}+\frac{h_2}{2!\,\alpha^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{h_{n-1}}{(n-1)!\,\alpha^{n-1}};$$

est une fondamentale associée de B correspondant à la valeur spectrale

$$1-(\rho-1)\frac{\alpha}{\beta};$$

De plus on a successivement

$$h_1=\frac{1}{\beta}[(\alpha\bar{A}+\beta\bar{B}).h]$$

$$h_2=\frac{1}{\beta}[(\alpha\bar{A}+\beta\bar{B}).h_2];\ \ldots$$

puis

$$\frac{h_n}{n!\,\alpha^n}=\frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\alpha A+\beta B}{\alpha\beta}\right)^{(n)}.h\right];$$

et donc

$$h-\frac{h_1}{1!\,\alpha}+\frac{h_2}{2!\,\alpha^2}+\ldots+(-1)^m\frac{h_m}{m!\,\alpha^m}+\ldots;$$

est dans tous les cas, (même dans celui d'une série spectrale décroissante infinie) une série absolument convergente ayant pour somme

$$\Sigma[h];$$

en posant

$$\Sigma(st)=\sum_{m\,1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{\alpha\bar{A}+\beta\bar{B}}{\alpha\beta}\right)^{(m)}$$

somme qui est fonction fondamentale associée pour B correspondant à la valeur singulière

$$1-(\rho-1)\frac{\alpha}{\beta};$$

Il est à remarquer que, d'après ce qui a été vu dans le paragraphe précédent, on a

$$\Sigma(st) = \overline{S}^{-1}(st);$$

On peut recommencer le calcul en changeant A en B, B en A, puis α en $-\beta$ et β en $-\alpha$. Et de la même manière on constate que si μ est une valeur spectrale pour B,

$$1-(\mu-1)\frac{\beta}{\alpha}$$

est une valeur spectrale pour A, et que désignant par f' et h' les fondamentales directes et associées correspondantes pour B,

$$S^{-1}[f'];$$

et

$$\overline{S}[h'];$$

sont respectivement des fondamentales directes et associées pour A correspondant à la valeur singulière

$$1-(\mu-1)\frac{\beta}{\alpha};$$

remarquons du reste que si

$$\mu = \left[1-(\rho-1)\frac{\alpha}{\beta}\right]$$

on a inversement

$$\rho = \left[1-(\mu-1)\frac{\beta}{\alpha}\right].$$

En définitive, résulte de la comparaison de tous ces résultats que si les noyaux A et B admettent la structure

$$\{AB\} = \alpha A + \beta B$$

à toute valeur spectrale ρ de A correspond une valeur spectrale μ de B liée à ρ par la formule

$$\mu = 1-(\rho-1)\frac{\alpha}{\beta};$$

et réciproquement, autrement dit les valeurs singulières λ et θ de A et B sont proportionnelles, on a

$$\frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\beta}{\theta}=0$$

De plus si ρ et μ sont deux valeurs spectrales se correspondant et si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont respectivement les multiplicités linéaires formées par les fonctions fondamentales directes et associées de A correspondant à la valeur spectrale ρ, les multiplicités $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{N}'$ formées par les fonctions fondamentales directes et associées de B correspondant à la valeur spectrale μ s'obtiennent en transformant $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ par les formules

$$\mathfrak{M}'=S[\mathfrak{M}]; \qquad \mathfrak{N}'=\bar{S}^{-1}[\mathfrak{N}];$$

Un cas particulièrement simple, important et qui est d'ailleurs le cas général est celui où l'ensemble des ρ n'admet aucune raison spectrale égale à β, ou encore, ce qui est équivalent, celui où l'ensemble des μ n'admet aucune raison spectrale égale à α; ce qui précède montre alors que le noyau S invarie les $\mathfrak{M}$, et que le noyau $\bar{S}$ invarie les $\mathfrak{N}$. A et B ont alors mêmes fonctions fondamentales. Dans le cas où il n'en est pas ainsi, considérons le transformé du noyau A par le noyau S.

$$\dot{A}=S^{-1}AS$$

Nous avons vu que $\dot{A}$ avait mêmes singulières que A et qu'on passait des multiplicités fondamentales $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de A à celles de $\dot{A}$ par la transformation

$$\mathfrak{M}'=S[\mathfrak{M}]; \qquad \mathfrak{N}'=\bar{S}^{-1}[\mathfrak{N}];$$

D'autre part si K est un noyau quelconque et l une constante, le noyau lK a évidemment mêmes multiplicités fondamentales que K et ses valeurs singulières s'obtiennent en multipliant celles de K par $\frac{1}{l}$. De cette remarque résulte que les noyaux B et $-\frac{\alpha}{\beta}\dot{A}$ ont mêmes multiplicités fondamentales et mêmes valeurs singulières.

Voyons maintenant ce qui se passe dans un cas particulier important, celui où le noyau A est supposé symétroïde. Tout d'abord il est bien clair qu'alors $-\frac{\alpha}{\beta}A$, $\dot{A}$ et $-\frac{\alpha}{\beta}\dot{A}$ sont aussi symétroïdes. Si on suppose en outre, comme cela a lieu dans le cas général, que les constantes de structure ne sont pas raisons spectrales, on peut affirmer que B et $-\frac{\alpha}{\beta}A$ ont mêmes valeurs singulières et mêmes multiplicités fondamentales; mais $-\frac{\alpha}{\beta}A$ étant symétroïde il n'y a qu'une seule transformation admettant ces valeurs singulières et ces fondamentales, dont le noyau ne peut être que $-\frac{\alpha}{\beta}A$, on a donc à un ensemble de mesure nulle près

$$\alpha A + \beta B = 0$$

et les noyaux A et B sont dans ces hypothèses proportionnels. Ils ne sont pas linéairement indépendants et il n'y a pas véritablement structure. Si donc, comme nous continuons à le supposer, A est symétroïde, il est nécessaire que B, par exemple, soit raison spectrale pour le noyau A. Faisons donc maintenant cette hypothèse alors $-\frac{\alpha}{\lambda}\dot{A}$ est toujours symétroïde et un raisonnement identique à celui que nous venons de faire à l'instant montre que

$$\alpha\dot{A} + \beta B = 0.$$

Il est intéressant de préciser autant que possible en quelle mesure, dans ces hypothèses, A et B sont différents. Bornons-nous d'abord à un cas particulièrement simple, celui où l'ensemble des ρ présente une et une seule série spectrale de raison β,

$$\rho; \quad \rho + \beta$$

supposons encore ρ différent de l'unité, ainsi que $\rho + \beta$, et imaginons de plus que les multiplicités fondamentales de A correspondant à ρ et à $\rho + \beta$ soient une fois étendues Plus précisément soient ϕ_1 et ϕ_2 les fondamentales directes correspondant à ρ et à $\rho + \beta$, et ψ_1 et ψ_2 les fondamentales inverses correspondant aux mêmes valeurs singulières, on a

$$[\phi_1 \cdot \psi_1] = [\phi_2 \cdot \psi_2] = 1; \quad [\phi_1 \cdot \psi_2] = [\phi_2 \cdot \psi_1] = 0$$

B a pour valeurs singulières correspondantes

$$1 - (\rho - 1)\frac{\alpha}{\beta}; \qquad 1 - (\rho - 1)\frac{\alpha}{\beta} - \alpha$$

qui sont toutes deux différentes de un, et les fondamentales sont

$$\phi_1' = S[\phi_1] = \phi_1 + l\phi_2; \qquad \psi_1' = \bar{S}^{-1}[\psi_1] = \psi_1;$$

$$\phi_2' = S[\phi_2] = \phi_2; \qquad \psi_2' = \bar{S}^{-1}[\psi_2] = \psi_2 + m\psi_1;$$

Désignons maintenant par Σ un noyau tel que l'on ait

$$\Sigma[\phi_1] = S[\phi_1]; \qquad \bar{\Sigma}^{-1}[\psi_1] = \bar{S}^{-1}[\psi_1]$$

$$\Sigma[\phi_2] = S[\phi_2]; \qquad \bar{\Sigma}^{-1}[\psi_2] = \bar{S}^{-1}[\psi_2]$$

et posons

$$S\Sigma^{-1} = S'$$

il est bien clair que ce noyau S' invarie les fondamentales directes de A, et que $\bar{S}'^{-1}$ invarie les fondamentales inverses. Or comme A est symétroïde le système des fondamentales directes, par exemple, est complet et fermé, S' invarie par suite toute fonction de l'espace et est donc presque partout nul; on a donc à un ensemble de mesure nulle près

$$S = \Sigma.$$

Cherchons Σ de la forme

$$\Sigma(st) = A\phi_1(s)\psi_1(t) + B\phi_1(s)\psi_2(t) + G\phi_2(s)\psi_1(t) + D\phi_2(s)\psi_2(t);$$

il vient

$$\Sigma[\phi_1] = \phi_1 + A\phi_1 + C\phi_2$$

$$\Sigma[\phi_2] = \phi_2 + B\phi_1 + D\phi_2$$

d'où

$$A = B = D = 0$$

et

$$S(st) = C\phi_2(s)\psi_1(t)$$

puis ensuite

$$S^{-1}(st) = -C\phi_2(s)\psi_1(t)$$

$$\bar{S}(st) = C\phi_2(t)\psi_1(s) = -\bar{S}^{-1}(st);$$

d'où

$$\bar{S}^{-1}[\psi_1] = \psi_1$$

$$\bar{S}^{-1}[\psi_2] = \psi_2 - C\psi_1$$

qui sont bien de la forme indiquée. On a donc

$$\dot{A} = S^{-1} A S = A(st) + \int_0^1 S(su) A(ut)\, du + \int_0^1 A(su)\, S^{-1}(ut)\, du +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 S(su)\, A(u\nu)\, S^{-1}(\nu t)\, du\, d\nu$$

$$= A(st) + \int_0^1 C\phi_2(s) \psi_1(u)\, A(ut)\, du - \int_0^1 A(su)\, C\phi_2(u) \psi_1(t)\, du$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 C^2 \phi_2(s) \psi_1(u) A(u\nu) \phi_2(\nu) \psi_1(t)\, du\, d\nu = A(st) - \beta C \phi_2(s) \psi_1(t)$$

en tenant compte de la forme supposée de S et des relations de biorthogonalité. Enfin il vient en définitive

$$B = -\frac{a}{\beta} \dot{A} = -\frac{a}{\beta} A + a C \phi_2(s) \psi_1(t);$$

et on vérifie sans peine directement que

$$\{AB\} = aA + \beta B = a\beta C \phi_2(s) \psi_1(t);$$

Telle est donc dans ce cas la forme du noyau $aA + \beta B$, il est à remarquer qu'il n'a pas de valeurs singulières et que tous ses itérés sont nuls car ϕ_2 et ψ_1 sont orthogonaux. Traitons maintenant un cas plus général, celui où on a une série spectrale d'ordre n et une seulement, dont les termes sont de plus tous différents de 1, avec l'hypothèse supplémentaire que les multiplicités fondamentales correspondant aux valeurs spectrales de cette série sont toutes une fois étendues. Soient comme plus haut

$$\rho; \quad \rho + \beta; \quad \rho + 2\beta; \ldots; \quad \rho + (n-1)\beta$$

les valeurs spectrales de A pour cette série,

$$\phi_1; \quad \phi_2; \quad \phi_3; \ldots; \quad \phi_n;$$

les fondamentales directes de A, et

$$\psi_1; \quad \psi_2; \quad \psi_3; \ldots; \quad \psi_n;$$

les inverses avec

$$[\phi_i \cdot \psi_j] = \epsilon_{ij}.$$

Les fondamentales correspondantes de B sont de la forme

$$\begin{array}{l}
\phi_1' = S[\phi_1] = \phi_1 + a_1^1\phi_2 + a_2^1\phi_3 \ldots + a_{n-1}^1\phi_n \\
\phi_2' = S[\phi_2] = \ldots\ldots \phi_2 + a_2^2\phi_3 \ldots + a_{n-1}^2\phi_n \\
\phi_3' = S[\phi_3] = \ldots\ldots\ldots\ldots \phi_3 \ldots + a_{n-1}^3\phi_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\phi_n' = S[\phi_n] = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \phi_n
\end{array}$$

pour les directes, et

$$\begin{array}{l}
\psi_1' = \bar{S}^{-1}[\psi_1] = \psi_1 \\
\psi_2' = \bar{S}^{-1}[\psi_2] = b_1^1\psi_1 + \psi_2 \\
\psi_3' = \bar{S}^{-1}[\psi_3] = b_1^2\psi_1 + b_2^2\psi_2 + \psi_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi_n' = \bar{S}^{-1}[\psi_n] = b_1^{n-1}\psi_1 + b_2^{n-1}\psi_2 + b_3^{n-1}\psi_3 + \ldots + b_{n-1}^{n-1}\psi_{n-1} + \psi_n
\end{array}$$

On montre ensuite comme plus haut, à cause du fait que A est symétroïde, qu'il y a un seul noyau S possible; cherchant donc S de la forme

$$S(st) = \sum_{ij\,1}^{n} a_{ij}\phi_i(s)\psi_j(t)$$

on a

$$S[\phi_k] = \phi_k + \sum_{i\,1}^{n} a_{ik}\phi_i(s) \qquad (k \leqslant n)$$

et à cause des valeurs de ϕ',

$$a_{ij} = 0 \quad \text{pour} \quad i \leqslant j$$

et

$$a_{ij} = a_{i-1}^j \quad \text{pour} \quad i > j$$

d'où

$$S = \sum_{j\,1}^{n} \left\{ \sum_{i\,j+1}^{n} a_{i-1}^j \phi_i(s)\psi_j(t) \right\};$$

si on écrit ensuite que

$$S[\psi_k'] = \psi_k$$

on trouve des conditions entre les a et les b qui ne sont autres que celles qui expriment que

$$[\phi_i' \cdot \psi_j'] = \epsilon_{ij};$$

Disons seulement, comme on le vérifierait sans peine, que l'on peut considérer les a comme $\frac{n(n-1)}{2}$ constantes arbitraires et que les b sont alors déterminés d'une manière unique. Ajoutons encore que le noyau S ainsi déterminé n'a pas de valeurs singulières et que tous ses itérés sont nuls; par suite

$$S^{-1} = - S$$

puis

$$\int_0^1 S(su)\,A(ut)\,du = \sum_{j\,1}^{n} \left| \sum_{i\,j+1}^{n} a^j_{i-1}\,\phi_i(s)\,.\int_0^1 A(ut)\,\psi_j(u)\,du \right|$$

$$= \sum_{j\,1}^{n} \left| \sum_{j\,1}^{n} [\rho - 1 + (j-1)\beta]\, a^j_{i-1}\,\phi_i(s)\,\psi_j(t) \right|$$

et

$$\int_0^1 A(su)\,S^{-1}(ut)\,du = - \sum_{j\,1}^{n} \left| \sum_{i\,j+1}^{n} [(\rho - 1) + (i-1)\beta]\, a^j_{i-1}\,\phi_i(s)\,\psi_j(t) \right|$$

on en déduit que

$$\int_0^1\int_0^1 S(su)\,A(u\nu)\,S^{-1}(\nu t) = 0$$

et que

$$\dot{A} = A + \beta \sum_{j\,1}^{n} \left| \sum_{i\,j+1}^{n} a^j_{i-1}(j-i)\,\phi_i(s)\,\psi_j(t) \right|$$

d'où

$$B = -\frac{\alpha}{\beta} A + \alpha \sum_{j\,1}^{n} \left| \sum_{i\,j+1}^{n} a^j_{i-1}(i-j)\,\phi_i(s)\,\psi_j(t) \right|$$

Ici encore on peut vérifier directement que

$$\{AB\} = \alpha A + \beta B = \alpha\beta \sum_{1}^{n} \left| \sum_{i\,j+1}^{n} a^j_{i-1}(i-j)\,\phi_i(s)\,\psi_j(t) \right|;$$

On a des résultats analogues pour nne série spectrale infinie à condition de prendre les constantes arbitraires a de telles manières que S soit une série absolument convergente, et on sait qu'il doit en être ainsi a priori. Le calcul est un peu plus compliqué sans que le résultat change, si on suppose que les multiplicités fondamentales correspondant aux valeurs spectrales d'une série spectrale sont plus d'une fois étendues (ce qui pourra arriver en particulier si l'une des valeurs de la série est égale à un, auquel cas les multiplicités spectrales correspondantes pourront être infiniment étendues). Nous ne nous étendrons pas sur ces calculs et nous énoncerons tout de suite le théorème.

Si deux noyaux A et B admettent une structure, et si l'un est symétroïde, l'autre lui est en général proportionnel et il n'y a pas véritablement structure. Cependant si on peut affirmer qu'il y a bien véritablement structure, alors il y a singularité spectrale et les constantes de structure sont des raisons spectrales. De plus le crochet des deux noyaux est un noyau sans valeur singulière dont tous les itérés sont nuls, et il s'exprime uniquement en fonction des fondamentales d'un des noyaux, correspondant aux valeurs spectrales faisant partie des séries spectrales.

Comme conséquence de ce dernier fait, signalons que si l'on met alors la structure sous la forme canonique vue au début de ce paragraphe, en introduisant les noyaux

$$\mathcal{A} = \frac{\alpha A - \beta B}{2\alpha\beta}$$

et

$$\mathcal{B} = \frac{\alpha A + \beta B}{2\alpha\beta}$$

tels que

$$\{\mathcal{A}\mathcal{B}\} = \mathcal{B}$$

on a

$$\{AB\} = 2\,\alpha\beta\,.\,\mathcal{B}$$

et donc $\mathcal{B}$ n'a pas de valeurs singulières et tous ses itérés sont nuls. Il en résulte que si on construit le groupe à deux paramètres correspondant à la structure $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, groupe dont la transformation courante a pour noyau $\mathcal{L}(st\,|\,U, T)$, qui comme nous l'avons vu est la somme de la série double absolument convergente

$$\mathcal{L}(st\,|\,U, T) = -1 + \sum_{m_1 n\, 0}^{\infty} \frac{U^m\, T^n}{m!\, n!} [\mathcal{A}^{(m)} \,.\, \mathcal{B}^{(n)}]$$

on constate que ce noyau $\mathcal{L}$ se réduit à

$$\mathcal{L}(st\,|\,UT) = \sum_{m\,1}^{\infty} \frac{U^m}{m!} \mathcal{A}^{(m)} + T \sum_{m\,1}^{\infty} \frac{U^m}{m!} [\mathcal{A}^{(m)} \,.\, \mathcal{B}];$$

et est donc, par rapport au paramètre canonique T une fonction du premier degré seulement.

Nous avons vu plus haut que les noyaux symétroïdes étaient une généralisation naturelle, et vraisemblablement la plus étendue qu'il soit possible d'imaginer, des noyaux symétriques. Si d'autre part on remarque qu'étant donnés deux noyaux symétriques A et B, le crochet de ces noyaux

$$\{AB\} = \int_0^1 A(su)\,B(ut)\,du - \int_0^1 A(ut)\,B(su)\,du\,;$$

est symétrique gauche, et si on en déduit, comme il est bien clair que deux noyaux symétriques ne peuvent admettre de structure (à constantes non toutes deux nulles), il apparaîtra que le théorème que nous venons de démontrer est une généralisation étendue de cette proposition évidente.

Terminons en donnant de ce théorème un autre énoncé, peu différent mais qui, a certains égards, peut paraître plus précis.

Etant donné un noyau symétroïde A, et des constantes de structure α et β, si on se propose de trouver tous les noyaux B tels que

$$\{AB\} = \alpha A + \beta B$$

le problème n'est possible que si β est égale à une raison spectrale du noyau A; et si cela a lieu le noyau B est de la forme

$$B = -\frac{\alpha}{\beta} A + C$$

où C est un noyau dont tous les itérés sont nuls et qui est déterminé, quand on connait A, α et β, à des constantes près, dont il dépend linéairement. De plus B est symétroïde.

Nous arrêterons ici ce mémoire, déjà fort long. Nous retiendrons de ce dernier paragraphe que les noyaux symétroïdes semblent jouer un rôle spécial dans la théorie des groupes continus à plusieurs paramètres n o n p e r m u t a b l e s, tout d'abord le problème de la détermination des noyaux admettant une structure avec un noyau symétroïde donné est complétement résolu, et l'essentiel est de remarquer qu'il n'est pas toujours possible et que les constantes de structure doivent être prises convenablement. En second lieu il apparaît bien que les groupes continus non permutables, à deux paramètres, dont la b a s e est symétroïde, ont une structure particulièrement simple qui autorise à les signaler.

Il resterait maintenant à traiter la question des groupes continus non permutables à plus de deux paramètres. Sans qu'il y ait besoin d'insister nous nous bornerons à dire que leur construction est liée à la détermination des structures d'ordre élevé, c'est-à-dire des noyaux

$$A_i \qquad (i = 1; 2; 3; \dots n)$$

tels que

$$\{A_i A_j\} = \sum_{k\,1}^{u} a_{ij}^k A_k$$

où les a_{ij}^k sont encore des constantes de structure. On prévoit sans peine que si une telle structure existe entre les noyaux A_i, connaissant le *spectre* ou ensemble des valeurs spectrales de l'un d'eux A_1 par exemple, on obtient les valeurs spectrales de tous les autres en résolvant des systèmes d'équations linéaires dont les tableaux dépendent simplement des constantes de structure. De plus, en général, et sauf des cas particuliers où existent certaines relations entre les constantes de structure et les raisons spectrales des noyaux, tous ces noyaux ont mêmes fonctions fondamentales. Enfin si un ensemble admettant une structure contient un noyau symétroïde, il y a forcément singularité spectrale, et tous les noyaux de l'ensemble sont déterminés connaissant l'un deux, à des constantes près. De plus ils sont tous symétroïdes.

Il faudrait aborder maintenant la question des groupes continus infinis. Nous espérons pouvoir y revenir ailleurs. Mais on peut prévoir, par analogie avec ce qui précède, que cette question est intimement liée à celle de la détermination des ensembles infinis de noyaux admettant une structure, c'est-à-dire tels que le crochet de deux noyaux de l'ensemble fasse partie de l'ensemble. Par exemple, on voit sans peine que le crochet de deux noyaux symétriques gauches est encore symétrique gauche. Voici donc un exemple simple d'ensemble infini admettant une structure, auquel correspond le groupe continu infini des rotations fonctionnelles. Au contraire l'ensemble des noyaux symétriques droits est sans structure. Enfin il est encore à prévoir que dans cette théorie les noyaux symétroïdes joueront un rôle essentiel puisque les constantes de structure d'une structure de noyaux symétroïdes ne peuvent pas être prises arbitrairement.

Sur la transformation des fonctions automorphes de plusieures variables.

(Résumé d'un mémoire publié en langue polonaise).

Par

K. Abramowicz.

Nous nous proposons d'étendre aux fonctions automorphes de plusieures variables les idées de Poincaré [1]) sur la transformation des fonctions fuchsiennes. On a la première généralisation: Etant n fonctions automorphes indépendantes

$$f_i(y_1, y_2, \dots y_n), \quad i = 1, 2, \dots n,$$

appartenant au groupe hyperfuchsien G de variables $y_1, y_2, \dots y_n$ on cherchera le groupe continu Γ de substitutions linéaires

$$(1) \qquad (Y_1, Y_2, \dots Y_n) = T(y_1, y_2, \dots y_n),$$

telles que les fonctions transformées $f_i(Y_1, Y_2, \dots Y_n)$ soient liées avec les fonctions données $f_i(y_1, y_2, \dots y_n)$ par les n relations algébriques

$$(2) \qquad R_i(f_i(Y), f_1(y), \dots f_n(y)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots n$$

Dans le problème posé les relations *linéaires* (1) entre les deux systèmes de variables

$$(3) \qquad Y_1, Y_2, \dots Y_n, y_1, y_2, \dots y_n$$

doivent entraîner les relations algébriques (2) entre les fonctions $f_i(Y_1, Y_2, \dots Y_n)$ et $f_i(y_1, y_2, \dots y_n)$. Mais on peut demander, si des relations *non linéaires* entre les systèmes (3) ne peuvent pas con-

[1]) Oeuvres, t. II, p. 508.

duire aux relations algébriques (2) entre les fonctions correspondantes $f_i Y_1, Y_2, \dots Y_n)$ et $f_i(y_1, y_2, \dots y_n)$. En observant que les fonctions $f_i(Ty)$ appartiennent au groupe $T^{-1}GT$, nous nous proposons le problème plus général:

Etant données $2n$ fonctions indépendantes

$$F_i(Y_1, Y_2, \dots Y_n), f_i(y_1, y_2, \dots y_n), \quad i = 1, 2, \dots n$$

appartenant respectivement aux groupes hyperfuchsiens G_F et G_f de variables $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ et $y_1, y_2, \dots y_n$, on demande quelles relations algébriques

$$(4) \qquad \phi_i(Y_1, Y_2, \dots Y_n, y_1, y_2, \dots y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots n$$

linéaires par rapport à $y_1, y_2, \dots y_n$ peuvent exister entre les variables Y et y pour que les fonctions $f_i(y)$ et $F_i(Y)$ soient liées par les n relations algébriques

$$R_i(F_i, f_1, f_2, \dots f_n) = 0.$$

Les variables Y et y étant liées par les relations (4) on désigne par D_Y et D_y les domaines fondamentaux de groupes G_F et G_f. On aura les propriétés suivantes:

1) Etant $(c_1, c_2, \dots c_n)$ et $(C_1, C_2, \dots C_n)$ deux points liées par les relations (4) il existe dans le domaine D_y une infinité de points $S(c)$ équivalents au (c), tels que le point $(y_1, y_2, \dots y_n)$ décrivant une courbe joignant les points $S(c)$ et (c) le point correspondant (Y) du domaine D_Y en sortant du point (C) arrive au point (Y) pour lequel on a

$$F_i(Y) = F_i(C).$$

2) Les Y et y étant liées par les relations (4) les groupes hyperfuchsiens G_F et G_f contiennent les sous-groupes infinis isomorphes G'_F et G'_f dont les substitutions correspondantes laissent invariables les relations $\phi_i = 0$.

On déduit de ces propriétés le théorème suivant:

Si le groupe hyperfuchsien G'_f ne contient aucun sous-groupe à l'indice fini laissant invariable un hyperplan de l'espace $(y_1, y_2, \dots y_n)$, alors la condition nécessaire d'existence de n relations algébriques

$$(5) \qquad R_i(F_i, f_1, f_2, \dots f_n) = 0$$

entre les n fonctions $f_1, f_2, \dots f_n$ appartenant au groupe hyperfuchsien G_f et n fonctions $F_1, F_2, \dots F_n$ appartenant au groupe G_F, consiste dans ce que les relations $\phi = 0$ soient linéaires par rapport à Y et y.

Si l'on désigne ces relations linéaires par le symbole $(Y) = T(y)$ on trouve encore qu'il est nécessaire pour existence de relations (5) que les groupes G_f et $T^{-1}G_F T$ aient un sous-groupe commun d'indice fini par rapport à ces groupes.

Nous posons ensuite $G_F = G_f = G$, $F_l = f_l$ et nous supposons que le polyèdre fondamental du groupe G ni sa frontière n'aient aucun point commun avec la frontière du domaine fondamental D. Nous nous proposons de déterminer le groupe continu Γ de substitutions linéaires

$$(Y_1, Y_2, \dots Y_n) = T(y_1, y_2, \dots y_n)$$

et le groupe hyperfuchsien G possedant la propriété que les n fonctions indépendantes appartenant au groupe G et les n fonctions transformées $f_i(Ty)$ soient liées par les n relations algébriques (5); les hypothèses faites sur le polyèdre fondamental suffisent [1]) pour l'existence de relations (5).

En désignant par g le sous-groupe d'indice fini de groupes G et $T^{-1}GT$ composé de substitutions

$$(6) \qquad X_i = \sum_{k=1}^{n+1} a_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots n+1,$$

où $X_r = Y_r X_{n+1}$, $x_r = y_r x_{n+1}$ $(r = 1, 2, \dots n)$ on déduit de la continuité du groupe Γ les propriétés suivantes:

1) on a l'égalité $V = T^{-1}VT$ pour chaque substitution V du groupe g,

2) les substitutions T appartiennent au groupe hyperfuchsien continu,

3) les substitutions T laissent invariable chaque espace de l'ensemble E_p, si l'on désigne par E_p l'ensemble de tous les espaces fondamentaux à p dimensions appartenant aux substitutions (6) du groupe g,

4) l'ensemble E_p contient un nombre fini d'espaces à p dimensions,

5) on peut se borner aux groupes g dont chaque substitution (6) laisse invariable tous les espaces de l'ensemble E_p; en effet, on

[1]) Girand: Leçons sur les fonctions automorphes, § 31.

observe que les substitutions du groupe g ne peuvent que permuter ces espaces, car si la substitution V_i appliquée à l'espace S_p donnait l'espace $V_i(S_p) = S'_p$, la substitution $V_i V_j V_i^{-1}$, dans laquelle V_j a l'espace fondamental S_p, donnerait $V_i V_j V_i^{-1}(S'_p) = S'_p$; le groupe g contiendrait alors un sous-groupe d'indice fini dont chaque substitution laisserait invariable les espaces de l'ensemble E_p.

Si l'on laisse de côté les cas, où après la transformation convenable le nombre de variables de groupes g ou Γ pourrait être réduit, on obtient le résultat suivant:

Si le groupe continu Γ de substitutions T après une transformation convenable $Q^{-1}\Gamma Q$ est composé de substitutions

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}, \ldots a_{1,n-1}, a_1, -a_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n-1,1} \ldots a_{n-1,n-1}, a_{n-1} - a_{n-1} \\ b_1, \ldots b_{n-1}, a, \theta - a \\ b_1, \ldots b_{n-1}, b, \theta - b \end{array}\right|$$

où $\theta^0(a-b) = 1$ et

$$\sum_{l=1}^{n-1} a_{ls} a_{ls}^0 = 1, \quad \sum_{l=1}^{n-1} a_{ls} a_{lr}^0 = 0, \quad s \neq r = 1, 2, \ldots n-1$$

$$\sum_{l=1}^{n-1} a_l a_l^0 + aa^0 - bb^0 = 1, \quad \sum_{l=1}^{n-1} a_l a_{lr}^0 + b_r^0(a-b) = 0,$$

on aura n relations algébriques de la forme

$$R_l(f_l(Ty), f_1(y), \ldots f_n(y)) = 0$$

entre les n fonctions f_l appartenant au groupe hyperfuchsien G qui contient (comme sous-groupe d'indice fini) le groupe g composé de substitutions (6) laissant invariable le point unique $y_l = 0$, $y_n = 1$ ou l'hyperplan $y_n = 1$ et échangeables avec les substitutions T.

En effet, les groupes G et $T^{-1}GT$ contiendront un sous-groupe d'indice fini, parce que le groupe g, en vertu de l'égalité $g = T^{-1}gT$, sera contenu dans $T^{-1}GT$.

Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces.

Par

Elie Cartan.

Le but principal de ce mémoire est d'indiquer une méthode permettant de former, dans certains espaces clos à un nombre quelconque de dimensions, un système complet d'intégrales de différentielle exacte linéairement indépendantes. On dit que h intégrales de différentielle exacte multiples d'ordre p (ou de degré p) sont linéairement indépendantes si aucune combinaison linéaire à coefficients constants non tous nuls de ces intégrales ne peut se déduire d'une intégrale multiple de degré $p-1$ par la formule généralisée de Stokes (ou par dérivation extérieure). Les espaces dans lesquels la méthode s'applique sont ceux dans lesquels opère un groupe fini et continu *transitif clos* G[1]). On peut alors se ramener au cas où les éléments d'intégrale multiple du système complet sont invariants par G, autrement dit où les intégrales cherchées sont des *invariants intégraux* (au sens de Lie). La recherche de ces invariants intégraux est ramenée d'autre part à un problème d'Algèbre. Pour une catégorie particulière d'espaces clos, que j'appelle *symétriques*, on a le théorème remarquable que tout invariant intégral est une intégrale de différentielle exacte; de plus le nombre d'intégrales de différentielle exacte linéairement indépendantes (au sens indiqué plus haut) de degré p est égal au nombre des invariants intégraux linéairement indépendants (*au sens algébrique ordinaire*) de degré p.

Je propose d'appelle *polynome de Poincaré* d'un espace clos le polynome $\Phi(t)$ de degré n (nombre de dimensions de l'espace) tel que

---

[1]) Tout espace de cette nature peut être représenté, avec correspondance ponctuelle biunivoque et continue, par une variété sans singularité d'un espace

le coefficient de t^{n-p} soit égal au nombre des intégrales de différentielle exacte linéairement indépendantes de degré p. C'est en effet surtout H. Poincaré qui, en 1895, dans son mémoire fondamental sur l'Analysis situs paru dans le *Journal de l'Ecole Polytechnique*, montra l'importance pour l'Analysis situs des intégrales de différentielle exacte admettant des périodes, importance qui résultait du reste pour $n = 2$ des travaux de Riemann sur les courbes algébriques. Malheureusement nous ne savons pas d'un manière précise jusqu'à quel point les coefficients de ce que j'appelle le polynome de Poincaré nous renseignent sur les différents ordres de connexion (ou nombres de Betti) de l'espace; il semblerait, d'après une phrase assez obscure du mémoire de Poincaré, que pour le grand géomètre, ces coefficients sont au moins égaux aux ordres de connexion diminués d'une unité; mais la question n'a pas, à ma connaissance, été définitivement tranchée [1]).

Malgré cela, la considération des invariants intégraux me semble être le seul moyen pratique d'aborder actuellement l'étude des propriétés topologiques des espaces clos *homogènes*, puisqu'on a, pour ces espaces, l'immense avantage de pouvoir former effectivement toutes les intégrales de différentielle exacte susceptibles d'admettre des périodes.

J'ai appliqué la méthode générale à la détermination du polynome de Poincaré de l'espace projectif complexe; grâce aux invariants intégraux, très simples, obtenus, on a un moyen *transcendant* de définir l'ordre et la classe d'une variété algébrique. J'ai étudié aussi l'espace projectif complexe réglé, qui est à 8 dimensions réelles et qui admet un invariant intégral du second degré, deux du quatrième et un du sixième. Le premier invariant intégral permet de trouver par intégration l'ordre d'une surface réglée algébrique, les deux suivants permettent de trouver l'ordre et la classe d'une congruence de droites, et le dernier l'ordre d'un complexe de droites.

---

euclidien à un nombre suffisant de dimensions, les transformations de G se traduisant sur cette variété par des rotations autour de l'origine opérant dans tout l'espace euclidien ambiant. Le cas le plus simple est celui de la sphère. Voir E. Cartan, *Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 53, 1929, p. 217—252).

[1]) Depuis que ce mémoire a été rédigé, M. Georges de Rahm a annoncé (Comptes rendus, 188, 1929, p. 1651—1652) qu'il avait pu démontrer en les précisant les propositions de Poincaré.

Signalons une des conséquences topologiques qu'on peut tirer de cette étude, c'est que la variété des droites *réelles* n'est pas réductible à une seule droite par déformation continue dans l'espace réglé complexe, tandis que la varieté des points réels (ou plutôt cette variété comptée deux fois) est réductible à un point par déformation continue dans l'espace ponctuel complexe.

Les derniers paragraphes se rapportent aux espaces représentatifs des groupes clos, espaces qui sont tous symétriques. Signalons un théorème remarquable: la somme des coefficients du polynome de Poincaré est égale à 2^l, l étant le rang du groupe. D'après un autre théorème général, le polynome de Poincaré est divisible par $(t+1)^{l-1}\,(t^3+1)$. Dans le cas d'un groupe simple, il existe un invariant intégral du troisième degré et très probablement un seul. Les périodes de cet invariant intégral étendu aux sous-groupes clos à trois paramètres du groupe donné sont des multiples entiers de l'une d'entre elles; j'indique la série de ces entiers dans un cas assez général.

Il y aurait un grand intérêt à connaître les polynomes de Poincaré relatifs aux groupes simples. Bien qu'on puisse indiquer leur expression sous forme d'intégrale étendue à tout l'espace du groupe, on ne supprime pas pour autant la difficulté du calcul, et il ne semble pas que ce soit uniquement par cette voie transcendante qu'on puisse arriver au résultat cherché. Certaines considérations algébriques relatives à la formation par voie de récurrence des invariants intégraux, combinées avec la théorème signalé plus haut sur la somme des coefficients du polynome de Poincaré, rendent assez vraisemblables les deux résultats suivants:

1) Le polynome de Poincaré de l'espace à n^2-1 dimensions du groupe linéaire unimodulaire d'une forme d'Hermite définie positive à n variables est

$$(t^3+1)(t^5+1)\ldots(t^{2n-1}+1);$$

2) Le polynome de Poincaré de l'espace à $n(2n+1)$ dimensions du groupe orthogonal de $2n+1$ variables réelles est

$$(t^3+1)(t^7+1)\ldots(t^{4n-1}+1).$$

I. Généralités.

1. Nous appellerons *espace homogène* une variété dans laquelle opère un groupe fini et continu transitif G; ce groupe sera le *groupe fondamental* de l'espace. Un espace homogène E est donc l'ensemble

d'une variété et d'un groupe transitif défini à l'intérieur de la variété.

Si O est un point particulier de l'espace E et si g est le plus grand sous-groupe de G laissant fixe le point O, l'espace peut encore être défini comme l'ensemble du groupe G et de son sous-groupe g. Chaque point M de l'espace peut être caractérisé par l'ensemble des transformations Sg (obtenues en effectuant successivement une transformation arbitraire de g et une transformation particulière S de G) qui amènent le point O en M. Le sous-groupe g n'est du reste pas absolument arbitraire; il faut qu'il soit *fermé dans* G [1]). Si l'on veut en outre qu'aucune transformation de G ne laisse invariants tous les points de l'espace, il faut et il suffit que g ne contienne aucun sous-groupe invariant dans G.

2. Nous appellerons *invariant intégral* d'un espace homogène E une intégrale simple ou multiple dont l'élément soit invariant par le groupe fondamental G. Si l'intégrale est d'ordre p, cet élément Ω est de la forme

$$(1) \qquad \Omega = \Sigma A_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_p} ,$$

les coefficients A étant des fonctions déterminées des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'un point de l'espace, supposé à n dimensions, et la somme étant étendue à toutes les combinaisons p à p des indices $1, 2, \ldots, n$ [2]). Autrement dit Ω est une *forme différentielle extérieure* [3]) de degré p invariante par G.

3. La recherche des invariants intégraux d'un espace homogène se ramène, comme nous allons le montrer, à la résolution d'un problème d'Algèbre.

Désignons par

$$X_1, X_2, \ldots X_r$$

les transformations infinitésimales de base du groupe G, supposé d'ordre r; nous pouvons supposer choisies ces transformations de

---

[1]) Cela signifie que si un ensemble infini de transformations de g admet un élément d'accumulation dans G, cet élément appartient à g.

[2]) On sera obligé en général d'utiliser, suivant les régions de l'espace, plusieurs systèmes de coordonnées, les différentes expressions analytiques de Ω se raccordant entre elles quand on passe d'une région à une région voisine.

[3]) Sur les formes différentielles extérieures, qui ne sont autres que les formes différentielles qui se présentent sous les signes d' intégration multiple, on pourra consulter mes *Leçons sur les invariants intégraux* (Paris, Hermann, 1922).

manière que les $r - n$ dernières engendrent le sous-groupe g, ou du moins, dans le cas où g est mixte, celle des familles continues de transformations de g qui contient la transformation identique. Désignons enfin par

$$e_1 X_1 + e_2 X_2 + \ldots + e_n X_n + e_{n+1} X_{n+1} + \ldots + e_r X_r$$

la transformation infinitésimale la plus générale de G. Nous conviendrons dans ce qui va suivre de désigner par les lettres latines $i, j, k, \ldots$, les indices $1, 2, \ldots n$, et par les lettres grecques $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, les indices $n+1, n+2, \ldots, r$.

Soit M un point quelconque de E et M' un point infiniment voisin; soit S_ξ et $S_{\xi+d\xi}$ deux transformations infiniment voisines amenant respectivement O en M et M'. La transformation infinitésimale $S_\xi^{-1} S_{\xi+d\xi}$ amène O en un point P infiniment voisin, de telle sorte que la transformation S_ξ amène simultanément O en M et P en M'. Soit

$$\sum_i \omega_i X_i + \sum_\alpha \omega_\alpha X_\alpha$$

le symbole de la transformation infinitésimale $S_\xi^{-1} S_{\xi+d\xi}$. Comme la transformation infinitésimale $\Sigma \omega_\alpha X_\alpha$, qui appartient à g, ne produit aucun effet sur le point O, c'est que le point P peut se déduire de O par la transformation infinitésimale $\Sigma \omega_i X_i$. *Les paramètres ω_i de cette transformation sont déterminés sans ambiguïté quand on connaît le point P.*

Fixons le point M et la transformation S_ξ qui amène O en M; nous voyons que tout point M' infiniment voisin de M est défini analytiquement sans ambiguïté par les n quantités infiniment petites $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ [1]), qui sont évidemment n combinaisons linéaires indépendantes des différentielles des coordonnées de M, quand on passe de M à M'.

Il résulte de ce qui précède que la forme Ω pourra s'écrire [2])

(2) $$\Omega = \Sigma B_{i_1 i_2 \ldots i_p} [\omega_{i_1} \omega_{i_2} \ldots \omega_{i_p}].$$

---

[1]) Se donner la transformation S_ξ, c'est en somme se donner un *système de référence* d'origine M; les quantités ω_i sont les coordonnées du point M' par rapport à ce système de référence.

[2]) Le *produit extérieur* $\omega_{i_1} \omega_{i_2} \ldots \omega_{i_p}$ est mis entre crochets pour éviter toute confusion avec un produit algébrique ordinaire; ces crochets seront supprimés quand la forme Ω sera placée sous un signe d'intégration.

4. Si l'on change la transformation S_ξ amenant O en M, les coefficients de la forme (2) sont changés. Toute transformation S_η amenant O en M est de la forme $S_\xi R$, en désignant par R une transformation de g. Si on pose de même

$$S_{\eta+d\eta} = S_{\xi+d\xi}\, R',$$

on a

$$S_\eta^{-1} S_{\eta+d\eta} = R^{-1}(S_\xi^{-1} S_{\xi+d\xi}) R' = R^{-1}(S_\xi^{-1} S_{\xi+d\xi}) R \,.\, R^{-1} R'.$$

La nouvelle transformation infinitésimale $S_\eta^{-1} S_{\eta+d\eta}$, dont nous désignerons le symbole par

$$\sum_i \overline{\omega}_i X_i + \sum_\alpha \overline{\omega}_\alpha X_\alpha,$$

peut s'obtenir en effectuant d'abord la transformation $R^{-1}R'$ du sous groupe g, puis la *transformée par* R de la transformation $S_\xi^{-1} S_{\xi+d\xi}$. La première transformation n'a aucun effet sur le point O. Pour avoir les paramètres $\overline{\omega}_i$ et $\overline{\omega}_\alpha$ de la seconde, nous n'avons qu'à effectuer sur les paramètres ω_i et ω_α la transformation du *groupe adjoint* linéaire [1]) qui correspond à R. Or R transforme entre elles les transformations infinitésimales de g, définies par $e_1 = e_2 = \ldots = e_n = 0$; les transformations du groupe adjoint qui correspondent aux différente transformations de g transforment donc entre eux les paramètres $e_1, e_2, \ldots, e_n$ suivant un certain groupe linéaire γ. Soit

$$(3) \qquad \left| \begin{array}{l} e_1' = a_{11} e_1 + \ldots + a_{1n} e_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ e_n' = a_{n1} e_1 + \ldots + a_{nn} e_n \end{array} \right.$$

les équations de ce groupe, les a_{ij} dépendant de R. On voit donc que les paramètres $\overline{\omega}_i$ cherchés se déduisent des quantités ω_i par les formules générales

$$(4) \qquad \left| \begin{array}{l} \overline{\omega}_1 = a_{11}\omega_1 + \ldots + a_{1n}\omega_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \overline{\omega}_n = a_{n1}\omega_1 + \ldots + a_{nn}\omega_n. \end{array} \right.$$

---

[1]) Le groupe adjoint linéaire est celui qui indique comment les paramètres e_i des transformations infinitésimales de G sont transformés quand on transforme ces transformations infinitésimales par une transformation de G. Il est engendré par les transformations infinitésimales

$$E_i f = \sum_{j,k}^{1,\ldots,r} e_j c_{jik} \frac{\delta f}{\delta e_k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Comme la forme (1) ne dépend pas de la transformation particulière S_ξ amenant O en M, c'est donc que *la forme extérieure* (2) *est invariante par le groupe linéaire γ opérant sur $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.*

5. La propriété précédente a lieu en chaque point M, les coefficients $B_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ étant des fonctions des coordonnées de M. Nous allons montrer que ces coefficients sont *constants*.

Appliquons en effet à la forme Ω, considérée au point O, la transformation S_ξ qui amène O en M; les quantités ω_i ne changent pas; par suite, la forme étant invariante, les coefficients $B_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ ne doivent pas changer non plus. Nous avons donc le théorème suivant.

Théorème. — *Tout invariant intégral de l'espace E est fourni par une forme extérieure à coefficients constants des n variables $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, cette forme étant invariante par le groupe linéaire γ.*

La réciproque est évidente.

La recherche des invariants intégraux de l'espace revient donc à celle des formes extérieures invariantes par un groupe linéaire donné.

6. On voit facilement, à titre d'exemple, que l'espace euclidien à n dimensions, dont le groupe fondamental est le groupe des déplacements euclidiens, n'admet aucun invariant intégral, en dehors de l'intégrale de volume. Le groupe γ est ici le groupe orthogonal à n variables; si l'on applique à la forme

$$\Omega = \Sigma B_{i_1 i_2 \ldots i_p} [e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_p}]$$

la rotation infinitésimale $e_1 \dfrac{\partial f}{\partial e_2} - e_2 \dfrac{\partial f}{\partial e_1}$, on obtient pour Ω la variation infinitésimale

$$\Sigma B_{2 i_2 \ldots i_p} e_1 e_{i_2} \ldots e_{i_p} - \Sigma B_{1 i_2 \ldots i_p} e_2 e_{i_2} \ldots e_{i_p},$$

chaque somme étant étendue aux combinaisons $p-1$ à $p-1$ des $n-2$ indices $3, 4, \ldots, n$. La variation trouvée ne peut être nulle que si chaque coefficient tel que $B_{234\ldots p+1}$ est nul. La forme Ω est donc identiquement nulle, à moins que l'on n'ait $p = n$.

Le même raisonnement et la même conclusion sont valables pour l'espace non euclidien, hyperbolique ou elliptique, qui admet le même groupe de rotations autour d'un point que l'espace euclidien.

Mais la conclusion cesse d'être valable si l'on passe de l'espace euclidien *ponctuel* à l'espace euclidien *tangentiel* ou à l'espace euclidien *réglé* [1]).

II. Le cas des espaces homogènes symétriques.

7. On arrive à la notion d'espace homogène symétrique en partant de la notion *d'automorphie involutive* d'un groupe. On désigne sous ce nom une correspondance continue biunivoque entre les transformations d'un groupe, cette correspondance étant d'une part symétrique, et conservant d'autre part la loi de composition du groupe. Une automorphie involutive A d'un groupe G, appliquée aux transformations infinitésimales du groupe, se traduit par une substitution linéaire involutive sur les paramètres $e_1, e_2, \ldots, e_r$. On peut supposer, par un choix convenable de la base, que les $r-n$ dermiers paramètres $e_{n+1}, \ldots, e_r$ sont invariants par cette substitution linéaire, les n premiers se reproduisant changés de signe. Les transformations infinitésimales $X_{n+1}, \ldots, X_r$ invariantes par l'automorphie A engendrent manifestement un sous-groupe continu de G; c'est le plus grand sous groupe continu dont toutes les transformations sont invariantes par A. Nous l'appellerons le *sous-groupe caractéristique* de l'automorphie involutive A.

8. Cela posé, supposons que le plus grand sous-groupe g qui laisse invariant un point O de l'espace homogène soit précisément le sous-groupe caractéristique d'une automorphie involutive de G [2]). *Nous dirons que l'espace E est symétrique* [3]).

A tout point M de l'espace symétrique E, défini par l'ensemble Sg des transformations de G qui amènent O en M, correspond le point $\overline{M}$ défini par l'ensemble $\overline{S}g$, ou $\overline{S}$ est la conjuguée de S

---

[1]) J'ai déterminé en 1896 (*Bull. Soc. Math.*, t. 24, p. 140—176) les invariants intégraux de l'espace euclidien tangentiel et de l'espace euclidien réglé ordinaires.

[2]) Si le sous-groupe g est mixte, nous supposerons que le sous-groupe caractéristique de l'automorphie est celle des familles continues de g qui contient la transformation identique.

[3]) C'est ici que le groupe fondamental G joue un rôle essentiel dans la notion d'espace homogène. C'est ainsi que *l'espace projectif*, considéré comme admettant le groupe projectif général comme groupe fondamental, n'est pas symétrique; mais *l'espace elliptique*, qui n'est autre que l'espace projectif doué, comme groupe fondamental, du groupe d'une quadrique imaginaire, est au contraire symétrique.

par l'automorphie involutive. La transformation ponctuelle Σ qui permet de passer de M à $\overline{M}$ laisse fixe le point O; elle est involutive et elle laisse invariant le groupe G, puisque la transformée $\Sigma^{-1}S\Sigma$ de S par Σ n'est autre que la conjuguée $\overline{S}$ de S par A. Nous dirons que Σ définit dans l'espace la *symétrie par rapport au point* O.

Si P est un point quelconque de l'espace, résultant par exemple de la transformation T appliquée au point O, il existe également une symétrie par rapport à P, c'est celle qui fait passer du point Sg au point $T\overline{T}^{-1}\overline{S}g$. Cette opération laisse fixe le point P; elle est involutive et elle laisse invariant le groupe G, changeant la transformation S dans la transformation $T\overline{T}^{-1}\overline{S}\,\overline{T}T^{-1}$. *Cette dernière opération est encore une automorphie involutive du groupe* G, le sous-groupe caractéristique étant le sous-groupe TgT^{-1} qui laisse fixe le point P.

En définitive, l'existence d'une automorphie involutive admettant g comme sous-groupe caractéristique entraîne l'existence d'une infinité d'automorphies involutives qui correspondent, dans l'espace E, aux symétries par rapport aux différents points de l'espace.

9. On peut se placer à un point de vue plus strictement géométrique.

Supposons d'abord que la transformation ponctuelle Σ (symétrie par rapport à O) fasse partie de G. Elle appartient à g et est échangeable avec toutes les transformations de g; autrement dit Σ est une transformation involutive du *centre* [1]) de g; on voit de plus qu'elle ne laisse invariant aucun point infiniment voisin de O. Réciproquement supposons que le centre de g contienne une transformation involutive Σ ne laissant invariant aucun point infiniment voisin de O; l'opération qui fait passer d'une transformation S de G à la transformation $\Sigma^{-1}S\Sigma$ est une automorphie involutive dont g est le sous-groupe caractéristique. *La symétrie de l'espace tient donc dans ce cas à l'existence, dans le centre du sous-groupe g, d'une transformation involutive ne laissant invariant aucun point infiniment voisin de O et différent de O.*

Si Σ n'appartient pas à G, les transformations de G et celles qu'on obtient en les multipliant par Σ engendrent un groupe mixte

---

[1]) Le *centre* d'un groupe G est formé des transformations de G qui sont échangeables avec toutes les transformations du groupe.

G', et Σ est une transformation involutive du sous-groupe g' correspondant. On a ainsi une propriété analogue à la précédente, à condition de remplacer le groupe fondamental G par le groupe mixte G'.

Dans l'espace euclidien ponctuel, la symétrie (ordinaire) par rapport à un point O est une transformation involutive appartenant au centre du groupe des rotations et symétries autour de O; l'espace euclidien rentre donc dans la classe générale des espaces symétriques. Il en est de même de l'espace euclidien tangentiel ou réglé.

10. Nous allons démontrer une propriété remarquable des invariants intégraux d'un espace symétrique, c'est que *ce sont des intégrales de différentielle exacte.*

Nous pouvons supposer, en conservant les notations du n° 3, que les équations de l'automorphie involutive A sont

$$(5)\qquad \begin{cases} e'_i = -e_i & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ e'_\alpha = +e_\alpha & (\alpha = n+1, n+2, \ldots, r). \end{cases}$$

Il en résulte que les crochets $(X_i X_j)$ et $(X_\alpha X_\beta)$ ne dépendent que des X_α, et que les crochets $(X_i X_\alpha)$ ne dépendent que des X_i.

Revenons alors à un invariant intégral, défini par la forme extérieure

$$\Omega = \Sigma B_{i_1 i_2 \ldots i_p} [\omega_{i_1} \omega_{i_2} \ldots \omega_{i_p}].$$

Exprimons que cette forme est invariante par la transformation infinitésimale $E_\alpha f$ du groupe γ, à savoir

$$E_\alpha f = \sum_{i,k}^{1,2\ldots n} \omega_i c_{i\alpha k} \frac{\partial f}{\partial \omega_k};$$

nous obtenons

$$(6)\qquad \Sigma B_{i_1 i_2 \ldots i_p} \sum_k \left\{ c_{k\alpha i_1}[\omega_k \omega_{i_2} \ldots \omega_{i_p}] + c_{k\alpha i_2}[\omega_{i_1} \omega_k \omega_{i_3} \ldots \omega_{i_p}] + \ldots + c_{k\alpha i_p}[\omega_{i_1} \omega_{i_2} \ldots \omega_k] \right\} = 0.$$

Formons maintenant la dérivée extérieure de la forme Ω, en nous servant des *équations de structure* du groupe (équations de Maurer-Cartan)

$$(7)\qquad \omega'_i = \tfrac{1}{2} \sum_{\rho,\sigma}^{1,\ldots,r} c_{\rho\sigma i} [\omega_\rho \omega_\sigma].$$

Dans le cas qui nous occupe, les indices ρ et σ sont nécessierement l'un *latin*, l'autre *grec*, de sorte qu'on peut écrire

$$\omega_i' = \sum_{\alpha=n+1}^{\alpha=r} \sum_{k=1}^{k=n} c_{k\alpha i} [\omega_k \, \omega_\alpha].$$

L'expression Ω' devient alors

$$\Omega' = - \Sigma B_{i_1 i_2 \ldots i_p} \sum_{\alpha=n+1}^{\alpha=r} \sum_{k=1}^{k=n} \{ c_{k\alpha i_1} [\omega_\alpha \, \omega_k \, \omega_{i_2} \ldots \omega_{i_p}] + \ldots +$$
$$+ c_{k\alpha i_p} [\omega_\alpha \, \omega_{i_1} \, \omega_{i_2} \ldots \omega_k] \}.$$

On voit qne le second membre est identiquement nul en vertu de l'égalité (6). Nous avons donc le théorème suivant [1]).

Théorème. — *Tout invariant intégral d'un espace homogène symétrique est une intégrale de différentielle exacte.*

Le raisonnement fait montre inversement que toute forme différentielle extérieure à coefficients constants construite avec les expressions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ est un invariant intégral si sa dérivée extérieure est nulle.

III. Les intégrales de différentielle exaxte des espaces clos isogènes.

11. Nous allons à partir de maintenant nous occuper des espaces homogènes *clos*, ou plutôt des espaces homogènes dont le groupe fondamental est clos [2]); nous les appellerons *isogènes*. L'espace sphérique, l'espace elliptique sont des espaces clos isogènes; il en est de même de l'espace projectif complexe doué, comme groupe fondamental, du groupe linéaire unimodulaire d'une forme d'Hermite défiuie positive.

Il est possible d'introduire dans un espace clos isogène une

---

[1]) Nous nous appuyons sur le théorème de Poincaré d'après lequel une forme différentielle dont la dérivée extérieure est identiquement nulle est (*localement*) la dérivée extérieure d'une forme différentielle de degré moindre d'une unité; l'intégrale d'une telle forme porte, d'après Poincaré, le nom d'intégrale de différentielle exacte.

[2]) Voir, sur les groupes clos: E. Cartan, *Groupe simples clos et ouverts et géométrie riemannienne* (J. Math. pures et appl., 8, 1929, p. 1—33).

métrique riemannienne partout régulière invariante par le groupe fondamental [1]). Si, dans l'espace riemannien ainsi défini, la symétrie par rapport à un point, définie comme en géométrie élémentaire (les géodésiques jouant le rôle des droites), est isométrique, l'espace est symétrique au sens donné à ce mot au § II. Plus généralement toute variété de Riemann close pour laquelle la symétrie ordinaire par rapport à un point est isométrique peut être regardée comme un espace clos isogène symétrique, le groupe fondamental étant le plus grand groupe continu (nécessairement clos) de transformations isométriques de la variété [2]).

12. Nous nous proposons de déterminer toutes les intégrales de différentielle exacte d'un espace clos isogène, ou plutôt un *système complet d'intégrales de différentielle exacte linéairement indépendantes*.

Nous dirons que deux intégrales de différentielle exacte de même degré p, soit $\int \Pi_1$ et $\int \Pi_2$, sont *équivalentes* lorsque la forme différentielle extérieure $\Pi_1 - \Pi_2$ est la dérivée extérieure d'une forme de degré $p-1$ régulière dans tout l'espace. En ce sens l'intégrale de la dérivée extérieure d'une forme de degré $p-1$ est *équivalente à zéro*. Nous dirons enfin que h intégrales de différentielle exacte $\int \Pi_1, \ldots, \int \Pi_h$ de même degré p sont linéairement indépendantes s'il n'existe aucune combinaison linéaire $c_1 \Pi_1 + c_2 \Pi_2 + \ldots + c_h \Pi_h$ à coefficients constants non tous nuls qui soit la dérivée extérieure d'une forme de degré $p-1$.

Dans l'espace ordinaire dont on a enlevé l'origine, l'intégrale

$$I = \int \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

est une intégrale de différentielle exacte. Elle n'est pas équivalente à zéro; si en effet l'élément différentiel était la dérivée extérieure d'une forme

---

[1]) Cela tient à ce que le groupe linéaire γ (n° 4), *qui est clos*, laisse invariante une forme quadratique définie $\Sigma a_{ij} e_i e_j$; la métrique riemannienne est alors donnée par $ds^2 = \Sigma a_{ij} \omega_i \omega_j$.

[2]) Les espaces riemanniens symétriques jouissent d'une autre propriété caractéristique, à savoir que le transport parallèle laisse invariante la courbure riemannienne. Je les ai déterminés et étudiés dans différents mémoires (*Bull. Soc. Math.*, 54, 1926, p. 214—264; 55, 1927, p. 114—134; *Ann. Ec. Norm.*, 44, 1927, p. 345—467).

$$Pdx + Qdy + Rdz,$$

les fonctions P, Q, R étant régulières en tout point autre que l'origine, l'intégrale I étendue à toute surface fermée ne passant pas par l'origine serait nulle. Or elle est égale à 4π pour une sphère contenant l'origine à son intérieur.

D'une manière générale une intégrale de différentielle exacte de degré p équivalente à zéro est nulle si on l'étend à une variété fermée quelconque à p dimensions. Une intégrale de différentielle exacte qui admet une période n'est donc certainement pas équivalente à zéro. Nous reviendrons là-dessus dans le paragraphe IV.

13. La recherche, dans un espace clos isogène, d'un système complet d'intégrales de différentielle exacte linéairement indépendantes d'ordre donné, repose sur deux théorèmes fondamentaux.

D'après le premier théorème, *toute intégrale de différentielle exacte est équivalente à un invariant intégral.* D'après le second *tout invariant intégral équivalent à zéro résulte de la dérivation extérieure d'un invariant intégral de degré moindre d'une unité.*

Pour démontrer le premier théorème, nous allons d'abord montrer que si $\int\Pi$ est une intégrale de différentielle exacte de degré p, il existe un invariant intégral $\int\Omega$ de même degré prenant les mêmes valeurs que $\int\Pi$ pour toute variété fermée d'intégration. Appliquons en effet à une variété fermée donnée V à p dimensions une transformation quelconque S du groupe fondamental G. La variété V' ainsi obtenue peut se déduire de V par déformation continue, puisque le groupe G est continu (et non mixte); par suite l'intégrale $\int\Pi$ a la même valeur étendue à V et à V'. Mais l'intégrale étendue à V' n'est autre que l'intégrale étendue à V de la forme extérieure $S\Pi$ qui se déduit de Π par la transformation S. Les deux intégrales $\int\Pi$ et $\int S\Pi$ ont donc la même valeur, qui est aussi celle de l'intégrale $\int \frac{\Pi + S\Pi}{2}$.

Au lieu d'appliquer à Π une seule transformation de G, imaginons que nous lui appliquions successivement *toutes* les transformations de G; l'intégrale donné aura le même valeur que l'intégrale obtenus en remplaçant Π par la *moyenne* des valeurs des transformées $S\Pi$ de Π par les différentes transformations de G. Cette moyenne sera calculée en tenant compte du *volume* de chaque portion de la variété représentative du groupe. Autrement dit on pourra remplacer la forme Π par la forme

$$\Omega = \frac{1}{v} \int S\Pi \, . \, d\tau_S,$$

v désignant le volume total de la variété du groupe, $d\tau_S$ étant l'élément de volume de cette variété.

Le résultat précédent est exact de quelque manière qu'on choisisse l'élément de volume. Mais si on prend l'élément de volume *intrinsèque*[1]), invariant par le groupe des paramètres de G, la forme Ω devient invariante par le groupe G. Par suite *il existe bien un invariant intégral* $\int\Omega$ *prenant la même valeur que l'intégrale de différentielle exacte donnée.*

14. Pour démontrer que ces deux intégrales sont *équivalentes*, commençons par remarquer que la transformée $S\Pi$ de Π par une transformation *infinitésimale* S de G donne uue intégrale $\int S\Pi$ *équivalente* à $\int\Pi$. Introduisons en effet p symboles de différentiation échangeables entre eux $d_1, d_2, \ldots, d_p$. La forme Π peut être regardée comme une forme alternée $\Pi\,(d_1, d_2, \ldots, d_p)$ linéaire par rapport à p séries de variables

$$\begin{array}{l} d_1x_1,\ d_1x_2, \ldots,\ d_1x_n, \\ d_2x_1,\ d_2x_2, \ldots,\ d_2x_n, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ d_px_1,\ d_px_2, \ldots,\ d_px_n. \end{array}$$

La propriété de $\int\Pi$ d'être une intégrale de différentielle exacte se traduit alors par l'égalité

$$\begin{aligned} (8) \qquad & d_1\Pi(d_2, d_3, \ldots, d_{p+1}) - d_2\Pi(d_1, d_3, \ldots, d_{p+1}) + \ldots + \\ & \qquad + (-1)^p d_{p+1}\Pi(d_1, d_2, \ldots, d_p) = 0, \end{aligned}$$

où l'on introduit $p+1$ symboles de différentiation arbitraires échangeables entre eux.

Prenons maintenant pour symbole d_{p+1} le symbole δ de la transformation infinitésimale S, la quantité δx_i n'étant autre que le

[1]) Il existe en réalité deux éléments de volume intrinsèques respectivement invariants par chacun des deux groupes des paramètres; l'un de ces éléments de volume n'est autre que la forme extérieure $[\omega_1\omega_2 \ldots \omega_r]$. Dans le cas d'un groupe clos les deux éléments de volume intrinsèques sont identiques. Voir E. Cartan, *La géométrie des groupes de transformations* (J. Math. pures et appl., 6, 1927, p. 45—47).

coefficient ξ_i de $\dfrac{\delta f}{\delta x_i}$ dans la transformation infinitésimale. Posons enfin

$$\Pi(\delta, d_1, \ldots, d_{p-1}) = \omega(d_1, d_2, \ldots, d_{p-1});$$

ω est une forme différentielle extérieure de degré $p-1$. L'identité (8) peut alors s'écrire

$$\delta\Pi(d_1, d_2, \ldots, d_p) = d_1\omega(d_2, d_3, \ldots, d_p) - d_2\omega(d_1, d_3, \ldots, d_p) + \ldots + \\ + (-1)^{p-1} d_p\omega(d_1, d_2, \ldots, d_{p-1}),$$

ou encore, plus simplement,

(9) $$\delta\Pi = \omega',$$

en désignant par ω' la dérivée extérieure de ω. *L'accroissement infiniment petit que subit Π par l'effet de la transformation infinitésimale est donc la dérivée extérieure d'une forme ω.*

15. Prenons maintenant la transformée $S\Pi$ de Π par une transformation *finie* S de G. Le groupe G étant clos, la transformation S fait partie d'un sous groupe à un paramètre engendré par une transformation infinitésimale

$$\xi_1 \frac{\delta f}{\delta x_1} + \xi_2 \frac{\delta f}{\delta x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\delta f}{\delta x_n};$$

soit

$$x_i' = \phi_i(x_1, \ldots, x_n, t)$$

les équations finies de ce sous groupe, t étant le paramètre canonique. Soit Π_t la forme obtenue en remplaçant dans Π les x_i et leurs différentielles par les x_i' et leurs différentielles (ces dernières étant calculées en regardant t comme une constante); soit ω_t la forme analogue déduite de ω. L'égalité (9) peut s'écrire

$$\frac{\delta}{\delta t}\Pi_t = (\omega_t)',$$

et l'on a par suite

$$\Pi_t - \Pi = \left(\int_0^t \omega_t\, dt\right)';$$

cette égalité montre que $\int\Pi_t$, qui n'est autre que $\int S\Pi$, est *équivalente* à l'intégrale donnée $\int\Pi$. Par suite l'intégrale obtenue en rem plaçant Π par la moyenne des valeurs de $S\Pi$ lui est aussi équivalente. Nous arrivons donc au premier théorème que nous avions en vue.

Théorème I. — *Toute intégrale de différentielle exacte d'un espace clos isogène est équivalente à un invariant intégral.*

16. Pour calculer effectivement la forme, ou plutôt l'une des formes de degré $p-1$ dont $\Pi - \Omega$ est la dérivée extérieure, il y aurait lieu de choisir suivant une loi régulière celui des sous-groupes à un paramètre de G qui contient une transformation donnée. Or la théorie des groupes clos permet de le faire de manière à écarter toute objection: mais nous n'insisterons pas sur ce point, en somme accessoire.

17. Le second théorème que nous avons en vue sera beaucoup plus rapide à démontrer. Supposons que l'invariant intégral $\int\Omega$ soit équivalent à zéro, c'est à dire que la forme Ω soit la dérivée extérieure d'une forme ω Appliquons à l'égalité

$$\Omega = \omega'$$

la transformation S du groupe G; nous avons

$$\Omega = (S\omega)'.$$

De là on déduit, par le même raisonnement qu'au n° 13, que la forme Ω est la dérivée extérieure de la forme

$$\frac{1}{v}\int S\omega \,.\, d\tau_S,$$

qui est invariante par le groupe G. Nous avons donc le

Théorème II. — *Tout invariant intégral équivalent à zéro est la dérivée extérieure d'un invariant intégral dont le degré est moindre d'une unité.*

18. Arrivons maintenant à la détermination, dans l'espace clos isogène donné, d'un système complet d'intégrales de différentielle exacte linéairement indépendantes. Imaginons effectuée la détermination de toutes les formes extérieures invariantes de l'espace. Supposons qu'il y en ait n_p de degré p, et que sur ces n_p il y en ai ν_p linéairement indépendantes dont la dérivée extérieure soit nulle Il existe alors, d'après le théorème I, au plus ν_p intégrales de différentielle exacte linéairement independantes de degré p; mais $\nu_{p-1} - n_{p-1}$ d'entre elles proviennent de la dérivation extérieure de

formes invariantes de degré $p-1$. D'après le théorème II, *le nombre des intégrales de différentielle exacte linéairement indépendantes de degré p est donc égal à* $\nu_p + \nu_{p-1} - n_{p-1}$.

Si l'espace clos isogène est symétrique, les résultats précédents se simplifient. Nous avons vu en effet (n⁰ 10) que dans ce cas tout invariant intégral est une intégrale de différentielle exacte. Par suite $\nu_p = n_p$. Dans uu espace clos isogène symétrique *le nombre des intégrales de différentielle exactc linéairement indépendantes est égal au nombre des invariants intégraux linéairement indépendants.*

Observons que l'expression „linéairement indépendants“ entre deux fois dans l'énoncé précédent, mais avec des sens bien différents; la première fois dans le sens transcendant défini au n⁰ 12, la seconde fois dans le sens algébrique ordinaire.

19. Le résultat relatif aux espaces clos isogènes symétriques est remarquable en ce qu'il établit une relation entre deux éléments, dont l'un (le nombre des intégrales de différentielle exacte linéairement indépendantes) ne dépend que des propriétés topologiques de l'espace et pas du tout du groupe fondamental G. tandis que l'autre (le nombre des invariants intégraux linéairement indépendants) dépend essentiellement de ce groupe fondamental.

Nous allons, dans le paragraphe suivant, nous occuper du rôle que jouent, au point de vue de l'Analysis situs, les systèmes complets d'intégrales de différentielle exacte linéairement indépendantes.

IV. Sur quelques problèmes d'Analysis situs.

20. Toute intégrale de différentielle exacte qui admet une période n'est certainement pas équivalente à zéro. Mais on ne sait pas si la réciproque est vraie. Il y aurait dont un grand interet à démontrer le théorème suivant [1]).

Théorème A. — *Toute intégrale de différentielle exacte non équivalente à zéro admet au moins une période* [2]).

Ce théorème est du reste équivalent au suivant.

Théorème A′. — *Etant donné h intégrales de différentielle exacte linéairement indépendantes de degré p, on peut trouver h variétés fermées à p dimensions* $V^{(1)}$, $V^{(2)}$, … $V^{(n)}$, *telles que le tableau carré*

---

[1]) Les théorèmes énoncés dans ce paragraphe sont ceux dont M. Georges de Rahm vient d'annoncer la démonstration, (Voir note [1]), p. 182).

[2]) Ce théorème est à peu près évident pour les intégrales du premier degré (de la forme $\int \Sigma A_i dx_i$).

des valeurs des h intégrales étendues à ces h variétés ait son déterminant différent de zéro.

Si l'on ne peut pas démontrer ces théorèmes, on peut du moins espérer, pour chaque espace clos isogène particulier, qu'on puisse les vérifier, puisqu'on sait former le système complet des intégrales de différentielle exacte.

21. Si l'on admet le théorème A′, le $p^{ième}$ nombre de Betti [1]) de l'espace est *au moins* égal au nombre des intégrales de différentielle exacte linéairement indépendantes de degré p. Il serait important de savoir s'il peut le dépasser ou non. Dans le cas de la négative, on aurait le théorème fondamental suivant.

Théorème B. — *Il existe antant d'intégrales de différentielle exacte linéairement independantes de degré p qu'il y a d'unités dans le $p^{ième}$ nombre de Betti de l'espace.*

Ce théorème semble encore plus difficile à démontrer a priori que le théorème A [2]), mais l'une de ses conséquences semble plus abordable, au moins dans le cas particulier des espaces clos isogènes.

En effet si le théorème A est exact et si h est le nombre des intégrales de différentielle exacte linéairement indépendantes de degré p, on peut trouver h variétés fermées à p dimensions $V^{(1)}$, $V^{(2)}, \ldots, V^{(h)}$ telles que le tableau des valeurs $I_i^{(j)}$ de de la $i^{ième}$ intégrale étendue à la $j^{ième}$ variété ait son déterminant différent de zéro. Si donc V est une variété fermée quelconque à p dimensions, on a, pour la valeur I_i de la $i^{ième}$ intégrale étendue à V, une formule de la forme

$$I_i = m_1 I_i^{(1)} + m_2 I_i^{(2)} + \cdots + m_h I_i^{(h)},$$

les coefficients $m_1, m_2, \ldots, m_h$ étant des constantes bien déterminées indépendantes de i. Si le théorème B est exact, il existe entre les variétés V, $V^{(1)}, \ldots, V^{(h)}$ une *homologie* de la forme

$$nV + n_1 V^{(1)} + n_2 V^{(2)} + \ldots + n_h V^{(h)} \sim 0,$$

---

[1]) Voir H. Poincaré, *Analysis situs* (J. Ecole Polyt., 2e série, t. 1, 1895, p. 1—121). Le *nombres de Betti* du texte sont ceux que Poincaré appelle de ce nom, mais diminués d'une unité (*loc. cit.* p. 19).

[2]) Il semble que H. Poincaré regardrait ce théorème comme exact, si l'on interprète correctement ce qu'il dit dans le mémoire cité dans la note précédente: „On pourrait d'ailleurs faire voir qu'il existe toujours des intégrales pour lesquelles le nombre maximum des périodes [le nombre de Betti] est atteint". (*loc. cit.* p. 25).

les n_i étant des *entiers* positifs, négatifs ou nuls dont le premier n est certainement différent de zéro. Il en résulte qu'on a

$$m_i = -\frac{n_i}{n}.$$

22. On arrive ainsi au théorème suivant, conséquence des théorèmes A et B.

Théorème C. — *S'il existe h intégrales de différentielle exacte linéairement indépendantes de dégre p et h seulement, si de plus le déterminant des valeurs $I_i^{(j)}$ prises par ces h intégrales étendues à h variétés fermées à p dimensions $V^{(1)}, V^{(2)}, \ldots, V^{(h)}$ est différent de zéro, il est impossible de trouver une $(h+1)^{ième}$ variété fermée V telle que les valeurs I_i des intégrales étendues à V soient de la forme*

$$I_i = m_1 I_i^{(1)} + m_2 I_i^{(2)} + \ldots + m_h I_i^{(h)},$$

certains des coefficients m étant irrationnels.

En particulier pour $h=1$, l'intégrale de différentielle exacte ne peut admettre deux périodes incommensurables entre elles.

Dans le cas général, le théorème C exprime encore que les points de coordonnées $I_1, \ldots, I_h$ dans l'espace ordinaire à h dimensions forment un *réseau*.

Il est clair que si on arrivait, dans un espace clos isogène, à mettre en défaut le théorème C, cela démontrerait la fausseté du théorème B.

23. Malgré l'ignorance où nous sommes relativement aux théorèmes A et B, il ne semble pas trop illégitime d'appeller *polynome de Poincaré* d'un espace clos isogène à n dimensions le polynome

$$t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \ldots + a_{n-1} t + a_n,$$

dont le coefficient a_p est égal au nombre des intégrales de différentielle exacte linéairement indipendantes de degré p. C'est ce que nous ferons dans la suite de ce mémoire.

V. Détermination du polynome de Poincaré d'un espace clos symétrique.

24. Il existe un espace clos isogène dont on peut déterminer immédiatement un système complet d'intégrales de différentielle exacte, c'est le *tore à n dimensions*. Chaque point de l'espace est

déterminé analytiquement par n nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$, définis chacun à un multiple près de 2π. Le groupe fondamental est ici le groupe

$$x_i' = x_i + a_i,$$

les paramètres a_i étant également définis à des multiples près de 2π. Le sous-groupe g qui laisse invariant le point origine ($x_i = 0$) se réduit à la transformation identique; de plus la transformation $x_i' = -x_i$ jouit des propriétés caractéristiques de la symétrie par rapport au point origine (n⁰ 9); le groupe G admet l'automorphie involutive qui change la transformation de paramètres a_i dans celle de paramètres $-a_i$.

Toute forme différentielle extérieure invariante est évidemment une forme extérieure à coefficients constants arbitraires construite avec les différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. Il existe donc C_n^p intégrales de différentielle exacte linéairement indépendantes de degré p; *le polynome de Poincaré du tore à n dimensions est donc* $(t+1)^n$.

On peut vérifier facilement ici les théorèmes A et C; le théorème B est du reste aussi exact

Pour $n = 2$, la surface de Riemann d'une courbe algébrique de genre 1 réalise l'espace en question: les deux intégrales de différentielle exacte linéairement indépendantes du premier degré sont l'intégrale de première espèce attachée à la courbe et l'intégrale imaginaire conjuguée.

25. Dans le cas d'un espace clos isogène symétrique quelconque E de groupe fondamental clos G, le sous-groupe g est également clos, ainsi que le sous-groupe linéaire γ du groupe adjoint Γ, qui n'est autre que le groupe des rotations autour du point O invariant par g.

Soit alors

$$e_i' = \sum_{k=1}^{k=r} a_{ik} e_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

les équations de γ. Le nombre des invariants intégraux linéairement indépendants de degré p de l'espace E est égal au nombre des formes extérieures de degré p en $e_1, e_2, \ldots, e_n$ invariantes par γ. Pour l'évaluer, considérons le groupe linéaire γ_p qui indique comment γ transforme entre elles les formes extérieures élémentaires $[e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_p}]$; c'est un groupe linéaire à C_n^p variables. *Le nombre* *cherché est tout simplement le nombre des invariants linéaires de γ_p.* Or ce nombre est, d'après la théorie des caractères de Frobenius, étendue par H. Weyl des groupes finis aux groupes continus clos [1]), égal à la valeur moyenne du caractère (trace, Spur) des transformations de γ_p, le caractère étant la somme des éléments de la diagonale principale dans le tableau des coefficients de la transformation.

On voit facilement que le caractère de la substitution linéaire de γ_p qui correspond à la substitution linéaire (10) de γ est égal à la somme des mineurs diagonaux à p lignes et p colonnes de la matrice (a_{ij}).

On déduit immédiatement de ce qui précède le théorème suivant: *Le polynome de Poincaré d'un espace clos isogène symétrique est égal à la valeur moyenne du déterminant*

$$\Delta_R(t) = \begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+t & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+t \end{vmatrix}, \tag{11}$$

quand on considère successivement toutes les substitutions R du groupe γ.

Il va sans dire que la valeur moyenne de $\Delta_R(t)$ est calculée en tenant compte de la mesure intrinsèque de volume (n⁰ 13) de la variété du groupe γ.

26. Le groupe linéaire γ étant clos laisse invariante une forme quadratique définie positive; on peut donc le supposer orthogonal. Le polynome $\Delta_R(t)$ jouit alors de la propriété que les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux. *La même propriété appartient donc au polynome de Poincaré, à savoir que ses coefficientt équidistants des extrêmes sont égaux.*

Si l'on admet les théorèmes A et B, ce résultat est une conséquence d'un théorème classique d'Analysis situs, à savoir que les nombres de Betti d'ordres p et $n-p$ d'une variété close à n dimensions sont égaux [2]).

27. Dans le cas du tore à n dimensions, le groupe γ se réduit à la substitution identique, et on a immédiatement $\Delta_R(t) = (t+1)^n$;

---

[1]) H. Weyl, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen* (Math. Zeitschr., 23, 1925, p. 271—309 24, 1925, p. 328—395).

[2]) H. Poincaré, *loc. cit.*, p. 65.

c'est l'expression déjà trouvée directement du polynome de Poincaré de l'espace.

Dans le cas de l'espace sphérique, le groupe γ est le groupe orthogonal général à n variables, et nous avons démontré directement (nº 6) qu'il n'admettait aucune forme extérieure invariante de degré $p < n$. Il n'y a donc qu'une intégrale de différentielle exacte non équivalente à zéro, c'est celle qui donne le volume de l'espace. Le polynome de Poincaré de l'espace sphérique à n dimensions est donc $t^n + 1$; cela est du reste d'accord avec les propriétés topologiques de cet espace d'avoir tous ses nombres de Betti nuls. On peut déduire de ce qui précède qu'*à l'intérieur du groupe orthogonal continu, la somme des mineurs diagonaux à p lignes et p colonnes d'une matrice orthogonale d'ordre n a sa valeur moyenne nulle* $(1 \leqslant p \leqslant n-1)$.

28. Ce que nous venons de dire pour un espace clos symétrique peut s'étendre à un espace non symétrique, mais la valeur moyenne du déterminant $\Delta_R(t)$ ne représente plus le polynome de Poincaré de l'espace; les coefficients du polynome obtenu sont les nombres d'invariants intégraux linéairement indépendants des différents degrés.

29. Il peut arriver que le sous-groupe g, et par suite le groupe linéaire γ, soit *mixte.* En tous cas il est clos et par suite ne contient qu'un nombre fini de familles continues de transformations. Le polynome de Poincaré s'obtiendra en cherchant pour chacune des familles la valeur moyenne du déterminant $\Delta_R(t)$ et en prenant ensuite la moyenne arithmétique des moyennes trouvées.

Dans la pratique, si l'on sait calculer les formes extérieures invariantes par celle des familles continues de γ qui contient la transformation identique, on ne conservera que les combinaisons linéaires de ces formes qui sont invariantes par chacune des autres familles continues de γ. Par exemple considérons l'espace *sphérique* et l'espace *elliptique* à n dimensions. Ils peuvent être obtenus tous les deux en partant du groupe continu orthogonal à $n+1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, pris comme groupe fondamental G, le sous-groupe g étant, pour l'espace sphérique, celui qui laisse invariante la variable x_{n+1}; pour l'espace elliptique, le sous-groupe précédent combiné avec la transformation

$$x'_1 = x_1, \ldots, x'_{n-1} = x_{n-1}, x'_n = -x_n, x'_{n+1} = -x_{n+1}.$$

Le groupe linéaire γ est, pour l'espace sphérique, le groupe orthogonal continu à n variables $e_1, e_2, \ldots, e_n$; pour l'espace elliptique, il faut le combiner en outre avec la transformation

$$e_1' = -e_1, e_2' = -e_2, \ldots, e_{n-1}' = -e_{n-1}, e_n' = e_n.$$

On voit que la forme extérieure $([e_1 e_2 \ldots e_n]$ est un invariant du groupe γ de l'espace elliptique si n est impair, mais n'est pas un invariant si n est pair: dans ce dernièr cas l'espace elliptique est *non orientable* et son polynome de Poincaré est t^n.

On peut encore voir les choses autrement. L'élément de volume de l'espace sphérique est la forme extérieure

$$x_1 [dx_2 dx_3 \ldots dx_{n+1}] - x_2 [dx_1 dx_3 \ldots dx_{n+1}] + \ldots + \\ + (-1)^n x_{n+1} [dx_1 dx_2 \ldots dx_n],$$

où les $n+1$ coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ sont liées par la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1.$$

On passe de l'espace sphérique à l'espace elliptique en identifiant le point (x_i) au point $(-x_i)$; par ce changement de coordonnées, l'élément de volume se conserve si n est impair, change de signe si n est pair.

VI. Application à l'espace projectif complexe.

30. Prenons, dans l'espace projectif complexe rapporté à $n+1$ coordonnées homogènes $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, comme groupe fondamental G, le groupe (clos) linéaire unimodulaire qui laisse invariante la forme d'Hermite définie positive

$$x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \ldots + x_{n+1} \bar{x}_{n+1}.$$

Nous obtenons ainsi *l'espace hermitien elliptique*, qui est symétrique. L'automorphe involutive A correspondant au point $(o, o, \ldots, 1)$ de l'espace est

$$x_1' = -x_1, x_2' = -x_2, \ldots, x_n' = -x_n, x_{n+1}' = x_{n+1}.$$

Le groupe γ est ici le groupe linéaire (non unimodulaire) d'une forme d'Hermite définie positive

$$e_1 \bar{e}_1 + e_2 \bar{e}_2 + \ldots + e_n \bar{e}_n;$$

il est à $2n$ variables réelles, qui sont les parties réelles et imaginaires de $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Désignons par (a_{ij}) la matrice représentative de la substitution *unimodulaire* la plus générale laisant cette forme d'Hermite invariante, et désignons par θ un paramètre angulaire variable. Le déterminant $\Delta_R(t)$ est égal au produit déterminant

$$D(t) = \begin{vmatrix} a_{11}e^{i\theta} + t & a_{12}e^{i\theta} & \ldots & a_{1n}e^{i\theta} \\ a_{21}e^{i\theta} & a_{22}e^{i\theta} + t & \ldots & a_{2n}e^{i\theta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}e^{i\theta} & a_{n2}e^{i\theta} & \ldots & a_{nn}e^{i\theta} + t \end{vmatrix}$$

qui se rapporte aux variables $e_1, e_2, \ldots, e_n$, par le déterminant imaginaire conjugué relatif aux variables $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$.

Le polynome de Poincaré de l'espace projectif complexe est donc égal à la valeur moyenne du carré du module du déterminant $D(t)$, quand θ varie de 0 à 2π et quand la matrice (a_{ij}) décrit tout le groupe unimodulaire de la forme d'Hermite.

31. Pour faire le calcul, portons d'abord notre attention sur θ. Nous voyons que le polynome de Poincaré sera de la forme

$$t^{2n} + \beta_1 t^{2n-2} + \beta_2 t^{2n-4} + \ldots + \beta_{n-1} t^2 + \beta_n,$$

en désignant par β_p la valeur moyenne du carré du module de la somme des mineurs diagonaux à p lignes et p colonnes de la matrice (a_{ij}). C'est aussi, si l'on veut, la valeur moyenne du carré du module du *caractère* de la substitution linéaire du gooupe γ_p (n° 25) qui indique comment γ transforme entre elles les formes extérieures $[e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots e_{i_p}]$. Or le groupe γ_p est *irréductible* et par suite, d'après un théorème fondamental de la théorie des caractéres [1]), la valeur moyenne cherchée est égale à 1.

---

[1]) Si la réduction d'un groupe linéaire fini ou continu clos donne naissance à k groupes irréductibles non équivalents entre eux, ces groupes se présentant respectivement ν_1 fois, ν_2 fois, ..., ν_k fois, la valeur moyenne du carré du module du caractère est égale à

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots + \nu_k^2.$$

Deux groupes linéaires irréductibles γ_1 et γ_2 isomorphes à un même groupe g sont équivalents s'ils transforment le même nombre de variables et si, au besoin par une substitution linéaire préaluble eflectuée sur les variables de l'un des groupes, à chaque transformation de g correspond la *même* substitution pour γ_1 et γ_2.

Le polynome de Poincaré de l'espace projectif complexe à n dimensions complexes est donc

$$t^{2n} + t^{2n-2} + t^{2n-4} + \ldots + t^2 + 1.$$

La forme invariante de degré $2p$ est évidemment

$$\Sigma[e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_p} \bar{e}_{i_1} \bar{e}_{i_2} \ldots \bar{e}_{i_p}],$$

la somme étant étendue à toutes les combinaisons p à p des indices $1, 2, \ldots, n$.

32. L'invariant intégral de degré $2p$ peut être écrit explicitement. Astreignons les coordonnées $x_1, \ldots, x_{n+1}$ à satisfaire à la relation

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_{n+1}\bar{x}_{n+1} = 1, \tag{12}$$

et considérons la forme différentielle extérieure

$$\Omega = [dx_1 d\bar{x}_1] + [dx_2 d\bar{x}_2] + \ldots + [dx_{n+1} d\bar{x}_{n+1}]. \tag{13}$$

On vérifie facilement que cette forme ne change pas si on multiplie toutes les coordonnées par un facteur variable $e^{i\theta}$, ce qui n'altère par la relation (12). La forme (13) est d'autre part invariante par toute substitution du groupe fondamental. Elle donne donc l'invariant intégral cherché du second degré. Les autres s'en déduisent par élévation (extérieure) au carré, au cube, la forme de degré p étant

$$\Omega^p = \Sigma[dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_p} d\bar{x}_{i_1} d\bar{x}_{i_2} \ldots d\bar{x}_{i_p}].$$

Il est à remarquer que la forme (13) est purement imaginaire; il faudrait la multiplier par une constante purement imaginaire pour obtenir un invariant intégral réel.

33. Le théorème A (n° 20) est ici facile à vérifier. Etendons par exemple l'intégrale $\int\Omega$ à une droite de l'espace, par exemple à la droite

$$x_3 = x_4 = \ldots = x_{n+1} = 0;$$

l'invariant intégral $\int\Omega$ n'est autre que celui qui donne l'aire de la droite complexe, définie par deux coordonnées homogènes x_1, x_2; c'est donc, à un facteur constant près, l'aire de la sphère. Pour faire le calcul, posons

$$x_1 = \zeta x_2,$$

la variable complexe ζ prenant toutes les valeurs, y compris ∞. Nous aurons

$$x_2\bar{x}_2(1+\zeta\bar{\zeta})=1,$$

ce qui nous permet de prendre

$$x_2=\bar{x}_2=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta\bar{\zeta}}};$$

la forme Ω se réduit alors à

$$[dx_1d\bar{x}_1]=[(\zeta dx_2+x_2d\zeta)(\bar{\zeta}dx_2+x_2d\bar{\zeta})]=x_2[d\zeta d\bar{\zeta}]+$$
$$+x_2dx_2(\zeta d\bar{\zeta}-\bar{\zeta}d\zeta)]=\frac{[d\zeta d\bar{\zeta}]}{(1+\zeta\bar{\zeta})^2}.$$

L'intégrale

$$\int\int\frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{(1+\zeta\bar{\zeta})^2}$$

donne, au signe près qui dépend de orientation de la surface d'intégration, la valeur $2\,i\pi$.

Il en résulte que l'intégrale

$$\frac{1}{2\,i\pi}\int\int dx_1d\bar{x}_1+dx_2d\bar{x}_2+\ldots+dx_{n+1}d\bar{x}_{n+1}$$

étendue à une droite complexe de l'espace, considérée comme surface fermée d'intégration, est égale à 1. *Cette même intégrale étendue à une courbe algébrique de degré p, serait égale à p*, puisqu'une telle courbe peut, par déformation continue, se réduire à un système de p droites.

34. L'invariant intégral de degré $2\,p$ à également une période. Si on l'étend à une variété plane à p dimensions (complexes) de l'espace, on trouve sans difficulté

$$\int\sum[dx_{i_1}dx_{i_2}\ldots dx_{i_p}d\bar{x}_{i_1}d\bar{x}_{i_2}\ldots d\bar{x}_{i_p}]=$$
$$=\int\frac{d\zeta_1d\zeta_2\ldots d\zeta_pd\bar{\zeta}_1d\bar{\zeta}_2\ldots d\bar{\zeta}_p}{(1+\zeta_1\bar{\zeta}_1+\zeta_2\bar{\zeta}_2+\ldots+\zeta_p\bar{\zeta}_p)^{p+1}},$$

le second membre étant étendu à l'ensemble des valeurs complexes des variables $\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_p$. Cette intégrale est égale à $\frac{(2\,i\pi)^p}{p!}$. Bien entendu il faut supposer que la variété d'intégration a été orientée convenablement.

On voit donc que, pour l'espace projectif complexe, les théorèmes A et C sont valables, du moins si on se borne à considérer les variétés fermées algébriques, c'est à dire définies par des relations algébriques entre les coordonnées $x_1, \ldots, x_{n+1}$.

35. Si le théorème B est exact, le lieu des points réels de l'espace, ou du moins l'un de ses multiples, doit être réductible à un point par déformation continue. En effet, si n est impair, il n'existe aucun invariant intégral de degré n; si n est pair, il en existe un, mais sa valeur est nulle quand on l'étend à l'espace projectif réel. La vérification de la propriété topologique énoncée est facile.

Donnons-nous en effet un point *imaginaire* fixe $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$, et considérons, pour chaque valeur réelle et positive de λ, la variété fermée à n dimensions, lieu du point

$$\lambda a_1 + x_1,\ \lambda a_2 + x_2,\ \ldots,\ \lambda a_{n+1} + x_{n+1}, \tag{14}$$

où on donne aux quantités $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ toutes les valeurs réelles assujetties à satisfaire à la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1.$$

Il est essentiel de s'assurer que les $n+1$ coordonnées (14) ne peuvent jamais être toutes nulles, ce qui est évident puisque le point (a_i) n'est pas réel. Pour $\lambda = 0$, la variété fermée se réduit à l'espace projectif réel, *compté deux fois*; pour $\lambda = \infty$, elle se réduit au point (a_i); elle se déforme d'autre part d'une manière continue avec λ. *Le double de l'espace projectif réel est donc réductible à un point par déformation continue* [1]).

36. L'espace hermitien elliptique admet, si n est impair, une

---

[1]) La détermination des nombres de Betti du plan projectif complexe a été virtuellement faite par H. Poincaré, qui a étudié (*loc. cit.*, p. 88—99) la variété dont chaque point est constitué par un couple *non ordonné* de points pris sur une hypersphère. Or si l'on se donne dans le plan projectif complexe une conique (C), tout point du plan est défini par le couple non ordonné des points de contact des tangentes menées de ce point à la conique; or les points de la conique (complexe) sont en correspondance biunivoque avec les valeurs d'un paramètre complexe, c'est à dire avec les points d'une sphère réelle.

forme de Clifford[1]) $\mathcal{E}'$ qu'on obtient en regardant comme identiques, dans l'espace projectif, deux points qui se déduisent l'un de l'autre par l'*antiinvolution*

$$(15)\quad x'_1 = \bar{x}_2,\ x'_2 = -\bar{x}_1,\ x'_3 = \bar{x}_4,\ x'_4 = -\bar{x}_3, \ldots, x'_n = \bar{x}_{n+1},\ x'_{n+1} = \bar{x}_n.$$

Le groupe fondamental G de l'espace hermitien elliptique n'est plus défini d'une manière uniforme dans le nouvel espace $\mathcal{E}'$; néanmoins toutes les transformation de G invariantes par les relations (15) engendrent un groupe transitif G' qu'on peut prendre comme groupe fondamental (clos) de l'espace $\mathcal{E}'$, qui est ainsi un espace clos isogène. *Mais cet espace n'est plus symétrique.* Le groupe G' est celui qui laisse invariantes à la fois la forme d'Hermite

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_{n+1}\bar{x}_{n+1}$$

et la forme extérieure

$$[x_1 x_2] + [x_3 x_4] + \ldots + [x_n x_{n+1}].$$

Quant au sous-groupe g', il est formé du sous groupe de G' laissant invariant le point $(o, \ldots, o, 1)$, combiné avec la transformation $x'_1 = x_1, \ldots, x'_{n-1} = x_{n-1},\ x'_n = x_{n+1},\ x'_{n+1} = -x_n$.

37. L'espace $\mathcal{E}'$ peut être obtenu en partant de l'espace projectif complexe $\mathcal{E}$, doué du groupe fondamental G', et en y regardant comme identiques deux points se déduisant l'un de l'autre par l'antiinvolution (15). Les intégrales de différentielle exacte de $\mathcal{E}'$ seront certains des invariants intégraux de l'espace $\mathcal{E}$ (*doué du groupe fondamental* G'), à savoir ceux qui sont des intégrales de différentielle exacte et qui sont invariants par antiinvolution (15). Or nous connaisons un système complet d'intégrales de différentielle exacte de $\mathcal{E}'$; c'est celui qui est constitué par les invariants intégraux de l'espace hermitien elliptique; ils sont invariants par G', *qui est un sous-groupe de* G. Donc *nous n'avons qu'à chercher ceux de ces invariants qui sont invariants par l'aintiinvolution* (15). Comme la forme Ω se reproduit changée de signe par cette antiinvolution, il en résulte que les intégrales de différentielle exacte cherchées de l'espace $\mathcal{E}'$ font

---

[1]) Une *forme ds Clifford* d'un espace *homogène* E est une variété *localement* identique à E, mais dans laquelle les transformations du groupe fondamental G, bien qu'existant localement au voisinage de la transformation identique, ne peuvent pas se prolonger partout. Voir E. Cartan, *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann* (Paris, Gauthier-Villars, 1928, chap. III).

$\int\Omega_1^2, \int\Omega_1^4 \ldots$ Autrement dit *le polynome de Poincaré de l'espace $\mathcal{E}'$, forme de Clifford de l'espace projectif complexe, est*

$$t^{2n} + t^{2n-4} + \ldots + t^2.$$

On voit que cet espace est non orientable[1]).

38. Le raisonnement précédent pourra s'appliquer à toute forme de Clifford E' d'un espace clos isogène E, *pourvu que cette forme de Clifford constitue encore un espace clos isogène*: on prendra ceux des invariants intégraux de l'espace E qui sont des intégrales de différentielle exacte et qui sont invariants par le groupe discontinu qui fait passer d'un point de E à tous les autres points correspondant au même point de E'. Il est essentiel de remarquer que cette règle tomberait en défaut si l'espace E n'était pas clos. Il suffit de considérer le cas du tore, regardé comme un espace clos isogène se déduisant du plan euclidien au moyen d'un réseau de parallélogrammes: le plan euclidien n'admet aucun invariant intégral linéaire, tandis que le tore en admet deux.

VII. Application à l'espace projectif complexe réglé.

39. On arrive à des résultats géométriques intéressants en considérant l'espace projectif complexe *réglé*; nous nous bornerons au cas de l'espace à trois dimensions (à 8 dimensions réelles, si on le regarde comme un lieu de droites).

On peut regarder est espace comme un espace clos isogène symétrique[2]). Partons pour cela du groupe linéaire unimodulaire G de la forme d'Hermite

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 + x_4\bar{x}_4$$

---

[1]) Cet espace admet une représentation biunivoque sur une variété réelle de l'espace euclidien à 35 dimensions; les coordonnées d'un point de cette variété sont les coefficients du développement du polynome

$$(a\bar{x}_2 - b\bar{x}_1 + c\bar{x}_4 - d\bar{x}_3)^2 (ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4)^2,$$

considéré comme polynome en a, b, c, d.

[2]) Cet espace admet une représentation sans singularité dans l'espace euclidien à 15 dimensions au moyen d'une variété réelle V définie de la manière suivante. Désignons par p_{ij} les coordonnées plückeriennes d'une droite assujetties à satisfaire à la relation $p_{12}\bar{p}_{12} + \ldots + p_{34}\bar{p}_{34} = 1$. Les 15 coordonnées rectangulaires d'un point de V seront les quantités

et de l'automorphie involutive

$$x'_1 = -x_1,\ x'_2 = -x_2,\ x'_3 = x_3,\ x'_4 = x_4. \tag{16}$$

Le sous-groupe caractéristique de cette automorphie est celui qui laisse invariante la droite $x_1 = x_2 = 0$ (et aussi la droite $x_3 = x_4 = 0$, polaire de la première par rapport à la forme d'Hermite). L'automorphie considérée donne donc naissance à l'espace des droites transformées de $x_1 = x_2 = 0$, c'est-à-dire à l'espace projectif réglé.

40. Les transformations infinitésimales de G qui se reproduisent changées de signe par l'automorphie (16) sont les quatre transformations

$$\tag{17} \begin{gathered} X_1 f = x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad X_2 f = i\left(x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_4 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \\ X_3 f = \left(x_4 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \quad X_4 f = i\left(x_4 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \end{gathered}$$

et les quatre transformations suivantes, qui doivent être regardées comme imaginaires conjuguées des précédentes,

$$\overline{X}_1 f = -\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_4}\right), \quad \overline{X}_2 f = i\left(-x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_4}\right),$$

$$\overline{X}_3 f = -x_1 \frac{\partial f}{\partial x_4} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3}, \quad \overline{X}_4 f = -i\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_4} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right).$$

On vérifie facilement que le groupe linéaire γ transforme entre elles les variables e_1, e_2, e_3, e_4 en les multipliant d'abord par un même facteur de la forme $e^{i\theta}$ et en effectuant ensuite sur elles une substitution orthogonale arbitraire à coefficients réels.

La raisonnement qui a été fait (n° 30) dans le cas de l'es-

$$\sum_k (p_{ik}\overline{p}_{jk} + p_{jk}\overline{p}_{ik}), \quad \sqrt{-1}\sum_k (p_{ik}\overline{p}_{jk} - p_{jk}\overline{p}_{ik}) \quad (i \neq j),$$

$$\sum_k (p_{1k}\overline{p}_{1k} - p_{2k}\overline{p}_{2k}), \quad \sum_k (p_{3k}\overline{p}_{3k} - p_{4k}\overline{p}_{4k}),$$

$$\frac{1}{2}\sum_k (p_{1k}\overline{p}_{1k} + p_{2k}\overline{p}_{2k} - p_{3k}\overline{p}_{3k} - p_{4k}\overline{p}_{4k}).$$

Les transformations que le groupe G exerce sur les droites se traduisent par des rotations autour de l'origine effectuées sur l'espace euclidien dans lequel est plongée la variété.

pace projectif ponctuel montre que le polynome de Poincaré est ici encore de la forme

$$t^8 + \beta_1 t^6 + \beta_2 t^4 + \beta_3 t^2 + \beta_4,$$

β_p désignant la valeur moyenne du carré du module du caractère du groupe linéaire qui indique comment le groupe orthogonal réel à quatre variables transforme les formes extérieures de degré p.

Or pour $p = 1$, nous obtenons le groupe orthogonal, qui est irréductible; nous avons donc $\beta_1 = 1$. Pour $p = 2$, le groupe linéaire qui transforme les formes $[e_i e_j]$ se décompose en deux groupes irréductibles *non équivalents* [1]), l'un transformant entre elles les trois quantités

$$[e_2 e_3] + [e_1 e_4], \quad [e_3 e_1] + [e_2 e_4], \quad [e_1 e_2] + [e_3 e_4],$$

l'autre transformant entre elles les trois quantités

$$[e_2 e_3] - [e_1 e_4], \quad [e_3 e_1] - [e_2 e_4], \quad [e_1 e_2] - [e_3 e_4];$$

on a donc $\beta_2 = 2$. Enfin on a $\beta_3 = \beta_4 = 1$.

Le polynome de Poincaré de l'espace projectif complexe réglé est donc

$$t^8 + t^6 + 2t^4 + t^2 + 1 = (t^4 + 1)(t^4 + t^2 + 1).$$

41. Les formes différentielles invariantes de l'espace se déduisent immédiatement de ce qui précéde; ce sont les formes

$$\Omega_2 = [\omega_1 \overline{\omega}_1] + [\omega_2 \overline{\omega}_2] + [\omega_3 \overline{\omega}_3] + [\omega_4 \overline{\omega}_4],$$

$$\Omega_4^{(1)} = [(\omega_2 \omega_3 + \omega_1 \omega_4)(\overline{\omega}_2 \overline{\omega}_3 + \overline{\omega}_1 \overline{\omega}_4)] +$$
$$+ [(\omega_3 \omega_1 + \omega_2 \omega_4)(\overline{\omega}_3 \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 \overline{\omega}_4)] + [(\omega_1 \omega_2 + \omega_3 \omega_4)(\overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3 \overline{\omega}_4)],$$

$$\Omega_4^{(2)} = [(\omega_2 \omega_3 - \omega_1 \omega_4)(\overline{\omega}_2 \overline{\omega}_3 - \overline{\omega}_1 \overline{\omega}_4)] +$$
$$[(\omega_3 \omega_1 - \omega_2 \omega_4)(\overline{\omega}_3 \overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_2 \overline{\omega}_4)] + [(\omega_1 \omega_2 - \omega_3 \omega_4)(\overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_3 \overline{\omega}_4)],$$

$$\Omega_6 = [\omega_1 \omega_2 \omega_3 \overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2 \overline{\omega}_3] + [\omega_1 \omega_2 \omega_4 \overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2 \overline{\omega}_4] + [\omega_1 \omega_3 \omega_4 \overline{\omega}_1 \overline{\omega}_3 \overline{\omega}_4] +$$
$$+ [\omega_2 \omega_3 \omega_4 \overline{\omega}_2 \overline{\omega}_3 \overline{\omega}_4],$$

---

[1]) Ces deux groupes sont tous les deux identiques au groupe orthogonal de trois variables. Néanmoins ils ne sont pas *équivalents*, parce qu'il existe une infinité de transformations du groupe orthogonal à 4 variables qui laissent invariantes les trois quantités $[e_2 e_3] + [e_1 e_4]$, $[e_3 e_1] + [e_2 e_4]$, $[e_1 e_2] + [e_3 e_4]$ sans laisser invariantes les trois autres. Si les deux groupes étaient équivalents, le coefficient β_2 serait égal à $2^2 = 4$ et non pas à $1^2 + 1^2 = 2$ (note p. 204).

auxquelles il faut ajouter la forme qui donne l'élément de volume

$$\Omega_8 = [\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3\bar{\omega}_4].$$

On peut substituer aux deux formes indiquées du quatrième degré les deux suivantes

$$\Pi_4^{(1)} = \Sigma[\omega_i\omega_j\bar{\omega}_i\bar{\omega}_j],$$

$$\Pi_4^{(2)} = [\omega_2\omega_3\bar{\omega}_1\bar{\omega}_4] + [\omega_3\omega_1\bar{\omega}_2\bar{\omega}_4] + [\omega_1\omega_2\bar{\omega}_3\bar{\omega}_4] + [\omega_1\omega_4\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3] +$$
$$+ [\omega_2\omega_4\bar{\omega}_3\bar{\omega}_1] + [\omega_3\omega_4\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2],$$

qui s'en déduisent par addition et soustraction.

42. L'intégrale $\int\Omega_2$ peut encore se mettre, à un facteur constant près, sous la forme

$$\int dp_{12}d\bar{p}_{12} + dp_{13}d\bar{p}_{13} + dp_{14}d\bar{p}_{14} + dp_{23}d\bar{p}_{23} + dp_{24}d\bar{p}_{24} + dp_{34}d\bar{p}_{34},$$

en astreignant les coordonnées plückeriennes de la droite à satisfaire à la relation

$$p_{12}\bar{p}_{12} + p_{13}\bar{p}_{13} + p_{14}\bar{p}_{14} + p_{23}\bar{p}_{23} + p_{24}\bar{p}_{24} + p_{34}\bar{p}_{34} = 1.$$

Cette intégrale, étendue aux droites d'un faisceau, par exemple du faisceau

$$x_3 = 0, \quad x_1 + \lambda x_2 = 0,$$

pour lesquelles toutes les coordonnées plückeriennes sont nulles sauf p_{24} et $p_{14} = -\lambda p_{24}$, donne

$$\int\int \frac{d\lambda d\bar{\lambda}}{(1 + \lambda\bar{\lambda})^2} = 2i\pi.$$

Etendue aux droites d'une surface réglée algébrique d'ordre p, elle donne une valeur p fois plus grande [1]).

43. Nous allons calculer les valeurs des deux intégrales de différentielle exacte du quatrième degré pour quelques variétés fermées à quatre dimensions. Nous considérerons

1° la variété $V^{(1)}$ des droites situées dans un plan fixe;

---

[1]) Dans le cas d'une quadrique, on suppose qu'on ne considère que l'une des familles de génératrices. On doit définir l'ordre d'une surface réglée par le nombre des génératrices de la surface qui appartiennent à un complexe linéaire arbitraire.

2° la variété $V^{(2)}$ des droites issues d'un point fixe;

3° la variété $V^{(3)}$ des droites rencontrant deux droites fixes;

4° la variété $V^{(4)}$ des droites réelles.

Nous désignerons par $I^{(i)}$ et $\mathcal{J}^{(i)}$ les valeurs des intégrales $\int\Omega_4^{(1)}$ et $\int\Omega_4^{(2)}$ étendues à la variété $V^{(i)}$; ces deux intégrales changeront simultanément de signe si l'on change l'orientation de $V^{(i)}$. Nous supposerons que la variété $V^{(i)}$ contient la droite origine $x_1 = x_2 = 0$ et nous allons d'abord chercher quelles sont les expressions de $\Omega_4^{(1)}$ et $\Omega_4^{(2)}$ pour le voisinage de cette droite.

44. Toute droite voisine de la droite origine $x_1 = x_2 = 0$ peut se déduire de celle-ci par une transformation infinitésimale

$$\sum_{i=1}^{i=4} \omega_i X_i f + \bar{\omega}_i \bar{X}_i f.$$

Les équations de la droite considérée sont donc, d'après (17),

$$\begin{aligned} x_1 + (\omega_1 + i\omega_2)x_3 + (\omega_3 + i\omega_4)x_4 &= 0, \\ x_2 - (\omega_3 - i\omega_4)x_3 + (\omega_1 - i\omega_2)x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Les variations élémentaires des coordonnées plückeriennes de la droite sont donc données par les formules

$$\begin{aligned} dp_{14} &= -\omega_1 - i\omega_2, & dp_{23} &= \omega_1 - i\omega_2, \\ dp_{24} &= \omega_3 - i\omega_4, & dp_{31} &= -\omega_3 - i\omega_4, \\ dp_{34} &= 0, & dp_{12} &= 0. \end{aligned}$$

On a inversement

$$(18)\qquad \left|\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{1}{2}(dp_{14} - dp_{23}), & \omega_2 &= \frac{i}{2}(dp_{14} + dp_{23}), \\ \omega_3 &= \frac{1}{2}(dp_{24} - dp_{31}), & \omega_4 &= \frac{i}{2}(dp_{24} + dp_{31}). \end{aligned}\right.$$

Ces formules permettront, dans chaque cas particulier, de calculer $\Omega_4^{(1)}$ et $\Omega_4^{(2)}$ *au voisinage de la droite origine.*

45. *Calcul des intégrales $I^{(1)}$ et $\mathcal{J}^{(1)}$.* — Prenons pour variété $V^{(1)}$ l'ensemble des droites du plan $x_1 = 0$. Chacune d'elles est définie par les trois coordonnées plückeriennes p_{42}, p_{23}, p_{34}, les trois autres étant nulles. Il y a donc une correspondance biunivoque entre les droites de $V^{(1)}$ et les points du plan hermitien elliptique de coordonnées

$$\xi_1 = p_{42}, \quad \xi_2 = p_{23}, \quad \xi_3 = p_{34}.$$

D'autre part le groupe fondamental G contient, comme sous-groupe laissant invariante la variété $V^{(1)}$, le groupe fondamental de ce plan hermitien. Il en résulte que chacun des éléments d'intégrale $\Omega_4^{(1)}$ et $\Omega_4^{(2)}$ ne diffère que par un facteur constant de l'élément de volume

$$d\tau = [d\xi_1 d\xi_2 d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2] + [d\xi_1 d\xi_3 d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_3] + [d\xi_2 d\xi_3 d\bar{\xi}_2 d\bar{\xi}_3]$$

du plan hermitien elliptique.

Or on a, au voisinage de la droite origine, $d\xi_3 = 0$ et, d'après (18),

$$\omega_1 = \frac{1}{2} d\xi_2, \quad \omega_2 = \frac{i}{2} d\xi_2, \quad \omega_3 = -\frac{1}{2} d\xi_1, \quad \omega_4 = -\frac{i}{2} d\xi_1.$$

Par suite

$$\Omega_4^{(1)} = \tfrac{1}{2}[d\xi_1 d\xi_2 d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2] = \tfrac{1}{2} d\tau,$$

$$\Omega_4^{(2)} = 0.$$

Comme le volume total du plan hermitien elliptique est (n° 34) égal à

$$\frac{(2\, i\pi)^2}{2!} = -2\,\pi^2,$$

on peut prendre, pour une orientation convenable de $V^{(1)}$,

$$\text{(19)} \qquad I^{(1)} = \pi^2, \quad \mathcal{J}^{(1)} = 0.$$

46. *Calcul des intégrales $I^{(2)}$ et $\mathcal{J}^{(2)}$.* — Prenons pour $V^{(2)}$ l'ensemble des droites issues du point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. A chacune d'elles correspond d'une manière biunivoque un point (ξ_1, ξ_2, ξ_3) du plan hermitien elliptique $x_4 = 0$, et on a

$$p_{14} = \xi_1, \quad p_{24} = \xi_2, \quad p_{34} = \xi_3, \quad p_{23} = p_{31} = p_{12} = 0.$$

Par le même raisonnement que pour $V^{(1)}$, on montre que $\Omega_4^{(1)}$ et $\Omega_4^{(2)}$ ne diffèrent que par des facteurs constants de l'élément de volume $d\tau$ du plan $x_4 = 0$. Or, au voisinage de la droite origine, on a, d'après (18),

$$\omega_1 = -\frac{1}{2} d\xi_1, \quad \omega_2 = \frac{i}{2} d\xi_1, \quad \omega_3 = \frac{1}{2} d\xi_2, \quad \omega_4 = \frac{i}{2} d\xi_2,$$

et par suite

$$\Omega_4^{(1)} = 0,$$

$$\Omega_4^{(2)} = \tfrac{1}{2}[d\xi_1 d\xi_2 d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2] = \tfrac{1}{2}\, d\tau.$$

On a donc finalement

$$(20) \qquad I^{(2)} = 0, \quad \mathcal{J}^{(2)} = \pi^2.$$

47. *Calcul des intégrales* $I^{(3)}$ et $\mathcal{J}^{(3)}$. — Prenons pour $V^{(3)}$ l'ensemble des droites qui rencontrent les deux droites fixes $x_1 = x_3 = 0$ et $x_2 = x_4 = 0$. Chacune d'elles peut être définie par un point $(0, \xi_1, 0, \xi_2)$ de la première et un point $(\eta_1, 0, \eta_2, 0)$ de la seconde, avec

$$\xi_1\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_2 = 1, \quad \eta_1\bar{\eta}_1 + \eta_2\bar{\eta}_2 = 1.$$

Il y a donc une correspondance biunivoque entre les droites de $V^{(3)}$ et les couples de points de deux droites complexes, qu'on peut considérer comme deux espaces hermitiens elliptiques. Là encore chacun des éléments d'intégrale $\Omega_4^{(1)}$ et $\Omega_4^{(2)}$ sera, à un facteur constant près, le produit extérieur des éléments d'aire $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ des deux droites:

$$d\sigma_1 = [d\xi_1 d\bar{\xi}_1] + [d\xi_2 d\bar{\xi}_2]. \quad d\sigma_2 = [d\eta_1 d\bar{\eta}_1] + [d\eta_2 d\bar{\eta}_2].$$

Au voisinage de la droite origine ($\xi_1 = 0, \eta_1 = 0$), on a $d\xi_2 = d\eta_2 = 0$. D'autre part on a

$$p_{14} = \xi_2\eta_1, \quad p_{24} = 0, \quad p_{34} = \xi_2\eta_2,$$
$$p_{23} = -\xi_1\eta_2, \quad p_{31} = 0, \quad p_{12} = \xi_1\eta_1,$$

et par suite, au voisinage de la droite origine,

$$dp_{14} = d\eta_1, \qquad dp_{24} = 0, \quad dp_{34} = 0,$$
$$dp_{23} = -d\xi_1, \quad dp_{31} = 0, \quad dp_{12} = 0.$$

Les formules (18) donnent alors

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}(d\xi_1 + d\eta_1), \quad \omega_2 = -\frac{i}{2}(d\xi_1 - d\eta_1), \quad \omega_3 = 0, \quad \omega_4 = 0,$$

$$\Omega_4^{(1)} = \Omega_4^{(2)} = -\tfrac{1}{4}[d\xi_1 d\bar{\xi}_1 d\eta_1 d\bar{\eta}_1] = -\tfrac{1}{4} d\sigma_1 d\sigma_2.$$

Comme l'aire totale de la droite complexe est $2i\pi$, on obtient

$$(21) \qquad I^{(3)} = \mathcal{J}^{(3)} = \pi^2.$$

48. *Calcul des intégrales* $I^{(4)}$ *et* $\mathcal{J}^{(4)}$. — Toute droite réelle *orientée* peut être mise en correspondance biunivoque avec un couple

de points de deux sphères de rayon 1. Il suffit de poser

$$p_{14} + p_{23} = \xi_1, \quad p_{24} + p_{31} = \xi_2, \quad p_{34} + p_{12} = \xi_3,$$
$$p_{14} - p_{23} = \eta_1, \quad p_{24} - p_{31} = \eta_2, \quad p_{34} - p_{12} = \eta_3,$$

les coordonnés plückeriennes étant assujetties à avoir la somme de leurs carrés égale à 1.

Le groupe fondamental G admet, comme sous-groupe laissant invariante la variété $V^{(4)}$, le groupe des rotations de la première sphère et le groupe des rotations de la seconde. Par suite chacun des éléments d'intégrale $\Omega_4^{(1)}$ et $\Omega_4^{(2)}$ ne diffère que par un facteur constant du produit extérieur des éléments d'aire des deux sphères. Au voisinage de la droite origine ($\xi_1 = \xi_2 = 0$, $\eta_1 = \eta_2 = 0$), ces éléments d'aire se réduisent à

$$d\sigma_1 = [d\xi_1 d\xi_2], \quad d\sigma_2 = [d\eta_1 d\eta_2].$$

Or on a, d'après (18),

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}\,d\eta_1, \quad \omega_2 = \frac{i}{2}\,d\xi_1, \quad \omega_3 = \frac{1}{2}\,d\eta_2, \quad \omega_4 = \frac{i}{2}\,d\xi_2$$

et par suite, par un calcul facile,

$$\Omega_4^{(1)} = +\tfrac{1}{8}[d\xi_1 d\xi_2 d\eta_1 d\eta_2], \quad \Omega_4^{(2)} = -\tfrac{1}{8}[d\xi_1 d\xi_2 d\eta_1 d\eta_2].$$

Il en résulte immédiatement, pour l'ensemble des droites réelles *orientées,* que les valeurs des intégrales $\int\Omega_4^{(1)}$ et $\int\Omega_4^{(2)}$ sont $+2\pi^2$ et $-2\pi^2$. Mais il faut réduire ces résultats de moitié puisqu'à chaque droite réelle correspondent deux droites orientées, et on a

$$I^{(4)} = \pi^2, \quad \vartheta^{(4)} = -\pi^2. \tag{22}$$

49. Si nous admettons l'exactitude des théorèmes A et B dans l'espace projectif complexe réglé, nous voyons que nous avons, entre les quatre variétés $V^{(1)}$, $V^{(2)}$, $V^{(3)}$, $V^{(4)}$ convenablement orientées, les homologies

$$V^{(3)} \sim V^{(1)} + V^{(2)},$$
$$V^{(4)} \sim V^{(1)} - V^{(2)}.$$

En toute rigueur nous pouvons simplement affirmer qu'un certain multiple entier du premier membre de chaque homologie est homologue au même multiple du second membre.

Il est à présumer que si V désigne l'ensemble des droites d'une congruence algébrique, on a l'homologie

$$V \sim p V^{(1)} + q V^{(2)},$$

p désignant le nombre des droites de la congruence situées dans un plan arbitraire donné et q le nombre des droites de la congruence passant par un point arbitraire donné. *Cette régle s'applique aussi à l'ensemble des droites réelles.*

50. On remarquera qu'*à la différence de ce qui se passe dans l'espace projectif ponctuel, l'ensemble des éléments réels de l'espace n'admet aucun multiple qui soit réductible à un seul élément par déformation continue.*

51. Nous ne nous attarderons pas sur l'invariant intégral $\int \Omega_6$. Il admet une période non nulle si on l'étend à l'ensemble des droites qui rencontrent une droite fixe. Il est à présumer qu'étendue aux droites d'un complexe algébrique, sa période est multipliée par l'ordre du complexe (nombre des droites du complexe passant par un point donné dans un plan donné [1]).

52. Enfin on peut considérer une *forme de Clifford* de l'espace projectif complexe réglé en regardant comme identiques deux droites qui se déduisent l'une de l'autre par l'antiinvolution

$$(23) \quad p'_{23} = \bar{p}_{14}, \; p'_{31} = \bar{p}_{24}, \; p'_{12} = \bar{p}_{34}, \; p'_{14} = \bar{p}_{23}, \; p'_{24} = \bar{p}_{31}, \; p'_{34} = \bar{p}_{12} \text{ [2]}).$$

Ce nouvel espace admet le même groupe fondamental G; mais le groupe g correspondant est mixte. On voit facilement que par l'antiinvolution (23) la forme Ω_2 se reproduit changée de signe et que les formes $\Omega_4^{(1)}$ et $\Omega_4^{(2)}$ s'échangent entre elles. Le nouvel espace n'admet donc, en dehors de son élément de volume à 8 di-

---

[1]) L'étude faite dans le paragraphe VII peut se transporter à l'espace des sphères orientées complexes, grâce à la transformation de contact de S. Lie qui change les droites en sphères orientées. L'espace projectif complexe réglé est aussi l'espace des points d'une quadrique de l'espace à cinq dimensions.

[2]) Si l'on se reporte à la variété V de l'espace euclidien à 15 dimenmensions qui représente l'espace réglé complexe, le nouvel espace considéré s'obtient en regardant comme identiques deux points de V symétriques par rapport à l'origine. Il admet aussi une représentation biunivoque continue sur une variété réelle de l'espace euclidien à 20 dimensions, les transformations projectives de l'espace réglé se traduisant par des rotations autonr de l'origine dans cet espace euclidien.

mensions, qu'un seul invariant intégral, qui est du quatrième degré, à savoir $\int \Omega_4^{(1)} + \Omega_4^{(2)}$. Son polynome de Poincaré se réduit à $t^8 + t^4 + 1$.

VIII. Le polynome de Poincaré d'un espace de groupe clos.

53. Considérons un groupe clos $\mathcal{G}$ d'ordre r et la variété représentative des transformations de ce groupe. Si l'on désigne par T_ξ une transformation arbitraire de $\mathcal{G}$, elle définit un point de la variété; il existe alors dans cette variété un groupe transitif clos G défini par les équations

$$T_{\xi'} = T_a T_\xi T_b^{-1}, \tag{24}$$

où T_a, T_b désignent deux transformations données de $\mathcal{G}$. Nous pouvons donc regarder la variété du groupe $\mathcal{G}$ comme un espace clos isogène $\mathcal{E}$ dont le groupe fondamental est G.

Le groupe G admet l'automorphie involutive A qui consiste à remplacer l'opération (24) par l'opération

$$T_{\xi'} = T_b T_\xi T_a^{-1}, \tag{25}$$

et le plus grand sous-groupe continu g de G dont chaque opération est invariante par A s'obtient en prenant $T_b = T_a$: c'est le *groupe adjoint* de $\mathcal{G}$. Il laisse précisément invariant le point O de l'espace $\mathcal{E}$ qui correspond à la transformation identique de $\mathcal{G}$. *L'espace $\mathcal{E}$ est donc symétrique.* Le groupe linéaire γ n'est autre que le groupe adjoint linéaire, considéré comme opérant sur les paramètres $e_1, e_2, \ldots, e_r$ des transformations infinitésimales de $\mathcal{G}$.

54. Le groupe clos $\mathcal{G}$ se décompose, au moins au point de vue infinitésimal, en un certain nombre de sous-groupes simples et de sous-groupes à un paramètre échangeables entre eux [1]). Il en résulte immédiatement, en appliquant la règle du n⁰ 25, que *le polynome de Poincaré de l'espace $\mathcal{E}$ du groupe clos $\mathcal{G}$ est le produit des polynomes de Poincaré relatifs aux groupes simples composants* [2]).

---

[1]) E. Cartan, *Goupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne* (J. Math. pures et appl., 8. 1929, p. 10—11).

[2]) Ce théorème est à peu près évident pour une variété close *produit direct* de plusieurs autres variétés closes: cela veut dire qu'il existe une correspondance biunivoque continue entre un point de la première variété et l'ensemble de plusieurs points dont chacun est pris dans une des autres variétés.

On peut donc, dans la recherche du polynome de Poincaré de l'espace d'un groupe clos, se ramener au cas des groupes clos simples.

55. La transformation générale Θ du groupe adjoint linéaire γ du groupe simple $\mathcal{G}$ admet l multiplicateurs égaux à 1, l étant le rang du groupe, et $r - l$ autres multiplicateurs de la forme $e^{i\omega_\alpha}$. Les ω_α [1]) sont des quantités deux à deux égales et opposées, combinaisons linéaires à coefficients entiers, qu'on peut supposer tous positifs ou nuls, ou bien tous négatifs ou nuls, de l paramètres angulaires variables $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_l$. Réciproquement du reste les ϕ_i peuvent s'exprimer par des combinaisons linéaires à coefficients entiers de l des quantités ω_α.

Si l'on considère l'ensemble des transformations Θ pour lesquelles les paramètres ϕ_i ont des valeurs comprises entre ϕ_i et $\phi_i + d\phi_i$, le volume occupé dans l'espace par ces transformations est, à un facteur constant près, égal à

$$d\tau = \prod_{+}\left(e^{\frac{i\omega_\alpha}{2}} - e^{-\frac{i\omega_\alpha}{2}}\right)^2 d\phi_1\, d\phi_2 \ldots d\phi_l,$$

le produit étant étendu à toutes les quantités ω_α *positives* (c'est-à-dire combinaisons à coefficients positifs ou nuls des ϕ_i) [2]).

Le déterminant $\Delta_\Theta(t)$ est ici égal à

$$\Delta_\Theta(t) = (t+1)^l \prod_\alpha (t + e^{i\omega_\alpha}).$$

Soit alors c le terme constant dans le développement de la série de Fourier limitée $\prod\limits_{+}(e^{\frac{i\omega_\alpha}{2}} - e^{\frac{-i\omega_\alpha}{2}})^2$. *Le polynome de Poincaré cherché est le quotient par c du terme constant (par rapport aux ϕ_i) du*

Mais le théorème du texte va un peu plus loin, parce que la représentation de l'espace $\mathcal{E}$ comme produit direct de plusieurs espaces de groupes simples peut n'être valable que localement.

[1]) Ces quantités n'ont aucun rapport avec les formes de Pfaff introduites au n° 3.

[2]) Voir, pour toutes ces propriétés, H. Weyl, *Theorie der Darstellung kontinuerlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen* II, III (Math. Zeitschr., 24, 1925, p. 328—395). La propriété des ω_α de pouvoir s'exprimer au moyen des ϕ_i avec des coefficients tous du même signe est due à E. Cartan (Annali di Mat., 5, 1928, p. 253—260).

développement de la série de Fourier

$$(t+1)^l \prod_{+} (t+e^{i\omega_\alpha})(t+e^{-i\omega_\alpha})(e^{\frac{i\omega_\alpha}{2}} - e^{-\frac{i\omega_\alpha}{2}})^2.$$

Ce polynome est donc divisible par $(t+1)^l$, l désignant le rang du groupe.

56. On peut démontrer, relativement au polynome de Poincaré de l'espace d'un groupe clos, un théorème général remarquable.

Faisons $t=1$ dans le polynome de Poincaré; nous obtenons le produit par $\frac{2^l}{c}$ du terme constant du développement de la série de Fourier

$$\prod_{+} (e^{\frac{i\omega_\alpha}{2}} + e^{-\frac{i\omega_\alpha}{2}})^2 (e^{\frac{i\omega_\alpha}{2}} - e^{-\frac{i\omega_\alpha}{2}})^2 = \prod_{+} (e^{i\omega_\alpha} - e^{-i\omega_\alpha})^2.$$

Mais il est clair que cette série se déduit de $\prod_{+} (e^{\frac{i\omega_\alpha}{2}} - e^{-\frac{i\omega_\alpha}{2}})^2$ en changeant ϕ_i en $2\phi_i$; son terme constant est donc c. Nous arrivons ainsi au théorème suivant, valable, comme on le voit facilement, pour tout groupe clos:

Le polynome de Poincaré de l'espace d'un groupe clos de rang l jouit de la propriété que la somme de ses coefficients est égale à 2^l.

Ce théorème est en accord avec ce que nous avons trouvé dans le cas d'un groupe commutatif clos (n° 24), dont l'espace n'est autre que le tore à l dimensions.

57. On arrive à un autre théorème général en remplaçant dans le polynome de Poincaré t par une racine cubique imaginaire de l'unité j. Nous allons montrer que le polynome s'annule par cette substitution.

On a en effet

$$(-j+e^{i\omega_\alpha})(-j+e^{-i\omega_\alpha}) = -j(e^{i\omega_\alpha}+1+e^{-i\omega_\alpha}),$$

d'où

$$(-j+e^{i\omega_\alpha})(-j+e^{-i\omega_\alpha})(e^{\frac{i\omega_\alpha}{2}} - e^{-\frac{i\omega_\alpha}{2}}) = -j(e^{\frac{3i\omega_\alpha}{2}} - e^{-\frac{3i\omega_\alpha}{2}}).$$

Nous sommes donc ramenés à démontrer que, dans le développement du produit

$$\prod_{+} (e^{\frac{3i\omega_\alpha}{2}} - e^{-\frac{3i\omega_\alpha}{2}})(e^{\frac{i\omega_\alpha}{2}} - e^{-\frac{i\omega_\alpha}{2}}),$$

le terme constant est nul, ou encore que les deux produits développés

$$\prod_{+}\left(e^{\frac{3i\omega_\alpha}{2}} - e^{-\frac{3i\omega_\alpha}{2}}\right) \text{ et } \prod_{+}\left(e^{\frac{i\omega_\alpha}{2}} - e^{-\frac{i\omega_\alpha}{2}}\right)$$

n'ont aucun terme en commun.

Or, d'après un théorème dû à H. Weyl [1]), le second produit peut s'obtenir en partant du terme *dominant* $e^{\frac{1}{2} i \sum_{+} \omega_\alpha}$ et en appliquant aux paramètres ϕ_i les différentes substitutions d'un certain groupe fini (S) engendré par l substitutions involutives, les termes qui résultent du terme dominant par un nombre pair de substitutions involutives génératrices étant précédés du signe $+$, les autres du signe $-$. Une propriété identique a évidemment lieu pour le produit $\prod_{+}\left(e^{\frac{3i\omega_\alpha}{2}} - e^{-\frac{3i\omega_\alpha}{2}}\right)$; si donc les deux développements avaient un terme commun, c'est qu'ils auraient, aux coefficients près, les mêmes termes, ce qui est absurde.

Le polynome de Poincaré d'un groupe simple clos de rang l est donc toujours divisible par $(t^3+1)(t+1)^{l-1}$.

58. On voit directement que le coefficient de t^{r-1} et celui de t^{r-2} dans le polynome de Poincaré d'un groupe simple d'ordre r sont nuls tous les deux. Le groupe étant simple, son groupe adjoint γ ne laisse invariante aucune variété plane réelle ou imaginaire; or il n'en serait pas ainsi si γ admettait un invariant linéaire, ou un invariant forme extérieure du second degré. Dans ce dernier cas en effet le groupe γ, *qu'on peut supposer orthogonal*, puisqu'il est clos, laisserait, d'après un théorème classique, invariante au moins une variété plane.

Ces résultats peuvent se déduire, *si l'on admet le théorème A*, d' autres résultats obtenus d'une manière toute différente. On peut en effet démontrer que dans l'espace du groupe tout contour fermé, ou toute surface fermée à deux dimensions, admet un multiple entier réductible à un point par déformation continue [2]). Réciproque-

---

[1]) *Math. Zeitschr.*, 24, 1925, p. 382 *sqq.*

[2]) Pour un contour fermé, le théorème est dû à H. Weyl (*Math. Zeitschr*, 24, 1925, p. 380); voir aussi E. Cartan, *La géométrie des groupes simples* (*Ann. di Mat.*, 4, 1926—1927, p. 211—218). Pour une surface fermée, voir E. Cartan, *Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne* (J. Math. pures et appl., 8, 1929, p. 20, note 3).

ment ces derniers résultats, de nature topologique, se déduiraient des premiers, de nature algébrique, si l'on admettait le théorème B.

59. *Si l'espace d'un groupe simple clos n'admet aucune intégrale de différentielle exacte non équivalente à zéro de degré 1 ou 2, il en admet au contraire toujours une de degré trois.*

Si l'on suppose, ce qui est permis, le groupe linéaire γ orthogonal, les constantes de structure c_{ijk} forment un trivecteur, c'est-à-dire qu'elles se reproduisent, avec ou sans changement de signe, suivant qu'on effectue sur leurs indices une permutation impaire ou paire [1]). L'invariant intégral du troisième degré est alors

$$\int\int\int\sum c_{ijk}\omega_i\omega_j\omega_k,$$

la somme étant étendue à toutes les combinaisons 3 à 3 des indices $1, 2, \ldots, r$. En exprimant en effet que la forme extérieure $\Sigma c_{ijk}[e_ie_je_k]$ est invariante par le groupe adjoint, on retombe sur les relations algébriques fournies par l'identité de Jacobi [2]).

60. Les théorèmes précédents suffisent pour déterminer complètement le polynome de Poincaré d'un groupe de rang 2. En effet le coefficient de t^{r-3}, et par suite celui de t^3, étant différents de zéro et la somme des coefficients étant égale à 4, on a nécessairement le polynome

$$t^r + t^{r-3} + t^3 + 1 = (t^3+1)(t^{r-3}+1).$$

Il est très vraisemblable que, quel que soit le groupe simple, il n'existe qu'un invariant intégral du troisième degré. Cela est du moins certain pour les groupes simples des quatre grandes classes.

---

[1]) On obtient ces propriétés en exprimant que le groupe adjoint, dont les transformations infinitésimales $E_\alpha f$ sont indiquées au n° 10, est orthogonal.

[2]) Si l'on ne suppose pas la base infinitésimale du groupe choisie de manière à rendre le groupe γ orthogonal, l'invariant intégral est, à un facteur constant près, égal à $\int\int\int\Sigma\gamma_{ijk}\omega_i\omega_j\omega_k$, en posant

$$\gamma_{ijk} = \sum_{\lambda,\mu,\nu}(c_{i\lambda\mu}c_{j\mu\nu}c_{k\nu\lambda} - c_{i\mu\lambda}c_{j\nu\mu}c_{k\lambda\nu}).$$

Sous cette forme il existe dans l'espace représentatif d'un groupe quelconque. La condition nécessaire et suffisante pour que le groupe soit intégrable est que tous les coefficients γ_{ijk} soient nuls. Voir E. Cartan, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus* (Thèse; Paris, Nony et C^{ie}, 1894, p. 48).

IX. Les homologies qui existent entre les sous-groupes clos à trois paramètres du groupe d'une forme d'Hermite définie.

61. Nous allons, comme application, rechercher les différentes valeurs que prend l'invariant intégral du troisième degré lorsqu'on l'étend aux différents sous-groupes clos à trois paramètres du groupe linéaire unimodulaire $\mathcal{G}_n$ d'une forme d'Hermite définie positive à n variables

$$F = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_n\bar{x}_n.$$

Ce groupe $\mathcal{G}_n$ est simple; sa transformation infinitésimale la plus générale est de la forme

$$\sum_{i,}^{1,\ldots,n} e_{ij}x_i \frac{\delta f}{\delta x},$$

avec

$$e_{11} + e_{22} + \ldots + e_{nn} = 0, \quad e_{ij} + \bar{e}_{ji} = 0.$$

La forme extérieure invariante du troisième degré est

$$\Omega = \frac{1}{3}\sum_{i,j,k}^{1,\ldots,k} [\omega_{ij}\omega_{jk}\omega_{ki}].$$

62. Rappelons que le groupe linéaire clos irréductible d'ordre 3 le plus général s'obtient en cherchant comment le groupe linéaire unimodulaire $\mathcal{G}_2$ de la forme d'Hermite $x\bar{x} + y\bar{y}$ transforme entre elles les quantités

$$x^p, x^{p-1}y, x^{p-2}y^2, \ldots, xy^{p-1}, y^p.$$

Ce groupe, que nous appellerons g_p, laisse invariante, comme tout groupe linéaire clos, une forme d'Hermite définie positive. Si l'on pose

$$x_1 = x^p,\ x_2 = \sqrt{C_p^1}x^{p-1}y, x_3 = \sqrt{C_p^2}x^{p-2}y^2, \ldots, x_{p+1} = y^p,$$

cette forme d'Hermite est

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_{p+1}\bar{x}_{p+1} = (x\bar{x} + y\bar{y})^p.$$

Si donc $p + 1 \leqslant n$, le groupe considéré est un sous-groupe du groupe donné $\mathcal{G}_n$.

Aux transformations

$$Y_1 f = i\left(x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad Y_2 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x},$$
$$Y_3 f = i\left(x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

de $\mathfrak{G}_2$ correspondent dans g_p les transformations

$$Z_1 f = i\left[p x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (p-2) x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + (p-4) x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \right.$$
$$\left. + \ldots - p x_{p+1} \frac{\partial f}{\partial x_{p+1}}\right],$$

$$Z_2 f = \sqrt{p}\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + \sqrt{2(p-1)}\left(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) +$$
$$+ \sqrt{3(p-2)}\left(x_3 \frac{\partial f}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) + \ldots + \sqrt{p}\left(x_p \frac{\partial f}{\partial x_{p+1}} - x_{p+1} \frac{\partial f}{\partial x_p}\right),$$

$$Z_3 f = \sqrt{p}\, i\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + \sqrt{2(p-1)}\, i\left(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) +$$
$$+ \sqrt{3(p-2)}\, i\left(x_3 \frac{\partial f}{\partial x_4} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) + \ldots + \sqrt{p}\, i\left(x_p \frac{\partial f}{\partial x_{p+1}} + x_{p+1} \frac{\partial f}{\partial x_p}\right).$$

63. La transformation infinitésimale la plus générale de g_p étant désignée par $\tilde{\omega}_1 Z_1 f + \tilde{\omega}_2 Z_2 f + \tilde{\omega}_3 Z_3 f$, on a, en considérant cette transformation comme appartenant à $\mathfrak{G}_n$,

$$\frac{\omega_{11}}{ip} = \frac{\omega_{22}}{i(p-2)} = \ldots = \frac{\omega_{p+1,p+1}}{-ip} = \tilde{\omega}_1,$$
$$\frac{\omega_{12}}{\sqrt{p}} = \frac{\omega_{23}}{\sqrt{2(p-1)}} = \ldots = \frac{\omega_{p,p+1}}{\sqrt{p}} = \tilde{\omega}_2 + i\tilde{\omega}_3,$$
$$\frac{\omega_{21}}{\sqrt{p}} = \frac{\omega_{32}}{\sqrt{2(p-1)}} = \ldots = \frac{\omega_{p+1,p}}{\sqrt{p}} = -\tilde{\omega}_2 + i\tilde{\omega}_3,$$

et, par suite,

$$\Omega = -4\,[1\,p + 2\,(p-1) + 3\,(p-2) + \ldots + p]\,[\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_3] =$$
$$= -\frac{2\,p\,(p+1\,(p+2)}{3}\,[\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_3].$$

Or la forme $[\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_3]$ donne l'élément de volume du groupe $\mathfrak{G}_2$. On peut donc poser, en multipliant au besoin l'invariant intégral par un facteur constant convenablement choisi,

$$I_{p-1}=\frac{p(p+1)(p+2)}{6},$$

I_{p+1} désignant la période de l'intégrale étendue à la variété fermée du sous groupe g_p [1]). Néanmoins il faut remarquer qu'à deux substitutions de $\mathcal{G}_2$ dont les coefficients sont égaux et opposés ne correspondent deux substitutions distinctes de g_p que si p est impair. La période I_{p+1} doit donc être réduite de moitié si p est pair.

64. Le groupe $\mathcal{G}_n$ peut admettre également des sous-groupes clos *réductibles* à 3 paramètres. Il suffira de prendre un certain nombre de séries de variables

$$x_1,\ldots,x_p;\quad x'_1,\ldots,x'_q;\quad x''_1,\ldots,x''_s;\ldots$$

telles que les p variables de la première série soient transformées par le groupe g_{p-1}, les q variables de la seconde par le groupe g_{q-1} et ainsi de suite. On doit avoir naturellement

$$p+q+s+\ldots\leqslant n.$$

On aura alors, pour la période correspondante,

$$I_{p_1,p_2,\ldots,p_h}=\sum_i^{1,\ldots,h}\frac{p_i(p_i^2-1)}{6},$$

le second membre devant être réduit de moitié si *tous* les entiers p_i sont impairs ($p_i\geqslant 2$).

On arriverait à des résultats analogues si l'on considérait, au lieu du groupe unimodulaire d'une forme d'Hermite définie, le groupe orthogonal à n variables réelles.

---

[1]) Considérées comme plongées dans l'espace riemannien du groupe $\mathcal{G}_n$, les variétés des groupes g_p sont toutes à courbure constante, cette courbure étant inversement proportionnelle à I_{p+1}; les volumes de ces variétés sont d'autre part proportionnels à $I_{p+1}^{\frac{3}{2}}$.

L'intégration des fonctions sommables.

Par

Stefan Kempisty (Wilno).

M. Denjoy, en se servant de „maximum" et de „minimum d'epaisseur", à défini à la riemanienne l'intégrale (A) d'une fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a, b)[1]).

Il a établi que cette intégrale existe et se reduit à l'intégrale de M. Lebesgue pour la fonction sommable, il a supposé de plus que l'inverse est probable, c'est qui est encore un problème non resolu[2]).

Or l'étude de l'intégrale (A) que j'appelle *approximative* nous conduit aux *intégrales à densite* λ *près*. Ainsi sont appellées des intégrales qui s'obtiennent en partant des *bornes à densité* λ *près* et qui correspondent aux intégrales de Darboux.

Nous verrons que, pour une fonction sommable ces intégrales éxistent, sont égales entre elles et leur valeur commune est independante de λ. Ces sont des fonctions d'intervalle dont chacune est absolument continue en même temps que le produit de la borne correspondante par la longeur de l'intervalle.

De plus la continuité absolue de cette dernière fonction d'intervalle est une condition necessaire et suffisante de la sommabilité de $f(x)$.

Au moyen des intégrales à densité λ près nous pouvons définir des *intégrales extrêmes approximatives*.

---

[1]) A. Denjoy, Sur l'intégration riemanienne, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences t. 169, 1919, p. 220—1.

[2]) Dans la note, Sur l'intégrale (A) de M. Denjoy, (Comptes Rendus, t. 185, 1927, p. 749—50), j'ai donné une démonstration incorrecte du th. inverse.

Comme toute fonction sommable est approximativement intégrable, on en deduit une autre condition necessaire de sommabilité de $f(x)$: le produit d'un borne à densité λ près par la longeur de l'intervalle est à variation bornée pour toutes les valeurs de λ, les intervalles étant suffisamment petits.

Nous allons commencer par l'étude des propriétés des bornes à densité λ près et des fonctions approximativement continues.

I. Les bornes à densité λ prés.

1. Convenons d'appeler *densité moyenne*[1]) de l'ensemble mesurable E dans l'intervalle I, le rapport

$$\frac{|IE|}{|I|},$$

en désignant: par $|IE|$ la mesure de l'intersection de l'ensemble E et de l'intervalle I, par $|I|$ — la longeur de I.

Considérons une fonction $f(x)$ mesurable dans l'intervalle I et un nombre λ positif, inférieur à un.

Nous dirons que A est un *nombre bornant* inférieurement *à densité* λ *près* la fonction $f(x)$ sur I, quand la densité moyenne de l'ensemble

$$E = E_x[f(x) < A]$$

est an plus égale à λ dans I, c'est-à-dire quand

$$|IE| \leqslant \lambda |I|.$$

De même B est un nombre bornant supérieurement à densité μ près $(0 < \mu < 1)$, si l'ensemble

$$E = E_x[f(x) > B]$$

vérifie la condition

$$|IE| \leqslant \mu |I|.$$

2. *Toute fonction mesurable presque partout finie est bornée* (inférieurement et supérieurieurement) *à densité* λ *près*, quelque soit λ positif et inférieur à un.

En effet supposons, par exemple, que $f(x)$ n'est pas bornée supérieurement à densité λ près dans I.

Alors il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que la densité moyenne de l'ensemble

[1]) H. Lebesgue, Sur l'intégration des fonctions discontinues, Annales Sc. de l'Ec. Normale Sup. t. 27, 1910, p. 406.

$$E_n = E_x[f(x) > n]$$

est supérieure à λ dans I, quelque soit n entier positif, en d'autres termes

$$|IE_n| > \lambda |I|.$$

Soit maintenant

$$E_\infty = E_x[f(x) = +\infty].$$

Comme

$$E_\infty = E_1 E_2 E_3 \ldots$$

et la suite de E_n est non croissante, nous avons

$$|IE_\infty| = \lim |IE_n| \geqslant \lambda |I| > 0,$$

donc $f(x)$ n'est pas presque partout finie dans I.

3. *Si* $\lambda + \mu < 1$, *le nombre* A *bornant inférieurement à densité* λ *près est au plus égal au nombre* B *bornant supérieurement à densité* μ *près.*

Posons:

$$E_1 = E_x[f(x) < A] \qquad E_2 = E_x[f(x) > B].$$

Lorsque $A > B$, tout point x de l'intervalle I appartient à l'un de ces ensembles au moins. Alors

$$|I| \leqslant |IE_1| + |IE_2| \leqslant (\lambda + \mu)|I|$$

et par suite

$$\lambda + \mu \geqslant 1,$$

contrairement à l'hypothèse.

Ainsi l'ensemble de nombres qui bornent $f(x)$ inférieurement à densité λ près est bornée supérieurement par un nombre tel que B.

Si $\lambda + \mu \geqslant 1$, *nous avons la relation inverse*

$$A \geqslant B.$$

4. Comme tout nombre inférieur à A jouit de la même propriété que A, l'ensemble de nombres bornants à densité λ près est le segment d'une coupure.

Nous allons voir que cet segment est fermé, c'est-à-dire qu'*il existe le plus grand des nombres* A.

Soit m le nombre fini déterminé par la coupure.

Tout nombre $m - \frac{1}{n}$ bornant inférieurement $f(x)$ à densité λ

près dans I, nous avons, pour l'ensemble

$$E_n = E_x\left[f(x) < m - \frac{1}{n}\right],$$

la condition

$$|IE_n| \leqslant \lambda |I|.$$

Or l'ensemble

$$E = E_x[f(x) < m]$$

est la réunion des ensembles E_n qui forment une suite non décroissante.

Par suite

$$|IE| = \lim_{n\to\infty} |IE_n| \leqslant \lambda |I|,$$

ce qui veut dire que m est un nombre bornant inférieurement à densité λ près $f(x)$ dans I.

5. Appelons *borne inférieure à densité* λ *près* de $f(x)$ dans I[1]), le plus grand des nombres A qui bornent inférieurement $f(x)$ dans I à densité λ près.

Comme cette borne est une fonction d'intervalle qui depend de f et de λ, nous allons la désigner par $m(f, I, \lambda)$ on brièvement par $m(f)$, $m(I)$ ou $m(\lambda)$ suivant que f, I ou λ est variable dans le raisonnement.

Le plus petit des nombres B qui bornent supérieurement à densité μ près sera borne superieure à densité μ près de $f(x)$ dans I, $M(f, I, \mu)$.

Des relations qui ont lieu entre les nombres bornants à densité λ près $(I, 3)$ on deduit

$$m(\lambda) \leqslant M(\mu), \text{ pour } \lambda + \mu < 1,$$
$$m(\lambda) \geqslant M(\mu), \quad " \quad \lambda + \mu \geqslant 1.$$

6. Notre définition diffère de celle de M. Denjoy[2]) qui appelle *maximum d'épaisseur* de f sur I le plus grand nombre M tel que l'ensemble

$$E_x[f(x) \geqslant M]$$

ait sur I la densité (l'épaisseur) moyenne au moins égale à a et *minimum* d'épaisseur le plus petit nombre m tel que l'ensemble

---

[1]) Voir ma note: Sur les limites approximatives, Comptes Rendus, t. 180 (1925) p. 642.

[2]) loc. cit. p. 220; je les croyais équivalentes dans ma note: Sur l'intégrale (A) de M. Denjoy.

$$E_x[f(x) \leqslant m]$$

ait sur I une densité moyenne au moins égale à β, $\alpha + \beta$ étant inférieur à 1.

L'ensemble

$$E = E_x[f(x) < M]$$

étant le complementaire de $E_x[f(x) \geqslant M]$, nous avons

$$|IE| \leqslant (1-\alpha)|I|.$$

Alors le plus grand nombre M c'est la borne inférieure à densité $1-\alpha$ près,

Le plus petit nombre m c'est la borne supérieure à densité $1-\beta$ près.

En désignant par M' et m' respectivement le maximum et le minimum d'epaisseur, on a alors, pour $\alpha + \beta < 1$,

$$m' = M(1-\beta) \leqslant m(1-\alpha) = M',$$

en vertu du dernier théorème de I. 3.

7. Comme un nombre bornant inférieurement à densité λ près borne *a fortiori* à densité μ près, quand μ est supérieur à λ, nous avons la relation

$$m(\lambda) \leqslant m(\mu),$$

pour

$$\lambda < \mu.$$

Ainsi la borne inférieure à densité λ près est une fonction non decroissante de λ.

Qnand λ décroit vers zéro, $m(\lambda)$ tend en décroissant vers la borne inférieure m_0 qu'on obtient en negligeant les ensembles de mesure nulle. Quand λ croit vers un, $m(\lambda)$ tend en croissant vers la borne supérieure analogue M_0.

Alors

$$m_0 = \lim_{\lambda \leftarrow 0} m(\lambda) \leqslant m(\lambda) \leqslant \lim_{\lambda \to 1} m(\lambda) = M_0.$$

La borne supérieure à densité λ près est une fonction non croissante de λ et on a

$$m_0 = \lim_{\lambda \leftarrow 1} M(\lambda) \leqslant M(\lambda) \leqslant \lim_{\lambda \to 0} M(\lambda) = M_0.$$

8. En tant que fonction d'intervalle la borne inférieure à densité λ près est semicontinue supérieurement, car c'est la fonction

$\Phi(x_1, x_2, \lambda)$ définie par M. Looman[1]), (x_1, x_2) étant l'intervalle I.

Or M. Looman à établi que Φ est semicontinue supérieurement par rapport au couple (x_1, x_2).

Comme, d'après les définitions des bornes, on a

$$M(f) = -m(-f),$$

nous voyons que la borne supérieure à densité λ près est une fonction semicontinue inférieurement de I, étant d'ailleur égale à la fonction semicontinue inférieurement $\phi(x_1, x_2, 1-\lambda)$ de M. Looman

9. Il est évident que le nombre bornant inférieurement (supérieurement) $f(x)$ à densité x près dans I, borne *à fortiori* de la même manière la fonction $g(x)$ au moins (au plus) égale à $f(x)$.

Il en vient que l'on a, pour $f \leqslant g$,

$$m(g) \leqslant m(f); \qquad M(f) \leqslant M(g).$$

Désignons par f^N la fonction $f(x)$ limitée supérieurement au nombre N, c'est à-dire soit

$$f^N = \min(f, N).$$

Or nous avons

$$m(f^N) = m(f), \text{ pour } m(f) \leqslant N,$$
$$m(f^N) = N \quad , \quad " \quad m(f) > N,$$

donc

$$m(f^N) = \min(m(f), N).$$

En posant

$$f_N = \max(f, N),$$

nous avons aussi

$$m(f_N) = \max(m(f), N).$$

En particulier, en posant $N = 0$, nous avons $m(f_0) + m(f^0) = \max(m(f), o) + \min(m(f), o) = m(f)$, f_0 étant ainsi la partie non négative et f_0 la partie non positive de la fonction f.

Les mêmes relations ont lieu pour la borne supérieure à densité λ près.

---

[1]) Sur les deux cathégories remarquables des fonctions de variable réelle, Fundamenta Math. t. V, 1924, p. 106, § 2.

II. Les fonctions approximativement continues.

1. M. Denjoy a appelé $f(x)$ *approximativement continue* au point x_0 si, étant donné:

$$\epsilon > 0, \qquad 0 < \lambda < 1,$$

on peut déterminer δ de manière que la densité moyenne de l'ensemble

$$E_x[|f(x) - f(x_0)| < \epsilon]$$

soit nupérieure à $1 - \lambda$ sur l'intervalle I contenant x_0 de longeur inférieure à δ.

Or il resulte de cette définition que la densité moyenne des ensembles

$$E_x[f(x) < f(x_0) - \epsilon], \qquad E_x[f(x) > f(x_0) + \epsilon]$$

est inférieure à λ sur I.

On en déduit que, pour $\lambda < \frac{1}{2}$,

$$f(x_0) - \epsilon \leqslant m(f, I, \lambda) \leqslant M(f, I, \lambda) \leqslant f(x_0) + \epsilon.$$

Comme d'autre part les ensembles

$$E_x[f(x) > f(x_0) - \epsilon], \qquad E_x[f(x) < f(x_0) + \epsilon]$$

ont une densité moyenne dans I supérieure à $1 - \lambda$, nous avons, pour $\mu = 1 - \lambda \geqslant \frac{1}{2}$

$$f(x_0) - \epsilon < M(f, I, \mu) \leqslant m(f, I, \mu) \leqslant f(x_0) + \epsilon.$$

Par suite, quelque soit λ, *les bornes à densité λ près dans I d'une fonction approximativement continue ont pour limite la valeur de la fontion au point* x_0, l'intervalle I tendant vers son point x_0:

$$f(x_0) = \lim_{I \to x_0} m(f\, I, \lambda) = \lim_{I \to x_0} M(f, I, \lambda).$$

2. On en déduit qu'*une fonction approximativement continue pour toutes les valeurs de x est la limite des fonctions continues* [1]. En effet posons

$$\phi_n(x) = m\left(f, \left(x, x + \frac{1}{n}\right), \lambda\right), \qquad \Phi_n(x) = M\left(f, \left(x, x + \frac{1}{n}\right), \lambda\right).$$

---

[1]) A. Denjoy, Sur les fonctions dérivées sommables p. 181 § 12 et H. Looman loc. cit.

La fonction ϕ_n est, d'après le théorème de M. Looman, semicontinue supérieurement par rapport à x, tandis que Φ_n est semicontinue inférieurement.

Comme, pour $\lambda < \frac{1}{2}$,

$$\phi_n(x) \leqslant \Phi_n(x),$$

il existe, en vertu d'un théorème de M. Hahn[1]) une fonction continue intermédiaire $f_n(x)$.

Or, la fonction f étant approximativement continue,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x)$$

donc f est la limite de la suite de fonctions continues

$$f_1, f_2, f_3, \dots f_n, \dots$$

3. Quand l'intervalle I contenant le point x tend vers ce point, sa densité moyenne dans le plus petit voisinage symétrique de x contenant I est au moins égale à $\frac{1}{2}$.

Nous dirons que l'intervalle I (contenant ou non le point x) tend *régulièrement* vers x, lorsque cette densité est au moins égale à un nombre positif α, (*paramètre de régularité*)[2]) et nous ecrivons alors

$$I \underset{\alpha}{\rightarrow} x.$$

Si α est inférieur à $\frac{1}{2}$, le point x peut être extérieur à l'intervalle I.

Nous allons voir qu'*une fonction approximativement continue au point x_0 est la limite commune des bornes à densité λ près dans I, l'intervalle I tendant régulièrement vers x_0 suivant un paramètre α quelconque.*

En effet soit V_{x_0} le plus petit voisinage symétrique de x_0 qui contient l'intervalle I tel que

$$|I| \geqslant \alpha |V_{x_0}|.$$

La fonction $f(x)$ étant approximativement continue au point x_0, on a, en posant

$$E = E_x[f(x) < f(x_0) - \epsilon],$$

---

[1]) H. Hahn, Über halbstetige und unstetige Funktionen, Bericht Akad. Wien 129, 1912 p. 103.

[2]) H. Lebesgue, loc. cit. p. 390.

la relation

$$|EV_{x_0}| \leqslant \lambda\alpha |V_{x_0}|,$$

pour V_{x_0} suffisamment petit.

Comme l'intervalle I est contenu dans V_{x_0}

$$|EI| \leqslant |EV_{x_0}| \leqslant \lambda\alpha |V_{x_0}| \leqslant \lambda |I|$$

la borne inférieure à densité λ près satisfait donc à l'inégalité

$$m(f, I, \lambda) \geqslant f(x_0) - \epsilon.$$

On obtient, par un raisonnement analogue,

$$M(f, I, \lambda) \leqslant f(x_0) + \epsilon.$$

Or, pour $\lambda + \mu < 1$,

$$m(f, I, \lambda) \leqslant M(f, I, \mu),$$

donc en faisant tendre $|V_{x_0}|$ vers zéro on a

$$f(x_0) = \lim_{\substack{I \to x_0 \\ \alpha}} m(f, I, \lambda) = \lim_{\substack{I \to x_0 \\ \alpha}} M(f, I, \mu),$$

λ et μ étant d'ailleurs quelconques.

4. Une fonction mesurable est, d'après un théorème de M. Denjoy, presque partout approximativement continue [1]. Or nous avons en tout point de continuité approximative

$$f(x) = \lim_{\substack{I \to x_0 \\ \alpha}} m(f, I, \lambda) = \lim_{\substack{I \to x_0 \\ \alpha}} M(f, I, \lambda),$$

quelque soit λ.

Il en résulte qu'*une fonction mesurable presque partout finie est presque partout égale à la limite regulière de ses bornes à densité λ près*, quelque soit λ et paramètre de régularité α.

III. Les intégrales à densité λ près.

1. Soit $f(x)$ une fonction mesurable et presque partout finie dans un intervalle $K = (a, b)$.

Divisons cet intervalle au moyen d'un nombre limité de points en k intervalles partielles

$$I_1, I_1, \ldots, I_i, \ldots. I_k.$$

[1]) A. Denjoy, Sur les fonctions dérivées sommables p. 170 § 5.

Nous allons désigner pas $\underline{s}(f, K, \lambda)$ et $\overline{s}(f, K, \lambda)$ les limites extrêmes de la somme

$$\sum_{i=1}^{k} m(f, I_i, \lambda)\,|I_i|\,,$$

lorsque la *norme* de la division c'est-à-dire la longeur du plus grand des intervalles I_i, tend vers zéro.

Ces limites sont des intégrales extrêmes, au sens de M. Burkill[1]), de la fonction d'intervalle

$$g(f, I, \lambda) = m(f, I, \lambda)\,|I|$$

c'est-à-dire:

$$\underline{s}(f, \lambda, K) = \underline{\int_K} g(I), \qquad \underline{s}(f, \lambda, K) = \overline{\int_K} g(I).$$

Lorsque $\underline{s} = \overline{s}$, nous dirons que $f(x)$ est intégrable par défaut à densité λ près dans l'intervalle K et nous désignerons pas $s(f, K, \lambda)$ l'*intégrale par défaut à densité* λ *près.*

On définit de la même manière les *intégrales par excès à densité* λ *près* $\underline{S}$, $\overline{S}$ et S en partant de la fonction d'intervalle

$$G(f. I, \lambda) = M(f, I, \lambda)\,|I|\,.$$

Quand $s = S$, nous dirons que $f(x)$ est *intégrable à densité* λ *près*, en désignant l'intégrale par

$$(\lambda) \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

2. *Toute fonction mesurable bornée est intégrable à densité* λ *près.*

Considérons une suite de divisions de l'intervalle (a, b).

$$D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n, \ldots$$

dont les normes tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Soient

$$a = x_0^n < x_1^n < x_2^n < \ldots < x_{i-1}^n < x_i^n < \ldots < x_K^n = b,$$

---

[1]) J. C. Burkill, Fonctions of Intervals, Proc of the. Lond. Math. Soc. 22 (2), 1923, p 279.

les extremités des intervalles partiels de la division D_n. Définissons une fonction en echelle $f_n(x) = m(f, (x_{i-1}^n, x_i^n), \lambda)$, pour $x_{i-1} \leqslant K < x_i$.

En tout point x_0 de continuité approximative de $f(x)$, contenu dans l'intervalle (x_{i-1}^n, x^n) nous avons d'après *II*, 1,

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} m(f, (x_{i-1}^n, x_i^n), \lambda$$

donc presque partout (*II*, 4)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

La fonction considérée étant bornée, les fonctions $f_n(x)$ sont uniformement bornées.

Par suite

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Or l'intégrale de la fonction $f_n(x)$ est égale à la somme

$$\sum m(f, I_i^n, \lambda)\,|I_i^n|,$$

I_i^n étant l'intervalle (x_{i-1}^n, x_i^n).

Puisque cela a lieu quelque soit la suite choisie de D_n, nous avons

$$\int_a^b f(x)dx = s(f. K, \lambda).$$

De même

$$\int_a^b f(x)dx = S(f. K, \lambda),$$

donc $f(x)$ est intégrable à densité λ près et

$$\int_a^b f(x)dx = (\lambda)\int_a^b f(x)dx.$$

Ainsi, *l'intégrale lebesgienne d'une fonction mesurable bornée est égale à l'intégrale à densité λ près.*

En particulier une fonction approximativement continue bornée, étant limite des fonctions continues (II, 2), est intégrable à densité λ près, quelque soit le nombre positif λ inférieur à un.

3. Soit $f(x)$ une fonction *non negative sommable.*

Toute fonction sommable étant presque partout finie, $f(x)$ est bornée à densité λ près (I, 2).

Soit m sa borne inférieure à densité λ près.

D'après la définition de m, l'ensemble

$$E = E_x[f(x) < m]$$

vérifie la condition $|IE| \leqslant \lambda |I|$.

En posant

$$f_m = \min \{f, m\},$$

nous avons

$$m|I| \leqslant \int_{I-E} f_m dx + m \, . \, |IE| \leqslant \int_I f dx + \lambda m |I|.$$

Par suite

$$g(I) = m|I| \leqslant \frac{1}{1-\lambda} \int_I f(x) dx.$$

L'intégrale lebesgienne étant une fonction absolument continue d'intervalle, la fonction non négative d'intervalle $g(I)$ est aussi absolument continue, en d'autres termes la somme finie

$$g(I_1) + g(I_2) + \dots g(I_n)$$

tend vers zéro en même temps que la longeur totale des intervalles, c'est-à-dire $|I_1| + |I_2| + \dots + |I_n|$ [1]).

En remplaçant la borne inférieure m par la borne supérieure M et l'ensemble $E_x[f(x) < m]$ par $E_x[f(x) < M]$, nous avons

$$|EI| \leqslant (1-\lambda)|I|.$$

Donc

$$M|I| \leqslant \int_I f(x) dx + (1-\lambda) M |I|$$

et par suite

$$G(I) = M|I| \leqslant \frac{1}{2-\lambda} \int_I f(x) dx.$$

La fonction $G(I)$ est donc aussi absolument continue.

---

[1]) On dirait mieux „absolument petite" puisque cette propriété ne définit la continuité que pour les fonctions additives.

Ainsi, *si la fonction $f(x)$ est sommable et non négative, les fonctions $g(f, I, \lambda)$ et $G(f, I, \lambda)$ sont toutes les deux absolument continues*.

Si $f(x)$ est *sommable* et *non positive,* le théorème a aussi lieu. Nous avons en effet:

$$g(f) = -G(-f), \qquad G(f) = -g(-f),$$

en vertu des propriétés correspondantes de bornes a densité λ près (I, 8),

Par conseqent, pour $f(x) \leqslant 0$, nous avons

$$|g(f, I_1) + \ldots + g(f, I_n)| = G(-f, I_1) + \ldots + G(-f, I_n),$$
$$|G(f, I_1) + \ldots + G(f, I_n)| = g(-f, I_1) + \ldots + g(-f, I_n),$$

donc les fonctions $g(f, I)$ et $G(f, I)$ sont aussi absolument continues.

Si $f(x)$ est une fonction *sommable quelconque*, nous pouvons la décomposer en deux fonctions f_0 et f^0 respectivement non negative et non positive.

Or, d'après I, 9,

$$m(f) = m(f_0) + m(f^0), \qquad M(f) = M(f_0) + M(f^0)$$

et par suite

$$g(f) = g(f_0) + g(f^0), \qquad G(f) = G(f_0) + G(f^0).$$

La somme de deux fonctions d'intervalles absolument continues étant absolument continue, nous voyons que *les fonctions $g(f, I, \lambda)$ et $G(f, I, \lambda)$ sont absolument continues quelque soit la fonction sommable $f(x)$*.

5. Lorsqu'une une fonction d'intervalle est absolument continue, ses intégrales extrêmes sont finies [1]).

Considérons les *dérivées extrêmes* de la fonction d'intervalle $g(I)$, c'est-à-dire les limites extrêmes du quotient $\frac{g(I)}{(I)}$, l'intervalle I tendant régulièrement vers x, quelque soit le paramètre de régularité α.

Désignons ces dérivées par $\underline{D}_x g$ et $\overline{D}_x g$.

Par suite d'un théorème de M. Burkill [2]), si $g(I)$ est absolument continue, on a, pour $K = (a, b)$, les égalités:

---

[1]) J. C. Burkill, loc. cit. p. 287.

[2]) loc. cit. p. 309, th. 7, 6.

$$\underline{\int}_K g(I) = \int_a^b D_x g dx, \quad \int_a^b D_x g dx = \overline{\int}_K g(I).$$

Or dans notre cas

$$\frac{g(I)}{(I)} = m(f, I, \lambda).$$

Comme, pour toute fonction mesurable, nous avons presque partout

$$f(x) = \lim_{\substack{I \to x \\ a}} m(f, I, \lambda),$$

les deux dérivées extrêmes sont égales à $f(x)$ et nous avons

$$\underline{\int}_K g(I) = \overline{\int}_K g(I) = \int_a^b f dx.$$

Cela signifie que la fonction $g(I)$ est intégrable, $f(x)$ est donc intégrable à densité λ près et

$$\int_a^b f(x) dx = s(f, K, \lambda).$$

Le même raisonnement donne

$$\int_a^b f dx = S(f, K, \lambda),$$

alors la fonction $f(x)$ est intégrable à densité λ près et son intégrale est égale à l'intégrale lebesgienne.

6. Comme $g(f, I, \lambda)$ et $G(f, I, \lambda)$ sont absolument continues pour f sommable, *toute fonction sommable est intégrable à densité λ près.*

De plus l'intégrale à densité λ près d'une fonction sommable est independante de la valeur de la densité λ, puisqu'elle est égale à l'intégrale lebesgienne.

Notre derniere raisonnement montre aussi que la fonction $f(x)$ est toujours sommable, si $g(I)$ et $G(I)$ sont absolument continues. Or le reciproque etait etabli plus haut (III 3, 4), nous voyons donc que *la continuité absolue de fonctions* $G(f, I, \lambda)$ et $G(f, I, \lambda)$ *est une condition necessaire et suffissante de la sommabilité de* $f(x)$.

IV. Intégrales approximatives.

1. Des propriétés des bornes à densité λ près on déduit les propriétés correspondantes des intégrales à densité λ près.

De la relation

$$m(\lambda) \leqslant M(\mu),$$

valable tant que $\lambda + \mu < 1$, nous déduisons, en formant les sommes et en passant aux limites, les inégalités:

$$\underline{s}(\lambda) \leqslant \begin{matrix} \underline{S}(\mu) \\ \overline{s}(\lambda) \end{matrix} \leqslant \overline{S}(\mu).$$

On voit de plus que les intégrales par défaut $\underline{s}(\lambda)$ et $\overline{s}(\lambda)$ sont de fonctions non décroissantes de λ et que les intégrales par excès $\underline{S}(\mu)$ et $\overline{S}(\mu)$ sont des fonctions non croissantes de μ.

2. Appellons *intégrale inférieure approximative* la limite de $\underline{s}(\lambda)$, λ tendant vers zéro, et écrivons

$$(A)\underline{\int_a^b} fdx = \lim_{\lambda \to 0} \underline{s}(f, K, \lambda).$$

Cette limite est finie quand s est bornée pour les valeurs suffisamment petites de λ.

L'intégrale superieure approximative sera

$$(A)\overline{\int_a^b} fdx = \lim_{\mu \to 0} \overline{S}(f, K, \mu).$$

3. Comme, en vertu de IV, 1, les intégrales $\overline{s}(\lambda)$ et $\overline{S}(\mu)$ sont toutes les deux au plus égales à l'intégrale supérieure approximative, quelque soient λ et μ, nous pouvons supposer que $\lambda + \mu \geqslant 1$ et nous aurons l'inégalité

$$\overline{S}(\mu) \leqslant \overline{s}(\lambda) \leqslant (A)\overline{\int_a^b} fdx.$$

Alors, si λ tend vers 1, μ tend vers zéro et

$$\overline{\int_a^b} f dx = \lim_{\lambda \to 1} \overline{s}(f, K, \lambda).$$

Pour que l'intégrale supérieure approximative soit finie il faut que $\overline{s}$ soit bornée pour λ voisin de 1.

Ainsi *pour que les intégrales extrêmes approximatives soient finies, il faut et il suffit* que les intégrales par défaut $\underline{s}(\lambda)$ et $\overline{s}(\lambda)$ soient bornées pour toutes les valeurs de λ et par suite *que la fonction d'intervalle $g(f, I, \lambda)$ soit à variation bornée, pour $0 < \lambda < 1$ et les intervalles petits* [1]).

On obtient la même condition pour $G(f, I, \lambda)$.

4. La fonction $f(x)$, dont les intégrales extrêmes approximatives sont finies et égales, est dite *approximativement intégrable*. La valeur commune de ces intégrales sera l'intégrale approximative de $f(x)$ dans (a, b): $\int_a^b f dx$.

Comme, d'après IV 1 et 3,

$$(A) \underline{\int_a^b} f dx \leqslant \begin{array}{c} \underline{S}(\lambda) \leqslant \overline{S}(\lambda) \\ \underline{s}(\lambda) \leqslant \overline{s}(\lambda) \end{array} \leqslant (A) \overline{\int_a^b} f dx,$$

l'égalité des intégrales extrêmes approximatives implique l'égalité de toutes les quatre intégrales à densité λ près. Une fonction approximativement intégrable est donc intégrable à densité λ près, quelque soit λ, compris entre 0 et 1. De plus

$$(A) \int_a^b f dx = s(\lambda) = S(\lambda) = (\lambda) \int_a^b f dx,$$

donc l'intégrale à densité λ près d'une fonction approximativement intégrable ne depend pas du nombre λ, car elle est égale à l'intégrale approximative.

Comme l'inverse résulte de la définition de l'intégrale approximative, nous voyons que *l'intégrabilité approximative est une con-*

[1]) Nous dirons que la fonction d'intervalle $g(I)$ est ***à variation bornée*** dans K quand la somme $g(I_1) + \ldots + g(I_n)$ est bornée quelque soient les intervalles non empietants $I_1, I_2, \ldots I_n$ formants une division de K.

dition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale à densité λ *près existe et soit independante de* λ.

Toute fonction sommable est donc approximativement intégrable (III, 6).

5. Nous avons établi (IV, 3) que les intégrales extrêmes approximatives de $f(x)$ sont finies quand la fonction $g(f, I, \lambda)$ est à variation bornée, pour toutes les valeurs de λ comprises eutre 0 et 1, et que cette condition est aussi nécessaire pour les intérvalles suffisamment petits.

Ainsi *pour que la fonction* $f(x)$ *soit sommable il faut que la fonction d'intervalle* $g(f, I, \lambda)$ *soit à variation bornée*, pour $0 < \lambda < 1$ et les intervalles petits.

On voit (III, 6) que la fonction d'intervalle $g(f, I, \lambda)$ est dans ce cas absolument continue, pour toutes les valeurs de λ, et à variation bornée pour les intervalles petits.

La fonction correspondante $G(f, I, \lambda)$ jouit de mêmes propriétés.

V. Les fonctions de plusieurs variables.

1. Lorsque x est un point $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ d'une espace à k dimensions, *l'intervalle* I est l'ensemble de tous les points dont chaque coordonnée x_i est comprise dans un intervalle linéaire (a_i, b_i) ouvert, fermé ou semi-ouvert.

L'étendue de l'intervalle I est le nombre

$$|I| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_k - a_k)$$

qui remplace la longeur de l'intervalle linéaire.

Le *voisinage* symétrique d'un point $(x_1, x_2, \ldots x_k)$ est intervalle V_x dont les projections sont

$$(x_i - h, x_i + h) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

Si les intervalles I_i, compris dans K, n'empietent pas et

$$|K| = |I_1| + |I_2| + \ldots + |I_n|,$$

nous dirons qu'ils constituent une *division* de K.

La *norme* de la division est la plus grande des dimensions des intervalles $I_1, I_2, \ldots I_n$.

2. Ces notions étant ainsi precisées, nous pouvout étendre les

définitions des bornes à densité λ près et de la continuité approximative aux fonctions de plusieurs variables.

Il en est de même avec la définition de l'intégrale d'une fonction d'intervalle. Alors les définition des intégrales à densités λ près et des intégrales approximatives subsistent pour les fonctions de plusieurs variables.

3. Quand aux théorèmes de ce mémoire, ils subsistent également pourvu que l'on modifie la définition de l'intégrale d'une fonction d'intervalle, en exigeant que les rapports des dimensions des intervalles partiels d'une division soient uniformement bornées par deux nombres positives.

En effet dans la démonstration du théorème de M. Burkill, cité au III 5, il faut que la suite des intervalles partiels qui contiennent un point x tende régulièrement vers ce point, lorsque la norme de la division décroît vers zéro [1]).

Or cela a bien lieu lorsque la division vérifie la condition qu'on vient d'énoncer.

Ainsi nous arrivons à la conclusion que toutes les théorèmes démontrés dans ce mémoire peuvent être appliqués aux fonctions de plusieurs variables.

---

[1]) loc. cit. p. 310.

Deux types de relations logiques et la méthode de Poretsky.

Par

Zygmunt Kobrzyński (Varsovie).

Je considère une suite T finie ou du type ω des termes $t_1, t_2, \ldots$ Je désigne par E l'ensemble des fonctions logiques, dans le sens de Poretsky, des termes de la suite T; par E_n l'ensemble des fonctions logiques des termes du segment T_n de la suite T, c'est-à-dire des termes $t_1, t_2, \ldots, t_n$; par M_n l'ensemble des *minima*, dans le sens de Poretsky, de l'ensemble E_n; par $M_n(a)$, a appartenant à E_n, l'ensemble des minima du développement de la fonction logique a en une somme des minima de l'ensemble E_n.

Je discerne deux types de l'équivalence et de l'inclusion logiques des élements de l'ensemble E: l'*équivalence* (resp. l'*inclusion*) *structurale* et l'*équivalence* (resp. l'*inclusion*) *relative*.

Je dis que *a est structuralement équivalent à b dans l'ensemble E_n*, si a et b appartiennent à E_n et les ensembles $M_n(a)$ et $M_n(b)$ sont identiques; a sera dit *structuralement contenu dans b dans l'ensemble E_n*, si a et b appartiennent à E_n et $M_n(a)$ est contenu dans $M_n(b)$.

E_n étant contenu dans E_ν, les fonctions logiques structuralement équivalentes dans l'ensemble E_n le sont aussi dans l'ensemble E_ν; je les considère donc comme *structuralement équivalentes dans l'ensemble E*. Ces fonctions restent structuralement équivalentes, lorsqu'on change l'ordre des termes de la suite T ou lorsqu'on remplace la suite T par une suite des termes par rapport auxquels les termes de la suite T sont des fonctions logiques. Ces remarques concernent également la relation de l'inclusion.

T' désignant une suite à termes en général différents de T et

E' l'ensemble de leurs fonctions logiques, je fais correspondre à chaque terme de la suite T une et seulement une fonction logique appartenant à E'. Ainsi à chaque fonction logique a appartenant à E vient correspondre une et seulement une fonction logique appartenant à E', à savoir la fonction qui s'obtient de a en y remplaçant les termes de T par les élements correspondants de E'.

a et b appartenant à E, je dis que *a est équivalent à b dans l'ensemble E relativement à l' ensemble E'*, si les éléments de E' correspondants à a et b sont structuralement équivalents dans E'; a sera dit *contenu dans b dans l'ensemble E relativement à l'ensemble E'*, si l'élement de E' correspondant à a est structuralement contenu dans celui correspondant à b.

Dans le cas particulier l'équivalence et l'inclusion relatives se laissent définir par une *coupure* de l'ensemble E en deux classes disjointes F et V à proprietés suivantes:

1° La somme des fonctions logiques a et b appartenant à E appartient à F alors et seulement alors, lorsque a et b appartiennent à F.

2° Le produit des fonctions logiques a et b appartenant à E appartient à V alors et seulement alors, lorsque a et b appartiennent à V.

3° Ni F ni V ne contient la négation d'aucun de ses éléments.

Dans le cas considéré, a sera dit *équivalent à b relativement à cette coupure* , si a et b appartiennent simultanément à F ou à V; je dirai de-même que *a est contenu dans b relativement à cette coupure*, si a et b appartiennent à E et a appartient à F ou b appartient à V. Ces définitions sont équivalentes aux precédentes dans le cas de la suite T' formée de deux termes (que l'on fera correspondre respectivement aux ensembles F et V).

Les deux types des relations ci dessus verifient les formules du Calcul de Schroeder, c'est-à-dire du Calcul logique sans principe d'assertion; ces relations appartiennent donc à l'Algèbre des Ensembles, les notions de „terme" et de „fonction logique" pouvant être définies par la seule description de leur structure. indépendamment de tout système de la Logique.

Application: En désignant par $N(M)$, où M est un ensemble fini, le nombre des éléments de l'ensemble M, j'appelle la *probabilité de la fonction logique a dans l'ensemble E_n* la relation $\dfrac{N(M_n(a))}{N(M_n)}$,

a appartenant à E_n; d'une façon analogue j'appelle la *probabilité de a par rapport à b dans l'ensemble E_n*, la relation $\frac{N(M_n(a))}{N(M_n(b))}$, a et b appartenant à E_n et étant $N(M_n(b)) \neq 0$.

E_n étant contenu dans E_ν et a appartenant à E_n, les probabilités de la fonction logique a dans les ensembles E_n et E_ν sont égales. Leur valeur commune peut être considérée comme *probabilité de la fonction logique a dans l'ensemble E.* La même remarque concerne la probabilité de a par rapport à b.

Les formules fondamentales du Calcul des Probabilités, analogues à celles du Calcul des „Wahrheitswerte" de M. Jan Łukasiewicz, exposées dans son ouvrage: „*Die logischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*" (Krakau, Akad. der Wissensch. 1913), concernent dans ce cas l'équivalence et l'inclusion structurales.

Sur un groupe automorphe.

Par

K. Abramowicz.

Dans ma note[1]) insérée dans les Comptes Rendus, t. 187, j'ai étudié les fonctions appartenant au groupe $\{p, q, r\}$ formé des substitutions appelées par M. Fricke de „Haupttypus". En désignant par p_1, q_1, r_1 les diviseurs des nombres positifs p, q, r du corps algébrique $\Omega_k(\theta)$ et posant $p = p_1 p_2$, $q = q_1 q_2$, $r = r_1 r_2$, M. Fricke obtient le groupe plus général des substitutions

$$\text{(1)} \qquad \begin{pmatrix} (a\sqrt{p_1 r_1} + b\sqrt{p_2 r_2})\sqrt{q_1}\,, & (c\sqrt{p_1 r_2} + d\sqrt{p_2 r_1})\sqrt{q_2} \\ -(c\sqrt{p_1 r_2} - d\sqrt{p_2 r_1})\sqrt{q_2}\,, & (a\sqrt{p_1 r_1} - b\sqrt{p_2 r_2})\sqrt{q_1} \end{pmatrix}$$

au déterminant

$$\text{(2)} \qquad a^2 p_1 q_1 r_1 - b^2 p_2 q_1 r_2 + c^2 p_1 q_2 r_2 - d^2 p_2 q_2 r_1 = 1,$$

qu'il appelle[2]) groupe „de type" $[p_1, q_1, r_1]$. Nous nous proposons d'étendre le resultat obtenu dans la note citée aux groupes „ de type" $[p_1, q_1, r_1]$. Nous désignons les substitutions de ce groupe par $[a, b, c, d]$.

Dans ce qui va suivre nous supposerons que le corps algébrique $\Omega_k(\theta)$ de degré k auquel appartiennent les nombres positifs p, q, r est défini par l'équation $F(\theta) = 0$ et que ce corps a la base minimale $(1, \theta, \theta^2, \ldots \theta^{k-1})$. Nous faisons en outre l'hypothèse que le polynome $F(\theta)$ de degré k par rapport à θ est irréductible suivant le module n (supposé premier).

Le corps $\Omega_k(\theta)$ possédera alors les propriétés suivantes[3]) sur lesquelles nous nous appuyerons dans la suite:

---

[1]) Transformation des fonctions automorphes, p. 801.

[2]) Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen, t. I, p. 538, 588.

[3]) Weber: Lehrbuch der Algebra, II, p. 306.

1) il contient n^k nombres (y compris 0) incongrus suivant le module n,

2) si le produit $\alpha\beta$ de deux nombres α, β du corps est congru à 0, alors l'un de nombres α, β est congru à 0,

3) la congruence $\alpha x \equiv \beta \pmod{n}$ a toujours dans le corps $\Omega_k(\theta)$ une solution et une seule (α n'étant pas $\equiv 0$),

4) on peut diviser ou multiplier les deux membres de la congruence par chaque nombre qui n'est pas $\equiv 0$.

Pour la transformation du n-ème degré du groupe $[p_1, q_1, r_1]$ nous chosirons la substitution V de la forme $V = [K, o, L, o]$ avec le déterminant

$$K^2 q_1 r_1 + L^2 q_2 r_2 = n,$$

où n est un nombre premier et les nombres K et L appartiennent au corps $\Omega_k(\theta)$.

En désignant par $f(z)$ la fonction automorphe appartenant au groupe $[p_1, q_1, r_1]$ nous nous proposons d'étudier la fonction transformée $f(Vz)$ appartenant au groupe $V^{-1}[p_1, q_1, r]V$. Dans le travail actuel nous demontrons que dans le cas où le polygone fondamental du groupe $[p_1, q_1, r_1]$ a un nombre fini de sommets la relation entre les fonctions $f(Vz)$ et $f(z)$ est algébrique de degré $n^k + 1$ en $f(Vz)$.

Pour les substitutions $[a', b', c', d']$ du groupe transformé $V^{-1}[p_1, q_1, r_1]V$ nous obtenons les valeurs:

$$(3) \quad \begin{aligned} a' &= na,\ b' = b(K^2 p_1 q_1 r_1 - L^2 p_1 q_2 r_2) - 2\, KLd p_1 q_2 r_1, \\ c' &= nc,\ d' = d(K^2 p_1 q_1 r_1 - L^2 p_1 q_2 r_2) + 2\, KLb p_1 q_1 r_2. \end{aligned}$$

On voit que les substitutions $[a', b', c', d']$ du groupe transformé $V^{-1}[p_1, q_1, r_1]V$ ont le déterminant n^2; pour que le déterminant de $[a', b', c', d']$ soit égal à 1, les nombres a', b', c', d' doivent être divisibles par n. Après cette remarque on raisonnera de la manière suivante:

1) Dans le sous-groupe g_j commun aux groupes $[p_1, q_1, r_1]$ et $V^{-1}[p_1, q_1, r_1]V$ ne peuvent entrer que les substitutions $[a', b', c', d']$ du groupe $V^{-1}[p_1, q_1, r_1]V$ qui s'obtiennent de substitutions $[a, b, c, d]$ satisfaisant à la congruence

$$Kbq_1 \equiv Ldq_2 \pmod{n}.$$

En effet, dans ce cas seulement les nombres b' et d' sont divisibles par n, ce qu'on vérifie immédiatement à l'aide de formules (3), en tenant compte de la congruence[1]):

$$K^2 q_1 r_1 \equiv - L^2 q_2 r_2 .$$

2) Les substitutions $[a', b', c', d]$ qui peuvent entrer dans le groupe g_j doivent remplir la condition

$$Kd' r_1 \equiv Lb' r_2 \,(\mathrm{mod}\; n).$$

En effet, la resolution des égalités

$$b' = \frac{1}{n}\,[b(K^2 p_1 q_1 r_1 - L^2 p_1 q_2 r_2) - 2\,KLd p_1 q_2 r_2],$$

$$d' = \frac{1}{n}\,[d(K^2 p_1 q_1 r_1 - L^2 p_1 q_2 r_2) + 2\,KLb p_1 q_1 r_2]$$

par rapport à b et d donne

$$b = \frac{1}{n}\,\{b'(K^2 p_1 q_1 r_1 - L^2 p_1 q_2 r_2) + 2\,KLd' p_1 q_2 r_1\},$$

$$d = \frac{1}{n}\,\{d'(K^2 p_1 q_1 r_2 - L^2 p_1 q_2 r_2) - 2\,KLb' p_1 q_1 r_2\},$$

et l'on voit que la condition

$$Kd' r_1 \equiv Lb' r_2 \,(\mathrm{mod}\; n)$$

doit être remplie pour que les nombres b et d soient entiers.

3) On vérifie inversement que chaque substitution $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$ du groupe $[p_1, q_1, r_1]$ qui s'obtient par la transformation V d'une substitution $[a, b, c, d]$ satisfaisant à la congruence $Kbq_1 \equiv Ldq_2$, satisfaira à la conguence

$$K\delta r_1 \equiv L\beta r_2 \,(\mathrm{mod}\; n).$$

En effet, si l'on transforme la substitution $[a, b, c, d]$ à l'aide de la substitution V et si l'on pose

$$Kbq_1 = Lq_2 d + H \,.\, n,$$

où H désigne un nombre entier du corps $\Omega_k(\theta)$, on trouvera (tenant compte de la congruence $K^2 q_1 r_1 \equiv - L^2 q_2 r_2$) les valeurs

---

[1]) Aucun de nombres p, q, r n'est congru à 0.

$$\beta = -b + 2\,KHp_1r_1,$$
$$\delta = \quad d + 2\,LKp_1r_2,$$

et l'on aura la congruence

$$Kr_1(d + 2\,LHp_1r_2) \equiv Lr_2(-b + 2\,KHpr_1),$$

qui se reduit à

$$Kdr_1 \equiv -Lbr_1 \pmod{n}$$

ou encore $Kbq_1 \equiv Ldq_2$ (en vertu de $K^2q_1r_1 \equiv -L^2q_2r_2$).

4) Le sous-groupe cherché g_j est composé de toutes les substitutions $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$ au déterminant 1 satisfaisant à la congruence

$$(4) \qquad K\delta r_1 \equiv L\beta r_2 \pmod{n}.$$

En effet, d'après 3) une telle substitution s'obtient par la transformation V d'une substitution $[a, b, c, d]$ satisfaisant à la congruence $Kbq_1 \equiv Ldq_2$; elle remplit donc la condition 1); d'autre part elle satisfait aussi à la condition 2).

Si l'on fait maintenant l'hypothèse que le polygone fandamentale du groupe discontinu $[p_1, q_1, r_1]$ a un nombre fini de sommets la relation entre les fonctions $f(Vz)$ et $f(z)$ sera algébrique. La fonction $f(Vz)$ satisfaira à une équation de degré égal à l'indice j du sous-groupe g_j par rapport au groupe $[p_1, q_1, r_1]$.

Envisageons le groupe fini G_e auquel se reduit le groupe $[p_1, q_1, r_1]$ par rapport au module n. Le nombre e des substitutions du groupe G_e sera égal à la moitié du nombre de solutions en a, b, c, d de la congruence

$$(5) \qquad a^2p_1q_1r_1 - b^2p_2q_1r_2 + c^2p_1q_2r_2 - d^2p_2q_2r_1 \equiv 1 \pmod{n}$$

dans le corps $\Omega_k(\theta)$.

Nous devons distinguer deux cas: 1) les corps $\Omega_k(\theta)$ dans lesquels le nombre -1 est reste quadratique, 2) et les corps $\Omega_k(\theta)$ dans lesquels -1 est non-reste. En désignant par g la racine primitive du nombre n dans le corps $\Omega_k(\theta)$, c'est-à-dire le nombre pour lequel

$$g^{n^k-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

on aura la propriété dont nous ferons usage:

Si l'on ajoute 1 aux deux non-résidus

$$g^i, g^{n^k-i-1} \quad (i = 1, 3, \ldots)$$

de la suite

$$g, g^3, \dots g^{n^k-2}$$

alors l'une des sommes

$$1 + g^i, 1 + g^{n^k-i+1}$$

sera résidu, l'autre non-résidu.

En effet, faisant l'hypothèse que $1 + g^i$ est résidu, on a

$$1 + g^i \equiv g^{n^k-1} + g^i \equiv g^i(1 + g^{n^k-i-1})$$

et, comme g^i est non-résidu, la somme $1 + g^{n^k-i-1}$ devra être non-résidu, afin que le produit $g^i(1 + g^{n^k-i-1})$ soit résidu; et inversement.

Nous demontrons maintenant le théorème suivant que nous avons formulé dans la note citée sans demonstration:

Les nombres A et B étant simultanément résidus ou non-résidus $(\mathrm{mod}\, n)$ dans le corps $\Omega_k(\theta)$ les congruences

$$Ax^2 + By^2 \equiv 0,\ Ax^2 + By^2 \equiv M \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, n)$$

ont dans le corps $\Omega_k(\theta)$ respectivement $2\,n^k - 1$ et $n^k - 1$ solutions, si le nombre -1 est résidu dans le corps $\Omega_k(\theta)$, et respectivement 1 et $n^k + 1$ solutions, si -1 est non-résidu dans le corps $\Omega_k(\theta)$; si l'un de nombres A et B est résidu et l'autre non-résidu les mêmes congruences ont respectivement 1 et $n^k + 1$ solutions dans le premier cas et $2\,n^k - 1$ et $n^k - 1$ solutions dans le second cas.

Demonstration. 1) Supposons que le nombre -1 est résidu dans le corps $\Omega_k(\theta)$, c'est-à-dire

$$n^k \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, 4).$$

Parmi les $(n^k - 1):2$ restes quadratiques

$$1, g^2, g^4, \dots g^{n^k-1}$$

on ne trouvera que les $(n^k - 1):2$ sommes

$$g^{2i} + g^{\frac{k-1}{2}+2i} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, n),\ i = 0, 1, 2, \dots \frac{n^k-3}{2};$$

de chaque somme on obtiendra 4 solutions de la congruence $x^2 + y^2 \equiv 0$, et en ajoutant la solution $(0, 0)$ on aura $2\,n^k - 1$ solutions.

Parmi les $(n^k - 1):2$ sommes

(6) $$1 + 1, 1 + g^2, \dots 1 + g^{n^k - 3}$$

on a une égale à 0, et la suite de $(n^k - 1):2$ sommes

(7) $$1 + g, 1 + g^3, \dots 1 + g^{n^k - 2}$$

contiendra (d'après la propriété mentionnée plus haut) $(n^k - 1):4$ résidus et $(n^k - 1):4$ non-résidus. La suite (6) devra donc contenir

$$\frac{n^k - 1}{4} - 1 \text{ résidus}$$

(parceque le deux suites (6) et (7) doivent épuiser tous les résidus). Si l'on joint à la suite (6) la somme $1 + 0$ on aura dans la suite de $(n^k - 1):2 + 1$ sommes

(8) $$1 + 0, 1 + 1, 1 + g^2, \dots 1 + g^{n^k - 3}$$

$(n^k - 1):4$ résidus et $(n^k - 1):4$ non-résidus.

En multipliant les élements de la suite (8) consécutivement par

$$1, g^2, \dots g^{n^k - 3}$$

on obtiendra $(n^k - 1):2$ suites de produits de la forme

(9) $$g^{2i}(1 + g^{2j});$$

chaque colonne de cet ensemble (9) de produits contiendra ou tous les $(n^k - 1):2$ résidus différents ou tous les $(n^k - 1):2$ non-résidus différents. Chaque résidu ou non-résidu M sera alors de $(n^k - 1):4$ manières representé dans la forme (9). La congruence $x^2 + y^2 \equiv M$ (mod n) aura

$$\frac{n^k - 1}{4} . 4 = n^k - 1$$

solutions (parceque chaque somme $g^{2i} + g^{2(i+j)}$ se repète deux fois).

2) Supposons que le nombre -1 est non résidu dans le corps $\Omega_k(\theta)$, c'est-à-dire $n^k = 4s + 3$, où s est un nombre naturel; on n'aura pas ici

$$g^{\frac{n^k - 1}{2}} + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

et le nombre $n - 1$ sera non-résidu. Comme précedemment on ajoute 1 à tous les non-résidus

$$g, g^3, \dots g^{n^k-2}$$

dont le nombre $(n^k - 1):2 = 2s + 1$ est impair; on obtiendra dans la suite

(10) $$1 + g, 1 + g^3, \dots 1 + g^{n^k-2}$$

une fois 0 et s résidus et s non-résidus (d'après la propriété citée plus haut). Dans la suite de $(n^k - 1):2$ sommes

(11) $$1 + 1, 1 + g^2, \dots 1 + g^{n^k-3}$$

on aura alors $(n^k - 3):4 + 1$ non résidus (afin qu'on ait dans les deux suites (10) et (11) le nombre total de résidus) et $(n^k - 3):4$ résidus.

La suite de $(n^k + 1):2$ sommes

(12) $$1 + 0, 1 + 1, 1 + g^2, \dots 1 + g^{n^k-3}$$

contiendra alors $(n^k + 1):4$ résidus et $(n^k + 1):4$ non-résidus.

En multipliant les élements de la suite (12) consécutivement par

$$1, g^2, \dots g^{n^k-3}$$

on obtiendrra $(n^k - 1):2$ suites de produits de la forme

(13) $$g^{2i}(1 + g^{2j});$$

chaque colonne de cet ensemble (13) de produits contiendra ou tous les $(n^k - 1):2$ résidus différents ou tous les $(n^k - 1):2$ non résidus différents. Chaque résidu ou non-résidu M sera alors de $(n^k - 1):4$ manières representé dans la forme (13). La congruence $x^2 + y^2 \equiv M$ aura $n^k + 1$ solutions.

Si l'on passe aux congruences $Ax^2 + By^2 \equiv M$, on voit facilement que dans le cas où A et B sont simultanément résidus ou non-résidus les nombres des solutions de congruences $Ax^2 + By^2 \equiv M$ sont les mêmes que des congruences envisagées precédemment.

Si, au contraire, on suppose

A résidu, B non-résidu

et si l'on se place dans le premier cas (de -1 résidu) on n'aura jamais

$$g^{2i} + g^{2j+1} \equiv 0,$$

et l'on aura alors une seule solution $(0, 0)$ pour la congruence $Ax^2 + By^2 \equiv 0$. Si l'on prends la suite de $(n^k - 1):2$ sommes

$$1 + g, 1 + g^3, \dots 1 + g^{n^k-2}$$

dans laquelle on a $(n^k - 1):4$ résidus et $(n^k - 1):4$ non-résidus, et si l'on multiplie les élements de cette suite par

$$g, g^3, \dots g^{n^k-2}$$

on obtiendra pour chaque nombre $M \not\equiv 0$ $(n^k - 1):4$ représentations dans la forme

$$g^{2i} + g^{2j+1},$$

c'est-à-dire $n^k - 1$ solutions de la congruence $Ax^2 + By^2 \equiv M$; en ajoutant encore *deux* solutions correspondant aux valeurs $x \equiv 0$, si M est non-résidu, et $y \equiv 0$, si M est résidu, on aura définitivement $n^k + 1$ solutions de la congruence $Ax^2 + By^2 \equiv M \pmod{n}$.

Dans le second cas (de -1 non-résidu, $n^k = 4s + 3$) on aura une congruence

$$g^{2j+1} + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

et, en la multipliant par les $(n^k - 1):2$ nombres

$$1, g^2 \dots g^{n^k-3}$$

on aura $(n^k - 1):2 + 1 = 2n^k - 1$ solutions de la congruence $Ax^2 + By^2 \equiv 0$ (après avoir ajouté la solution $(0, 0)$. De même si l'on prends la suite de $(n^k - 1):2$ sommes

$$1 + g, 1 + g^3, \dots 1 + g^{n^k-2}$$

dans laquelle on a (une de sommes est 0) maintenant

$(n^k - 3):4$ résidus et $(n^k - 3):4$ non-résidus,

et si l'on la multiplie succéssivement par $1, g^2, \dots g^{n^k-3}$ on obtiendra $(n^k - 3):4$ représentations $(\text{mod}\, n)$ de chaque nombre M dans la forme $g^{2i} + g^{2j+l}$, d'où $n^k - 3$ solutions de la congruence $Ax^2 + By^2 \equiv M$; en ajoutant encore *deux* solutions correspondant à la valeur $x \equiv 0$, si M est non-résidu, et à $y \equiv 0$, si M est résidu, on aura $n^k - 1$ solutions.

Passons maitenant à la détermination du degré du groupe G_e auquel se reduit le groupe $[p_1, q_1, r_1]$ par rapport au module n.

Pour déterminer le nombre de solutions de la congruence (1) en a, b, c, d écrivons cette congruence sous la forme

$$(14)\qquad p_1(a^2q_1r_1 + c^2q_2r_2) - p_2(b^2q_1r_2 + d^2q_2r_1) \equiv 1 \pmod{n}.$$

On posera

$$(15)\qquad \begin{aligned} a^2q_1r_1 + c^2q_2r_2 &= X, \\ b^2q_1r_2 + d^2q_2r_1 &= Y, \end{aligned}$$

et l'on aura alors la congruence

$$p_1X - p_2Y \equiv 1 \pmod{n}:$$

elle a les solutions

$$X \equiv 1 + p_2\xi, \quad Y \equiv p_1\xi,$$

où ξ parcourt l'ensemble de n^k nombres du corps $\Omega_k(\theta)$ incongrus par rapport au module n.

1) Supposons que -1 est résidu dans le corps $\Omega_k(\theta)$. En remarquant que les produits q_1r_1 et q_2r_2 sont simultanément résidus ou non-résidus, on a:

a) pour $\xi \equiv 0$, $X \equiv 1$, $Y \equiv 0$ et les congruences (15) admettront

$$(2\,n^k - 1)(n^k - 1) \text{ solutions;}$$

b) pour $X \equiv 0$, $Y \equiv \xi_0$ (tel que $1 + p_2\xi_0 \equiv 0$) on aura le même nombre de solutions $(2\,n^k - 1)(n^k - 1)$,

c) pour les $n^k - 2$ valeurs restantes $Y \equiv \xi$, $X \equiv 1 + p_2\xi$ on aura ensemble

$$(n^k - 2)(n^k - 1)^2$$

solutions En somme on trouve indépendemment de la valeur de produits q_1r_1, q_2r_2 le nombre total $n^k(n^{2k} - 1)$ de solutions; on divisera ce nombre par 2 parceque le changement simultané du signe de coefficients a, b, c, d de la substitution $[a, b, c, d]$ ne donne pas de substitution nouvelle.

2) Supposons que -1 est non-résidu dans le corps $\Omega_k(\theta)$. En remarquant que maintenant l'un de produits q_1r_1 et q_2r_2 est résidu l'autre non-résidu, on aura de la même manière respectivement les nombres

$$1\,.\,(n^k + 1), 1\,.\,(n^k + 1), (n^k - 2)(n^k + 1)^2$$

de solutions; en les additionnant on obtient le même nombre $n^k(n^{2k} - 1)$.

On pourra toujours déterminer un nombre E satisfaisant à la congruence

$$Kr_1E \equiv Lr_2 \pmod n;$$

on remplacera alors la congruence (4) par $d \equiv Eb$ et, en vertu de l'égalité $K^2q_1r_1 + L^2q_2r_2 = n$, ou aura alors

$$r_1q_2E^2 \equiv -r_2q_1 \pmod n \tag{16}$$

On a l'égalité

$$[p_1, q_1, r_1] = \{g_j, S_2g_j, \dots S_jg_j\},$$

où les S désignent certaines substitutions du groupe $[p_1, q_1, r_1]$ ne vérifiant pas la congruence $d \equiv Eb$. Si nous considerons le groupe fini G_e auquel se reduit le groupe $[p_1, q_1, r_1]$ par rapport au module n, les substitutions du sous-groupe g_j se reduiront à celles de substitutions du groupe G_e qui vérifient la congruence $d \equiv Eb$. Nous sommes donc conduits à chercher l'ordre du groupe de substitutions de G_e satisfaisant à la congruence $d \equiv Eb$. On voit que, grâce à la relation (16), cet ordre sera égal à la moitié du nombre de solutions en a et c de la congruence

$$a^2p_1q_1r_1 + c^2p_1q_2r_2 \equiv 1 \pmod n \tag{17}$$

dans le corps $\Omega_k(\theta)$ multiplié par n^k.

1) Si -1 est *résidu* dans le corps $\Omega_k(\theta)$ les produits q_1r_1, q_2r_2 seront simultanément résidus; le nombre de solutions de la congruence (17) est $n^k - 1$;

2) si -1 est *non-résidu* dans le corps $\Omega_k(\theta)$ l'un de produits q_1r_1, q_2r_2 est résidu l'autre non-résidu; mais alors le nombre de solutions de la congruence (17) est aussi $n^k - 1$.

L'ordre du groupe de substitutions $[a, b, c, d]$ satisfaisant $\pmod n$ à la congruence $d \equiv Eb$ est $n^k(n^k - 1):2$. Nous obtenons le théorème suivant:

Si le polygone fondamental du groupe discontinu $[p_1, q_1, r_1]$ défini dans le corps $\Omega_k(\theta)$ de degré k ayant la base minimale $(1, \theta \dots \theta^{k-1})$ a un nombre fini de sommets et l'équation $F(\theta) = 0$ définissant le corps $\Omega_k(\theta)$ est irréductible suivant le module n, alors l'équation algébrique à laquelle satisfait la fonction $f(z)$ appartenant au groupe $[p_1, q_1, r_1]$ transformée à l'aide d'une substitution $V = [K, o, L, o]$ de déterminant $K^2q_1r_1 + L^2q_2r_2 = n$ est de degré $n^k + 1$.

Sur les équations différentielles dans le plan projectif.

Par

S. K. Zaremba (Cracovie).

(Travail exécuté au séminaire du Prof. W. Wilkosz).

§ 1. Le présent travail a pour but d'étendre au *plan projectif*, en nous plaçant au point de vue des quantités *réelles*, les théorèmes fondamentaux sur les transformations de contact ainsi que sur l'existence des intégrales des équations différentielles du premier ordre. En introduisant partout les coordonnées projectives, nous ferons apparaître la loi de *dualité géométrique*. Ainsi p. ex. il se trouvera que faire passer une intégrale d'une équation par un point donné et déterminer une solution tangente à une droite donnée, sont deux problèmes se correspondant selon le principe de dualité. Ces problèmes sont donc parfaitement analogues et sont pour nous analytiquement identiques.

On sait que les points singuliers ne sont pas des invariants au point de vue des transformations de contact. Au contraire la notion d'*élément singulier*, que nous allons introduire, se trouvera être invariante par rapport à ces transformations. Par conséquent, c'est seulement cette notion qui, à notre point de vue, correspondra à une propriété intrinsèque d'une équation.

Dans cet ordre d'idées, nous étudierons la disposition des intégrales dans le voisinage du lieu des points singuliers d'une équation différentielle du premier ordre. Nous retrouverons d'une façon plus directe les résultats trouvés par MM. G. Darboux et E. Picard dans le cas d'une équation analytique et étendus par MM. S. Zaremba et E. Cartan [1]) au cas où l'équation, sans être analytique, ne satisfait qu'à des conditions très générales de régularité.

Sans chercher à réduire les conditions de régularité au minimum, nous considèrerons en général des fonctions de la classe c^1 [2]). Les équations différentielles de cette classe seront transformées par des transformations de contact de la classe c^1 en équations jouissant de la même propriété. Nous obtiendrons ainsi un *champ fonctionnel* d'une grande simplicité.

§ 2. Nous entendrons par *élément linéaire* le système formé par un point et une droite passant par ce point. Nous le désignerons par trois coordonnées homogènes du point,

$$x_1 : x_2 : x_3$$

et trois coordonnées homogènes de la droite

$$u_1 : u_2 : u_3 .$$

liées par la relation

$$(1) \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Nous considèrerons les courbes comme variétés d'éléments linéaires à un paramètre, dont les différentielles satisfont à la condition

$$(2) \qquad u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3 = 0$$

qui exprime que la droite $(u_1 : u_2 : u_3)$ est tangente au chemin décrit par le point $(x_1 : x_2 : x_3)$. Nous supposerons toujours que les x_i et les u_i puissent être représentés comme fonctions de la classe c^1 d'un certain paramètre. En différentiant la relation (1), on a

$$(1\text{ a}) \qquad u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3 + x_1 du_1 + x_2 du_2 + x_3 du_3 = 0.$$

ce qui prouve que la condition (2) est équivalente à la suivante,

$$(3) \qquad x_1 du_1 + x_2 du_2 + x_3 du_3 = 0,$$

---

[1]) Voir: G. Darboux, Bulletin des sciences mathématiques, 1873; E. Picard, Traité d'analyse, t. III; S. Zaremba, Les fonctions réelles non analytiques et les solutions singulières de équations différentielles du premier ordre, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, t. I, 1922, ainsi que le mémoire de M. E. Cartan sous le même titre loc. cit., t. II, 1923.

[2]) C'est-à-dire admettant des dérivées partielles du premier ordre continues.

corrélative à la condition (2) et exprimant que le lieu des points $(x_1 : x_2 : x_3)$ est l'enveloppe de la famille de droites $(u_1 : u_2 : u_3)$.

Les équations (1) et (2) permettent de reconstituer l'équation tangentielle d'une courbe quand on possède son équation ponctuelle; en effet, si la matrice

$$(4) \qquad \left\| \begin{matrix} x_1 \,, & x_1 \,, & x_3 \\ dx_1 \,, & dx_2 \,, & dx_{33} \end{matrix} \right\|$$

est d'ordre 2,

$$(5) \quad u_1 = \rho \begin{vmatrix} x_2 \,, & x_3 \\ dx_2 \,, & dx_3 \end{vmatrix}, \quad u_2 = \rho \begin{vmatrix} x_3 \,, & x_1 \\ dx_3 \,, & dx_1 \end{vmatrix}, \quad u_3 = \rho \begin{vmatrix} x_1 \,, & x_2 \\ dx_1 \,, & dx_2 \end{vmatrix},$$

ρ étant un facteur arbitraire mais non nul. Les points d'une courbe où la matrice (4) est d'ordre 1 (elle ne peut pas être d'ordre 0) seront dits singuliers.

Inversement, les équations (1) et (3) permettent de reconstituer l'équation ponctuelle d'une courbe quand son équation tangentielle est donnée. En effet, on a les relations

$$(6) \quad x_1 = \sigma \begin{vmatrix} u_2 \,, & u_3 \\ du_2 \,, & du^3 \end{vmatrix}; \quad x_2 = \sigma \begin{vmatrix} u_3 \,, & u_1 \\ du_3 \,, & du_1 \end{vmatrix}; \quad x_3 = \sigma \begin{vmatrix} u_1 \,, & u_2 \\ du_1 \,, & du_2 \end{vmatrix}$$

analogues aux relations (5) (σ étant un facteur arbitraire mais non nul) et valables à condition que la matrice

$$(7) \qquad \left\| \begin{matrix} u_1 \,, & u_2 \,, & u_3 \\ du_1 \,, & du_2 \,, & du_3 \end{matrix} \right\|$$

soit d'ordre 2. Les droites pour lesquelles ceci n'a pas lieu seront dites singulières.

§ 3. Nous donnerons le nom de transformation de contact à toute transformation qui change les courbes en courbes, c'est-à-dire en variétés d'éléments satisfaisant à la condition (2). Une telle transformation est définie par des équations de la forme:

$$(8) \quad \begin{cases} \bar{x}_i = X_i(x_1, x_1 . x_3;\ u_1, u, u_3), & (i = 1, 2, 3) \\ \bar{u}_i = U_i(x_1 . x_2, x_3;\ u_1, u_2, u_3). & (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

Nous admettrons que les fonctions X_i et U_i:

1° sont de la classe c^1;

2° qu'elles sont homogènes d'un degré n par rapport aux variables x_i et d'un degré m par rapport aux variables u_i avec

$$(9) \qquad m, n \neq 0;$$

3° qu'elles établissent une relation biunivoque entre un domaine de l'espace des éléments linéaires

$$(x_1 : x_2 : x_3;\ u_1 : u_2 : u_3)$$

et un domaine de l'espace des éléments linéaires

$$(\bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3;\ \bar{u}_1 : \bar{u}_2 : \bar{u}_3).$$

Cette dernière condition pourrait cependant être un peu restreinte, car elle contient l'identité

$$(10) \qquad U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3 = 0$$

pour les valeurs des variables indépendantes satisfaisant à la condition (1); or nous verrons que cette identité résulte des conditions différentielles que nous aurons à imposer aux fonctions en question.

L'inégalité (9) n'est point nécessaire et nous verrons comment on peut procéder au cas où elle n'est pas satisfaite; nous l'admettons provisoirement, car elle influe sur la façon d'effectuer les calculs.

Pour que la transformation (8) soit une transformation de contact, il faut et il suffit, d'après la définition que nous venons de donner, que la relation (2) entraîne la suivante:

$$(11) \qquad U_1dX_1 + U_2dX_2 + U_3dX_3 = 0$$

ou, plus explicitement,

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{3} U_i \left\{ \sum_{k=1}^{3} \frac{dX_i}{dx_k} dx_k + \sum_{k=1}^{3} \frac{dX_i}{du_k} du_k \right\} = 0.$$

Cette condition équivaut à l'existence de deux fonctions,

$$\lambda(x_1, x_2, x_3;\ u_1, u_2, u_3) \text{ et } \mu(x_1, x_2, x_3;\ u_1, u_2, u_3),$$

satisfaisant identiquement aux relations

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda(x_1, x_2, x_3;\ u_1, u_2, u_3)u_k + \sum_{i=1}^{3} U_i \frac{dX_i}{dx_k} \equiv 0 \qquad (k = 1, 2, 3). \\ &\mu(x_1, x_2, x_3;\ u_1, u_2, u_3)x_k + \sum_{i=1}^{3} U_i \frac{dX_i}{dx_k} \equiv 0 \qquad (k = 1, 2, 3), \end{aligned} \right.$$

Les mêmes conditions peuvent être exprimées sans l'aide des fonctions auxiliaires λ et μ. En effet, elles signifient simplement que les quantités

$$\sum_{i=1}^{3} U_i \frac{d X_i}{d x_1}, \quad \sum_{i=1}^{3} U_i \frac{d X_i}{d x_2}, \quad \sum_{i=1}^{3} U_i \frac{d X_i}{d x_3}$$

doivent être proportionnelles aux variables

$$u_1, \; u_2, \; u_3$$

tandis que les quantités

$$\sum_{i=1}^{3} U_i \frac{d X_i}{d u_1}; \quad \sum_{i=1}^{3} U_i \frac{d X_i}{d u_2}, \quad \sum_{i=1}^{3} U_i \frac{d X_i}{d u_3}$$

doivent l'être aux variables

$$x_1, \; x_2, \; x_3 .$$

Pour voir comment la relation (10) découle des conditions (13), il n'y a qu'à envisager l'identité

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{x_k}{n} \frac{d X_i}{d x_k} \equiv X_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{14}$$

qui résulte de la condition 2° (d'homogénéité). En effet, si nous multiplions les trois premières des équations (13) respectivement par

$$\frac{x_1}{n}, \; \frac{x_2}{n}, \; \frac{x_3}{n}$$

en les aditionnant membre à membre tout en tenant compte de la relation (1), nous obtiendrons, en vertu de l'identité (14), la relation (10). Naturellement, en procédant selon le principe de dualité géométrique, nous pourrions déduire la même relation (10) des trois dernières équations (13), en vertu de l'identité

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{u_k}{m} \frac{d X_i}{d u_k} \equiv X_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{15}$$

corrélative à l'identité (14).

Les équations (13) contiennent les dérivées partielles des fonctions $X_1 . X_2, X_3$, mais sont linéaires et homogènes au sens algébrique par rapport aux fonctions U_1, U_2, U_3 ainsi qu'aux fonctions auxiliaires λ et μ. Ceci permet immédiatement d'éliminer des équations (13) les fonctions $U_1, U_2 . U_3, \lambda, \mu$. En effet, la condition de compatibilité est que la matrice

$$
(16) \qquad \left\| \begin{array}{ccccc}
u_1, & 0, & \dfrac{dX_1}{dx_1}, & \dfrac{dX_2}{dx_1}, & \dfrac{dX_3}{dx_1} \\
u_2, & 0, & \dfrac{dX_1}{dx_2}, & \dfrac{dX_2}{dx_2}, & \dfrac{dX_3}{dx_2} \\
u_3, & 0, & \dfrac{dX_1}{dx_3}, & \dfrac{dX_2}{dx_3}, & \dfrac{dX_3}{dx_3} \\
0_1, & x_1, & \dfrac{dX_1}{du_1}, & \dfrac{dX_2}{du_1}, & \dfrac{dX_3}{du_1} \\
0, & x_2, & \dfrac{dX_1}{du_2}, & \dfrac{dX_2}{du_2}, & \dfrac{dX_3}{du_2} \\
0, & x_3, & \dfrac{dX_1}{du_3}, & \dfrac{dX_2}{du_3}, & \dfrac{dX_3}{du_3}
\end{array} \right\|
$$

soit d'ordre plus petit que 5, c'est-à-dire que les équations (13) se réduisent à 4 au plus d'entre elles. Cette condition cependant peut être exprimée, dans le voisinage de chaque élément déterminé, au moyen d'une seule équation, car, grâce aux identités (14) et (15) ainsi qu'à la relation (1), il existe entre les lignes de la matrice (16) une relation linéaire et homogène ayant pour coefficients

$$\frac{x_1}{n}, \quad \frac{x_2}{n}, \quad \frac{x_3}{n}, \quad -\frac{u_1}{m}, \quad -\frac{u_2}{m}. \quad -\frac{u_3}{m}$$

§. 4. Au cas où les X_i satisfont à la condition que nous venons d'établir, la question se pose de savoir, si leurs valeurs définissent les rapports mutuels des U_i sans ambiguité. Au cas, où les conditions préliminaires du § 3. sont satisfaites, la réponse est affirmative. En effet, supposons deux systèmes de valeurs des fonctions U_i, satisfaisant aux équations (13). Chacun de ces deux systèmes de valeurs satisfera donc aux deux équations linéaires et homogènes (10) et (11), quelles que soient les valeurs des différentielles des variables indépendantes satisfaisant aux relations (2) et (3). Or, vu la troisième condition préliminaire du § 3., on peut choisir ces différentielles, tout en satisfaisant aux équations (2) et (3), de façon que la matrice du système des équations (10) et (11) soit d'ordre 2, car au cas contraire la différentielle du point est nulle Il s'en suit que les deux systèmes de valeurs des U_i doivent être proportionnels, c. q. f. d.

Considérons maintenant une transformation de contact définie au moyen des X_i seuls, satisfaisant à la condition de compatibilité des équations (13) et appartenant à la classe c^1. Dans ce cas, on pourra toujours choisir le facteur arbitraire des U_i de façon que ces fonctions soient continues, mais, en général, on ne pourra pas faire les U_i de la classe c^1. Dans tous les cas, il suffit que les X_i soient de la classe c^2 [1]), mais cette condition n'est pas nécessaire.

Jusqu'à présent, nous avons fait jouer le même rôle aux deux groupes de variables indépendantes, mais non aux deux groupes de fonctions: X_i et U_i. Ceci avait lieu à cause du manque de symétrie de l'équation (11). Cependant, en vertu de l'équation (10) qui peut être différentiée, l'équation (11) est équivalente à la relation corrélative

$$X_1 dU_1 + X_2 dU_2 + X_3 dU_3 = 0,$$

qui permet d'appliquer le principe de dualité géométrique à tous les résultats obtenus, en échangeant les rôles des deux groupes de fonctions. En particulier, nous voyons que l'on peut définir une transformation de contact au moyen des fonctions U_i seules. Pour que les X_i, calculés au moyen des U_i, puissent être choisis de la classe c^1, il suffit que les U_i soient de la classe c^2, mais cette condition n'est pas nécessaire. L'identité des conditions de régularité à imposer aux deux groupes de fonctions apparaît ici bien mieux qu'au cas où on emploie les coordonnées cartésiennes.

§ 5. Substituons maintenant, à la condition $m, n \neq 0$ du § 3.

$$m, n = 0.$$

Alors, les équations (13) se réduisent toujours à 4 au plus d'entre elles, car, grâce aux identités

$$\sum_{k=1}^{3} x_k \frac{dX_i}{dx_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^{3} U_k \frac{dX_i}{du_k} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

---

[1]) C'est-à-dire, admettent des dérivées partielles du second ordre.

ainsi qu'à la relation (1), il existe entre les lignes de la matrice (16) deux relations linéaires et homogènes distinctes. Les équations (13) sont donc toujours compatibles. Par contre, elles n'entraînent plus l'équation (10) qui constitue, par suite, une condition supplémentaire. Pour que la transformation (8) soit une transformation de contact, il faut donc et il suffit que l'équation (10) soit compatible avec le groupe (13), ce qui constitue de nouveau une seule condition.

Dans certains cas, il y a lieu aussi de considérer des fonctions homogènes de degré nul par rapport à un groupe de variables et non nul par rapport à l'autre. Dans ce cas, comme au cas, considéré au § 3., il subsiste une seule relation homogène et linéaire identique entre les lignes du déterminant (16). La compatibilité des équations (13) donne donc lieu à une condition, tandis que l'identité (10) résulte de ces équations.

Ce dernier cas peut se présenter en particulier quand les rapports des différents X_i dépendent seulement de l'un des deux groupes de variables indépendantes, p. ex. des x_i. Dans ce cas, en effet, il est le plus simple de faire les X_i complètement indépendants des u_i. Nous avons donc une transformation ponctuelle. On supposera, naturellement,

$$\frac{D(X_1, X_2, X_3)}{D(x_1 . x_2, x_3)} \neq 0$$

et on déterminera les rapports des U_i d'après les équations (13) qui sont compatibles car les trois dernières disparaissent.

On peut appliquer à tout ce que nous venons de dire le principe de dualité en échangeant les rôles des deux groupes de fonctions ainsi que des deux groupes de variables indépendantes A côté des équations ponctuelles, définies par des équations de la forme

$$(17) \qquad \bar{x}_i = X_i(x_1, x_2, x_2),$$

on peut donc considérer des transformations des trois types suivants:

$$(18) \qquad \bar{x}_i = X_i(u_1, u_2, u_3),$$

$$(19) \qquad \bar{u}_i = U_i(x_1, x_2, x_3),$$

$$(20) \qquad \bar{u}_i = U_i(u_1, u_2, u_3).$$

§ 6. Il résulte directement de la définition des transformations de contact que le produit de deux d'entre elles est encore une transformation de contact. On peut aussi le vérifier par le calcul. Nous allons maintenant montrer que la transformation inverse d'une transformation de contact est aussi une transformation de contact. A cet effet, nous supposons les conditions du § 3. vérifiées. Dans ce cas, le raisonnement fait pour montrer que la relation (10) résulte des conditions (13) et (1) peut être renversé et, en supposant les relations (10) et (13) vérifiées, nous obtenons la relation (1) à moins que

$$\lambda = \mu = 0.$$

Ceci est cependant impossible. En effet, on a toujours

$$\lambda \neq \mu,$$

car au cas contraire, vu les équations (13), la relation (1 a) entraînerait la relation (11), ce qui n'est pas compatible avec la troisième des conditions du § 3. D'ailleurs, en vertu des conditions (13) la relation (10) différentiée donne une relation équivalente à la suivante

$$\lambda[u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3] + \mu[x_1 du_1 + x_2 du_2 + x_3 du_3] = 0$$

qui, avec l'identité (1 a), vu l'inégalité que nous venons de démontrer, donne (2) et (3), c. q. f. d.

Comme d'ailleurs le produit de deux transformations de la classe c^1 est manifestement une transformation de la même classe, nous voyons que les transformations de contact de la classe c^1 dans le plan projectif forment un *groupe.*

De ce que nous avons dit, il résulte que l'on pourrait aussi considérer les équations (8) comme représentant une transformation de coordonnées. En admettant toutes les transformations correspondant au cas où les X_i et U_i satisfont à la condition différentielle des transformations de contact, nous obtenons une classe plus générale de coordonnées des éléments linéaires du plan projectif. Ces nouvelles coordonnées sont liées par l'ancienne condition (1) et les courbes satisfont toujours à la même condition (2).

§ 7. Pour élucider les généralités précédentes, nous traiterons brièvement quelques exemples de transformations de contact. L'une des plus simples et des plus souvent employées sous différentes formes est la transformation par polaires réciproques. Soit

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} x_i x_k = 0, \\ &\sum_{i,k=1}^{3} A_{ik} u_i u_k = 0, \end{aligned}\right.$$

avec

$$a_{ik} = a_{ki} \text{ et } A_{ik} = A_{ki}$$

les équations respectivement ponctuelle et tangentielle d'une conique quelconque non dégénérée. Comme on sait, la transformation correspondant à cette courbe est déterminée par les équations

$$\text{(21)} \qquad \left\{\begin{aligned} \bar{x}_i &= A_{i1} u_1 + A_{i2} u_2 + A_{i3} u_3 \qquad (i = 1, 2, 3), \\ \bar{u}_i &= a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 \qquad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}\right.$$

On vérifie aisément que ces équations vérifient les conditions (13) avec

$$\lambda = 0, \ \mu = -\Delta,$$

où Δ désigne le discriminant de l'équation ponctuelle, en supposant que l'on ait pris pour coefficients de l'équation tangentielle les mineurs de Δ.

Il est à remarquer que la transformation (21) est à la fois du type (18) et (19). Nous allons faire voir que dans la transformation la plus générale de ce genre, les X_i et les U_i sont proportionnels à des fonctions linéaires. En effet, soit

$$\left\{\begin{aligned} \bar{x}_i &= X_i(u_1, u_2, u_3) \qquad (i = 1, 2, 3) \\ \bar{u}_i &= U_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}\right.$$

une transformation de contact, satisfaisant d'ailleurs aux conditions du § 3. Dans le deuxième groupe d'équations (13) on a nécessairement

$$\mu(x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3) \neq 0,$$

car au cas contraire, ces équations ainsi simplifiées entraîneraient la relation

$$\text{(22)} \qquad \frac{D(X_1, X_2, X_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} = 0,$$

incompatible avec la troisième condition du § 3. Cela étant, posons

$$
(23)\quad \begin{aligned} & U_i(x_1, x_2, x_3) = \\ & = \mu(x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3) \cdot \overline{U}_i(x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3) \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}
$$

Le deuxième groupe des équations (13) devient

$$
x_k + \sum_{i=1}^{3} \overline{U}_i \frac{dX_i}{du_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3).
$$

En différentiant deux fois ces dernières équations, il vient

$$
\sum_{i=1}^{3} \frac{d^2 \overline{U}_i}{dx_m dx_n} \cdot \frac{dX_i}{du_k} = 0 \qquad (k, m, n = 1, 2, 3),
$$

ce qui prouve, l'égalité (22) étant exclue, que les fonctions $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \overline{U}_3$ sont linéaires par rapport à x_1, x_2, x_3. Les $\overline{U}_i$ étant linéaires par rapport aux x_i et les U_i ne dépendant pas des u_i, il résulte des relations (23) que les U_i sont proportionnels à des fonctions linéaires des variables x_1, x_2, x_3. On calculera ensuite les X_i et on trouvera, à un facteur arbitraire près, des fonctions linéaires des u_i, c. q. f. d. De même on trouvera que la transformation projective est la transformation la plus générale de la forme (17) et (20) à la fois.

Certaines transformations de contact, quoique métriques, s'expriment plus simplement au moyen des coordonnées projectives. Ainsi la transformation polaire est définie par les relations

$$
(\mathrm{F})\quad \left|\begin{aligned} \overline{x}_1 &= -u_1 u_3, \\ \overline{x}_2 &= -u_2 u_3, \\ \overline{x}_3 &= u_1^2 + u_2^2. \end{aligned}\right.
$$

L'analogie est frappante avec l'inversion:

$$
(\mathrm{R})\quad \left|\begin{aligned} \overline{x}_1 &= x_1 x_2, \\ \overline{x}_2 &= x_2 x_3, \\ \overline{x}_3 &= x_1^2 + x_2^2; \end{aligned}\right.
$$

cette analogie fait apercevoir que si l'on envisage encore la transformation

$$(\mathrm{P}) \qquad \left| \begin{array}{lll} \bar{x}_1 = u_1, & \bar{x}_2 = u_2, & \bar{x}_3 = -u_3, \\ \bar{u}_1 = x_1, & \bar{u}_2 = x_1, & \bar{u}_3 = -x_3, \end{array} \right.$$

qui est la transformation par polaires réciproques relative à la conique

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

on retrouve immédiatement la relation connue

$$F = P \, . \, R$$ [1]).

§ 8. Exprimée en coordonnées projectives, une *équation différentielle* prend la forme

$$(24) \qquad f(x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3) = 0,$$

la fonction f étant homogène par rapport à chacun des deux systèmes de variables. Nous considèrerons comme intégrales d'une telle équation les courbes (au sens du § 2) composées d'éléments satisfaisant à l'équation (24).

Pour rechercher la solution d'une telle équation, de même qu'on le fait dans le cas classique, nous tâcherons de la résoudre par rapport à un des deux systèmes de variables, en supposant dans tout ce qui suit que la fonction f est de la classe c^1 dans un certain domaine. Si un élément de ce domaine satisfait à l'équation (24) et si pour cet élément la matrice

$$(25) \qquad \left\| \begin{array}{ccc} x_1, & x_2, & x_3 \\ \dfrac{df}{du_1}, & \dfrac{df}{du_2}, & \dfrac{df}{du_3} \end{array} \right\|$$

est d'ordre 2, le système formé par l'équation (21) et l'identité (1) est équivalent, d'après la théorie des fonctions implicites, à un système de la forme

$$(26) \qquad \left| \begin{array}{l} u_1 = \rho f_1(x_1, x_2, x_3), \\ u_2 = \rho f_2(x_1, x_2, x_3), \\ u_3 = \rho f_3(x_1, x_2, x_3), \end{array} \right.$$

les trois nouvelles fonctions étant homogènes du même degré, le facteur ρ étant arbitraire.

---

[1]) Voir: *Sophus Lie*, Geometrie der Berührungstransformationen, dargestellt von *S. Lie* und *G. Scheffers*, p. 27—29.

Nous appellerons point régulier tout point admettant une solution en u_1, u_2, u_3, du système d'équations (1) et (24), telle que la matrice (25) correspondante soit d'ordre 2; si un point admettait plusieurs solutions pour lesquelles cette matrice serait d'ordres différents, nous parlerions de singularités par rapport à une solution déterminée. On peut donc donner la forme (26) à toute équation (24) au voisinage d'un point régulier.

Parmi les équations (26), grâce à la relation (1), l'une d'elles résulte toujours des deux autres; si p. ex. $x_3 \neq 0$, la troisième est une conséquence des deux premières. Les relations (5) nous permettent d'en éliminer u_1, u_2, u_3 en les remplaçant par des combinaisons des différentielles dx_1, dx_2, dx_3. Finalement, en éliminant le facteur ρ, nous obtenons une seule équation

$$f_1\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right) d\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + f_2\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right) d\left(\frac{x_2}{x_3}\right) = 0. \tag{27}$$

C'est une équation différentielle de la forme habituelle et on vérifie facilement que les deux coefficients ne peuvent pas s'annuler à la fois dans le voisinage du point considéré, satisfaisant à l'inégalité $x_3 \neq 0$.

Le théorème classique d'existence s'appliquant au voisinage du point considéré, nous avons d'abord une intégrale de la forme

$$\frac{x_1}{x_3} = \phi_1(t), \quad \frac{x_2}{x_3} = \phi_2(t),$$

ces deux fonctions étant de la classe c^2. Soit $\phi(t)$ une fonction arbitraire de classe c^2 du même paramètre, non nulle dans l'intervalle considéré et $\psi(t)$ une fonction analogue mais de classe c^1. Nous obtenons alors l'expression suivante de l'élément de l'intégrale, exprimé en coordonnées projectives:

$$\tag{28} \left|\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(t) \cdot \phi(t) \\ x_2 &= \phi_2(t) \cdot \phi(t) \\ x_3 &= \phi(t) \\ u_1 &= -\phi'_2(t) \cdot \psi(t) \\ u_2 &= \phi'_1(t) \cdot \psi(t) \\ u_3 &= \{\phi_1(t)\phi'_2(t) - \phi_2(t)\phi'_1(t)\} \cdot \psi(t) \end{aligned}\right.$$

On remarque que l'intégrale est de la classe c^2 au point de vue ponctuel, mais de la classe c^1 au point de vue tangentiel. Il faut donc la considérer comme appartenant à la classe c^1.

Nous avons par suite le théorème suivant: par tout point régulier d'une équation, il passe une courbe intégrale de classe c^1. On constate immédiatement la continuité locale de l'intégrale par rapport aux coordonnées du point initial.

En transformant les considérations précédentes par le principe de dualité, nous regarderons comme régulière par rapport à l'équation (24), toute droite relativement à laquelle les équations (1) et (24) admettent une solution, la matrice

$$\text{(29)} \qquad \left\| \begin{matrix} u_1\,, & u_2\,, & u_3 \\ \dfrac{df}{dx_1}, & \dfrac{df}{dx_2}, & \dfrac{df}{dx_3} \end{matrix} \right\|$$

correspondante étant d'ordre 2. Nous donnerons alors dans le voisinage d'une droite régulière à l'équation (25) la forme suivante:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \bar{\rho}\, \bar{f}(u_1, u_2, u_3), \\ x_2 &= \bar{\rho}\, \bar{\bar{f}}(u_1, u_2, u_3), \\ x_3 &= \bar{\rho}\, \bar{\bar{\bar{f}}}(u_1, u_2, u_3), \end{aligned} \right.$$

$\bar{\rho}$ étant un facteur arbitraire et nous trouverons qu'il existe une intégrale de l'équation (24) tangente à toute droite régulière donnée à l'avance. Cette intégrale est de classe c^1, mais son équation tangentielle est susceptible d'être présentée au moyen de fonctions de la classe c^2; d'ailleurs, l'intégrale est localement continue par rapport à la tangente initiale.

§ 9. Nous nous placerons actuellement au point de vue de la géométrie des éléments linéaires, se rapportant à l'espace-ensemble des éléments linéaires de l'espace projectif (pour le moment à 2 dimensions) et engendrée par le groupe des transformations de contact de classe c^1. Les notions d'élément linéaire et de courbe (au sens du § 2.) ainsi que celle d'équation différentielle de classe c^1 sont des notions appartenant à cette géométrie. Par contre les notions de point et de droite en général, ainsi que celle de point singulier ou de droite singulière d'une équation différentielle n'y appartiennent pas. Nous remplacerons ces deux dernières notions par une nouvelle notion invariante par rapport aux transformations de contact, à savoir celle d'*élément singulier*, en considérant comme singulier par rapport à l'équation (24) tout élément vérifiant cette équation, mais tel qu'aucune des matrices (25) et (29) ne soit d'ordre 2. On remarque que cette condition est équivalente à celle que la relation

$$\frac{df}{dx_1}dx_1 + \frac{df}{dx_2}dx_2 + \frac{df}{dx_3}dx_3 + \frac{df}{du_1}du_1 + \tag{30}$$
$$+ \frac{df}{du_2}du_2 + \frac{df}{du_3}du_3 = 0$$

soit une conséquence des relations (2) et (3) ou, autrement dit, qu'en partant de l'élément en question suivant une courbe arbitraire, on ait identiquement

$$df = 0,$$

ce qui prouve bien que la notion considérée correspond à une propriété intrinsèque de l'élément en question. Au contraire, tout élément vérifiant l'équation (24) et tel en outre que l'une au moins des matrices (25) et (29) soit d'ordre 2, s'appellera *élément régulier* de l'équation considérée.

Nous sommes maintenant en état de formuler le théorème fondamental d'existence comme il suit: *Par un élément régulier d'une équation différentielle de la classe c^1 il passe une intégrale et une seule de cette équation.* Cette intégrale est de la classe c^1, mais (à moins qu'on ait à faire à un point singulier ou à une droite singulière) on peut choisir le paramètre de façon que, comme fonctions de ce paramètre, soit les x_i, soit les u_i soient de la classe c^2. En effet, on n'a qu'à appliquer, selon le cas, l'un des théorèmes d'existence démontrés au § 8. De même, en vertu des théorèmes trouvés au § 8., nous pouvons affirmer la *continuité locale* de l'intégrale par rapport à l'élément initial.

§ 10. Le théorème d'existence précédent permet de retrouver très simplement le théorème établi par MM. S. Zaremba et E. Cartan[1]), d'après lequel le lieu des points singuliers d'une équation différentielle constitue en *général* le lieu des points de rebroussement des intégrales.

---

[1]) Voir la note au § 1.

On se rend compte d'abord que les éléments linéaires appartenant à l'équation considérée, qui correspondent aux points singuliers sont *en général* des éléments réguliers. Il passe par un tel élément une seule intégrale, contrairement à ce qui aurait lieu au cas où une intégrale singulière y passerait.

Remarquons d'ailleurs que les notions du § 9 ne dépendent pas du système de coordonnées adopté. Comme la question envisagée est de nature locale et la loi de dualité n'intervient pas, il est avantageux de se servir de coordonnées cartésiennes. Soit donc $f(x, y, p)$ une fonction de la classe c^2 et considérons l'équation

$$f(x, y, p) = 0. \tag{31}$$

La condition de singularité d'un élément devient:

$$\frac{df}{dp} = 0, \quad \frac{df}{dx} + p\frac{df}{dy} = 0,$$

Soit maintenant un point singulier, correspondant à un élément régulier. On a donc

$$\frac{df}{dp} = 0, \quad \frac{df}{dx} + p\frac{df}{dy} \neq 0. \tag{32}$$

Par un tel élément il passe une intégrale et une seule de l'équation (31). Si l'on différentie cette équation en tenant compte de la relation précédente, il vient

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0,$$

ce qui, vu la relation

$$dy - pdx = 0$$

entre les différentielles, donne

$$dx = dy = 0. \tag{33}$$

En vertu du théorème d'existence du § 9, on peut choisir le paramètre de façon à avoir

$$dp \neq 0. \tag{34}$$

En différentiant deux fois l'équation (31), tout en tenant compte des relations (32) et (33), on a

$$(35) \qquad \frac{d^2f}{dp^2}dp^2 + \frac{df}{dx}d^2x + \frac{df}{dy}d^2y = 0.$$

Soit

$$\frac{d^2f}{dp^2} \neq 0.$$

Les relations (34) et (35) prouvent alors que l'une au moins des différentielles secondes d^2x et d^2y est non nulle. On a donc au point singulier considéré

$$dx = 0, \ dy = 0, \ dp \neq 0, \ |d^2x| + |d^2y| \neq 0;$$

or ceci caractérise un point de rebroussement, ce que l'on vérifie immédiatement en développant les expressions de x et y comme fonctions du paramètre selon la formule de Taylor arrêtée au 3-ième terme.

§ 11. Le théorème d'existence du § 9 ne nous donne qu'une intégrale locale. Supposons cependant que l'équation différentielle considérée, toujours de classe c^1, soit définie pour tout l'espace des éléments linéaires du plan projectif et n'admette aucun élément singulier. Dans ce cas l'intégrale est susceptible d'être prolongée indéfiniment. Considérons tous les prolongements possibles. Comme dans le plan euclidien, on démontre, en vertu de l'unicité locale de l'intégrale, que les divers prolongements ne peuvent pas donner lieu à bifurcations. En réunissant tous les prolongements possibles, on trouve *l'intégrale saturée.* Il est clair que si deux éléments appartiennent à une même intégrale, les intégrales saturées correspondantes sont identiques Deux intégrales saturées sont donc identiques ou disjointes.

Une intégrale saturée ne peut pas avoir d'élément double, mais (au point de vue des éléments linéaires) elle peut être une courbe fermée ou non. Dans ce dernier cas, supposons-la donnée sous forme paramétrique. L'intervalle correspondant au paramètre est forcément ouvert, car au cas contraire on pourrait prolonger l'intégrale au-delà des extrémités. Cependant, l'espace des éléments linéaires du plan projectif étant compact, à chaque extrémité de cet intervalle correspond un ensemble de condensation. Ces ensembles de condensation sont, d'après des théorèmes connus *d'analysis situs*, des continus.

Il est facile de voir que ces continus de condensation sont formés par des intégrales saturées. En effet, soit (C) un de ces continus et e un élément arbitraire de ce continu. Cet élément vérifie par continuité l'équation différentielle. Il passe donc par lui une intégrale saturée, soit (I). Grâce à la continuité locale des intégrales, les éléments de (I) dans un certain voisinage de e sont des éléments de condensation de l'intégrale primitive; ils appartiennent donc à (C). Considérons la partie commune des ensembles (I) et (C); c'est un ensemble formé relativement à (I). Cependant cet ensemble ne peut pas avoir de frontière relative sur (I), car on pourrait appliquer aux éléments-frontière le même raisonnement que nous venons de faire pour e. Il s'en suit que l'ensemble (I) tout entier est contenu dans (C), ce qui démontre la propriété annoncée.

Il semble assez probable que les ensembles de condensation considérés soient toujours formés par une seule courbe intégrale sous forme de circuit. On obtiendrait ainsi un théorème trés général sur l'existence des cycles-limite, mais nous n'avons pas démontré ce théorème.

§ 12. Voici quelques exemples d'équations différentielles définies pour tout l'espace des éléments linéaires et n'admettant pas d'éléments singuliers:

Ex. I. Soit d'abord l'équation

$$x_1 u_2 - x_2 u_1 = 0. \tag{36}$$

Elle possède un seul point singulier et une seule droite singulière:

$$x_1 = x_2 = 0;\ x_3 \neq 0 \text{ et } u_1 = u_2 = 0;\ u_3 \neq 0,$$

tels que tout élément composé avec ce point ou avec cette droite satisfait à l'équation. Cette symétrie ne doit pas nous étonner, puisque la transformation par polaires réciproques relative à la conique

$$x_1^2 + x_1^2 + x_3^2 = 0$$

transforme l'équation considérée en elle-même et permute les deux singularités. On trouve facilement l'intégrale suivante,

$$\lambda(x_1^2 + x_2^2) + \mu x_3^2 = 0, \tag{37}$$

λ et μ étant deux paramètres dont le rapport représente la constante d'intégration. Toutes les intégrales sont des courbes fermées.

Ex. II. Il suffit cependant de modifier légèrement l'équation (36) pour changer profondément la disposition des courbes intégrales. En effet, soient r_1 et r_2 deux nombres vérifiant les inégalités

$$0 < r_1 < r_2$$

et soit $f(x_1, x_2, x_3)$ la fonction définie par la formule

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - r_1 x_3)^2 (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - r_2 x_3)^2}{x_3^2 \sqrt{x_1^2 + r_2^2}}$$

lorsque

$$r_1 x_3 \leqq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqq r_2 x_3$$

et nulle pour les autres systèmes de valeurs des variables indépendantes

L'équation

$$x_1 u_2 - x_2 u_1 - f(x_1, x_2, x_3) u_3 = 0$$

admet les intégrales définies par la formule (37), mais seulement pour les valeurs des paramètres satisfaisant à l'inégalité:

$$\text{(38)} \qquad \lambda r_1^2 + \mu \geqslant 0 \text{ on } \lambda r_2^2 + \mu \leqslant 0.$$

Les autres intégrales sont données par la formule

$$\text{(39)} \qquad x_1 = r \cos \theta, \; x_2 = r \sin \theta, \; x_3 = 1$$

avec

$$\theta = \frac{2}{(r_2 - r_1)^3} \log \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r}\right) - \frac{1}{(r_2 - r_1)^2} \left\{ \frac{1}{r - r_2} + \frac{1}{r - r_1} \right\} + c,$$

c étant la constante d'intégration et r étant le paramètre qui varie entre r_1 et r_2. Nous ne citons pas les équations tangentielles des intégrales, qui sont un peu plus compliquées, mais faciles à obtenir quand on possède les équations ponctuelles.

Les intégrales (39) sont visiblement des espèces de spirales, contenues entre les intégrales de la forme (37) qui ont pour paramètres respectivement

$$1, -r_1 \text{ et } 1, -r_2,$$

et admettent ces deux intégrales comme cycles-limite. L'équation considérée admet donc des intégrales de chaque espèce en nombre infini, mais il y a deux cycles-limite communs à toutes les courbes intégrales ouvertes.

Ex. III. Considérons l'équation:

$$u_1 x_2 - u_2 x_1 + u_3 \frac{x_3^2(x_1^2 + x_2^2)}{x_3^3 + (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Nous avons donc tout de suite comme intégrales le point $(0:0:1)$ et la droite $x_3 = 0$. Ce sont les cycles-limite communs à toutes les autres intégrales qui s'expriment par la formule (39) avec

$$\theta = r - \frac{1}{2 r^2} + c,$$

c étant la constante d'intégration et le paramètre r variant dans l'intervalle ouvert $(0, +\infty)$.

Ex. IV. L'équation

(40) $$u_1 x_2 x_3 - u_2 x_1 x_3 + u_3 (x_1^2 + x_2^2) = 0$$

a encore le même point singulier que l'équation (36). Ce point singulier fournit une intégrale qui est la seule intégrale fermée de l'équation. On prévoit donc que ce sera le cycle-limite commun aux deux extrémités de toutes les autres intégrales. En effet, celles-ci sont données par les formules

$$\left| \begin{aligned} x_1 &= \cos\left\{c - \frac{t^2}{2}\right\} \\ x_2 &= \sin\left\{c - \frac{t^2}{2}\right\} \\ x_3 &= t \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} u_1 &= \sin\left\{c - \frac{t^2}{2}\right\} + t^2 \cos\left\{c - \frac{t^2}{2}\right\} \\ u_2 &= -\cos\left\{c - \frac{t^2}{2}\right\} + t^2 \sin\left\{c - \frac{t^2}{2}\right\} \\ u_3 &= -t, \end{aligned} \right.$$

c étant la constante d'intégration et le paramètre t variant de $-\infty$ à $+\infty$. Les courbes intégrales sont des espèces de spirales qui commencent au voisinage du point $(0:0:1)$, le contournent une infinité de fois, coupent la droite à l'infini et de nouveau tendent asymptotiquement vers le même point en le contournant une infinité de fois.

Ex. V. Considérons enfin la transformée de l'équation (40) selon le principe de dualité, c'est-à-dire l'équation suivante:

$$x_1 u_2 u_3 - x_2 u_1 u_3 + x_3 (u_1^2 + u_2^2) = 0,$$

dont les intégrales se déduisent selon le même principe des intégrales de l'équation primitive. Leur disposition n'est donc pas changée au point de vue de la géométrie des éléments linéaires. Actuellement, c'est la droite à l'infini qui constitue le cycle-limite. Chacune des autres intégrales est une espèce de spirale. Ces spirales, sans jamais pénétrer à l' intérieur du cercle

$$x_1^2 + x_2^2 - 2\, x_3^2 = 0,$$

atteignent chacune ce cercle pour $t = 1$ et pour $t = -1$ et admettent les points correspondants pour points de rebroussement. Chacune des spirales considérées coupe la droite à l'infini pour $t = 0$ et la rejoint asymptotiquement aux deux extrémités en tournant une infinité de fois autour du cercle dont nous venons de parler.

Les familles de fonctions entières normales par rapport à un type de croissance.

Par

M. Paul Flamant (Strasbourg).

Introduction.

Dans l'étude des transmutations linéaires des fonctions d'une variable complexe [1]), j'ai attaché à chaque fonction considérée un nombre positif appelé norme qui peut être défini de différentes manières. Tantôt, quand les fonctions considérées sont holomorphes dans un domaine, je prends pour norme le module maximum dans ce domaine; tantôt, quand il s'agit de fonctions entières, je prends la borne supérieure du rapport du module maximum dans le cercle de rayon r à une fonction donnée $t(r)$ appelée type de croissance. J'ai été ainsi amené à constater une analogie assez profonde entre les ensembles suivants de fonctions

holomorphes	entières
également bornées dans un domaine fermé	dont le module maximum est inférieur à une fonction déterminée de r
continues dans un domaine fermé et holomorphes à l'intérieur	appartenant à un type de croissance $t(r)$
holomorphes dans un domaine ouvert	appartenant au type $t(sr)$ quel que soit $s > 1$

---

[1]) P. Flamant, La notion de continuité dans l'étude des transmutations distributives des fonctions d'une variable complexe et ses applications (Bul. des Sc. math., 2e série, t. 52, Paris 1928, 1e partie) ch. II, p. 41—48 et 79—84.

C'est cette analogie qui m'a conduit à construire la présente théorie des familles normales de fonctions entières, en partie calquée sur la théorie des familles normales de fonctions holomorphes. Seul, le critère relatif aux valeurs exceptionnelles présente une grande différence avec celui de la théorie classique.

J'ai donné deux définitions de la convergence uniforme vers ∞. La première (par répulsion) rappelle la définition classique pour les fonctions holomorphes. J'avais formulé la seconde (par entraînement) a priori, parce qu'il me paraissait désirable qu'une suite aussi simple et régulière que $\phi(x)+n$ qui tend vers ∞ avec n fût regardée comme convergeant uniformément; cette définition s'est ensuite révélée utile pour le critère relatif aux fonctions dérivées.

J'ai ajouté en note une étude de cette convergence par entraînement, qui n'est pas nécessaire pour l'intelligence du mémoire proprement dit.

Les résultats les plus saillants du présent travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences de Paris dans sa séance du 26 mars 1928 [1]).

I. Définitions.

1. *Type de croissance et Norme.* — Appelons *type de croissance* une fonction positive d'une variable positive r, croissant constamment et indéfiniment, plus vite que toute puissance de r.

Soit $\phi(x)$ une fonction uniforme de la variable complexe x, au sens le plus général, c'est-à-dire un nombre complexe associé à chaque valeur de x sans aucune condition de continuité ni de monogénéité. Nous dirons que $\phi(x)$ *appartient au type de croissance* $t(r)$ si, en posant $|x|=r$, le quotient $|\phi(x)|:t(r)$ est borné pour toutes les valeurs de x. La borne supérieure de ce quotient sera appelée *la norme de* $\phi(x)$ *par rapport* $t(r)$ et notée $\|\phi(x)\|$ ou $\|\phi\|$. De là résulte l'équivalence des deux inégalités

$$\|\phi\| \leqslant m$$

et

$$|\phi(x)| \leqslant mt(r)$$

quel que soit x.

---

[1]) P. Flamant, Sur une notion analogue pour les fonctions entières à celle de famille normale pour les fonctions holomorphes (Comptes rendus de l'Acad. des Sc., t. 186, Paris 1928) p. 836—838.

Quelles que soient les fonctions ϕ et ψ et la constante a, on a l'inégalité et l'égalité

$$(1) \qquad \|\phi+\psi\| \leqslant \|\phi\| + \|\psi\| \qquad \|a\phi\| = |a| \cdot \|\phi\|$$

La notion de norme, qui ne sera appliquée en fait qu'à des fonctions entières, peut être utilisée avant que le caractère de fonction entière ne soit établi, comme on va le voir immédiatement.

Les polynomes en x appartiennent à tous les types de croissance d'après la rapidité de croissance qui est imposée à ces derniers par définition.

2. *Convergence uniforme par rapport à $t(r)$. — Convergence vers une valeur finie.* — La suite des fonctions $\phi_n(x)$ converge vers $\phi(x)$ uniformément par rapport à $t(r)$ si les différences $\phi_n(x) - \phi(x)$ appartiennent à $t(r)$ et si leurs normes tendent vers 0.

L'inégalité

$$|\phi_n(x) - \phi(x)| \leqslant \|\phi_n - \phi\| \, t(r)$$

montre que, dans tout domaine fini, $\phi_n(x)$ tend uniformément (au sens classique) vers $\phi(x)$; par suite, si les $\phi_n(x)$ sont des fonctions entières, $\phi(x)$ est aussi une fonction entière, et si les $\phi_n(x)$ appartiennent à $t(r)$, il en est de même de $\phi(x)$. Ce sera toujours le cas dans les exemples qui suivront. Grâce à l'inégalité (1), on voit que $\|\phi_n\|$ tend vers $\|\phi\|$; en particulier, les $\|\phi_n\|$ sont bornées.

A un domaine fini donné correspond, à cause de la convergence uniforme classique, un rang à partir duquel $\phi_n(x)$ a, dans ce domaine, autant de zéros que $\phi(x)$; par suite, si les fonctions $\phi_n(x)$ ne s'annulent pas, la fonction limite $\phi(x)$ n'a pas de zéros ou bien est identiquement nulle. L'existence d'une valeur exceptionnelle a commune à toutes les $\phi_n(x)$ entraîne une propriété analogue.

Supposons maintenant que chaque $\phi_n(x)$ ait une valeur exceptionnelle a_n; dans le cas simple où ces a_n tendent vers une limite finie a, les fonctions $\phi_n(x) - a_n$ tendent vers $\phi(x) - a$ uniformément par rapport à $t(r)$, car d'après les formules (1):

$$\|(\phi_n - a_n) - (\phi - a)\| = \|(\phi_n - \phi) + (a - a_n)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\phi_n - \phi\| + \|a - a_n\| = \|\phi_n - \phi\| + |a - a_n| \, . \, \|1\|;$$

donc $\phi(x)$ ne prend pas la valeur a ou se réduit à la constante a.

Dans le cas où les a_n ont plus d'une valeur d'accumulation finie, soient a' et a'' deux valeurs d'accumulation finies et distinctes; la considération d'une suite partielle tendant vers a' montre que $\phi(x)$ admet la valeur exceptionnelle a' ou se réduit à la constante a'; la considération d'une suite partielle tendant vers a'' montre que $\phi(x)$ admet la valeur exceptionnelle a'' ou se réduit à la constante a''; de là résulte que si $\phi(x)$ ne coïncide avec aucune des deux constantes a' et a'', elle admet ces deux nombres comme valeurs exceptionnelles finies et se réduit par suite à une autre constante.

3. *Convergence vers ∞ par répulsion.* — Soit une suite de fonctions entières $\phi_n(x)$ *ayant chacune une valeur exceptionnelle finie* a_n, les fonctions

$$\theta_n(x) = \frac{1}{\phi_n(x) - a_n}$$

sont des fonctions entières ayant la valeur exceptionnelle 0; si chacune des deux suites ayant pour terme général $\|\theta_n\|$ et $|a_n|.\|\theta_n\|$ tend vers 0 pour n infini, $\phi_n(x)$ tend vers ∞ avec n pour toute valeur fixe de x. En effet, on a

$$|\theta_n(x)| \leqslant \|\theta_n\| t(r)$$

et par suite

$$|\phi_n(x) - a_n| \geqslant \frac{1}{\|\theta_n\| t(r)}.$$

L'inégalité

$$|\phi_n(x)| \geqslant |\phi_n(x) - a_n| - |a_n|$$

entraîne a fortiori

$$|\phi_n(x)| \geqslant \frac{1}{\|\theta_n\| t(r)} - |a_n| = \frac{1 - |a_n|.\|\theta_n\| t(r)}{\|\theta_n\| t(r)}$$

qui justifie la conclusion annoncée. Nous dirons alors que $\phi_n(x)$ *tend vers ∞ par répulsion uniforme par rapport à $t(r)$.* On peut réunir les deux conditions en un seul énoncé en assujettissant le produit $(1 + |a_n|)\|\theta_n\|$ à tendre vers 0.

Exemple. — $\phi(x)$ étant une fonction entière ayant la valeur exceptionnelle 0, la suite

$$\phi_n(x) = m_n\phi(x) + p_n$$

tend vers ∞ par répulsion uniforme par rapport à tout type de croissance auquel appartient $1 : \phi(x)$ si m_n et $m_n : p_n$ croissent indéfiniment.

4. *Convergence vers ∞ par entraînement.* — Si à chaque fonction $\phi_n(x)$ d'une suite donnée, on peut associer un nombre b_n tendant vers ∞ avec n et tel que le quotient $\|\phi_n - b_n\| : |b_n|$ tende vers 0, $\phi_n(x)$ tend vers ∞ avec n pour toute valeur fixe de x. En effet, posons pour abréger l'écriture

$$\frac{\|\phi_n - b_n\|}{|b_n|} = q_n$$

ou

$$\|\phi_n - b_n\| = q_n |b_n|$$

d'où résulte

$$|\phi_n(x) - b_n| \leqslant q_n |b_n| t(r).$$

Nous avons d'autre part

$$|\phi_n(x)| \geqslant |b_n| - |\phi_n(x) - b_n|$$

et, a fortiori

$$|\phi_n(x)| \geqslant |b_n| - q_n |b_n| t(r) = |b_n| . [1 - q_n t(r)]$$

qui démontre le fait énoncé. Nous dirons dans ce cas que $\phi_n(x)$ *tend vers ∞ par entraînement uniforme par rapport à $t(r)$.*

Exemple. — $\phi(x)$ étant une fonction entière quelconque, la suite $\phi_n(x) = m_n \phi(x) + p_n$ tend vers ∞ par entraînement uniforme par rapport à tout type de croissance auquel appartient $\phi(x)$ si p_n et $p_n : m_n$ croissent indéfiniment.

5. *Famille normale par rapport à $t(r)$.* — Une famille de fonctions entières est normale par rapport au type de croissance $t(r)$ si:

1° toute fonction de la famille appartient à $t(sr)$ quel que soit $s > 1$;

2° de toute suite infinie de fonctions de la famille, on peut extraire une suite partielle tendant vers une fonction entière ou vers ∞ et dont la convergence soit, pour tout $s > 1$, uniforme par rapport à $t(sr)$ à l'un des trois sens précédents.

Pour que cette seconde condition soit réalisée, il suffit que, une suite de fonctions de la famille et un nombre $s > 1$ étant donnés, on puisse extraire une suite partielle uniformément convergente par rapport à $t(sr)$. En effet, soit $(\mathcal{S})$ une suite donnée de fonctions de la famille; prenons une suite de nombres décroissants et tendant vers 1: $s_1 > s_2 > \ldots > s_n > \ldots$, la connaissance de s_1 permet d'extraire de $(\mathcal{S})$ une suite partielle $(\mathcal{S}_1)$ dont la convergence soit uniforme par rapport à $t(s_1 r)$; la connaissance de s_2 permet d'extraire de $(\mathcal{S}_1)$ une suite partielle $(\mathcal{S}_2)$ uniformément convergente par rapport à $t(s_2 r)$, et ainsi de suite. Le procédé diagonal[1]) permet de former une suite $(\mathcal{S}')$ qui soit extraite de $(\mathcal{S}_n)$ quel que soit n; sa convergence est alors uniforme par rapport à $t(s_n r)$; comme tout nombre $s > 1$ est supérieur à quelqu'un des s_n, la convergence est aussi uniforme par rapport à $t(sr)$. A priori, une difficulté pourrait se présenter lorsque $(\mathcal{S}_1)$, et par suite toutes les $(\mathcal{S}_n)$, tendent vers ∞; la convergence pourrait être uniforme tantôt par répulsion et tantôt par entraînement; mais il suffit de remarquer que l'un au moins de ces modes de convergence se présente une infinité de fois et de se restreindre aux s_n et $(\mathcal{S}_n)$ correspondants.

On pourrait songer à employer comme type de croissance une fonction de $r_a = |x - a|$; nous allons voir que la généralisation ainsi obtenue serait purement apparente. En effet soit un nombre $s > 1$, insérons un nombre s' entre s et 1:

$$1 < s' < s,$$

l'inégalité

$$r_a \geqslant r - |a|$$

entraîne a fortiori

$$sr_a \geqslant s'r$$

dès que

$$s(r - |a|) \geqslant s'r$$

c'est-à-dire

$$r \geqslant \frac{s|a|}{s - s'}.$$

D'autre part, à l'intérieur du cercle

$$r < \frac{s|a|}{s - s'},$$

le quotient $t(s'r) : t(sr_a)$ est une fonction continue de la position du point x et le dénominateur ne s'annule pas, il atteint donc sa borne supérieure qui ne peut être que finie. Désignons par m cette borne (qui est déterminée par a, s et s'), nous avons établi les inégalités

---

[1]) Cf. p. ex. P. Montel, Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications, Paris, 1927, p. 15—17.

$$t(s'r) \leqslant t(sr_a) \qquad t(s'r) \leqslant mt(sr_a)$$

respectivement à l'extérieur et à l'intérieur du cercle, la seconde est valable partout car m est nécessairement plus grand que 1; il en résulte que toute fonction $\phi(x)$ appartenant à $t(s'r)$ appartient à $t(sr_a)$ et que

$$\|\phi\|_{t(sr_a)} \leqslant m\|\phi\|_{t(s'r)} \tag{2}$$

m étant indépendant de la fonction ϕ, la convergence uniforme par rapport à $t(s'r)$ entraîne la convergence uniforme par rapport à $t(sr_a)$. Il y a identité entre famille normale par rapport à $t(r)$ et famille normale par rapport à $t(r_a)$.

II. Familles normales sans limite infinie.

6. *Définitions. — Famille bornée par rapport à $t(r)$.* Nous désignerons ainsi une famille de fonctions entières appartenant à $t(r)$, dont les normes par rapport à $t(r)$ soient bornées supérieurement.

Famille presque bornée par rapport à $t(r)$. — Nous nommerons ainsi une famille bornée par rapport à $t(sr)$ quel que soit $s > 1$. Une famille bornée est a fortiori presque bornée.

Par suite de l'inégalité (2), une famille bornée par rapport à $t(s'r)$ est bornée par rapport à $t(sr_a)$. Le fait pour une famille d'être presque bornée soit par rapport à $t(r)$, soit par rapport à $t(r_a)$ est le même.

7. Théorème. — *Pour qu'une famille de fonctions entières soit normale par rapport à $t(r)$ sans admettre ∞ parmi ses fonctions limites, il faut et il suffit qu'elle soit presque bornée par rapport à $t(r)$.*

Soit une famille presque bornée par rapport à $t(r)$ et s un nombre plus grand que 1. Insérons un nombre s' entre 1 et s; soit m un nombre supérieur à toutes les normes par rapport à $t(s'r)$. Le calcul des coefficients de Mac-Laurin par l'intégrale de Cauchy donne les inégalités

$$|a_n| \leqslant \frac{mt(s'r)}{r^n} = ms'^n \cdot \frac{t(s'r)}{(s'r)^n}$$

Remplaçons la dernière fraction par sa borne inférieure qui est l'inverse de $u_n = \|x^n\|$ prise par rappport à $t(r)$; nous avons

$$a_n \leqslant \frac{ms'^n}{u_n}; \tag{3}$$

Pour chaque valeur de n, les coefficients a_n de toutes les fonctions de la famille sont bornés en module. Une suite infinie d'entre eux admet donc toujours au moins une valeur d'accumulation satisfaisant à la même inégalité, valeur qui est la limite d'une suite extraite de la première.

Soit $\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^n, \ldots$ une suite de fonctions de la famille. La suite de leurs termes constants $a_0^0, a_0^1, \ldots, a_0^n, \ldots$ admet une suite partielle que nous noterons $a_0^{n_0}, a_0^{n'_0}, a_0^{n''_0}, \ldots$ tendant vers b_0. Considérons la suite des coefficients de x des fonctions correspondantes: $a_1^{n_0}, a_1^{n'_0}, a_1^{n''_0}, \ldots$; elle admet une suite partielle que nous noterons $a_1^{n_0}, a_1^{n_1}, a_1^{n'_1}, a_1^{n''_1}, \ldots$, tendant vers b_1. La suite des coefficients de x^2 correspondants $a_2^{n_0}, a_2^{n_1}, a_2^{n'_1}, a_2^{n''_1}, \ldots$, admet une suite partielle $a_2^{n_0}, a_2^{n_1}, a_2^{n_2}, a_2^{n'_2}, \ldots$, tendant vers b_2, et ainsi de suite. Le procédé diagonal permet de former une suite d'indices $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ telle que pour chaque terme x^k, les coefficients $a_k^{n_0}, a_k^{n_1}, a_k^{n_2}, \ldots, a_k^{n_p}, \ldots$ tendent vers b_k. Posons alors

$$\psi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_k x^k + \ldots$$

Ecrivons pour évaluer la norme relative à $t(sr)$:

$$\phi^{n_p}(x) - \psi(x) = (a_0^{n_p} - b_0) + (a_1^{n_p} - b_1)x + \ldots + (a_h^{n_p} - b_h)x^h +$$
$$+ (a_{h+1}^{n_p} x^{h+1} + a_{h+2}^{n_p} x^{h+2} + \ldots) - (b_{h+1} x^{h+1} + b_{h+2} x^{h+2} + \ldots).$$

Pour chacune des dernières parenthèses, nous avons

$$\| a_{h+1}^{n_p} x^{h+1} + a_{h+2}^{n_p} x^{h+2} + \ldots \| \leqslant | a_{h+1}^{n_p} | \cdot \| x^{h+1} \| + | a_{h+2}^{n_p} | \cdot \| x^{h+2} \| + \ldots$$

En tenant compte des inégalités (3) et des égalités (4) $\| x^k \| = \dfrac{u_k}{s^k}$ établies ailleurs [1]), nous obtenons

$$| a_{h+1}^{n_p} x^{h+1} + a_{h+2}^{n_p} x^{h+2} + \ldots | \leqslant m \left(\frac{s'}{s}\right)^{h+1} + m \left(\frac{s'}{s}\right)^{h+2} + \ldots =$$

$$= \frac{m\left(\dfrac{s'}{s}\right)^{h+1}}{1 - \dfrac{s'}{s}}$$

et

[1]) P. Flamant, loc. cit. note de la page 278, p. 82.

$$\| b_{h+1}x^{h+1} + b_{h+2}x^{h+2} + \dots \| \leqslant \frac{m\left(\frac{s'}{s}\right)^{h+1}}{1-\frac{s'}{s}}$$

s et s' une fois fixés (s' détermine m), h peut être pris assez grand pour que ces quantités soient arbitrairement petites; h ainsi fixé, considérons la première partie

$$\|(a_0^{n_p} - b_0) + (a_1^{n_p} - b_1)x + \dots + (a_h^{n_p} - b_h)x^h\| \leqslant$$
$$\leqslant |a_0^{n_p} - b_0| . \|1\| + |a_1^{n_p} - b_1| . \|x\| + \dots + |a_h^{n_p} - b_h| . \|x^h\|$$

ou d'après (4)

$$|a_0^{n_p} - b_0| u_0 + |a_1^{n_p} - b_1| \frac{u_1}{s} + \dots + |a_h^{n_p} - b_h| \frac{u_h}{s^h}$$

somme d'un nombre fixe de termes dont chacun tend vers 0 pour p infini d'après la formation de la suite n_p; somme qui, pour p suffisamment grand, devient donc arbitrairement petite. Il est ainsi établi que, par rapport à $t(sr)$, $\|\phi^{n_p}(x) - \psi(x)\|$ tend vers 0 pour p infini; la famille est donc bien normale d'après la remarque faite au n° 5, après la définition.

Nous allons maintenant établir la proposition contraire. Dire d'une famille qu'elle n'est pas presque bornée par rapport à $t(r)$, c'est dire que, pour au moins une valeur $s > 1$, elle n'est pas bornée par rapport à $t(sr)$. Dès lors, de l'ensemble des normes par rapport à $t(sr)$, nous pouvons extraire une suite de nombres croissant constamment et indéfiniment; les fonctions auxquelles ces normes appartiennent forment une suite $\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n, \dots$ dont toute suite partielle possède le même caractère (normes croissant constamment et indéfiniment); donc aucune suite partielle ne peut tendre vers une limite finie (n° 2). Si la famille est normale, la suite en question ne peut avoir que ∞ pour limite.

8. *Pour qu'une famille normale n'admette pas ∞ parmi ses fonctions limites, il faut et il suffit que les valeurs numériques prises en un point par toutes les fonctions de la famille forment un ensemble borné.*

La condition est nécessaire, car si en un point les valeurs numériques ne sont pas bornées, on peut former une suite de valeurs tendant vers ∞, toute suite extraite des fonctions correspondantes tend en ce point vers ∞; si la famille est normale, une telle suite convergente a pour limite ∞.

La condition est suffisante, car si les valeurs numériques en un point sont bornées, toute suite convergente de fonctions de la famille, tendant en ce point vers un nombre fini, a pour limite une fonction entière.

9. *Famille des dérivées.* La famille des $\phi(x)$ étant presque bornée par rapport à $t(r)$, nous avons pour $s > 1$ l'inégalité

$$|\phi(x)| \leqslant m(s)\, t(sr).$$

Dans l'expression d'une dérivée par l'intégrale de Cauchy

$$\phi^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\phi(z)\, dz}{(z-x)^{n+1}}$$

prenons pour contour d'intégration un cercle de centre x et de rayon l; en posant $|x| = r$, nous avons sur ce cercle $|z| \leqslant r + l$. Nous pouvons alors écrire, en employant un nombre s' compris entre 1 et s

$$|\phi^{(n)}(x)| \leqslant \frac{n!\, m(s')\, t[s'(r+l)]}{l^n}.$$

Nous avons d'ailleurs

$$s'(r+l) \leqslant sr \quad \text{pour} \quad r \geqslant \frac{s' l}{s - s'}$$

et pour les valeurs plus petites de r, nous avons

$$s'(r+l) < \frac{ss' l}{s - s'}.$$

Nous avons donc, suivant le cas, l'une des inégalités

$$|\phi^{(n)}(x)| \leqslant \frac{n!\, m(s')\, t(sr)}{l^n} \qquad |\phi^{(n)}(x)| \leqslant \frac{n!\, m(s')\, t\left(\frac{ss' l}{s-s'}\right)}{l^n}$$

que nous remplacerons par une seule, grâce à la croissance de la fonction $t(r)$:

$$|\phi^{(n)}(x)| \leqslant \frac{n!\, m(s')\, t\left(\frac{ss' l}{s-s'}\right)}{l^n t(0)}\, t(sr) \qquad [1]$$

---

[1] Le choix le plus avantageux de l, étant donnés s et s', conduit à l'inégalité

$$|\phi^{(n)}(x)| \leqslant \frac{n!\, m(s')}{u_n t(0)} \left(\frac{ss'}{s-s'}\right)^n t(sr).$$

ce qui exprime que la famille des dérivées d'ordre n est bornée par rapport à $t(sr)$.

Si une famille de fonctions entières est presque bornée par rapport à $t(r)$, la famille des dérivées d'un même ordre est aussi presque bornée par rapport à $t(r)$.

D'après la même inégalité, la convergence uniforme par rapport à $t(sr)$ quel que soit $s > 1$ s'étend aux dérivées de même ordre.

Prenons maintenant une famille de fonctions dont les dérivées forment une famille presque bornée par rapport à $t(r)$ et dont les valeurs numériques en un point forment un ensemble borné. On peut supposer que ce point est l'origine, l'emploi des types de croissance $t(r)$ et $t(r_a)$ étant équivalent. Nos hypothèses se traduisent par les inégalités:

$$|\phi(0)| \leqslant m_0 \qquad |\phi'(x)| \leqslant m(s)\,t(sr)$$

valables pour toutes les fonctions de la famille. Il en résulte:

$$|\phi(x)| \leqslant m_0 + m(s)\int_0^r t(sr)\,dr$$

ou, par un changement de variable

$$|\phi(x)| \leqslant m_0 + \frac{m(s)}{s}\int_0^{sr} t(r)\,dr.$$

En désignant par $m_1(s)$ le plus grand des deux nombres m_0 et $m(s):s$, nous avons

$$|\phi(x)| \leqslant m_1(s)\left[1 + \int_0^{sr} t(r)\,dr\right].$$

La famille des $\phi(x)$ est donc presque bornée par rapport au type de croissance

$$t_1(r) = 1 + \int_0^r t(r)\,dr.$$

Ce résultat se généralise immédiatement en supposant la famille des dérivées n^{mes} presque bornée, et les valeurs numériques en un point des fonctions et des dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ bornées (le point peut varier avec l'ordre de dérivation).

La propriété subsiste en remplaçant partout presque bornée par bornée.

10. *Famille des différences finies.* — Posons

$$\Delta_h \phi(x) = \phi(x+h) - \phi(x) \quad \text{et} \quad \Delta_h^n = \Delta_h \Delta_h \ldots \Delta_h \ (n \text{ fois}).$$

J'ai établi [1]) pour une fonction $\phi(x)$ appartenant à un type de croissance $t(r)$ l'inégalité

$$|\Delta_h^n \phi(x)| \leqslant \|\phi\| \frac{n!\, h'^n \left(1 + \frac{nh'}{\pi l}\right) t(r + l + nh')}{l^n}$$

où $r = |x|$, $h' = |h|$, et l est un nombre positif arbitraire. ϕ étant prise arbitrairement dans une famille presque bornée par rapport à $t(r)$, prenons 2 nombres $s > s' > 1$, et utilisons le type de croissance $t(s'r)$, $\|\phi\| \leqslant m(s')$, d'où

$$|\Delta_h^n \phi(x)| \leqslant \frac{m(s')\, n!\, h'^n \left(1 + \frac{nh'}{\pi l}\right) t[s'(r + l + nh')]}{l^n}.$$

Comme précédemment,

$$s'(r + l + nh') \leqslant sr \quad \text{pour} \quad r \geqslant \frac{s'(l + nh')}{s - s'}$$

et

$$s'(r + l + nh') < \frac{ss'(l + nh')}{s - s'} \quad \text{pour} \quad r < \frac{s'(l + nh')}{s - s'}$$

de sorte que nous pouvons écrire, quel que soit r:

$$|\Delta_h^n \phi(x)| \leqslant \frac{m(s')\, n!\, h'^n \left(1 + \frac{nh'}{\pi l}\right) t\left[\frac{ss'(l + nh')}{s - s'}\right]}{l^n t(0)}\, t(sr)$$

Si nous imposons à h' une borne supérieure, l, s, et s' étant fixés, l'inégalité est du type

$$|\Delta_h^n \phi(x)| \leqslant k t(sr).$$

Les différences finies d'un même ordre, relatives à des accroissements h bornés en module, forment comme les fonctions elles-mêmes une famille presque bornée par rapport à $t(r)$.

---

[1]) P. Flamant, Le développement d'une transmutation linéaire par rapport à la différentiation finie (Rendiconti del Circ. mat. di Palermo, à paraître), ch. II, formule (2).

Pour la différence première, en mettant à part le facteur h du numérateur, nous avons

$$(5) \qquad |\Delta_h\phi(x)| \leqslant k_1 h' t(sr) \quad \text{pour} \quad |h'| \leqslant a$$

qui exprime l'*égale continuité* des fonctions $\phi(x)$. Cette égale continuité est uniforme, non pas au sens ordinaire, mais par rapport à $t(sr)$ quel que soit $s > 1$.

Réciproquement, supposons une famille de fonctions également continues par rapport à $t(r)$, en ce sens que, pour toute fonction de la famille, l'inégalité

$$|h| \leqslant a$$

suffise à entraîner

$$|\Delta_h\phi(x)| \leqslant bt(r)$$

La considération du quotient $\Delta_h\phi(x):h$ comme fonction de h holomorphe même pour $h=0$, montre que l'on a aussi

$$(6) \qquad |\Delta_h\phi(x)| \leqslant \frac{b}{a}|h|\,t(r)$$

qui est de forme analogue à (5). Si l'on suppose en outre que les valeurs numériques de toutes les fonctions de la famille en un point forment un ensemble borné, on peut en conclure que la famille est bornée par rapport à un certain type de croissance, soit en tirant de (6) une inégalité relative aux dérivées, soit par raisonnement direct en jalonnant la portion de droite $(0|x)$ par des points distants de a.

On aurait un résultat analogue pour des familles presque bornées, et une généralisation pour les différences n^{mes}.

III. Critères de familles normales.

11. *Critère relatif aux dérivées. — Etant donnée une famille de fonctions, si la famille des dérivées est presque bornée par rapport au type de croissance $t(r)$, la famille donnée est normale par rapport à*

$$t_1(r) = 1 + \int_0^r t(r)\,dr$$

En effet, soit une suite de fonctions de la famille; on peut d'abord en extraire une suite partielle formée des $\phi_n(x)$ dont les valeurs numériques à l'origine tendent vers une limite unique, finie ou infinie. Si cette limite est finie, la suite partielle cónstitue une famille presque bornée (n°9), donc normale; elle admet donc une suite partielle uniformément convergente. Si la limite est ∞, les fonctions $\phi_n(x)-\phi_n(0)$, qui ont les mêmes dérivées et s'annulent à l'origine, constituent une famille presque bornée; leurs normes $\|\phi_n(x)-\phi_n(0)\|$ prises par rapport à $t_1(sr), s>1$, sont bornées; comme les nombres $\phi_n(0)$ tendent vers ∞, les fonctions $\phi_n(x)$ tendent vers ∞ par entraînement uniforme par rapport à $t_1(sr)$ (n° 4)

12. *Lemmes relatifs au module des fonctions entières sans zéro.* Considéront une fonction entière sans zéro, prenant la valeur 1 pour $x=0$ et dont le module soit limité supérieurement par une fonction connue

$$|\phi(x)|\leqslant f(r) \tag{7}$$

Celle des fonctions[1]) log $\phi(x)$ qui s'annule avec x, satisfait à l'inégalité

$$\mathcal{R}\log\phi(x)=L\,|\phi(x)|\leqslant Lf(r),$$

d'où nous concluons[2])

$$|\log\phi(x)|\leqslant 2\,\frac{r+l}{l}\,Lf(r+l)$$

quel que soit le nombre positif l, ou en posant $l=kr$

$$|\log\phi(x)|\leqslant 2\left(1+\frac{1}{k}\right)Lf[(1+k)r]$$

Il en résulte en particulier

$$L\,|\phi(x)|=\mathcal{R}\log\phi(x)\geqslant -2\left(1+\frac{1}{k}\right)Lf[(1+k)r]$$

d'où

$$|\phi(x)|\geqslant\{f[(1+k)r]\}^{-2\left(+\frac{1}{k}\right)}$$

c'est-à-dire, en inversant

$$\left|\frac{1}{\phi(x)}\right|\leqslant\{f[(1+k)r]\}^{2\left(1+\frac{1}{k}\right)} \tag{8}$$

---

[1]) log désigne le logarithme d'un nombre complexe, L le logarithme réel d'un nombre positif, $\mathcal{R}$ signifie partie réelle.

[2]) Cf. p. ex. G. Valiron, Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable (Mémorial des Sc. math., fasc. 2, Paris 1925) formule (9), p. 4.

Considérons maintenant une fonction entière sans zéro appartenant au type de croissance $t(r)$

(9) $$|\theta(x)| \leqslant \|\theta\| t(r).$$

Lafonction $\theta(x):\theta(0)$ qui prend la valeur 1 à l'origine, satisfait à l'inégalité

$$\left|\frac{\theta(x)}{\theta(0)}\right| \leqslant \frac{\|\theta\| t(r)}{|\theta(0)|}$$

de la forme (7) d'où l'inégalité de la forme (8):

$$\left|\frac{\theta(0)}{\theta(x)}\right| \leqslant \left\{\frac{\|\theta\| t[(1+k)r]}{|\theta(0)|}\right\}^{2+\frac{2}{k}}$$

qui s'écrit encore

(10) $$\left|\frac{1}{\theta(x)}\right| \leqslant \frac{\|\theta\|^{2+\frac{2}{k}}}{|\theta(0)|^{3+\frac{2}{k}}} \{t[(1+k)r]\}^{2+\frac{2}{k}}$$

1° *Si la fonction entière sans zéro $\theta(x)$ appartient au type de croissance $t(r)$, la fonction $1:\theta(x)$ appartient au type de croissance*

$$t(k, r) = \{t[(1+k)r]\}^{2+\frac{2}{k}}.$$

Pour une famille de telles fonctions, nous aurons, moyennant les hypothèses

$$\|\theta\| \leqslant m \qquad |\theta(0)| \geqslant \frac{1}{p} > 0,$$

l'inégalité, applicable à toutes les fonctions de la famille

$$\left|\frac{1}{\theta(x)}\right| \leqslant m^{2+\frac{2}{k}} p^{3+\frac{2}{k}} t(k, r).$$

2° *Si une famille de fonctions entières sans zéro est bornée par rapport à $t(r)$, et si les valeurs numériques à l'origine (ou en un même point) sont bornées inférieurement en module, la famille des inverses arithmétiques est bornée par rapport à $t(k, r)$.*

En remplaçant r par sr, $s > 1$, et en supposant m fonction de s, on voit que l'énoncé subsiste en remplaçant *bornée* par *presque bornée*.

13. *Première propriété des familles normales. — Si une suite infinie de fonctions appartenant à une famille normale par rapport à $t(r)$, converge pour chaque valeur de x vers une limite finie, sa convergence*

est uniforme par rapport à $t(sr)$ *quel que soit* $s > 1$, et par suite la limite est une fonction entière appartenant à $t(sr)$.

Soient $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots,$ la suite en question et $\phi(x)$ la limite sur laquelle on ne suppose rien au point-de-vue monogénéité. Nier l'uniformité énoncée, c'est affirmer que pour au moins une valeur de $s > 1$, la suite des $\|\phi_n - \phi\|$ prises par rapport à $t(sr)$ ne tend pas vers 0, ou qu'une infinité de ces normes sont supérieures à un nombre positif fixe. La famille étant normale, la suite correspondante admet une suite partielle convergeant uniformément, et dont la limite ne peut être que $\phi(x)$, il y a donc contradiction.

14. *Critères relatifs aux valeurs exceptionnelles.* — Soit une famille de fonctions entières $\phi(x)$ ayant chacune une valeur exceptionnelle a; nous leur associons les fonctions

$$\theta(x) = \frac{1}{\phi(x) - a},$$

fontions entières sans zéros.

Si l'ensemble des valeurs exceptionnelles est borné, et si la famille des $\theta(x)$ *est presque bornée par rapport à un type de croissance* $t(r)$, *la famille des* $\phi(x)$ *est normale par rapport au type de croissance*

$$t(k, r) = \{t[(1+k)r]\}^{2+\frac{2}{k}} \qquad (k \text{ constante positive})$$

Tout d'abord, d'après le lemme (n° 12, 1°), chacune des fonctions $\phi(x) - a$ appartient à $t(k, sr)$, et par suite $\phi(x)$ également.

Etant donnée une suite de fonctions $\phi(x)$, on peut en extraire une suite partielle $\phi_n(x)$ dont les valeurs exceptionnelles a_n tendent vers une limite a. La suite des fonctions correspondantes $\theta_n(x)$ admet une suite partielle $\theta_{n_q}(x)$ uniformément convergente puisque la famille des $\theta(x)$ est presque bornée et par conséquent normale par rapport à $t(r)$, Les $\theta_{n_q}(x)$ admettant la valeur exceptionnelle 0, leur limite admet la même valeur exceptionnelle ou bien est la constante 0 (n° 2).

Envisageons d'abord ce dernier cas: $\|\theta_{n_q}\|$ prise par rapport à $t(sr)$ tend vers 0 pour q infini; $t(k, sr)$ étant plus rapidement croissante que $t(sr)$, il en est de même en prenant la norme par rapport à $t(k, sr)$; a_{n_q} tendant vers une limite finie, le produit $|a_{n_q}| \cdot \|\theta_{n_q}\|$ tend aussi vers 0; donc, par définition (n° 3), $\phi_{n_q}(x)$ tend vers ∞ par répulsion uniforme par rapport à $t(k, sr)$.

Examinons maintenant le cas où $\theta_{n_q}(x)$ tend vers une fonction entière sans zéro $\omega(x)$; pour chaque valeur de x,

$$\phi_{n_q}(x) = a_{n_q} + \frac{1}{\theta_{n_q}(x)}$$

tend vers

$$\psi(x) = a + \frac{1}{\omega(x)}.$$

Par rapport à n'importe quel type de croissance,

$$\|\phi_{n_q} - \psi\| \leqslant |a_{n_q} - a| \,.\, \|1\| + \left\| \frac{1}{\theta_{n_q}} - \frac{1}{\omega} \right\|.$$

Le premier terme tend vers 0 pour q infini; donc la convergence de $\phi_{n_q}(x)$ vers $\psi(x)$ est uniforme dès que celle de $1 : \theta_{n_q}(x)$ vers $1 : \omega(x)$ l'est. La famille des $\theta_{n_q}(x)$ est presque bornée par rapport à $t(r)$ d'après l'hypothèse générale faite sur les $\theta(x)$; d'autre part, $\theta_{n_q}(0)$ tendant vers $\omega(0)$ qui n'est pas nul, ces valeurs sont bornées inférieurement; d'après le lemme (n° 12, 2°), la famille des $1 : \theta_{n_q}(x)$ est presque bornée par rapport à $t(k, sr)$; et enfin, d'après le lemme (n° 13), la convergence de $1 : \theta_{n_q}(x)$ vers $1 : \omega(x)$ est uniforme par rapport à $t(k, sr)$; le théorème est donc établi.

15. Ce théorème peut être généralisé de manière à englober des cas où l'ensemble des valeurs exceptionnelles n'est pas borné. D'une suite donnée de fonctions $\phi(x)$, on commence toujours par extraire une suite partielle dont les valeurs exceptionnelles tendent vers une limite; si cette limite est finie, ce qui précède s'applique; il reste à voir moyennant quelle hypothèse on pourra conclure dans le cas de la limite infinie, la seule conclusion simple pouvant être que $\phi_n(x)$ tend uniformément vers ∞.

D'après la définition (n° 3), $\phi_n(x)$ tend vers ∞ par répulsion uniforme par rapport à $t(sr)$ [et a fortiori par rapport à $t(k, sr)$] si $\|\theta_n\|$ et $|a_n| \,.\, \|\theta_n\|$ [normes relatives à $t(sr)$] tendent vers 0; comme a_n tend vers ∞, le second fait entraîne le premier. En désignant par $f(u)$ une fonction constamment et indéfiniment croissante de la variable positive u, il suffit de supposer l'existence d'une borne supérieure pour les produits $|a_n| f(|a_n|) \|\theta_n\|$, ce qui conduit à l'énoncé suivant:

Si les familles $\theta(x)$ et $af(|a|)\theta(x)$ sont presque bornées par rapport à $t(r)$, la famille $\phi(x)$ est normale par rapport à $t(k, r)$.

La convergence vers ∞ lorsqu'elle se présente alors lieu *par répulsion*.

Reportons nous maintenant au n° 12. La famille des $\theta(x)$ étant presque bornée par rapport à $t(r)$, en prenant les normes des fonctions par rapport à $t(sr)$, l'inégalité (10) se transforme en

$$|\phi(x)-a| \leqslant [m(s)]^{2+\frac{2}{k}} |\phi(0)-a|^{3+\frac{2}{k}} t(k, sr)$$

En prenant les normes des $\phi(x)-a$ par rapport à $t(k, sr)$, nous avons

$$\frac{\|\phi(x)-a\|}{|a|} \leqslant [m(s)]^{2+\frac{2}{k}} \frac{|\phi(0)-a|^{3+\frac{2}{k}}}{|a|}.$$

La suite des $\phi_n(x)$ dont les valeurs exceptionnelles a_n tendent vers ∞ converge vers ∞ par entraînement uniforme si le second membre relatif à ces fonctions tend vers 0. Il suffit que, dès que $|a|$ dépasse une certaine grandeur, on ait l'inégalité

(11) $$|\phi(0)-a| \leqslant g(|a|)$$

$g(u)$ étant une fonction croissant moins vite que toute puissance. L'hypothèse

(12) $$|\phi(0)-a| \leqslant |a|^q$$

permettrait de comparer le second membre à $|a|^{3q+\frac{2q}{k}-1}$, qui tend vers 0 si l'exposant est négatif, c'est-à dire pour

(13) $$k > \frac{2q}{1-3q},$$

ce qui exige $q < \frac{1}{3}$.

Si la famille des $\theta(x)$ est presque bornée par rapport à $t(r)$ et si pour toute fonction dont la valeur exceptionnelle a dépasse en module un nombre fixe, l'inégalité (11) *a lieu, la famille des $\phi(x)$ est normale par rapport à $t(k, r)$. L'inégalité* (11) *étant remplacée par l'inégalité* (12), $q < \frac{1}{3}$, *la conclusion subsiste pour les valeurs de k satisfaisant à* (13).

IV. Propriétés des familles normales.

16. *Limite infinie.* — A la propriété énoncée au n° 8, on peut ajouter la suivante:

Si une suite de fonctions entières appartenant à une famille *normale se réduit en un point à une suite numérique tendant vers* ∞, *l en est de même en tout point du plan.*

En effet, si en un autre point du plan, la suite des valeurs numériques des fonctions admettait une valeur d'accumulation finie, on pourrait en extraire une suite partielle tendant vers cette valeur. On aurait donc une suite de fonctions tendant en un point vers ∞ et en un autre vers une limite finie, caractère subsistant pour toute suite partielle. Aucune d'entre elles ne pourrait converger ni vers une fonction entière, ni vers ∞; l'hypothèse est donc incompatible avec la définition d'une famille normale.

Dans le cas où toute suite admet une suite partielle tendant soit vers une fonction entière, soit vers ∞ per répulsion (p. ex. lorsque la famille est justiciable du critère du n° 14 ou du premier critère du n° 15); on peut ajouter que la suite considérée tend vers ∞ par répulsion uniforme par rapport à $t(sr)$ quel que soit $s > 1$. En effet, en prenant les normes par rapport à $t(sr)$, le produit $(1 + |a_n|)\|\theta_n\|$ tend vers 0 (n° 3); la démonstration par l'absurde est calquée sur celle du n° 13.

17. *Convergence en une infinité de points.* — Soit une suite de fonctions entières appartenant à une famille normale, et snpposons qu'en chacun des points de la suite $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, elle se réduise à une suite numérique convergente (au sens strict, c'est-à-dire avec limite finie). En un point quelconque autre que les précédents, la suite des valeurs numériques ne saurait admettre ∞ pour valeur d'accumulation (car une suite partielle tendrait vers ∞ en ce point et vers une valeur finie en x_1); elle convergera (nécessairemant vers une limite finie) si elle a une seule valeur d'accumulation. Imaginons un point x_0 où il y ait plusieurs valeurs d'accumulation, et soient a et b deux d'entre elles; nous pouvons extraire de la suite des valeurs numériques en x_0 deux suites partielles tendant respectivement vers a et b. Chacune des deux suites de fonctions correspondantes admet une suite partielle convergeant vers une fonction entière prenant la valeur a ou b en x_0 et les mêmes valeurs en chacun des points $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ La différence de ces deux fonctions entières appartient, comme chacune d'elles à $t(sr)$ quel que soit $s > 1$, s'annule en chacun des points de la suite x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$, et prend la valeur $a - b$ en x_0. Si le fait pour une fonction entière appartenant à $t(sr)$ de s'annuler aux points x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$ entraîne sa nullité identique, on peut en conclure que

$a = b$, c'est-à-dire que la suite est convergente en tout point du plan. Cette convergence est uniforme d'après le nº 13.

1er cas: *Si une suite de fonctions entières appartenant à une famille normale converge en chacun des points $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ayant un point d'accumulation à distance finie, elle converge en tout point* (théorème analogue à celui de MM. Vitali et Porter).

2e cas: Les points $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tendent vers ∞ lentement: le sens de ce mot se précise en se reportant à la formule de M. Jensen qui rattache la distribution des zéros d'une fonction entière à sa croissance. Soit $\phi(x)$ une fonction entière ne s'annulant pas à l'origine et $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, les modules rangés en croissant des zéros de cette fonction [1]); quels que soient r et n, on a l'inégalité [2])

$$\frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} \leqslant \frac{\max|\phi(x)| \text{ pour } |x| = r}{|\phi(0)|}.$$

Soit maintenant $\phi(x)$ une fonction entière ayant l'origine pour zéro d'ordre p; les zéros suivants, dont nous noterons les modules $r_{p+1}, r_{p+2}, \ldots$ sont ceux du quotient $\phi(x) : a_p x^p$ de la fonction par son premier terme effectif; la formule précédente, appliquée à ce quotient donne

$$\frac{r^{n-p}}{r_{p+1} r_{p+2} \ldots r_n} \leqslant \frac{\max|\phi(x)| \text{ pour } |x| = r}{|a_p| r^p}$$

ou

$$\frac{r^n}{r_{p+1}^{p+1} r_{p+2} \ldots r_n} \leqslant \frac{\max|\phi(x)| \text{ pour } |x| = r}{|a_p| r_{p+1}^p}.$$

Nous diminuerons le premier membre en remplaçant chaque facteur r_i par le plus grand r_n; et si $\phi(x)$ appartient à $t(r)$, nous augmenterons le second membre en remplaçant le numérateur par $\|\phi\| t(r)$; nous avons donc une inégalité de la forme

$$\left(\frac{r}{r_n}\right)^n \leqslant k' t(r)$$

(pourvu que n dépasse p dans le second cas). Cette inégalité s'écrit encore

---

[1]) Plusieurs r_n consécutifs sont égaux s'il y a un zéro multiple ou plusieurs zéros de même module.

[2]) Cf. p. ex. E. Borel, Leçons sur les fonctions entières, 2me édition Paris, p. 133.

$$r_n^n \geqslant k \frac{r^n}{t(r)}.$$

L'entier n étant fixé, nous choisirons r de façon à rendre maximum le second membre, ce qui donne, en posant

$$u_n = \text{borne sup.} \frac{r^n}{t(r)} = \| x^n \|$$

$$r_n^n \geqslant k u_n$$

et par suite

$$r_n u_n^{-\frac{1}{n}} \geqslant k^{\frac{1}{n}}.$$

Faisons croître n indéfiniment, le second membre tend vers 1; nous en concluons

$$\varliminf_{n \to \infty} r_n u_n^{-\frac{1}{n}} \geqslant 1. \tag{14}$$

En remplaçant $t(r)$ par $t(sr)$, u_n est remplacé par $u_n : s^n$, et l'inégalité (14) par

$$\varliminf_{n \to \infty} r_n u_n^{-\frac{1}{n}} \geqslant \frac{1}{s}.$$

Si $\phi(x)$, sans appartenir nécessairement à $t(r)$ appartient à $t(sr)$ quel que soit $s > 1$, la limite inférieure considérée est supérieure à tout nombre plus petit que 1, et l'inégalité (14) a encore lieu. Une suite de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ dont les modules satisfont à l'inégalité contraire

$$\varliminf_{n \to \infty} r_n u_n^{-\frac{1}{n}} < 1$$

ne peut donc être la suite des zéros d'une fonction entière appartenant à $t(sr)$ et non identiquement nulle. Nous pouvons donc formuler le théorème (analogue au théorème de M. Blaschke):

Si une suite de fonctions entières appartenant à une famille normale par rapport à $t(r)$ converge en chacun des points $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ satisfaisant à la condition

$$\varliminf_{n \to \infty} |x_n| \,.\, \| x^n \|^{-\frac{1}{n}} < 1,$$

elle converge en tout point du plan.

Note sur la convergence vers ∞ par entraînement.

Reprenons la définition donnée au nº 4. Les deux conditions que b_n croisse indéfiniment et que q_n tende vers 0, peuvent être réunies en un seul énoncé en imposant à

$$\frac{1}{|b_n|} + q_n = \frac{1 + \| \phi_n - b_n \|}{|b_n|}$$

de tendre vers 0.

La définition peut alors être transformée de la façon suivante. Etant donnée une fonction $\phi(x)$, à tout nombre $y \neq 0$ correspond une valeur du rapport

$$g(\phi; y) = \frac{1 + \| \phi - y \|}{|y|};$$

la borne inférieure de ces rapports lorsque y varie sera appelée *le caractère* de la fonction $\phi(x)$ et notée $\S\phi$. Ce caractère (comme la norme qui figure au numérateur de g) est relatif à un type de croissance déterminé. $\| \phi - y \|$ est une fonction continue de y, car les formules (1) donnent:

$$\| \phi - y \| - |\Delta y| \, . \, \| 1 \| \leqslant \| \phi - (y + \Delta y) \| \leqslant \| \phi - y \| + |\Delta y| \, . \, \| 1 \|.$$

Le rapport $g(\phi; y)$ est donc lui aussi une fonction continue de y. Pour étudier $g(\phi; y)$ lorsque y augmente indéfiniment, nous écrirons

$$|y| \, . \, \| 1 \| - \| \phi \| \leqslant \| \phi - y \| \leqslant |y| \, . \, \| 1 \| + \| \phi \|$$

d'où

$$\| 1 \| + \frac{1 - \| \phi \|}{|y|} \leqslant g(\phi; y) \leqslant \| 1 \| + \frac{1 + \| \phi \|}{|y|};$$

donc, quelle que soit la fonction ϕ, lorsque y tend vers ∞, $g(\phi; y)$ tend vers $\| 1 \|$. De plus, si $\| \phi \| \leqslant 1$, le premier membre est supérieur à $\| 1 \|$ et par conséquent $g(\phi; y)$ dépasse $\| 1 \|$ pour toute valeur finie de y.

Le caractère d'une fonction est toujours au plus égal à $\| 1 \|$, *et l'inégalité*

$$\| \phi \| \leqslant 1$$

entraîne

$$\S\phi = \| 1 \|.$$

Lorsque $\S\phi < \|1\|$, $g(\phi; y)$ ne peut se rapprocher de sa borne inférieure que pour des valeurs finies de y, et par suite de la continuité, cette borne est effectivement atteinte. Donc *si* $\S\phi < \|1\|$, *il existe au moins un nombre* b pour lequel

$$g(\phi; b) = \S\phi.$$

Etudions maintenant comment le caractère dépend la fonction ϕ; tout d'abord, par suite de l'inégalité (1),

$$\|\phi - y\| - \|\psi\| \leqslant \|(\phi + \psi) - y\| \leqslant \|\phi - y\| + \|\psi\|$$

d'où

$$g(\phi; y) - \frac{\|\psi\|}{|y|} \leqslant g(\phi + \psi; y) \leqslant g(\phi; y) + \frac{\|\psi\|}{|y|}. \tag{15}$$

Supposons d'abord

$$\S\phi < \|1\|;$$

il existe un nombre b pour lequel $g(\phi; b) = \S\phi$, et nous avons par suite

$$\S\phi - \frac{\|\psi\|}{|b|} \leqslant g(\phi + \psi; b) \leqslant \S\phi + \frac{\|\psi\|}{|b|}.$$

En imposant à la fonction additionnelle ψ la condition

$$\|\psi\| \leqslant |b| h,$$

nous aurons

$$\S\phi - h \leqslant g(\phi + \psi; b) \leqslant \S\phi + h.$$

et par suite

$$\S(\phi + \psi) \leqslant \S\phi + h.$$

Si nous avions $\S\phi = \|1\|$, nous aurions a priori l'inégalité plus serrée $\S(\phi + \psi) \leqslant \S\phi$.

Dans tous les cas, pour déterminer la borne inférieure de $g(\phi + \psi; y)$ il suffit d'envisager pour y les valeurs telles que

$$g(\phi + \psi; y) \leqslant \S\phi + h$$

valeurs satisfaisant a fortiori à

$$\frac{1}{|y|} \leqslant \S\phi + h.$$

Si nous tenons compte de cette inégalité dans (15), nous obtenons

$$g(\phi; y) - (\S\phi + h)\|\psi\| \leqslant g(\phi + \psi; y) \leqslant g(\phi; y) + (\S\phi + h)\|\psi\|$$

qui entraîne, pour les bornes inférieures

$$\S\phi - (\S\phi + h)\|\psi\| \leqslant \S(\phi + \psi) \leqslant \S\phi + (\S\phi + h)\|\psi\|.$$

Donc l'inégalité

$$\|\psi\| \leqslant \frac{h}{\S\phi + h}$$

entraîne la suivante

$$|\S(\phi + \psi) - \S\phi| \leqslant h.$$

Le caractère est donc une fonctionnelle continue de la fonction.

Pour qu'une fonction tende vers ∞ par entraînement uniforme, il faut et il suffit que son caractère tende vers 0.

Cette notion de caractère permet de compléter le n° 16 ainsi qu'il suit: *Pour chaque valeur de $s > 1$, la suite peut être partagée en deux autres tendant vers ∞ l'une par répulsion uniforme, l'autre par entraînement uniforme par rapport à $t(sr)$.*

La convergence par entraînement se reconnaît à ce que $\S\phi$ tend vers 0, et la convergence par répulsion, à ce que $(1 + |a|)\|\theta\|$ tend vers 0 (notations du n° 3).

Les normes et caractères étant pris par rapport à $t(sr)$, mettons dans une première classe les fonctions de la suite considérée n'ayant pas de valeur exceptionnelle, ou ayant une valeur exceptionnelle et telles que

$$\S\phi < (1 + |a|)\|\theta\|, \tag{16}$$

et dans une seconde classe, les fonctions ayant une valeur exceptionnelle et telles que

$$\S\phi \geqslant (1 + |a|)\|\theta\|.$$

La suite des fonctions de la première classe tend vers ∞ par entraînement uniforme. En effet, dans l'hypothèse contraire $\S\phi$ ne tendrait pas vers 0; on pourrait former une suite partielle pour laquelle $\S\phi$ resterait supérieur à un nombre fixe; par suite de l'inégalité (16), il en irait de même de $(1 + |a|)\|\theta\|$. Cette suite, ainsi que toutes celles qui en peuvent être extraites, tend numériquement vers ∞, mais ni par entraînement, ni par répulsion uniforme, ce qui est contraire au fait que les fonctions appartiennent à une famille normale.

On établirait de façon analogue que la suite des fonctions de la seconde classe tend vers ∞ par répulsion uniforme.

Sur les transformations des ensembles rectifiables.

Par

St. Gołąb (Cracovie).

J'étudie, dans la note présente, la façon dont se comporte la longueur de la projection sur un hyperplan mobile d'une partie d'un continu rectifiable.

Je me base sur un lemme intéressant par lui-même. Je donne une solution affirmative du problème suivant posé par M. Ważewski: La longueur de la projection d'une partie rectifiable d'un continu plan sur une droite mobile est-elle une fonction continue de la position de cette droite? J'obtiens quelques résultats plus généraux.

J'adopte les notations de M. Ważewski. J'ai communiqué les résultats ci-dessous au cours du Congrès International des Mathématiciens à Bologne le 8 Septembre 1928.

Lemme. Soient données p fonctions de $n+m$ variables

$$f_i(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) = f_i(X, Y), \qquad i = 1, \ldots, p \tag{1}$$

où nous avons posé, pour abréger

$$\begin{cases} (x_1, \ldots, x_n) = X \\ (y_1, \ldots, y_m) = Y. \end{cases} \tag{2}$$

Soit C un continu rectifiable situé dans l'espace cartésien à n dimensions et D une partie quelconque de l'espace à m dimensions. Nous supposons que

1) pour X fixe, les fonctions (1) sont fonctions continues de la variable Y,

2) il existe un k fixe indépendant de X et Y [1]), tel qu'on a

(3) $$|f^i(X, Y) - f_i(X', Y)| \leqslant k\rho(X, X')\,{}^{2}), \quad i = 1, \ldots, p,$$

lorsque X et X' appartiennent à C. Soit A une partie rectifiable du continu C. Désignons par

(4) $$F(A, Y)$$

la classe de tous les points

$$\{f_1(X, Y), \ldots, f_p(X, Y)\}$$

que l'on obtient lorsque X varie dans A. (L'ensemble $F(A, Y)$ fait partie de l'espace à p dimensions et est une fonctionnelle dépendant de Y).

Sous ces hypothèses on aura:

1) Si A est de longueur nulle $F(A, Y)$ l'est aussi.

2) $F(A, Y)$ est un ensemble rectifiable.

3) La fonction:

longueur de $F(A, Y)$

est semicontinue inférieurement dans D [3]).

Remarque. De ce théorème résulte immédiatement le fait important que la fonction *long* $F(A, Y)$ est une fonction mesurable au sens de Lebesgue lorsque D est un ensemble mesurable.

Démonstration. Soit

(5) $$\{g_1(t), \ldots, g_n(t)\} = G(t)$$

une représentation du continu C, telle que les fonctions $g_i(t)$ soient absolument continues dans un intervalle borné et fermé Δ et que l'on ait presque partout dans Δ:

(6) $$|G'(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [g_i'(t)]^2} \leqslant 1\,{}^{4}).$$

---

[1]) On peut sans restreindre la généralité du lemme, supposer que cette condition a lieu pour tous les X de C et *localement* pour les Y, c. à-d. pour un voisinage convenable de chaque point Y.

[2]) $\rho(X, X')$ désigne la distance des points X et X'.

[3]) Le cas où D est composé exclusivement de points isolés est banal.

[4]) Une telle représentation existe. Cf. T. Ważewski, Kontinua prostowalne etc. Dodatek do Rocznika Pol. Tow. Mat. 1927, Théorème du § 17 et 24.

Il est clair que

$$F(G(t), Y) = \{f_1(G(t), Y), \dots, f_p(G(t), Y)\} \tag{7}$$

offre une représentation de l'ensemble $F(C, Y)$. Les fonctions $f_i(G(t), Y)$ sont absolument continues, parce qu'on a

$$|f_i(G(t_1), Y) - f_i(G(t_2), Y)| \leqslant nk\,|t_1 - t_2|.$$

Il en résulte que $F(C, Y)$ est un continu rectifiable. Supposons que A est de longueur nulle. Nous affirmons que

$$\text{long}\ F(A, Y) = 0. \tag{8}$$

Considérons, à cet effet, Y comme fixe et posons

$$\begin{cases} F(t) = F(G(t), Y), \\ B = G^{-1}(A), \end{cases} \tag{9}$$

où $G^{-1}(A)$ désigne la classe de tous les t pour lesquels $G(t)$ appartient à A.

On a évidemment

$$\begin{cases} A = G(B), \\ F(B) = F(A, Y). \end{cases} \tag{10}$$

Il suffit de prouver qu'on a presque partout dans B l'égalité

$$|F'(t)| = 0. \tag{11}$$

Or presque partout dans B subsiste la relation

$$|G'(t)| = 0. \tag{12}$$

D'autre part on a (cf. (3))

$$\left|\frac{f_i(G(t_0+h, Y) - f_i(G(t_0), Y)}{h}\right| \leqslant k\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{g_j(t_0+h) - g_j(t_0)}{h}\right]^2} \tag{13}$$

donc on aura presque partout dans B

$$f_i'(G(t), Y) = 0$$

d'où il résulte immédiatement que (11) a lieu presque partout dans B.

Soit maintenant A une partie rectifiable de C. L'ensemble A peut être mis sous la forme

$$A = A_1 + R \tag{14}$$

où A_1 est une somme dénombrable d'ensembles fermés et R est de longueur nulle[1]. $F(A_1, Y)$ est aussi une somme de parties fermées du continu rectifiable $F(C, Y)$ par conséquent $F(A_1, Y)$ est rectifiable. Comme d'autre part

$$\text{long } F(R, Y) = 0$$

donc

$$\text{long } F(A, Y) = \text{long } F(A_1, Y) + \text{long } F(R, Y) = \text{long } F(A_1, Y).$$

La deuxième partie de notre lemme est ainsi démontrée. Pour démontrer sa troisième partie, il suffit de prouver que la fonction

$$\text{long } F(A_1, Y) \tag{15}$$

est semicontinue inférieurement dans D. Remarquons à cet effet qu'il existe un ensemble θ étant somme dénombrable d'ensembles fermés pour lequel on a

$$G(\theta) = A_1 \text{ [2]}. \tag{16}$$

Soit $\{Y_\mu\}$ une suite de points agrégés à D et tendant vers un point Y_0 appartenant à D. Posons

$$\begin{cases} h_i^\mu(t) = f_i(G(t), Y_\mu), & i = 1, \ldots, \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ H_\mu(t) = \{h_1^\mu(t), \ldots, h_p^\mu(t)\}, & \mu = 0, 1, \ldots \end{cases} \tag{17}$$

On a évidemment:

$$F(A_1, Y_\mu) = H_\mu(\Theta), \qquad \mu = 0, 1, \ldots \tag{18}$$

Les fonctions $h_i^\mu(t)$ satisfont (cf. (13)) à la condition de Lipschitz avec une constante indépendante de i et μ, égale, par exemple, à kn. On a, en conséquence de la continuité de $f_i(X, Y)$:

$$\lim_{\mu/\infty} H_\mu(t) = H_0(t), \quad (t \epsilon \Delta). \tag{19}$$

Il en résulte, suivant un de mes théorèmes antérieurs[3] que

---

[1]) Cf. T. Ważewski, Contribution à la théorie de la longueur, Annales de la Soc. Pol. de Math. T. VII (1928). La décomposition (14) résulte immétement du théorème 2, p. 30.

[2]) parce que la représentation $G(t)$ est continue.

[3]) Annales de la Soc. Pol. de Math. T. VII (1928), p. 238, théorème du § 5.

$$
(20) \qquad \begin{aligned} \liminf_{\mu/\infty} \operatorname{long} F(A_1, Y_\mu) = \liminf_{\mu/\infty} \operatorname{long} H_\mu(\Theta) \geqslant \\ \geqslant \operatorname{long} H_0(\Theta) = \operatorname{long} F(A_1, Y_0), \end{aligned}
$$

ce qui termine la démonstration.

Théorème 1. Soit A une partie rectifiable d'un continu rectifiable C plongé dans l'espace à n dimensions. Soit π un hyperplan mobile à r dimensions $(1 \leqslant r \leqslant n-1)$ et $P_A(\pi)$ la projection (orthogonale ou non) de A sur π. *Dans ces conditions la projection* $P(\pi)$ *de* A *sur* π *est rectifiable et sa longueur est une fonction semicontinue inférieurement de la position du plan* π.

Démonstration. La projection d'un point quelconque X sur le plan π a des coordonnées:

$$
\{f_1(X, Y), \ldots, f_n(X, Y)\}
$$

où les fonctions f_i sont linéaires par rapport aux X et continues par rapport aux Y. Elles satisfont, par conséquent, à la condition de Lipschitz[1]). Notre théorème se trouve ainsi ramené au lemme précédent.

Théorème 2. Si l'hyperplan π *intervenant dans le théorème précédent se réduit à une droite la fonction*

$$
(21) \qquad \textit{long}\ P_A(\pi)
$$

est une fonction continue de la position de cette droite.

Démonstration. Supposons que la position de la droite dépende d'une façon continue des paramètres $y_1, \ldots, y_m$. Il suffit de prouver (cf. Théorème 1.) que long $P_A(\pi)$ est une fonction semicontinue supérieurement de ces paramètres. Comme l'ensemble A peut être arbitrairement approché (en ce qui concerne sa longueur) par ses parties fermées et comme la longueur de la projection d'un ensemble sur une droite ne surpasse jamais la longueur de cet ensemble, il suffit de traiter le cas où A est fermé. Or dans ce cas-là, le théorème peut être démontré par un raisonnement indiqué par M. Sierpiński dans le cas de l'espace à deux dimensions[2]) ce qui n'est pas essentiel pour la valabilité de la démonstration.

Remarque 1. Le Théorème 2. ne peut pas être généralisé au

---

[1]) localement par rapport aux Y.

[2]) Cf. S. Mazurkiewicz et S. Saks, Sur les projections d'un ensemble fermé. Fund. Math. VIII. § 7.

cas de l'hyperplan mobile au nombre de dimensions supérieur à un. Désignons, en effet, par A la circonférence d'un cercle de diamètre $= 1$, situé sur le plan (x, y) de l'espace à trois dimensions. En faisant tourner un plan P passant par l'axe x nous remarquons que la projection de A sur P est une ellipse de longueur supérieure à 2 excepté le cas où P est orthogonal au plan (x, y). Dans ce cas-ci la projection est un segment de longueur 1.

Remarque 2. Suivant le Théorème 2. l'ensemble fermé et plan de MM. Mazurkiewicz et Saks[1]) qui se projette sur une seule droite passant par un point fixe comme un ensemble de mesure positive n'est situé sur aucun continu rectifiable.

Remarque 3. M. Saks a construit[2]) un ensemble S plan, fermé, situé dans la couronne fermée comprise entre deux cercles de centre à l'origine des coordonnées et de rayons respectifs 1 et $\sqrt{2}$, dont la projection sur chaque droite est de mesure nulle et qui a des points communs avec tout rayon issu de l'origine.

Il n'est situé sur aucun continu rectifiable. Dans le cas contraire il existerait un continu rectifiable C renfermant S, contenu dans la couronne en question. S serait de longueur nulle[3]). Appliquons au continu C notre lemme en posant:

$$f_1(x_1 . x_2) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad f_2(x_1, x_2) = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \tag{22}$$

Cette transformation remplit les conditions de ce lemme. L'ensemble $F(S)$[4]) est dans ce cas identique avec la circonférence du cercle intérieur de notre couronne, donc sa longueur est positive. Nous aboutissons ainsi à une contradiction avec notre lemme suivant lequel $F(S)$ serait de longueur nulle.

---

[1]) Mazurkiewicz et Saks, l. c.

[2]) S. Saks, Remarque sur la mesure linéaire des ensembles plans, Fund. Math. IX, p. 16.

[3]) cf. T. Ważewski, Contribution etc. l. c. p. 27, Lemme 1.

[4]) Dans notre cas $F(X, Y)$ ne dépend pas de Y. Nous écrivons donc $F(X)$ au lieu de $F(X, Y)$.

COMPTES-RENDUS ET ANALYSES

Nouveaux fascicules du „Mémorial des Sciences mathématiques [1]).

Fascicule XXXIV. *Ondes liquides de gravité*, par M. H. Vergne.

Le présent fascicule est consacré à l'étude des petits mouvements d'un liquide incompressible pesant, contenu dans un vase fixe, lorsque ces mouvements sont dus à des causes exclusivement superficielles (impulsions ou émersion d'un corps solide). On peut aborder le problème précédent soit en cherchant la solution qui correspond à des conditions initiales données, soit en cherchant à déterminer les *oscillations propres harmoniques* du liquide et en essayant ensuite de les utiliser pour former la solution qui correspond à des conditions initiales données. L'auteur a envisagé chacun de ces deux points de vue. L'ouvrage est écrit avec beaucoup de talent et la lecture en est aussi attrayante qu'instructive.

Fascicule XXXV. *Théorie mathématique de l'élasticité*, par M. Léon Lecornu, Membre de l'Institut.

Ce travail contient un aperçu sur toutes les parties de la théorie de l'élasticité et se termine par un résumé de l'histoire de cette branche des sciences mathématiques; on y trouvera en particulier une discussion des plus intéressantes des questions de principe qui se présentent dans la théorie de l'élasticité. L'ouvrage justifie entièrement les espérances que le nom du célèbre auteur pourrait faire concevoir.

Fascicule XXXVI. *Sur la décomposition d'une fonction méromorphe en éléments simples*, par M. Paul Appell, Membre de l'Institut, Recteur honoraire de l'Université de Paris.

Pour donner une idée de la nature de ce très intéressant ouvrage, nous ne croyons pas pouvoir mieux faire que de présenter le passage suivant de l'Introduction: „En faisant l'exposé général

---

[1]) Voir les tomes: III, p. 142, IV, p. 122, V, p. 98 et VII, p. 254.

de la théorie de la décomposition en éléments simples, je prendrai d'abord les fonctions rationnelles et celles qui s'y rattachent, puis, d'après HERMITE, les fonctions doublement périodiques et les fonctions zêta, les fonctions doublement périodiques de seconde et troisième espèce, puis les fonctions d'un point analytique, puis les fonctions automorphes d' HENRI POINCARÉ, puis enfin les fonctions f dites triplement périodiques de trois variables x, y, z vérifiant l'équation de LAPLACE $\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{d^2T}{dy^2}+\frac{d^2T}{dz^2}=0$. Je consacrerai un numéro spécial à la définition d'un nombre fondamental dans le problème, d'après POINCARÉ".

Inutile sans doute d'ajouter que l'ouvrage se distingue par les rares qualités bien connues des travaux de l'illustre auteur.

Fascicule XXXVII. *Transformations de contact et problème de Pfaff*, par M. G. CERF.

Comme le fait remarquer l'auteur lui-même, dès le début, la théorie analytique des transformations de contact a été considérée comme cas particulier du problème de *Pfaff*, c'est-à-dire de l'étude des propriétés invariantes d'une équation de *Pfaff* quelconque. Or cette étude a gagné beaucoup en simplicité grâce aux méthodes nouvelles de M. CARTAN, lesquelles ont reçu un complément important de M. GOURSAT. Le but principal du présent fascicule est, comme le dit l'auteur lui-même, de résumer ce qui, dans ces méthodes, et en particulier dans la multiplication et la dérivation extérieures, a un rapport direct avec les transformations de contact, de retrouver les propriétés d'invariance connues du groupe correspondant et d'en indiquer l'extension au groupe des transformations qui conservent une expression ou une équation de PFAFF quelconque.

Le présent fascicule rendra des services précieux à toutes les personnes qui voudront se renseigner sur le sujet auquel ce fascicule est consacré.

Fascicule XXXVIII. *Familles normales et quasi-normales de fonctions méromorphes*, par M. G. VALIRON, Professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg.

Les notions de famille normale et quasi-normale de fonctions sont dues, ainsi que la théorie de ces familles, à M. MONTEL qui, par cela même, a mis entre les mains des analystes un puissant moyen de recherches. On trouvera, dans le présent fascicule, un aperçu très clair tant des théories fondamentales de M. MONTEL lui-même que des nombreux et importants travaux qui s'y rattachent. Ajoutons que l'auteur de ce fascicule était, à cause des nombreuses et importantes contributions qu'il a apportées lui-même aux questions qui y sont étudiées, particulièrement indiqué pour l'écrire.

Fascicule XXXIX. *L'analyse indéterminée de degré supérieur*, par M. T. Nagell, Docteur ès Sciences, chargé de cours à l'Université d'Oslo.

Voici comment l'auteur lui-même caractérise les problèmes de l'Analyse indéterminée: „on appelle analyse indéterminée la partie de la théorie des nombres qui s'occupe des solutions en *nombres rationnels* ou en *nombres entiers* d'une ou de plusieurs équations. Le problème le plus important de ce domaine est l'étude des solutions entières ou rationnelles en $x, y, z, \ldots$ de l'équation:

$$f(x, y, z, \ldots) = 0$$

où f est une fonction entière rationnelle de $x, y, z, \ldots$ à coefficients rationnels ou entiers". Bien entendu le problème précédent peut, comme le fait remarquer l'auteur, être considérablement généralisé de diverses façons. Toutefois l'auteur, voulant avant tout, exposer les parties de l'Analyse indéterminée où des résultats d'une certaine généralité ont été atteints, se borne à étudier la recherche des points à coordonnées rationnelles ou entières d'une courbe plane algébrique, en ne considérant que des courbes du 3 ième degré au moins et cela parceque le cas des lignes de degré inférieur au 3-ième fait l'objet d'une théorie actuellement classique.

Le présent fascicule rendra de précieux services aux personnes qui voudront se renseigner sur l'Analyse indéterminée.

Fascicule XL. *Géométrie sur les surfaces et les variétés algébriques; questions transcendantes, topologie*, par M. S. Lefschetz, Professeur à Princeton University.

Ainsi que le fait remarquer l'auteur au début de l'introduction, „on entend par géométrie sur une configuration algébrique A (courbe, surface, variété) l'étude des propriétés des configurations algébriques sur A, invariantes sous les transformations birationnelles de A". L'ouvrage est écrit avec une grande compétence par un auteur qui a lui-même apporté d'importantes contributions au sujet traité; il est donc appelé à rendre de précieux services aux géomètres.

S. Z.

Mémorial des Sciences Physiques publié sous le patronage de l'Académie des Sciences de Paris, des Académies de Belgrade, Bruxelles, Bucarest, Coïmbre, Cracovie, Kiew, Madrid, Prague, Rome, Stockholm (fondation Mittag-Leffler), etc., etc... avec la collaboration de nombreux savants.

Directeurs: Henri Villat et Jean Villey. Chez Gauthier-Villars & C^{ie} 55, quai des Grands-Augustins, Paris (6^e).

But de la Collection:

Chaque fascicule, d'une soixantaine de pages environ, renferme l'exposé, aussi clair et condensé que possible, d'une question précise et bien délimitée; c'est une sorte de mise au point d'un problème, ou d'une catégorie de problèmes à l'ordre du jour.

Le Mémorial des Sciences physiques publie non pas des mémoires originaux, mais des études documentaires constituant l'aboutissement critique de nombreux travaux, personnels ou non au signataire du fascicule, et dont l'essence se trouve résumée. La nouvelle Collection constitue un cadre exactement adapté pour recueillir, et rendre profitable pour tous, ces efforts coûteux de documentation critique que chacun se trouve amené à faire, en maintes circonstances de recherches ou d'enseignement, sur des questions peu connues ou controversées, ou en évolution rapide.

Le programme du nouveau Mémorial s'étend non seulement aux questions que la classification habituelle range dans la Physique proprement dite, mais à celles qui ressortissent à la Physique mathématique, à l'Astronomie expérimentale ou à l'Astronomie physique, à la Mécanique expérimentale et appliquée ou à la Mécanique des fluides, à la Physique et à la Chimie industrielles, à la Physico-Chimie. La liste des fascicules suffit à montrer la variété des questions qu'il aborde, sans du reste prétendre en rien à constituer une Encyclopédie systématique. Sans pouvoir insérer des analyses des fascicules successifs du *Mémorial des Sciences Physiques*, nous croyons devoir faire connaître à nos lecteurs au moins les titres des fascicules de cette très importante publication à mesure qu'ils paraîtront.

Volumes in-8 raisin (25 – 16) se vendant séparément:

Fascicules parus:

I. L. de Broglie. — La Mécanique ondulatoire . . . . 15 fr.
II. A. de Gramont. — La Télémétrie monostatique . . . 15 fr.

III. G. Moreau. — Les Propriétés électriques et magnétiques des flammes . . . . 15 fr.
IV. F. H. van den Dungen. — Les Théories générales de la technique des vibrations . . . . . . i . . . 15 fr.
V. J. Barbaudy. — Les Bases physico-chimiques de la distillation . . . . 15 fr.
VI. F. Badeau. — Le Quartz piézo-électrique et ses applications dans la technique des oscillations hertziennes 15 fr.
VII. E. Aubel et A. Genevois. — L'état actuel de la question des ferments.
VIII. R. Dubrissay. – La Mesure des tensions superficielles en Analyse chimique . . . . , ... 15 fr.
IX. G. Ribaud. — Le Rayonnement des corps non noirs.
X. A. Mesnager. — L'Etude expérimentale des tensions dans les solides.

Leçons sur l'Hydrodynamique par Henri Villat, correspondant de l'Académie des Sciences, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, Directeur de l'Institut de Mécanique des Fluide de l'Université de Paris. Chez Gauthier-Villars & C^{ie}, 55 Quai des Grands-Augustins, Paris (6^{e}).

Voici comment M. Villat lui-même caractérise, dans la notice publiée par la maison éditrice, le but et l'esprit de l'ouvrage: „La première partie de ces Leçons est destinée à donner une idée assez complète, et aussi simple que possible, de la théorie des sillages, concernant le mouvement permanent d'un solide dans un liquide parfait. Cette théorie a été édifiée sur les principes fondamentaux posés par Kirchhoff, Helmholz, M. Lévi-Civita et M. Brillouin. Des développements, prolongements et perfectionnements très considérables ont été apportés par divers auteurs, au premier rang desquels il convient de citer M. U. Cisotti. I'ai moi-même, ainsi que mes élèves, donné quelques efforts à la question. Nous examinons ici les points les plus importants, ainsi que les difficultés auxquelles donne lieu la théorie, et la manière de lever ces difficultés. Nous insistons sur un fait, qui nous semble fondamental, concernant la non-unicité des solutions.

Venons maintenant à l'étude qui fait l'objet essentiel du présent Volume.

Un fluide parfait étant regardé comme le cas limite d'un fluide réel, il est d'un intérêt primordial de reconnaître comment déduire les propriétés et caractères d'un mouvement à étudier das le fluide parfait, des propriétés et caractères concernant le fluide visqueux, dont on fait tendre la viscosité vers zéro.

Cette question a fait l'objet des savantes recherches de M. C. W. Oseen et de ses élèves, notamment de M. Z. Zeilon. Nous exposons ici les théories dues à ces auteurs et à nous-même, dans cet ordre d'idées. Le passage à la limite envisagé, comporte des difficultés considérables. Une remarque de J. Boussinesq pouvait le laisser prévoir: le savant géomètre avait en effet mis en évidence, dès 1880, à propos d'un problème simple, que la solution cessait d'être analytique quand la viscosité tendait vers zéro. La raison majeure des difficultés rencontrées réside, selon une profonde remarque. de M. J. Hadamard, dans le fait que les termes complémentaires qui, dans les questions de l'Hydrodynamique contiennent le coefficient de viscosité, sont justement ceux où interviennent les dérivées de l'ordre le plus élevé; de sorte que les „caractéristiques" du problème général diffèrent essentiellement de celles du problème limite.

Quoi qu'il en soit, après avoir exposé la théorie des équations intégrales de l'Hydrodynamique, nous construisons avec M. Oseen une solution du cas limite. Nous donnons les résultats obtenus par M. Zeilon dans la recherche des solutions effectives dans des cas importants, et nous donnons également des indications sur l'extension que nous avons obtenue de ces théoriens dans le cas du fluide limité par des parois fixes.

Notre ambition a été d'être aussi clair que possible, pour un lecteur possédant une bonne culture mathématique sans être forcément renseigné à fond sur des questions spéciales. C'est en vue d'un tel lecteur que nous avons été amené à introduire par exemple un exposé de quelques lignes de la théorie des Fonctions Elliptiques, sous une forme qui permet d'obtenir, en peu de mots et naturellement, les propriétés essentielles de ces fonctions. De même, un problème particulier nous a servi à exposer les propriétés utiles de l'équation de la chaleur, sous une forme assez intuitive. Et, en vue d'un exemple à élucider, nous avons donné une courte théorie des fonctions de Legendre, si importantes en Physique Mathématique.

Nous serions heureux si ce livre pouvait faciliter aux chercheurs les voies à suivre dans les théories nouvelles de l'Hydrodynamique, où tant de beaux résultats sont encore à découvrir.

Ces belles leçons de M. Villat se distinguent par les qualités éminemment françaises de clarté et de simplicité ce qui, avec l'intérêt considérable du sujet de l'ouvrage en rend l'étude extraordinairement attachante. Grâce aux indications bibliographique qui s'y trouvent, le lecteur pourra s'instruire d'une façon très complète en la partie de l'hydrodynamique à laquelle l'ouvrage est consacré. Ajoutons que la grande valeur de l'ouvrage est considérablement accrue par une critique pénétrante de l'état actuel de la théorie des sillages.

Leçons sur la théorie des tourbillons, par Henri Villat, Correspondant de l'Académie des Sciences, Professeur à la Sorbonne, Directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de l'Université de Paris.

Chez Gauthier-Villars & C^ie^, Quai des Grands-Augustins, 55, Paris (6^e^).

Le présent ouvrage se distingue comme les autres livres de son éminent auteur par les qualités de simplicité et de clarté qui réduisent au minimum l'effort nécessaire pour se familiariser avec les matières qui y sont traitées. L'extrait suivant de la préface et la table des matières permettront de se faire une idée nette de l'esprit et de l'envergure de l'ouvrage.

Le présent ouvrage a pour objet l'exposé de tout nn ensemble de questions importantes, et d'un intérêt actuel, se rattachant aux tourbillons dans les fluides. Ce livre constitue le développement de nos Leçons à la Faculté des Sciences de Paris pendant l'année 1929.

Un coup d'œil sur la Table des Matières renseignera sur les problèmes que nous avons traités, et sur la marche que nous avons suivie. Nous avons essayé de mettre le plus de clarté possible dans nos développements, et, par une mise au point de diverses théories nouvelles, de relier d'une façon naturelle les questions que nous avions à envisager. Nous serions heureux d'avoir, au moins partiellement, atteint notre but. Est-il superflu de dire que les Traités classiques de MM. P Appell (*Mécanique rationnelle*) et J. Hadamard (*Leçons sur la propagation des ondes*) ont beaucoup facilité notre tâche. Nous avons tiré grand parti des leçons récentes de MM. J.-L. Synge et G. Jaffé, et des nôtres, ainsi que des profondes recherches de M. Lichtenstein auxquelles sont consacrés les Chapitres XI à XIII du présent Ouvrage.

Chapitre I: *Notions générales classiques.* Equations générales. Equation de continuité. Equation complémentaire. Tourbillon. Equations de Helmholtz. Formules de Cauchy Généralisation. Cas où il n'y a pas de potentiel pour les forces extérieures. Propriétés des tourbillons. Tubes tourbillons, Leur intensité. Tubes infiniment. déliés. — Chap. II: *La détermination des vitesses quand les tourbillons sont connus.* Calcul des vitesses en fonction des tourbillons. Cas du liquide indéfini. Formules finales. Part contributive d'un anneau infiniment délié. Cas d'un fluide contenu dans un vase fixe. Résolution du problème général dans le cas de deux dimensions pour un vase animé d'un mouvement donné. Le problème général dans le cas de trois dimensions, pour un vase animé d'un mouvement connu. — Chap. III: *Mouvements plans. Tourbillons infiniment déliés. Equations canoniques* Etude des mouvements plans. Tourbillons infiniment minces. Mouvement de n tubes tourbillons. — Chap. IV: *Les tourbillons de Bénard-Karman. Une file régulière. Deux files symétriques; deux files alternées; stabilité de ces configurations.* Les tourbillons de Bénard-Karman et les configurations tourbillonnaires régulières. Une file infinie de tourbillons. La configuration correspondante est instable. Les deux files parallèles. Stabilité du système alterné. Système symétrique. — Chap. V: *Application des tourbillons de Bénard au calcul de la résistance d'un solide dans un liquide indéfinl. Position du problème.* Calcul de $\mathfrak{L}$. Calcul de $\mathfrak{L}'$. La méthode de M. J.-L Synge. Files de tourbillons alternés, indéfinies d'un seul côté. Nouvelle application du théorème des quantités de mouvement. Une propriété du coefficient a_2. Calcul d'une intégrale. Calcul de $\int_C w^2 dz$ et de sa limite. Conclusion — Chap. VI: *Généralisations diverses. Files tourbillonnaires en fluide limité.* Système de n tourbillons entre deux murs parallèles. Système de tourbillons dans un rectangle fixe. Files de tourbillons indéfinies entre deux murs parallèles. Applications. Calcul de la résistance éprouvée par un cylindre mobile dans un canal, dans le cas où naissent à l'arrière des tourbillons alternés. Première méthode. Le résultat de M. L. Rosenhead. — Chap. VII: *Les problèmes de tourbillons à deux dimensions et la représentation conforme.* Généralités. Exemples. Un théorème général. Exemples. La méthode de M. Caldonazzo. Sur un problème de M. D. Riabouchinsky. — Chap. VIII: *Les tourbillons de dimensions finies.* Tubes de dimensions finies. Tube cylindrique circulaire homogène, en liquide indéfini, en repos à l'infini. Le tourbillon elliptique de Kirchhoff. Le tourbillon sphérique de Hill. — Chap. IX: *Les configurations de révolution. L'anneau tourbillon.* Généralités. Cas d'un seul anneau infiniment délié. Cas général. Théorie de l'anneau infiniment délié. Anneau de section finie. Retour à l'anneau de faible section. Remarque. — Chap. X: *Exposé du problème fondamental général. Rappel de quelques propriétés classique concernant les discontuités.* Le problème général. Les discontinuités. Les conditions identiques. Les conditions cinématiques de compatibilité. Mouvements où les vitesses sont continues. Saut d'accélération. Continuité de la pression dans. un liquide, au passage de la surface qui limite les tourbillons. Remarque. — Chap. XI: *Sur diverses inégalités fondamentales concernant les potentiels.* Conventions et notations. Lemme. Le premier théorème de M. A. Korn. Le second théorème de M. A. Korn. Les inégalités de M. L. Lichtenstein· — Chap. XII: *Le théorème général de M. L. Lichtenstein.* — Démonstration du théorème. Définition de x, y, z dans le domaine tourbillonaire. Définition de x, y, z à l'extérieur des tourbillons. Les fonctions x, y, z, constituent bien une solution du problème. Correspondance biunivoque entre les domaines successifs. Unicité de la solution. — Chap. XIII: *Généralisations diverses et applications.* Fluide limité. Mouvement permanent relatif de deux tourbillons cylindriques dans un liquide indéfini. — Chap. XIV: *Quelques mots sur les tourbillons dans les fluides visqueux.* Préliminaires Le tourbillon circulaire dans un fluide visqueux.

Grundlagen der Hydromechanik von Leon Lichtenstein. O. Ö. Professor der Mathematik an der Universität Leipzig. 1929, XII + 509 p. Berlin, Verlag von Julius Springer,

Voici en quels termes le savant auteur caractérise lui-même, dans la préface, le but et le nature de l'ouvrage: „Je me suis proposé d'exposer les fondements de la mécanique des liquides d'une façon mathématiquement satisfaisante, adaptée à l'état actuel de la science sans laisser au second plan le côté physique du sujet. Ce programme a déterminé dans les grandes lignes la composition de l'ouvrage.

Alors que l'hydrodynamique, dont l'hydrostatique n'est qu'un chapitre particulier, a pour fondement mathématique la théorie du potentiel, les théorèmes les plus généraux de la cinématique des liquides et en général ceux de la cinématique des milieux continus constituent, en partie, de simples interprétations de certains théorèmes généraux de l'*Analisis Situs.* Pour assurer une base solide aux développements exposés dans les parties principales de l'ouvrage, sans être obligé de supposer chez le lecteur d'autres connaissances que celles des principes du calcul infinitésimal, je commence, au premier chapitre, par présenter les notions essentielles de la théorie des ensembles de points, en insistant particulièrement sur la représentation topologique de domaines bornés ou infinis dans le plan et dans l'espace.

. . . .

Le second chapitre constitue une préparation au passage à la théorie du potentiel; il est consacré à la notion de *champ vectoriel* ainsi qu'aux théorèmes de Green et de Stokes.

Le troisième chapitre est consacré à la théorie du potentiel dans la mesure nécessaire pour la suite.

. . . .

A cause de la place strictement mesurée dont on disposait, il n'a été possible de présenter des démonstrations complètes que d'une partie des théorèmes exposés. En revanche, on expose dans ce chapitre d'une façon détaillée la détermination d'un champ vectoriel étant donné la rotation, la divergence et des conditions périphériques.

. . . .

Les trois chapitres précédents constituent la base mathématique de tous les développements ultérieurs".

Le chapitre suivant rentre dans la philosophie de la mécanique; pour l'essentiel, l'auteur adopte les idées de Kirchhoff et les complète par des commentaires appropriés.

Les deux chapitres suivants sont consacrés à la cinématique des fluides; l'auteur s'applique soigneusement à éviter les défauts de rigueur trop répandus dans les expositions habituelles de cette branche de la mécanique; le second des deux chapitres qui nous occupent en ce moment traite de la propagation des discontinuités dans les milieux continus, théorie à laquelle restent attachés les noms de Riemann, Hugoniot, Duhem et Hadamard.

Dans le 7-ième chapitre l'auteur expose les fondements physiques de l'hydrodynamique, le 8-ième chapitre est consacré à l'hydrostatique. Dans le 9-ième chapitre on trouvera une intéressante application du principe de Hamilton.

Le 10-ième chapitre traite de la transformation des équations de l'hydrodynamique et constitue une préparation au 11-ième et dernier chapitre où le distingué auteur expose ses propres „théorèmes d'existence“ relatifs à divers problèmes d'hydrodynamique; faute de place, il n'a pas été possible de développer les démonstrations de la convergence des séries constituant les solutions des problèmes étudiés mais, grâce aux indications contenus dans le texte, le lecteur n'éprouvera pas de difficulté à retrouver dans les mémoires originaux. les démonstrations qu'il a fallu supprimer dans l'ouvrage.

En résumé, il nous semble que, les équations de l'hydrodynamique admises, les considérations basées sur elles par M. Lichtenstein ne laissent rien à désirer comme rigueur et précision et conduisent à des résultats du plus haut intérêt.

Quant à l'établissement des équations hydrodynamique elles-mêmes, nous n'oserions pas affirmer qu'il ne donne pas lieu à quelques difficultés. Quoi qu'il en soit, l'ouvrage, à cause de ses qualités de rigueur et de précision, nous semble mériter l'admiration de tout mathématicien et doit être chaudement recommandé à tous ceux qui voudraient acquérir des connaissances approfondies en hydromécanique. *S. Z.*

Aurel Wintner: „Spectraltheorie der unendlichen Matrizen“. „Théorie spectrale des matrices infinies“. Avec préface de M. Lichtenstein, professeur à l'Université de Leipzig. Leipzig, S. Hirzel 1929, pp. XII + 280 in 8°.

On connaît l'importance de la théorie des matrices infinies pour la nouvelle mécanique des quanta développée par Heisenberg. Il était donc à désirer que ces théories exposées dans des mémoires difficiles à lire pussent être rendues intelligibles aux physiciens. C'était aussi, d'après les préfaces de MM. Wintner et Lichtenstein, le but de l'auteur. C'est pourquoi il a consacré les deux premiers Chapitres de l'ouvrage à l'exposition des propriétés des matrices finies ainsi qu'à des théories classiques de l'analyse, comme celles des fonctions à variation bornée, de l'intégrale de Stiltjes etc. La méthode d'exposition suivie dans ces chapitres consiste à présenter les considérations de manière qu'elles puissent s'adapter immédiatement à l'étude des matrices infinies et des intégrales correspondantes.

Voici les titres des chapitres de l'ouvrage: 1. Bases algébriques et formelles. 2. Théories auxiliaires d'analyse. 3. Matrices bornées infinies. 4. Théorie de la matrice spectrale. 5. Théorie spectrale des matrices bornées. 6. Matrices hermitiennes non bornées. Appendice: Esquisse d'une théorie spectrale des fonctions presque périodiques. Bibliographie.

Aprés avoir exposé la théorie des matrices finies, l'auteur considère au troisième Chapitre les matrices infinies dites bornées selon la terminologie de Hilbert, en se bornant principalement aux matrices hermitiennes. Toutefois il étend cette théorie en esquissant aussi une théorie des matrices bornées non hermitiennes et en étudiant particulièrement les matrices unitaires, c'est à dire telles que l'on ait $\sum\limits_{j} a_{ij}\bar{a}_{kj} = \delta_{ik}$, où $\bar{a}$ représente la quantité conjuguée de a et où δ_{ik} est le symbole connu de Kronecker.

Dans le 6-ème Chapitre et dans l'Appendice on trouvera des choses nouvelles et intéressantes. L'auteur considère dans le 6-ème Chapitre les matrices non bornées hermitiennes ayant la propriété „Q", c'est-à-dire que $\sum\limits_{k}(a_{ik})^2$ et $\sum\limits_{i}(a_i k)^2$ convergent, lesquelles ont déjà été envisagées par Carleman. Elles sont „régulières" si elles possèdent une matrice résolvante bornée unique. Une matrice est dite „statistisch sinnvoll", si elle ne possède qu'u n e résolvante bornée limite (Grenzresolvente), c'est-à-dire une résolvante qui est limite d'une certaine suite des résolvantes des segments de la matrice. On montre que les matrices „demi-bornées" c'est-à-dire les matrices dont les spectres des segments sont situés sur une demi-droite sont „statistisch sinnvoll". Or les matrices demi-bornées jouent un rôle important dans la physique, le spectre de la matrice de l'énergie de l'hydrogène étant situé sur une demi droite. L'auteur montre que les matrices Q sont les spectres des segments situés sur une demi-droite, si — le spectre de la matrice l'est.

On connaît les belles recherches de M. Horald Bohr sur les fonctions presque périodiques. L'auteur introduit une généralisation des matrices de Laurent étudiée par Toeplitz pour ces fonctions. Si la suite ... — $\zeta_{-1}, \zeta_0, \zeta_1 \ldots$ est la suite des „fréquences" d'une fonction presque périodique $f(t)$, telle que

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T} f(t) e^{-i\zeta t} dt = m(f e_{-\zeta}),$$

($e_{-\xi} = e^{-i\xi t}$) soit différente de zéro pour ces nombres et seulement pour ceux-là, l'auteur forme la matrice infinie dans tous les sens dont l'élément a_{ij} est $m(fe_{\xi_i - \xi_j})$, i, j variant de $-\infty$ à $+\infty$. Il étudie ces matrices, matrices qui correspondent dans la théorie de Heisenberg des quanta, à la mécauique classique des vibrations.

Le livre de A. Wintner est riche en contenu et en idées nouvelles. Il gagnerait encore, si les théorèmes nouveaux étaient énoncés explicitement et séparément comme tels et si le livre était muni d'un index alphabétique qui faciliterait la recherche des définitions particulières à l'auteur. Il eut été bon aussi d'ajouter un résumé de la théorie de la mesure de Lebesgue-Borel et celle de l'intégrale de Lebesgue, notions dont l'auteur fait un grand usage.

Il convient aussi de remarquer que dans l'ample bibliographie qui termine l'ouvrage, on ne trouve pas cités les travaux de Poincaré ni de Helge von Koch. Mais ces manques sont faciles à combler.

Alfred Rosenblatt.

Comptes-rendus des séances à Cracovie de la Société Polonaise de Mathématique.

11. V. 1929. T. Ważewski: „O odwzorowaniach posiadających jakobjan uogólniony".

27. IV. 1929. T. Ważewski: „Pewne twierdzenia z teorji długości w związku z wynikami Estermann'a".

25. V. 1929. T. Ważewski: „Zmiana zmiennych w całce wielokrotnej".

25. I. 1930. W. Wilkosz: „O równaniu relaksacji cz. I".

8. II. 1930. O. Nikodym: „Z teorji funkcyj zbioroliczbowych".

22. II. 1930. W. Wilkosz: „O równaniu relaksacji cz. II".

Note. Les Comptes-rendus des séances des sections de Lwów, Poznań et Wilno de la Société ne sont pas arrivés à temps pour être insérés dans le présent volume.

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique, Section de Varsovie, année 1929.

11. I. 1929. A. Tarski: „Sur les fonctions additives dans les classes abstraites et leur application au problème de la mesure", *Comptes Rendus des séances de la Soc. des Sc. et de Lettres de Varsovie*, III, t. 32, (1929).

8. II. 1929. S. Mazurkiewicz: „Sur les points accessibles des continus indécomposables", *Fund. Math.*, t. 14, (1929), p. 107.

22. II. 1929. M. Kerner: „Die Transversalenkrümmungsmethode und ihre Anwendung auf geschlossene Extremalen", *Math. Ann.*, t. 101, (1929). p. 633.

26. III. 1929. W. L. Ayres: „Über zyklische Kontinua und ihre Anwendungen in der Topologie".

B. Knaster: „Ein Beweis des Fixpunktssatzes für n-dimensionale Simplexe", *Fund. Math.* t. 14, (1929), p. 132.

7. VI. 1929. E. Zermelo: „Über Spiegelung an analytischen Kurven".

J. Spława-Neyman: „Sur la vraisemblance des hypothèses".

21. VI. 1929. W. Sierpiński: „Sur les images continues des ensembles analytiques linéaires punctiformes", *Fund. Math.* t. 14, (1929), p. 345.

W. Sierpiński: „Remarque sur un théorème de M. Hurewicz".

M. Sierpiński dit qu'un ensemble (linéaire) M jouit de la propriété H, s'il existe pour tout sous-ensemble non-dénombrable N de M un sous-ensemble parfait contenant une infinité non-dénombrable de points de N.

M. W. Hurewicz a démontré (*Fund. Math.*, t. 12, p. 106) que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble (linéaire) jouisse de la propriété H, est qu'il soit nn F_σ.

Or, disons qu'un ensemble (linéaire) jouit de la propriété H_1, s'il existe pour tout sous-ensemble de puissance du continu N de M un sous-ensemble parfait P de M tel que l'ensemble $P \times N$ soit non-dénombrable.

M. Sierpiński observe que par une modification légère du raisonnement de M. Hurewicz, on obtient, *sans faire appel à l'hypothèse que* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, la proposition suivante dont une conséquence immédiate est la proposition de M. Hurewicz: *Pour qu'un ensemble (linéaire) jouisse de la propriété* H_1, *il faut et il suffit qu'il soit une somme de moins que* $2^{\aleph_0}$ *ensembles fermés.*

Remarquons qu'en s'appuyant sur le théorème de M. Zermelo (*Wohlordnungssatz*) on peut démontrer sans peine l'existence des ensembles (linéaires) ne jouissant pas de la propriété H_1. Tels sont évidemment les ensembles de puissance du continu ne contenant aucun sous-ensemble parfait. Or, sans faire appel à l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, nous ne savons pas décider si l'ensemble de tous les nombres irrationnels jouit de la propriété H_1.

12. IV. 1929. W. Hurewicz: „Sur les ensembles de dimension dénombrable".

S, Saks: „Sur les fonctionnelles linéaires dans les champs L^p", *Studia Mathematica*, t. 1, (1929), p. 217.

Z. Kobrzyński: „Deux types de relations logiques et la méthode de Porecki".

31. V. 1929. W. Sierpiński: „Sur un problème conduisant à un ensemble non-mesurable et ne contenant aucun ensemble parfait", *Fund. Math.*, t. 14, (1929), p. 229.

W. Sierpiński: „Sur un ensemble de nombres réels dont on ne sait choisir aucun élément".

K. Kuratowski: „Sur les courbes gauches", *Fund. Math.*, t. 15, (1930), p.

S. Mazurkiewicz: „Un théorème sur l'accessibilité des continus indécomposables", *Fund. Math.*, t. 14, (1929), p. 271.

18. X. 1929. S. Mazurkiewicz: „Ein Satz über irreduzible Kontinua", *Monatsh. für Math. und Physik*, t. 37, (1930), p. 163.

F. Sieczka: „Sur la courbe de M. Sierpiński". (A paraître dans les *Comptes Rendus de la Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie*).

H. Sieczka définit un exemple de la courbe d'ordre $\leqslant 3$ au sens de M. Menger dont aucune image homéomorphe n'est contenue dans la courbe de M. Sierpiński (*Comptes Rendus*, t. 160, (1916), p. 302). Cet exemple fournit la réponse négative à une question posée par M. Menger (*Fund. Math.*, t. 10, p. 107).

8. XI. 1929. S. Mazurkiewicz: „Sur les points singuliers des fonctions analytiques".

État

de la Société Polonaise de Mathématique à la fin de l'année 1928.

Président: M. W. Sierpiński.
Vice-Présidents: MM. W. Staniewicz et S. Zaremba.
Secrétaire: M. J. Spława-Neyman.
Vice-Secrétaire: MM. A. Turowicz et S. Turski.

Trésorier: M. St. K. Zaremba.
Autres Membres du Bureau: MM. A. Hoborski, A. Rosenblatt et W. Wilkosz.
Commission de Contrôle: MM. L. Chwistek, T. Ważewski et M-me I. Wilkosz.
Il existe quatre sections de la Société, l'une à Lwów, présidée par M. E. Żyliński, la seconde à Varsovie, présidée par M. S. Mazurkiewicz, la troisième à Poznań, présidée par M. Z. Krygowski, la quatrième à Wilno, présidée par M. W. Staniewicz.

Liste des Membres de la Société.

Malgré le soin avec lequel cette liste a été établie, certaines fautes ont pu s'y glisser; MM. les Membres sont priés instamment de vouloir bien envoyer les rectifications au Secrétaire (Cracovie, rue Gołębia 20, Institut de Mathématique) et de le prévenir de tous les changements d'adresse.

Abréviations: L — membre de la Section de Lwów, Wa — membre de la Section de Varsovie, P — membre de la Section de Poznań, Wl — membre de la Section de Wilno. Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels.

Dr. Kazimierz Abramowicz (P), Poznań, ul. Wyspiańskiego 8.
Aronszajn Natan (Wa), Warszawa, ul. Nowolipki 43, m. 7.
Herman Auerbach (L), Lwów, ul. Szaszkiewicza 1.
Prof. Dr. Stefan Banach (L), Lwów, Uniwersytet Jana Kazimierza. Mikołaja 4.
Prof. Tadeusz Banachiewicz, Kraków, Obserwatorjum Astronomiczne, ul. Kopernika 27.
Jan Baran, Toruń, Gimnazjum Męskie, Małe Garbary.
Prof. Dr. Kazimierz Bartel (L), Warszawa, Prezydjum Rady Ministrów.
Prof. Dr. Nina Bary (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Pokrowka 29, kw. 22.
Prof. Czesław Białobrzeski, Warszawa, ul. Hoża 69.
Prof. Dr. Mieczysław Biernacki (P), Poznań. Uniwersytet, Seminarjum Matematyczne, Collegium Majus, Zamek, Sala No 6.
Mag. Zygmunt Birnbaum (L), Lwów, ul. Św. Anny 1.
Inż. Dr. Izydor Blumenfeld (L), Lwów, ul. Kąpielna 6.
Prof. Dr. Georges Bouligand, Poitiers (Vienne, France), 50, rue Renaudot.

Mag. Karol Borsuk (Wa), Warszawa Adama Pługa 6, m. 2.
Doc. Dr. Łucjan Böttcher (L), Lwów, ul. Sadowa 4.
Franciszek Brablec. Kraków, ul. Studencka 4.
Dr. Feliks Burdecki (Wa), Zambrów (pow. Łomżyński), Gimnazjum.
Dr. Celestyn Burstin (L), Wien VIII (Autriche), Laudonstrasse 8.
Prof. Dr. Élie Cartan, Le Chesnay (Seine-et-Oise, France), 27, Avenue de Montespan.
Antoni Chromiński (Wa), Warszawa, Politechnika, Wydział Inżynierji Lądowej.
Dr. Leon Chwistek, Kraków, ul. Szujskiego 7.
Dr. Jakób Cukierman (Wl), Wilno, ul. Mickiewicza 22 m. 30.
Dr. Kazimierz Cwojdziński (P), Poznań, ul. Szamarzewskiego 13.
Jadwiga Czarnecka (P), Przybysław, poczta Żerków (województwo Poznańskie).
Dr. Bohdan Dehryng, Warszawa, ul. Topolowa, Wojenna Szkoła Inżynierji.
Jean Delsarte, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences 35, rue Saint-Michel Nancy (Meurthe-et-Moselle) France.
Prof. Dr. Samuel Dickstein (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 117.
Pułk. Gerhard Długowski, Rembertów, Centrala badań poligonalnych.
Prof. Dr. Wacław Dziewulski (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 13.
Prof. Dr. Władysław Dziewulski (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 15.
Prof. Dr. Placyd Dziwiński (L), Lwów, ul. Kleinowska 3.
Prof. Dr. Marcin Ernst (L), Lwów, ul. Długosza 25, Instytut Astronomiczny.
Kazimierz Fijoł, Kraków-Podgórze, ul. Józefińska 31.
Prof. Dr. Paul Flamant, Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme, France. 22 rue Morel-Ladeuil.
Prof. Ing. Godofredo Garcia (Wa), Lima (Peru) Apartodo 1979.
Dr. Stefan Glass (Wa), Warszawa, ul. Saska, dom J. Glassa.
Prof. Dr. Lucien Godeaux, Liège (Belgique), 75 rue Frédéric Nyst)
Stanisław Gołąb, Kraków, ul. Lenartowicza 12.
Prof. Dr. Lucjan Grabowski (L), Lwów, Politechnika.
Dr. Henryk Greniewski (Wa), Warszawa, ul. Opaczewska 54 m. 12.
Dr. Aleksander Grużewski (Wa), Warszawa, ul. Ustronie 2, m. 62 (Żoliborz).
Dr. Halina Grużewska (Wa), Warszawa, ul. Ustronie 2, m. 62 (Żoliborz).
Dr. Hasso Härlen, (Allemagne), Eislingen Fils (Würtemberg)

Prof. Dr. Antoni Hoborski, Kraków, ul. Smoleńska 26.
Marja Hommé (L), Lwów, ul. Łyczakowska 151.
Dr. Janina Hossiasson (Wa), Warszawa, ul. Trębacka 6 m. 5.
Prof. Dr. Maksymiljan Huber (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 75, dom A.
Doc. Dr. Witold Hurewicz (Wa), Amsterdam (Hollande), Université.
Dr. Mojżesz Jacob (L), Wien II (Autriche), Wolfgang-Schmälzlgasse 10/16.
Prof. Dr. Maurice Janet, Caen (Calvados) (France), 7, rue de la Délivrande.
Wincenty Janik, Kraków, ul. Studencka, Gimnazjum.
Prof. Dr. Kazimierz Jantzen (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 9 m. 3.
Dr. Stefan Kaczmarz (L), Lwów, Politechnika.
Dr. Stanisław Kalandyk (P), Poznań, ul. Słowackiego 29.
Dr. Bazyli Kalicun-Chodowicki (L), Lwów, ul. Kubali 4.
Prof. Dr. Joseph Kampé de Fériet, Lille (France), S. P. 16, rue des Jardins.
Prof. Dr. Stefan Kempisty (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 24 m. 5.
Dr. Michał Kerner (Wa), Warszawa, ul. Pańska 20 m. 17.
Stefania Klawekówna (P), Poznań, ul. Młyńska 11.
Prof. Dr. J. R. Kline (Wa), Philadelphia (U. S. A.), University of Pensylvania.
Doc. Dr. Bronisław Knaster (Wa), Warszawa, ul. Narbuta 9 m. 3.
Dr. Kobrzyński Zygmunt, (Wa), Warszawa, ul. Wilcza 11, m. 3.
Prof. Dr. Zdzisław Krygowski (P), Poznań, ul. Głogowska 74/75.
Dr. Marjan Kryzan (P), Poznań, ul. Krasińskiego 9.
Prof. Dr. Kazimierz Kuratowski (Wa), Lwów, ul. Nabielaka 12 m. 5.
Dr. Stefan Kwietniewski (Wa), Warszawa, ul. Nowy Świat 72, Seminarjum Mat.
Prof. Dr. Edward Lainé, Angers (France), 3 rue de Rabelais.
Prof. Dr. Franciszek Leja (Wa), Warszawa, Koszykowa 75 m. 16.
Prof. Dr. Stanisław Leśniewski (Wa), Warszawa, ul. Brzozowa 12.
Gustaw Leśnodorski, Kraków, ul. Sobieskiego 10.
Prof. Dr. Tullio Levi-Civita, Roma 25 (Italie), via Sardegna 50.
Władysław Lichtenberg (L), Lwów, Wulecka Droga 78.
Prof. Dr. Leon Lichtenstein (Wa), Leipzig (Allemagne), Grossgörschenstrasse 3.
Dr. Adolf Lindenbaum (Wa), Warszawa, ul. Złota 45 m. 4.
Prof. Dr. Stanisław Loria (L), Lwów, ul. Sykstuska 37.

Prof. Dr. Antoni Łomnicki (L), Lwów, ul. Kosynierska 18.
Zbigniew Łomnicki (L), Lwów, ul. Nabielaka 19.
Prof. Dr. Jan Łukasiewicz (Wa), Warszawa, ul. Brzozowa 12.
Prof. Dr. Mikołaj Łuzin (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Arbat 25/8.
Dr. Adam Maksymowicz (L), Lwów, ul. Batorego 5.
Stanisław Malecki, Dębica, Gimnazjum.
Andrzej Marconi (P), Poznań, ul. Kosińskiego 26.
Stanisław Mazur (L), Lwów, Kętrzyńskiego, 17.
Prof. Dr. Stefan Mazurkiewicz (Wa), Warszawa, ul. Oboźna 11.
Prof. Dr. Karl Menger (Wa), Wien IX (Autriche), Fruchthallergasse 2.
Doc. Inż. Dr. Meyer (L), Wien (Autriche), Université.
Prof. Dr. Dymitr Mieńszow (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Dievitchie Pole, Bojeninowski per. 5 kw. 14.
Prof. Dr. R. L. Moore (Wa), Austin (U. S. A.), University of Texas.
Władysław Moroń (L), Lwów, Uniwersytet Jana Kazimierza.
Sir Thomas Muir, F. R. S. etc., Rondebosch (South Africa).
Zofja Napadiewiczówna (L), Lwów, ul. Bonifratrów 8.
Dr. Jerzy Spława Neyman (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 22 m. 15.
Doc. Dr. Władysław Nikliborc (L), Lwów, ul. Listopada 44 a.
Doc. Dr. Otton Nikodym, Kraków, ul. Kochanowskiego 23.
Dr. Stanisława Nikodymowa (Wa), Kraków, ul. Kochanowskiego 23.
Szymon Ohrenstein, Drohobycz, I. pryw. Gimnazjum żeńskie.
Władysław Orlicz (L), Lwów, ul. Nabielaka 3.
Józef Orłowski (P), Poznań, ul. Matejki 44.
Ludwik Ostrzeniewski (P), Poznań, ul. Ogrodowa 2.
Inż. Jan Pankalla (P), Poznań, ul. Ratajczaka 12.
Dr. Aleksander Pareński (L), Lwów, ul. Szeptyckich 10.
Prof. Dr. Józef Patkowski (Wl), Wilno, ul. Nowogrodzka 22.
Dr. Egon Sharpe Pearson, London W. C. 1, University College, Galton Laboratory.
Prof. Dr. Karl Pearson, London W. C. 1, University College.
Prof. Dr. Tadeusz Pęczalski (P), Poznań, ul. Krasińskiego 14.
Prof. Dr. Antoni Plamitzer (L), Lwów, ul. Gipsowa 32.
Poprużenko Jerzy (Wa), Warszawa, ul. Szopena 6.
Prof. Dr. Gonesh Prasad (Wa), Calcutta (East India) Samavaya Manrions 2 Corporation str.
Prof. Dr. Antoni Przeborski (Wa), Warszawa, Nowy Zjazd 5.
Inż. Józef Przygodzki (P), Poznań, ul. Rybaki, Szkoła Budowlana.

Doc. Dr. Aleksander Rajchman (Wa), Warszawa, ul. Zajęcza 7 m. 9.
Prof. Dr. Alfred Rosenblatt, Kraków, ul. Krowoderska 47.
Stefan Rozental, Łódź, ul. Nawrot 4.
Antoni Rozmus, Piotrków, Gimnazjum państwowe.
Prof. Dr. Juljusz Rudnicki (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 22.
Prof. Dr. Stanisław Ruziewicz (L), Lwów, Uniwersytet Jana Kazimierza, ul św. Mikołaja 4.
Walerja Sabatowska (L), Lwów, ul. Zielona, Gimn. Strzałkowskiej.
Doc. Dr. Stanisław Saks (Wa), Warszawa, Politechnika.
Doc. Dr. Juljusz Schauder (L), Lwów, ul. Zielona 3.
Dr. Lidja Seipeltówna (P), Poznań, ul. Gajowa 4.
Prof. Dr. Pierre Sergesco, Cluj; (Roumanie), Seminar matematic universital.
Ks. Dr. Franciszek Sieczka (Wa) Płock, Seminarjum Duchowne.
Prof. Dr. Wacław Sierpiński (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 55m. 1.
Prof. Dr. Jan Sleszyński, Kraków, ul. Wygoda 7.
Kazimierz Smoliński (P), Poznań, ul. Żupańskiego 16.
Helena Smoluchowska (P), Poznań, ul. Chełmońskiego 8.
Władysław Smosarski (P), Poznań, Uniwersytet.
Szpilrajn Edward (Wa), Warszawa, ul. Ujazdowska 32, m. 9.
Dr. Edward Stamm, Lubowidz, p. Zieluń nad Wkrą (pow. Mława).
Prof. Dr. Wiktor Staniewicz (Wl), Wilno, ul. Uniwersytecka 7.
Inż. Ksawery Stankiewicz, Kraków, ul. Długa 50.
Zofja Starosolska-Szczepanowska (L), Chełmno, Korpus Kadetów Nr. 2.
Dr. Samuel Steckel (Wa), Białystok, Gimnazjum Druskina, ul. Szlachecka 4.
Prof. Dr. Hugo Steinhaus (L), Lwów, ul. Kadecka 14.
Prof. Dr. Włodzimierz Stożek (L), Lwów, ul. Ujejskiego 1.
Prof. Dr. Stefan Straszewicz (Wa), Warszawa-Mokotów, ul. Rejtana 17.
Mjr. Karol Szczepanowski (L), Chełmno, Korpus Kadetów Nr. 2.
Dr. Piotr Szymański (Wa), Warszawa, ul. Żelazna 29 m. 17.
Władysław Ślebodziński (P), Poznań, ul. Głogowska 51.
Doc. Dr. Alfred Tarski (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 51.
Inż. Henryk Titz, Kraków, ul. Św. Tomasza 27.
Mag. Andrzej Turowicz, Kraków, ul. Sobieskiego 7.
Mag. Stanisław Turski, Kraków, ul. Ks. Józefa 29.
Włodzimierz Urbański, Kraków-Podgórze, ul. Krzemionki, Ak. Górn.
Prof. Dr. Giuseppe Vitali, Padova (29) (Italia), Via J. Facciolati 16.
Inż. Kazimierz Vetulani, Kraków, ul. Smoleńska 14.

Dr. Arnold Walfisz (Wa), Warszawa, ul. Królewska 27 m. 16.
Doc. Dr. Tadeusz Ważewski, Kraków, ul. Św. Jana 20.
Prof. Dr. Kasper Weigel (L), Lwów, Politechnika.
Dr. Sala Weinlösówna (L), Lwów, ul. Klonowicza 18.
Prof. Dr. Jan Weyssenhoff (Wl), Wilno, ul. Królewska 4.
Leopold Węgrzynowicz, Kraków, ul. Krowoderska 74.
Marjan Węgrzynowicz (P), Poznań, ul. Łazarska 2a.
Dr. Antoni Wilk, Kraków, ul. Wybickiego 4.
Prof. Dr. Witold Wilkosz, Kraków, ul. Zyblikiewicza 5/7.
Irena Wilkoszowa, Kraków, ul. Zyblikiewicza 5/7.
Dr. Franciszek Włodarski (P), Poznań, Przecznica 6.
Mag. Aleksander Wundheiler (Wa), Warszawa, ul. Pawia 39.
Stanisław Zakrocki, Kraków, ul. Smoleńska 21.
Dr. Zygmunt Zalcwasser (Wa), Warszawa, ul. Leszno 51.
Doc. Dr. Kazimierz Zarankiewicz (Wa), Warszawa, ul. Filtrowa 71.
Prof. Dr. Stanisław Zaremba, Kraków, ul. Żytnia 6.
Mag. Stanisław Krystyn Zaremba (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 11.
Miron Zarycki (L), Lwów, Gimnazjum IX, ul. Chocimska 6.
Doc. Dr. Zygmunt Zawirski (L), Lwów, ul. Leona Sapiehy 51.
Prof. Dr. Zermelo Ernst, Freiburg i/Br. Karlstrasse 60, Allemagne.
Doc. Dr. Antoni Zygmund (Wa), Warszawa, ul. Złota 83 m. 8.
Prof. Dr. Kazimierz Żórawski (Wa), Warszawa, Nowy-Zjazd 5.
Prof. Dr. Eustachy Żyliński (L), Lwów, ul. Długosza 27.

Membres décédés.

Dr. Stanisław Dobrowolski.

Membres dont les adresses manquent.

Bohdan Babski.
Władysław Bogucki.
Dr. Juljan Chmiel.
Inż. Ludwik Kaszycki.
Władysław Majewski (L).
Jan Sobaczek.

Liste des publications périodiques avec lesquelles la Société polonaise de Mathématique échange ses Annales.

1. Acta litterarum et scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae.
2. Abhandlungen des Mathematischen Seminars der Universität in Hamburg.
3. Bulletin de la Société Mathématique de France et Comptes-Rendus des Séances.
4. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society.
5. Annales scientifiques de l'Université de Jassy.
6. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.
7. Monatshefte für Mathematik und Physik.
8. Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg.
9. Seminario Mathematico della Faculta di Science della R. Università di Roma.
10. Bulletin Scientifique de l'Ecole Polytechnique de Temisvara.
11. Contributions al Estudis de las Ciencias Fisicas y Matematicas (La Plata, Argentina).
12. Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk.
13. Fundamenta Mathematicae.
14. Prace Matematyczno-Fizyczne.
15. Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich.
16. Annals of Mathematics.
17. Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse.
18. Transactions of the American Mathematical Society.
19. Journal de l'Ecole Polytechnique.
20. Revue semestrielle des publications math.
21. Wiskundige apgaren met de Oplasingen.
22. Archief voor Wiskunde.
23. Leningradzkie Tow. Fizyczno-Matematyczne.
24. Journal of the Faculty of Science, Imperial University of Tokyo.
25. Universitätsbibliothek, Basel.
26. Academia Romàná, Buenresti.
27. Société Scientifique de Bruxelles.
28. Bayerische Akademie der Wissenschaften, München.
29. Uniwersytet hebrajski w Jerozolimie.
30. Edinburgh Mathematical Society.

31. Société Hollandaise des Sciences.
32. Société Mathématique de Klarkow.
33. La Sociedad Matematica Espanola, Madrid.
34. Koninklijke Akademia van Wetenschappen, Amsterdam.
35. Mathematische Gesellschaft in Hamburg.
36. Unterrichtsblätter für Mathematik u. Naturwissenschaften.
37. London Mathematical Society.
38. Real Academia de Ciencias Exactas, Madrid.
39. Philosophical Society, Cambridge.
40. Norsk Matematisk Forening, Oslo.
41. Académie Royale des Sciences, Bruxelles.
42. Mathematisches Seminar der Universität, Giessen.
43. Societas Scientiarum Fennice, Helsingfors.
44. Matematisk Tidsskrift, Copenhaghe.
45. Société Physico-Mathématique de Kazan.
46. Heidelberger Akademie der Wissenschaften.
47. The Tôhoku Mathematical Journal, Sendai.
48. Naturforscher Gesellschaft bei der Universität Dorpat.
49. Sächsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig.
50. The Mathematical Gazette.
51. The Benares Mathematical Society.
52. Smithsonian Institution, Waschington.
53. Royal Society of Edinburgh.
54. Akademja Górnicza, Kraków.
55. Societatea Romàna de Stiinte.
56. Société Royale des Sciences de Liège.
57. Recueil Mathématique de la Société Math. de Moscou.
58. Journal of Mathematics and Physics, Mossachusetts Institute of Technology.
59. Bolletin del Seminario Mathemático Argentino, Buenos Aires.
60. Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux.
61. Studia Mathematica, Lwów.
62. Časopis pro pěstováni Matematiky a Physiky. Praha.
63. Matematica, Cluj.
64. Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano.

Ouvrages reçus.

1. Henri Villat, Professeur à la Sorbonne, Correspondant de l'Institut. Leçons sur l'Hydrodynamique.
2. Henri Villat, Professeur à la Sorbonne, Correspondant de l'Institut. Leçons sur la théorie des tourbillons.
3. Maurice Janet. Professeur à la Faculté des Sciences de Caen. Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles.
4. Leon Lichtenstein, o, ö Professor an der Universität Leipzig. Grundlagen des Hydromechanik.
5. Aurel Winter. Spektraltheorie der unendlichen Matrizen.

Table des matières.