ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME X

ANNÉE 1931

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LA RÉDACTION S'ADRESSER
A M. STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE XVI, RUE ŻYTNIA, 6

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW 1932

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME X

ANNÉE 1931

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LA RÉDACTION S'ADRESSER À M. STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE XVI, RUE ŻYTNIA, 6

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW 1932

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

Les publications de la Société polonaise de mathématique ont paru pour la première fois en 1921 sous le titre de „Rozprawy Polskiego Towarzystwa matematycznego“ en un volume comprenant aussi bien des mémoires de langue polonaise que des mémoires rédigés en d'autres langues. Depuis 1922 l'organe de la Société porte le titre d'Annales de la Société polonaise de mathématique; les travaux de langue polonaise paraissent dans un Supplément, le corps du volume étant réservé aux travaux de langues française, anglaise, italienne et allemande.

Pour tout ce qui concerne les échanges et l'administration des Annales de la Société Polonaise de Mathématique, s'adresser au Secrétariat de la Société, 20, rue Gołębia, Cracovie (Pologne).

Table des matières.

L'intégration des fonctions sommables

(Suite) [1].

Par

Stefan Kempisty (Wilno).

VI. L'intégrale (A) de M. Denjoy.

1. Dans la note citée au debut de ce mémoire M. Denjoy donne la définition suivante de l'integrale (A) [2].

En se servant des maximums et des minimums d'épaisseur relatifs aux nombres positifs α et β, tels que $\alpha + \beta < 1$ (v. § 6 du chap. I de ce mémoire), il forme des sommes supérieures et inférieures analogues à celles de Riemann. Dans nos notations ce seront:

$$\sum_{i=1}^{n} M'_i \,|I_i|, \qquad \sum_{i=1}^{n} m'_i \,|I_i|,$$

pour une division $I_1, I_2, \ldots I_i, \ldots I_n$ de l'intervalle (a, b).

La limite commune de ces sommes, indépendante de α et de β, pour les divisions dont les normes tendent vers zéro, est, d'après M. Denjoy, l'intégrale (A) de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b).

2. L'étude des intégrales extrêmes approximatives, nous a conduit, indépendamment de la définition de M. Denjoy, à la notion de l'intégrale approximative [3].

Nous allons voir que les deux procédés d'intégration sont equivalents.

Supposons en effet que la fonction $f(x)$ soit intégrable approximativement dans (a, b). Nous avons donc, d'après le § 4 du chap. IV pour l'intégrale approximative de f, l'égalité suivante:

---

[1]) Voir t. VIII, p. 226, Errata: p. 228 à la fin du § 3 ajouter „pour deux valeurs A et B au moins"; p. 237, § 3 v. 27 „$\frac{1}{\lambda}$" au lieu de „$\frac{1}{2-\lambda}$".

[2]) Sur l'intégration riemanienne, Comptes Rendus, t. 169, 1919, p. 220.

[3]) Un procédé d'intégration des fonctions mesurables; Comptes Rendus, t. 180, 1925, p. 812.

$$(A)\int_a^b f(x)\,dx = (\lambda)\int_a^b f(x)\,dx = (\mu)\int_a^b f(x)\,dx,$$

quel que soit λ et μ entre 0 et 1.

Par suite l'intégrale approximative de $f(x)$ est égale à la limite commune des sommes:

$$\sum_{i=1}^{n} m(f, I_i, \lambda)\,|I_i|, \quad \sum_{i=1}^{n} M(f, I_i, \lambda)\,|I_i|,$$

la norme de la division tendant vers zéro.

Or, en vertu du § 6 du chap. 1, nous avons, pour $\lambda = 1 - \alpha$ et $\mu = 1 - \beta$,

$$m(f, I_i, \lambda) = M'_i, \quad M(f, I_i, \mu) = m'_i,$$

donc la fonction $f(x)$ est intégrable (A) et les deux intégrales de f sont égales entre elles.

Inversement quand la fonction f est intégrable au sens (A), son intégrale (A) est égale à la limite de la somme $\sum_{i=1}^{n} m(f, I_i, \lambda)\,|I_i|$, pour $\lambda = 1 - \alpha$, donc à l'intégrale à densité λ près, quelque soit λ, et par suite à l'intégrale approximative.

Ainsi *l'intégrabilité approximatixe est equivalente à l'intégrabilité au sens (A) et les deux intégrales sont égales entre elles.*

3. Comme, d'après le § 4 du chap. IV, toute fonction sommable est intégrable approximativement, nous avons en même temps établi que toute fonction sommable est intégrable au sens (A), ce qui avait été signalé par M. Denjoy dans sa note.

Le théorème inverse est supposé probable par M. Denjoy. Cette hypothèse n'est pas encore verifiée [1]), mais nous pouvons établir que la fonction, dont la valeur absolue est intégrable approximativement, doit être necessairement sommable.

VII. Les propriétés de l'intégrale approximative.

Les intégrales des fonctions d'intervalle g et G définies par les égalités:

---

[1]) Pendant la correction des epreuves M. Denjoy vient de publier dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (t. 193, p. 693) une note contenant la démonstration du théorème inverse.

$$g(f, I, \lambda) = m(f, I, \lambda) \, |I|,$$
$$G(f, I, \lambda) = m(f, I, \lambda) \, |I|,$$

jouissent des propriétés fondamentales de l'intégrale au sens de M. Burkill. En premier lieu elles sont additives en tant que fonctions d'intervalles. C'est à dire, en posant

$$s(f, K, \lambda) = \int_K g(f, I, \lambda),$$

$$S(f, K, \lambda) = \int_K G(f, I, \lambda)$$

et en divisant l'intervalle K en deux intervalles contingus K_1 et K_2, nous avons

$$s(f, K, \lambda) = s(f, K_1, \lambda) + s(f, K_2, \lambda),$$
$$S(f, K, \lambda) = S(f, K_1, \lambda) + S(f, K_2, \lambda).$$

De plus, quand l'intégrale $s(f, K, \lambda)$ resp. $S(f, K, \lambda)$ existe, il en est de même des intégrales $s(f, K_1, \lambda)$ et $s(f, K_2, \lambda)$ resp. des intégrales $S(f, K_1, \lambda)$ et $S(f, K_2, \lambda)$.

Lorsque la fonction est intégrable à densité λ près dans l'intervalle K, c'est à dire lorsque

$$s(f, K, \lambda) = S(f, K, \lambda) = (\lambda) \int_K f(x) \, dx,$$

elle est intégrable à densité λ près dans K_1 et K_2 et nous avons

$$(\lambda) \int_K f(x) \, dx = (\lambda) \int_{K_1} f(x) \, dx + (\lambda) \int_{K_2} f(x) \, dx$$

Si la fonction $f(x)$ est intégrable approximativement dans K, elle est intégrable à densité λ près quel que soit λ dans cet intervalle. Par suite, elle est approximativement intégrable dans K_1 et K_2 et nous avons

$$(A) \int_K f(x) \, dx = (A) \int_{K_1} f(x) \, dx + (A) \int_{K_2} f(x) \, dx.$$

Alors *l'intégrale approximative de $f(x)$ dans l'intervalle K est une fonction additive d'intervalle.*

2. L'intégrale approximative est aussi additive par rapport à la fonction intégrée.

En effet il est facile de voir que:

$$m(f_1\ I, \lambda) + m(f_2, I, \lambda) \leqslant m(f_1 + f_2, I, 2\lambda),$$
$$M(f_1 + f_2, I, 2\lambda) \leqslant M(f_1, I, \lambda) + M(f_2, I, \lambda),$$

donc

$$g(f_1, I, \lambda) + g(f_2, I, \lambda) \leqslant g(f_1 + f_2, I, 2\lambda),$$
$$G(f_1 + f_2, I, 2\lambda) \leqslant G(f_1, I. \lambda) + G(f_2, I, \lambda).$$

Par suite, en vertu du théorème 2.6 de M. Burkill [1]), nous avons

$$\underline{s}(f_1, K. \lambda) + \underline{s}(f_2, K. \lambda) \leqslant \underline{s}(f_1 + f_2, K, 2\lambda),$$
$$\overline{S}(f_1 + f_2, K, 2\lambda) \leqslant \overline{S}(f_1, K, \lambda) + \overline{S}(f_2, K, \lambda).$$

Quand f_1 et f_2 sont intégrables à densité λ près, leur somme est intégrable à densité λ près et, en posant $K = (a, b)$, on a

$$(\lambda)\int_a^b f_1(x)\,dx + (\lambda)\int_a^b f_2(x)\,dx = (2\lambda)\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx.$$

Lorsque f_1 et f_2 sont intégrables à densité λ près quel que soit λ. il en est de même de leur somme. Donc, en faisant tendre λ vers zéro, nous avons

$$(A)\int_a^b f_1(x)\,dx + (A)\int_a^b f_2(x)\,dx = (A)\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx.$$

Ainsi *la somme de deux fonctions intégrables approximativement dans un intervalle K, est intégrable approximativement et l'intégrale de cette somme est égale à la somme des intégrales des fonctions données.*

3. Il est facile de voir que l'intégrale approximative jouit encore des propriétés suivantes:

$$(A)\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)\,dx;$$

---

[1]) Functions of intervals, Proc. Lond. Math. Soc. (2) v. 22 p. 282.

$$(A)\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0, \text{ pour } f(x) \geqslant 0 \text{ et } a < b;$$

$$(A)\int_0^1 dx = 1.$$

Or nous allons établir dans le chapitre suivant que, si la fonction $f_n(x)$ tend en croissant vers la fonction $f(x)$, l'intégrale approximative de $f_n(x)$ tend vers celle de $f(x)$. Ainsi l'intégrale approximative vérifie toutes les six conditions qui déterminent l'intégrale lebesguienne d'une fonction mesurable bornée dans un intervalle [1]. Il s'en suit que, pour les fonctions mesurables bornées, l'intégrale approximative est équivalente à celle de M. Lebesgue, ce qui était d'ailleurs établi, par un autre voie, au § 4 et 6 du chap. III de ce mémoire.

Il est évident que les raisonnements de ce chapitre peuvent être étendus à l'intégrale approximative d'une fonction de plusieurs variables.

VIII. Les fonctions sommables.

1. Dans le § 4 du chap. IV nous avons établi que toute fonction sommable est intégrable approximativement. Nous allons maintenant voir que le théorème inverse est vrai pour les fonctions non négatives.

En effet soit $f(x)$ une fonction non négative et intégrable approximativement dans un intervalle (a, b).

Posons

$$f^N(x) = \min\{f(x), N\}$$

et considérons une division $I_1, I_2, \ldots I_i, \ldots I_n$ de (a, b).

Soit ensuite

$$E = E_x[f(x) > M(f, I_i, \lambda)].$$

D'après la définition de la borne supérieure à densité λ près (§ 1 du chap. 1),

$$|I_i E| \leqslant \lambda |I_i|.$$

Lorsqu'on a

$$M(f, I_i, \lambda) < N$$

[1]) H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, Paris 1904, p. 98—9.

l'ensemble E est égal à l'ensemble

$$E_x[f^N(x) > M(f, I_i, \lambda)]$$

et, en appliquant la formule de la moyenne à l'intégrale lebesguienne, nous avons

$$\int_{I_i E} f^N(x)\,dx \leqslant N\lambda\,|I_i|.$$

Il en résulte que

$$\int_a^b f^N(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^n M(f, I_i, \lambda)\,|I_i| + N\lambda(b-a) =$$

$$= \sum_{i=1}^n G(f, I_i \lambda) + N\lambda(b-a),$$

quels que soient λ et N.

La fonction f étant par hypothèse intégrable approximativement dans (a, b), nous obtenons, en faisant décroître la norme de la division vers zéro, l'inégalité suivante

$$\int_a^b f^N(x)\,dx \leqslant (A)\int_a^b f(x)\,dx + N\lambda(b-a),$$

quel que soit λ entre 0 et 1. Par suite

$$\int_a^b f^N(x)\,dx \leqslant (A)\int_a^b f(x)\,dx < +\infty,$$

quel que soit N, c'est à dire la fonction f est sommable dans (a, b).

Ainsi *toute fonction non négative, intégrable approximativement est sommable.*

2. *Si la valeur absolue d'une fonction est intégrable approximativement, la fonction est sommable*, puisque sa valeur absolue est sommable d'après ce que nous venons d'établir.

Pour vérifier l'hypothèse de M. Denjoy, d'aprés laquelle toute fonction intégrable approximativement est sommable, il suffit donc de montrer qu'une fonction mesurable ne peut être intégrable approximativement sans que sa valeur absolue soit intégrable approximativement.

Comme, en vertu du § 9 du chap. I,

$$m(f, I, \lambda) = m(f_0, I, \lambda) + m(f^0, I, \lambda),$$

nous avons, en multipliant par $|I|$, l'egalité

$$g(f, I, \lambda) = g(f_0, I, \lambda) + g(f^0, I, \lambda)$$

et par suite

$$\sum_{i=1}^{n} g(f, I_i, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} g(f_0, I, \lambda) + \sum_{i=1}^{n} g(f^0, I, \lambda),$$

Alors, si f et f_0 sont intégrables approximativement, il en est de même de la fonction f^0. Or les fonctions f_0 et $-f^0$ sont non négatives, ils sont donc sommables. Comme la valeur absolue de f est égale à la somme des fonctions f_0 et $-f^0$, elle est aussi sommable.

3. De la sommabilité d'une fonction non négative et intégrable approximativement nous pouvons déduire le théorème signalé dans le § 3 du chapitre précedent sur l'intégrabilité d'une suite monotonne. Nous allons énoncer ce théorème de la manière suivante.

Soit $f(x)$ la limite d'une suite non décroissante de fonctions $f_n(x)$:

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots \to f(x).$$

Si $f(x)$ et les fonctions $f_n(x)$ sont intégrables approximativement, nous avons

$$(A)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to\infty} (A)\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

En effet, comme la différence $f - f_n$ est intégrable approximativement (§ 2 du chap. précedent) et non négative, elle doit être sommable et par suite

$$(A)\int_a^b (f - f_n)\,dx = \int_a^b (f - f_n)\,dx,$$

la dernière intégrale étant celle de M. Lebesgue.

Or la suite non croisante

$$f - f_1 \geqslant f - f_2 \geqslant \ldots \geqslant f - f_n \geqslant$$

tend vers zéro.

En appliquant à cette suite le théorème de M. Lebesgue sur l'intégration des suites monotonnes, nous avons

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f - f_n)\,dx = 0.$$

Alors, l'intégrale approximative étant additive par rapport à la fonction intégrée, nous pouvons écrire

$$(A)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}(A)\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Les mêmes proprietés subsistent pour les fonctions de plusieures variables.

IX. Les dérivées de l'intégrale approximative.

1. Considérons un intervalle I qui tend régulièrement vers un point x suivant un paramètre de régularité α, ce que nous avons désigné par

$$I \underset{\alpha}{\rightarrow} x.$$

La limite inférieure (supérieure) du quotient

$$\frac{F(I)}{|I|}$$

sera appelée *dérivée inférieure* (*supérieure*) *de paramètre* α de la fonction d'intervalle $F(I)$ au poit x. Nous écrirons

$$\underline{D}_x^\alpha F = \liminf_{\substack{I\to x\\ \alpha}} \frac{F(I)}{|I|},$$

$$\overline{D}_x^\alpha F = \limsup_{\substack{I\to x\\ \alpha}} \frac{F(I)}{|I|}.$$

Quand le paramètre α décroît, la dérivée inférieure ne croît pas et la dérivée supérieure ne décroît pas.

Soient:

$$\underline{D}_x F = \lim_{\alpha\to 0} \underline{D}_x^\alpha F,$$

$$\overline{D}_x F = \lim_{\alpha\to 0} \overline{D}_x^\alpha F$$

les *dérivées extrêmes régulières* de F au point x [1]. On a donc

$$\underline{D}_x F \leqslant \underline{D}_x^\alpha F \leqslant \overline{D}_x^\alpha F \leqslant \overline{D}_x F.$$

Lorsqu'il existe une seule dérivée régulière $D_x F$, il n'existe qu'une seule dérivée à paramètre α et de plus nous avons

$$D_x F = D_x^\alpha F.$$

2. M. Saks définit, dans son mémoire. „Sur les fonctions d'intervalle“ [2], les dérivées extrêmes qui s'obtiennent du quotient considéré quand l'intervalle I tend vers un de ses points intérieurs, c'est à dire il définit les dérivées extrêmes à paramètre $\frac{1}{2}$.

Il résulte des théorèmes 6 et 7 de M. Saks que, pour la fonction d'intervalle $F(I)$, intégrable au sens de M. Burkill, nous avons presque partout

$$\underline{D}_x^{1/2} F \leqslant \underline{D}_x^{1/2} \int_K F(I) \leqslant \overline{D}_x^{1/2} \int_K F(I) \leqslant \overline{D}_x^{1/2} F.$$

Or, en se servant de la généralisation dûe a M. Lebesgue du lemme de M. Vitali sur les intervalles, on peut facilement étendre les raisonnement de M. Saks aux dérivées de paramètre quelconque.

Alors, *pour une fonction d'intervalle intégrable au sens de M. Burkill, on a presque partout*

$$\underline{D}_x^\alpha F \leqslant \underline{D}_x^\alpha \int_K F(I) \leqslant \overline{D}_x^\alpha \int_K F(I) \leqslant \overline{D}_x^\alpha F.$$

Donc, en faisant décroitre α vers zéro, nous obtenons l'inégalité

$$\underline{D}_x F \leqslant \underline{D}_x \int_K F(I) \leqslant \overline{D}_x \int_K F(I) \leqslant \overline{D}_x F.$$

En particulier, quand il existe une seule dérivée régulière de F, on a presque partout

$$D_x F = D_x \int_K F(I).$$

---

[1]) J. C. Burkill, loc. cit. p. 294.

[2]) Fundamenta Mathematicae t. X, p. 212—224.

3. En appliquant ces théorèmes à la fonction $g(f, I, \lambda)$ et son intégrale $s(f, K, \lambda)$, nous pouvons écrire

$$\underline{D}^{\alpha}_{x} g \leqslant \underline{D}^{\alpha}_{x} s \leqslant \overline{D}^{\alpha}_{x} s \leqslant \overline{D}^{\alpha}_{x} g.$$

Or, d'après la définition de g, nous avons

$$\frac{g(f, I, \lambda)}{|I|} = m(f, I, \lambda)$$

et d'autre part nous avons établi, dans le § 4 du chapitre II, qu'on a en chaque point de continuité approximative de $f(x)$, donc presque partout pour toute fonction mesurable $f(x)$, l'égalité

$$f(x) = \lim_{\substack{I \to x \\ \alpha}} m(f, I, \lambda),$$

quelque soit α et λ entre 0 et 1.

Par conséquent nous avons presque partout

$$f(x) = D^{\alpha}_{x} g.$$

Il résulte donc de notre dernière inégalité que l'intégrale $s(f, K, \lambda)$ est dérivable de paramètre α presque partout et qu'on a p. p.

$$D^{\alpha}_{x} s = D^{\alpha}_{x} g = f(x).$$

Le même raisomnement s'applique à la fonction $G(f, I, \lambda)$ et à son intégrale $S(f, K, \lambda)$; par suite nous avons

$$D^{\alpha}_{x} S = D^{\alpha}_{x} G = f(x)$$

Comme cela a lieu quel que soit α, on a presque partout

$$D_x s = D_x S = D_x g = D_x G = f(x).$$

Lorsque la fonction $f(x)$ de variable réelle est intégrable à densité λ près, c'est à dire lorsque

$$s(f, K, \lambda) = S(f, K, \lambda) = (\lambda) \int_K f(x)\, dx,$$

nous avons presque partout l'égalité

$$D_x \left\{ (\lambda) \int_K f(x)\, dx \right\} = f(x),$$

quel que soit λ. Donc, pour une fonction intégrable approximativement, l'égalité

$$D_x\left\{(A)\int\limits_K f(x)\,dx\right\} = f(x).$$

a lieu presque partout

En autres mots *l'intégrale approximative est une fonction d'intervalle presque partout dérivable régulièrement et sa dérivée régulière est égale p. p. à la fonction intégrée.*

On étend facilement les théorèmes établis dans ce chapitre aux fonctions de plusieures variables.

Sur une propriété des séries doubles.

Par

M. Biernacki.

Considérons une série double

$$(1) \qquad \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$$

où les $a_{\mu\nu}$ sont réels. On peut supposer que l'on a rangé les termes de la série dans un tableau infini à double entrée:

$$(T) \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|l}
\hline
a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} & \cdots\cdots\cdots \quad A \\
\hline
a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots\cdots\cdots \\
\hline
a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots\cdots\cdots \\
\hline
a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \cdots\cdots\cdots \\
\hline
a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \cdots\cdots\cdots \\
\hline
a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \cdots\cdots\cdots \\
\hline
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\
B & & & & & &
\end{array}$$

Il est bien connu que la convergence absolue de la série double équivaut au fait qu'en sommant les termes du tableau T dans un ordre arbitraire on trouve toujours la même somme finie. On peut montrer cependant qu'une condition en apparance moins restrictire est elle aussi équivalente à la convergence absolue de la série.

Considérons une suite infinie de lignes continues sans points doubles: C_1, $C_2, \ldots,$ $C_n, \ldots,$ dont C_n joint un point a_n du bord A du tableau T à un point b_n du bord B. La ligne C_n et les segments des bords A et B du tableau délimitent un domaine D_n *simplement connexe.* Nous supposons que D_{n+1} contient D_n $(n=1,2,3,\ldots)$ et que chaque case du tableau T est contenue dans D_n si n est assez grand. Soit S_n la somme des termes du tableau qui sont contenus dans les cases (que l'on peut supposer fermées) appartenant *complètement* à D_n et supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, la limite S étant indépendante du choix de la suite des courbes C_n (satisfaisant aux conditions requises). Peut-on affirmer que dans ces conditions la série converge absolument? M. F. Leja auquel j'ai posé cette question a prouvé que le réponse est affirmative. En voici une démonstration différente de la celle M. Leja.

Posons $\overset{+}{a}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}$ lorsque $a_{\mu\nu} > 0$ et $\overset{+}{a}_{\mu\nu} = 0$ lorsque $a_{\mu\nu} \leqslant 0$. Il suffit de montrer que la série à termes non négatifs:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \overset{+}{a}_{\mu\nu} \tag{2}$$

est convergente. Supposons que cette série soit divergente et appelons K_n le carré du tableau T composé de cases qui correspondent aux indices μ, ν tels que $0 \leqslant \mu \leqslant n$, $0 \leqslant \nu \leqslant n$.

Soit n_1, un nombre naturel quelconque, il existe en dehors du carré K_{n_1} un ensemble G_{n_1} d'un nombre fini de cases (fermées) tel que les termes correspondants de la série (2) sont tous positifs et que leur somme est plus grande que 1 ; G_{n_1} est contenu dans un carré K_{n_2}.

Il existe en dehors de K_{n_2} un ensemble G_{n_2} d'un nombre fini de cases tel que les termes correspondants de la série (2) sont tous positifs et que leur somme est plus grande que 1 ; G_{n_2} est contenu dans un carré K_{n_3}... nous définissons ainsi de proche en proche les ensembles G_{n_l} $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. L'ensemble G_{n_l} est composé de p_l domaines connexes:

$$H_{n_l}^1,\ H_{n_l}^2, \ldots,\ H_{n_l}^{p_l},$$

soient

$$h_1,\ h_2, \ldots,\ h_{p_l}$$

les ordres de connexion correspondants. En enlevant du $H_{n_l}^m$ où $m = 1, 2, \ldots, p_l$ $(h_m - 1)$ domaines *simplement* connexes (pouvant être composés de cases) qui n'ont aucun point commun entre eux nous obtenons des domaines $H_{n_l}^{m\prime}$ *simplement* connexes. Posons

$G'_{n_i} = \sum_{m=1}^{p_i} H_{n_i}^{m'}$ et $G''_{n_i} = G_{n_i} - G'_{n_i}$. Soit enfin G'''_{n_i} celui des ensembles G'_{n_i} et G''_{n_i} pour lequel la somme des termes correspondants de la série (2) est supérieure à $\frac{1}{2}$. G'''_{n_i} est composé d'un nombre fini de domaines simplement connexes sans points communs. Joignons ces domaines entre eux et avec les bords A et B du tableau par une ligne L_{n_i} continue, sans points doubles et contenue dans le domaine $K_{n_{i+1}} - K_{n_i}$. On peut supposer que la ligne L_{n_i} est composée en partie par des frontières des domaines contenus dans G'''_{n_i} (elle n'a donc pas de points intérieurs à ces domaines). La ligne L_{n_i} et les segments des bords A et B du tableau T délimitent un domaine simplement connexe D_{n_i} que l'on peut supposer contenant G'''_{n_i}. En enlevant de ce domaine l'ensemble G'''_{n_i} nous obtenons un autre domaine simplement connexe D'_{n_i}.

Les sommes des termes de la série proposée (1) qui correspondent aux cases contenues dans D_{n_i} et D'_{n_i} différant de $\frac{1}{2}$ au moins il est clair qu'en sommant cette série (1) par des domaines D_{n_i} et D'_{n_i} on ne peut pas obtenir la même limite, contrairement à l'hypothèse faite. La série (2) est donc convergente C. Q. F. D.

Remarque. On a des extensions évidentes relatives au cas où les $a_{\mu\nu}$ sont complexes et au cas des séries multiples. On peut s'attendre à ce qu'il existe des propositions analogues relatives au cas des intégrales multiples singulières.

Sur une limitation du module de la dérivée des fonctions holomorphes.

Par

M. Biernacki.

1. Dans un Mémoire qui a paru dans le Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres (Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Série A, 1929, p, 529—590) j'ai établi la proposition suivante:

Soit D' un domaine fermé, D un domaine fermé complètement intérieur à D', $\varphi(z)$ une fonction holomorphe dans D'. Désignons par A', A les maxima de $R\{\varphi(z)\}$ (partie réelle de $\varphi(z)$, dans D' et D respectivement et par M le maximum de $|\varphi'(z)|$ dans D.

L'on a:

$$\frac{M}{A' - A} \leqslant H(D', D). \tag{1}$$

Le nombre $H(D', D)$ ne dépend que des domaines D' et D.

Je reproduirai ici la très courte démonstration:

Si la proposition est inexacte, il existe une suite de fonctions $\varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ holomorphes dans D' et telles qu'en désignant par A'_n, A_n, M_n les nombres qui correspondent aux A', A, M mais qui sont relatifs à la fonction $\varphi_n(z)$ on aura:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M_n}{A'_n - A_n} = \infty. \tag{2}$$

Considérons la famille de fonctions

$$h_n(z) = \frac{\varphi_n(z) - \varphi_n(z_n)}{A'_n - A_n}$$

z_n désigne ici un des points de D où $R\{\varphi_n(z)\}$ prend la valeur A_n.

La famille de fonctions $h_n(z)$ est normale dans D' car $R[h_n(z)] \leqslant 1$ dans ce domaine. On peut donc extraire de la suite $\{h_n(z)\}$ une suite partielle $\{h_{n_i}(z)\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ qui converge uniformément dans un domaine qui contient D à son intérieur vers une fonction holomorphe $h(z)$ ou vers la constante infinie. La deuxième éventualité est d'ailleurs exclue car $h_n(z_n) = 0$. Il s'ensuit que la suite de fonctions

$$h'_{n_i}(z) = \frac{\varphi'_{n_i}(z)}{A'_{n_i} - A_{n_i}}$$

converge uniformément dans D vers $h'(z)$ ce qui est en contradiction avec (2). Il résulte de la démonstration que l'on peut supposer le domaine D' *ouvert* [1]), c'est ce que je ferai dans la suite.

2. Désignons par $K(D', D)$ la borne inférieure des nombres $H(D', D)$ de la formule (1). Il est clair que l'on peut remplacer dans cette formule l'acroissement $A' - A$ du maximum de la partie réelle par celui du maximum de coefficient de i on, plus généralement, par l'acroissement $A'_\theta - A_\theta$ de l'extension du domaine décrit par $w = \varphi(z)$ dans la direction $\arg w = \theta$ sans modifier aucunement la valeur de $K(D', D)$.

En d'autres termes l'on a:

$$\frac{M}{\underset{0 \leqslant \theta < 2\pi}{\text{Min.}} (A'_\theta - A_\theta)} \leqslant K(D', D).$$

Désignons encore par $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}$ les maxima (évent. la borne supérieure) de $|\varphi(z)|$ dans les domaines D' et D respectivement. Si $|\varphi(z)| = \mathfrak{M}$ en un point de D de l'affixe $z = r\,e^{i\psi}$, l'on voit de suite que $A'_\psi - A_\psi \leqslant \mathfrak{M}' - \mathfrak{M}$ et par suite l'on a:

$$\frac{M}{\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}} \leqslant H_1(D', D).$$

Si la borne inférieure des nombres $H_1(D', D)$ est $K_1(D', D)$ l'on a

$$K_1(D', D) \leqslant K(D', D).$$

Nous verrons d'ailleurs (§ 5) que dans le cas où D' et D sont deux cercles concentriques K_1 est *plus petite* que K.

---

1) A' sera la *borne supérieure* de $R\{\varphi(z)\}$ dans D'.

3. Je me propose maintenant de calculer le nombre $K(D', D)$ dans le cas où les domaines D' et D sont des cercles concentriques de rayons R' et R respectivement [1]). On peut supposer, sans nuire à la généralité, que le centre des cercles est à l'origine, que $\varphi(0)=0$ et que $R=1$.

Les deux première remarques sont évidentes, quand' à la troisième elle résulte du fait que si $\varphi(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z|<R'$ la fonction $\psi(u)=\varphi(R'u)$ l'est dans le cercle $|u|<1$, A' et A sont les bornes supérieures de $R\{\psi(u)\}$ dans les cercles $|u|<1$ et $|u|\leqslant\frac{R}{R'}$ respectivement, l'on a d'ailleurs $\varphi'(z)=\frac{1}{R'}\cdot\psi'(u)$, si $z=R'u$, il en résulte de suite que

$$K(R', R)=\frac{1}{R'}K\left(1, \frac{R}{R'}\right).$$

4. Nous allons calculer la valeur de $K(1, r)$ $(r<1)$ en utilisant quelques lemmes:

Lemme I [2]). *Si $\varphi(z)$ en holomorphe dans le cercle $|z|<1$, si $R\{\varphi(z)\}<A'$ dans ce cercle et si $\varphi(0)=0$ l'on a dans le cercle $|z|\leqslant r<1$*

$$|\varphi(z)|\leqslant\frac{2rA'}{1-r}. \tag{3}$$

L'égalité n'a lieu que pour les fonctions

$$\varphi(z)=\frac{2A'u}{u-1},\quad u=e^{i\theta}z\quad (\theta \textit{ est un nombre réel arbitraire}).$$

Lemme II [3]). *Si $\varphi(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z|<1$, si $\varphi(0)=0$ et si A' et A sont les bornes supérieures de $R\{\varphi(z)\}$ dans les cercles $|z|<1$ et $|z|\leqslant r<1$ respectivement l'on a:*

$$A'\leqslant\frac{1+r}{1-r}\cdot(A'-A). \tag{4}$$

---

[1]) Il sera désigné par $K(R', R)$.

[2]) Ce lemme en bien connu. Cf. par exemple Pólya-Szegö. Aufgaben und Lehrsätze aus des Analysis (Berlin, J. Springer, 1925), tome I, livre III, exercice 236.

[3]) Ce lemme est bien connu. Cf. par exemple *Pólya-Szegö* loc. cit. tome I, livre III, exercice 283.

L'égalité n'a lieu que pour les fonctions dont il est question dans l'énoncé du lemme 1.

Lemme III [1]). *Si $f(z)$ en holomorphe dans le cercle $|z|<1$ et si les valeurs qu'elle prend dans ce cercle sont contenues dans un angle (ouvert) de sommet à l'origine et d'ouverture $\alpha\pi$, l'on a dans le cercle $|z|\leqslant r<1$*

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{2\alpha}{1-r^2}. \tag{5}$$

L'égalité ne peut avoir lien que dans le cas des fonctions qui représentent conformément le cercle $|z|<1$ sur l'angle d'ouverture $\alpha\pi$.

Pour établir le lemme considérons d'abord une fonction $\psi(z)$, holomorphe dans le cercle $|z|<1$ et supposons que la plus petite largeur d'une bande comprise entre deux droites parallèles qui contient les valeurs prises par $\psi(z)$ dans le cercle $|z|<1$ est Δ.

L'on a [2])

$$|\psi'(0)|\leqslant\frac{2}{\pi}\Delta. \tag{6}$$

Soit a un nombre quelconque de module plus petit que 1, posons $u=\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ ($\bar{a}$ désigne la nombre complexe conjugué de a).

La fonction $\theta(u)=\psi(z)$ est holomorphe dans le cercle $|u|<1$ et y jouit des mêmes propriétés que $\psi(z)$ dans le cercle $|z|<1$. D'ailleurs l'on a: $\psi'(z)=\theta'(u)\cdot\dfrac{du}{dz}$ et $\psi'(a)=\theta'(0)\cdot\dfrac{1}{1-|a|^2}$, par suite $|\psi'(a)|\leqslant\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\Delta}{1-|a|^2}$ ou en posant $|z|=r$:

$$|\psi'(z)|\leqslant\frac{2}{\pi}\frac{\Delta}{1-r^2}. \tag{7}$$

L'égalité ne peut avoir lieu que si elle a lieu dans le formule (6) c. à d. (loc. cit. [2])) lorsque $\psi(z)$ représente conformément le cercle $|z|<1$ sur une bande de largeur Δ qui est comprise entre deux droites parallèles.

---

[1]) Bien que ce lemme se déduit aisément des résultats connus, je ne crois pas qu'il soit énoncé explicitement.

[2]) *Pólya-Szegö*, loc. cit., tome I, livre III, exercice 238.

Si $f(z)$ satisfait aux conditions du lemme III la fonction $\psi(z) = \log f(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z| < 1$ et les valeurs prises par $\psi(z)$ sont contenus dans une bande de largeur $\alpha\pi$ comprise entre deux droites parallèles, en appliquant alors la formule (7), on obient de suite le lemme III.

5. $\varphi(z)$ désignant toujours une fonction holomorphe dans le cercle $|z| < 1$ et telle que $\varphi(0) = 0$, A' et A sont les bornes supérieures de $R\{\varphi(z)\}$ dans les cercles $|z| < 1$ et $|z| \leqslant r < 1$ respectivement. Considérons la fonction $f(z) = \varphi(z) - A'$, sa partie réelle est négative dans le cercle $|z| < 1$, on peut donc lui appliquer le lemme III, il vient:

$$\left|\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z) - A}\right| \leqslant \frac{2}{1 - r^2}, \quad \text{si } |z| \leqslant r.$$

Comme d'ailleurs

$$(8) \qquad |\varphi(z) - A'| \leqslant |\varphi(z)| + A',$$

il s'ensuit que

$$|\varphi'(z)| \leqslant \frac{2}{1 - r^2}[A' + |\varphi(z)|]$$

donc, d'après le lemme I,

$$|\varphi'(z)| \leqslant \frac{2A'}{(1 - r)^2}$$

et en tenant compte du lemme II:

$$|\varphi'(z)| \leqslant \frac{2(1 + r)}{(1 - r)^3} \cdot (A' - A).$$

L'égalité ne peut avoir lieu que si elle a lieu simultanément dans les formules (3), (4), (5), (8) c. à d. que si

$$\varphi(z) = \frac{2A'u}{u - 1}, \quad u = e^{i\theta} z \quad (\theta \text{ est un nombre réel arbitraire}).$$

On constate sans peine que *dans ce cas l'égalité a lieu effectivement.*

En tenant compte des considérations du § 3 nous obtenons de suite la proposition suivante:

Théorème. *Si la fonction $w = \varphi(z)$ est holomorphe à l'intérieur d'un cercle $|z - A| < R'$, si A' et A désignent les bornes supérieures de la partie réelle de $\varphi(z)$ dans les cercles $|z - a| < R'$ et $|z - a| \leqslant \leqslant R < R'$ respectivement et si M est le maximum de $|\varphi'(z)|$ dans le cercle $|z - a| \leqslant R$ l'on a:*

$$\frac{M}{A' - A} \leqslant \frac{2R'(R' + R)}{(R' - R)^3}.$$

L'égalité n'a lieu que dans le cas des fonctions qui représentent conformément le cercle $|z - a| < R'$ sur le demi-plan $R(w) < A'$.

Lorsque l'égalité a lieu l'acroissement (cf. § 2) $\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}$ de la borne supérieure du module de $|\varphi(z)|$ est infini, l'on a donc toujours:

$$\frac{M}{\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}} < \frac{2R'(R' + R)}{(R' - R)^3}.$$

6. En appliquant le théorème du § 5 aux fonctions entières $f(z)$ on obtient de suite l'inégalité [1]):

$$A\left[r + \frac{1}{[A(r)]^{\frac{1}{3} - \varepsilon}}\right] - A(r) > 1$$

valable quelque soit $\varepsilon > 0$ dès que $r > r_0\ (\varepsilon, f)$.

Ce résultat est à rapprocher de l'inégalité „borelienne" qui s'obtient en appliquant une proposition récente de M. Rolf Nevanlinna [2]):

„Quelque petit que soit $\varepsilon > 0$ l'on a:

$$A\left[r + \frac{1}{[A(r)]^{1+\varepsilon}}\right] - A(r) < 1$$

sauf au plus dans les intervalles dont la somme des longueurs est finie".

---

[1]) $A(r)$ c'est le maximum de la partie réelle de $f(z)$ dans le cercle $|z| \leqslant r$.

[2]) Remarques sur les fonctions monotones. Bulletin des sciences mathématiques. II série, tome 55 (1931).

Les quadriques de Tzitzeica et la théorie des surfaces.

Par

Lucien Godeaux (Liège).

On sait que les tangentes asymptotiques des deux modes d'une surface se correspondent dans une transformation de Laplace de l'espace réglé [1]). Les quadriques de Tzitzeica relatives à la suite de Laplace ainsi déterminée fournissent de nouveaux éléments de la théorie des surfaces, comme nous allons le voir. Malheureusement, il est malaisé de trouver une définition simple de ces éléments sans sortir de l'espace à trois dimensions contenant la surface.

1. Soit, dans l'espace ordinaire S_3, une surface (x), non réglée, n'appartenant pas à un complexe linéaire, rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes d'un point x de cette surface satisfont à un système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles que l'on peut mettre sous la forme (Wilczyński)

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$

$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0,$$

où l'on écrit x^{ik} pour $\frac{\partial^{i+k} x}{\partial u^i \partial v^k}$.

---

[1]) Bompiani, Sull' equazione di Laplace (Rend. Circolo matem. di Palermo, 1912, t. XXXIV, pp. 383–407), Tzitzeica, Géométrie différentielle projective des réseaux, (Paris, 1924). Voir également les notes sur la géométrie projective différentielle que nous avons publiées depuis 1927 dans les Bulletins de l'Académie royale de Belgique.

A un point x non parabolique de la surface, attachons le tétraèdre $xx^{10}\,x^{01}\,x^{11}$. Les coordonnées d'un point quelconque de l'espace peuvent s'écrire sous la forme

$$z_1 x + z_2 x^{10} + z_3 x^{01} + z_4 x^{11}$$

et nous dirons que les z sont les coordonnées locales de ce point.

Désignons par Q l'hyperquadrique d'un espace linéaire S_5 représentant les droites de S_3. Soient U, V les points images des tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01}. Les coordonnées de ces points satisfont aux équations

$$U^{10} + 2bV = 0, \quad V^{01} + 2aU = 0$$

et les surfaces (U), (V) sont les transformées de Laplace l'une de l'autre.

Désignons par U_1, $U_2, \dots$ les transformés successifs de Laplace du point U dans le sens des v, par V_1, $V_2, \dots$ ceux de V dans le sens des u. Nous avons

$$U_1 = U^{01} - U(\log \cdot b)^{01}, \quad U_2 = U_1^{01} - U_1(\log \cdot bh)^{01}, \dots$$

moyennant

$$h_1 = -(\log \cdot b)^{11} + 4ab, \dots;$$

$$V_1 = V^{10} - V(\log \cdot a)^{10}, \quad V_2 = V_1^{10} - V_1(\log \cdot ak)^{10}, \dots$$

moyennant

$$k_1 = -(\log \cdot a)^{11} + 4ab, \dots.$$

2. Tout point de l'espace S_5 a des coordonnées de la forme

$$\xi_2 U_2 + \xi_1 U_1 + \xi U + \eta V + \eta_1 V_1 + \eta_2 V_2,$$

les ξ et les η étant les coordonnées locales de ce point.

Considérons la quadrique

$$\xi\eta - h\xi_1\eta_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \eta_2 = 0. \tag{1}$$

Elle appartient à l'espace $U_1 U V V_1$, qui coupe Q suivant deux plans:

1) Le plan déterminé par la droite UV et le point $U_1 - V_1$, qui représente les droites du plan tangent à la surface (x) au point x.

2) Le plan déterminé par la droite UV et le point $U_1 + V_1$, qui représente la gerbe de droites de sommet x.

La quadrique (1) coupe le premier de ces plans suivant une conique dont les points représentent, dans le plan tangent en x à la surface (x), les tangentes à la conique d'équation tangentielle

$$(2) \qquad [2\zeta_2 - \zeta_1 (\log \cdot a)^{10}][2\zeta_3 - \zeta_1 (\log \cdot b)^{01}] - \lambda \zeta_1^2 = 0$$

et d'équation ponctuelle

$$[2z_1 + z_2 (\log \cdot a)^{10} + z_3 (\log \cdot b)^{01}]^2 - 4\lambda z_2 z_3 = 0.$$

Cette conique touche donc les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} aux points où elles sont rencontrées par la seconde directrice de Wilczyński.

La conique (2) et la quadrique de Lie attache au point x et dont l'équation tangentielle est

$$\zeta_1 \zeta_4 - \zeta_2 \zeta_3 - 8ab\, \zeta_1^2 = 0$$

ont en commun les faisceaux de plans dont les axes sont les tangentes asymptotiques, et un cône dont le sommet a pour coordonnées

$$(\log \cdot a)^{10} (\log \cdot b)^{01} - 8ab - \lambda, \ -2(\log \cdot b)^{01}, \ -2(\log \cdot a)^{10}, \ 4.$$

Ce point appartient à la première directrice de Wilczyński

$$\frac{z_2}{(\log \cdot b)^{01}} = \frac{z_3}{(\log \cdot a)^{10}} = \frac{z_4}{-2}.$$

La quadrique (1) coupe le plan déterminé par les points U, V, $U_1 + V_1$ suivant une conique dont les points représentent les génératrices du cône

$$(3) \qquad [2z_2 + z_4 (\log b)^{01}]\, [2z_3 + z_4 (\log a)^{10}] - \lambda z_4^2 = 0.$$

Ce cône touche, le long des tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01}, les plans passant par la première directrice de Wilczyński. Il coupe le quadrique de Lie

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2ab\, z_4^2 = 0$$

suivant les droites xx^{10}, xx^{01} et suivant une conique située dans le plan

$$(4) \ 4z_1 + 2z_2 (\log \cdot a)^{10} + 2z_3 (\log \cdot b)^{01} + z_4 [(\log \cdot a)^{10} (\log \cdot b)^{01} + 8ab - \lambda] = 0.$$

3. Les quadriques de Tzitzeica relatives au tétraèdre $U_1 U V V_1$ sont les quadriques (1) osculant l'une la courbe u tracée sur la surface (U_1) au point U_1, l'autre la courbe v tracée sur la surface (V_1)

au point V_1 [1]). Ces quadriques ont pour équations

$$\begin{aligned} \xi\eta - 3h_1\,\xi_1\,\eta_1 &= 0, \\ \xi\eta - 3k_1\,\xi_1\,\eta_1 &= 0, \end{aligned} \qquad (\xi_2 = \eta_2 = 0).$$

Il leur correspond d'une part les deux plans τ_1, τ_2

$$(\tau_1)\quad 4z_1 + 2z_2(\log a)^{10} + 2z_3(\log b)^{01} + [(\log a)^{10}(\log b)^{01} + 8ab - 3h_1]\,z_4 = 0,$$
$$(\tau_2)\quad 4z_1 + 2z_2(\log a)^{10} + 2z_3(\log b)^{01} + [(\log a)^{10}(\log b)^{01} + 8ab - 3k_1]\,z_4 = 0.$$

et d'autre par les deux points T_1, T_2

$$(T_1)\quad (\log a)^{10}(\log b)^{01} - 3h_1 - 8ab,\; -2(\log b)^{01},\; -2(\log a)^{10},\; 4,$$
$$(T_2)\quad (\log a)^{10}(\log b)^{01} - 3k_1 - 8ab,\; -2(\log b)^{01},\; -2(\log a)^{10},\; 4.$$

Les plans τ_1, τ_2 sont les plans polaires des points T_1, T_2 par rapport à la quadrique de Lie.

Il est évident que la condition nécessaire et suffisante pour que la surface (x) soit isothermo-asymptotique est que les plans τ_1, τ_2 coïncident.

4. La considération des quadriques de Tzitzeica relatives aux tétraèdres VUU_1U_2 et UVV_1V_2 conduit à des surfaces réglées du troisième ordre et à une nouvelle droite, d'équations

$$\frac{z_2}{(\log b^2 h_1)^{01}} = \frac{z_3}{(\log a^2 k_1)^{10}} = \frac{z_4}{-2}.$$

[1]) Pour la définition de ces qurdriques, voir deux notes de M. Tzitzeica parues dans les Comptes rendus, 1926, t. 182.

Liége, Université, 5 octobre 1931.

Über eine integrallose Lösung einer Diophantischen Differentialgleichung.

Von

A. Tsortsis (in Athen).

A. Haar hat in seiner Abhandlung „Zur Variationsrechnung" [1]) zwischen anderen die Aufgabe behandelt „das Verschwinden der ersten Variation bei Variationsproblemen mit zwei oder mehreren unabhängigen Variablen und eine unbekannte Funktion wo nur die ersten Ableitungen der unbekannten Funktion im Variationsproblem auftretten, in Differentialgleichungen umzusetzen, ohne die Einschränkung über die Existenz der höheren Ableitungen zu machen". Der Verfasser hat es bewiesen mit Hilfe eines Lemmas, welches in der Theorie der Doppelintegralen eine ähnliche Rolle spielt, wie das Du Bois-Reymondsche Theorem im Falle eines einfachen Integrals. Hier wollen wir mit Hilfe desselben Lemmas eine integrallose Lösung einer, so genannten, Diophantischen Differentialgleichung finden.

Es sei eine solche Differentialgleichung von der Form gegeben:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0, \tag{1}$$

deren eine ersichtliche Lösung die folgende ist:

$$w_1 = \frac{\partial a_1}{\partial x_2} - \frac{\partial a_n}{\partial x_n}, \quad w_2 = \frac{\partial a_2}{\partial x_3} - \frac{\partial a_1}{\partial x_1}, \ldots, \quad w_n = \frac{\partial a_n}{\partial x_1} - \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_{n-1}},$$

wobei a_k $(k = 1,\ldots, n)$ willkürliche Funktionen der $x_1,\ldots, x_n$ bedeuten.

---

[1]) Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 8 Band, 1 Heft, 1930, S. 1—9.

Um eine andere Lösung der (1) ohne Integration zu bekommen, benutzen wir das genannte Lemma in erweiterten Form d. h. im Falle der n unabhängigen Variablen.

Es sei vorausgesetzt: a) dass jede Funktion $J(x_1, \ldots, x_n)$ im Gebiete G des n-dimensionalen Raumes stetige Ableitungen 1. Ordnung besitzt und im Rande von G gleich Null ist; b) dass n definierte stetige Funktionen $u_k(x_1, \ldots, x_n)$ im G die folgenden Relationen erfüllen:

$$(2) \qquad \underbrace{\int \ldots \int}_{G} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x_i} u_i \, dx_1 \ldots dx_n = 0;$$

dann genügen Sie in Gemeinschaft mit n anderen Hilfsfunktionen U_k deren Ableitungen:

$$\frac{\partial^{n-1} U_k}{\partial x_1 \ldots \partial x_{l-1} \partial x_{l+1} \ldots \partial x_n} \quad (l = 1, \ldots, n)$$

im G vorhanden sind, den Relationen:

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} U_i = 0, \quad \frac{\partial^{n-1} U_k}{\partial x_1 \ldots \partial x_{l-1} \partial x_{l+1} \ldots \partial x_n} = u_k \quad (k \neq l = 1, \ldots, n).$$

Es genügt diesen Satz für das allgemeine Parallelepipedon:

$$(4) \qquad b_k \leqslant x_k \leqslant b'_k \quad (k = 1, \ldots, n)$$

zu beweisen. Zum Zwecke betrachten wir n beliebige stetige differenzierbare Funktionen $X_k(x_k)$ in (4) so dass $X_k(b_k) = X_k(b'_k) = 0$. Setzt man $J = \prod_{l=1}^{n} X_l(x_l)$ im (4) und $J = 0$ ausserhalb desselben, so nimmt (2) folgende Form an:

$$(5) \qquad \int_{b_1}^{b'_1} \ldots \int_{b_n}^{b'_n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{r=1}^{n} X^i_r(x_r) \, u_i \, dx_1 \ldots dx_n = 0$$

wobei ist: $X^\nu_\nu = X'_\nu$, $X^\mu_\nu = X_\nu$. Mit Einführung der Funktion:

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{b_1}^{x_1} \ldots \int_{b_{i-1}}^{x_{i-1}} \int_{b_{i+1}}^{x_{i+1}} \ldots \int_{b_n}^{x_n} u_i(y_1 \ldots y_{i-1}, x_i, y_{i+1} \ldots y_n) \, dy_1 \ldots dy_{i-1} dy_{i+1} \ldots dy_n$$

mit $J = y_n$, die (5) lässt sich folgendermassen schreiben:

$$\int_{b_1}^{b_1'} \ldots \int_{b_n}^{b_n'} \prod_{i=1}^{n} X_i'(x_i)\, \psi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots\, dx_n = 0.$$

Da nun für die $X_k(x_k)$ nur die Voraussetzungen des Du Bois Reymondschen Lemmas gelten müssen, so bekommen wir durch Wiederholung dieses Lemmas und Berücksichtigung der Definition von ψ:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{b_1}^{x_1} \ldots \int_{b_{i-1}}^{x_{i-1}} \int_{b_{i+1}}^{x_{i+1}} \ldots \int_{b_n}^{x_n} [u_i(y_1 \ldots y_{i-1}, x_i, y_{i+1} \ldots y_n) -$$

$$- u_i(y_1, \ldots, y_{i-1}, b_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)]\, dy_1 \ldots\, dy_{i-1}\, dy_{i+1} \ldots\, dy_n = 0.$$

Setzt man nun:

$$U_k = \int_{b_1}^{x_1} \ldots \int_{b_{k-1}}^{x_{k-1}} \int_{b_{k+1}}^{x_{k+1}} \ldots \int_{b_n}^{x_n} u_k(y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k, y_{k+1}, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_{k-1}\, dy_{k+1} \ldots\, dy_n -$$

$$- \frac{1}{n-1} \sum_{l} \int_{b_1}^{x_1} \ldots \int_{b_{l-1}}^{x_{l-1}} \int_{b_{l+1}}^{x_{l+1}} \ldots \int_{b_n}^{x_n} u_k(y_1, \ldots, y_{l-1}, b_l, y_{l+1}, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots$$
$$\ldots dy_{l-1}\, dy_{l+1} \ldots dy_n,$$

so findet man als Folgerung die Relationen (3) und $w_k = u_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ ist offenbar eine integrallosse Lösung der (1).

Nun haben wir noch folgendes zu betrachten. Wenn in (2) eingesetzt ist $u_k = \dfrac{\partial F}{\partial p_k}$, wobei F den Integranden eines Variationsproblems bedeutet:

$$\underbrace{\int \ldots \int}_{G} F(x_1, \ldots, x_{n+1};\, p_1, \ldots, p_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \text{Min.},$$

und x_{n+1} die Gesuchte Funktion der $x_1, \ldots, x_n$ und $p_k = \dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial x_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ ist, so ist, bekanntlich, für eine Lösung $x_{n+1} = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ dieses Problems:

$$\underbrace{\int \ldots \int}_{G \to G} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial p_i}\, dx_1 \ldots\, dx_n = 0,$$

und nach den vorangehenden ergeben sich die Relationen:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0, \quad \frac{\partial^{n-1} U_k}{\partial x_1 \dots \partial x_{l-1}\, \partial x_{l+1} \dots \partial x_n} = \frac{\partial F}{\partial p_k} \quad (k \neq l = 1, \dots, n);$$

folglich, ist $w_k = \dfrac{\partial F}{\partial p_k}$ $(k = 1, \dots, n)$ eine integrallose Lösung der (1).

Durch passende Aenderung der Form der u_k kann man auch eine integrallose Lösung einer allgemeineren Diophantischen Differentialgleichung finden. Setzt man z. B. $u_k = \dfrac{\partial^{\lambda-1} v_k}{\partial x_k^{\lambda-1}}$ $(k=1, \dots, n)$, so ist $w_k = v_k$ eine solche Lösung der Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^\lambda w_i}{\partial x_i^\lambda} = 0.$$

Sur le mouvement d'un système matériel peu différent d'un corps solide.

Par

A. Bilimovitch[1]).

Dans la pratique, on est souvent amené à analyser le mouvement d'un système matériel qui, durant tout son mouvement, diffère très peu d'un corps solide. La théorie générale du mouvement de ces systèmes n'est pas encore établie. En tant qu'elle se rapporte au mouvement de la Terre, elle a été l'objet des travaux des différents savants, parmi lesquels il faudrait citer ici les éminents mathématiciens anglais E. J. Routh, G. H. Darwin et H. Jeffrey, qui avaient étudié ce problème sous divers aspects particuliers.

Depuis quelque temps, je me suis occupé de l'étude de cette question importante[2]) et je me permets de résumer ici quelques resultats sur ce sujet.

Mesure d'écartement.

Soit, à un moment donné, un système matériel arbitraire S dans une position donnée et ayant une distribution des vitesses données. A ce système on peut toujours faire correspondre un corps

---

[1]) Communication faite au Deuxième Congrès des Mathématiciens Polonais, Wilno, 1931.

[2]) 1. Über den Begriff der Erdachse. Gerlands Beiträge (Köppenheft). 1931.

2. О кретању материјалног система који мало одступа од чврстог тела.

3. О могућности секуларних померања земљиног пола. Глас Српске Краљевске Академије Наука. 1932.

solide C ayant: 1) la même masse, 2) la même position du centre d'inertie, 3) le même ellipsoïde d'inertie que le système donné (designons ces trois propriétés par α) et ayant aussi la même quantité de mouvement et le même moment des quantités de mouvement (les propriétés β).

Il est facile de montrer que les propriétés (β) sont les conditions du minimum de la valeur absolue de la différence entre la force vive T_S du système donné et la force vive T_C de tous les corps solides de mêmes propriétés (α). On peut appeler le coéfficient

$$\frac{\mathrm{Min}\,|T_S - T_C|}{T_S}$$

(qui est un coéfficient dans le sens dynamique) la mesure d'écartement du système donné d'un corps solide. Si ce coéfficient est nul, la distribution des vitesses dans ce système correspond à celle d'un corps solide.

Pendant son mouvement, un système matériel arbitraire S change sa structure géométrique et, pour caractériser ce changement, on peut introduire d'autres coéfficients d'écartement; par exemple $\frac{A' - A}{A}$ qui sera le coéfficient d'écartement d'un moment principal d'inertie du système donné S, où A' est la nouvelle valeur de ce moment.

Enfin, pour étudier les mouvements du système donné S et du corps solide C, il faut comparer les résultats des actions des forces intérieures et des forces extérieures dans l'un et l'autre systèmes. Vu que pour un corps solide le travail des forces intérieures est nul, la grandeur de ce travail pour le système S caractérise l'écartement du système donné dans le sens de l'action des forces intérieures. De manière analogue, pour les forces extérieures on peut caractériser l'écartement correspondant par la différence entre le travail des forces extérieures pour le système S et le travail de la force résultante et du moment résultant pour le corps solide C.

Équations différentielles du problème.

Comme conséquence du système des équations différentielles du mouvement d'un système matériel arbitraire S, on peut déduire les équations différentielles vectorielles suivantes:

(I) $$M\dot{v} = \vec{R},$$

$$\text{(II)} \qquad \dot{G} = \dot{G}^* = \vec{L},$$

$$\text{(III)} \qquad m_i \dot{v}_i + 2m_i [\dot{\Omega}, \vec{\varrho}_i] + m_i [\vec{\Omega}, \vec{v}_i] + m_i [\vec{\Omega}[\vec{\Omega}, \vec{\varrho}_i]] = \vec{R}_i$$

où M désigne la masse totale du système,

$\vec{v}$ — la vitesse du centre d'inertie,

$\vec{R}$ — la résultante des forces extérieures,

$\vec{G}$ — le moment des quantités du mouvement du système S par rapport au centre d'inertie,

$\vec{G}^*$ — le même moment pour le corps solide,

$\vec{L}$ — le moment des forces extérieures par rapport au même point,

m_i — la masse d'un point quelconque du système,

$\vec{v}_i$ — la vitesse relative de ce point par rapport à l'espace du corps C,

$\vec{\Omega}$ — la vitesse angulaire du corps C, qui correspond au système donné,

$\vec{\varrho}_i$ — le vecteur du point m_i par rapport au centre d'inertie,

$\vec{R}_i$ — la force résultante pour le point m_i.

Le point au-dessus d'une lettre désigne la dérivation vectorielle par rapport au temps.

Quant aux équations précédentes — la première (I) est l'équation du centre d'inertie du système; le seconde (II) avec $\vec{G}^*$ est l'équation du moment des quantités du mouvement pour le corps fictif C et les troisièmes (III) sont les équations du mouvement relatif des points du système donné par rapport à l'espace du corps C avec la rotation $\vec{\Omega}$.

Suivant le choix des axes, on peut déduire de ces équations (I—III) les équations différentielles du mouvement sous une forme scalaire; ce sont les équations, d'une part, par rapport aux axes immobiles, d'autre part, par rapport aux axes de l'ellipsoïde d'inertie du corps C, puis par rapport aux axes intrinsèques etc.

Dans le cas spécial d'un système matériel peu différent d'un corps solide, on peut écrire les équatious du mouvement sous la forme scalaire suivante:

$$A\frac{d\omega_1}{dt}+(C-B)\,\omega_2\,\omega_3=L_1+\Phi_1(\lambda),$$

où nous avons utilisé les notations bien connues et designé par $\Phi_1(\lambda)$, $\Phi_2(\lambda)$, $\Phi_3(\lambda)$ les fonctions perturbatrices d'un paramètre λ; ces fonctions peuvent dépendre par ex. de $\frac{dA}{dt},\dots$ et, en général, dependent des quantités qui définissent la variation de la structure géométrique du système variable donné. Pour $\lambda=0$ et pour les quantités constantes A, B, C nous obtenons les équations du mouvement d'un corps solide véritable.

Méthode des approximations successives.

De la formation précédente des équations du mouvement d'un système peu différent d'un corps solide il résulte immédiatement la possibilité d'appliquer la méthode des approximations successives à la résolution du problème du mouvement d'un tel système matériel. Pour la première approximation nous avons le mouvement d'un corps solide véritable. Pour la deuxième il faut remplacer les quantités ω_1, ω_2, ω_3 dans les équations (III) par leurs valeurs déduites de la première approximation, ceci nous permet de retrouver les nouvelles expressions pour les quantités A, B, C et pour les fonctions $\Phi_1(\lambda)$, $\Phi_2(\lambda)$, $\Phi_3(\lambda)$ comme fonctions du temps. Alors, nous pouvons obtenir les nouvelles expressions par ω_1, ω_2, ω_3 des équations (II) etc.

Application des formules à la Terre supposée variable.

Une importante application de la théorie précédente est celle de l'étude du mouvement de la Terre; nous pouvons, en effet, considérer la Terre comme un système variable, ou comme un corps solide avec un supplément variable, par ex. l'océan, l'athmosphère etc., qui changent leurs position par rapport au corps principal. Dans mon travail, cité plus haut, j'ai appliqué les formules de la théorie générale à l'analyse du problème de la variation du pôle terrestre sous l'influence des changements géologiques des continents.

ERRATA.

page	ligne	au lieu de	lisez
34	6	ensemble B	ensemble E
38	7	dans A	dans E
38	7 et 8	dérivées	dérivées partielles
38	3 d'en bas	A	E
40	4 „ „	continue dans E	continue dans A

39 Dans la dernière ligne de la note [8]) en bas de la page au lieu de „partie bornée..." on doit avoir „partie fermée, bornée..."

Sur une généralisation d'un théorème de Weierstrass.

Par

Adam Bielecki (Cracovie).

D'après un théorème bien connu de Weierstrass[1]) à toute fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui est continue dans un ensemble E non vide, borné, et fermé correspond une suite de polynomes $P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$ qui converge dans E uniformément vers la fonction F.

Une telle suite de polynomes peut ne pas exister lorsque l'ensemble E n'est pas fermé, bien que la fonction F soit continue dans E. Ceci résulte d'exemples faciles à construire.

En essayant de généraliser ce théorème pour des ensembles E plus généraux on est donc obligé à remplacer les polynomes P_ν par d'autres fonctions.

Or dans maintes applications du théorème de Weierstrass ce n'est pas la circonstance que les P_ν sont précisément des polynomes qui importe; le fait essentiel consiste en ce qu'il existe une suite de fonctions qui convergent uniformément vers F dans E et qui possèdent dans E des dérivées partielles continues jusqu'à un certain ordre (ou de tous les ordres).

Dans le présent travail nous généralisons le théorème de Weierstrass. Notre généralisation se rapporte à des ensembles E d'une vaste classe (ouverts, fermés et non bornés etc.). Nous remplaçons les polynomes P_ν par des fonctions possédant des dérivées

---

[1]) Cf. p. e. L. Tonelli, Sulla representazione analitica delle funzioni di più variabili reali, Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo **29**, 1—36.

partielles continues de tous les ordres (§ 3 et § 4, théorème 1 et 2) [2]). Nous y avons été conduits à l'occasion de l'examen d'un problème qui nous a été obligeamment comuniqué par M. Wilkosz et en particulier en examinant une modification de ce problème qui nous a été proposée par M. Ważewski.

§ 1. I) Un ensemble A contenu dans un ensemble B est appelé *fermé relativement à* E, lorsqu'il subsiste la propriété suivante: Si un point d'accumulation de l'ensemble A appartient à E, il appartient forcément à A.

II) On voit facilement que tout ensemble fermé (au sens ordinaire) est fermé relativement à tout ensemble qui le contient.

Tout ensemble est fermé relativement à lui-même.

Si B est fermé (au sens ordinaire), si A est fermé relativement à E et si $A + B \subset E$, alors $A \cdot B$ est fermé.

III) Soit E un ensemble ouvert. Il existe alors une suite d'ensembles non vides, fermés et bornés, telle que $E = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu$ et tout point de E_ν et un point interieur de $E_{\nu+1}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

Désignons, en effet, par $\varrho(X, Y)$ la distance des points X et Y. Si C est un ensemble non vide, nous désignons par $\varrho(X, C)$ la borne inférieure des distances du point X aux points de l'ensemble C.

Désignons par O l'origine des coordonnées et par S_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ la classe des points pour lesquels $\varrho(X, O) \leqslant \nu$. Si E est identique avec l'espace tout entier, nous posons $E_\nu = S_\nu$. Dans le cas contraire nous désignons par G la frontière de E. Nous choisissons un point X_0 dans E et nous posons $a = \varrho(X_0, G) > 0$. Nous désignons enfin par B_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ la classe des points X pour lesquels

$$\varrho(X, G) \geqslant \frac{a}{\nu} \text{ [3]}.$$

Maintenant il suffit de poser $E_\nu = B_\nu \cdot S_\nu \cdot E$.

§ 2. **Lemme 1.** Supposons que tout point d'un ensemble fermé, borné et non vide A soit un point intérieur d'un ensemble B appartenant à l'espace à n dimensions.

---

[2]) Les résultats du présent travail ont été communiqués le 9 Mai 1931 pendant la séance de la Société Polon. de Math. (Section de Cracovie).

[3]) B_ν est fermé parce que la fonction $\varrho(X, G)$ est continue dans l'espace tout entier.

Il existe alors une fonction $\vartheta(X)$ [4]) jouissant des propriétés suivantes:

1⁰) elle possède partout des dérivées partielles continues de tous les ordres [5]),

2⁰) $\vartheta(X)=0$ dans A,

3⁰) $\vartheta(X)=1$ pour les points étrangers à B,

4⁰) $0\leqslant\vartheta(X)\leqslant 1$ partout.

Démonstration. Soient a et b deux nombres réels $(-\infty < a < b < +\infty)$ quelconques mais fixes dans la suite.

Nous construirons d'abord une fonction $q(u; a, b)$ qui doit être régulière [5]) par rapport à u dans $(-\infty, +\infty)$ et pour laquelle:

$$q(u; a, b)=0 \qquad \text{lorsque } u\leqslant a,$$

$$q(u; a, b)=1 \qquad \text{lorsque } u\geqslant b,$$

$$0\leqslant q(u; a, b)\leqslant 1 \qquad \text{partout.}$$

Considérons à cet effet la fonction définie par les formules:

$$g(u)=e^{-[(u-a)(u-b)]^{-2}} \quad \text{lorsque} \quad u\neq a \quad \text{et} \quad u\neq b,$$

$$g(a)=g(b)=0.$$

On vérifie facilement que cette fonction est régulière dans $(-\infty, +\infty)$ et qu'on a en plus:

$$g^{(\nu)}(a)=g^{(\nu)}(b)=0\ ^{6)} \qquad (\nu=1, 2, \ldots),$$

$$g(u)>0 \qquad \text{lorsque} \quad u\neq a \quad \text{et} \quad u\neq b.$$

De la dernière inégalité on obtient

$$\int_a^b g(u)\,du>0.$$

Désignons cette dernière intégrale par $\frac{1}{k}$ et posons

---

[4]) Nous posons pour abréger $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

[5]) Dans la suite une *fonction* $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sera appelée *régulière* dans un ensemble E lorsqu'elle possède, dans E, des dérivées partielles continues de tous les ordres.

[6]) $g^{(\nu)}(x)$ désigne la ν-ème dérivée de $g(x)$ et $g^{(0)}(x)$ désigne la fonction $g(x)$ elle même.

$$G(u) = \frac{\int\limits_a^u g(u)\,du}{\int\limits_a^b g(u)\,du} = k\int\limits_a^u g(u)\,du.$$

La fonction $G(u)$ est aussi régulière dans $(-\infty, +\infty)$ et nous aurons manifestement

(1) $$G(a) = 0, \qquad G(b) = 1,$$

(2) $$G^{(\nu)}(a) = g^{(\nu-1)}(a) = G^{(\nu)}(b) = g^{(\nu-1)}(b) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

$G(u)$ est une fonction croissante au sens stricte dans $(-\infty, +\infty)$, parce que sa dérivée est partout positive, les points isolés a et b exceptés. Nous avons par suite d'après (1)

$$0 \leqslant G(u) \leqslant 1 \qquad \text{lorsque} \qquad a \leqslant u \leqslant b.$$

Posons

$$q(u; a, b) = G(u) \qquad \text{lorsque} \qquad a \leqslant u \leqslant b,$$
$$q(u; a, b) = 0 \qquad \text{lorsque} \qquad u < a,$$
$$q(u; a, b) = 1 \qquad \text{lorsque} \qquad u > b.$$

La fonction q est évidemment continue dans $(-\infty, +\infty)$.

On constate qu'elle est régulière dans cet intervalle lorsqu'on observe que ses dérivées à droite et à gauche de tous les ordres sont nulles aux points a et b (cf. 2).

Le fonction q jouit bien des propriétés indiquées au commencement.

Considérons maintenant une sphère S constituée par tous les points pour lesquels

$$\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - a_\nu)^2 \leqslant r^2, \quad (r > 0).$$

Nous construirons une fonction $\vartheta(S; X)$ jouissant des propriétés suivantes:

1⁰) elle est régulière dans l'espace tout entier,

2⁰) $\vartheta = 0$ lorsque X appartient à la sphère S' déterminée par l'inégalité

$$\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - a_\nu)^2 \leqslant \left(\frac{r}{2}\right)^2,$$

3°) $\vartheta = 1$ pour les points étrangers à S,

4°) $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$ partout.

Il suffit de poser:

$$\vartheta(S; X) = q\left(\sqrt{\sum (x_\nu - a_\nu)^2}\,;\ \frac{r}{2},\ r\right)^{7)}.$$

Nous revenons maintenant à la démonstration de notre lemme.

D'après les hypothèses faites sur les ensembles A et B il existe un nombre $r > 0$ tel que toute sphère de rayon r et de centre situé sur A est complètement contenue dans B.

Entourons chaque point de A par une sphère de rayon $\frac{r}{2}$. L'ensemble A se laisse couvrir par un nombre fini des sphères de cette sorte:

$$S'_1,\ S'_2,\ S'_3, \ldots, S'_p.$$

On aura

$$A \subset \sum_{\nu=1}^{p} S'_\nu.$$

Désignons par S_ν la sphère de rayon r qui est concentrique avec S'_ν. Nous aurons

$$\sum_{\nu=1}^{p} S_\nu \subset B.$$

Posons

$$\vartheta(X) = \prod_{\nu=1}^{p} \vartheta(S_\nu; X).$$

Ce sera évidemment une fonction régulière partout [7]) et remplissant la condition 4° de notre lemme. Pour les points X de $\Sigma S'_\nu$ (et à plus forte raison pour les points de A) on aura $\vartheta(X) = 0$. Pour les points étrangers à ΣS_ν (et a fortiori pour les points étrangers à B) on aura $\vartheta(X) = 1$.

La fonction $\vartheta(X)$ jouit donc de toutes les propriétés indiquées dans notre lemme.

---

[7]) ϑ est régulière au point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bien que $\sqrt{\Sigma(x_\nu - a_\nu)^2}$ ne le soit pas. Ceci résulte immédiatement de la propriété 2° de la fonction $\vartheta(S; X)$.

§ 3. Théorème 1. Soit E un ensemble ouvert (borné ou non), situé dans l'espace euclidien à n dimensions et soit A une partie non vide de E. Supposons que A soit fermé relativement à E. Soient enfin $\Phi(X)$ et $\eta(X)$ deux fonctions continues dans A et supposons que

$$\eta(X) > 0 \quad \text{dans} \quad A.$$

Il existe alors une fonction $F(X)$ possédant dans A des dérivées continues de tous les ordres pour laquelle:

(1) $$|F(X) - \Phi(X)| \leqslant \eta(X) \quad \text{dans } A.$$

Démonstration. Soit

(2) $$E_1, E_2, \ldots$$

une suite d'ensembles non vides, bornés et fermés constitués de façon que

(3) $$E = \sum_{\nu=1}^{\infty} E_\nu$$

et que tout point de E_ν soit un point intérieur de $E_{\nu+1}$ (une telle suite existe cf. § 1, III). On a

(4) $$E_\nu \subset E_{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Comme $A \subset E$ on aura d'après (3) et (4) à partir d'un certain indice $A \cdot E_\nu \neq 0$. En supprimant au besoin, dans la suite (2), un certain nombre d'éléments, on peut supposer que

(5) $$A \cdot E_1 \neq 0.$$

Posons

(6) $$A_\nu = A \cdot E_\nu.$$

Nous aurons (cf. (4) et (5))

(7) $$A_\nu \neq 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

(8) $$A_\nu \subset A_{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

(9) $$A = \sum A_\nu.$$

Comme E_ν est une partie fermée et bornée de A et comme d'autre part A est fermé relativement à E, les ensembles A_ν sont bornés, fermés et non vides (cf. § 1, II).

Il existe donc, en vertu d'un théorème de Weierstrass, un polynome $P_\nu(X)$ pour lequel [8])

(10) $$|\Phi(X) - P_\nu(X)| \leqslant \eta(X) \quad \text{dans } A_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

En vertu du lemme précédent il existe une suite de fonctions $\vartheta_\nu(X)$ régulières dans l'espace tout entier pour lesquelles

(11) $$\vartheta_\nu(X) = 0 \quad \text{dans } E_\nu,$$

(12) $$\vartheta_\nu(X) = 1 \quad \text{lorsque } X \text{ est étranger à } E_{\nu+1},$$

(13) $$0 \leqslant \vartheta_\nu(X) \leqslant 1 \quad \text{partout.}$$

Formons la suite suivante de fonctions régulières dans l'espace tout entier:

$$F_1(X),\ F_2(X), \ldots$$

où

(14) $$F_1(X) = P_2(X),$$

(15) $$F_{\nu+1}(X) = F_\nu(X) + \vartheta_\nu(X)\,(P_{\nu+2}(X) - F_\nu(X)).$$

Il suffit de prouver que cette suite converge dans E vers une fonction qui est régulière dans E et qui remplit l'inégalité (1).

Or en raison de (11) et (15)

(16) $$F_{\nu+1} = F_\nu \quad \text{dans } E_\nu \text{ et dans } A_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

d'où

(17) $$F_{\nu+\varkappa} = F_\nu \quad \text{dans } E_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \ldots;\ \varkappa = 1, 2, \ldots).$$

Remarquons encore (cf. (15) et (12)) que

(18) $$F_\nu = P_{\nu+1} \ \text{dans } E_{\nu+1} - E_\nu \ (\text{et dans } A_{\nu+1} - A_\nu), \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Soit X_0 un point quelconque de l'ensemble E. Pour un certain ν_0 on aura (cf. 3) $X_0 \in E_{\nu_0 - 1}$. Le point X_0 sera donc situé à l'intérieur de E_{ν_0}. La relation (17) nous donne

$$\lim_{\nu \to \infty} F_\nu(X) = F_{\nu_0}(X) \quad \text{dans } E_{\nu_0} \text{ et en particulier pour } X = X_0.$$

X_0 étant un point arbitraire de E, la suite $F_\nu(X)$ converge

---

[8]) Observons que la fonction $\eta(X)$ atteint dans A_ν un minimum positif $\varepsilon_\nu > 0$. Il suffit de choisir un polynome P_ν pour lequel $|P_\nu - \Phi| \leqslant \varepsilon_\nu$ dans A.

Au lieu de supposer que $\eta(X)$ est continue, il suffirait d'admettre que la borne inférieure de $\eta(X)$ dans toute partie bornée et non vide de A est positive.

dans E vers une fonction $F(X)$. Nous aurons d'après l'égalité précédente

(19) $$F(X) = F_\nu(X) \text{ dans } E_\nu \text{ (et dans } A_\nu), \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

La fonction F est par conséquent régulière dans un certain voisinage du point X_0 arbitraiment choisi dans E parce que la fonction $F_{\nu_0}(X)$ l'est. F est, par suite, régulière dans E.

Il reste à démontrer qu'elle remplit, dans A, l'inégalité (1). En raison de (19) et (9), il suffit de prouver à cette effet que

(20) $$|F_\nu - \Phi| \leqslant \eta(X) \quad \text{dans } A_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Cette inégalité a lieu pour $\nu = 1$ (cf. (8), (10) et (14)).

Admettons que l'inégalité (20) a lieu pour un certain ν. Nous allons prouver qu'il en résulte que l'inégalité

(21) $$|F_{\nu+1} - \Phi| \leqslant \eta(X)$$

a lieu dans $A_{\nu+1}$. Comme $F_{\nu+1} = F_\nu$ dans A_ν (cf. (16)) il reste à démontrer que cette inégalité est remplie dans $A_{\nu+1} - A_\nu$.

Or (cf. (18) et (10))

$$|F_\nu - \Phi| = |P_{\nu+1} - \Phi| \leqslant \eta(X) \quad \text{dans } A_{\nu+1} - A_\nu,$$

$$|P_{\nu+2} - \Phi| \leqslant \eta(X) \text{ dans } A_{\nu+2} \text{ (et dans } A_{\nu+1} - A_\nu).$$

Comme $0 \leqslant \vartheta_\nu(X) \leqslant 1$ dans l'espace tout entier (cf. (13)), nous tirons des deux inégalités précédentes la conclusion [9]) que

$$|F_\nu + \vartheta_\nu(P_{\nu+2} - F_\nu) - \Phi| \leqslant \eta(X) \quad \text{dans } A_{\nu+1} - A_\nu.$$

La démonstration de notre théorème se trouve ainsi terminée.

§ 4. Théorème 2. Soit E un ensemble ouvert, situé dans l'espace à n dimensions et soit A une partie de E non vide et fermée relativement à E (cf. § 1). Supposons qu'une fonction $\Phi(X)$ est continue dans E. Il existe une suite de fonctions possédant dans E des dérivées partielles continues de tous les ordres

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots$$

qui converge uniformément dans A vers Φ.

---

[9]) Supposons en effet que pour des nombres p, f, ϑ, η on ait $|p - \varphi| \leqslant \eta$, $|f - \varphi| \leqslant \eta$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$. L'intervalle $[f, p]$ est alors contenu dans l'intervalle $[\varphi - \eta, \varphi + \eta]$. Le nombre $f + \vartheta(p - f)$ appartient évidemment à l'intervalle $[f, p]$ et à plus forte raison à l'intervalle $[\varphi - \eta, \varphi + \eta]$ c.-à-d. $|f + \vartheta(p - f) - \varphi| \leqslant \eta$.

Démonstration. Soit ν un nombre naturel. Posons, dans le théorème précédent, $\eta(X)=\frac{1}{\nu}$. Il existe en vertu de ce théorème, une fonction $\Phi_\nu(X)$ régulière dans E pour laquelle

$$|\Phi_\nu(X)-\Phi(X)|\leqslant\frac{1}{\nu}\quad\text{dans } A.$$

La suite $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ possède toutes les propriétés en question.

Corollaire 1. Soit $\Phi(X)$ une fonction continue dans un ensemble ouvert E. (E peut être, en particulier, identique à l'espace à n dimensions). Il existe une suite de fonctions qui possèdent dans E des dérivées partielles continues de tous les ordres $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ et qui convergent, dans E, uniformément vers Φ.

Pour la démonstration il suffit de poser dans le théorème précedent $A=E$ et de se rappeler que E est fermé relativement à E (cf. § 1, II).

Corollaire 2. Supposons qu'une fonction $\Phi(X)$ est continue dans un ensemble fermé et *non borné* A. Il existe une suite de fonctions possédant des dérivées partielles continues de tous les ordres dans l'espace à n dimensions et convergeant dans A uniformément vers Φ.

Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème 2. On le voit en désignant par E l'espace à n dimensions (cf. § 1, II).

Remarque sur un théorème de M. Bielecki.

Par

T. Ważewski (Kraków).

M. Bielecki dans sa note (v. ce volume p. 40) généralise le théorème de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues par des polynomes. Dans cette généralisation la fonction à approcher est, par hypothèse, continue dans un ensemble A qui à son tour est fermé relativement à un ensemble ouvert E.

Or abstraction faite du cas où A est identique à l'espace tout entier, il existe une infinité de tels ensembles E s'il en existe un. Mais dans beaucoup d'applications il sera indifférent auquel de ces ensembles E sera appliqué ce théorème. Il importera seulement la question de savoir si un tel ensemble existe et peut être s'il est possible de le construire effectivement.

Nous établirons plus bas une proposition permettant de s'assurer si la condition ci-dessus est vérifiée. On reconnaîtra en particulier que la généralisation de M. Bielecki consiste en la substitution aux ensembles fermés et bornés considérés dans le théorème de Weierstrass d'ensembles susceptibles d'être présentés sous forme de différences de deux ensembles fermés [1]) (bornés ou non). Cela étant *le théorème de M. Bielecki peut être énoncé comme il suit:*

Soit A un ensemble situé dans un espace à n dimensions et pouvant être mis sous la forme

$$A = F - G$$

[1]) Ensemble vide est considéré comme fermé.

ou F et G sont deux ensembles fermés (bornés ou non) [2]), soit en outre une fonction continue dans A.

Il existe alors un ensemble ouvert E contenant A [3]) et une suite f_ν de fonctions, dont chacune admet dans E des dérivées partielles continues de tous les ordres, convergente dans A uniformément vers f.

Cet énoncé a l'avantage de ne pas contenir la notion d'ensemble fermé relativement à un autre ensemble, notion dont l'usage n'est pas très répandu.

Voici maintenant la **proposition** que nous avions en vue:

Les trois propriétés suivantes:

α) il existe un ensemble E ouvert relativement auquel A est fermé;

β) l'ensemble $A' - A$ est fermé;

γ) il existe deux ensembles fermés F et G tels que $A = F - G$;

sont équivalentes.

Démonstration. 1. On dit qu'un ensemble B est fermé relativement à C lorsque

$$B \subset C, \quad B'.C = B'.B.$$

2. Cela posé observons que tout ensemble A est fermé par rapport à

$$-(A' - A).$$

En effet pour l'établir il suffit de prouver que l'on a:

$$A \subset \{-(A' - A)\}; \quad A'.\{-(A' - A)\} = A'A.$$

Or ces relations résultent de l'identité $-(A' - A) = A + (-A')$.

3. Supposons que la propriété β ait lieu. L'ensemble $-(A' - A)$ est alors ouvert et la propriété α subsiste en vertu de l'alinéa précédent [4]). Supposons maintenant que la propriété α ait lieu. On aura

---

[2]) $C.D$ (ou CD) désigne la partie commune des ensembles C et D. Par $-C$ on désigne l'ensemble complémentaire de C. On définit $C - D = C.(-D)$.

Par A' nous désignons la dérivée de A c.-à-d. la classe des points d'accumulation de A.

L'hypothèse du présent théorème peut être remplacée par l'hypothèse que l'ensemble $A' - A$ est fermé (v. la proposition qui suit).

[3]) On peut poser $E = A + \{-(A')\} = -(A' - A)$.

[4]) $-(A' - A)$ forme dans le présent cas le plus large ensemble ouvert relativement auquel A est fermé.

les relations:

$$A'A = A'E; \quad \{-E\} \text{ est fermé}; \quad -E = (-E)(-A)$$

(la dernière de ces relations résulte de ce que $A \subset E$). Par conséquent

$$A' - A = A'.(-A).E + A'.(-A)(-E) = A'.(-E)$$

et le dernier ensemble est évidemment fermé. Les propriétés α et β sont donc bien équivalentes.

4. Pour tout ensemble A on a

$$A = (A + A') - (A' - A)$$

la propriété β entraîne donc la propriété γ car $A + A'$ est toujours fermé (on pose $F = A + A'$, $G = A' - A$). Inversement de la propriété γ il résulte

$$A = F - G; \quad A \subset F; \quad A' \subset F \text{ c.-à-d. } A' = A'F$$

d'où

$$A' - A = A'F(-F + G) = A'FG$$

et le dernier ensemble est fermé. Les propriétés β et γ sont donc aussi équivalentes.

Notre proposition est donc complètement démontrée.

Courbes dans des espaces généralisés.

Trois conférences à Cracovie au mois de mai 1931.

Par

V. Hlavatý (Prague).

I.

(1) Imaginons un espace X_n, rapporté aux coordonées x^ν [1]). Étant donné dans X_n un tenseur $g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$ du rang n on peut s'en servir pour construire les symboles de Christoffel

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = {}^1/_2\, g^{\nu\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right). \tag{1}$$

Ici $g^{\nu\alpha}$ sont les composantes contrevariantes du tenseur $g_{\lambda\mu}$

$$g^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} = A^{\nu}_{\mu} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \nu = \mu \\ 0 & \phantom{\text{pour}} \quad \nu \neq \mu. \end{cases}$$

Les symboles (1) donnent naissance à la connexion riemannienne dans X_n. En désignant par D_μ le symbole de la dérivée covariante de cette connexion on a pour n'importe quel affineur $V^{\nu_1\ldots\nu_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_r}$

$$\begin{aligned} D_\mu V^{\nu_1\ldots\nu_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_r} &= \frac{\partial V^{\nu_1\ldots\nu_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_r}}{\partial x^\mu} + \\ &+ \sum_1^p{}_u\, \Gamma^{\nu_u}_{\lambda\mu} V^{\nu_1\ldots\nu_{u-1}\lambda\nu_{u+1}\ldots\nu_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_r} - \sum_1^r{}_u\, \Gamma^{\nu}_{\lambda_u\mu} V^{\nu_1\ldots\nu_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_{u-1}\nu\lambda_{u+1}\ldots\lambda_r}. \end{aligned} \tag{2}$$

Remarquons qu'en particulier

$$\begin{aligned} D_\mu g_{\lambda\nu} &= 0 \\ D_\mu g^{\lambda\nu} &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

---

[1]) Les indices grecs parcourent les symboles $1, \ldots, n$. On effectue la sommation d'après un indice muet sans que le symbole de la sommation soit écrit.

et par conséquent $g_{\lambda\mu}$ peut être pris pour tenseur **métrique**. L'espace X_n, doué d'une connexion riemannienne, sera dit „la variété riemanienne“ et désigné par V_n.

Les conditions d'intégrabilité du système

$$D_\mu v^\nu = 0 \quad (v^\nu \text{ étant un vecteur arbitraire})$$

sont

$$(4) \qquad R^{\nu}_{\omega\mu\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma^{\nu}_{\lambda\omega} - \frac{\partial}{\partial x^\omega} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\omega} \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} \Gamma^{\alpha}_{\lambda\omega} \text{ [2]}.$$

$R^{\nu}_{\omega\mu\lambda}$ est l'affineur de Riemann, qui donne naissance à la notion de la courbure de V_n. Si $R^{\nu}_{\omega\mu\lambda} = 0$ la variété V_n se réduit à une variété euclidienne R_n. Si $R^{\nu}_{\omega\mu\lambda} \neq 0$, nous dirons que le „parallélisme à distance finie“ (le téléparallélisme) n'existe pas. Or, dans une variété riemannienne qui ne se réduit pas à une variété euclidienne, le parallélisme à distance finie n'existe pas.

(2) Imaginons donnée, dans une V_n, une courbe C, aux équations paramétriques

$$(5) \qquad x^\nu = x^\nu(s),$$

et supposons que le paramètre s soit choisi de telle manière que

$$(6) \qquad \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} g_{\lambda\mu} = 1 \text{ [3]}.$$

Nous dirons dans ce cas que s est l'arc métrique de C et de plus que le vecteur (tangent) $\frac{dx^\nu}{ds}$ est un verseur (tangent) de C. Cela étant, construisons un champ versoriel $\underset{1}{A}^\nu(s)$ le long de C. Ce champ donne naissance à quelques notions métriques que nous voulons étudier de près. Introduisons à cet effet la notion de l'angle, serré par $\underset{1}{A}^\nu(s)$ et $\underset{1}{A}^\nu(0)$. Le parallélisme à distance finie n'existant pas dans notre V_n, nous ne pouvons pas comparer deux directions à distance finie. Mais nous pouvons introduire quand même une

---

[2]) La bibliographie est placée à la fin. Les numéros figurant entre parenthèses dans les remarques renvoient à cette bibliographie: (31), pp. 83, 183, 73. Cfr. aussi (34).

[3]) Nous supposerons — sauf l'avis contraire — que pour n'importe quel vecteur réel v^λ la forme $g_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu$ soit définie positive.

notion qui se réduit à celle de l'angle dans le cas d'une variété euclidienne. Construisons à cet effet un autre champ versoriel $B^\nu(s)$ qui est l'intégrale du système

(7) $$DB^\nu = \frac{dB^\nu}{ds} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\frac{dx^\mu}{ds}B^\lambda = 0,$$

Nous dirons, par définition, que le champ B^ν est parallèle à lui-même le long de C. On peut disposer des constantes arbitraires qui interviennent dans l'intégrale B^ν de telle manière que soit

$$B^\nu(0) = \underset{1}{A}^\nu(0).$$

Cela étant, l'angle a, serré par les verseurs $A^\nu(s)$ et $B^\nu(s)$ (définis au même point s de C) est donné par

(9) $$\cos a = g_{\lambda\mu}A^\lambda(s)\,B^\mu(s).$$

Nous dirons que a est aussi l'angle de $\underset{1}{A}^\nu(0)$ et $\underset{1}{A}^\nu(s)$. (Si notre V_n se réduit à une R_n, on retombe ainsi à la définition classique de l'angle, serré par $\underset{1}{A}^\nu(0)$ et $\underset{1}{A}^\nu(s)$ car, le cas échéant, on aurait aussi $B^\nu(0) = B^\nu(s)$, dans un système des coordonnées, choisi convenablement). Nous dirons que

$$\left(\frac{da}{ds}\right)_{s=0} = \underset{1}{k}(0)$$

est la première courbure du champ $\underset{1}{A}^\nu(s)$ au point $s = 0$. On voit donc que la première courbure mesure en quelque sorte la déviation du champ $\underset{1}{A}^\nu$ par rapport à lui-même. En tenant compte de (9), on trouve pour s suffisament petit

$$\cos a(s) = 1 - \frac{s^2}{2!}(DA^\lambda\,DA^\mu\,g_{\lambda\mu})_{s=0} + \dots$$

d'où

(10) $$\left(\frac{da}{ds}\right)_{s=0} = \underset{1}{k}(0) = (g_{\lambda\mu}\,DA^\lambda\,DA^\mu)^{1/2}_{s=0}.$$

Le point $s = 0$ étant par hypothèse un point général de C et de V_n, nous avons aussi

(11)' $$\frac{da}{ds} = \underset{1}{k}(s) = g_{\lambda\mu}\,D\underset{1}{A}^\lambda\,D\underset{1}{A}^\mu.$$

En choisissant convenablement l'orientation du verseur $\underset{2}{A}^\nu$, qui est situé dans la direction du vecteur $D\underset{1}{A}^\nu$, on déduit de (10)

(11) $$D\underset{1}{A}^\nu = \underset{1}{k}\underset{2}{A}^\nu.$$

Les verseurs $\underset{1}{A}^\nu$, $\underset{2}{A}^\nu$ connus, on peut calculer $D\underset{2}{A}$

$$D\underset{2}{A}^\nu = \frac{d\underset{2}{A}^\nu}{ds} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\underset{1}{A}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds}.$$

Supposons que les vecteurs $\underset{1}{A}^\nu$, $\underset{2}{A}^\nu$, $D\underset{2}{A}^\nu$ soient linéairement indépendants. Dans ce cas ils définissent une facette à trois dimensions (le trivecteur osculateur du champ $\underset{1}{A}^\nu$) et par conséquent on peut trouver le verseur $\underset{3}{A}^\nu$, orthogonal à $\underset{1}{A}^\nu$, $\underset{2}{A}^\nu$, situé dans cette facette. Il s'ensuit que $D\underset{2}{A}^\nu$ résulte en combinaison linéaire des verseurs $\underset{1}{A}^\nu$, $\underset{2}{A}^\nu$, $\underset{3}{A}^\nu$

(12) $$D\underset{2}{A}^\nu = \lambda\underset{1}{A}^\nu + \mu\underset{2}{A}^\nu + \underset{2}{k}\underset{3}{A}^\nu,$$

avec les coefficients λ, μ, $\underset{2}{k}$ facilement à calculer. En effet on a en raison de (3) et (11)

$$\lambda = g_{\lambda\mu}\underset{1}{A}^\lambda D\underset{2}{A}^\mu = -g_{\lambda\mu}\underset{2}{A}^\lambda D\underset{1}{A}^\mu = -\underset{1}{k}$$

$$\mu = g_{\lambda\mu}\underset{2}{A}^\lambda D\underset{2}{A}^\mu = 0$$

$$(\underset{2}{k} = g_{\lambda\mu}\underset{3}{A}^\lambda D\underset{2}{A}^\mu = -g_{\lambda\mu}\underset{2}{A}^\lambda D\underset{3}{A}^\mu),$$

ainsi que (12) se simplifie à

(13) $$D\underset{2}{A} = -\underset{1}{k}\underset{1}{A} + \underset{2}{k}\underset{3}{A}.$$

$\underset{2}{k}$ est la deuxième courbure du champ $\underset{1}{A}^\nu$. Elle mésure la déviation du champ $\underset{3}{A}^\nu$ par rapport au champ $\underset{2}{A}^\nu$. En effet si l'on construit un champ versoriel $C^\nu(s)$ parallèle à lui-même le long de C, en partant du verseur

$$C^\nu(0) = \underset{2}{A}^\nu(0),$$

et si l'on désigne par b l'angle serré par $C^\nu(s)$ et $\underset{3}{A}^\nu(s)$ on obtient facilement

$$\left(\frac{db}{ds}\right)_{s=0} = \underset{2}{k}(0),$$

ou bien, le point $s=0$ étant par hypothèse un point général de la courbe en question,

$$\frac{db}{ds} = \underset{2}{k}(s).$$

En poursuivant plus loin cette méthode, on parvient à un système des équations que l'on peut condenser dans

$$D\underset{a}{A^{\nu}} = -\underset{a-1}{k}\underset{a-1}{A^{\nu}} + \underset{a}{k}\underset{a+1}{A^{\nu}}\text{ [4]} \quad (a=1,\ldots,n;\ \underset{0}{k}=\underset{n}{k}=0).$$

Les verseurs $\underset{1}{A^{\nu}},\ldots,\underset{n}{A^{\nu}}$, mutuellement orthogonaux, définissent le repère normal du champ $\underset{1}{A^{\nu}}$, dont les courbures sont $\underset{1}{k},\ldots,\underset{n-1}{k}$. Pour $a=2,\ldots,n-1$ la courbure $\underset{a}{k}$ mesure la déviation du champ versoriel $\underset{a+1}{A^{\nu}}$ par rapport au champ versoriel $\underset{a}{A^{\nu}}$.

Je n'insisterai pas sur les cas particuliers ($\underset{m}{k}=0$) mais je remarque plutôt que le champ $\underset{1}{A^{\nu}}$ étant construit suivant une loi arbitraire, rien ne nous empêche de supposer qu'il ne soit le champ versoriel tangent de C. Le cas échéant les formules (14) nous présentent la plus naturelle généralisation des formules de Frenet pour une courbe dans R_n [4]).

Nous sommes donc parvenus grâce à la notion de la dérivée covariante D le long de C, à un système des formules qui correspond formellement au système de Frenet dans R_n. Mais on ne peut pas en conclure que la courbure de la variété ambiante V_n ne joue aucun rôle dans la théorie des courbes. J'aurai encore l'occasion de revenir sur ce sujet important mais pour le moment je veux résoudre le problème suivant: „Étant donné un système des fonctions holomorphes $\underset{1}{k}(s),\ldots,\underset{n-1}{k}(s)$, on doit trouver le champ versoriel $\underset{1}{A^{\nu}}(s)$ qui ait ces fonctions pour courbures“. Désignons à cet effet par $\overset{b}{\underset{a}{i}}$ les n intégrales particulières, linéairement indépendantes du système différentiel

---

[4]) (33), avec une autre interprétation des courbures.

$$\frac{d\underset{a}{i}}{ds} = -\underset{a-1}{k}\;\underset{a-1}{i} + \underset{a}{k}\;\underset{a+1}{i}\,, \tag{15}$$

normalisées par la condition

$$\sum_1^n{}_c \overset{c}{\underset{a}{i}}\,\overset{c}{\underset{b}{i}} = \delta_{ab} = \left|\begin{matrix} 0 & & a \neq b \\ & \text{pour} & \\ 1 & & a = b \end{matrix}\right. \qquad (a, b = 1, \ldots, n).$$

Cela étant, choisissons dans V_n un point $\underset{0}{x}^\nu$, qui par hypothèse sera le point $s=0$ et construisons la courbe

$$x^\nu - \underset{0}{x}^\nu = \sum_1^n{}_c \int_0^s \underset{c}{C}^\nu(0)\,\overset{c}{\underset{1}{i}}(s)\,ds\,, \tag{16}$$

qui passe par $s=0$. Ici $\underset{c}{C}^\nu(0)$ désigne le repère versoriel local, choisi arbitrairement, qui donne naissance au repère versoriel $\underset{c}{C}^\nu(s)$, parallèle à lui-même le long de la courbe construite. Grâce au parallélisme de ce repère, le champ cherché peut s'écrire

$$\underset{1}{A}^\nu = \sum_1^n{}_c \underset{c}{C}^\nu(s)\,\overset{c}{\underset{1}{i}}(s) \tag{17}$$

et de plus, son repère normal est

$$\underset{a}{A}^\nu = \sum_1^n{}_c \underset{c}{C}^\nu(s)\,\overset{c}{\underset{a}{i}}(s)\ ^{5)} \qquad (a = 1, \ldots, n),$$

comme on peut s'en persuader facilement, en cherchant la derivée covariante du vecteur $\underset{a}{A}^\nu$. La question ainsi résolue, remarquons que les composantes du repère

$$\underset{a}{\bar{A}}^\nu = \sum_1^n{}_c \underset{c}{C}^\nu(0)\,\overset{c}{\underset{a}{i}}(s)$$

au point s de la courbe sont en même temps les composantes du repère (au point $s=0$) que l'on obtient en déplaçant parallèlement à lui-même le repère $\underset{a}{A}^\nu(s)$ du point s au point $s=0$ le long de la courbe en question.

---

[5]) (24).

Envisageons maintenant le problème analogue dans une variété W_n de M. Weyl.

C'est un espace à n dimensions, doué d'une connexion linéaire aux coefficients

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = {}^1/_2\, g^{\nu\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right) + \tag{17'}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(Q_{\mu} A^{\nu}_{\lambda} + Q_{\lambda} A^{\nu}_{\mu} - g^{\nu\alpha} Q_{\alpha} g_{\lambda\mu}\right)$$ [6])

où Q_{μ} est un vecteur covariant, donné d'avance, qui n'est pas un vecteur gradiant. La dérivée covariante de $g_{\lambda\mu}$ dans cette connexion est

$$D_{\mu} g_{\lambda\nu} = - Q_{\mu} g_{\lambda\nu}\,. \tag{18}$$

D'autre part, en posant

$$\bar{g}_{\lambda\mu} = p(x)\, g_{\lambda\mu}\,, \quad \bar{Q}_{\mu} = Q_{\mu} - \frac{\partial \log p}{\partial x^{\mu}}\,, \tag{19}$$

on obtient dans la même connexion

$$D_{\mu}\, \bar{g}_{\lambda\nu} = - \bar{Q}_{\mu}\, g_{\lambda\nu}\,.$$

D'après l'hypothèse faite sur le vecteur Q_{μ}, on ne peut pas trouver une telle fonction $p(x)$ que soit $D_{\mu}\, \bar{g}_{\lambda\nu} = 0$. On voit donc que dans une W_n la métrique n'est définie qu'à un facteur arbitraire $p(x)$ près. Autrement dit, tous les tenseurs $\bar{g}_{\lambda\mu}$ sont équivalents par rapport à la connexion de M. Weyl, quelque soit la fonction $p(x)$. Cela posé, imaginons dans W_n une courbe C aux équations

$$x^{\nu} = x^{\nu}(t)$$

et un champ vectoriel $V^{\nu}(t)$ défini le long de C et tâchons de trouver les invariants de ce champ qui sont indépendants du changement de la métrique (19).

Construisons à cet effet un tenseur $a_{\mu\lambda} = a_{\lambda\mu}$ du rang n qui est indépendant de ce changement

$$\bar{a}_{\lambda\mu} = a_{\lambda\mu} \tag{20}$$

et dont la dérivée covariante le long de C est nulle

$$\frac{dx^{\mu}}{dt} D_{\mu}\, a_{\lambda\nu} = D\, a_{\lambda\nu} = 0. \tag{21}$$

---

[6]) (31) p. 217.

En désignant par $w^{-1}(t)$ le déterminant des vecteurs

$$\frac{dx^\nu}{dt} = \underset{1}{v^\nu}, \quad D\underset{1}{v^\nu} = \underset{2}{v^\nu}, \quad D\underset{2}{v^\nu} = \underset{3}{v^\nu}, \ldots, D\underset{n-1}{v^\nu} = \underset{n}{v^\nu},$$

supposés linéairement indépendants et par g la racine carrée du déterminant de $g_{\lambda\mu}$ on constate facilement que le tenseur

$$a_{\lambda\mu} = \left(\frac{w(0)}{g(0)}\right)^{2/n} g_{\lambda\mu}\, e^{\int\limits_{t_0}^{t} Q_\mu dx^\mu}$$

jouit des propriétés (20) et (21). Mais ces propriétés sont caractéristiques pour le tenseur métrique. Il s'ensuit que l'on peut prendre le tenseur $a_{\lambda\mu}$ pour tenseur métrique le long de C. Cela étant, on peut définir toutes les notions métriques par rapport à $a_{\lambda\mu}$ (comme nous l'avons fait dans V_n par rapport à $g_{\lambda\mu}$) et toutes ces notions sont par conséquent indépendantes du changement (19) de la métrique. On se sert avant tout de $a_{\lambda\mu}$ pour introduire l'arc de C au moyen de l'équation

$$s = \left(\frac{w(0)}{g(0)}\right)^{1/n} \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu}\; e^{\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} Q_\mu dx^\mu}$$

et de plus, on définit le champ versoriel $\underset{1}{A^\nu}$, correspondant au champ vectoriel V^ν

$$\underset{1}{A^\nu} = V^\nu \left\{ V^\lambda V^\mu \left(\frac{w(0)}{g(0)}\right)^{2/n} g_{\lambda\mu}\, e^{\int\limits_{t_0}^{t} Q_\alpha dx^\alpha} \right\}^{-1/2}.$$

Ceci posé, on peut employer la même méthode que nous avons appliquée dans V_n et on parvient au système des équations

$$\frac{dx^\mu}{ds} D_\mu \underset{a}{A^\nu} = -\underset{a-1}{k}\, \underset{a-1}{A^\nu} + \underset{a}{k}\, \underset{a+1}{A^\nu} \qquad (a = 1, \ldots, n; \quad \underset{0}{k} = \underset{n}{k} = 0).$$

Or, le tenseur $a_{\lambda\mu}$ nous permet d'adjoindre — même dans une W_n — à un champ vectoriel le repère versoriel normal et de calculer en même temps ses courbures. Comme nous l'avons déjà remarqué, toutes ces notions métriques sont indépendantes du choix spécial de la fonction $p(x)$ [7]).

[7]) (23). Un autre système dans (31) p. 225. Voir aussi (25), (26) pour les courbures calculées par rapport à un tenseur $g_{\lambda\mu}$ privilégié.

Il ne nous reste maintenant que de traiter le problème des invariants du champ vectoriel $V^\nu(t)$ construit le long d'une courbe C dans une variété générale L_n, c'est-à-dire dans un espace à n dimensions, doué d'une connexion générale. Dans ce cas les coefficients $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ ne sont soumis à aucune condition restrictive. En particulier, on ne peut pas parler des notions métriques, le tenseur métrique n'étant pas donné. Mais on réussit quand même à trouver les invariants du champ $V^\nu(t)$, grâce au fait que l'intégrale de l'équation

$$Dw = \frac{dx^\mu}{dt} D_\mu w = \frac{dw}{dt} + \Gamma^\alpha_{\alpha\mu} \frac{dx^\mu}{dt} w = 0$$

est une densité du poids -1. Introduisons, à côté du champ $\underset{1}{V^\nu} = V^\nu$, les champs dérivés

$$\text{(22)} \quad \underset{2}{V^\nu} = D\underset{1}{V^\nu} = \frac{d\underset{1}{V^\nu}}{dt} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} \frac{dx^\mu}{dt} \underset{1}{V^\lambda}, \quad \underset{3}{V^\nu} = D\underset{2}{V^\nu}, \ldots, \underset{n}{V^\nu} = D\underset{n-1}{V^\nu}$$

supposés linéairement indépendants et de plus, construisons le champ $\underset{1}{A^\nu} = p\underset{1}{V^\nu}$, p étant une fonction de t à déterminer. Cela étant, changeons le paramètre t d'après $s = s(t)$ et construisons les champs

$$\text{(23)} \quad \underset{2}{A^\nu} = \underset{s}{D}\underset{1}{A^\nu} = \frac{d\underset{1}{A^\nu}}{ds} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} \underset{1}{A^\lambda} \frac{dx^\mu}{ds}, \quad \underset{3}{A^\nu} = \underset{s}{D}\underset{2}{A^\nu}, \ldots, \quad \underset{n}{A^\nu} = \underset{s}{D}\underset{n-1}{A^\nu},$$

ainsi que les n-vecteurs $\underset{1}{V^{[\nu_1}} \ldots \underset{n}{V^{\nu_n]}}$ et $\underset{1}{A^{[\nu_1}} \ldots \underset{n}{A^{\nu_n]}}$ sont liés par

$$\underset{1}{A^{[\nu_1}} \ldots \underset{n}{A^{\nu_n]}} = p^n \left(\frac{dt}{ds}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \underset{1}{V^{[\nu_1}} \ldots \underset{n}{V^{\nu_n]}},$$

d'où l'on déduit en particulier

$$\underset{1}{A^{[\nu_1}} \ldots \underset{n}{A^{\nu_n]}} = p^n \left(\frac{dt}{ds}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} W \varepsilon^{\nu_1 \ldots \nu_n},$$

W étant l'unique composante (au signe près) du n-vecteur $\underset{1}{V^{[\nu_1}} \ldots \underset{n}{V^{\nu_n}}$ qui ne s'anulle pas et $\varepsilon^{\nu_1 \ldots \nu_n}$ le bien connu symbole de Ricci $(= \pm 1, 0)$. Parce que W est une densité du poids -1 on peut la jauger au moyen de w et en particulier, on peut poser

$$\text{(24)} \qquad p^n \left(\frac{dt}{ds}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} W = w.$$

Il faut distinguer maintenant deux cas possibles. Ou bien $\underset{1}{V^\nu}$ est le vecteur tangent de C, ou bien il ne l'est pas. Dans le premier cas on peut écrire

$$\underset{1}{A}^{\nu} = \frac{dx^{\nu}}{ds} = \frac{dx^{\nu}}{dt}\frac{dt}{ds} = V^{\nu}\frac{dt}{ds}$$

ou bien

$$p = \frac{dt}{ds}$$

ainsi que (24) nous donne

(25) $$s = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{W}{w}\right)^{2/n(n+1)} dt$$ [8]).

Si V^{ν} n'est pas le vecteur tangent de C, on peut poser $s = t$ et (24) nous donne

(26) $$p = \left(\frac{w}{W}\right)^{1/n}.$$

Mais en tout cas on a

$$D\underset{1}{A}^{[1}\ldots\underset{n}{A}^{n]} = 0,$$

et par conséquent, en raison de (23)

(27) $$D\underset{1}{A}^{[\nu_1}\ldots\underset{n}{A}^{\nu_n]} = \underset{1}{A}^{[\nu_1}\ldots\underset{n-1}{A}^{\nu_{n-1}}\, D\underset{n}{A}^{\nu_n]} = 0.$$

Il s'ensuit que $D\underset{n}{A}^{\nu}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\underset{1}{A}^{\nu},\ldots,\underset{n-1}{A}^{\nu}$,

(28) $$D\underset{n}{A}^{\nu} = \underset{1}{k}\,\underset{1}{A}^{\nu} + \underset{2}{k}\,\underset{2}{A}^{\nu} + \ldots + \underset{n-1}{k}\,\underset{n-1}{A}^{\nu}$$ [8]).

En désignant par $\overset{a}{A}$ le déterminant

$$\overset{a}{A} = \begin{vmatrix} \underset{1}{A}^1 & \underset{1}{A}^2 & \ldots & \underset{1}{A}^n \\ \underset{2}{A}^1 & \underset{2}{A}^2 & \ldots & \underset{2}{A}^n \\ \vdots & \vdots & & \\ \underset{a-1}{A}^1 & \underset{a-1}{A}^2 & \ldots & \underset{a-1}{A}^n \\ D\underset{n}{A}^1 & D\underset{n}{A}^2 & \ldots & D\underset{n}{A}^n \\ \underset{a+1}{A}^1 & \underset{a+1}{A}^2 & \ldots & \underset{a+1}{A}^n \\ \vdots & \vdots & & \\ \underset{n}{A}^1 & \underset{n}{A}^2 & \ldots & \underset{n}{A}^n \end{vmatrix},$$

---

[8]) (19). Pour d'autres „formules de Frenet“ dans L_n voir (6). Cfr. aussi (20).

on trouve

$$k = \frac{\overset{n}{A}}{w}. \qquad (u=1,\ldots,n-1)$$

Les vecteurs $\underset{1}{A^\nu},\ldots,\underset{n}{A^\nu}$ définissent le repère affine normal, tandis que les scalaires $\underset{1}{k},\ldots,\underset{n-1}{k}$ sont les courbures affines du champ $\underset{1}{A^\nu}$. Les formules analogues à celles de Frenet se réduisent dans le cas actuel aux équations (23) et (28).

Comme dans le cas d'une V_n on peut démontrer même ici le théorème suivant „Étant donné un système des fonctions holomorphes $\underset{1}{k}(s),\ldots,\underset{n-1}{k}(s)$, on peut construire le champ $\underset{1}{A^\nu}$ qui passe par un point donné d'avance, en y ayant le repère normal (local) prescrit et qui ait ces fonctions pour courbures". Nous voulons maintenant traiter un problème analogue, en cherchant une courbe qui ait ces fonctions pour courbures. Transcrivons à cet effet l'équation (28) à la forme

$$(29) \qquad \underset{s}{D^n} \frac{dx^\nu}{ds} = \underset{1}{k} \frac{dx^\nu}{ds} + \ldots + \underset{n-1}{k} \underset{s}{D^{n-2}} \frac{dx^\nu}{ds}$$

et ajoutons-y les équations

$$\overset{1}{y} = \frac{dx}{ds}, \quad \overset{2}{y} = \frac{d\overset{1}{y}}{ds}, \ldots, \overset{n}{y} = \frac{d\overset{n-1}{y}}{ds}$$

$$(30) \qquad \overset{0}{\Gamma^\nu_{\lambda\mu}} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu}(s), \quad \overset{1}{\Gamma^\nu_{\lambda\mu}} = \frac{d}{ds}\overset{0}{\Gamma^\nu_{\lambda\mu}}, \ldots, \quad \overset{n-2}{\Gamma^\nu_{\lambda\mu}} = \frac{d\overset{n-3}{\Gamma^\nu_{\lambda\mu}}}{ds}.$$

Le système différentiel (29), (30) est du premier ordre par rapport à toutes les inconnues

$$x^\nu, \overset{1}{y^\nu},\ldots,\overset{n}{y^\nu}, \overset{0}{\Gamma^\nu_{\lambda\mu}},\ldots, \overset{n-2}{\Gamma^\nu_{\lambda\mu}}.$$

Pour déterminer les $n + n^2 + n^3\,(n-1)$ constantes arbitraires, dont dépend l'intégrale générale de ce système nous prescrivons avant tout les valeurs

$$x^\nu, \overset{1}{y^\nu},\ldots, \overset{n}{y^\nu}$$

pour $s = 0$ qui exige $n + n^2$ constantes. Les constantes qui restent à déterminer sont fixées par le fait que grâce à la connexion donnée d'avance les valeurs de

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu},\ \overset{1}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu},\ldots,\ \overset{n-2}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu}$$

sont connues pour $s=0$, aussitôt que l'on connaît x^{ν}, $\overset{1}{y}{}^{\nu},\ldots,\overset{n}{y}{}^{\nu}$ pour $s=0$. Mais ce choix des constantes est équivalent à la condition que la courbe cherchée passe par un point donné (à savoir par $s=0$) et qu'elle y ait le repère normal (local) prescrit d'avance arbitrairement [9]). Le problème ainsi résolu, remarquons qu'on ne peut pas comparer deux courbes aux mêmes courbures, le parallélisme à distance finie n'existant pas dans L_n. Autrement dit, la question sur l'identification — à un mouvement près — des courbes dans L_n ainsi posée est dépourvue du sens.

Remarque. La même méthode est valable aussi dans une V_n.

Pour terminer cette conférence mentionnons la réponse au problème suivant: „Quelle est la condition pour que l'on puisse trouver l'intégrale du système différentiel

$$\frac{dV^{\nu}}{dt}+\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\,V^{\lambda}\,\frac{dx^{\mu}}{dt}=0$$

(lequel, comme nous le savons déjà, définit le champ parallèle à lui-même le long de la courbe en question) au moyen des opérations purement algébriques" ?

La réponse est la suivante: Si la courbe en question est à courbures constantes (métriques, ou affines) $\neq 0$, l'intégration du système du parallélisme n'exige que les opérations purement algébriques". La démonstration de ce théorème repose sur les formules de Frenet [10]).

II.

Nous voulons commencer cette deuxième conférence par l'étude de l'influence de la courbure de V_n sur les courbes. Imaginons que la courbe étudiée C passe par un point P de V_n qui par hypothèse sera le point $s=0$ et repérons V_n aux coordonnées x^{ν} qui sont géodésiques au point $s=0$ ($x^{\nu}=0$). On sait que les symboles de Christoffel ainsi que leurs dérivées, évalués dans ces coordon-

---

[9]) (24).

[10]) Pour l'intégration de ce système, basée sur le théorème d'existence cfr. (9).

nées satisfont aux équations, valables au point P, à savoir

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha}} \Gamma^{\nu}_{\beta)\mu} = \frac{1}{3} R^{\nu}_{\mu(\alpha\beta)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{(\alpha}} \frac{1}{\partial x^{\beta}} \Gamma^{\nu}_{\gamma)\mu} = -\frac{1}{2} g^{\delta\nu} D_{(\alpha} R^{\lambda}_{\beta|\delta|\gamma)} g_{\lambda\mu}, \ldots$$ [11]) [12]).

Ceci posé, imaginons donné, sous la forme de la dérivée $\frac{dx^{\mu}}{ds} D_{\mu} p^{\nu} = P^{\nu}$ le champ vectoriel P^{ν}. En tenant compte du théorème d'existence de Cauchy on peut écrire l'intégrale du système $P^{\nu} = Dp^{\nu}$ au voisinage suffisamment petit du point $s = 0$

$$(31) \quad p^{\nu}(s) = p^{\nu}(0) + s(Dp^{\nu})_{s=0} + \frac{s^2}{2!}[D^2 p^{\nu} + \frac{1}{3} \underset{1}{A^{\omega}} \underset{1}{A^{\mu}} p^{\lambda} R^{\nu}_{\omega\lambda\mu}]_{s=0} + \ldots$$

Si $P^{\nu} = 0$, le champ p^{ν} est parallèle a lui-même le long de C et cette équation se simplifie à

$$\lim \frac{p^{\nu}(s) - p^{\nu}(0)}{s^2} = \frac{1}{3!} \underset{1}{A^{\omega}} \underset{1}{A^{\mu}} p^{\lambda} R^{\nu}_{\omega\lambda\mu}$$ [13]).

On voit donc que même dans la théorie du déplacement parallèle le long d'une courbe, la courbure de la variété ambiante joue un rôle prépondérant. — Si l'on applique la même méthode au système différentiel

$$\frac{dx^{\nu}}{ds} = \underset{1}{A^{\nu}}$$

qui définit le champ tangent de la courbe en question, on obtient les équations canoniques de C [14])

$$(32) \qquad x^{\nu}(s) = s \underset{1}{A^{\nu}}(0) + \frac{s^2}{2!}[D\underset{1}{A^{\nu}}]_{s=0} + \frac{s^3}{3!}[D^2\underset{1}{A^{\nu}}]_{s=0} +$$

$$+ \frac{s^4}{4!}[D^3\underset{1}{A^{\nu}} + \underset{1}{k} \underset{1}{A^{\omega}} \underset{2}{A^{\mu}} \underset{1}{A^{\lambda}} R^{\nu}_{\omega\mu\lambda}]_{s=0} + \frac{s^5}{5!}[D^4\underset{1}{A^{\nu}} + 2\underset{1}{k} \underset{1}{A^{\omega}} \underset{2}{A^{\mu}} \underset{1}{A^{\lambda}} DR^{\nu}_{\omega\mu\lambda} -$$

$$- 3\underset{1}{k^2} \underset{2}{A^{\omega}} \underset{1}{A^{\mu}} \underset{2}{A^{\lambda}} R^{\nu}_{\omega\mu\lambda} + \frac{7}{3} \underset{1}{A^{\omega}} \underset{1}{A^{\lambda}} R^{\nu}_{\omega\alpha\lambda} D^2 \underset{1}{A^{\alpha}}]_{s=0} + \ldots$$

---

[11]) On a en général

$2! \qquad v_{(\alpha\beta)} = v_{\alpha\beta} + v_{\beta\alpha}$

$3! \qquad v_{(\alpha\beta\gamma)} = v_{\alpha\beta\gamma} + v_{\beta\gamma\alpha} + v_{\gamma\alpha\beta} + v_{\alpha\gamma\beta} + v_{\gamma\beta\alpha} + v_{\beta\alpha\gamma}$

[12]) (10), (16). [13]) (17). [14]) (16).

Pour faire voir plus clairement le rôle, joué par la courbure de V_n dans ces équations, introduisons dans notre espace à côté de la connexion riemannienne la connexion euclidienne, en prenant $g_{\lambda\mu}(0)$ pour son tenseur métrique dans le système actuel des coordonnées géodésiques. En désignant par l'accent avant-posé les expressions se rattachant à la courbe C étudiée dans cette connexion euclidienne, on a avant tout

$$'x^\nu = x^\nu$$

d'où il suit, grâce au choix de la métrique euclidienne, pour s suffisamment petit

$$'s = s \qquad (\text{car } g_{\lambda\mu}(0)\, 'x^\lambda\, 'x^\mu = g_{\lambda\mu}(0)\, x^\lambda x^\mu).$$

On en déduit les équations canoniques C dans la connexion euclidienne

$$(33) \qquad x^\nu(s) = s\, '\underset{1}{A^\nu}(0) + \frac{s^2}{2!}\left(\frac{d\, '\underset{1}{A^\nu}}{d\, 's}\right)_{s=0} + \frac{s^3}{3!}\left(\frac{d^2\, '\underset{1}{A^\nu}}{d\, 's^2}\right)_{s=0} + \\ + \frac{s^4}{4!}\left(\frac{d^3\, '\underset{1}{A^\nu}}{d\, 's^3}\right)_{s=0} + \frac{s^5}{5!}\left(\frac{d^4\, '\underset{1}{A^\nu}}{d\, 's^4}\right)_{s=0} + \ldots$$

Le rapprochement des systèmes (32) et (33) nous montre pour $n > 2$ que les notions métriques

$$\underset{1}{A^\nu},\ \underset{2}{A^\nu},\ \underset{3}{A^\nu},\ \underset{1}{k},\ \underset{2}{k},\ \frac{d\underset{1}{k}}{ds}$$

sont les mêmes au point $s = 0$ pour la courbe C étudiée dans la connexion riemannienne ou euclidienne, tandis que, toujours au point $s = 0$,

$$\frac{d^2\, '\underset{1}{k}}{d\, 's^2} = \frac{d^2 \underset{1}{k}}{ds^2} + \underset{1}{A^\omega}\, \underset{2}{A^\mu}\, \underset{1}{A^\lambda}\, \underset{2}{A_\nu}\, R^\nu_{\omega\mu\lambda}\, \underset{1}{k}$$

$$\frac{d\, '\underset{2}{k}}{d\, 's} = \frac{d\underset{2}{k}}{ds} + \underset{1}{A^\omega}\, \underset{2}{A^\mu}\, \underset{1}{A^\lambda}\, \underset{3}{A_\nu}\, R^\nu_{\omega\mu\lambda} \text{ [15]}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Les exemples que je viens de citer démontrent suffisamment l'influence de la courbure de la variété ambiante V_n exercée sur les courbes.

---

[15]) (17), (18).

Revenons maintenant aux équations canoniques (32) de C dans V_n pour en tirer quelques conséquences, où, contrairement aux exemples cités, la courbure de V_n n'intervient pas. Imaginons, à côté de C, une autre courbe $'C$ dans V_n qui passe à son tour par le point P $(s=0)$. Choisissons sur C $('C)$ le point Q $('Q)$ de telle manière que les modules des vecteurs infinitesimaux $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{P'Q}$ résultent égaux: $M = (\overrightarrow{PQ})_m = (\overrightarrow{P'Q})_m$. Nous dirons que les courbes C et $'C$ ont le contact d'ordre r au point P, si le module du vecteur infinitésimal $\overrightarrow{Q'Q}$ est infiniment petit d'ordre $r+1$ par rapport à M. Pour exprimer analytiquement cette définition, on doit substituer avant tout à l'arc de C dans (32) l'arc de la géodésique, passant par P et Q et d'en faire autant dans les équations canoniques de $'C$ avec l'arc de la géodésique, passant par P et $'Q$. Le rapprochement des systèmes canoniques ainsi transformés nous fait voir que la condition suffisante et nécessaire pour que les deux courbes en question aient le contact d'ordre r en P est

$$([\underset{1}{A^{\mu}} D^{\mu}]^{u} \underset{1}{A^{\nu}})_{s=0} = ([\underset{1}{'A^{\mu}} D_{\mu}]^{u} \underset{1}{'A^{\nu}})_{s=0} \quad (u = 0, \ldots, r-1)$$

où, comme à l'ordinaire $(A^{\mu} D_{\mu})^0 = ('A^{\mu} D_{\mu})^0 = 1$.

Nous nous servirons de ce résultat pour étudier les courbes situées sur une V_m dans V_n $(m < n)$. Mais il nous faut d'abord introduire quelques notions se rattachant à la théorie de V_m dans V_n. En désignant par g'^{ν}_{λ} les composantes mixtes du tenseur métrique de V_m, nous en pouvons déduire l'affineur

$$H^{\nu}_{\lambda\mu} = g'^{\alpha}_{\lambda} g'^{\beta}_{\mu} D_{\alpha} g'^{\nu}_{\beta} = H^{\nu}_{\mu\lambda} \text{ [2])}.$$

Cela étant, désignons par D'_{μ} le symbole de la dérivée covariante dans la connexion de V_m et par A^{ν} n'importe quel vecteur dans V_m. Les dérivées

$$D A^{\nu} = A^{\mu} D_{\mu} A^{\nu} \quad \text{et} \quad D' A^{\nu} = A^{\mu} D'_{\mu} A^{\nu}$$

sont liées par

$$D A^{\nu} = D' A^{\nu} + A^{\lambda} A^{\mu} H^{\nu}_{\lambda\mu}$$

$$\text{(34)} \quad D^{p} A^{\nu} = D'^{p} A^{\nu} + (p+1) A^{\lambda} H^{\nu}_{\lambda\mu} D'^{p-1} A^{\mu} + \underset{p-2}{v^{\nu}} \quad (p = 2, 3, \ldots),$$

si l'on désigne par $\underset{p-2}{v}$ le vecteur qui ne dépend que des dérivées

$$A^\nu, \quad D' A^\nu, \ldots \quad D'^{p-2} A^\nu$$

et des affineurs

$$H^\nu_{\lambda\mu}, \; H^\nu_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = g'^{\alpha}_{\lambda_1} g'^{\beta}_{\lambda_2} g'^{\gamma}_{\lambda_3} D_\alpha H^\nu_{\beta\gamma}, \ldots, \; g'^{\alpha_1}_{\lambda_1} \ldots g'^{\alpha_{p-1}}_{\lambda_{p-1}} D_{\alpha_1} H^\nu_{\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}},$$

indépendants du vecteur A^ν. Ceci posé, imaginons deux curbes C et $\overline{C}$ sur V_m dans V_n qui ont un point $P(s=0)$ en commun et supposons qu'elles aient dans P le même r-vecteur osculateur (c'est-à-dire la facette à r dimensions, définie moyennant le verseur tangent et les premiers $r-1$ verseurs normaux), celui-ci n'ayant aucune incidence particulière avec la facette à m dimensions, tangente dans P à V_m. Pour que cela ait lieu il est nécessaire que

$$r + m \leqq n + 1.$$

Grâce à l'hypothèse faite sur le r-vecteur osculateur celui-ci ne coupe la facette tangente de V_m que dans l'unique direction qui par conséquent est la direction tangente comunne de C et $\overline{C}$. On a donc en P

$$\underset{1}{A^\nu} = \underset{1}{\overline{A}^\nu}$$

et par conséquent aussi

$$\underset{1}{A^\lambda} \underset{1}{A^\mu} H^\nu_{\lambda\mu} = \underset{1}{\overline{A}^\lambda} \underset{1}{\overline{A}^\mu} H^\nu_{\lambda\mu}.$$

Or, en tenant compte de (34) on trouve en P

$$\underset{1}{A^\mu} D_\mu \underset{1}{A^\nu} - \underset{1}{\overline{A}^\mu} D_\mu \underset{1}{\overline{A}^\nu} = \underset{1}{A^\mu} D'_\mu \underset{1}{A^\nu} - \underset{1}{\overline{A}^\mu} D'_\mu \underset{1}{\overline{A}^\nu}. \tag{35}$$

Le vecteur à droite se trouve dans V_m ainsi que le vecteur à gauche doit s'y trouver à son tour. Si $r > 1$ ce que nous voulons supposer, le vecteur à gauche doit être situé aussi dans le r vecteur osculateur commun et par conséquent il doit être dans la direction de $\underset{1}{\overline{A}^\nu} = \underset{1}{A^\nu}$ ce qui est impossible (voir les formules métriques de Frenet). Or, l'équation (35) ne peut être satisfaite que par

$$\underset{1}{A^\mu} D_\mu \underset{1}{A^\nu} - \underset{1}{\overline{A}^\mu} D_\mu \underset{1}{\overline{A}^\nu} = 0 \quad \underset{1}{A^\mu} D'_\mu \underset{1}{A^\nu} - \underset{1}{\overline{A}^\mu} D'_\mu \underset{1}{\overline{A}^\nu} = 0. \tag{36}$$

Il s'ensuit que les deux courbes en question ont le contact d'ordre 2 au moins. Les équations (36) nous autorisent à poser d'après (34) pour $p = 2$

$$(A^{\mu} D_{\mu})^2 \underset{1}{A^{\nu}} - (\overline{A}^{\mu} D_{\mu})^2 \underset{1}{\overline{A}^{\nu}} = (A^{\mu} D'_{\mu})^2 \underset{1}{A^{\nu}} - (\overline{A}^{\mu} D'_{\mu})^2 \underset{1}{\overline{A}^{\nu}}$$

etc. En poursuivant plus loin cette méthode on parvient au résultat suivant: „Les deux courbes en question ont le contact d'ordre r [16]), (tandis que les courbure $\underset{r}{k}$ et $\underset{r}{\overline{k}}$ sont liées par une relation, dont le cas spécial fut déduit par E. E. Levi en 1908)" [17]). — Ce théorème nous présente la plus naturelle généralisation du théorème classique de Meusnier sur les courbures des sections planes d'une V_2 dans R_3.

Les équations (34) nous permettent aussi d'étudier les courbes quasiasymptotiques sur V_2 dans V_n. Je dis qu'une courbe C est quasiasymptotique sur V_2 si son $(n-1)$-vecteur osculateur contient la facette tangente de V_2 (le long de C). (Si $n = 3$, notre courbe quasiasymptotique devient une courbe asymptotique).

Choisissons un des points de C, par exemple le point P et menons par P toutes les géodésiques de V_n, contenues dans le $(n-1)$-vecteur osculateur de C en P. Nous obtenons ainsi une variété à $(n-1)$-dimensions, que nous désignerons par V_{n-1}. Cette variété coupe notre V_2 suivant une courbe $\overline{C}$, dite courbe d'intersection du point P. Comme on voit, nous poursuivons l'analogie complète de la courbe asymptotique sur V_2 dans R_3 et de la courbe d'intersection de son plan osculateur avec V_2. Or, d'après un théorème bien connu de Beltrami, les premières courbures de ces deux courbes sont en relation $2:3$. Les notions introduites plus haut nous permettent de démontrer un théorème analogue pour les courbes C et $\overline{C}$ sur V_2 dans V_n. Mais pour examiner les courbures de $\overline{C}$, il faut restreindre la généralité du problème, en supposant que la variété ambiante V_n soit à courbure constante. En effet, l'application de (34) (plus précisement: l'application du système analogue à (34), qui nous donne la relation entre la dérivée covariante de V_{n-1} et celle de V_n) au verseur tangent $\underset{1}{\overline{A}^{\nu}}$ de $\overline{C}$ nous fait voir qu'à partir de la troisième courbure et du troisième verseur normal, toutes les notions métriques de $\overline{C}$, étudiée comme une courbe de V_n sont différentes des notions métriques correspondantes de la même courbe,

[16]) (4), (15). [17]) (29).

étudiée comme une courbe de V_{n-1}. Exception fait le cas très important, où V_n est à courbure constante. Dans ce cas V_{n-1} est géodésique non seulement au point P, mais partout et la différence entre les deux familles des notions métriques ne se fait plus apercevoir, car elle n'existe plus. Ceci posé, on peut facilement démontrer en P

$$\underset{1}{A}^\nu = \underset{1}{\overline{A}}^\nu,$$

et par conséquent, à cause de (34) pour $p = 2$

$$(\underset{1}{A}^\mu D_\mu)^2 \underset{1}{A}^\nu - (\underset{1}{A}^\mu D'_\mu)^2 \underset{1}{A}^\nu - 3 \underset{1}{A}^\lambda H^\nu_{\lambda\mu} \underset{1}{A}^\alpha D'_\alpha \underset{1}{A}^\mu =$$

$$(\underset{1}{\overline{A}}^\mu D_u)^2 \underset{1}{\overline{A}}^\nu - (\underset{1}{\overline{A}}^\mu D'_u)^2 \underset{1}{\overline{A}}^\nu - 3 \underset{1}{\overline{A}}^\lambda H^\nu_{\lambda\mu} \underset{1}{\overline{A}}^\alpha D'_\alpha \underset{1}{\overline{A}}^\nu$$

ou bien, pour $n > 3$

$$3 \underset{1}{A}^\lambda \underset{n}{A}_\nu H^\nu_{\lambda\mu} (\underset{1}{A}^\alpha D'_\alpha \underset{1}{A}^\mu - \underset{1}{\overline{A}}^\alpha D'_\alpha \underset{1}{\overline{A}}^\mu) = 0$$

et cette équation est équivalente à

$$\underset{n-1}{A_\nu} \underset{n-1}{k} (\underset{1}{A}^\alpha D'_\alpha \underset{1}{A}^\nu - \overline{A}^\alpha D'_\alpha \underset{1}{\overline{A}}^\nu) = 0.$$

Le vecteur $\underset{n-1}{A}^\nu$ n'est pas en général orthogonal à V_2. Nous supposons de plus que C soit une courbe à $n-1$ courbure, ainsi que la dernière équation nous donne en P

$$\underset{1}{A}^\alpha D'_\alpha \underset{1}{A}^\nu - \overline{A}^\alpha D'_\alpha \underset{1}{\overline{A}}^\nu = 0. \tag{37}$$

et par conséquent, à cause de la première des équations (34), toujours en P

$$\underset{1}{A}^\alpha D_\alpha \underset{1}{A}^\nu - \underset{1}{\overline{A}}^\alpha D_\alpha \underset{1}{\overline{A}}^\nu = 0.$$

Or, les courbes C et $\overline{C}$ ont le contact d'ordre 2 (au moins) en P. En poursuivant plus loin cette méthode on obtient le théorème suivant: „La courbe quasiasymptotique et la courbe d'intersection du point P ont le contact d'ordre $n-2$ tandis que les courbures $\underset{n-2}{k}$ et $\underset{n-2}{\overline{k}}$ sont en relation $\underset{n-2}{k} : \underset{n-2}{\overline{k}} = n : n-1$ [18])". On est parvenu ainsi à une généralisation du théorème classique de Beltrami, mentionné plus haut

[18]) (2), (3), (13), (14).

Si $n = 3$, les deux courbes en question ont le contact d'ordre 1 et les premières courbures sont en relation $\underset{1}{k} : \underset{1}{\overline{k}} = 3:2$. On retombe ainsi à la forme classique du théorème de Beltrami, mais parce qu'il ne s'agit ici que des premières courbures, aucune supposition restrictive quant à la courbure de V_3 n'est nécessaire, ainsi que le théorème de Beltrami est valable même sur une V_2 dans V_3 générale.

(Remarque: Quant à la courbure $\underset{n-1}{\overline{k}}$, on a $\underset{n-1}{\overline{k}} = 0$ même pour $n > 3$, grâce à l'hypothèse faite sur la courbure de la variété ambiante V_n pour $n > 3$).

La question sur les premières $n - 2$ courbures de C ainsi résolue, nous voulons exprimer sa dernière courbure moyennant la courbure de V_2, en généralisant ainsi la théorème bien connu de Beltrami-Enneper, suivant lequel la torsion d'une courbe asymptotique sur V_n dans R_3 égale à la racine carrée de la courbure gaussienne négative de V_2. Parce qu'il ne s'agit plus de $\overline{C}$ nous pouvons supposer que V_n soit générale. Je n'insisterai pas sur la démonstration de ce théorème généralisé que j'ai exposée ailleurs [18]) et je me permets de vous présenter aussitôt le résultat: „En désignant par K la courbure gaussienne de V_2, par K^* la courbure gaussienne d'une autre surface V_2^*, tangente en P à V_2, mais géodésique dans ce point et enfin par ω l'angle de V_2 et $\underset{n-1}{A^\nu}$ on trouve après un calcul assez facile

$$(\underset{n-1}{k} \cos \omega)^2 = K^* - K.$$

Si $n = 3$, notre courbe C devient asymptotique et de plus on a $\cos \omega = 1$ ainsi que l'équation précédente se simplifie à

$$\underset{2}{k^2} = K^* - K.$$

Si de plus notre V_3 se réduit à R_3, la surface V_2^*, mentionnée plus haut, devient un plan et par conséquent on a $K^* = 0$, d'où

$$\underset{2}{k^2} = -K.$$

On retombe ainsi au théorème de Beltrami-Enneper, mentionné plus haut.

III.

La troisième conférence sera consacrée à deux problèmes, à savoir: (1) à l'intégration du système qui définit le déplacement parallèle suivant un rayon de lumière dans l'espace-temps de la relativité, et (2) à l'étude de la déformation infinitésimale des courbes dans une variété métrique avec torsion.

On sait que l'espace-temps de la relativité est un espace à 4 dimensions, doué d'une connexion de M. Weyl. Le tenseur métrique $g_{\lambda\mu}$, qui dans cette W_4 n'est défini qu'à un facteur $p(x)$ près, a l'indice d'inertie 3, ce qui nous permet d'introduire la notion des courbes (réelles) à la longueur nulle. J'entends par cela une courbe $x^\nu = x^\nu(t)$, dont le vecteur tangent satisfait à

$$\frac{dx^\lambda}{dt}\,\frac{dx^\mu}{dt}\,g_{\lambda\mu} = 0.$$

Chaque vecteur (réel), qui satisfait à une telle équation, sera dit le vecteur fondamental. Tel est par exemple le vecteur tangent de la courbe qui réalise le trajet d'un rayon de lumière. Une telle courbe C est de plus autoparallèle, c'est-à-dire son vecteur tangent $v^\nu = \dfrac{dx^\nu}{dt}$ satisfait à l'équation

$$Dv^\nu = \frac{dv^\nu}{dt} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\, v^\lambda\, \frac{dx^\mu}{dt} = 0.$$

Cela posé, le premier problème à résoudre peut être formulé comme suit: „Étant connu, dans l'espace-temps de la relativité, un rayon de lumière C au vecteur tangent (fondamental) $v^\nu = \dfrac{dx^\nu}{dt}$, on doit trouver les équations finies du champ $V^\nu(t)$, déplacé parallèlement le lon de C“. Autrement dit, on doit trouver l'intégrale générale du système différentiel

$$D\,V^\nu(t) = \frac{d\,V^\nu(t)}{dt} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\, V^\lambda\, v^\mu = 0. \tag{38}$$

Or, il nous suffit manifestement de connaître quatre intégrales particulières de (38), l'intégrale générale étant une combinaison linéaire aux coefficients constants de ces intégrales. Pour les trouver, nous introduirons avant tout „la métrique“ le long de C. Le vecteur

$\underset{2}{v^{\nu}} = D v^{\nu}$ étant nul, on ne peut pas se servir de la méthode employée plus haut (dont j'ai parlé dans la première conférence) pour trouver le tenseur „métrique" le long de C. Mais on peut néanmoins introduire la notion du pseudotenseur métrique le long du rayon de lumière. J'entends par cela l'ensemble des fonctions $b_{\lambda\mu}$ qui se transforment d'après

$$'b_{\lambda\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial 'x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial 'x^{\mu}} b_{\alpha\beta} \Delta_0^{-1/2},$$

Δ_0 étant le jacobien de la transformation $'x \to x$, évalué au point $t = 0$. Tel est par exemple l'ensemble des fonctions

(39) $$b_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} \frac{e^{1/2 \int_{t_0}^{t} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} v^{\mu} dt}}{\sqrt{g}},$$

g étant la racine carré du déterminant de $g_{\nu\mu}$. Ce pseudotenseur est invariant par rapport au changement (19) de la métrique de W_4

(40) $$\overline{b}_{\lambda\mu} = b_{\lambda\mu},$$

et de plus, si l'on adopte la loi

$$D b_{\lambda\mu} = \frac{d b_{\lambda\mu}}{dt} - (\Gamma^{\alpha}_{\lambda\omega} b_{\alpha\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\omega} b_{\lambda\alpha}) v^{\omega}$$

pour la construction de la dérivée covariante de $b_{\lambda\mu}$ le long de C on a

(41) $$D b_{\lambda\mu} = 0.$$

Le pseudotenseur $b_{\lambda\mu}$ ayant à son tour le rang 4 on peut le prendre à cause de (40) et (41) pour „tenseur métrique" de W_4 le long de C. Son indice d'inertie est de même égal à 3. En employant $b_{\lambda\mu}$, on dit qu'un vecteur E^{ν} est un verseur, si dans le système actuel des coordonnées,

$$E^{\lambda} E^{\mu} b_{\lambda\mu} = \pm 1$$

ce que nous écrivons plus simplement

$$E^{\lambda} E_{\lambda} = \pm 1$$

en adoptant la loi de l'élèvement ou de l'abaissement des indices par rapport à $b_{\lambda\mu}$ [19]). Deux vecteurs A^ν et B^ν seront dits orthogonaux, si

$$A^\lambda B^\mu b_{\lambda\mu} = A^\lambda B_\lambda = A_\lambda B^\lambda = 0.$$

Il s'ensuit que chaque vecteur fondamental est orthogonal à lui-même..

Ceci posé, construisons un champ versoriel E^ν tel que

$$\underset{1}{E^\lambda} \underset{1}{E_\lambda} = \varepsilon \quad (= \pm 1) \qquad \underset{1}{E_\lambda} v^\lambda = 0. \tag{42}$$

Grâce à l'autoparallélisme du vecteur fondamental v^ν, la dérivée covariante de (42) nous donne

$$(D\underset{1}{E^\lambda})\underset{1}{E_\lambda} = 0 \qquad (D\underset{1}{E_\lambda})v^\lambda = 0, \tag{42'}$$

d'où il suit que même le vecteur $D\underset{1}{E^\nu}$ est orthogonal à v^ν. La première de ces équations nous apprend aussi que

$$D\underset{1}{E^\nu} = k\underset{2}{E^\nu}, \quad [k = (DE^\lambda DE_\lambda \varepsilon)^{1/2}], \tag{43}$$

si $\underset{2}{E^\nu}$ est le verseur dans la direction du vecteur $D\underset{1}{E^\nu}$

$$\underset{2}{E^\lambda} \underset{2}{E_\lambda} = \varepsilon,$$

dont on a choisi convenablement l'orientation. En tenant compte de la deuxième des équations (42)′ et de (43). on peut écrire pour le cas général $k \neq 0$

$$\underset{2}{E^\lambda} v_\lambda = 0,$$

d'où

$$(D\underset{2}{E^\lambda})v_\lambda = 0. \tag{42''}$$

Nous avons ainsi trois vecteurs $\underset{1}{E^\nu}$, $\underset{2}{E^\nu}$, $D\underset{2}{E^\nu}$, orthogonaux au vecteur fondamental v^ν et par conséquent — grâce à l'indice d'inertie de $b_{\lambda\mu}$ — ce dernier résulte en combinaison linéaire des premiers.

Ce fait géométrique peut être exprimé analytiquement sous la forme

---

[19]) Remarquons expressément que toutes ces opérations métriques ne sont pas indépendantes du choix des coordonnées. Ainsi par exemple, un vecteur qui est un verseur dans le système actuel des coordonnées, ne l'est pas dans un autre système. Mais ce qui nous importe c'est que „le module“ du vecteur en question est constant dans n'importe quel système.

$$DE^{\nu}_{2} = -kE^{\nu}_{1} + h v^{\nu}, \tag{44}$$

comme on peut s'en persuader facilement. Ici h est un scalaire facile à déterminer

$$h = \frac{DE^{1}_{2} + kE^{1}_{1}}{v^{1}} = \ldots = \frac{DE^{4}_{2} + kE^{4}_{1}}{v^{4}}.$$

Pour n'importe quel choix des fonctions $a(t)$, $r(t)$, $u(t)$, les verseurs

$$A^{\nu}_{1} = E^{\nu}_{1} \cos a + E^{\nu}_{2} \sin a + r v^{\nu}, \quad A^{\nu}_{2} = E^{\nu}_{1} \sin a - E^{\nu}_{2} \cos a + u v^{\nu}$$

sont orthogonaux entre eux et à v^{ν}. Parce qu'on a d'après (43) et (44)

$$DA^{\nu}_{1} = \left(\frac{da}{dt} + k\right)(-E_{1} \sin a + E^{\nu}_{2} \cos a) + \left(\frac{dr}{dt} + h \sin a\right) v^{\nu}$$

$$DA^{\nu}_{2} = \left(\frac{da}{dt} + k\right)(E^{\nu}_{2} \cos a + E^{\nu}_{1} \sin a) + \left(\frac{du}{dt} - h \cos a\right) v^{\nu},$$

le choix suivant des fonctions a, r, u

$$a = -\int k\,dt$$

$$r = -\int h \sin a\,dt = \int h(\sin \int kdt)dt$$

$$u = \int h \cos a\,dt = \int h(\cos \int kdt)dt$$

nous donne

$$DA^{\nu}_{1} = 0 \qquad DA^{\nu}_{2} = 0. \tag{45}$$

Nous nous servirons des intégrales particulières A^{ν}_{1}, A^{ν}_{2} pour trouver deux autres intégrales particulières. Construisons à cet effet deux champs versoriels E^{ν}_{3}, E^{ν}_{4} tels que

$$E^{\lambda}_{3} E_{\lambda 3} = \varepsilon, \quad E^{\lambda}_{4} E_{\lambda 4} = -\varepsilon, \quad E^{\lambda}_{3} E_{\lambda 4} = 0 \quad E^{\lambda}_{f} A_{\lambda a} = 0 \tag{46}$$

$$(a = 1, 2, \quad f = 3, 4).$$

Il s'ensuit grâce à l'autoparallélisme de A^{ν}_{a}—

$$E^\lambda_f DE_{g\lambda} = 0, \qquad A_{a\lambda} DE^\lambda_f = 0, \qquad (f, g = 3, 4) \tag{47}$$

et par conséquent. non seulement les verseurs E^ν_f, mais aussi leurs dérivées covariantes sont orthogonaux à A^ν_a. La première des équations (47) nous conduit — à cause de la deuxième — à

$$DE^\nu_3 = K E^\nu_4, \qquad DE^\nu_4 = K E^\nu_3 \tag{48}$$

où

$$K = (- DE^\lambda_3 DE_{3\lambda}\,\varepsilon)^{1/2} = (DE^\lambda_4 DE_{4\lambda}\,\varepsilon)^{1/2}.$$

En appliquant un procédé analogue à celui que nous venons d'exposer pour A^ν_1, A^ν_2, on trouve qu'en raison de (48), les verseurs orthogonaux

$$\begin{aligned} A^\nu_3 &= E^\nu_3 \cos h \int K dt - E^\nu_4 \sin h \int K dt \\ A^\nu_4 &= - E^\nu_3 \sin h \int K dt + E^\nu_4 \cos h \int K dt \end{aligned} \tag{49}$$

sont à leur tour deux intégrales particulières du système (38). D'autre part, le vecteur fondamental v^ν peut être exprimé en combinaison linéaire des verseurs linéairement indépendants $E^\nu_1, \ldots, E^\nu_4$

$$v^\nu = a_1 E^\nu_1 + a_2 E^\nu_2 + a_3 E^\nu_3 + a_4 E^\nu_4.$$

En tenant compte de (42) on trouve

$$a_1 = a_2 = 0$$

et de plus, la dérivée covariante de v^ν nous donne d'après (48)

$$Dv^\nu = 0 = E^\nu_3 \left(\frac{da_3}{dt} + a_4 K\right) + E^\nu_4 \left(\frac{da_4}{dt} + a_3 K\right).$$

Les verseurs E^ν_3, E^ν_4 étant linéairement indépendants, on doit avoir

$$a_3 = c_1 e^{\int K dt} + c_2 e^{-\int K dt}$$

$$a_4 = - c_1 e^{\int K dt} + c_2 e^{-\int K dt}.$$

Pour déterminer les constantes $\underset{1}{c}, \underset{2}{c}$ remarquons que — le vecteur v^ν étant fondamental — on doit avoir

$$\underset{1}{c}\underset{2}{c} = 0.$$

Or, l'une ou l'autre de ces constantes doit être nulle, tandis que la constante qui reste à déterminer résulte du fait que toutes les expressions (sauf la constante en question) dans

$$v^\nu = \underset{3}{E^\nu}(\underset{1}{c}e^{\int Kdt} + \underset{2}{c}e^{-Kdt}) + \underset{4}{E^\nu}(-\underset{1}{c}e^{\int Kdt} + \underset{2}{c}e^{-\int Kdt}) \tag{50}$$

sont connues. En suppléant à v^ν les expressions (50) dans les équations qui définissent $\underset{1}{A^\nu}$ et $\underset{2}{A^\nu}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\underset{1}{A^\nu} &= +\underset{1}{E^\nu}\cos\int kdt - \underset{2}{E^\nu}\sin\int kdt + \{\underset{3}{E^\nu}(\underset{1}{c}e^{\int Kdt} + \underset{2}{c}e^{-\int Kdt}) + \\
&\qquad + \underset{4}{E^\nu}(-\underset{1}{c}e^{\int Kdt} + \underset{2}{c}e^{-\int Kdt})\}\int h(\sin\int kdt)\,dt \\
\underset{2}{A^\nu} &= -\underset{1}{E^\nu}\sin\int kdt - \underset{2}{E^\nu}\cos\int kdt + \{\underset{3}{E^\nu}(\underset{1}{c}e^{\int Kdt} + \underset{2}{c}e^{-\int Kdt}) + \\
&\qquad + \underset{4}{E^\nu}(-\underset{1}{c}e^{\int Kdt} + \underset{2}{c}e^{-\int Kdt})\}\int h(\cos\int kdt)\,dt.
\end{aligned} \tag{51}$$

Nous avons ainsi exprimé quatre intégrales particulières (49) (51) en combinaison linéaire des verseurs linéairement indépendants $\underset{1}{E^\nu}, \ldots, \underset{4}{E^\nu}$. Parce que

$$\begin{vmatrix} \underset{1}{A^1} \ldots \underset{1}{A^4} \\ \underset{4}{A^1} \ldots \underset{4}{A^4} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \underset{1}{E^1} \ldots \underset{1}{E^4} \\ \underset{4}{E^1} \ldots \underset{4}{E^4} \end{vmatrix},$$

les verseurs $\underset{1}{A^\nu}, \ldots, \underset{4}{A^\nu}$ sont linéairement indépendants à leur tour. Il s'ensuit que l'intégrale générale du systéme (38) peut être écrite

$$V^\nu = \underset{1}{C}\underset{1}{A^\nu} + \underset{2}{C}\underset{2}{A^\nu} + \underset{3}{C}\underset{3}{A^\nu} + \underset{4}{C}\underset{4}{A^\nu}.$$

En choisissant convenablement la forme des constantes C, on obtient

$$V^\nu = c\underset{1}{A^\nu}\cos(a + \int kdt) - c\underset{2}{A^\nu}\sin(a + \int kdt) + \underset{3}{A^\nu}\{C\cos h(A +$$

$$+\int Kdt) + c(\underset{1}{c}\, e^{\int Kdt} + \underset{2}{c}\, e^{-\int Kdt}) \int h [\sin (a + \int kdt)]\, dt\} +$$

$$+ \underset{4}{A}^{\nu} \{ - C \sin h (A + \int Kdt) + c(- \underset{1}{c}\, e^{\int Kdt} +$$

$$+ \underset{2}{c}\, e^{-\int Kdt}) \int h [\sin (a + \int kdt)]\, dt\}$$

(a, A, c, C sont des constantes arbitraires) [20]).

Le premier problème résolu, nous voulons étudier la déformation infinitésimale d'une courbe C, située dans une variété métrique avec torsion V'_n. Les coefficients d'une tellle connexion sont donnés moyennant

(52)

$$F^{\nu}_{\lambda\mu} = {}^1\!/_2\, g^{\nu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\alpha}} \right) + S^{\nu}_{\lambda\mu} - g^{\nu\beta} (g_{\lambda\alpha} S^{\alpha}_{\beta\mu} + g_{\mu\alpha} S^{\alpha}_{\beta\lambda})\ ^{2}),$$

$S^{\nu}_{\lambda\mu}$ étant un affinneur arbitraire de torsion, antisymétrique en λ, μ

$$S^{\nu}_{\lambda\mu} + S^{\nu}_{\mu\lambda} = 0.$$

Cela étant, supposons que notre courbe C soit donnée moyennant les équations paramétriques (5) et déformons-la suivant la loi

$$'x^{\nu} = x^{\nu} + \varepsilon W^{\nu}, \tag{53}$$

ε étant une constante infinitésimale et W^{ν} le vecteur de la déformation. On obtient ainsi une autre courbe $'C$ au verseur tangent

$$'\underset{1}{A}^{\nu} = \left(\underset{1}{A}^{\nu} + \varepsilon \frac{dW^{\nu}}{ds} \right) \frac{ds}{d\,'s}.$$

On en déduit facilement

$$\lim_{\varepsilon \to c} \frac{\dfrac{d\,'s}{ds} - 1}{\varepsilon} = \underset{1}{A}_{\nu} (DW^{\nu} - 2 S^{\nu}_{\omega\mu} \underset{1}{A}^{\mu} W^{\omega}) = L \quad \left(A^{\nu} = \frac{dx^{\nu}}{ds} \right).$$

Cette équation nous présente la généralisation du fait bien connu que la déformation de l'arc, suivant la binormale (dans R_3)

---

[20]) (22), Pour un cas spécial cfr. (12).

est nulle (au second ordre près) comme on peut s'en persuader facilement, en supposant $S_{\omega\mu}^{\nu}=0$ et de plus, en posant $W^{\nu}=\underset{3}{A^{\nu}}$ [21]).

Supposons maintenant que C apartienne à une congruence des courbes au verseur tangent $\underset{1}{A^{\nu}}(x)$ et déformons le champ $\underset{1}{A^{\nu}}$ de C d'après (53). On obtient ainsi le long de $'C$ un champ versoriel $\underset{1}{\overline{A}^{\nu}}$ et

$$\lim_{\varepsilon\to o}\frac{'\underset{1}{A^{\nu}}-\underset{1}{\overline{A}^{\nu}}}{\varepsilon}=DW^{\nu}-\theta\underset{1}{A^{\nu}}+2S_{\mu\omega}^{\nu}W^{\omega}\underset{1}{A^{\mu}}-\underset{1}{A^{\nu}}L=\underset{1}{L^{\nu}}$$

$$(\theta=W^{\alpha}D_{\alpha}).$$

Or, si W^{ν} est l'intégrale de

$$\underset{1}{L^{\nu}}=0, \tag{53$'$}$$

la courbe $'C$ résulte comme enveloppe (au second ordre près) du champ $\underset{1}{\overline{A}^{\nu}}$. En général, si l'on désigne par $\underset{r}{K^{\nu}}$ les vecteurs dérivés

$$\underset{r}{K^{\nu}}=(\underset{1}{A^{\mu}}D_{\mu})^{r}\underset{1}{A^{\nu}}\qquad(\text{et } \underset{o}{K^{\nu}}=\underset{1}{A^{\nu}})\qquad(r=1,2,\ldots)$$

et si l'on en fait autant pour $'\underset{1}{A^{\nu}}$ et $\overline{A}^{\nu}$ le long de $'C$ [22]), on obtient après un calcul assez long

$$\lim_{\varepsilon\to o}\frac{'\underset{r}{K^{\nu}}-\underset{r}{\overline{K}^{\nu}}}{\varepsilon}=D\underset{r}{L^{\nu}}+\underset{1}{L^{\alpha}}D_{\alpha}\underset{r-1}{K^{\nu}}=\underset{r+1}{L^{\nu}}\ ^{9}). \tag{54}$$

Parmis les vecteur $\underset{2}{L^{\nu}}$, $\underset{3}{L^{\nu}},\ldots$ le plus important est le vecteur $\underset{2}{L^{\nu}}$ que l'on peut écrire aussi

$$\underset{2}{L^{\nu}}=D\underset{1}{L^{\nu}}+\underset{1}{L^{\alpha}}D_{\alpha}\underset{1}{A^{\nu}}=D^{2}W^{\nu}-\underset{1}{A^{\lambda}}\underset{1}{A^{\mu}}W^{\omega}R_{\omega\mu\nu}^{\nu}-$$
$$-2D(S_{\omega\lambda}^{\nu}\underset{1}{A^{\lambda}}W^{\omega})-DL\underset{1}{A^{\nu}}-L\underset{1}{K^{\nu}}-\theta\underset{1}{K^{\nu}}\ ^{23}).$$

---

[21]) Si $S_{\mu\lambda}^{\nu}=0$, n'importe quelle combinaison

$$W^{\nu}=\underset{3}{a}\underset{3}{A^{\nu}}+\underset{4}{a}\underset{4}{A^{\nu}}+\ldots+\underset{n}{a}\underset{n}{A^{\nu}}$$

nous donne le même résultat.

[22]) Il s'agit ici, cela va sans dire, de la dérivée covariante le long de $'C$.

[23]) (21), (24).

Pour apprécier son influence, supposons que la congruence consiste en courbes autoparallèlles

$$\underset{1}{A^\lambda} D_\lambda \underset{1}{A^\nu} = \underset{1}{K^\nu}(x) = 0.$$

Dans ce cas on a aussi $\underset{2}{K^\nu} = \underset{3}{K^\nu} = \ldots = 0$ et par conséquent

$$\underset{1}{\overline{K}^\nu} = \underset{2}{\overline{K}^\nu} = \underset{3}{\overline{K}^\nu} = \ldots = 0$$

et les équations (54) deviennent

$$\lim_{\varepsilon \to o} \frac{\underset{1}{'K^\nu}}{\varepsilon} = \underset{2}{L^\nu} = D^2 W^\nu - \underset{1}{A^\lambda} \underset{1}{A^\mu} W^\omega R^\nu_{\omega\mu\lambda} - 2 \underset{1}{A^\lambda} DS^\nu_{\omega\lambda} W^\omega - \underset{1}{A^\nu} DL$$

$$\lim_{\varepsilon \to o} \frac{\underset{r}{'K^\nu}}{\varepsilon} = \underset{r+1}{L^\nu} = D^{r-1} \underset{2}{L^\nu}. \qquad (r = 2, 3, 4, \ldots)$$

On en déduit aussitôt que la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $'C$ résulte à son tour autoparallèlle (au second ordre près) est que W^ν soit l'intégrale de

(55)

$$\underset{2}{L^\nu} = D^2 W^\nu - \underset{1}{A^\lambda} \underset{1}{A^\mu} W^\omega R^\nu_{\omega\mu\lambda} - 2 \underset{1}{A^\lambda} (DS^\nu_{\omega\lambda} W^\omega) - \underset{1}{A^\nu} DL = 0 \text{ [24]}.$$

Le cas échéant on a aussi $\underset{3}{L^\nu} = \underset{4}{L^\nu} = \ldots = 0$, mais on peut avoir $\underset{1}{L^\nu} \neq 0$.

Nous viendrons encore sur ce sujet, mais pour le moment remarquons que (55) nous donne

$$DL = \frac{dL}{ds} = \underset{1}{A_\nu} D^2 W^\nu - 2 \underset{1}{A^\lambda} \underset{1}{A_\nu} DS^\nu_{\omega\lambda} W^\omega =$$
$$= \underset{1}{A_\nu} (D^2 W^\nu - 2 \underset{1}{A^\lambda} DS^\nu_{\omega\lambda} W^\omega)$$

ainsi que la relation qui définit L, à savoir

$$L = \underset{1}{A_\nu} (D W^\nu - 2 S^\nu_{\omega\lambda} \underset{1}{A^\lambda} W^\omega)$$

peut être régardée comme une intégrale particulière de (55). On a donc identiquement $\underset{2}{L^\nu} \underset{1}{A_\nu} = 0$ et la fonction L peut être donnée d'avance arbitrairement.

---

[24]) Pour une variété métrique sans torsion cfr. (27). (28).

Nous avons déjà remarqué, qu'on peut avoir $\underset{1}{L^\nu} \neq 0$ malgré que (55) soit satisfaite. C'est ce qu'on a pu aisément prévoir en tenant compte de la signification géométrique du vecteur $\underset{1}{L^\nu} \cdot \underset{1}{L^\nu} = 0$ est la condition suffisante et nécessaire pour que la courbe $'C$ (déformé de C) soit l'enveloppe du champ $\underset{1}{\overline{A}^\nu}$ (déformé de $\underset{1}{A^\nu}$).

Or il est bien possible que malgré que la courbe $'C$ résulte autoparallèlle, elle ne soit pas l'enveloppe de $\underset{1}{\overline{A}^\nu}$. Si au contraire W^ν est l'intégrale du système

$$(56) \qquad \underset{1}{L^\nu} = D\, W^\nu - \theta A^\nu + 2\, S_{\mu\omega}^{\nu}\, W^\omega \underset{1}{A^\mu} - L \underset{1}{A^\nu} = 0,$$

la courbe $'C$ est l'enveloppe du champ $\underset{1}{\overline{A}^\nu}$. Le cas échéant on a non seulement $\underset{1}{L^\nu} = 0$ mais aussi $\underset{2}{L^\nu} = \underset{3}{L^\nu} = \ldots = 0$ et par conséquent (56) est la condition suffisante mais non nécessaire pour que la courbe $'C$ résulte autoparallèlle à son tour. On peut se persuader facilement que L est aussi une intégrale première de (56).

Le premier qui a repris l'étude de la déformation aux temps modernes fut à mon avis M. Levi-Civita[25]). Ce géomètre illustre est parvenu au système (55) (ou plus precisément au système analogue à (55) dans une V_n métrique sans torsion) auquel on peut suppléer le système (56) du premier ordre.

Index bibliographique.

Blaschke W.

(1) Vorlesungen über Differentialgeometrie I, II. (Berlin, 1923, 1924).

Bompiani E.

(2) Analisi metrica delle quasiasintotiche sulle superficie degli iperspazî. (Rendiconti Ac. Lincei (5), (25), (1916), 576—578, 493—498).

(3) Sur les courbes quasiasymptotiques des surfaces dans un espace quelconque. (C. Rendus Ac. Paris (168), (1919), 755—757).

(4) Sopra alcuni estensioni dei theoremi di Meusnier e di Eulero. (Atti Ac. Torino, (48), (1913), 392—410).

---

[25]) Voir la remarque (24). Cfr. aussi les travaux (5), (7), (8), (11), (30), (32).

Bortolotti E.

(5) Scostamento geodetico e sue generalizzazioni. (Giorn. di Math. LXVI, (1928)).

Cartan E.

(6) Sur les variétés à connexion afline ... (Annales Éc. Norm. Sup. (40) (19) (23), 412 et (41) (1924) 1—25).

(7) Sur l'écart géodésique et quelques notions connexes. (Rendiconti Ac. Lincei, (V), (6), (1926), 609--613).

Crudeli U.

(8) Sullo scostamento geodetico (Rend. Lincei, (V), (6), (1927), 248—251).

Dienes P.

(9) Sur l'intégration des équations du déplacement ... (Rend. Circ. Palermo (LVII), (1923), (144—152).

Donder de Th.

(10) Interpretation physique de la relativité (Bull. Ac. Belg. (IX), (5), (1923), 59—74).

Fernandez de M.

(11) Sur l'écart géodésique ... (Rend. Ac. Lincei, (VII), (6), (1928), 482—486).

Godeaux L.

(12) L'univers d'Einstein et la métrique cayleyenne elliptique. (Bull. Ac. Belg. (5), (1924), 429—433).

Hlavatý V.

(13) Sur les courbes quasiasymptotiques. (Christiaan Huygens, (4), (1924), 209—245).

(14) Sur les courbes de M. Bompiani (C. Rendus Ac. Paris, (178), (1924), 2041—2043).

(15) Les courbes sur la variété à m dimensions .... (Věstník Kr. České Spol. Nauk. (1924) (XI).

(16) Les paramètres locaux dans une variété de Riemann. (Rend. Ac. Lincei (IV), (6) (1926), 93—103).

(17) Application des paramètres locaux. (Ann. Soc. Polonaise des Math. (5), (1926) 44—62).

(18) Contanct de deux courbes dans une V_n. (Rend. Ac. Lincei, (V), (6), (1927), 415—420).

(19) Proprietà differenziali delle curve in uno spazio a connessione lineaire generale. (Rend. Circolo Palermo (LIII), (1929), 365—388).

(20) Ancora sulle proprietà differenziali ... (Dto, 389—410).

(21) Sur la déformation infinitésimale d'une courbe dans la variété métrique avec torsion (Bull. Soc. Math. de France, (56), (1928), 18—15).

(22) Le parallélisme de la connexion de M. Weyl (Annales Éc. Norm. Sup. (46), 1929 73—103).

(23) Ein Beitrag zur theorie der Weyl'schen Übertragung (Kon. Ak. Amsterdam (XXXI) (8), (1928), 878—881).

(24) Les courbes dans les connexions linéaires. (Paraîtra dans le Mémorial Paris).

Juvet G.

(25) Les formules de Frenet dans un espace généralisé de Weyl, (Bull. Soc. neuchâteloise des sc. math. (46), (1920—1921).

(26) Les formules de Frenet pour un espace de M. Weyl. (C. Rendus Paris, (172), (192) 1647—1650).

Levi-Civita T.

(27) Sullo scostamento geodetico (Boll. Unione Mat. Italiana, (V), (2), (1926), 1—4).

(28) Sur l'écart géodésique. (Math. Ann. (97), (1926), 292—320).

Levi E. E.

(29) Saggio sulla teoria delle superficie ... (Ann. R. Scuola (20), aussi Diss. Pisa (1905)).

Oninescu O.

(30) Scostamento geodetico (Rend. Ac. Lincei, (V), (6). (1927), 561—563).

Schouten J. A.

(31) Der Ricci-Kalkül (Berlin, 1924).

(32) Quelques remarques sur l'écart géodésique et des problèmes pareils (C. Rendus Paris, (185). (1927), 1096—1098).

Struik D. J.

(33) Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie ... (Berlin 1922).

(34) Geometry of linear displacement (Bull. Am. Math. Soc. (XXXIII), (1927), 523—564).

Sur le calcul des variations.

Par

Nilos Sakellariou (à Athènes, Grèce)[1].

Introduction.

Dans un travail anterieur. (a) j'ai traité un problème du calcul des variations présentant une discontinuité ordinaire et sous la forme paramétrique (b). Dans l'énoncé connu: „trouver le minimum de l'intégrale“:

$$(1) \qquad I = \int_{s_1}^{*s_2} F(x, y; \vartheta)\, ds = \int_{s_1}^{*s_2} F(x, y; \cos\vartheta, \sin\vartheta)\, ds,$$

où

$$\cos\vartheta = \frac{dx}{ds} = x', \sin\vartheta = \frac{dy}{ds} = y'; \; F(x, y; \; \varkappa x', \varkappa y') =$$

$$= \varkappa F(x, y; x', y'), \quad \varkappa > 0,$$

nous nous sommes proposés, de plus, de chercher les courbes discontinues qui admettent des points de discontinuité ordinaires ou bien des points de rupture et qui rendent minimum l'intégrale (1) dans un sens bien déterminé. Nous avons appelé ces solutions „discontinues“ (b) pour les distinguer des autres, connues et désignées comme solutions „anguleuses“. Nous supposons que les courbes extrémales du problème joignent les deux points fixes $P_1 (s = s_1)$ et $*P_2 (s = *s_2)$.

---

[1]) Communication presentée au Deuxième Congrès des Mathematiciens Polonais Wilno, 1931.

Soient:

$$C: x = x(s),\ y = y(s) \quad s_1 \leqslant s \leqslant s_2 \tag{2}$$

les équations de la courbe cherchée qui rend minimum l'intégrale (1) et qui est de l'ordre C', située tout entière dans un domaine défini R du plan $x0y$, $F(x, y; \vartheta)$ étant une fonction des quatre arguments $x, y; x', y'$ d'ordre C''' dans un domaine défini T de tous les points $(x, y; \vartheta)$ pour lesquels le couple x, y se trouve dans R tandis que (x', y') peut être un système borné quelconque (sauf $0, 0$). Supposons que cette courbe (2) possedè une discontinuité avec des points de rupture $P_0(s = s_0)$, $^*P_0(s = {}^*s_0 \geqslant s_0)$.

Elle se compose alors de deux arcs $P_1 P_0$ et $^*P_0\, {}^*P_2$ de courbes continues sans points multiples, qui n'ont aucun point commun, tandis que les points $P_0(x_0, y_0)$ et $^*P_0({}^*x_0, = x_0, {}^*y_0)$ se trouvent sur une parallèle à l'axe $o\,y$, de sorte que les équations de l'extrémale discontinue du problème sont de la forme

$$C: \begin{matrix} x = x(s) \\ y = y(s) \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} x = x_0(s) \\ y = y_0(s) \end{matrix} (s_1 \leqslant s \leqslant s_0), \begin{matrix} = {}^*x_0(s) \\ = {}^*y_0(s) \end{matrix} ({}^*s_0 \leqslant s \leqslant {}^*s_2) \right\}. \tag{2'}$$

Dans I, nous avons considéré comme équations fondamentales les quatre conditions suivantes:

$$\left\{ \begin{aligned} F_{x'}(x_0, y_0; \vartheta_0) = 0, \quad F_{x'}(x_0, {}^*y_0; {}^*\vartheta_0) = 0 \\ F_{y'}(x_0, y_0; \vartheta_0) = 0, \quad F_{y'}(x_0, {}^*y_0; {}^*\vartheta_0) = 0 \end{aligned} \right. \tag{3}$$

où $F_{x'}$, $F_{y'}$ représentent les dérivées de F par rapport à x' et à y', ϑ_0 et $^*\vartheta_0$ les angles des tangentes aux points de rupture P_0 et $^*P_0$ de l'extrémale (2), tandis que comme conditions nécessaires apparaissent les suivantes:

$$\left| \begin{aligned} & F_{x'}(x_0, y_0; \vartheta_0) - F_{x'}(x_0, {}^*y_0; {}^*\vartheta_0) \equiv F_{x'} - {}^*F_{x'} = 0 \\ & F_{y'}(x_0, y_0; \vartheta_0) \equiv F_{y'} = 0 \\ & F_{y'}(x_0, {}^*y_0; {}^*\vartheta_0) \equiv {}^*F_{y'} = 0. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

Le problème présente alors en réalité, deux cas bien distincts: le premier, où nous avons pris comme équations fondamentales les (3), a été déjà traité dans I et II (c); le second cas est celui où les équations (4) remplacent les (3) et dans lequel on aura:

$$x' = {}^*x'$$

aux points de rupture.

En effet, considérons l'intégrale (1) prise le long de la courbe (2) et d'une des courbes de comparaison, définies au travail I, dont les équations sont:

$$^*C\colon x = {}^*x(s), \quad y = {}^*y(s), \quad s_1 \leqslant s \leqslant {}^*s_2$$

P et $^*P$ étant des points de rupture sur $^*C$.

Soient de plus:

$$L\colon x = \xi(\alpha), \quad y = \eta(\alpha)$$
$$^*L\colon {}^*x = {}^*\xi(\alpha), \quad {}^*y = {}^*\eta(\alpha)$$

deux courbes quelconques de l'ordre C', se trouvant en entier dans le domaine R, et dont L joint les points P_0, P et $^*L$ les points $^*P_0$, $^*P$. Supposons que la courbe de l'intégration se transforme continuellement de telle sorte que P_1 et $^*P_2$ restent fixes, tandis que P_0, $^*P_0$, toujours de même abcisse, se déplacent le long des courbes L et $^*L$ et nous trouvons comme nécessaire, la condition suivante de transversalité:

$$\begin{aligned}(5) \qquad & [F_{x'}(x, y; \vartheta) - F_{x'}(x, {}^*y; {}^*\vartheta)]\, \xi'(\alpha) \\ & + F_{y'}(x, y; \vartheta)\, \eta'(\alpha) - F_{y'}(x, {}^*y; {}^*\vartheta)\, {}^*\eta'(\alpha) = 0,\end{aligned}$$

$\xi'(\alpha)$, $^*\xi'(\alpha)$, $\eta'(\alpha)$, $^*\eta'(\alpha)$ étant les dérivées des $\xi(\alpha)$, $\eta(\alpha)$, $^*\xi(\alpha)$, $^*\eta(\alpha)$, tandis que nous avons $\xi(\alpha) = {}^*\xi(\alpha)$ et $\xi'(\alpha) = {}^*\xi'(\alpha)$.

Par suite de l'hypothèse précédente au sujet des courbes L et $^*L$, la relation (5) nous donne les conditions (4), dont la première est une équation de Erdmann-Weierstrass d'un problème aux solutions anguleuses du calcul des variations.

Si nous supposons que:

$$F_{x'}(x_0, y_0; \vartheta_0) = 0$$
$$F_{x'}(x_0, {}^*y_0; {}^*\vartheta_0) = 0,$$

nous aurons les équations (3) sur lesquelles est basée la suite du problème dans I et II.

Mais l'existence des deux cas dans le problème en question ressort aussi clarement de ce qui suit:

En effet, soit l'intégrale (1) prise le long de la courbe $P_1{}^*PPP_2$, qui remplit les conditions initiales du problème, et qui se compose de deux arcs de courbes continues tels que $P_1\,P$ et $^*P{}^*P_2$, qui ne se rejoignent pas et dont le premier est le résultat de l'allongement ou du raccourcissement de l'arc $P_1\;P_0$ de (2′) d'une longueur $P_0\ P$, le second provient d'un raccourcissement ou d'un allongement de $^*P_0\ ^*P_2$ de $^*P_0\ ^*P$, tandis que P, $^*P$ sont les points de rupture de cette courbe. Si P, $^*P$ correspondent à la valeur s (et $^*s = s$) de l'arc, l'intégrale

$$I(s) = \int_{s_1}^{s} F(x, y; \vartheta)\, ds + \int_{^*s}^{^*s_2} F(x, y; \vartheta)\, ^*ds = I_1(s) + I_2(^*s)$$

devient minimum pour $s = s_0$ $(s = {}^*s_0)$ et par conséquent, nous aurons:

$$I'(s)_{s=s_0} - I'(s)_{^*s=^*s_0} = 0,\ I''(s)_{s=s^0} - I''(s)_{^*s=^*s_0} \geqslant 0;$$

mais on a:

$$I'(s) = F(x, y; \vartheta) - F(x, {}^*y; {}^*\vartheta)$$
$$I''(s) = F_x \cdot x' + F_y \cdot y' + F_{x'} \cdot x'' + F_{y'} \cdot y'' -$$
$$- {}^*F_x \cdot {}^*x' - {}^*F_y \cdot {}^*y' - {}^*F_{x'} \cdot {}^*x'' - {}^*F_{y'} \cdot {}^*y'',$$

et pour $s = s_0$ $(^*s_0)$ on a:

$$F(x_0, y_0; \vartheta_0) - F(x_0, {}^*y_0, {}^*\vartheta_0) = 0$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

également on a:

$$F(x, y; \vartheta) = x'\ F_{x'} + y'\ F_{y'},\quad F(x, {}^*y; {}^*\vartheta) = {}^*x'\ {}^*F_{x'} + {}^*y'\ {}^*F_{y'},$$

et par suite:

$$x_0\ F_{x'}(x_0, y_0; \vartheta_0) + y_0\ F_{y'}(x_0, y_0; \vartheta_0)$$
$$- {}^*x_0'\ F_{x'}(x_0, {}^*y_0'; {}^*\vartheta_0) - {}^*y_0'\ F_{y'}(x_0, {}^*y_0; {}^*\vartheta_0) = 0.$$

En vertu de (4), nous aurons aux points de rupture:

$$(6)\quad \begin{cases} x_0'\ F_{x'} - {}^*x_0'\ {}^*F_{x'} = 0 \quad \text{ou} \quad (x_0' - {}^*x_0')\ F_{x'} = 0 \\ x_0'\ F_x - {}^*x_0'\ {}^*F_{x'} + y_0'\ F_y - {}^*y_0'\ {}^*F_y + (x_0'' - {}^*x_0'')\ F_{x'} = 0. \end{cases}$$

Si $F_{x'} = 0$, on aura: $^*F_x = 0$ et on a le cas des équations (3) c'est-à-dire, le premier, (d). La dernière condition des (6) est réduite alors à la suivante:

$$(6')\qquad x_0'\ F_x - {}^*x_0'\ {}^*F_x + y_0'\ F_y - {}^*y_0'\ {}^*F_y = 0.$$

Si $F_{x'}$, $^*F_{x'} \neq 0$, on aura $x_0' = {}^*x_0'$ et par suite:

$$(7)\quad x_0'\ (F_x - {}^*F_x) + y_0'\ F_y - {}^*y_0'\ {}^*F_y + (x_0'' - {}^*x_0'')\ F_{x'} = 0.$$

Je me propose de traiter ci-dessous, le deuxième cas du problème, c'est-à-dire, celui où nous considérons comme fondamentales les conditions (4), dont la première est certainement plus faible que: $F_{x'}=0$, $*F_{x'}=0$. Ces deux dernières conditions renferment cette autre: $F_{x'}-*F_{x'}=0$, car lorsque celles-là sont remplies, celle-ci l'est de même.

Dans le courant de cette étude, nous verrons que ce cas (ainsi que le premier déjà examiné) (e), peut être considéré ou mieux, comparé à un problème spécial du Calcul des Variations admettant des solutions anguleuses, comme d'ailleurs on le voit dans la représentation graphique du problème.

Conditions necessaires.

Outre les conditions (4) et (7) auxquelles sont soumis les points de rupture, on voit facilement que chacun des arcs $P_1\,P_0$, $*P_0\,*P_2$ de l'extrémale (2), doit vérifier les conditions bien connues du Calcul des Variations, à savoir: les équations de Lagrange-Euler, la condition de Legendre, celles de Jacobi et de Weierstrass.

En effet, considérons, d'une part, des variations particulières $P_1\,P'\,P_0\,*P_0\,*P_2$ de la courbe cherchée $P_1\,P_0\,*P_0\,*P_2$ qui conservent comme constants la partie $*P_0\,*P_2$ et le point P_0 (avec P_1) tandis que l'arc $P_1\,P_0$ (compris entre P_1 et P_0) varie, et, d'autre part, des variations telles que $P_1\,P_0\,*P_0\,*P'\,*P_2$, qui conservent la partie $P_1\,P_0$ et le point $*P_0$ fixes (avec $*P_2$), tandis que l'arc $*P_0\,*P_2$ (compris entre $*P_0$ et $*P_2$) varie.

Nous trouvons ainsi la première des conditons ordinaires à laquelle la courbe doit être assujettie, à savoir: pour que la courbe (2) rende minimum l'intégrale (1), il faut que les arcs $P_1\,P_0$, $*P_0\,*P_2$ vérifient les équations de Legrange-Euler:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{ds}F_{x'}=0,\ \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{ds}F_{y'}=0,\ldots.\\ &G(x,y;x',y';x''.y'')\equiv\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x'}+(x'y''-y'x'')\cdot F_1=0.\\ &G(x,*y;*x',*y';*x'',*y'')\equiv\frac{\partial^2 *F}{\partial *x\partial *y'}-\frac{\partial^2 *F}{\partial *y\,\partial *x'}+\\ &\qquad+(*x'\,*y''-*y'\,*x'')\cdot *F_1=0,\end{aligned}\right.$$

après avoir posé:

$$(9)\qquad \left|\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\cdot\frac{1}{y'^2} = \dots \\ {}^*F_1 &= \frac{\partial^2 {}^*F}{\partial {}^*x'^2}\cdot\frac{1}{{}^*y'^2} = \dots \end{aligned}\right.$$

En suivant le même raisonnement, on trouve que les arcs en question satisfont aux conditions de Legendre: $F_1 > 0$, ${}^*F_1 > 0$, et à celles de Jacobi et Weierstrass.

Recherches des points de rupture.

Soient:

$$(10)\qquad x = f(s, \alpha, \beta), \quad y = g(s, \alpha, \beta)$$

l'intégrale générale des équations différentielles de Legrange-Euler, $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\alpha = {}^*\alpha_0$, $\beta = {}^*\beta_0$ les valeurs des constantes qui donnent les arcs $P_1\,P_0$, ${}^*P_0\,{}^*P_2$, et $s = s_0$, $s = {}^*s_0$ les valeurs de s qui définissent les points de rupture P_0, ${}^*P_0$ sur $P_1\,P_0$ et ${}^*P_0\,{}^*P_2$.

Pour calculer les inconnues α_0, β_0; ${}^*\alpha_0, {}^*\beta_0$; $s_1, {}^*s_2$; $s_0, {}^*s_0$ on a les équations suivantes:

$$\begin{aligned} & x_1 = f(s_1, \alpha_0, \beta_0), \quad y_1 = g(s_1, \alpha_0, \beta_0) \\ & {}^*x_2 = f({}^*s_2, {}^*\alpha_0, {}^*\beta_0), \quad {}^*y_2 = g({}^*s_2, {}^*\alpha_0, {}^*\beta_0) \\ & F_{x'}(f(s_0, \alpha_0, \beta_0), g(s_0, \alpha_0, \beta_0); f_s, g_s) \\ & - F_{x'}(f({}^*s_0, {}^*\alpha_0, {}^*\beta_0), g({}^*s_0, {}^*\alpha_0, {}^*\beta_0);)\, {}^*f_s, {}^*g_s) = 0 \\ & F_{y'}(f(s_0, \alpha_0, \beta_0), g(s_0, \alpha_0, \beta_0); f_s, g_s) = 0 \\ & F_{y'}(f({}^*s_0, {}^*\alpha_0, {}^*\beta_0), g({}^*s_0, {}^*\alpha_0, {}^*\beta_0); {}^*f_s, {}^*g_s) = 0. \end{aligned}$$

A l'aide de ce système d'équations, on peut déterminer, de même, les coordonnées x_0, y_0; ${}^*x_0, {}^*y_0$, $(x_0 = {}^*x_0)$, des points de rupture P_0 et ${}^*P_0$ après avoir défini les constantes de l'intégrale.

Construction d'un ensemble d'extrémales discontinues.

Soit d'abord, l'extrémale (2') ayant comme points de rupture $P_0\,(x_0, y_0)$, ${}^*P_0\,(x_0, {}^*y_0)$, dont les tangentes à ces points font des angles ϑ_0 et ${}^*\vartheta_0$ avec ox; prenons ensuite un ensemble d'extrémales (10):

$$(11)\qquad x = \varphi(s, a),\ y = \psi(s, a),\ s_1 \leqslant s \leqslant s_0$$

qui renferment l'arc extrémal $P_1 P_0$: $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$, $(s_1 \leqslant s \leqslant s_0)$ pour $a = a_0$, et qui sont assujetties aux conditions suivantes: les φ, ψ; $\varphi_{.}$, $\psi_{.}$; $\varphi_{..}$, $\psi_{..}$ sont des fontions de s et de a d'ordre C' daus le domaine

$$(12) \qquad S_1 \leqslant s \leqslant S_0, \ | a - a_0 | < k'$$

S_1 et S_0 étant des quantités positives vérifiant les inégalités

$$s^* < S_1 < s_1, \ s_0 < S_0 < s_0^*, \quad s_1^* < s_1, \ s_0 < s_0^*$$

et k' une quantité positive dependant du choix de s et s_0. Pour toute valeur de a située dans $| a - a_0 | < k'$ l'arc $S_1 S_0$ se trouve dans R et l'on a:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(\varphi(s, a), \psi(s, a); \varphi_{.}, \psi_{.}) > 0 \\ \varphi_{.}^2 + \psi_{.}^2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \text{dans (12).}$$

Si, de plus, nous désignons par $\Delta(s, a)$ le déterminant fonctionnel $\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(s, a)}$ (a ayant une valeur prise dans $| a - a_0 | < k'$), nous avons $\Delta(s, a) \neq 0$ puisque $\Delta(s, a)$ est considéré comme fonction de s dans l'intervalle $(S_1 \ldots S_0)$, suivant la théorie générale du Calcul des Variations, qui trouve ici une application évidente.

On pose maintenant la proposition suivante: Sur une extrémale $P_1 P = C_a$, voisine de $P_1 P_0$ (pour $a = a_0$) déterminer: 1° un point $P(x, y)$; 2° un autre point $*P(x, *y)$ situé sur la droite $X = x$ parallèle à l'axe oy; 3° une direction passant par le point $*P$ et dont le sens positif forme un angle $*\vartheta$ avec l'axe des x, tel que l'angle ϑ de la direction positive de la tangente C_a en P et l'angle inconnu $*\vartheta$ avec les coordonnées des points de rupture P, $*P$ remplissent les conditions (4).

Pour déterminer les s, $*y$, $*\vartheta$ nous avons les équations suivantes:

$$(13) \quad \left| \begin{array}{l} F_{x'}(\varphi(s, a), \psi(s, a); \varphi_{.}(s, a), \psi_{.}(s, a)) \\ \quad - *F_{x'}(\varphi(s, a), *y; *\vartheta) = 0 \\ F_{y'}(\varphi(s, a), \psi(s, a); \varphi_{.}(s, a), \psi_{.}(s, a)) = 0 \\ *F_{y'}(\varphi(s, a), *y, *\vartheta) = 0. \end{array} \right.$$

Désignons par Φ, Ψ, Ω les premiers membres des équations (13); nous avons à calculer le déterminant:

$$D_{s,*y,*\vartheta} = \frac{\partial(\Phi, \Psi, \Omega)}{\partial(s, *y, *\vartheta)}$$

pour $s = s_0$ ($*s_0$), $a = a_0$, $*\vartheta = *\vartheta_0$ (aux points de rupture $P_0, *P_0$). Posons: $x' = p$, $y' = q$; $*x' = *p$, $*y' = *q$ et il vient:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = F_x - *F_{x'x} \cdot p, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial *y} = - *F_{x'y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial *} =$$

$$- *F_{x'x'} \cdot *q - *F_{x'y'} \cdot *p = *F_1 \cdot *q$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = F_y, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial *y} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial *\vartheta} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial s} = *F_{y'x} \cdot p, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial *y} = *F_{y'y}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial *\vartheta} = - *F_{y'x'} \cdot *q + *F_{y'y'} \cdot *p = *F_1 \cdot *p.$$

Par conséquent on a:

$$D_{s*y*\vartheta} = \begin{vmatrix} F_x - *F_{x'x} \cdot p & -*F_{x'y} & *F_1 \cdot *q \\ F_y & 0 & 0 \\ *F_{y'x} \cdot p & *F_{y'y} & *F_1 \cdot *p \end{vmatrix} = *F_1 \cdot F_y \cdot *F_y,$$

où on a posé

$$F_{x'x} = L + qq_s \cdot F_1, \quad F_{x'y} = M - qp_s \cdot F_1, \quad F_{y'x} = M - pq_s \cdot F_1;$$
$$F_{y'y} = N + pp_s \cdot F_1, \quad F_{x'x'} = F_1 \cdot q^2, \ F_{x'y'} = - F_1 \cdot pq, F_{y'y'} = F_1 \cdot p^2;$$
$$F_x = L \cdot p + M \cdot q, \quad F_y = M \cdot p + N \cdot q; \ *F_{x'x} = *L + *q*q_s \cdot *F_1, \ldots.$$

D'où la conclusion suivante:
„Si les conditions

$$(14) \qquad F_y = F_y(x_0, y_0; \vartheta_0) \neq 0, \quad *F_y = F_y(x_0, *y_0; *\vartheta_0) \neq 0$$

sont remplies (aux points de rupture), les équations (13) peuvent se résoudre d'une seule manière dans le voisinage s_0 ($*s_0$), $*y_0$, $*\vartheta_0$ par rapport à s, $*y$, $*\vartheta$, et la solution:

$$s = s(a), \ y = *y(a), \ *\vartheta = *\vartheta(a)$$

dans le voisinage $a = a_0$ est de l'ordre C', et les relations

$$s(a_0) = s_0, \quad *s(a_0) = *s_0, \quad *y(a_0) = *y_0, \quad *\vartheta(a_0) = *\vartheta_0$$

sont vérifiées. (f)

Nous supposons dans la suite que les conditions (14) sont satisfaites et nous faisons remarquer que:

$$F_1(\varphi(s,a),\ \psi(s,a),\ \varphi_s,\ \psi_s) > 0$$
$$F_1(\varphi(s,a),\ {}^*y(a);\ {}^*\vartheta(a)) > 0,$$

si $|a - a_0|$ est choisi suffisamment petit.

Nous pouvons, maintenant, du point ${}^*P({}^*x = x = \varphi(s, a),$ ${}^*y = {}^*y(a))$ et dans la direction définie par ${}^*\vartheta$ construire un arc ${}^*C_a$ dont les équations sont de la forme

$$(^*11) \qquad {}^*C_a\colon x = {}^*\varphi({}^*s, a),\ y = {}^*\psi(s, a)$$

et à $s = s(a)$ correspond le point $P(s, x, y)$ sur C_a et ${}^*P({}^*s, x, {}^*y)$ sur ${}^*C_a$ tel que l'on ait:

$${}^*\varphi({}^*s(a), a) = \varphi(s(a), a).$$

Nous obtenons ainsi une extrémale discontinue $C_a + {}^*C_a$ avec P et ${}^*P$ comme points de rupture.

Si nous faisons varier le paramètre a nous aurons un ensemble d'extrémales discontinues qui renferment la solution (2') pour $a = a_0$.

Les courbes des points de rupture.

Lorsque a varie, les points P et ${}^*P$ décrivent deux courbes B et ${}^*B$, que nous appelons „lignes des points de rupture" du problème considéré et dont les équations sont:

$$(15) \qquad B\colon \begin{cases} \varphi(s(a), a) = x(a) \\ \psi(s(a), a) = y(a) \end{cases}$$

$$(^*15) \qquad {}^*B \begin{cases} {}^*\varphi({}^*s(a), a) = \varphi(s(a), a) = {}^*x(a) = x(a) \\ {}^*\psi({}^*s(a), a) = {}^*y(a). \end{cases}$$

Pour $a = a'$ par exemple, on obtient les points $P_{a'}$, ${}^*P_{a'}$, de l'extrémale $C_{a'} + {}^*C_{a'}$.

Calculons maintenant les $tg\,\omega$ et $tg\,{}^*\omega$ des angles des courbes B et ${}^*B$ avec l'axe des x aux points de rupture P, ${}^*P$, et surtout aux points P_0, ${}^*P_0$. Nous nous servons à cet effet des équations suivantes:

$$(16) \quad \begin{cases} F_{x'}(\varphi(s(a),a),\ \psi(s(a),a);\ \varphi_s(s(a),a),\ \psi_s(s(a),a)) \\ \quad - F_{x'}({}^*\varphi({}^*s(a),a),\ {}^*\psi({}^*s(a),a);\ {}^*\varphi_s({}^*s(a),a),\ {}^*\psi_s({}^*s(a),a)) = 0 \\ F_{y'}(\varphi(s(a),a),\ \psi(s(a),a);\ \varphi_s,\ \psi_s) = 0 \\ {}^*F_{y'}({}^*\varphi({}^*s(a),a),\ \psi({}^*s(a),a);\ {}^*\varphi_s,\ {}^*\psi_s) = 0. \end{cases}$$

Prenant la dérivée par rapport à chacune des équations (16) nous aurons:

$$
\begin{aligned}
&F_{x'} s'(a) + F_{x'x} \cdot \varphi_a + F_{x'y} \psi_a + F_{x'x'} \cdot \varphi_{sa} + F_{x'y'} \cdot \psi_{sa} \\
&- {}^*F_x {}^*s'(a) - {}^*F_{x'x} \cdot {}^*\varphi_a - {}^*F_{x'y} \cdot {}^*\psi_a - {}^*F_{x'x'} \cdot {}^*\varphi_{sa} - {}^*F_{x'y'} \cdot {}^*\psi_{sa} = 0 \\
&F_y \cdot s'(a) + F_{y'x} \cdot \varphi_a + F_{y'y} \cdot \psi_a + F_{y'x'} \cdot \varphi_{sa} + F_{y'y'} \cdot {}^*\psi_{sa} = 0 \\
&{}^*F_y \cdot {}^*s'(a) + {}^*F_{y'x} {}^*\varphi_a + {}^*F_{y'y} \psi_a + {}^*F_{y'x'} {}^*\varphi_{sa} + {}^*F_{y'y'} {}^*\psi_{sa} = 0.
\end{aligned}
$$

De ces équations on tire les $s'(a)$, ${}^*s'(a)$, des équations (15) et (*15) il vient:

$$
\begin{aligned}
x'(a) &= \varphi_s \cdot s'(a) + \varphi_a \\
{}^*x'(a) &= {}^*\varphi_s \cdot {}^*s'(a) + {}^*\varphi_a
\end{aligned}
$$

où φ_s, φ_a; ${}^*\varphi_s$, ${}^*\varphi_a$ représentent les dérivées de φ, ${}^*\varphi$ par rapport à s et à a.

On a, par suite, en supposant $F_y \neq 0$:

$$
x'(a) + \frac{1}{F_y}\left[\varphi_a F_y - \varphi_s(F_{y'x} \varphi_a + F_{y'y} \psi_a + F_{y'x'} \varphi_{sa} + F_{y'y'} \psi_{sa})\right]
$$
$$
= -\frac{N \cdot \Delta(s, a) + F_1 \cdot p^2 \cdot \Delta_s(s, a)}{F_y}
$$

$\Delta_s(s, a)$ désignant la dérivée de $\Delta(s, a)$ par raport à s.

De même, on a:

$$
y'(a) = \psi_s s'(a) + \psi_a
$$

puis:

$$
y'(a) = \frac{M \cdot \Delta(s, a) - p \cdot q \cdot F_1 \cdot \Delta_s(s, a)}{F_y}.
$$

Par conséquent, on a:

$$
\text{(18)} \qquad \operatorname{tg} \omega = -\frac{M \cdot \Delta(s, a) - pq \cdot F_1 \cdot \Delta_s(s, a)}{N \cdot \Delta(s, a) + p^2 \cdot F_1 \cdot \Delta_s(s, a)}
$$

et (*18) pour $\operatorname{tg} {}^*\omega$ une formule analogue.

Si nous cherchons les valeurs de $\operatorname{tg} \omega$ et $\operatorname{tg} {}^*\omega$ aux points P_0 et ${}^*P_0$ des courves B et ${}^*B$, il suffit de remplacer dans les équations (18) et (*18) $a = a_0$ $s = s_0$, et ${}^*s = {}^*s_0$ et par suite les p, q; ${}^*p$, ${}^*q$; F_1, ${}^*F_1$; $s(a_0)$, ${}^*s(a_0)$ par ses valeurs p_0, q_0, ${}^*p_0$, ${}^*q_0$, $F_1(\ldots)_0$, ${}^*F_1(\ldots)_0$ aux points: P_0 et ${}^*P_0$.

Comme on peut remarquer, les valeurs des $\operatorname{tg} \omega$ et $\operatorname{tg} {}^*\omega$ dépendent des déterminants de Jacobi Δ, Δ_s; ${}^*\Delta$, ${}^*\Delta_s$ et qui dépendent seulement du choix des (11) et (*11).

Si $Q(s=\tau)$ est le foyer de l'exetrémale $P_1 P_0$ nous aurons, comme on sait:

$$\varDelta(s, \alpha_0) = c \cdot \theta(s, \tau), \quad \varDelta_s(s, \alpha_0) = c \cdot \theta_s(s, \tau)$$

et par analogie:

$$\varDelta(^*s, \alpha_0) = {}^*c \cdot \theta(^*s, {}^*\tau), \quad \varDelta_s(^*s, \alpha_0) = {}^*c \cdot \theta_s(^*s, {}^*\tau).$$

où c et $^*c$ sont des constantes.

Par conséquent, la valeur de $\operatorname{tg} \cdot \omega$ au point de rupture P_0, prend la forme:

$$(18)_0 \qquad \operatorname{tg} \omega_0 = -\frac{M_0\, \theta(s_0, \tau) - p_0\, q_0 \cdot F_1(\ldots)_0\, \theta_s(s_0, \tau)}{N_0\, \theta(s_0, \tau) + p_0^2 \cdot F_1(\ldots)_0 \cdot \theta_s(s_0, \tau)} \qquad \text{(g)}$$

est aussi au point $^*P_0$ la valeur de $\operatorname{tg} {}^*\omega_0$ est donnée par une formule analogue $(^*18)_0$

De plus, nous trouvons une autre condition qui doit être remplie aux points P_0 et $^*P_0$, qui est une conséquence de (17), en supposant que:

$$F_y, {}^*F_y \neq 0.$$

On a en effet, aux points $P_0, {}^*P_0$:

$$\frac{1}{F_y}[(F_x F_{y'x} - F_y F_{x'x})\, \varphi_a + (F_x F_{y'y} - F_y F_{x'y})\psi_a +$$
$$+ (F_x F_{y'x'} - F_y F_{x'x'})\, \varphi_{sa} + (F_x F_{y'y'} - F_y F_{x'y'})\, \psi_{sa}] =$$
$$= \frac{1}{{}^*F_y}[(^*F_x {}^*F_{y'x} - {}^*F_y {}^*F_{x'x})^*\varphi_a + (^*F_x {}^*F_{y'y} - {}^*F_y {}^*F_{x'y}) +$$
$$+ (^*F_x {}^*F_{y'y} - {}^*F_y {}^*F_{x'y})^*\varphi_{sa} + (^*F_x {}^*F_{y'y'} - {}^*F_y {}^*F_{x'y'})^*\psi_{sa}]$$

où

$$(19) \qquad {}^*F_y[M^2 - LN]\theta - (Lp^2 + 2Mpq + Nq^2) F_1\, \theta_s =$$
$$= F_y[(^*M - {}^*L {}^*N)^*\theta - (^*L {}^*p^2 + 2{}^*M {}^*p {}^*q^2)\, {}^*F_1 \cdot {}^*\theta_s].$$

R e m a r q u e. Le premier membre de cette égalité est le produit $\theta \cdot {}^*F_y$ par la quantité:

$$(M_0^2 - L_0 N_0) - (p_0 F_x + q_0 F_y)\, F_1 \cdot (\ldots)_0\, \theta_s(s_0, \tau) : \ \theta(s_0, \tau)$$

qui est une fonction décroissante de τ, si l'on suppose

$$p F_x + q F_y > 0 \quad \text{au point } P_0 \qquad \text{(h)}.$$

On voit maintenant que L_0, M_0, N_0; p_0, q_0, $*M_0$, $*N_0$, $*p_0$, $*q_0$... sont indépendants du choix de l'ensemble (11) et (*11), surtout des $Q(s=\tau)$, $*Q(*s=*\tau)$. On en déduit que les $\mathrm{tg}\,\omega$, $\mathrm{tg}\,*\omega$ des courbes B et $*B$ aux points P_0 et $*P_0$ sont les mêmes pour toutes les extrémales (11) et (*11) qui possèdent les mêmes foyers Q et $*Q$ sur $P_1 P_0$, $*P_0 *P_2$.

Cherchons comment varient les $\mathrm{tg}\,\omega$, $\mathrm{tg}\,*\omega$ lorsque les foyers Q et $*Q$ parcourent les arcs C_{a_0}, $*C_{a_0}$.

Prenons la dérivée des $\mathrm{tg}\,\omega$ ($\mathrm{tg}\,*\omega$) par rapport à τ (et à $*\tau$) et il vient:

$$\frac{d}{d\tau}\mathrm{tg}\,\omega = -\frac{p \cdot F_1 \cdot F_v(\theta_s \theta_\tau - \theta\,\theta_{s\tau})}{(N\theta + p^2 F_1 \cdot \theta_s)^2}$$

mais on a, comme on sait

$$(\theta\,\theta_{s\tau} - \theta_s \theta_\tau)_{s=s_0} = [\vartheta_1(s_0)\,\vartheta_2'(s_0) - \vartheta_2(s_0)\,\vartheta_1'(s_0)] \cdot$$
$$\cdot [\vartheta_1(\tau)\,\vartheta_2'(\tau) - \vartheta_2(\tau) \cdot \vartheta_1'(\tau)]$$

ou $\vartheta_1(s)$, $\vartheta_2(s)$ représentent deux intégrales linéaires et indépendantes l'une de l'autre de l'équation différentielle de Jacobi:

$$F_2 \cdot u - \frac{d}{ds}\left(F_1 \cdot \frac{du}{ds}\right) = 0$$

tandis que F_2 est donné par les équations suivantes:

$$F_2 = L : q^2 = M_1 : pq : N_1 : p^2$$

$$L_1 = F_{xx} - q_s^2 \cdot F_1 \cdot \frac{dL}{ds}$$

$$M_1 = F_{xy} + p_s q_s \cdot F_1 - \frac{dM}{ds}$$

$$N_1 = F_{yy} - p_s^2 \cdot F_1 - \frac{dN}{ds}. \tag{i}$$

De la théorie des équations différentielles linéaires, on a

$$\vartheta_1(s)\,\vartheta_2'(s) - \vartheta_2(s)\,\vartheta_1'(s) = \frac{k''}{F_1(s)},$$

k'' étant une constante differente de 0.

Par suite;

$$\vartheta_1(s_0)\,\vartheta_2'(s_0) - \vartheta_2(s_0)\,\vartheta_1'(s_0) = \frac{k''}{F_1(s_0)}$$

et

$$\frac{d}{d\tau}\operatorname{tg}\omega = -\frac{k''^2\cdot F_v\cdot p}{F_1(\tau)\cdot(\ldots)^2}.$$

Cette dernière égalité prouve que la dérivée de $\operatorname{tg}\omega$ par rapport à τ conserve le même signe, lorsque τ varie, puisque $F_1(\tau) > 0$ et que $F_v'(s_0)$ indépendant de τ, est différent de 0.

On a un résultat analogue pour la dérivée de $\operatorname{tg}{}^*\omega$ par rapport à $^*\tau$.

Si P_0' $(s = s_0')$ est le point conjugué de P_0 sur C_{α_0}, le déterminant $\theta(s_0, \tau)$ s'annulera pour $\tau = s_0'$ et $s = s_0$ et alors, on aura:

$$\operatorname{tg}\omega_0 = -\frac{q_0}{p_0} = \operatorname{tg}\vartheta_0,$$

d'où la proposition suivante:

Si le point $Q(s = \tau)$ parcourt l'arc de l'extrémale C_{α_0} du point P_0' conjugué de P_0 sur C_{α_0} jusqu'au point P_0, la tangente de la courbe de rupture B, au point P_0, tourne continuellement et dans le même sens depuis sa place initiale qui coincide evec la tangente de C_{α_0} au point P_0 d'un angle π jusqu'à sa place finale qui coincide avec sa position initiale.

Pendant qu'elle tourne, cette tangente devient une seule fois parallèle à la tangente au point $^*P_0$ de $^*C_{\alpha_0}$ $(\omega = {}^*\vartheta_0)$.

Si l'on suppose que, dans cette position on ait $s = \tau = e_0$ et que E_0 représente le point $Q(e_0)$ sur C_{α_0} correspondant à cette valeur, le point $^*E_0$ sera situé sur $^*C_{\alpha_0}$ et correspondra à $^*Q(^*\tau = {}^*e_0)$ et ou la tangente à la courbe des points de rupture $^*B$ en $^*P_0$ est parallèle $(^*\omega = \vartheta_0)$ à la tangente de C_{α_0} en P_0.

Nous pouvons trouver la valeur des e_0, $^*e_0$ en nous servant des équations (18) et (*18) et en posant $\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}{}^*\vartheta_0$, $\operatorname{tg}{}^*\omega = \operatorname{tg}\vartheta_0$.

Nous aurons alors:

$$(20)\quad \theta(e_0)(N_0 \sin{}^*\vartheta_0 + M_0\cos\vartheta_0) + p_0\,\theta_s(e_0)\sin(^*\vartheta_0 - \vartheta_0) = 0$$

et par analogie une équation (*20).

En considérant le mouvement du point $^*Q(^*\tau)$ sur l'arc $^*P_0\,{}^*P_2$ du point $^*P_0$ jusqu'au point $^*P_0'$ et en le comparant avec celui de $Q(\tau)$ on a le résultat suivant:

Si $Q(\tau)$ décrit l'arc $P'_0 E_0$, son foyer conjugué $*Q$ décrit l'arc $*E_0 *P'_0$; si Q décrit l'arc $E_0 P_0$, son point conjugué $*Q$ decrit l'arc $*P_0 *E_0$. Ainsi, on a un saut pour le mobile $*Q$ du point $*P'_0$ au point $*P_0$, qui correspond à la position E_0 du Q sur l'arc $P_0 P_0$; et aussi un autre saut pour le mobile Q du point P_0 au point P'_0, qui correspond à la position $*E_0$ de $*Q$ sur l'arc $*P_0 *P'_0$. En désignant par ε un nombre positif, assez petit on voit facilement que le point $E_1 (\tau = e_0 - \varepsilon)$ correspond au point $*H_1$, situé en avant du point $*P'_0$ sur l'arc $*P_0 *P'_0$ et le point $E_2 (\tau = e + \varepsilon)$ correspond au point $*H_2$ situé en arrière du point $*P_0$. Au point $*E_1 (*\tau = *e_0 - \varepsilon)$ correspond le point H_1, situé avant le point P_0, et au point $E_2 (*\tau = *e_0 + \varepsilon)$ le point H_2, situé après le point P'_0.

D'après ce qui précède, on conclut que, à chaque droite d ou $*d$, qui passe par le point P_0 de la courbe B ou par $*P_0$ de $*B$, et qui n'est pas tangente à l'extrémale (2) au point P_0 ou $*P_0$, correspond un point Q ou $*Q$ situé entre les points P'_0 et P_0 de l'arc $P_1 P_0$ ou resp. entre les points $*P_0$ et $*P'_0$ de l'arc $*P_0 *P_2$ de manière que la courbe B ou $*B$ pour toutes les extrémales (11) et (*11) qui possèdent le foyer Q ou $*Q$ soit tangente à cette droite au point P_0 ou $*P_0$.

Si l'on se donne l'angle ω que fait l'axe des x avec la direction positive de la droite d, on peut déterminer le point Q à l'aide de l'équation

$$\theta_e \cdot F_1 \cdot p \sin (\omega - \vartheta) + (N + M \cos \omega)\, \theta = 0$$

et par analogie le point $*Q$.

R e m a r q u e. On distingue huit cas, suivant le sens du mouvement des tangentes. des courbes B et $*B$ en P_0 et $*P_0$, c'est-à-dire, quand Q se déplace d'une manière continue sur C_α de P_0 à E_0 et à P'_0 et de $*P_0$ à $*E_0$ et à $*P'_0$.

On a, en effet:

$$p_0 = *p_0 \gtrless 0 \quad \text{et} \quad F_y(s_0) \gtrless 0, \quad *F_y(*s_0) \gtrless 0.$$

Ces mouvements se font de la manière suivante:

1°) Si $p > 0$, $F_y > 0$, $*F_y > 0$. la tangente à B tourne dans le sens négatif en dehors de l'angle $(C_{\alpha_0}, *C_{\alpha_0})$; il en est de même de celle à $*B$ mais dans l'angle $(C_{\alpha_0}, *C_\alpha)$.

2°) Si $p > 0$, $F_y < 0$, $*F_y > 0$, les tangentes de B et $*B$

tournent dans le sens positif, la première dans l'angle des courbes C_{a_0}, $*C_{a_0}$, la seconde, en dehors de cet angle.

3°) Si $p > 0$, $F_y > 0$, $*F_y < 0$, la tangente à B se meut dans le sens négatif, tandis que celle à $*B$, dans le sens positif. Les deux se trouvent en dehors de l'angle $(C_{a_0}, *C_{a_0})$.

4°) Si $p > 0$, $F_y < 0$, $*F_y < 0$, la tangente à B se meut dans le sens positif, celle à $*B$, dans le sens négatif; les deux se trouvent dans l'angle $(C_{a_0}, *C_{a_0})$.

On examinerait de la même manière les cas $p < 0$ avec la remarque que, si $p < 0$, $F_y > 0$, $*F_y < 0$, le sens du mouvement de la tangente à B est positif, l'autre, négatif et les deux tangentes tournent dans l'angle $(C_{a_0}, *C_{a_0})$.

Les conditions de Jacobi et de Carathéodory.

Supposons que les conditions: $F_y \neq 0$, $*F_y \neq 0$ sont satisfaites aux points de rupture P_0, $*P_0$. Il est facile de montrer que, pour que la courbe (2) $C_{a_0} + *C_{a_0}$ rendent minimum l'intégale (1), il faut avoir non seulement

$$P_0' < P_1, \; *P_2 < *P_0'$$

(P_0', $*P_0'$, étant les points conjuguées de P_0 et $*P_0$ de chacun des arc $P_1 P_0$ et $*P_0 *P_2$) mais, de plus, les conditions:

$$E_0 \leqslant P_1, \quad P_2 \leqslant *E_0,$$

où E_0 et $*E_0$ sont les points mentionnés plus haut des arcs $P_0' P_0$, $P_0 *P_0'$. (Ces points ont éte introduits dans le Calcul des variations et pour les solutions anguleuses par Monsieur Carathéodory).

A cet effet, considérons une des lignes discontinues de comparaison du problème en question $C_a + *C_a = P_1 P^0 *P^0 *P_2$ avec des points de rupture $P^0(s^0)$, $*P^0(*s^0)$, et soit un point $*P(*s)$ sur cette courbe (sur la partie $*P^0 *P_2$ p. ex.) on a:

$$I_{P,*P}(s, a) = \int_{P_1}^{P^0} \mathcal{F}(s, a)\, ds + \int_{*P^0}^{*P} \mathcal{F}(s, a)\, ds = I_{P_1 P^0}(s, a) + I_{*P^0 *P}(s, a).$$

où $\mathcal{F}(s, a)$ est le résultat après avoir remplacé dans F, les x, y, $*x$, $*y$ par leurs valeurs tirées des équations (11) et (*11), s étant considéré comme fonction de a.

Nous trouvons facilement

$$\frac{\partial I_{P_1 {}^*P}}{\partial s} = \mathcal{F}(s, a)$$

$$\frac{\partial I_{P_1 P^0}}{\partial a} = \mathcal{F}_{x'}\varphi_a + \mathcal{F}_{y'}\psi_a + \mathcal{F}(s, a)\, s_a/^{P^0}$$

et par suite de l'homogénéité de F:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_{P_1 P^0}}{\partial a} &= \mathcal{F}_{x'}(\varphi_a + \varphi_s s_a) + \mathcal{F}_{y'}(\psi_a + \psi_s s_a)/^{P^0} \\ &= \mathcal{F}_{x'}\, x'(a) + \mathcal{F}_{y'}\, y'(a),\end{aligned}$$

puisqu'au point P^0 nous avons:

$$\begin{aligned}\varphi_a + \varphi_s s_a &= x'(a) \\ \psi_a + \psi_s s_a &= y'(a)\end{aligned}$$

tandis que $x(a)$, $y(a)$ sont les coordonnées du point P^0 de la courbe des points de rupture B, ou bien:

$$\frac{\partial I_{P_1 P^0}}{\partial a} = \mathcal{F}_{x'} \cdot x'(a)$$

par suite des (4).

Par analogie, on trouve:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_{{}^*P^0 {}^*P}}{\partial a} &= {}^*\mathcal{F}_{x'}\, {}^*\varphi_a + {}^*\mathcal{F}_{y'}\, {}^*\psi_a - \mathcal{F}_{x'}({}^*s^0, a)\,({}^*\varphi_a + {}^*\varphi_s\, {}^*s^a) - \\ &\qquad - \mathcal{F}_{y'}({}^*s^0, a)\,({}^*\psi_a + {}^*\psi_s\, {}^*s_a) \\ &= {}^*\mathcal{F}_{x'}\, {}^*\varphi_a + {}^*\mathcal{F}_{y'}\, {}^*\psi_a - \mathcal{F}_{x'}({}^*s^0, a)\, {}^*x'(a) - \mathcal{F}_{y'}({}^*s^0, a)\, {}^*y'(a) \\ &= {}^*\mathcal{F}_{x'}\, {}^*\varphi_a + {}^*\mathcal{F}_{y'}\, {}^*\psi_a - \mathcal{F}_{x'}({}^*s^0, a)\, {}^*x'(a).\end{aligned}$$

Par conséquent.

$$\frac{\partial I_{P_1 {}^*P}}{\partial a} = {}^*\mathcal{F}_{x'}\, {}^*\varphi_a + {}^*\mathcal{F}_{y'}\, {}^*\psi_a + [\mathcal{F}_{x'}(s^0, a) - \mathcal{F}_{x'}({}^*s^0, a)]\, x'(a),$$

où par suite des (4), on a:

$$\mathcal{F}_{x'}(s^0, a) - \mathcal{F}_{x'}({}^*s^0, a) = 0.$$

Nous pouvons donc appliquer dans le cas présent la proposition connue de Kneser au sujet de l'enveloppe.

Soit $Q_0(s = \tau_0)$, le foyer sur C_{as} et Q son point correspondant sur l'extrémale $P_1\, Q\, P^0$ de l'ensemble des courbes que nous pouvons mener quand on nous donne la courbe des points de rupture B Les points Q_0 et Q sont situés sur l'enveloppe de l'ensemble precédent et nous avons:

$$I_{Q_0 Q} + I_{Q P^0} + I_{*P^0 *P_2} = I_{Q_0 P_0} + I_{*P_0 *P_2}.$$

On déduit que l'extrémale discontinue $Q_0 P_0 {}^*P_0 {}^*P_2$ ne rend pas minimum l'intégrale (1) si le point Q_0 suit P_1 sur l'arc $P_1 P_0$. Il faut dans le cas du minimum, q'on ait $Q_0 \leqslant P_1$.

De même, si $^*Q$ est le point de contact de l'enveloppe de l'ensemble des courbes menées lorsqu'on donne $^*B$, avec $^*P^0 {}^*P_2$ et $^*Q_0$ ($^*s = {}^*\tau_0$) le point correspondant de $^*Q$ sur $^*P_0 {}^*P_2 = {}^*C_{\alpha_0}$ on aura:

$$I_{P_1 P^0} + I_{*P^0 *Q} + I_{*Q *Q_0} = I_{P_1 P_0} + I_{*P_0 *Q_0}.$$

On en conclut que l'on n'obtient pas le minimum de l'intégrale (1) pour la courbe discontinue $P_1 P_0 {}^*P_0 {}^*P_2 = C_{\alpha_0} + {}^*C_{\alpha_0}$ si $^*Q_0$ précède $^*P_2$. Il faut donc que l'on ait dans le cas du minimum:

$$^*P_2 \leqslant {}^*Q_0.$$

On peut maintenant très facilement (j) montrer que dans le cas du minimum, il faut que les conditions de Carathéodory soit remplies: c'est-à-dire il faut que l'on ait:

$$E_0 \leqslant P_1, \quad {}^*P_2 \leqslant {}^*E_0.$$

Enfin, il est aisé de montrer que nous pouvons construire le champ du problème avec des extrémales discontinues. Ce champ sera composé de deux autres, distincts l'un de l'autre et correspondant respectivement aux courbes B et $^*B$ des points de rupture.

Renvois.

(a) Über die nicht-stetigen Lösungen in der Variationsrechnung, 1927, Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, t. LV, pp. 38—48.

Au cours de la présente étude, ce travail sera cité sous le signe I.

(b) C'est Mr. A. Razmadzé qui, le premier, à posé et traité le problème des solutions discontinues dans le Calcul des Variations, mais sous la forme de le variable indépendante x. Voir Math. Annalen Bd. 94, Heft 1/2, et Proceedings of the International Math. Congres 1924, Bd. I, pp. 561—588.

(c) N. Sakellariou, Sur les foyers des solutions discontinues du Calcul des Variations, Bull. de la Soc. Math. de Grèce t. IX, 1, 2, 1928, pp. 31—39.

Ce travnil est désigné dans la suite sous le signe II.

(d) Voir, L. M. Graves, Discontinuous solutions in the Calculus of Variations, Bull. of the Amer. Math. Society, Vol. XXXVI, pp. 842—843.

(e) L. M. Graves loc. cit. p. 842.

(f) On peut avec les suppositions précédentes au sujet de la courbe (2′) trouver sur l'arc $^*C_\alpha$ défini par les équations

$$^*x = {}^*\varphi(^*s, a), \quad ^*y = {}^*y(^*s, a) \quad ^*s_0 \leqslant {}^*s \leqslant {}^*s_1$$

un point $^*P(^*x, ^*y)$ ou $^*P(^*s)$, un autre $P(^*x, y)$ situé sur la droite $\chi = {}^*x$ et un angle ϑ formé par l'axe des x et le sens positif de la direction passant par P, tels que les conditions (4) soient remplies; il est aisé ensuite de construire l'ensemble:

$$x = \varphi(s, a), \quad y = \psi(s, a)$$

et l'on aura:

$$^*s = {}^*s(a), \quad y = y(a), \quad \vartheta = \vartheta(a).$$

(g) Dans le cas où l'on suppose $F_{x'} = 0$, $^*F_{x'} = 0$, la valeur analogue de tangente ω_0 désignée dans II p. 36 par tangente φ_1 a la forme:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{p_0 q_0 F_1(\ldots)_0 \theta_s(s_0, \tau) - M_0 \theta(s_0, \tau) \pm \sqrt{\Lambda_0}}{N_0 \theta(s_0, \tau) + p_0^2 F_1(\ldots)_0 \theta_s(s_0, \tau)}$$

et par analogie, si l'on a:

$$\Lambda_0 = 0.$$

De ces formules, on trouve facilement $\operatorname{tg} \varphi_1$ comme il est dit à la page 35 de II.

(h) Voir II, p. 36.

(i) Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung p. 225.

(j) Bolza, loc. cit. pp. 380—381.

Sur l'intégrale fondamentale de l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre.

Par

W. Wilkosz (Cracovie).

Nous allons démontrer dans le présent travail quelques théorèmes de caractère intégral concernant l'existence de l'intégrale première de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(xy)$ ainsi que celle de l'intégrale fondamentale de l'équation aux dérivées partielles associée à la précédente: $\frac{\partial z}{\partial x} + f\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. En même temps la question de l'existence du facteur intégrant de l'équation:

$$f(xy)\,dx - dy = 0$$

se trouve immédiatement résolue.

Les équations ci-dessus sont considérées dans un ensemble ouvert et borné, d'ailleurs quelconque, qui n'est pas supposé simplement connexe ni même connexe, ce qui constitue la différence essentielle entre les résultats importants de M. Kamke, faisant l'objet de son memoire inséré dans les Mathem. Annalen [1]) et les nôtres. Nous allons garder dans l'énoncé des théorèmes la plus grande analogie possible avec les résultats de M. Kamke, la méthode de notre travail étant cependant entièrement différente.

§ 1.

Voici le premier théorème, que nous nous proposons de démontrer.

---

[1]) Kamke, Zur Theorie der Differentialgleichungen. Mathem. Annalen Bd. 99, p. 602.

Théorème I. Supposons que ω et Ω soient deux ensembles ouverts plans et bornés et que tout point d'accumulation de l'ensemble ω appartienne à Ω.

Supposons encore les fonctions $f(xy)$ et $f'_y(xy)$ continues dans l'ensemble Ω.

Nous affirmons dans ce cas, qu'il existe une fonction $\psi(xy)$ jouissant des propriétés suivantes:

a) Elle est définie dans l'ensemble ω.

b) Elle est constante le long de toute intégrale de l'équation:

$$\frac{dy}{dx} = f(xy). \tag{1}$$

c) Elle possède dans ω des dérivées partielles du premier ordre continues et satisfaisant dans cet ensemble aux relations suivantes:

$$\psi'_y(xy) > 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + f(xy)\frac{\partial \psi}{dy} = 0. \tag{3}$$

d) L'ensemble T des valeurs de la fonction $\psi(xy)$ constitue un ensemble ouvert; il est même un intervalle (ouvert) lorsque nous supposons l'ensemble ω connexe.

e) Pour un t fixe, appartenant à l'ensemble T, l'équation:

$$\psi(xy) = t \tag{4}$$

représente une famille au plus dénombrable d'intégrales de l'équation (1), dont chacune est définie dans un intervalle ouvert. Les intégrales de la famille sont juxtaposées, c'est-à-dire les intervalles correspondants sont disjoints.

f) Lorsque t prend successivement toutes les valeurs de l'ensemble T, l'équation (4) fournit toutes les intégrales de l'équation (1), situées dans l'ensemble ω.

Voici l'idée directrice de la démonstration:

Nous enfermons d'abord l'ensemble ω dans une bande limitée par deux droites parallèles à l'axe des y.

Nous remplaçons ensuite le deuxième membre de l'équation (1) par une fonction $F(xy)$, définie dans cette bande et coïncidant dans l'ensemble ω avec la fonction $f(xy)$. Or la construction d'une fonction $F(xy)$ possédant dans la bande des propriétés analogues à celles de la fonction $f(xy)$ dans Ω donne lieu à quelques difficultés. Nous la construirons dans le § 3 de façon, qu'elle remplisse dans la bande les conditions, dans lesquelles s'applique la théorie des équations différentielles généralisées de M. Carathéodory [1]).

§ 2.

Quelques considérations auxiliaires nous seront indispensables dans la suite.

Soient $l, m, L, M, \lambda, \mu,$ six nombres quelconques ($l < m$).

Il existe un polynome unique du troisième degré

$$P(x;\ l, m, L, M, \lambda, \mu) \tag{5}$$

qui prend aux points $l, m,$ respectivement les valeurs $L, M,$ et dont la dérivée (par rapport a x) y prends les valeurs λ et μ.

Voici ce polynome ainsi que sa dérivée:

$$P = L + \lambda(x - l) + (m - l)\left[\alpha\left(\frac{x - l}{m - l}\right)^2 + \beta\left(\frac{x - l}{m - l}\right)^3\right]$$

$$P' = \lambda + 2\alpha\frac{x - l}{m - l} + 3\beta\left(\frac{x - l}{m - l}\right)^2$$

avec $\quad \alpha = 3\dfrac{M - L}{m - l} - 2\lambda - \mu, \quad \beta = \mu + \lambda - 2\dfrac{M - L}{m - l}.$

On vérifie facilement l'inégalité:

$$|P'| \leqslant 8|\lambda| + 5|\mu| + 12\left|\frac{M - L}{m - l}\right|$$

lorsque $l \leqslant x \leqslant m$.

Par conséquent lorsque

$$|P'(l)| \leqslant N, \qquad |P'(m)| \leqslant N$$

$$\left|\frac{P(m) - P(l)}{m - l}\right| \leqslant N, \qquad l \leqslant x \leqslant m$$

on aura

$$|P'(x)| \leqslant 25\,N.$$

Observons encore que l'expression (5) est une fonction continue du point $(x, l, m, L, M, \lambda, \mu)$ lorsqu'on se borne au cas $l \neq m$.

---

[1]) C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen (cité dans la suite V. R. F.) 1-e édition 1918 ou 2-e 1927, p. 665 ss.

§ 3.

Lemme. Nous affirmons que dans l'hypothèse du théorème I il existe deux nombres a et b $(-\infty < a < b < +\infty)$ et une fonction $F(xy)$ jouissant des propriétés suivantes:

I. L'ensemble ω est contenu dans la bande:

$$a < x < b, \quad y \text{ arbitraire}, \quad (\text{bande } B)$$

II. $F(xy) = f(xy)$ dans ω.

III. La dérivée $F'_y(xy)$ existe en tout point de la bande B.

IV. Pour un x constant $(a < x < b)$ les fonctions $F(xy)$ et $F'_y(xy)$ sont continues par rapport à y dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

V. Les fonctions $F(xy)$ et $F'_y(xy)$ sont bornées dans la bande B c.-à-d. on a

$$|F(xy)| \leqslant N \quad |F_y(xy)| \leqslant N$$

N étant une constante finie.

Pour un y fixe $(-\infty < y < +\infty)$ les fonctions F et F'_y sont mesurables par rapport à x dans l'intervalle (a, b) et admettent dans (ab) une majorante sommable (notamment la constante N).

VI. La fonction F satisfait dans B à la condition de Lipschitz avec la constante que nous pouvons supposer être égale à N.

Démonstration. Ajoutons à l'ensemble ω tous ses points d'accumulation. Nous obtenons ainsi un ensemble borné et fermé $\overline{\omega}$, contenu dans l'ensemble ouvert Ω. Il existe un nombre $\delta > 0$, tel que les carrés [1]) empiétant sur $\overline{\omega}$, ayant leurs cotés parallèles aux axes et ne surpassant pas en longueurs le nombre δ, sont entièrement englobés par l'ensemble Ω. Par conséquent il existe un ensemble G, contenu dans Ω, contenant $\overline{\omega}$ et composé d'un nombre fini de carrés de tel genre. Faisons le choix de la bande B de telle façon, qu'elle contienne l'ensemble G. Celui-ci étant contenu aussi dans une bande:

$$x \text{ arbitraire}, \quad c < y < d,$$

désignons par H l'ensemble des points (xy) tels que:

$$a < x < b, \qquad y \leqslant c - 1$$

où

$$a < x < b, \qquad y \geqslant d + 1$$

[1]) Nous entendons toujours par carré son intérieur avec sa frontière.

et posons:

$$F(xy) = 0 \qquad \text{dans } H$$
$$F(xy) = f(xy) \text{ dans } G.$$

La condition II du notre lemme se trouve ainsi satisfaite.

Les fonctions $F(xy)$ et $F'_y(xy)$ sont évidemment continues et bornées dans l'ensemble $G + H$.

Nous affirmons que $F(xy)$ satisfait aussi à la condition de Lipschitz c.-à-d.

$$|F(xy_2) - F(xy_1)| \leqslant N\,|y_2 - y_1|$$

avec un nombre N fini lorsque (xy_1) et (xy_2) appartiennent à l'ensemble $G + H$. Pour la démonstration supposons le contraire. On pourrait dans ce cas construire deux suites:

$$(x_1 y_1)\ (x_2 y_2)\ldots$$
$$(x_1 z_1)\ (x_2 z_2)\ldots$$

telles que

$$\lim x_n = x_0, \qquad \lim y_n = \lim z_n = y_0$$
$$\lim \left| \frac{f(x_n z_n) - f(x_n y_n)}{z_n - y_n} \right| = +\infty.$$

Le point $(x_0 y_0)$ serait évidemment situé dans l'ensemble fermé G, donc il serait un point intérieur de l'ensemble Ω.

Pour les indices n assez grands le segment joignant le point $(x_n y_n)$ avec $(x_n z_n)$, serait entièrement contenu dans Ω et on pourrait appliquer le théorème de la moyenne. Il nous serait donc possible de poser: $\dfrac{f(x_n z_n) - f(x_n y_n)}{z_n - y_n} = f'_y(x_n \xi_n)$ ce qui nous donnerait d'autre part

$$\lim |f'_y(x_n \xi_n)| = +\infty,$$

relation incompatible avec l'existence et la continuité de la derivée $f'_y(xy)$ au point $(x_0 y_0)$.

Nous allons définir F pour les points de l'ensemble $B - G - H$. Remarquons pour ce but, que la droite: $x = x_0$ découpe sur $B - G - H$ un nombre fini d'intervalles:

$$(l_1, m_1),\ (l_2, m_2)\ldots(l_n, m_n) \qquad (x = x_0)$$

où:

$$l_1 < m_1 < l_2 < m_2 < \ldots < l_n < m_n.$$

Considérons un de ces intervalles: (l, m) $(x = x_0)$.

Posons:

$$L = F(x_0 l), \qquad M = F(x_0 m)$$
$$\lambda = F'_y(x_0 l), \qquad \mu = F'_y(x_0 m).$$

Nous définissons $F(x_0 y)$ pour $l < y < m$ en posant:

$$F(x_0 y) = P(y; l, m, L, M, \lambda, \mu),$$

P étant l'expression considérée dans le § 2.

Il en résulte facilement (voir les considérations du § 2) que la fonction $F(xy)$, définie maintenant dans toute la bande B, y jouit des propriétés, I, II, III, IV ainsi que de la première partie de la propriété V. Il nous reste seulement à démontrer la mesurabilité des fonctions $F(xy)$ et $F'_y(xy)$ par rapport à x dans l'intervalle (ab) pour un y fixe mais d'ailleurs arbitraire.

Considérons la fonction

$$F(x, y_0).$$

Désignons par X la classe des x tels, que (xy_0) appartient à l'ensemble $G + H$. Les fonctions F et F'_y y étant continues et par consequent mesurables par rapport à x dans l'ensemble X, il nous reste à prouver leurs mesurabilité par rapport à cette variable dans l'ensemble $(ab) - X$.

Soit ξ un point de cet ensemble.

Sur la droite $x = \xi$, il existe un segment contenu dans $B - G - H$, qui renferme le point (ξ, y_0) et dont les extrémités appartiennent à $G + H$. Désignons par $l(\xi)$ et $m(\xi)$ les extremités d'un tel intervalle $\{l(\xi) < m(\xi)\}$.

Nous observons d'abord, que $l(\xi)$ et $m(\xi)$ sont sémicontinues supérieurement resp. inférieurement par rapport à x dans $(ab) - X$. Ceci résulte immédiatement du fait, que la partie commune de l'ensemble $G + H$ avec la bande

$$a + \varepsilon \leqslant x \leqslant b - \varepsilon \qquad (y \text{ arbitraire})$$

est f e r m é e pour les ε positifs et suffisamment petits.

Les fonctions $l(\xi)$ et $m(\xi)$ sont par conséquent mesurables.

D'autre part, les fonctions F et F'_y étant continues dans $G + H$ les fonctions:

$$L(\xi) = F[\xi, \ l(\xi)],$$
$$M(\xi) = F[\xi, m(\xi)],$$

$$\lambda(\xi) = F[\xi,\ l(\xi)],$$
$$\mu(\xi) = F[\xi, m(\xi)]$$

sont mesurables dans $(ab) - X$ [1]), donc enfin la fonction

$$F(\xi, y_0) = P[y_0;\ l(\xi),\quad m(\xi),\quad L(\xi),\quad M(\xi),\quad \lambda(\xi),\quad \mu(\xi)]$$

est aussi mesurable dans cet ensemble (v. la remarque finale du § 2).

La mesurabilité par rapport à x de la fonction $F(xy)$ étant ainsi établie, celle de la dérivée $F'_y(xy)$ en résulte du fait, que cette dérivée est la limite de la fonction mesurable

$$\frac{F(x, y_0 + \lambda) - F(x y_0)}{\lambda}.$$

La démonstration de notre lemme est ainsi terminée.

§ 4.

Rappelons quelques points de la théorie des équations différentielles généralisées de M. Carathéodory et en particulier les rapports de cette théorie avec la théorie classique.

α) On dit, qu'une fonction $y(x)$ représente dans l'intervalle I une intégrale de l'équation

$$\text{(6)} \qquad \frac{dy}{dx} = \lambda(xy)$$

lorsque $y(x)$ satisfait à cette équation en chaque point de l'intervalle I. On dit, qu'une fonction $y(x)$ est dans l'intervalle I intégrale de l'équation généralisée

$$\text{(7)} \qquad \frac{dy}{dx} \sim \lambda(xy)$$

lorsque

1° elle est absolument continue dans I,

2° elle remplit la relation

$$\frac{dy}{dx} = \lambda(xy)$$

presque partout dans I.

---

[1]) on le voit facilement par le raisonement de V. R. F., § 576, p. 665.

β) Si l'on se borne à un ensemble ouvert dans lequel $\lambda(xy)$ est continue, les équations (6) et (7) sont équivalentes [1]).

γ) Supposons la fonction $k(x)$ sommable dans l'intervalle (ab) et envisageons l'équation linéaire

$$\frac{du}{dx} \sim k(x)u. \tag{8}$$

D'après la théorie de M. Carathéodory il passe par tout point de la bande $B\ \{a < x < b,\ y$ arbitraire$\}$ une seule intégrale de l'équation (8) et cette intégrale est définie dans l'intervalle (ab) [2]).

Or $u = 0$ étant une intégrale particulière de l'équation (8), il en résulte, que toute intégrale de (8), positive en un point de l'intervalle (ab) reste supérieure à zéro en tout point de l'intervalle considéré.

δ) Envisageons maintenant l'équation

$$\frac{dy}{dx} \sim F(xy) \tag{9}$$

dans la bande B où $F(xy)$ désigne la fonction définie dans le § 3. Choisissons un nombre fixe c de façon que l'on ait:

$$a < c < b.$$

Afin de nous rapprocher des considérations de M. Carathéodory qui vont nous servir dans la suite, rappelons que la recherche des intégrales de l'équation (9), passant par le point:

$$(c, t), \quad (t \text{ arbitraire}) \tag{10}$$

est équivalente à la recherche des solutions de l'équation intégrale

$$y = t + \int_c^x F(xy)\, dx. \tag{11}$$

ε) Nous affirmons, que:

P_1) Par tout point (10) il passe une intégrale unique

$$y(x, t)$$

de l'équation (9) et cette intégrale est définie dans l'intervalle (ab);

P_2) La fonction $y(x, t)$ est une fonction continue du point (x, t) dans toute la bande B;

---

[1]) V. R. F. la fin du § 578, p. 667.

[2]) V. R. F. Satz 2, p. 672 et Satz 4, p. 675.

P_3) La dérivée $\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ existe en tout point de la bande et y remplit l'équation suivante:

$$u = 1 + \int_c^x F'_y\{x, y(x,t)\}\, u\, dx, \tag{12}$$

donc $u = y'_t(x,t)$ passe par le point (x,t) et peut être considérée comme l'intégrale de l'équation linéaire généralisée:

$$\frac{du}{dx} \sim F'_y\{x, y(x,t)\}\, u; \tag{13}$$

P_4) On a $\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} > 0$ dans la bande B;

P_5) La dérivée $\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ est continue par rapport à (x,t) en tout point de la bande B;

P_6) Lorsque le point (x_0, y_0) avec

$$y_0 = y(x_0\, t_0) \tag{14}$$

appartient à l'ensemble ouvert ω {§ 1 et § 3} la fonction

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

est continue par rapport à (x,t) dans le voisinage du point $(x_0\, t_0)$.

Les propriétés P_1, P_2, P_3 résultent immédiatement de la théorie de M. Carathéodory [1]) lorsqu'on tient compte des propositions IV, V, VI du lemme précédent (§ 3). Passons à la démonstration des propriétés P_4 et P_5.

Soit

$$\sigma(x,t) = F'_y[x, y(x,t)].$$

La fonction $F'_y(x,y)$ est bornée dans la bande B, elle y est continue par rapport à y pour x fixe dans (ab), et mesurable par rapport à x avec y fixe d'ailleurs arbitraire. D'autre part la fonction $y(x,t)$ est continue par rapport à (x,t) dans la bande B (P_2). Il en résulte que la fonction $\sigma(x,t)$ est bornée dans B et mesurable [2]) par rapport à x dans l'intervalle (ab).

---

[1]) En particulier: pour P_1 cf. V. R. F. Satz 2, p. 672 et Satz 4, p. 675; pour P_2 Satz 5, p. 678; pour P_3 Satz 7, p. 682 et 683 ss.

[2]) V. R. F. Satz 1, p. 665.

L'équation (13) et en même temps l'équation (12) possède en vertu de (γ) (v. plus haut) une solution u n i q u e passant par le point (c, t) et ceci quelque soit t.

D'autre part $\dfrac{\partial y(x\,t)}{\partial t}$ représente déjà une telle solution se réduisant à l'unité pour $x = c$. En vertu de, γ) on a donc $\dfrac{\partial y}{\partial t} > 0$ pour $a < x < b$ et t arbitraire.

En s'appuyant sur la propriété de la fonction $\sigma(x, t)$ démontrée tout-à-l'heure et sur l'unicité des solutions de l'équation (12) on démontre immédiatement la propriété P_5 [1]).

Il reste à prouver la propriété P_6.

Supposons, que le point (14) appartient à l'ensemble ouvert ω. En vertu de la continuité de la fonction $y(x, t)$ (v. P_2) le point

$$x, y(x, t)$$

se trouve dans ω, lorsque x et t appartiennent à un voisinage convenablement petit du point ($x_0\, t_0$).

La fonction F étant continue dans ω et $\dfrac{\partial y}{\partial t}$ satisfaisant à l'équation (13) nous obtenons (v. β) l'identité

$$\frac{\partial y(x\,t)}{\partial x} = F(x, y(x\,t)) = f(x, y(x\,t)) \tag{15}$$

valable dans le voisinage du point ($x\,t$).

Le second membre de cette identité étant continu, la propriété P_6 se trouve démontrée.

§ 5.

Passons enfin à la démonstration du théorème I (§ 1). Nous prouverons d'abord l'existence d'une fonction $\psi(xy)$ définie dans toute la bande B et telle que les équations

$$y = y(x, t) \tag{16}$$

et

$$t = \psi(xy) \tag{17}$$

soient équivalentes dans l'ensemble des points (x, y, t):

$$a < x < b; \quad y, t \quad \text{arbitraires.}$$

---

[1]) V. R. F. Satz 5, p. 678.

En effet, soit $(x_0 y_0)$ un point quelconque de la bande B; par ce point il passe une seule intégrale de l'équation (9).

Cette intégrale, définie dans l'intervalle (ab), prend pour $x = c$ une valeur déterminée, soit t_0.

On a

$$y_0 = y(x_0 t_0)$$

et cette valeur t_0 de t nous donne la solution unique en t de l'équation

$$y_0 = y(x_0 t).$$

Posons par définition

$$\psi(x_0 y_0) = t_0.$$

Il est clair, que la fonction $\psi(xy)$ ainsi définie dans la bande B, rend les équations (16) et (17) équivalentes.

Nous affirmons, que la fonction $\psi(xy)$ envisagée seulement pour les points de l'ensemble ouvert ω possède les propriétés a, b, c, d, e, f considérées dans l'énoncé du théorème I.

a) La propriété a est évidente parce que ω est contenu dans la bande B.

b) La fonction ψ est par définition constante, le long de toute intégrale de l'équation (9) et cette équation est équivalente (cf. § 4 β et § 3 II) dans ω à l'équation (1) de la page 95.

c) Soit $(x_0 y_0)$ un point de l'ensemble ouvert ω et soit $t_0 = \psi(x_0 y_0)$.

On aura

$$y_0 = y(x_0 t_0).$$

Or {cf. § 4, P_4 P_5 P_6} la fonction $y(xt)$ possède dans le voisinage de $(x_0 t_0)$ des dérivées partielles continues du premier ordre et en outre $\frac{\partial y}{\partial t} > 0$ au point consideré. Nous pouvons donc obtenir la fonction $\psi(xy)$ dans le voisinage du point $(x_0 y_0)$ par les procédés de la théorie classique des fonctions implicites, ce qui nous assure la continuité des dérivées partielles du premier ordre de cette fonction. Nous aurons aussi l'identité

$$y[x, \psi(x, y)] = y \tag{18}$$

valable dans le voisinage du point $(x_0 y_0)$.

En différentiant cette indentité nous obtenons:

$$\frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 1 \tag{19}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \qquad t = \psi(xy)$$

d'où, en vertu des relations (15) et (18),

$$f(xy)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x}=0.$$

La relation (19) nous donne (cf. § 4, P_4)

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}>0.$$

d) La propriété d résulte immédiatement de l'inégalité précédente lorsqu'on se rend compte du fait, que ω est un ensemble ouvert.

e) Pour démontrer la propriéte e, supposons que t appartient à l'ensemble T. En vertu de l'équivalence des équations (16) et (17) la courbe (4) découpe de l'ensemble ouvert ω une famille au plus dénombrable d'arcs juxtaposés, dont chacun représente une intégrale de l'équation (1) {cf. § 4 α et P_1 et § 3 II}.

f) Il reste à prouver seulement la dernière propriété.

Soit I une intégrale de l'équation (1) contenue dans ω. Soit $(x_0\, y_0)$ un point de cette intégrale et désignons par y l'intégrale de l'équation (9) passant par $(x_0\, y_0)$. Cette intégrale contient évidemment l'intégrale I (§ 4 β et P_1, § 3 II). Elle coupe la droite $x=c$ en (c, t_0). L'intégrale y étant identique à l'intégrale:

$$y=y(x,t_0);$$

les points de cette intégrale et à fortiori ceux de l'intégrale I satisfont donc à l'équation

$$t_0=\psi(x,y).$$

Le nombre t_0 étant un élément de l'ensemble T, la propriété f se trouve démontrée.

§ 6.

Voici deux conséquences immédiates du théorème I.

Théorème II. Dans les hypothèses du théorème I, l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x}+f(xy)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

possède dans ω une intégrale fondamentale [1]) $\psi(xy)$ pour laquelle on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}>0\quad\text{dans }\omega.$$

---

[1]) Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930, p. 312 pour la définition du „Hauptintegral".

Théorème III. Dans les mêmes hypothèses l'équation

$$f(xy)\,dx - dy = 0,$$

admet dans l'ensemble ω un facteur intégrant continu et non nul dans ω.

En effet, grâce au théorème I (v. (2) et (3)) l'équation précédente étant équivalente dans ω à l'équation:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy = 0,$$

la fonction

$$u(xy) = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

représente dans l'ensemble ω le facteur intégrant démandé.

En retournant à la fonction $y = y(x, t)$ considérée au § 4 ε on voit qu'elle représente ce que nous pouvons appeler l'intégrale générale à un paramètre de l'équation (1) dans l'ensemble ω, dans un sens, il est vrai, un peu généralisé. Elle fournit notamment pour un t donné non nécessairement une intégrale de l'équation (1) mais parfois une famille (au plus dénombrable) d'intégrales juxtaposées c.-à-d. appartenant à des intervalles disjoints de la variable x. D'autre part elle nous fournit toutes les intégrales de la dite équation qui passent par ω.

La deuxième partie (déjà rédigée) de la présente note contiendra des considérations relatives à l'existence de l'intégrale fondamentale dans toute l'étendue de l'ensemble Ω (v. § 1) et cela sous certaines conditions nécessairement restrictives.

J'adresse mes vifs remerciments à M. T. Ważewski auquel je dois plusieurs remarques importantes au cours du présent travail.

Cracovie, mai 1931.

Comptes-rendus et analyses.

Nouveaux fascicules du **»Mémorial des Sciences mathématiques«**. (Chez Gauthier-Villars & C^{ie}, Paris, Quai des Grands Augustins, 55).

Fascicule XLIX. *Les méthodes de solution approchée des problèmes de la Physique mathématique.* Par M. Nicolas Kryloff, ingénieur des Mines, Membre des Académies des Sciences de l'Ucraine et de l'U. R. S. S.

Le savant auteur s'est borné à étudier, dans cet ouvrage, les „problèmes aux limites" les plus simples, relatifs aux équations différentielles ordinaires du second ordre; il n'a donc traité qu'une petite partie du sujet indiqué dans le titre mais, étant donné le peu de place dont il disposait, il a certainement eu raison de se restreindre comme il l'a fait. L'auteur expose brièvement les diverses méthodes, en commençant par celle de W. Ritz, qui permettent d'obtenir la solution approchée du problème considéré sous forme d'une combinaison linéaire à coefficients constants de fonctions empruntées à une suite infinie opportunément formée. M. Kryloff s'occupe, en outre du calcul des valeurs du paramètre λ, dans les équations différentielles de la forme

$$\frac{d\left(p\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}+\lambda qy+ry=0,$$

pour lesquelles une telle équation admet, dans l'intervalle (0, 1), une intégrale vérifiant les conditions

$$y(0)=y(1)=0.$$

L'intérêt principal du présent fascicule, écrit avec autant de compétence que de rigueur, consiste en ce que l'auteur expose des méthodes propres à calculer une limite supérieure de l'erreur commise en substituant à la solution exacte du problème considéré une solution approchée, obtenue par l'un des procédés exposés dans l'ouvrage.

Fascicule L. *Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Par M. N. Saltykow, Professeur à l'Université de Belgrade.

Le titre de l'ouvrage indique suffisamment la nature du sujet traité. Nous nous bornerons donc à faire remarquer que l'auteur qui a apporté lui-même de nombreuses et importantes contributions aux théories qu'il expose, a tracé un tableau très complet de l'état actuel de ces théories et qu'il a donné, ce qui rehausse considérablement l'intérêt de l'ouvrage, de nombreuses et importantes indications historiques.

Fascicule LI. *Sommation des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques.* Par M. Ervand Kogbetliantz, Docteur-ès-Sciences (Paris).

Lorsque, au début du 19-ème siècle, la notion de convergence d'une série s'est nettement dégagée, l'emploi des séries divergentes a été considéré comme illicite.

Toutefois, comme certains résultats obtenus au moyen de séries divergentes en opérant avec celles-ci comme si elles étaient convergentes ont été confirmés par des procédés rigoureux, il s'est posé la question de savoir s'il ne serait pas possible de faire correspondre sous le nom de „somme", au moins à certaines séries divergentes, des nombres déterminés de façon à pouvoir étendre aux sommes de ces séries divergentes, certains des théorèmes établis pour les sommes des séries convergentes.

Ce n'est qu'à la fin du 19-ème siècle qu'il a été reconnu que la question comportait une réponse affirmative et divers procédés de sommation des séries divergentes et d'attribution de valeurs à des intégrales divergentes ont été proposés,

Après avoir étudié la question de savoir quelles sont les conditions auxquelles il covient de se conformer en définissant le nombre que l'on considèrera comme la somme d'une série divergente ou comme la valeur d'une intégrale divergente, l'auteur étudie les diverses définitions des éléments susdits, proposées jusqu'à présent, et termine son ouvrage par quelques applications des théories considérées précédemment. L'ouvrage de M. Kogbetliantz rendra certainement de grands services aux mathématiciens.

Fascicule LII. *Méthodes générales du Calcul des Probabilités.* Par M. B. Hostinský, Professeur à la Faculté des Sciences de Brno.

La notion de probabilité est. dans bien des cas, extrêmement difficile à établir et, pour y arriver, on est toujours obligé d'adopter quelques postulats sans démonstration. Le but propre de l'ouvrage de M. Hostinský est de metre en évidence les principes généraux qu'il semble raisonnable d'adopter pour formuler, dans les différents cas, les postulats susdits. L'auteur, auquel la théorie des probabilités doit d'importantes contributions, élucide ces principes au moyen de nombreux et intéressants exemples et, grâce aux indications bibibliographiques qu'il donne il a facilité grandement au lecteur l'acquisition d'une connaissance approfondie de la théorie des probabilités.

Fascicule LIII. *Le problème de Monge.* Par M. Panajiotis Zervos, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université l'Athènes.

Voici en quels termes l'auteur formule le problème qui constitue le sujet du présent fascicule:

„Le problème de Monge à une variable indépendante dans le sens le plus large, consiste à intégrer explicitement un système de k $(k \leq n-1)$ équations de Monge

$$(\alpha) \qquad F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

les F étant des fonctions homogènes par rapport à $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$.

Par intégration explicite nous entendons celle où l'on exprime les variables x par des fonctions déterminées d'un paramètre, de $n-k$ fonctions arbitraires de ce paramètre et de leurs dérivées jusqu'à celles d'un certain ordre, pouvant contenir aussi un nombre fini de constantes arbitraires.

L'auteur qui a apporté lui-même de nombreuses contributions au problème susdit, donne un aperçu très complet sur l'ensemble des travaux consacrés au problème de Monge et rend par celamême un service précieux aux personnes désireuses d'approfondir cette question.

Paul Montel, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, *Leçons sur les fonctions entières*, recueillies et rédigées par M. Sergesco, Prof. à l'Université de Cluj. (Un volume in 8^0 raisin (25×16) de VIV $+$ 116 pages, chez Gauthier-Villars & Cie, Paris).

L'extrait suivant de la préface donnera une idée claire de la nature de l'ouvrage.

„M. P. Sergesco, à qui l'activité mathématique de la Roumanie doit tant d'initiatives heureuses, a jugé utile de publier une série d'Ouvrages destinés à servir de guides au public mathématique; placés entre les traités classiques et les mémoires originaux: ils conduiront ainsi les travailleurs au seuil même des régions où s'élabore la recherche mathématique. Ces Ouvrages seront édités par les soins de l'Université de Cluj.

Ce petit Livre traite de la théorie moderne des fonctions entières ou méromorphes. Cette théorie, depuis la découverte due à M. Picard, a pour but l'examen de la répartition, autour du point singulier, des points où la fonction prend une même valeur. L'étude de la distribution des modules de ces points est très avancée et les résultats paraissent avoir pris une forme définitive avec les travaux de M. R. Nevanlinna: ils sont exposés dans les quatre premiers Chapitres. Les deux derniers sont consacrés à l'étude de la distribution des arguments des mêmes points, étude beaucoup plus récente et dont les progrès semblent liés à ceux de la théorie des familles normales dans laquelle elle a trouvé son point de départ et ses premiers progrès".

Nous devons faire remarquer de notre part que, malgré la richesse des matières étudiées dans ce petit volume, l'auteur a réussi à en rendre la lecture aussi facile qu'attrayante. *S. Z.*

Y. Rocard. Ancien élève de l'École normale supérieure, Docteur ès Sciences. *L'hydrodynamique et la théorie cinétique des gaz*, avec une préface de M. Henri Villat, Correspondant de l'Académie des Sciences, Professeur à la Sorbonne. (Un volume in. 8^0 (25×15) de 160 pages, chez Gauthier-Villars & Cie, Paris).

L'avertissement de l'auteur que nous reproduisons ci-dessous donnera le mieux une idée de la nature et du but de cet intéressant ouvrage.

„Les chapitres de ce volume ont formé la matière de dix conférences faites en 1929 à l'Institut de Mécanique des fluides à la Sorbonne. C'est grâce à l'insistance de M. H. Villat qu'elles se trouvent aujourd'hui réunies. Nous espérons que ce travail attirera l'attention des hydrodynamiciens, en dehors des quelques conclusions auxquelles nous sommes parvenus, sur ce fait qu'il est possible — et désirable de *compléter* grâce à l'introduction d'un modèle moléculaire dans le fluide, le cadre un peu sommaire, parce que trop général, de l'hydrodynamique classique: introduisant des hypothèses plus précises, nous avons plus de renseignements, cela n'a rien de mystérieux. Mais une grave difficulté se révèle: près d'une paroi, un ensemble de molécules ne satisfait plus à la définition du fluide. Il faudra sans doute supposer au fluide des propriétés anisotropes au voisinage d'une telle paroi.

La théorie cinétique pouvant ne pas paraître classique aux yeux des personnes s'occupant d'hydrodynamique, nous avons cru devoir, dans les cinq premiers chapitres, fournir un exposé un peu rapide mais se suffisant à lui-même des notions et des résultats indispensables, tout en nous efforçant de rendre l'exposé plus simple et plus naturel en introduisant dès le Chapitre III le point de vue hydrodynamique. Dans ces questions classiques, nous avons fait naturellement les plus larges emprunts aux Ouvrages déjà existants, et principalement au traité de Jeans sur la théorie dynamique des gaz, ainsi qu'au mémoire de S. Chapman de 1917, cité dans le cours du volume. Pour nous servir de guide et de modèle, nous avions en outre constamment présent à l'esprit le beau mémoire de M. M. Brillouin des *Annales de Physique* de 1900, qui contenait déjà en puissance tous les résultats lentement acquis par la suite".

Nous croyons devoir faire remarquer de notre part que par les qualités de précissions, de rigueur et de clarté de l'exposition l'ouvrage de M. Rocard est certainement appelé à rendre de précieux services aux personnes désireuses de se renseigner sur les sujets auxquels il est consacré.

Spisy Bernarda Bolzana. Vydává Kralovska Česka Společnost Nauk v Pradze. Svazek 2. *Číselná Teorie.* Bernard Bolzan *Zahlentheorie*, herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von Dr. Karel Rychlík, Professor an der čechischen technischen Hochschule in Prag (57 + 7).

Le présent volume des oeuvres de Bolzano, si intéressantes pour l'histoire des sciences mathématiques, est consacré à la théorie de la divisibilité des nombres entiers.

Les savantes notes de M. Rychlík qui a publie cet ouvrage en rehaussent considérablement l'intérêt.

Leon Lichtenstein, o. Ö. Professor der Mathematik an der Universität Leipzig. *Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen.* Berlin, Verlag von Julius Springer, 1931, VII + 162.

La traduction suivante d'un passage de la préface donnera une idée génerale de l'ouvrage du savant auteur:

„Dans une série de travaux, parus pendant les dernières douze années et consacrés à des problèmes du calcul des variations, de l'hydrodynamique, de la figure des astres et d'autres questions similaires, j'ai étudié certaines classes d'équations intégrales non linéaires et d'équations intégro-différentielles. A l'occasion des conférences que j'ai faites en février et mars de l'année diernière à l'Université de Lwów, j'ai été amené à refondre les théories mathématiques étudiées dans les travaux susdits en unifiant le mode d'exposition.

La petite monographie actuelle reproduit, en les complétant, les conférences susdites; elle contient à côté de choses connues des choses nouvelles. Je me suis efforcé, en traitant de choses connues, de les présenter sous une forme nouvelle et, je l'espère, plus simple".

De notre côté nous ne pouvons que recommander chaudement l'étude de l'ouvrage de M. Lichtenstein lequel est d'autant plus instructif que, grâce aux nombreuses citations il permettra au lecteur de dépasser aisément le cadre de cet ouvrage lui-même.

S. Z.

E. Cartan, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. *Leçons sur la Géométrie projective complexe.* VII + 325. Paris, 1931, chez Gauthier-Villars et Cie.

Ainsi que le fait observer l'éminent auteur, certains faits, assurément très intéressants, ont été regardés jusqu'à présent comme des faits isolés dans l'ensemble de la Géométrie.

Grâce à l'étude faite par M. Cartan de certains espaces riemaniens qu'il appelle *symétriques*, les faits susdits ont pu être coordonnés en les faisant rentrer dans une théorie générale qui fait l'objet du présent ouvrage lequel, par conséquent, tout en étant consacré à une théorie purement mathématique, présente un intérêt considérable, même au point de vue philosophique. Voici comment l'auteur lui-même caractérise son ouvrage dans l'introduction: „cet ouvrage est divisé en deux parties. La première est consacrée à la géométrie projective de la droite complexe et à ses relations avec la géométrie de Lobatchewsky. La seconde est consacrée à la géométrie complexe à trois dimensions. Le dernier Chapitre traite des *polynomes* harmoniques de l'espace projectif complexe et de leurs applications à la représentation de cet espace, ou plutôt de l'espace hermitien elliptique, par des variétés algébriques réelles sans singularité plongées dans un espace euclidien à un nombre convenable de dimensions. Cette question se rattache, du reste, à une théorie beaucoup plus étendue que je n'ai pas abordée.

Quant au problème général des représentations réelles des êtres imaginaires, je ne l'ai pas traité directement; mais la nature même des choses fournit automatiquement quelques-unes de ces représentations, dont la plupart, si non toutes, ont déjà été signalées, surtout par F. Klein et E. Study".

Ajoutons que l'ouvrage considéré, écrit avec la maîtrise qui caractérise les travaux du célèbre auteur, ne suppose chez le lecteur que des connaissances modestes et est par conséquent accessible à un grand nombre de personnes qui se consacrent aux sciences mathématiques. *S. Z.*

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique, Section de Varsovie, année 1931.

[**Abréviations**: **C. R.** = Comptes Rendus des séances de l'Académie de Sciences de Paris; **C. R. de Varsovie** = Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie; **Fund. Math.** = Fundamenta Mathematicae].

16. I. W. Sierpiński: „Sur certaines opérations sur les ensembles fermés" [C. R. de Varsovie 24 (1931), p. 57].

A. Lindenbaum: „Sur un ensemble linéaire extrêmement non homogène par rapport aux transformations continues et sur le nombre des invariants de ces transformations".

M. Kuratowski (Fund. Math. 8, 1926) a construit (à l'aide du théorème que le continu peut être bien ordonné) un ensemble linéaire infini qui n'est homéomorphe à aucun son vrai sous-ensemble; M. K. a d'ailleurs remarqué qu'un tel ensemble doit nécessairement être totalement imparfait. De plus, l'ensemble construit par M. K. n'admet aucune transformation bicontinue en soi-même, sauf la transformation par identité: $f(x) = x$. M. L. établit l'existence d'un ensemble linéaire P, de puissance du continu ($c = 2^{\aleph_0}$), et qui présente une non-homogénéité encore plus prononcée (construction à l'aide du théorème sur le bon ordre du continu, mais toujours sans faire appel à „l'hypothèse du continu"). — Donc p. ex.:

1) Il n'existe aucune transformation continue de l'ensemble P en soi-même, sauf la transformation par identité. 2) Aucun ensemble linéaire dont P est un vrai sous-ensemble ne peut être transformé en P d'une façon continue. 3) Si un vrai sous-ensemble de P est image continue de P, P n'est pas image continue de ce sous-ensemble. 4) Si une transformation biunivoque et continue (la bicontinuité n'est pas explicitement exigée) transforme P en un sous-ensemble de P, elle est nécessairement la transformation par identité.

En appelant un ensemble *presque-fermé dans Z*, s'il est somme d'un ensemble fermé dans Z et d'un ensemble au plus dénombrable, on peut démontrer que toute partie non vide et relativement presque-fermée d'un ensemble linéaire punctiforme et non fermé — est son image continue. Or: 5) Ce ne sont que des sous-ensembles presque-fermés dans P qui en sont des images continues. 6) Si une fonction continue transforme P en un sous-ensemble non dénombrable, il existe un point x_0 de P tel que $f(x_0) = x_0$ (*point invariant*). Par contre, si Z est un ensemble linéaire punctiforme et non fermé, U — un ensemble au plus dénombrable ne se réduisant pas à un seul point de Z, alors Z peut être transformé en U d'une façon continue et sans „points invariants".

L'ensemble P peut être appliqué aux problèmes concernant les types cX de M. Sierpiński (Fund. Math. 14, 1929) et les invariants des transformations continues. On peut trouver dans le domaine des ensembles linéaires (et sans faire appel à l'hypothèse du continu): a) une suite du type α, α étant un nombre ordinal quelconque $< \Omega$, d'ensembles décroissants $\{E_\xi\}$, telle que, lorsque $\xi < \eta < \alpha$: E_η est une image continue de E_ξ, tandis que E_ξ n'est pas une telle image de E_η; b) une classe K de puissance 2^c d'ensembles (de puissance c) tels qu'aucun d'eux n'est l'image continue d'un autre ensemble de K; d'où l'on conclut que le nombre des invariants des transformations continues (classes d'ensembles closes relativement à ces transformations — v. W. Sierpiński, C. R. du I Congrès des Math. des Pays Slaves, 1929, p. 52) est égal à 2^{2^c}.

6. II. S. Mazurkiewicz: „Sur une classe de dendrites" [Fund. Math. 18 (1932), p. 88].

S. Mazurkiewicz: „Sur les fonctions non dérivables" [Studia Mathematica 3 (1932), p. 92].

13. II. K. Zarankiewicz: „Sur les continus péaniens".

M. Z. donne une démonstration nouvelle (et qui semble plus simple que les démonstrations connues), du théorème d'après lequel tout continu péanien est *arcwise connected*.

13. III. S. Mazurkiewicz: „Sur l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\,dt\text{“}$$

[Studia Mathematica 3 (1932), p. 114].

E. Szpilrajn: „Sur un ensemble analytique non borelien dans l'espace des ensembles fermés".

Soit I l'intervalle fermé $[0, 1]$ et 2^I l'espace des sous-ensembles fermés non vides de I, métrisé d'après M. Hausdorff. Désignons par $\mathbf{M}$ la classe de tous les sous-ensembles fermés indénombrables de I et par $\mathbf{N}$ la classe de tous les sous-ensembles fermés de I, dans lesquels la relation $<$ n'établit pas un bon ordre.

M. Hurewicz[1]) a démontré que $\mathbf{M}$ est un ensemble analytique non borelien dans 2^I. M. S. démontre dans le même ordre d'idées que $\mathbf{N}$ *est* aussi *un ensemble analytique non borelien*. Voici la marche de la démonstration:

Soit $r_1, r_2, r_3 \ldots$ la suite des nombres rationnels, contenus dans l'intérieur de I. Les nombres $r_{n_1 n_2, \ldots n_{k-1}}$ supposés définis, nous désignerons par $r_{n_1, n_2, \ldots n_{k-1}, 1}$, $r_{n_1, n_2, \ldots n_{k-1}, 2}$, $r_{n_1, n_2, \ldots n_{k-1}, 3}, \ldots$ la suite des nombres rationnels contenus dans l'intervalle $[0, r_{n_1, n_2, \ldots n_{k-1}}]$[2]).

Désignons ensuite par I_n l'intervalle fermé $[r_n, 1]$ et par $I_{n_1 n_2, \ldots n_k}$ (où $k \geqslant 2$) l'intervalle fermé $[r_{n_1 n_2, \ldots n_{k-1}}, r_{n_1 n_2, \ldots n_k}]$. Soit enfin $\mathbf{F}_{n_1 n_2, \ldots n_k}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles fermés de I ayant des points communs avec chacun des intervalles: I_{n_1}, $I_{n_1, n_2}, \ldots I_{n_1, n_2, \ldots n_k}$.

On voit aisément que les ensembles $\mathbf{F}_{n_1 n_2, \ldots n_k}$ sont fermés (dans 2^I) et que

$$\mathbf{N} = \Sigma \prod_{k=1}^{\infty} \mathbf{F}_{n_1, n_2, \ldots n_k},$$

la sommation s'étendant sur toutes les suites $n_1, n_2, \ldots$ des nombres naturels. $\mathbf{N}$ est donc, en effet, un ensemble analytique.

$\overline{F}$ désignant le type ordinal de l'ensemble F ordonné par la relation $<$, on prouve ensuite que les relations: $F \epsilon 2^I - \mathbf{N}$ et $\overline{F} = \alpha$ (α est donc un nombre ordinal dénombrable) entraînent: $\text{Ind}\, F \geqslant \alpha - 1$ (où Ind F désigne l'„indice"[3]) de F par rapport au „système déterminant" $\{\mathbf{F}_{n_1 n_2, \ldots n_k}\}$).

Il en résulte immédiatement que $\mathbf{N}$ n'est pas un ensemble borelien.

[Une autre démonstration du même théorème se trouve dans la note de MM. Kuratowski et Szpilrajn, Fund. Math. 18 (1932), p. 160].

10. IV. C. Kuratowski: „Les fonctions semicontinues dans l'espace des ensembles fermés" [Fund. Math. 18 (1932), p. 148].

E. Szpilrajn: „Sur les cribles fermés et leurs applications" [Cf. C. Kuratowski et E. Szpilrajn, Fund. Math. 18 (1932), p. 160].

24. IV. S. Mazurkiewicz: „Sur les hyperespaces" [Cf. K. Borsuk et S. Mazurkiewicz, C. R. de Varsovie 24 (1931), p. 149 et S. Mazurkiewicz, Fund. Math. 18 (1931), p. 171].

---

[1]) Fund. Math. 15 (1930), p. 4.

[2]) Ce mode de numéroter les nombres rationnels a été déjà utilisé par M. Sierpiński, Fund. Math. 11 (1928), p. 17.

[3]) Cf. p. ex. Hurewicz, l. c.

E. Szpilrajn: „Sur les hyperespaces“.

1. V. W. Sierpiński: „Sur les deux définitions des ensembles fermés“ [C. R. de Varsovie 24 (1931), p. 184].

W. Sierpiński: „Sur deux complémentaires analytiques non séparables B“]Fund. Math. 17 (1931), p. 296].

E. Szpilrajn: „Sur le crible fonctionnel“.

Soit $\mathbf{N}$ la classe de tous les ensembles situés dans l'intervalle fermés [0, 1] et dans lesquels la relation $<$ n'établit pas un bon ordre.

M. S. démontre le théorème suivant qui résoud un problème posé par M. Sierpiński:

Pour tout ensemble analytique Z, linéaire et borné, il existe une fonction continue, $f(x)$, définie dans l'intervalle fermé $[0, 1]$ et telle que $Z = \underset{y}{\mathrm{E}}[f^{-1}(y) \epsilon \mathbf{N}]$ [1]).

La démonstration de M. S. est basée sur le lemme suivant:

Z étant un ensemble analytique linéaire et non-vide, il existe un système $\{\Delta_{n_1 n_2, \dots n_k}\}$ d'intervalles fermés tel que

$$Z = \sum_{n_1, n_2, \dots} \prod_{k=1}^{\infty} \Delta_{n_1, n_2, \dots n_k}$$

et satisfaisant aux conditions suivantes:

1) on a pour tout système $n_1, n_2, \dots n_{k+1}$ de nombres naturels:

$$\Delta_{n_1, n_2, \dots n_k, n_{k+1}} \subset \Delta_{n_1, n_2, \dots n_k};$$

2) on a pour tout système $n_1, n_2, \dots n_k$ de nombres naturels:

$$0 < |\Delta_{n_1, n_2, \dots n_k}| \leq \frac{1}{k \cdot n_k} \text{ [2])}.$$

3) $(n_1 n_2, \dots n_k)$ et $(m_1, m_1, \dots m_e)$ étant deux systèmes différentes de nombres naturels, les extrémités de $\Delta_{n_1, n_2, \dots n_k}$ et $\Delta_{m_1, m_2, \dots m_e}$ sont différentes deux à deux.

8. V. A. Lindenbaum: „La projection comme transformation continue la plus générale“.

On définit le *produit combinatoire* et la *projection* a) pour les ensembles abstraits; b) pour les espaces topologiques; c) pour les espaces métriques.

a) Soit M — un ensemble, $F(m)$ — une fonction dont les arguments parcourent M, et dont les valeurs sont des ensembles. Alors le *produit* $\mathbf{P}(M, F)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f(x)$ dont les arguments parcourent M et dont les valeurs remplissent - pour tout m de M — la condition: $f(m)$ est un élément de $F(m)$ [3]). En particulier, soit $M = (1, 2, \dots, n)$: on écrit alors „$F(1) \times F(2) \times \dots \times F(n)$“ au lieu de „$\mathbf{P}(M, F)$“. Si $\mathbf{P}(M, F) = \mathbf{P}(N, G) \neq 0$, on a: $M = N$ et $F(m) \equiv G(m)$. L'ensemble $F(m)$ est appelé *projection* de l'ensemble

---

[1]) $f^{-1}(y)$ désigne l'ensemble $\underset{x}{E}[f(x) = y]$.

[2]) δ étant un intervalle quelconque, $|\delta|$ désigne sa longueur.

[3]) Cf. F. Hausdorff, Mengenlehre (1927), § 4; E. Zermelo, Math. Ann. 65 (1908), p. 266.

$\mathsf{P}(M, F)$ sur m; chaque ensemble possède une projection complètement déterminée sur un objet m, ou n'en possède point.

b) Soit, pour tout m de M, $F(m)$ — un espace topologique. Nous définissons le voisinage V_x pour un élément x du produit $\mathsf{P}(M, F)$ — comme l'ensemble dont la projection sur chaque m est un voisinage de l'unique élément de la projection de (x) sur ce m; de cette manière, le produit $\mathsf{P}(M, F)$ devient un espase topologique [1]). *Une projection d'un espace topologique en est une transformation continue.*

c) Soient M_1 et M_2, deux espaces métriques, avec les distances $\varrho_1(x, y)$ et $\varrho_2(x, y)$ resp.; on fait métriser l'ensemble $M_1 \times M_2$ par la définition:

$$\varrho[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = \sqrt{\varrho_1^2(x_1, y_1) + \varrho_2^2(x_2, y_2)}.$$

M_1 et M_2 sont des projections de $M_1 \times M_2$ [2]). *Une projection d'un espace métrique en est une transformation* (uniformément) *continue.*

Ayant défini encore, d'une manière facile à concevoir, la projection d'un *sous-ensemble* d'un produit, on parvient aux énoncés suivants: b) Pour les espaces topologiques: b 1. *Le domaine* (ensemble d'arguments) *d'une fonction continue et l'image de celle-ci dans l'espace-produit correspondant* (ensemble de paires $[x, f(x)]$) — *sont homéomorphes.* b 2. *Si le domaine d'une fonction continue est fermé, l'image est aussi fermée.* b 3. *Si une fonction continue transforme A en B, alors il existe un ensemble A_1* (dans $A \times B$), *homéomorphe à A et dont la projection est B.* — c) Pour les espaces métriques: c 1, c 2, c 3 — analogues. Lorsqu'il s'agit des ensembles situés dans les espaces euclidiens, on ne sort pas de cette catégorie d'espace.

Les propositions b 3. et c 3. justifient le titre; quand la fonction continue est biunivoque, la projection correspondante sera biunivoque aussi.

Toutes ces remarques, d'ailleurs banales, permettent parfois de simplifier légèrement les raisonnements [3]).

A. Lindenbaum: „Sur les figures convexes".

M. L. communique le théorème suivant:

(A) Soit G un ensemble de points (situé dans l'espace euclidien) pour lequel la borne supérieure des distances mutuelles de ses points (= diamètre) est d [4]): il existe alors une figure convexe et fermée qui contient G et dont la projection sur chaque droite est de longueur d (figure de largeur constante d).

Si l'on considère la partie commune de toutes les figures convexes et fermées contenant G et ayant la largeur constante d, on obtient de G ce qu'on pourrait appeler *G arrondi*; l'étude de cette opération serait peut-être intéressante. Le théorème (A) se déduit d'un théorème de M. Reidemeister et des théorèmes suivantes:

---

[1]) Cf. S. Lefschetz, Topology (1930), Chap. V, § 1.

[2]) Cf. F. Hausdorff, op. cit., § 20, 6; W. Sierpiński, Zarys teorji mnogości II (1928), pp. 103—104.

[3]) V. W. Sierpiński, Fund. Math. 7 (1925), p. 239; F. Hausdorff, op. cit., p. 212.

[4]) On pourrait dire aussi: „est $\leqslant d$".

(B) Soit G un ensemble de diamètre $\leqslant d$ situé dans un espace métrique; il existe alors un ensemble fermé contenant G et *saturé* (dans cet espace) par rapport à la propriété d'avoir le diamètre $\leqslant d$.

(C) Soit G un ensemble dans un espace métrique dont la distance ϱ remplit la condition:

$$\varrho(b, x) + \varrho(x, c) = \varrho(b, c) \quad \text{entraîne} \quad (\varrho(a, x) \leqslant \max [\varrho(a, b), \varrho(a, c)]$$

(c.-à-d. la distance entre les points d'un segment et un point quelconque a atteint son maximum pour une des extrémités de ce segment); le diamètre de G soit $\leqslant d$; il existe alors un ensemble H convexe (relativement à l'espace donné), fermé et contenant G (saturé comme dans (B)), tel que pour tout point p de la frontière de H on a: la borne supérieure de $\varrho(p, z)$ (z parcourant H) est égale à d.

A. Lindenbaum: „Sur les constructions non-effectives dans l'Arithmétique élémentaire".

Nous entendons par l'Arithmétique des nombres entiers positifs une théorie formelle de ces nombres, fondée sur un système usuel d'axiomes, exprimés par les termes primitifs: „1", „+", „$\times$", „="; comme base logique, on peut admettre p. ex. le système complet des „Principia Mathematica", en omettant les fonctions „descriptives" (*descriptions*). Une proposition sera dite *élémentaire*, lorsqu'elle se laisse énoncer sans variables de l'ordre > 1 (classes, relations etc.)[1]).

Dans chaque théorie formalisée, on trouve des signes appelés *constantes*: il y a des constantes primitives (fondamentales) (p. ex. le signe „1" dans notre Arithmétique), et à partir de celles-ci, en exécutant certaines „opérations" primitives, on obtient des constantes dérivées (p. ex. les expressions „$1 + 1$", „$1 \times \times (1 + 1)$" dans notre système)[2]): si une expression contient des termes introduits par définition, elle n'est plus une constante.

Convenons de dire: 1) que l'on a *une construction effective dans le I sens d'un objet pourvu de la propriété* „$\Phi(x)$", si l'on peut démontrer le théorème „$\Phi(C)$" où „C" est justement une constante dans la théorie envisagée; 2) que l'on a *une construction effective dans le II sens d'un objet pourvu de la propriété* „$\Phi(x)$", si l'on peut démontrer les 3 théorèmes suivants[3]):

$$(Ex)\Psi(x)$$
$$(y)(z)\{[\Psi(y) \,\&\, \Psi(z)] \rightarrow (y = z)\}$$
$$(t)[\Psi(t) \rightarrow \Phi(t)]\,^{4});$$

3) que l'on a *une construction semi-effective dans le I sens d'un objet*... etc., si l'on peut démontrer le théorème „$\Phi(C_1) \vee \Phi(C_2) \vee \ldots \vee \Phi(C_k)$" où „$C_1$", „$C_2$", ... sont des constantes[5]).

---

[1]) V. K. Gödel, Monatsh. f. Math. u. Phys. 38 (1931), p. 191.

[2]) Pour une définition plus précise, v. J. Herbrand, Thèse (Paris, 1930), Chap. III, 1.12, 1.13.

[3]) Notations comme dans le livre connu de Hilbert et Ackermann.

[4]) „$\Psi(x)$" — une propriété déterminée quelconque.

[5]) D'une façon analogue, on pourrait définir encore la semi-effectivité dans le II sens.

Or, dans notre Arithmétique, si l'on a démontré l'existence d'un nombre pourvu de la propriété „$\Phi(x)$", la construction de ce nombre est toujours effective dans le II sens; mais, quant au I sens, il en est tout autrement: il y a des exemples où l'on démontre l'existence d'un nombre pourvu d'une propriété, sans pouvoir indiquer une constante symbolisant un nombre avec cette propriété [1]), donc on n'a pas l'effectivité dans le I sens; toutefois, dans tous ces cas — autant qu'il semble — c'est au moins la semi-effectivité qui reste, car on peut trouver une constante majorante par rapport au nombre cherché; de plus, tous les exemples connus sont liés à l'état actuel de nos connaissances: donc la non-effectivité est transitoire peut-être. Cependant, M. L. signale que les résultats importants de M. Gödel [2]) conduisent aux conséquences suivantes: a) On peut formuler explicitement une propriété élémentaire „$\Gamma(x)$" qui est remplie pour un et un seul nombre et telle que l'on a „$\Gamma(1) \vee \Gamma(1+1)$", mais qu'il soit absolument impossible de résoudre la question si „$\Gamma(1)$" ou si „$\Gamma(1+1)$" (construction absolument non-effective dans le I sens). b) On peut formuler explicitement une propriété élémentaire qui est remplie pour un et un seul nombre, mais telle qu'il soit absolument impossible d'en donner une construction semi-effective dans le I sens [3]).

L'unique hypothèse nécessaire est que notre Arithmétique ne soit pas contradictoire; pour obtenir *explicitement* l'exemple a), il faut savoir encore que l'Arithmétique n'est pas „ω-contradictoire" [4]). Tout en étant absolus, c.-à-d. indépendants des progrès futurs de l'Arithmétique, nos exemples ne le sont évidemment plus, lorsqu'on admet de nouvelles règles du raisonnement d'un type jusqu'à présent inusité [5]).

15. V et 16. V. R. de Montessus de Ballore (Paris): „Methodes nouvelles de la statistique mathématique".

5. VI. W. Sierpiński: Sur les anneaux de fonctions" [Fund. Math. 18 (1932), p. 1].

S. Mazurkiewicz: „Sur un problème de M. Lusin" [C. R. 192 (1931), p. 1526].

12. VI. W. Wolibner: „Sur les fonctions analytiques du type de Pompeiu" [C. R. de Varsovie 24 (1931)].

K. Zarankiewicz: „Sur les régions convexes".

M. Z. donne une démonstration élémentaire des deux théorèmes suivants: 1° Si la frontière F d'une région plane et convexe contient un nombre fini d'arcs d'une circonférence donnée K et dont l'ensemble donne la circonférence K toute

---

[1]) Rappelons les problèmes de Waring ou de Goldbach.

[2]) L. c., pp. 173—198.

[3]) Ceci peut être appliqué pour obtenir un nombre réel *calculable* dont il serait absolument impossible de repondre s'il est $=1$ ou non (Cf. W. Sierpiński, Fund. Math. 2 (1921), pp. 114—115).

[4]) K. Gödel, l. c.

[5]) V. p. ex. D. Hilbert, Math. Ann. 104 (1931), p. 491.

entière, il n'y a dans F en dehors de ces arcs que tout au plus des segments des tangentes communes à deux arcs consécutifs. 2° L'aire de cette région n'est pas inférieure à celle de K.

9. X. W. Sierpiński: „Remarques sur les suites de fonctions“ [Fund. Math. 18 (1932), p. 110 et Monatshefte für Mathematik u Physik. 39 (1932), p. 233].

A. Koźniewski: „Sur les anneaux d'ensembles“ [C. R. de Varsovie 25 (1932)].

23. X. O. Blumenthal (Aachen): „Eine neue Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen mit unsymmetrischem Kern“.

O. Nikodym: „Remarques sur un Mémoire de M. Zaremba“ [à paraître dans le Journal de Mathématiques].

30. X. A. Rajchman: „Sur la loi des grands nombres forte“ [Mathesis Polska 6 (1931), nr 7—8].

13. XI. W. Sierpiński: „Sur une généralisation d'un théorème de Cantor“ [Fund. Math. 18 (1932), p. 280].

W. Sierpiński: „Sur deux ensembles de la même puissance qui ne sont pas effectivement de la même puissance“ [Fund. Math. 18 (1932), p. 189].

A. Koźniewski: „Sur les classes croissantes“.

27. XI. O. Nikodym: „Sur le principe de minimum dans le problème de Dirichlet“.

Soit D un domaine ouvert et borné de l'espace euclidien à 3 dimensions pourvu d'un système des coordonnées rectangulaires x, y, z. Désignons par (Φ_D) l'ensemble de toutes les fonctions $F(P)$ jouissant des propriétés suivantes:

1° $F(P)$ est définie presque partout dans D,

2° $F(P)$ possède presque partout dans D les trois dérivées partielles de premier ordre, ces dérivées étant à carré sommable dans D,

3° sur presque toute ligne parallèle aux axes du système des coordonnées $F(P)$ est absolument continue sur tout segment fermé contenu dans D.

On voit aisément que si $F(P)$ appartient à (Φ_D), il existe un ensemble épais de lignes droites parallèles à l'axe de x et telles que si AB est un segment saturé et ouvert contenu dans D et situé sur une de ces lignes, $F(P)$ y admet des valeurs limites déterminées dans A et B. Il en est de même pour les lignes parallèles aux axes y et z. Pour l'exprimer nous dirons simplement que $F(P)$ admet „presque partout“ des valeurs limites frontières.

Dirons que deux fonctions $F(P)$ et $G(P)$ appartenant à (Φ_D) *admettent les mêmes valeurs frontières*, si la fonction $F(P) - G(P)$ admet presque partout la valeur limite et frontière égale à 0.

Cela étant, soit $F^0(P)$ une fonction de la classe (Φ_D). Désignons par (Φ_{D,F^0}) l'ensemble de toutes les fonctions (Φ_D) possédant les mêmes valeurs frontières que F^0. Dans ces conditions on démontre qu'il existe une fonction $F(P)$ essentiellement unique appartenant à (Φ_{D,F^0}) et rendant minimum l'intégrale

$$\iiint_D \left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right\} dt.$$

De plus on démontre que $F(P)$ ne diffère d'une fonction harmonique que dans un ensemble de mesure nulle.

La démonstration de l'existence repose sur le théorème suivant concernant les espaces vectoriels, qui possèdent le produit scalaire conforme à la notion de la distance $\|x-y\|$ de deux points x et y.

Soit Γ une telle variété et, soit Γ_1 un sous-ensemble de Γ tel que les relations $x \in \Gamma_1, y \in \Gamma_1$ entraîment $\dfrac{\lambda x+\mu y}{\lambda+\mu} \in \Gamma_1$ pour tout λ, μ réel, où $\lambda+\mu \neq 0$.

Soit d la borne inférieure des nombres $\|x\|$, où $x \in \Gamma_1$. Dans ces conditions et, si Γ_1 est complet, il existe un élément unique $x_0 \in \Gamma_1$ tel que $\|x_0\| = d$.

11. XII. F. Leja: „Sur les coëfficients de convergence des séries de polynomes".

M. L. démontre les théorèmes suivants:

1. Si la série $\sum\limits_0^\infty P_n(z) = \sum\limits_0^\infty (a_0^{(n)} + a_1^{(n)}z + \dots a_n^{(n)}z^n)$ est convergente sur une courbe, il existe pour tout domaine borné D un nombre $\lambda > 0$ tel que la série $\sum\limits_0^\infty P_n(z)\lambda^n$ est uniformément convergente dans D.

2. Si une série $\sum\limits_0^\infty P_n(z)$ est convergente presque partout sur une circonférence, la série $\sum\limits_0^\infty P_n(z)(1-\varepsilon)^n$ est uniformément convergente dans l'intérieur de cette circonférence, pour tout $0 < \varepsilon < 1$.

[Mathematische Annalen 107 (1932)].

A. Wundheiler: „Conditions pour une surface flexible inextensible" [C. R. 193 (1931), p. 1051].

18. XII. W. Sierpiński: „Sur un ensemble qui a avec tout son translation au plus un point commun" [Cf. S. Ruziewicz et W. Sierpiński Fund. Math. 19 (1932), p. 17].

W. Sierpiński: „Sur un problème concernant les types de dimension" [Fund. Math. 19 (1932), p. 65].

A. Tarski: „Sur les propriétés géométriques de la mesure de M. Banach".

E. Szpilrajn: „Remarque sur les types de dimension".

M. S. donne un exemple de *deux ensembles Z_1 et Z_2 de la puissance du continu tels que $dZ_1 < dZ_2$ et qu'il n'existe aucun ensemble Z satisfaisant à la condition*: $dZ_1 < dZ < dZ_2$. Cet exemple résoud un problème posé par M. Sierpiński.

M. Kuratowski a construit une suite d'ensembles lineaires $\{E_n\}$ tels que si $i \neq n$ et si X est un ensemble non vide ouvert dans E_i, on n'a jamais $dX \leqslant \leqslant dE_n$)[1]).

Soit $\{I_n\}$ la suite des intervalles $\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right)$ et $\{K_n\}$ une suite d'ensembles contenus respectivement dans $\{I_n\}$ et homéomorphes à $\{E_n\}$.

Posons $Z_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ et $Z_2 = Z_1 + (0)$.

On démontre que ces ensembles satisfont aux conditions énoncées au début.

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématiques, Section de Léopol, année 1931.

10. I. 1931. H. Steinhaus: „Über die Wahrscheinlichkeit der Konvergenz von Reihen".

In der komplexen Ebene seien gegeben: eine Folge von messbaren (nach Lebesgue) Gebieten Ω_i mit Durchmessern, die alle unter einer festen Schranke liegen, ferner eine Folge von Wahrscheinlichkeiten $f_i \cdot \iint\limits_K f_i^{(z)} dz$ ergibt die W. dafür, dass ein Punkt zu der Menge K in Ω_i gehört. Es wird der Satz bewiesen: Die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, dass die Reihe von beliebig aus Ω_i herausgegriffenen Punkten fast sicher konvergiert, ist:

1. Die Folge von Schwerpunkten der Mengen Ω_i ist konvergent.

2. Die Reihe der Trägheitsmomente t_i der Gebiete Ω_i bezüglich der entsprechenden Schwerpunkte konvergiert.

S. Kaczmarz: „Verallgemeinerung eines Satzes aus der Theorie der unendlichen Reihen".

Es wird der Satz bewiesen: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass für eine gegebene Reihe Σ_{a_j} alle Partialsummen beschränkt ausfallen, ist:

---

[1]) Fund. Math. 8 (1926), p. 202.

$$\left|\sum_1^\infty a_n \lambda_n\right| < k_\lambda \text{ (const)}$$

für jede konvexe Folge $\lambda_n \to 0$. (S. Studia Math. 3 (1931)).

W. Orlicz: „Über eine Klasse von konjugierten Räumen".

Die notwendige u. hinreichende Bedingung für die Konvergenz von $\Sigma a_\nu b_\nu$ für jede Folge a_ν, für welche $\Sigma |a_\nu|^{\alpha_\nu}$ $(\alpha_\nu > 1)$ konvergiert, besteht in der Existenz eine Konstante $k (0 < k < 1)$, für welche $\Sigma |k b_\nu|^{\beta_\nu}$ konvergent ist; dabei bedeuten β_ν die zu α_ν konjugierten Potenzen. (Studia Math. 3 (1931)).

21. II. K. Kuratowski: „Über die Anwendung der Logistik in der Mathematik".

Es wird eine Methode entwickelt, die erlaubt, aus der Definition gewisser Mengen, vermittels einer mathematischen Interpretation von logischen Operationen, auf ihre Eigenschaften, wie z. B. Borelsche oder projektive (im Sinne von Lusin) Klasse zu schliessen. U. a. werden gewisse, auf Benutzung des „crible" von Lusin beruhende Ergebnisse von Mazurkiewicz u. Nikodym auf einfache Weise erhalten. (Fund. Math. 17, p. 249—272).

S. Banach: „Über analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen".

Es ei B^0 die Klasse aller stetigen Abbildungen eines Raumes X auf eine Teilmenge eines metr. Raumes Y. Eine Abbildung sei zu B^ξ gerechnet, wenn sie Grenzwert von einer Folge von Abbildungen ist, die zu B_η, $\eta < \xi$ gehören.

L^ξ sei die Klasse aller im Sinne von Borel messbaren Abbildungen. Es sei $b_1 = L_1$ und b^ξ analog wie B^ξ definiert. Es gilt $B^\xi \subset b^\xi \subset L^\xi$. Ist Y separabel so gilt: $b^\xi = L^\xi$. (S. S Banach: „Über analytisch darstellbare Operationen" Fund. Math. 17 (1931), p. 283—295).

S. Banach: „Über nicht differenzierbare stetige Funktionen".

Es wird der Satz bewiesen, dass im Raume aller stetiger, reeller Funktionen diejenigen, die an irgendeiner Stelle endliche einseitige Ableitung besitzen, eine Menge I-er (Baireschen) Kategorie bilden. Vgl. Studia Math., Bd. 3.

S. Ulam: „Einige Sätze über Mengen II-er Kategorie".

Unter Voraussetzung der Kontinuumhypothese kann man zeigen, dass 1°: In jeder Menge II-er Kategorie (in einem beliebigen Raume) gibt es ein Kontinuum von elementfremden Mengen, die alle II-er Kategorie sind. 2°: In jeder Menge, in der die

Bairesche Bedingung nicht erfüllt ist, gibt es Kontinuum von elementfremden, ebensolchen Mengen. 3°: In jeder Menge, die ein positives äusseres (Lebesgue'sches) Mass besitzt, gibt es ein Kontinuum von elementfremden, unmessbaren Mengen.

17. III. St. Saks: „Zur Theorie der subharmonischen Funktionen".

Eine stetige Funktion zweier reellen Veränderlichen $u(x, y)$ heisst im Gebiete G subharmonisch, wenn für jeden Punkt (x_0, y_0) und jeden Kreis vom Radius r

$$u(x_0, y_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\vartheta,\ y_0 + r\sin d\,\vartheta)\, d\vartheta$$

ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist: die Funktion $u(x, y) + h(x, y)$ ($(h(x, y)$ ist eine beliebige harmonische Funktion) besitzt keine inneren Extrema inbezug auf einen beliebigen Kreis K.

S. Kaczmarz: „Über die Dinischen Integrale".

Es existiert eine stetige Funktion $f(x)$, für welche bei jedem x das Integral $\int\limits_0^1 \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt$ divergiert. Analoge Sätze gelten für

$$\int\limits_0^1 \left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \right| dt$$

und

$$\int\limits_0^1 \left| \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} \right| dt.$$

Solche Funktionen f bilden im Raume aller stetigen Funktionen eine Menge der II-en Kategorie.

21. III. S. Banach: „Über additive Operationen".

Es werden einige Sätze bewiesen über Borelsche lineare Mannigfaltigkeiten und Bairesche additive Operationen in allgemeinen Räumen vom Typus (B). Der Prelegent weist auf Anwendungen in der Theorie der Integralgleichungen bei unbeschränkten Kernen hin.

W. Orlicz: „Über eine Klasse von Räumen vom Typus (B)".

Die hinreichende Bedingung damit der Raum aller mit der Funktion $N(u)$ integrierbaren Funktionen f von Typus (B) sei, ist:

$N(u)$ ist konvex; $\lim_{\to 0} \frac{N(u)}{u} = 0$, $\lim_{\to\infty} \frac{N(u)}{u} = \infty$ und für hinreichend grosse u: $N(2u) \leqslant K N(u)$.

Diese Räume sind in vielfacher Hinsicht den Räumen L^p analog. (Erscheint in Bull. de l'Acad. Pol. 1932).

12. IV. W. Sierpiński: „Über zwei Definitionen von abgeschlossenen Mengen".

Der Prelegent gibt zwei Definitionen von abgeschlossenen Mengen — deren Äquivalenzbeweis das Zermelosche Auswahlaxiom benützt. Es wird ein Beispiel einer Menge konstruiert, die im Sinne der einen Definition abgeschlossen ist, dagegen kann man beim gegenwärtigen Stande der Wissenschaft nicht beweisen (ohne Benutzung dieses Axiomes), dass sie im Sinne der zweiten Def. abgeschlossen ist. (C. R. Soc. Sc. Varsovie XXIV. Note du 30 Avril 1931).

E. Żyliński: „Über Systeme linearer Differentialgleichungen".

Es wird eine einfache matrizentheoretische Behandlung des Differential-gleichungssystems:

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{i_k} y_k$$

angegeben. Erscheint in den Ber. d. Lemberger Ges. d. Wiss., 1932.

Diese Behandlung vereinfacht manche Beweisführungen.

9. V. K. Borsuk und S. Ulam: „Über eine neue topologische Operation".

Es sei A ein kompakter Raum, es bedeute $A[n]$ bei festen n den Raum von n-Tupeln von Punkten aus A. Der Abstand zweier Elemente dieses Raumes, der einen Unterraum des Raumes aller abgeschlossenen Mengen von A bildet, sei nach Hausdorff definiert. U. a. wird bewiesen, dass $I[n]$, wo I das Intervall $0 \leqslant x \leqslant 1$ bedeutet, nur für $n \leqslant 3$ mit dem euklidischen Fundamentalquader in R_n homöomorph ist.

(S. K. Borsuk und S. Ulam: „On Symmetric products of topological spaces". Bull. of the Amer. Math. Soc., 9 dec. 1931).

S. Kaczmarz: „Effektives Beispiel für Dinische Integrale".

Es wird eine periodische Funktion $f(x)$ konstruiert, für welche das Integral $\int_0^1 \frac{f(x+t) - f(x-t) - 2f(x)}{t} dt$, in jedem Punkte gleich $+\infty$ ist. Es ergibt sich die Richtigkeit des Satzes, wonach solche Funktionen im Raume aller stetigen Funktionen eine Menge von II-er Kategorie bilden.

25. V. S. Banach: „Über isometrische Abbildungen von Vektorräumen".

$L^{(p)}$ bedeute den Raum aller mit der p-ten Potenz integrierbaren Funktionen, $l^{(q)}$ den Raum aller mit der p-ten Potenz konvergenten Reihen, mit entsprechender Abstandsdefinition. Es wird bewiesen, dass für $p \neq 2 \neq q$, $L^{(p)}$ und $l^{(q)}$ sich nicht aufeinander isometrisch abbilden lassen.

A. Zygmund: „Reisebericht".

Prelegent berichtet über seine Studienreise nach England im J. 1929/30.

2. VI. K. Borsuk: „Anwendungen der Funktionalräume in der Topologie".

Es werden einige Anwendungen des Funktionalraumes aller stetigen Abbildungen eines kompakten Raumes R auf die n-dimensionale Hypersphäre K_n angegeben. Einige kombinatorische Eigenschaften des Raumes R lassen sich auf diesem Wege mit Hilfe der punktmengentheoretischen Methoden untersuchen.

S. Kaczmarz: „Über ein Problem des Herrn S. Mazurkiewicz".

Es wird eine stetige periodische Funktion f konstruiert, für welche bei jedem x

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{f(x+t) - f(x-t) - 2f(x)}{t} \, dt \right| = \infty \quad \text{ist.}$$

W. Orlicz: „Über unbedingt konvergente Reihen in Vektorräumen".

Die Reihe x_n von Elementen eines beliebigen Raumes X vom Typus (B) heisst unbedingt konvergent, wenn sie bei jeder Anordnung der Elemente konvergiert. Es wird u. a. der Satz bewiesen: Die notwendige u. hinreichende Bedingung für die unb. K. ist: für jede Teilfolge x_{n_i} gibt es ein x, so dass für alle linearen Funktionale in X die Beziehung: $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_{n_i}) = f(x)$ gilt.

9. VI. A. Tarski: „Eine Krisis der deduktiven Methode in der Mathematik".

Der Prelegent bespricht die Resultate von H. K. Gödel, welche die axiomatische Methode betreffen.

13. VI. S. Banach: „Über isometrische Räume vom Typus (B)".

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Homöomorphie zweier metrischen, vollständigen Räume A und B ist: Die Räume a, b aller auf A resp. B gleichmässig stetigen, beschränkten reellen Funktionen lassen sich auf einander isometrisch abbilden.

23. VI. S. Mazur und L. Sternbach: „Über Borelsche lineare Mengen".

In einem Raume vom Typus (B) sei eine Folge von linearen Funktionalen $F_n(x)$ definiert; wir setzen ferner voraus, dass die Menge der Konvergenzpunkte dieser Folge nicht abgeschlossen ist. Dann bildet diese Menge eine wesentliche $F^{\sigma\delta}$ Menge.

Daraus folgt, dass es in jedem unendlich-dimensionalen Raume vom Typus (B) lineare Mengen gibt, die zugleich Mengen $F_{\sigma\delta}$ und $G_{\delta\sigma}$, aber nicht von einer niedrigeren Borelschen Klasse sind.

27. VI. W. Sierpiński: „Funktionenringe".

Es werden Funktionenklassen Φ von folgenden Eigenschaften betrachtet: aus $f_1 \epsilon \Phi$ und $f_2 \epsilon \Phi$ folgt $\max(f_1 f_2)$ und $\min(f_1 f_2) \epsilon \Phi$. (S. Fund. Math. 18, p. 1 ff).

J. Schauder: „Zur Theorie der Differentialgleichung

$$Ar + 2Bs + Ct = f(B^2 - AC > 0)".$$

Prelegent teilt mit, dass es ihm gelungen ist, die Randwertaufgabe für die Differentialgleichung $Ar + 2Bs + Ct = f$, ohne Benützung der S. Bernsteinschen Methode der Normen auf einfache Weise zu lösen.

3. X. S. Mazur und S. Ulam: „Über isometrische Abbildungen von normierten Vektorräumen".

Es seien X, Y zwei normierte Vektorräume und $y = F(x)$ eine isometrische Abbildung des Raumes X auf den Raum Y, bei wecher $O = f(O)$. Dann ist diese Abbildung additiv, d. h.

$$F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2) \quad \text{für} \quad x_1, x_2 \epsilon X.$$

S. Banach: „Zur Theorie der schwachen Konvergenz in Funktionalräumen".

Es sei L eine schwach abgeschlosse Mannigfaltigkeit von linearen Funktionalen in einem separablen Raume vom Typus (B) von der Eigenschaft, dass aus $F(x_n) \to F(x)$ ($\|x_n\| \leqslant A$, A eine feste Zahl) für jedes F aus L, die schwache Konvergenz von x_n nach x, folgt. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist: für jedes x lässt sich ein Funktional $F \epsilon L$ finden, so dass die Norm $\|F\| < M$ ist (M eine feste Zahl), und $F(x) = \|x\|$. Vgl. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Annexe.

10. X. H. Auerbach, S. Mazur und S. Ulam: „Über eine charakteristische Eigenschaft des Ellipsoides".

Unter allen Eikörpern des dreidimensionalen Raumen ist das Ellipsoid dadurch gekennzeichnet, dass alle ebenen Schnitte durch einen festen Punkt miteinander affine Eibereiche ergeben.

Im Anschluss daran beweist S. Mazur, dass der Hilbertsche Raum den einzigen vektoriellen, normierten, vollständigen, separablen und unendlich-dimensionalen Raum bildet, in welchem je zwei zwei-dimensionale lineare Mengen isometrisch sind.

17. X. W. Nikliborc: „Reisebericht".

Der Prelegent berichtet über seine Studienreise nach Deutschland im J. 1930/31.

24. X. W. Nikliborc: „Zur Potentialtheorie".

Es wird der folgende Satz bewiesen: Ist das von einem homogenen Körper K herrührende Potential im Innern desselben eine quadratische Funktion der Koordinaten, so ist K ein Ellipsoid.

24. X. S. Banach und S. Mazur: „Über einen universellen Raum".

Jeder separable, normierte, vektiorielle Raum ist mit einer Mannigfaltigkeit in dem Raume R aller im Intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$ stetiger Funktionen, äquivalent. (Die Entfernung $\overline{f_1 f_2}$ zweier Funktionen wird als Max $|f_1(x) - f_2(x)|$ angenommen). Aus diesem Satze ergibt sich, dass jeder separable metrische Raum mit einer Teilmenge von R isometrisch ist. Vgl. S. Banach, Théorie des opérations linéairs, S. 185.

7. XI. L. Chwistek: „Über die semantische Methode in der Grundlagenlehre der Mathematik und der Logistik I Teil".

Prelegent bespricht die Schwierigkeiten, die noch in der Grundlagenlehre der Mathematik u. Logik bestehen und entwickelt ein logisches System, das auf der semantischen Methode beruht. Die Axiome dieses Systems bilden eine Darstellung der Operation, welche in einer Substitution eines Ausdruckes G in einem gegebenen Ausdrucke F an Stelle eines Ausdruckes E besteht. In diesem Systeme erweist sich das Unendlichkeitsaxiom von Russell u. Whitehead als entbehrlich.

S. Banach und S. Mazur: „Über die Räume $L^{(p)}$ und $l^{(q)}$".

Die Räume $L^{(p)}$ und $L^{(q)}$, analog die Räume $l^{(p)}$ und $l^{(q)}$ lassen sich nur dann aufeinander ein-eindeutig linear abbilden, wenn $p=q$ ist; den Raum $L^{(p)}$ kann man auf den Raum $l^{(q)}$ nur dann eineindeutig linear abbilden, wenn $p=q=2$ ist.

14. XI. S. Gołąb: „Über konforme Abbildungen".

Es sei gegeben eine konforme Abbildung 2-ier Finslerschen Räume aufeinander von der Eigenschaft, dass in einem festen Punkte alle Winkel von der Grösse α (α eine feste Zahl) erhalten bleiben. Dann ist die Abbildung konform d. h. alle Winkel werden erhalten.

L. Chwistek: „Über die semantische Methode II Teil".

Der Prelegent entwickelt die Axiome der Semantik. Daran anschliessend wird eine Darstellung der Arbeiten des Herrn Hetper gegeben, welchem es gelungen ist, die Fundamentaloperationen der gewöhnlichen Arithmetik auf rein semantische Operationen zurückzuführen.

21. XI. W. Zygmund: „Über einige Probleme und Sätze aus der Theorie der trigonometrischen Reihen".

Es wird der Satz bewiesen: Wenn $\Sigma(a_n \cos x + b_n \sin x)$ auf einer Menge von positivem Lebesgueschen Masse beschränkt ist, so konvergiert die Summe $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$. Es wird u. a. ein Beispiel einer Fourier-Stieltjeschen trigonometrischen Reihe angegeben, die „fast überall" nach Null konvergiert wobei gewisse Koeffizienten von Null verschieden sind.

23. XI. S. Kaczmarz: „Über die Räume der mit einer Funktion M integrierbaren Funktionen".

Es wird bewiesen, dass alle diese Räume mit dem Hilbertschen Raume homöomoprh sind.

28. XI. W. Sierpiński: „Über Mengen von gleicher Mächtigkeit, die nicht effektiv gleichmächtig sind".

Es werden Mengen gleicher Mächtigkeit definiert, so dass die Tatsache, dass sie gleichmächtig sind, das Auswahlaxiom zum Beweise nicht erfordert. Dagegen gelingt es nicht eine ein-eindeutige Abbildung dieser Mengen aufeinander effektiv anzugeben. Vgl. Fund. Math. 18, p. 180—192.

W. Sierpiński: „Zur Theorie der Homoïen".

Zu je zwei Mengen A, B von der Mächtigkeit des Kontinuums lässt sich nicht immer eine Menge C von der Mächtigkeit des Kontinuums angeben, welche einen kleineren Homöomorphietypus hat.

S. Fund. Math. 19. (Sur un problème concernant les types de dimensions).

28. XI. M. Biernacki: „Ueber beschränkte Funktionen der komplexen Veränderlichen.

Es sei $f(z)$ eine im Kreise $|z-b| \leqslant R$ holomorphe Funktion. Es sei A das Maximum des reellen Teiles von f in diesem Kreise, M und a entsprechend die Maxima von $|f(z)|$ und des reellen Teiles von $f(z)$ in dem Kreise $|z-b| \leqslant r$, $(r < R)$. Dann gilt:

$$\frac{A-a}{M} \leqslant \frac{2R(R+r)}{(R-r)^3}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt für eine entsprechend gewählte Funktion.

5. XII. W. Ślebodziński: „Zur Differentialgeometrie".

12. XII. W. Hurewicz: „Ueber die Abbildungen von topologischen Räumen auf die euklidischen".

Eine kompakte Menge von der (im Sinne von Menger-Urysohn) Dimension n kann man stetig auf einen Teil des $(n+k)$-dimensionalen euklidischen Fundamentalquaders derart abbilden, dass die Menge der Punkte, deren Urbildmenge mindestens 2 Punkte enthält, höchstens $(n-k)$-dimensional ist. Für $k=n+1$ erhält man den Satz von Menger-Nöbeling über homöomorphe Einbettung.

Comptes rendus des séances de la Societé Polonaise de Mathématiques. (Section de Cracovie).

8. XI. 1930. T. Ważewski: „Sur l'unicité des intégrales du système d'équations différentielles ordinaires" (v. Mathematische Zeitschrift, tome 35).

2. V. 1931. T. Ważewski: „Sur les équations linéaires à coeffitients continus". Supposons que 1°) dans le système d'équations

$$\sum_{\nu/1}^{n} a_{\mu,\nu}(t_1, \ldots, t_p)\, x_\nu = 0 \qquad (\mu/1, \ldots, m;\ m < n)$$

les coeffitients $a_{\mu\nu}(t_1, \ldots, t_p)$ sont des fonctions continues dans un ensemble Z qui appartient à l'espace à p dimensions, 2°) que ces équations sont indépendentes pour tout point $T=(t_1, \ldots, t_p)$ appartenant à Z. Il se pose le problème de savoir s'il existe $n-m$ solutions

$$x_1^{(\lambda)}(T), \ldots, x_n^{(\lambda)}(T) \qquad (\lambda/1, \ldots, n-m)$$

de notre système qui sont indépendentes et continues pour tout T appartenant à Z.

La réponse est affirmative lorsque Z est un hypercube (ouvert ou fermé) à p dimensions (ou homéomorphe d'un tel hypercube). Si Z n'est pas un tel hypercube la réponse peut être négative comme le montre un exemple donné par l'auteur. — De ce théorème résulte un lemme auquel M. Bielecki a ramené un problème qui lui a été proposé par M. Wilkosz. Le théorème ci-dessus avait pour but de démontrer ce lemme.

9. V. 1931. A. Bielecki: „Sur une représentation intégrale des hypersurfaces au moyen des fonctions implicites". Supposons que le système d'équations

$$x_\nu = f_\nu(t_1, \ldots, t_p) \qquad (\nu/1, \ldots, n;\ p < n)$$

représente une homéomorphie entre un hypercube H ouvert à p dimensions et une hypersurface S située dans l'espace à n dimensions. Supposons que les fonctions f_ν sont de classe C^1 dans H [1]) et que la matrice

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(t_1, \ldots, t_p)} = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial t_1} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial t_p}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial t_p} \end{array} \right|$$

est d'ordre p dans H.

Il existe alors $n-p$ fonctions $F_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ $(\lambda/1, \ldots, n-p)$ qui sont de la classe $C^{(1)}$ dans un ensemble ouvert Ω et telles que 1°) la matrice $\dfrac{D(F_1, \ldots, F_{n-p})}{D(x_1, \ldots, x_n)}$ soit d'ordre $n-p$ dans Ω et que le système d'équations implicites

$$F_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (\lambda/1, \ldots, n-p)$$

représente la surface S. — C'est une solution d'un problème de M. Wilkosz sous la forme modifiée par M. Ważewski qui a proposé le précédent énoncé du théorème.

1) C.-à-d. possèdent dans H des dérivées partielles continues du premier ordre.

31. X. 1931. S. Gołąb: „Sur la représentation conforme“. Si une transformation d'une surface de Riemann sur une autre conserve un angle fixe α $(0 < |\alpha - \pi| < \pi)$ alors cette transformation constitue une représentation conforme.

5. XII. 1931. T. Ważewski: „Sur un problème intégral relatif à l'équation $\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x} + A(x,y)\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial y} = 0$“.

L'auteur construit une fonction $A(x,y)$ qui possède dans un ensemble simplement connexe Ω des dérivées partielles continues de tous les ordres et telle que toute intégrale de l'équation partielle ci-dessus qui 1⁰) est valable dans Ω tout entier et qui 2⁰) possède dans Ω des dérivées partielles continues du premier ordre, est constante. Toute intégrale première (valable dans Ω) de l'équation ordinaire $\dfrac{dy}{dx} = A(x,y)$ est constante. Par conséquent tout facteur intégrant (valable dans Ω tout entier) de cette équation est identiquement nul dans Ω.

12. XII. 1931. W. Urbański: „Sur le parcours intégral des solutions des équations différentielles ordinaires“. L'auteur démontre que dans certaines hypothèses les intégrales d'un système en question qui se condensent sur elles-mêmes (sans être périodiques) constituent un ensemble de la deuxième catégorie de Baire.

Deuxième Congrès des Mathématiciens Polonais, Wilno 1931.

I. Organisation du Congrès.

Le premier Congrès Polonais de Mathématique qui a eu lieu à Lwow en 1927 a décidé de réunir le deuxième Congrès en 1931 en un lieu désigné par la Société Polonaise de Mathématique. La Société Polonaise de Mathématique était de plus chargée de s'occuper de l'organisation du Congrès.

En novembre 1930, la Section de Wilno de la Société Polonaise de Mathématique a présenté au Conseil de la Société la proposition d'organiser le deuxième Congrès à Wilno.

Le Conseil de la Société a accepté cette proposition le 7 janvier 1931 et a confié l'organisation du Congrès à la Section de Wilno, qui a formé le Comité d'organisation, composé comme il suit:

Président:	Wiktor Staniewicz,
Vice Présidens:	Juljusz Rudnicki, Władysław Dziewulski,
Secrétaire:	Stefan Kempisty,
Trésorier:	Kazimierz Jantzen,
Rapporteur du programme:	Antoni Zygmund,
Intendant:	Stanisław Krystyn Zaremba,
Membres:	Wacław Dziewulski, Józef Patkowski, Jan Weyssenhoff.

Le Président de la Société Polonaise de Mathématique, M. le Prof. Kazimierz Bartel a obtenu du Ministère de l'Instruction Publique et des Cultes les fonds nécessaires à l'organisation du Congrès.

Le Comité d'organisation a fixé le Congrès à la date du 23 au 26 septembre 1931 sous le nom de Deuxième Congrès des Mathématiciens Polonais et a adressé en avril les invitations à tous les membres de la Société Polonaise de Mathematique ainsi que à tous les mathématiciens polonais et étrangers qui ont pris part au Congrès de Lwów, au Premier Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves ou qui ont collaboré aux publications polonaises.

A ces invitations ont été jointes des cartes portant les titres: Bulletin d'Adhésion et Sujet de la communication, à remplir et à renvoyer au Comité d'organisation.

Les Membres du Congrès étaient divisés en membres effectifs payant 15 zlotys et en membres associés payant 10 zlotys. Les membres étrangers étaient exonérés du paiemunt de ces taxes.

En juin 1931, on a adressé aux mêmes personnes un avis détaillé contenant le programme provisoire du Congrès et les conditions du voyage et du séjour à Wilno.

Pendant les vacances de l'été 1929, il a été envoyé à tous les membres du Congrès des cartes de congressiste. Sur la présentation de cette carte ou de l'invitation, les Consulats Polonais délivraient gratuitement les visas d'entrée en Pologne.

A leur arrivée à Wilno les membres, recevaient au Bureau d'Information, à la gare, le plan de la ville et des cartes désignant les logements.

Le jour de l'ouverture du Congrès, le Bureau du Comité d'organisation a distribué aux congressistes le programme du Congrès contenant les sujets des communications scientifiques annoncées.

Le siège du Congrès se trouvait au bâtiment principal de l'Université Stefan Batory.

Le Bureau du Comité d'organisation a délivré à tous les Congressistes ne jouissant pas des réductions spéciales sur les chemins de fer polonais, des cartes donnant droit a une réduction de 60% pour le retour de Wilno, c'est à dire, pour les membres étrangers, jusqu'à un point frontière à leur choix. La Direction de la Bibliothèque de l'Université a ouvert à l'occasion du Congrès une exposition des oeuvres de mathématiques éditées par l'Université de Wilno avant sa fermeture en 1832 et des anciens instruments astronomiques de l'observatoire de l'Université.

Le Comité d'organisation profite de cette occasion pour remercier cordialement tous ceux qui ont bien voulu contribuer à la réalisation du Congrès et en particulier le Comité des Dames qui a organisé la première réunion des congressistes et les excursions pour les membres associés. Nous tenons aussi à souligner la participation active des étudiants de l'Université Stefan Batory aux travaux des Bureaux de Renseignements.

II. Liste des Délégués.

Délégué de l'Université de Paris et de la Société Mathematique de France
M. Arnaud Denjoy.

Délégué de l'Université de Cluj et de la Société Mathématique de Roumanie
M. Petre Sergescu.

Délégué l'Académie des Sciences et de l'Université de Belgrade
M. Antoine Bilimowitch.

Délégué de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie
M. Wacław Sierpiński.

Délégué de la Faculté des Sciences de l'Université de Lwów
M. Hugo Steinhaus.

Délégué de l'École Politechnique de Varsovie
M. Stefan Straszewicz.

Délégué de l'École Polytechnique de Lwów
M. Kazimierz Kuratowski.

Délégué de la Société des Amis des Sciences de Wilno
M. Władysław Dziewulski.

Délégué de la Faculté des Sciences de l'Université Stefan Batory
M. Kazimierz Jantzen.

Délégué de l'Association des Professeurs des Écoles Secondaires et Supérieures
M. Wacław Sierpiński.

III. Séance d'ouverture.

Le Congrès a été solennellement ouvert le jeudi 23 septembre à 11 heures dans l'Aula de l'Université Stefan Batory en présence de M. Zygmunt Beczkowicz, Woïewoda de Wilno, de M. Alexandre Januszkiewicz, Recteur de l'Université Stefan Batory, de M. Józef Folejewski, Président de la Ville de Wilno, de M. Kazimierz Szelągowski, Directeur de l'Enseigment à Wilno et de tous les Délégués officiels.

En remplacement du President du Comité d'organisation M. le Prof. Wiktor Staniewicz, retenu pour cause de maladie loin de Wilno, M. le Prof. Jules Rudnicki, Vice-Président du Comité, a salué au nom du Comité les délégués officiels et tous les hôtes du Congrès. Il a ensuite exprimé les remerciements du Comité au Ministère des Cultes et de l'Instruction Publique, au Ministère des Affaires Etrangères et au Ministère des Communications pour les subventions et facilités accordées au Congrès et à M. le Recteur qui a mis à la disposition du Congrès les bâtiments de l'Université.

M. le Prof. J. Rudnicki a proposé ensuite l'élection de M. le Prof. Dr. hon. Samuel Dickstein comme président du Congrès. Cette proposition a été acceptée à l'unanimité.

M. le Prof. S. Dickstein en assumant la présidence du Congrès a proposé envoyer un télégramme d'exprimant les hommages du Congrès à M. le Prof. Dr. Ignacy Mościcki, Président de la République Polonaise.

Il a ensuite proposé de compléter le Bureau du Congrès par M. M.:

M. le Prof. Dr. Arnaud Denjoy, Président d'Honneur,
M. le Prof. Dr. Pierre Sergescu, Président d'Honneur,
M. le Prof. Dr. Antoine Hoborski, Vice-président,
M. le Prof. Dr. Stefan Kempisty, Secrétaire Général.

Au cours de la séance ont été prononcés les discours suivants: M. le Président, en saluant le Congrès, parle des temps où il était élève de la „Szkoła Główna", l'Université de Varsovie, où enseignaient les anciens professeures de l'Université de Wilno. Il souligne ensuite le développement des sciences mathématiques en Pologne surtout au cours de ce siècle. En constatant l'importance des travaux du Premier Congrès des Mathématiciens Polonais qui a eu lieu à Lwów en 1927, il croit au succès du présent Congrès.

M. le Recteur Dr. A. Januszkiewicz salue le Congrès au nom de l'Université Stefan Batory.

M. le Prof. Dr. Wacław Sierpiński prononce au nom de la Société Scientifique de Varsovie et de la Société des Instituteurs des Écoles secondaires et supérieures le discours reproduit ci-dessous:

Przemówienie Prof. Dra Wacława Sierpińskiego.

W imieniu najwyższej instytucji naukowej w stolicy Państwa, Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, oraz w imieniu Towarzystwa Nauczycieli Szkół Średnich i Wyższych mam zaszczyt powitać Zjazd i złożyć mu życzenia jaknajlepszych wyników.

II-gi Zjazd Matematyków Polskich odbywa się w trudnych, bardzo trudnych dla nauki polskiej warunkach. Ogólny kryzys ekonomiczny odbił się w pierwszym rzędzie na nauce, a w szczególności na wydawnictwach naukowych. Dotacje i subwencje na te wydawnictwa zostały wstrzymane, albo znacznie uszczuplone. Towarzystwo Naukowe Warszawskie zmuszone było zamknąć szereg swoich pracowni, w szczególności swój gabinet matematyczny, oraz wstrzymało wydawanie swych Sprawozdań, które pod względem matematycznym tak poważnie zaczęły się przedstawiać. Pracownicy naukowi, dotknięci znaczną redukcją płac, znajdują się w niezmiernie ciężkich warunkach materjalnych, toteż wielu z nich nie mogło przybyć na nasz Zjazd. Mimo to wszystko wdzięczni jesteśmy organizatorom Zjazdu, że go doprowadzili do skutku, gdyż niewątpliwie wzniesie on promień światła i nadziei w naszą ciężką atmosferę.

Do życzeń w imieniu wymienionych Towarzystw dołączam jaknajlepsze życzenia dla Zjazdu w imieniu Redakcji „Fundamenta Mathematicae".

M. K. Szelągowski exprime ses souhaits au Congrès comme Directeur de l'Enseignement à Wilno.

Ensuite ont salué le Congrès les délégués:

M. le Prof. Dr. Ladislas Dziewulski, M. le Prof. Dr. Casimir

Jantzen, M. le Prof. Dr. Casimir Kuratowski, M. le Prof. Dr. Hugo Steinhaus, et M. le Prof. Dr. Stefan Straszewicz.

M. Arnaud Denjoy apporte au Congrès de Wilno le salut, les compliments et les voeux de l'Université de Paris et de la Société Mathématique de France. Il remercie l'assistance de l'avoir appelé avec son collègue roumain, le professeur Sergesco, à la présidence d'honneur du Congrès. Il considère cette faveur comme étant décernée non pas à sa personne, mais à la science de son pays et continue en ces termes.

„Je ne cacherai pas ma profonde satisfaction de me trouver pour la première fois en Pologne. Votre pays a toujours tenu une place de prédilection dans le coeur de tout Français. Notre libéralisme a pendant plus d'un siècle, alimenté son ardeur et sa foi à vos revendications et à vos aspirations nationales".

„Mais, en ce qui me concerne, j'ajoute à ces dispositions sentimentales l'attachement non moins profond créé par les affinités intellectuelles. Je suis un admirateur passionné de la brillante pléiade de mathématiciens dont la Pologne peut aujourd'hui se montrer légitimement fière. Des diverses écoles mathématiques qui se développent dans le monde, aucune, sauf celle que dirige à Moscou mon cher ami Lusin, n'éveille en moi par ses tendances et par ses résultats autant d'intérêt que la vôtre, aucune n'en suscite davantage".

M. Arnaud Denjoy conclut en exprimant au Congrès ses voeux les plus chaleureux de succès.

M. le Prof. Dr. Pierre Sergescu prononce le discours suivant:

Szanowni Państwo.

Oto po raz trzeci mam już zaszczyt brać udział w Kongresie Matematyków w Polsce, przynosząc Wam życzenia jaknajlepszego powodzenia i rozkwitu od Towarzystwa Matematycznego Rumuńskiego i od Uniwersytetu w Cluj, którego jestem delegatem. Zdaje mi się, że od pewnego czasu wracamy do dawnej tradycji ścisłych stosunków przyjaznych naukowych pomiędzy Polską a Rumunją. Będzie to naturalnie z wielką korzyścią dla idei unji narodów i dla nauki.

Aby ograniczyć się tylko do matematyki, polscy uczeni stworzyli szkołę, z której mógłby być dumny każdy kraj. Z powodu Waszego wydawnictwa „Fundamenta Mathematicae" — oraz młodszego od niego wydawnictwa „Studia Mathematica" — mówi się z podziwem o Polsce we wszystkich centrach naukowych świata. Wasze Kongresy we Lwowie i w Warszawie przyczyniły się niemało do postępu nauki.

My Rumuni, korzystając z węzłów przyjaźni naukowej tak płodnej pomiędzy naszymi narodami, wzięliśmy za wzór nasz, Wasz ruch matematyczny. Dlatego też nasze życzenia sławy i powodzenia dla Waszych prac pochodzą zgłębi naszego serca.

My również założyliśmy nasze pismo Mathematica, które szczyci się współpracownictwem polskich uczonych, takich jak profesor Sierpiński, oraz panowie Rosenblatt, Biernacki, Nikodym, Sachs i t. d. Pragniemy, aby to współpracownictwo polsko-rumuńskie rozwijało się coraz szerzej.

Zawsze idąc za Waszym przykładem zorganizowaliśmy w roku tysiąc dziewięćset dwudziestym dziewiątym, w Cluj, pierwszy Kongres Matematyków rumuńskich. Wielki uczony, chluba Szkoły Matematycznej Polskiej, profesor Sierpiński, zechciał łaskawie przynieść nam swoje poparcie moralne, oraz wyrazy sympatji matematyków polskich. Zaszczycił nas również serją wykładów swych na Uniwersytecie w Cluj, za co jesteśmy mu niewypowiedzianie wdzięczni.

Na przyszły rok, na Wielkanoc, matematycy rumuńscy zjadą się na drugi ich Kongres w Turnu-Severin, mieście położonem u słynnych Żelaznych Wrót Dunaju. Nie mam chyba potrzeby mówić, jak szczęśliwi będziemy, jeżeli zechcecie Panowie przybyć do nas jaknajliczniej i z jaką radością Was powitamy. Dumny jestem, że przypada mi dziś misja zaproszenia Was na nasz Kongres imieniem matematyków rumuńskich. I mam niepłonną nadzieję, że doda Wasza bytność u nas jeszcze jedno ogniwo do długiego łańcucha wiekowych stosunków naukowych, łączących oddawna nasze kraje.

M. le Prof. Dr. Antoine Bilimovitch apporte le salut de l'Académie des Science et de l'Université de Belgrade.

Le Secrétaire Général présente au Congrès les télégrammes et les lettres adressées au Congrès et au Comité d'organisation par M. M:

M. Janusz Jędrzejewicz, Ministre de l'Instruction Publique.

Les Recteurs des Universités de Varsovie, de Lwów, de Poznań, de l'Ecole Supérieure de Commerce de Varsovie et de l'Ecole Supérieure d'Agriculture de Varsovie, le Président de la Société Polonaise de Mathématique, Prof. Dr. Casimir Bartel, le Président de la Société Scientifique de Varsovie, Prof. Dr. Casimir Żórawski, le Vice-Président de la Sociéte Polonaise de Mathématique, Prof. Dr. Stanislas Zaremba.

M. M. les Professeurs: O. Blumenthal (Aachen), A. Fraenkiel (Kiel), G. Fubini (Turin), F. Hausdorff (Bonn). M. Hlavatý (Prague), M. T. Huber (Lwów), L. Lichtenstein (Leipzig), St. Mazurkiewicz (Warszawa), P. Montel (Paris), K. Petr (Prague), G. Raego (Tartu), A. Rosenblatt (Cracovie), S. Ruziewicz (Lwów), N. Sakellariou (Athènes), L. Tonelli (Pisa), G. Vitali (Bologne), E. Zermelo (Freiburg).

A la fin de la Séance, l'assemblée a décidé d'envoyer des télégrammes à M. le Prof. Casimir Bartel, Président de la Societé Polonaise de Mathématique et au Prof. Victor Staniewicz, Président du Comité d'organisation du Congrès.

IV. Séances plénières. Liste des conférences.

Les séances plénières du Congrès ont eu lieu le 23 septembre de 16 à 18 heures, le 24 de 10 heures à midi et le 25 de 10 heures à midi. Nous donnons ci-desous la liste des conferences faites à ces séances.

**Mazurkiewicz Stefan: O zastosowaniu pojęcia kategorji w analizie i topologji. — Sur l'application de la notion de catégorie dans l'analyse et dans la topologie.

Banach Stefan: Zagadnienia przestrzeni wektorjalnych. — Les problèmes des espaces vectoriels.

Kuratowski Kazimierz: Operacje logiczne a problemy efektywności. — Les opérations logiques et les problèmes d'effectivité.

Denjoy Arnaud: La distinction des propriétés descriprives et métriques dans la théorie des ensembles et des fonctions.

Sierpiński Wacław: Pierścienie zbiorów i pierścienie funkcyj. — Les anneaux d'ensembles et les anneaux de fonctions.

*Zaremba Stanisław: Pogląd na współczesny stan teorji potencjału. — Vue d'ensemble sur l'état actuel de la théorie du potentiel.

Dickstein Samuel: Wroński, Bolzano, Comte, filozofowie matematycy XIX stulecia. — Wroński, Bolzano, Comte mathématiciens-philosophes de XIX siècle.

M. Godofredo Garcia de Lima (Peru) a fait hommage au Congrès de ces derniers travaux de mécanique rationnelle.

V. Sections du Congrès et leurs Présidents.

Le Congrès comprenait les six sections suivantes:

I. Logique, Principes des mathématiques.

II. Théorie des ensembles, Topologie, Théorie des fonctions réelles.

III. Arithmétique, Algèbre, Analyse.

IV. Géometrie.

V. Physique mathématique, Astronomie, Mathématiques appliquées.

VI. Questions didactiques, Histoire des mathématiques.

La section I a tenu une séance le 23 septembre à 18 heures, au cours de laquelle ont été présentées deux communications. La présidence de cette section appartenait à M. K. Kuratowski.

La section II a tenu aussi une séance, le 24 septembre, à 16 heures, au cours de laquelle ont été présentées six communications. La présidence appartenait à M. S. Banach.

La section III a tenu trois séances, le 24, le 25 et le 26 septembre à 16 heures, au cours desquelles ont été présentées 16 communications. La présidence appartenait à MM. A. Hoborski, F. Leja, T. Ważewski, et S. K. Zaremba.

Le section IV a tenu une séance le 25 septembre à 16 heures, au cours de laquelle ont été présentées six communications. La présidence appartenait à M. W. Ślebodziński.

La section V a tenu deux séances, le 24 et le 25 septembre, au cours desquelles ont été présentées 9 communications. La présidence appartenait à M. J. Neyman.

Le section VI a tenu trois séances, le 23, le 24 et le 25 septembre, au cours desquelles ont été présentées 9 communications. La présidence appartenait à MM. J. Rudnicki et M. Rusiecki.

VI. Liste des communications.

Sekcja I Section.

Lindenbaum Adolf: Formalizacja elementarnego rachunku. — Formalisation du calcul élémentaire.

Jaśkowski Stanisław: Z topologji brył. — Sur la topologie des solides.

Sekcja II Section.

*Hurewicz Witold: Przestrzenie ogólne, a przestrzenie Euklidesowe. — Les espaces abstraits et les espaces euclidiens.

Borsuk Karol: O pewnem continuum peanowskiem. — Sur un continu péanien.

Lidenbaum Adolf: Badania nad własnościami metrycznemi mnogości punktowych. — Etudes des propriétés métriques des ensembles de points.

Knaster Bronisław: O pewnem zagadnieniu z topologji. — Sur un problème de topologie.

Sierpiński Wacław: Uwagi o ciągach funkcyj. — Remarques sur les suites de fonctions.

Kempisty Stefan: O funkcjach kwaziciągłych. — Sur les fonction quasicontinues.

Ulam Stanisław: O izometrji w przestrzeniach wektorjalnych. — Sur l'isométrie dans les espaces vectioriels.

Sekcja III Section

*Tonelli Leonida: Sull'esistenza del minimo in problemi di Calcolo delle Varazioni.

*Vitali Giuseppe: Le varie derivazioni Covarianti nel Calcolo Assoluto considerate come casi particolari di una medesima operazione.

**Abramowicz Kazimierz: Sur la transformation des fonctions hyperfuchsiennes.

Hoborski Antoni: O układach zupełnych równań różniczkowych cząstkowych. — Sur les systèmes complets d'équations aux dérivées partielles.

**Rosenblatt Alfred: O istnieniu i jedyności całek równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych. — Sur l'existence et l'unicité des intégrales des équations aux dérivées partielles.

Ważewski Tadeusz: O jednotliwości całki układu równań różniczkowych zwyczajnych — Sur l'unicité des intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires.

Zaremba Stanisław Krystyn: O osobliwościach równania różniczkowego zwyczajnego rzędu pierwszego. — Sur les singularités d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

Sergescu Petre: Quelques propriétés des polynomes.

*Montel Paul: Remarque sur la communication de M. Sergescu.

Hoborski Antoni: O pochodnej funkcji złożonej. — Sur la dérivée d'une fonction composée.

Leja Franciszek: Z teorji szeregów wielomianów. — Sur la théorie des séries de polynômes entiers.

Steinhaus Hugo: O szeregach, których wyrazy zależą od przypadku. — Sur les séries, dont les termes dépendent du hasard.

**Jacob Mojżesz: O sprzężonych szeregach ortogonalnych. — Sur les séries orthogonales conjuguées.

Zygmund Antoni: O szeregach Legendre'a. — Sur les séries de Legendre.

Lichtenstein Leon: Uwagi o równaniach całkowych obciążonych. — Remarques sur les équation intégrales.

Kerner Michał: Całka funkcyj abstrakcyjnych i zastosowania. — L'intégrale des fonctions abstraites et application.

Steckel Samuel: O iteracjach funkcji kwadratowej. — Sur les itérations du trinôme du second degré.

Ślebodziński Władysław: O niezmiennikach całkowych równań Hamiltona. — Sur les invariants intégraux des équations de Hamilton.

Sekcja IV Section.

*Godeaux Lucien: Les quadriques de Tzitzeica et la théorie des surfaces.

*Hlavatý Václav: Invariants projectifs des courbes.

Hoborski Antoni: O krzywiźnie krzywej spodkowej. — Sur la courbure de la podaire.

Ślebodziński Władysław: Przekształcenia izomorficzne przestrzeni o koneksji afinalnej. — Les transformations isomorphes des espaces à connexion affine.

Gołąb Stanisław: O pojęciu linji geodezyjnych w różnych przestrzeniach. — Sur la notion de ligne géodésique dans les divers espaces.

Dniestrzański Roman: O pewnych własnościach krzywych owalnych. — Sur quelques propriétés des courbes ovales.

Sekcja V Section.

Grużewska Halina: O pewnej metodzie obliczania wartości placów w miastach. — Sur une méthode de valorisation des terrains à bâtir dans les villes.

**Babski Bohdan: Teorja matematyczna podatku. — Une théorie mathématique de l'impôt.

**Babski Bohdan: Ogólny wzór umarzania pożyczek długoterminowych. — Une formule générale pour l'amortisation des emprunts à long terme.

Neyman Jerzy: O zagadnieniu k prób. — Sur le problème de k essais.

Neyman Jerzy: O ostatnich wynikach w teorji wiarogodności hipotez statystycznych.

**Kampé de Feriet Joseph: Sur une classe de mouvements de revolution d'un fluide visqueux incompressible.

Bilimovitch Antoine: Sur le mouvement d'un systême materiel peu différent d'un corps solide.

**Rosenblatt Alfred: Zagadnienie turbulencji. — Le problème de la turbulence.

**Denizot Alfred: Kilka uwag dotyczących sposobu wyprowadzania równań Eulerowskich. — Quelques remarques sur la façon d'introduire des équations d'Euler.

**Babski Bohdan: Z dziedziny balistyki teoretycznej (całkowanie równań ruchu). — Sur un point de la ballistique théorique (intégration des équations du mouvement).

Neyman Jerzy: O statystycznej metodzie rozwiązania pewnego zagadnienia serologicznego. — Sur une méthode statistique servant à resoudre un problème de sérologie.

Neymann Jerzy: Działalność naukowa ś. p. Władysława Bortkiewicza. — L'activite scientifique du regretté Ladislas Bortkiewicz.

Wolibner Władysław: Twierdzenie o istnieniu w nieskończenie długim czasie regularnego ruchu płaskiego cieczy doskonałej. — Le théorème d'existence d'un mouvement plan régulier d'un liquide parfait dans un temps infiniment long.

Wolibner Władysław: Twierdzenie o istnieniu w nieskończenie długim czasie regularnego ruchu płaskiego nieściśliwej cieczy lepkiej. — Le théorème d'existence d'un mouvement plan régulier d'un liquide incompressible visqueux dans un temps infiniment long.

Kołodziejczyk Stanisław: Sprawdzanie hipotezy o stałości prawdopodobieństwa. — Vérification de l'hypothèse de la constance de la probabilité.

Sekcja VI Section.

Sergescu Petre: Sur les traits essentiels des mathématiques dans l'antiquité.

Birkenmajer Aleksander: Stanowisko historji matematyki w nauczaniu uniwersyteckiem. — La rôle de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement universitaire.

Rudnicki Juljusz: O nauczaniu arytmetyki liczb rzeczywistych w szkole średniej. — L'enseignement de l'arithmetique des nombres réels dans l'école secondaire.

Sieczka Franciszek: Próba nowej praktycznej metody nauczania matematyki pod kierunkiem nauczyciela. — Essai d'une neuvelle méthode pratique de l'enseignement des mathématiques sous la direction de l'instituteur.

Frycz Kazimierz: O próbie zastosowania zmodyfikowanego systemu Daltońskiego przy nauczaniu matematyki w wyższych klasach gimnazjalnych i seminarjach nauczycielskich. — Essai d'application du systèm Daltonien modifié dans l'enseignement des mathématiques dans les classes supérieures des Gymnases et des séminaires d'Instituteurs.

Steckel Samuel: O uczniowskich kółkach matematycznych w szkole średniej. — Les cercles mathémetiques des écoliers dans l'école secondaire.

Jantzen Kazimierz i Bielecki Bronisław: Niedomagania szkoły średniej w zakresie nauczania matematyki. — Les défauts de l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires.

Straszewicz Stefan: Teorja rzutu skośnego w szkole. — La théorie de la projection oblique à l'école.

Les conférences et les communications precédées d'un astérique ont été lues, d'après le manuscripts envoyés par les auteurs, par d'autres membres du Congrès. Les conferences et les communications précédées de deux astériques n'ont pas eu lieu.

VII. Réceptions et excursions.

La présentation des Congressistes a eu lieu dans une reunion organisée au Foyer des Etudiants dans la soirée du 23 septembre. Un banquet a eu lieu 25 au soir à l'hotel „St. Georges".

Le 23 septembre depuis midi jusqu'à 14 heures. le 24 entre midi et 13 heures et le 25 après 16 heures, les membres du Congrès ont visité la ville et l'Université, conduits par M. F. Ruszczyc, Professeur à la faculté des Beaux-Arts de l'Université Stefan Batory. En outre, le premier jour du Congrès, ses membres, après avoir vu la ville, se sont rendus à l'Observatoire de l'Université, où ils ont été reçus par MM. les Professeurs Ladislas Dziewulski et Casimir Jantzen. Ils ont aussi visité l'exposition des oeuvres de mathématiques, éditées par l'Université de Wilno avant sa fermeture en 1832 et des anciens instruments astronomiques de l'Observatoire de l'Université où MM. le Dr. A. Łysakowski directeur de la Bibliothèque de l'Université, le Dr. A. Birkenmajer et le Dr. S. Lisowski leur ont fourni des explications. Le 25 septembre, les Congressistes se sont rendus en autobus à Troki où ils ont visité le lac, les ruines du château, l'église et la kienesse caraïme, où ils ont été reçus par le hazan, M. S. Firkowicz.

VIII. Séance de clôture.

La séance de clôture du Congrès a eu lieu le 22 septembre à 18 heures sous la présidence de M. le Professeur S. Dickstein dans l'Aula de l'Université Stefan Batory. M. le Professeur W. Sierpiński, comme président du Premier Congrès des Mathématiciens Polonais à Lwów en 1927, a rendu compte de la réalisation des résolutions votées par ce Congrès, en faisant savoir que tous les voeux émis par le Congrès précédent ont été réalisés.

Ensuite le Congrès a admis à l'unanimité les résolutions suivantes:

1. En ce qui concerne le Congrès suivant:

Le deuxième Congrès des Mathématiciens Polonais décide de convoquer un troisième Congrès des Mathématiciens Polonais en 1935 en un lieu que désignera la Société Polonaise de Mathématique, qui s'occupera de l'organisation de ce Congrès.

2. En ce qui concerne la publication des résultats des recherches scientifiques:

Le deuxieme Congrès des Mathématiciens Polonais considère qu'aucune raison d'économie ne peut justifier la réduction des fonds destinés à la publication des résultats de l'activité scientifique polonaise. Les frais d'impression des résultats des recherches scientifiques sont tellement minimes par rapport à l'effort nécessaire pour les obtenir et à l'immense travail que l'on y met, et le dommage résultant du retard dans la publication des découvertes scientifiques est tellement grand et tellement évident, que la diminution des moyens consacrés à ce but serait un grand dommage infligé à la civilisation polonaise.

3. En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires:

Le deuxième Congrès des Mathématiciens Polonais considère qu'il serait utile, dans les programmes d'enseignement des mathématiques des écoles secondaires: a) de restituer dans les lycées du type néoclassique le nombre de leçons de mathématiques de 1927; b) de diminuer le nombre des problèmes à discussion.

4. En ce qui concerne la formation des professeurs de mathématiques dans les établissements secondaires:

Le deuxième Congrès des Mathématiciens Polonais considère comme désirable d'introduire dans les programmes d'examens pour les professeurs d'enseignement secondaire: les mathématiques élémentaires considérées d'un point de vue supérieur et des éléments d'histoire des mathématiques.

5. En ce qui concerne les professeurs de mathématiques exécutant des travaux de recherches:

Le deuxième Congrès des Mathématiciens Polonais renouvelle la résolution du premier Congrès relative aux jeunes travailleurs de la Science et constate avec regret que, malgré la circulaire du Ministère des Cultes et de l'Instruction publique, les directeurs des écoles secondaire ne prennent pas suffisamment soin des professeurs exécutant des travaux de recherches.

6. En ce qui concerne la publication de la correspondance de Jean Śniadecki:

Le deuxième Congrès des Mathématiciens Polonais appuie chaleureusement l'initative des professeurs de l'Université Stefan Batory concernant la publication de la correspondance de Jean Śniadecki du temps de son séjour à Wilno.

Après le vote de ces résolutions, ont pris la parole MM. les professeurs A. Denjoy, P. Sergescu et S. Dickstein, Président du Congrès, après quoi le Congrès a été déclaré comme clos.

IX. Liste des Membres du Congrès.

Abramowicz Kazimierz, Dr. Doc. Uniw. Zast. Prof. Uniw., Poznań.
Abramowiczówna Izabela, Prof. gim., Poznań.
Banach Stefan, Dr. Prof. Uniw., Lwów.

Babski Bohdan, Prof. gim., Laski.
Bielecki Bronisław, Instruktor Ministerjalny Matematyki, Warszawa.
Bielska Kamila, Prof. gim., Wilno.
Biernacki Mieczysław, Dr. Prof. Uniw., Poznań.
Bilimovitch Antoine, Dr. Prof. Uniw., Belgrad.
Bilimovitch Marie.
Birkenmajer Aleksander, Dr. Zast. Prof., Kraków.
Bogucki Józef, Prof. gim., Lublin.
Borkowska Janina, Prof. gim., Warszawa.
Borsuk Karol, Dr., Warszawa.
Braun Stefanja, Mgr., Warszawa.
Broniec Karol, Prof. gim., Tarnowskie Góry.
Bronowska Helena, Prof. gim., Zwierz.
Charuba Tadeusz, Prof. gim., Łódź.
Chrapko Mieczysław, Prof. gim., Wilno.
Chromiński Henryk, Prof. gim., Siedlce.
Czajkowski Leon, Prof. gim., Bielsk Podlaski.
Cielecki Janusz, Kand. nauk mat., Warszawa.
Czernik Tadeusz, Mgr., Wilno.
Czeżowski Tadeusz, Dr. Prof. Uniw., Wilno.
Danilewicz Aleksander, Prof. gim. Nowogródek.
Dąbkowski Edward, Inż.
Denizot Alfred, Dr. Prof. Uniw., Poznań.
Denjoy Arnaud, Dr. Prof. Uniw., Paryż.
Denjoy Thérèse, Paryż.
Dickstein Samuel, Dr. Prof. Uniw., Warszawa.
Dniestrzański Roman Mgr., Kraków.
Dowgird Michał, Instruktor Ministerjalny, Warszawa.
Dziewulski Wacław, Dr. Prof. Uniw., Wilno.
Dziewulski Władysław, Dr. Prof. Uniw., Wilno.
Dziewulska Jadwiga, Wilno.
Frycz Kazimierz, Dr. Inż., Warszawa.
Gierżodówna Anna, Mgr., Wilno.
Ginzburg Wolf, Stud. mat., Marsylja.
Gołąb Stanisław, Dr., Kraków.
Godeaux Lucien, Dr. Prof. Uniw., Leodjum.
Grabowska Zofja, Prof. gim., Łódź.
Grużewski Aleksander, Dr., Warszawa.
Grużewska Halina, Dr., Warszawa.

Hampel Roman, Mgr., Kraków.
Helman Wiktor, Prof. gim., Lublin.
Herfurtowa Zofja, Prof. gim. Warszawa.
Herstalówna Wanda, Prof. gim., Kraków.
Hlavatý Václav, Dr. Prof. Uniw., Praga.
Hoborski Antoni. Dr. Prof. Akad. Górn., Prof. tyt. Uniw., Kraków.
Hoborska Apolonja, Kraków.
Huber Maksymiljan Tytus, Dr. Inż. Prof. Polit., Warszawa.
Huberowa Janina, Warszawa.
Hurewicz Witold. Dr. Doc. Uniw., Amsterdam.
Ihnatowicz Bolesław, Prof. gim., Warszawa.
Iwanowska Wilhelmina, Mgr., Wilno.
Izdebski Stanisław, Wizytator szkół.
Janczewska Felicja, Prof. gim., Grudziądz.
Jantzen Kazimierz, Dr. Prof. Uniw., Wilno.
Jantzenowa Janina, Wilno.
Jaśkowski Stanisław, Abs. Uniw., Warszawa.
Kaczmarz Stefan, Dr. Doc. Uniw., Lwów.
Kampé de Fériet Joseph, Dr. Prof. Uniw., Lille.
Kempisty Stefan, Dr. Prof. Uniw., Wilno.
Kempistowa Eugenja, Wilno.
Kerner Michał, Dr., Warszawa.
Kędzierski Marjan, Prof, gim., Grodno.
Kleinertówna Janina, Prof. gim., Marjówka Opoczyńska.
Kłonicki Leon, Mgr., Wilno.
Knaster Bronisław, Dr. Doc. Uniw., Warszawa.
Knasterowa Marja, Warszawa.
Kołodziejczyk Stanisław, Mgr., Warszawa.
Kon Bogusław Hilary, Dr., Tomaszów Mazowiecki.
Korcik Antoni, ks. Asystent Uniw., Wilno.
Kosiński Konstanty, Prof. gim., Białystok.
Krassowski Zenon, Prof. gim., Białystok.
Krampnerówna Irena, Dr., Lwów.
Krygowski Zdzisław, Dr. Prof. Uniw., Poznań.
Krukowski Józef, Prof. Szkoły Techn., Wilno.
Krzyżański Mirosław, Mgr., Wilno.
Krzyżanowska Helena, Prof. gim., Płock.
Krzyżanowski Feliks, Prof. gim., Płock.
Krulu Hirsz, Mgr. Grodno.

Kuczkowski Jan, Prof. gim., Suwałki.
Kuratowski Kazimierz, Dr. Prof. Polit., Lwów.
Leja Franciszek, Dr. Prof. Polit., Warszawa.
Lejowa Janina, Warszawa.
Lichtenstein Leon, Dr. Prof. Uniw., Lipsk.
Lindenbaum Adolf, Dr., Warszawa.
Lejneeks Edgars, Dr. Prof. Uniw., Ryga.
Łoś Janusz, Wilno.
Łuczyńska Janina, Mgr., Wilno.
Makarewicz Józef, Prof. gim., Lublin.
Matusewicz Ludmiła, Dr., Warszawa.
Mazurkiewicz Stefan, Dr. Prof. Uniw., Warszawa.
Merlisówna Fanny, Mgr., Wilno.
Milecka Helena, Warszawa.
Moroń Zbigniew, Prof. gim.
Neymann Jerzy, Dr. Doc. Uniw., Warszawa.
Niedźwiecki Zenon, Prof. gim., Nieśwież.
Nikołajczuk Aleksander, Prof. gim., Łódź.
Odlanicka Jadwiga, Prof. gim., Warszawa.
Olszewska Marja, Prof. gim., Wilno.
Orlicki Mikołaj, Kand. nauk. mat., Katowice.
Osiński Michał, Prof. gim., Łódź.
Ostrejko Jan, Ks. Mgr., Wilno.
Otto Edward, Lwów.
Parnesówna Klara, Lwów.
Paszkiewicz Stanisław, Dyr. gim., Wilno.
Patkowski Józef, Dr. Prof. Uniw.. Wilno.
Pieślak Wanda Jadwiga, Warszawa.
Pietkiewiczówna Amelja, Prof. gim., Częstochowa.
Podwójska Józefa, Prof. gim., Nowe-Miasto.
Prokoff Józef, Prof. gim., Warszawa.
Rägo Gerhard, Dr. Prof. Uniw., Dorpat.
Rägo Natalie, Mgr. chem., Dorpat.
Rosenblatt Alfred, Dr. Prof. Uniw., Kraków.
Rozental Stefan, Dr., Lipsk.
Rudnicki Juljusz, Dr. Prof. Uniw., Wilno.
Rusiecki Antoni Marjan, Instruktor Minister. Matemat. Warszawa.
Rybarczyk Aleksander, Prof. sem., Białystok.
Rybarkiewiczówna Kamila, Prof. gim., Białystok.

Rynkiewiczówna Marja, Częstochowa.
Sergescu Petre, Dr. Prof. Uniw., Cluj.
Sergescu-Kasterska Marja, Cluj.
Sieczka Franciszek, Ks. Prof. sem., Płock.
Sieradzka Adela, Prof. sem., Kościerzyna.
Sejut Zygmunt, Prof. gimn., Nowogródek.
Sierpiński Wacław, Dr. Prof. Uniw., Warszawa.
Ślebodziński Władysław, Dr., Poznań.
Śliwińska Helena, Prof. gim., Grudziądz.
Sokulska Irena, Prof. gim., Kraków.
Sopoćko Eugenjusz, Dyr. gim., Warszawa.
Staniewicz Wiktor, Prof. Uniw., Wilno.
Steckel Samuel, Dr. Prof. gim. Białystok.
Steinhaus Hugo, Dr. Prof. Uniw., Lwów.
Stolicki Chaim, Mgr., Wilno.
Straszewicz Stefan, Dr. Prof. Polit., Warszawa.
Szyszknis Marceli, Dyr. gim., Wilno.
Tarski Alfred, Dr. Doc. Uniw., Warszawa.
Tonelli Leonida, Dr. Prof. Uniw., Piza.
Turkowska Jadwiga, Prof gim., Wilno.
Ulam Stanisław, Dr., Lwów.
Vitali Giuseppe, Dr. Prof. Uniw., Bologna.
Wałejko Władysław, Prof. sem., Wilno.
Warhaftman Stanisław, Red. „Mathesis Polskiej“, Warszawa.
Ważewski Tadeusz, Dr. Doc. Kraków.
Weinlesówna Sala, Dr., Lwów.
Wegner Antoni, Poznań.
Weyssenhoff Jan, Dr. Prof. Uniw., Wilno.
Wolibner Witold, Dr., Warszawa.
Wiśniewski Kazimierz, Prof. gim., Łódź.
Zapaśnik Bronisław, Dyr. gim., Wilno.
Zapaśnikówna Anna, Prof. gim., Wilno.
Zaremba Stanisław, Dr. Prof. Uniw., Kraków.
Zaremba Stanisław Krystyn, Dr. Asystent Uniw., Wilno.
Zatheyówna Bronisława, Prof. gim., Poznań.
Zawadzka Janina, Mgr., Warszawa.
Zamejówna Klara, Prof. gim., Wilno.
Zwinogrodzki Józef, Prof. gim., Kobryń.
Zygmund Antoni, Dr. Prof. Uniw., Wilno.

Cette liste ne contient pas les noms des 41 étudiants et étudiantes de l'Université Stefan Batory, qui ont contribué à l'organisation du Congrès et jouissaient des droits de membres du Congrès.

État
de la Société Polonaise de Mathématique à la fin de l'année 1930.

Président: M. K. Bartel.
Vice-Présidents: MM. S. Zaremba et S. Mazurkiewicz.
Secrétaire: M. T. Ważewski.
Vice-Secrétaire: MM. A. Turowicz et S. Turski.
Trésorier: M. S. Gołąb.
Autres Membres du Bureau: MM. A. Hoborski, W. Wilkosz et A. Rosenblatt.
Commission de Contrôle: M^{me} Wilkosz et MM. Chwistek et Nikodym.
Il existe quatre sections de la Société, l'une à Lwów, présidée par M. H. Steinhaus la seconde à Varsovie, présidée par M. S. Mazurkiewicz, la troisième à Poznań, presidée par M. Z. Krygowski, la quatrième à Wilno, présidée par M. W. Staniewicz.

Liste de Membres de la Société.

Malgré le soin avec lequel cette liste a été établie, certaines fautes ont pu s'y glisser; MM. les Membres sont priés instamment de vouloir bien envoyer les rectifications au Secrétaire (Cracovie, rue Gołębia 20, Institut de Mathématique) et de le prévenir de tous les changements d'adresse.

Abrévations: L — membre de la Section de Lwów, Wa — membre de la Section de Varsovie, P — membre de la Section de Poznań, Wl — membre de la Section de Wilno. Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels.

Abramowicz Kazimierz Doc. Dr. (P), Poznań, ul. Wyspiańskiego 8.
Aronszajn Natan Dr. (Wa), Warszawa, ul. Nowolipki 43, m. 7.
Auerbach Herman Dr. (L), Lwów, ul. Szaszkiewicza 1.
Banach Stefan Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Supińskiego 11.

Banachiewicz Tadeusz Prof. Dr., Kraków, Obserwatorjum Astronomiczne, ul. Kopernika 27.
Baran Jan, Toruń, Gimnazjum Męskie, Małe Garbary.
Bartel Kazimierz Prof. Dr. (L), Lwów, Politechnika.
Bary Nina Prof. Dr. (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Pokrowka 29. kw. 22.
Bessaga Mieczysław Inż., Lwów, Aleja Foch'a III, Dom Kolejowy.
Białobrzeski Czesław Prof., Warszawa, ul. Hoża 69.
Bielecki Adam Mr., Kraków, Kazimierza Wielkiego 98.
Biernacki Mieczysław Prof. Dr. (P), Poznań, Uniwersytet, Seminarjum Matematyczne, Collegium Majus, Zamek, Sala Nr. 6.
Birnbaum Zygmunt Dr. (L), Lwów, ul. św. Anny 1.
Blumenfeld Izydor Inż. Dr. (L), Lwów, ul. Kąpielna 6.
Borsuk Karol Dr. (Wa), Warszawa, Adama Pługa 6, m. 2.
Bouligand Georges Prof. Dr., Poitiers (Vienne, France), 50, rue Renaudot.
Böttcher Łucjan Doc. Dr. (L), Lwów, ul. Sadowa 4.
Brablec Franciszek, Kraków, ul. Studencka 4.
Braunówna Stefanja Mr. (Wa), Warszawa, Marszałkowska 91.
Burstin Celestyn Dr. (L), Institut mathématique de l'Universite de Mińsk S. S. I. R.
Cartan Elie Prof. Dr., Le Chesnay (Seine-et-Oise, France), 27, Avenue de Montespan.
Chromiński Antoni (Wa), Warszawa, Politechnika, Wydział Inżynierji Lądowej.
Chwistek Leon Prof. Dr. (L), Lwów, Uniwersytet.
Cukierman Jakób Dr. (Wl), Wilno, ul. Mickiewicza 22, m. 30.
Cwojdziński Kazimierz Dr. (P), Poznań, ul. Szamarzewskiego 13.
Czarnecka Jadwiga (P), Przybysław, poczta Żerków (województwo Poznańskie).
Delsarte Jean, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences 35, rue Saint-Michel Nancy (Meurthe-et-Moselle) France.
Dickstein Samuel Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 117.
Długowski Gerhard Pułk., Rembertów, Centrala badań poligonalnych.
Dollon Jean, Prof. de Mathématiques spéciales Lycée Poincaré, Nancy, France.
Durand Georges, Bourges (Cher) 3, rue Pasteur.
Dziewulski Wacław Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 13.
Dziewulski Władysław Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 15.

Dziwiński Placyd Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Kleinowska 3.
Fijoł Kazimierz, Kraków-Podgórze, ul. Józefińska 31.
Flamant Paul Prof. Dr., Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme, France) 22 rue Morel-Ladeuil.
Garcia Godofredo Prof. Ing. (Wa), Lima (Peru) Apartodo 1979.
Glass Stefan Dr. (Wa), Warszawa, ul. Saska, dom J. Glassa.
Godeaux Lucien Prof. Dr., Liège (Belgique), 75 rue Frédéric Nyst.
Gołąb Stanisław Doc. Dr., Kraków, Akademja Górnicza.
Grabowski Lucjan Prof. Dr. (L), Lwów, Politechnika.
Greniewski Henryk Dr. (Wa), Warszawa, ul. Opaczewska 54 m. 12.
Gruder Henryk Dr. (L), Lwów, ul. Kopernika 14.
Grużewska Halina Dr. (Wa), Warszawa, ul. Ustronie 2, m. 62 (Żolibórz).
Grużewski Aleksander Dr. (Wa), Warszawa, ul. Ustronie 2. m. 62 (Żoliborz).
Härlen Hasso Dr., Dordrecht (Holland), Kon. Wilhelminastraat 34.
Hoborski Antoni Prof. Dr., Kraków, ul. Smoleńska 26.
Hommé Marja (L), Lwów, ul. Łyczakowska 151.
Hossiasson Janina Dr. (Wa), Warszawa, ul. Trębacka 6 m. 5.
Huber Maksymiljan Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 75, dom A.
Hurewicz Witold Doc. Dr. (Wa), Amsterdam (Hollande), Université.
Jacob Mojżesz Dr. (L), Wien II (Autriche), Wolfgang-Schmälzlgasse 10/16.
Janet Maurice, Prof. Dr. Caen (Calvados) (France), 7, rue de la Délivrande.
Janik Wincenty, Kraków, ul. Studencka, Gimnazjum.
Jantzen Kazimierz Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 9 m. 3.
Kaczmarz Stefan Doc. Dr. (L), Lwów, Politechnika.
Kalandyk Stanisław Dr. (P), Poznań, ul. Słowackiego 29.
Kalicun-Chodowicki Bazyli Dr. (L), Lwów, ul. Kubali 4.
Kampé de Fériet Joseph Prof. Dr., Lille (France), S. P. 16, rue des Jardins.
Kempisty Stefan Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 24 m. 5.
Kerner Michał Dr. (Wa), Warszawa, ul. Pańska 20 m. 17.
Klawekówna Stefania (P), Poznań, ul. Młyńska 11.
Kline J. R. Prof. Dr. (Wa), Philadelphia (U. S. A.), University of Pensylvania.
Knaster Bronisław Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Narbuta 9 m. 3.

Kobrzyński Zygmunt Dr., (Wa), Warszawa, Pruszków, ul. Graniczna 4.
Kołodziejczyk Stanisław Mgr. (Wa), Warszawa, Szkoła Główna Gosp. Wiejskiego, Zakład Statystyki, Miodowa 23.
Koźniewski Andrzej Mgr. (Wa), Warszawa. Hoża 61.
Krygowski Zdzisław Prof. Dr. (P), Poznań, ul. Marszałka Foch'a 72, II p.
Kryzan Marjan Dr. (P), Poznań, ul. Krasińskiego 9.
Kuratowski Kazimierz Prof. Dr. (Wa), Lwów, ul. Nabielaka 12 m. 5.
Kwietniewski Stefan Dr. (Wa), Warszawa, ul. Oczki 3, Seminarjum Matematyczne.
Lainé Edward Prof. Dr., Angers (France), 3 rue de Rabelais.
Leja Franciszek Prof. Dr. (Wa), Warszawa, Koszykowa 75 m. 16.
Leśniewski Stanisław Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Brzozowa 12.
Leśniodorski Gustaw, Kraków, ul. Sobieskiego 10.
Levi-Civita Tullio Prof. Dr., Roma 25 (Italie), via Sardegna 50.
Lichtenberg Władysław (L), Lwów, Wulecka Droga 78.
Lichtenstein Leon Prof. Dr. (Wa), Leipzig (Allemagne), Grossgörschenstrasse 3.
Lindenbaum Adolf Dr. (Wa), Warszawa, ul. Złota 45 m. 4.
Loria Stanisław Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Sykstuska 37.
Łomnicki Antoni Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Kosynierska 18.
Łomnicki Zbigniew (L), Lwów, ul. Nabielaka 19.
Łukasiewicz Jan Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Brzozowa 12.
Łuzin Mikołaj Prof. Dr (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Arbat 25/8.
Maksymowicz Adam Dr. (L), Lwów, ul. Batorego 5.
Malecki Stanisław, Dębica, Gimnazjum.
Mandelbrojt S., Prof. Dr., Clermond-Ferrand, Université.
Marconi Andrzej (P), Poznań, ul. Kosińskiego 26.
Mazur Stanisław Dr. (L), Lwów, Kętrzyńskiego, 17.
Mazurkiewicz Stefan Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Oboźna 11.
Menger Karl Prof. Dr. (Wa), Wien IX (Autriche), Fruchthallergasse 2.
Meyer Doc. Inż. Dr. (L), Wien (Autriche), Université.
Mieńszow Dymitr Prof. Dr. (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Dievitchie Pole, Bojeninowski per. 5 kw. 14.
Moore R. L. Prof. Dr. (Wa), Austin (U. S. A.), University of Texas.
Moroń Władysław, Katowice.
Sir Muir Thomas, F. R. S. etc., Rondebosch (South Africa).
Napadiewiczówna Zofja (L), Lwów, ul. Bonifratrów 8.

Spława-Neyman Jerzy Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Kopernika 11, m. 6.
Nikliborc Władysław Doc. Dr. (L), Lwów, ul. Listopada 44 a.
Nikodym Otton Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 53, m. 35.
Nikodymowa Stanisława Dr. (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 53, m. 35.
Ohrenstein Szymon, Drohobycz. I. pryw. Gimnazjum żeńskie.
Orlicz Władysław Dr. (L), Lwów, ul. Teatyńska 27.
Orłowski Józef (P), Poznań, ul. Matejki 44.
Pankalla Jan Inż. (P), Poznań, ul. Ratajczaka 12.
Pareński Aleksander Dr. (L), Lwów, ul. Szeptyckich 10.
Patkowski Józef Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Nowogrodzka 22.
Pearson Egon Sharpe Dr., London W. C. 1, University College, Galton Laboratory.
Pearson Karl Prof. Dr., London W. C. 1, University College.
Pęczalski Tadeusz Prof. Dr. (P), Poznań, ul. Krasińskiego 14.
Plamitzer Antoni Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Gipsowa 32.
Popruženko Jerzy Dr. (Wa), Warszawa, ul. Szopena 6, m. 10.
Prasad Gonesh Prof. Dr. (Wa), Calcutta (East India) Samavaya Manrions 2 Corporation str.
Przeborski Antoni Prof. Dr. (Wa), Warszawa, Nowy Zjazd 5.
Przygodzki Józef Inż. (P), Poznań, ul. Rybaki, Szkoła Budowlana.
Rajchman Aleksander Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Zajęcza 7 m. 9.
Rosenblatt Alfred Prof. Dr., Kraków, ul. Krowoderska 47.
Rozental Stefan Dr., Łódź, ul. Nawrot 4.
Rozmus Antoni, Piotrków, Gimnazjum państwowe.
Rudnicki Juljusz Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 22.
Ruziewicz Stanisław Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Supińskiego 11.
Sabatowska Walerja (L), Lwów, ul. Zielona, Gimn. Strzałkowskiej.
Saks Stanisław Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Krasińskiego 18, m. 129. (Żolibórz).
Schauder Juljusz Doc. Dr. (L), Lwów, ul. Leśna 7.
Schreier Józef (L), Drohobycz. Bednarska 8.
Sedlak Stefan, Kraków, ul. Wawrzyńca 30.
Seipeltówna Lidja Dr. (P), Poznań, ul. Rzepeckiego 27.
Sergesco Pierre Prof. Dr., Cluj (Roumanie), Seminar matematic universital.
Sieczka Franciszek Ks. Dr. (Wa), Płock, Seminarjum Duchowne.
Sierpiński Wacław Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 55.

Smoliński Kazimierz (P), Poznań, ul. Żupańskiego 16.
Smoluchowska Helena (P), Poznań, ul. Chełmońskiego 8.
Smosarski Władysław (P), Poznań, Uniwersytet.
Staniewicz Wiktor Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Uniwersytecka 7.
Stankiewicz Ksawery Inż., Kraków, ul. Długa 50.
Starosolska-Szczepanowska Zofja (L), Chełmno, Korpus Kadetów Nr. 2.
Steckel Samuel Dr. (Wa), Białystok, Gimnazjum.
Steinhaus Hugo Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Kadecka 14.
Stożek Włodzimierz Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Ujejskiego 1.
Straszewicz Stefan Prof. Dr. (Wa), Warszawa-Mokotów, ul. Poznańska 12.
Szczepanowski Karol Mjr. (L), Chełmno, Korpus Kadetów Nr. 2.
Szpilrajn Edward Dr., (Wa), Warszawa, Al. Ujazdowska 32, m. 9.
Szymański Piotr Dr. (Wa), Warszawa, Politechnika, Wydz. Mechaniczny.
Ślebodziński Władysław Dr. (P), Poznań, ul. Głogowska 51.
Tarski Alfred Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Sułkowskiego 2, m. 5. Żoliborz.
Titz Henryk Inż., Kraków, ul. Św. Tomasza 27.
Turowicz Andrzej Mgr., Kraków, ul. Sobieskiego 7.
Turski Stanisław Mgr., Kraków, ul. Ks. Józefa 29.
Ulam Stanisław Dr. (L), Lwów, ul. Kołłątaja 12.
Urbański Włodzimierz, Kraków, ul. Czysta 19.
Vetulani Kazimierz Inż., Kraków, ul. Smoleńska 14.
Walfisz Arnold Doc. Dr. (Wa), Warszawa, Radość, Jasna 11.
Waraszkiewicz Zenon Mgr. (Wa), ul. Koszykowa 69 m. 10.
Ważewski Tadeusz Doc. Dr., Kraków, Uniwersytet.
Weigel Kasper Prof. Dr. (L), Lwów, Politechnika.
Weinlösówna Sala Dr. (L), Lwów, ul. Klonowicza 18.
Weyssenhoff Jan Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Królewska 4.
Węgrzynowicz Leopold, Kraków, ul. Krowoderska 74.
Węgrzynowicz Marjan (P), Poznań, ul. Łazarska 2a.
Whyburn G. T. Dr., Austin (Texas) U. S. A.
Wilk Antoni Dr., Kraków, ul. Wybickiego 4.
Wilkosz Witold Prof. Dr., Kraków, ul. Zyblikiewicza 5/7.
Wilkoszowa Irena, Kraków, ul. Zyblikiewicza 5/7.
Wundheiler Aleksander Mrg. (Wa), Warszawa, ul. Pawia 39.
Zakrocki Stanisław, Kraków, ul. Smoleńska 21.

Zalcwasser Zygmunt Dr. (Wa), Warszawa, ul. Leszno 51.
Zarankiewicz Kazimierz Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Filtrowa 71.
Zaremba Stanisław Prof. Dr. , Kraków, ul. Żytnia 6.
Zaremba Stanisław Krystyn Dr. (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 11.
Zarycki Miron (L), Lwów, ul. Dwernickiego 32 a.
Zawirski Zygmunt Prof. Dr., Poznań, Uniwersytet.
Zermelo Ernst Prof. Dr., Freiburg i/Br. Karlstrasse 60, Allemagne.
Zygmund Antoni Prof. Dr. (Wa), Wilno, ul. Wielka 24.
Żórawski Kazimierz Prof. Dr. (Wa), Warszawa, Nowy-Zjazd 5.
Żyliński Eustachy Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Supińskiego 11.

Membres décédés.

Ernst. Marcin Prof. Dr.
Vitali Giuseppe Prof. Dr.

Membres dont les adresses manquent.

Babski Bohdan.
Bogucki Władysław.
Chmiel Juljan Dr.
Dehryng Bohdan Dr.
Kaszycki Ludwik Inż.
Majewski Władysław (L).
Ostrzeniewski Ludwik.
Sobaczek Jan.
Stamm Edward Dr.
Włodarski Franciszek Dr.

Liste des publications périodiques avec lesquelles la Société polonaise de Mathématique échange ses Annales.

1. Acta litterarum et scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae.
2. Abhandlungen des Mathematischen Seminars der Universität in Hamburg.

3. Bulletin de la Société Mathématique de France et Comptes Rendus des Séances.
4. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society.
5. Annales scientifiques de l'Université de Jassy.
6. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.
7. Monatshefte für Mathematik und Physik.
8. Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg.
9. Seminario Mathematico della Faculta di Science della R. Università di Roma.
10. Bulletin Scientifique de l'Ecole Polytechnique de Temisvara.
11. Contributions al Estudis de las Ciencias Fisicas y Matematicas (La Plata, Argentina).
12. Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk.
13. Fundamenta Mathematicae.
14. Prace Matematyczno-Fizyczne.
15. Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich.
16. Annals of Mathematics.
17. Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse.
18. Transactions of the American Mathematical Society.
19. Journal de l'Ecole Polytechnique.
20. Revue semestrielle des publications math.
21. Wiskundige apgaren met de Oplasingen.
22. Archief voor Wiskunde.
23. Leningradzkie Tow. Fizyczno-Matematyczne.
24. Journal of the Faculty of Science, Imperial University of Tokyo.
25. Universitätsbibliothek, Basel.
26. Academia Română, Bucuresti.
27. Société Scientifique de Bruxelles.
28. Bayerische Akademie der Wissenschaften, München.
29. Uniwersytet hebrajski w Jerozolimie.
30. Edinburgh Mathematical Society.
31. Société Hollandaise des Sciences.
32. Société Mathématique de Kharkow.
33. La Sociedad Matematica Espanola, Madrid.
34. Koninklijke Akademia van Wetenschappen, Amsterdam.
35. Mathematische Gesellschaft in Hamburg.
36. Unterrichtsblätter für Mathematik u. Naturwissenschaften.
37. London Mathematical Society.

38. Real Academia de Ciencias Exactas, Madrid.
39. Philosophical Society, Cambridge.
40. Norsk Matematisk Forening, Oslo.
41. Académie Royale des Sciences, Bruxelles.
42. Mathematisches Seminar der Universität, Giessen.
43. Societas Scientiarum Fennice, Helsingfors.
44. Matematisk Tidsskrift, Copenhaghe.
45. Société Physico-Mathématique de Kazan.
46. Heidelberger Akademie der Wissenschaften.
47. The Tôhoku Mathematical Journal, Sendai.
48. Naturforscher Gesellschaft bei der Universität Dorpat.
49. Sächsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig.
50. The Mathematical Gazette.
51. The Benares Mathematical Society.
52. Smithsonian Institution, Waschington.
53. Royal Society of Edinburgh.
54. Akademja Górnicza, Kraków.
55. Societatea Romăna de Stiinte.
56. Société Royale des Sciences de Liège.
57. Recueil Mathématique de la Société Math. de Moscou.
58. Journal of Mathematics and Physics, Massachusetts Institute of Technology.
59. Bolletin del Seminario Mathemático Argentino, Buenos Aires.
60. Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux.
61. Studia Mathematica, Lwów.
62. Časopis pro pěstováni Matematiky a Physiky. Praha.
63. Matematica, Cluj.
64. Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano.
65. Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova
66. Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique de Bucarest.
67. Prace geofizyczne.
68. Annali della R. Scuola Normale Superiora di Pisa.
69. Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze della R. Università di Cogliari.
70. Statistica (Warszawa).
71. Publications Mathématiqua de l'université de Belgrade.

Ouvrages reçus.

Kryloff N. *Les méthodes de solution approchée des problèmes de la Physique mathématique* (Mémorial des Sciences mathém. XLIX).

Saltykoff N. *Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Mémorial des Sciences mathém. L).

Kogbetliantz E. *Sommation des séries et intégrales divergentes par les moyens arithmétiques et typiques* (Mémorial d. Sc. Math. LI).

Hostinsky B. *Méthode générale du Calcul des Probabilités* (Mémorial d. Sc. math. LII).

Zervos P. *Le problème de Monge* (Mémorial d. Sc. math. LIII).

Montel P. *Leçons sur les fonctions entières.* Paris, chez Gauthier-Villars et Cie.

Rocard Y. *L'hydrodynamique et la théorie cinetique des gaz.* Paris, chez Gauthier-Villars et Cie.

Rychlik K. *Spisy Bernarda Bolzana*, t. 2. Praha.

Lichtenstein L. *Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen.*

Cartan E. Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. *Leçons sur la Géométrie projective complexe.* VII + 325, Paris 1931, chez Gauthier-Villars et Cie.