ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME XIII

ANNÉE 1934

RÉDACTEUR: STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE, RUE ŻYTNIA, 6.

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LES ÉCHANGES ET L'ADMINISTRATION DES ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE, S'ADRESSER AU SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ, 20, RUE GOŁĘBIA, CRACOVIE (POLOGNE).

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW 1935

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME XIII

ANNÉE 1934

RÉDACTEUR: STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE, RUE ŻYTNIA, 6.

POUR TOUT CE QUI CONCERNE LES ÉCHANGES ET L'ADMINISTRATION DES ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE, S'ADRESSER AU SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ, 20, RUE GOŁĘBIA, CRACOVIE (POLOGNE).

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW 1935

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

Les publications de la Société polonaise de mathématique ont paru pour la première fois en 1921 sous le titre de „Rozprawy Polskiego Towarzystwa matematycznego“ en un volume comprenant aussi bien des mémoires de langue polonaise que des mémoires rédigés en d'autres langues. Depuis 1922 l'organe de la Société porte le titre d'Annales de la Société polonaise de mathématique; les travaux de langue polonaise paraissent dans un Supplément, le corps du volume étant réservé aux travaux de langues française, anglaise, italienne et allemande.

Table des matières.

Sur le domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre [1])

par

T. Ważewski

Kraków.

La méthode classique établit l'existence de la solution du problème de Cauchy, relatif à l'équation (1), au voisinage du point envisagé. Cette méthode résoud donc le *problème local* d'existence. Un *problème de caractère intégral* a été, à ma connaissance, envisagé pour la première fois par M. Kamke dans le cas $n = 1$ [2]). Nous traiterons le cas général en nous appuyant sur une autre méthode analogue à celle que nous avons construite auparavant à l'occasion de l'examen du problème analogue relatif à l'équation linéaire [3]). Nous ramènerons l'appréciation du domaine d'existence à l'appréciation de la plus petite racine positive d'une équation numérique. Voici notre théorème

Théorème. Considérons l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y_1, \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right) \tag{1}$$

ou, sous forme abrégée, l'équation

$$p = f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n). \tag{1 bis}$$

Supposons que la fonction f possède des dérivées partielles (relatives à toutes les variables) continues du premier et du second ordre dans l'ensemble

$$|x| < a \leqslant +\infty; \quad y_\nu,\ z,\ q_\nu \quad \text{quelconques.} \tag{2}$$

---

[1]) Présenté au cours du Congrès des Naturalistes et Médecins (Poznań, Septembre, 1933).

[2]) E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen. p. 352, Satz 1.

[3]) T. Ważewski, Sur le domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre linéaire (Annales de la Soc. Polon. de Math. T. XII. p. 6).

Nous supposons que les dérivées relatives aux variables y_ν, z, q_ν sont bornées dans cet ensemble:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y_i}\right| \leqslant m, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \leqslant m, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial q_i}\right| \leqslant m \tag{3}$$

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\, \partial y_j}\right| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y_j}\right| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\, \partial q_j}\right| \leqslant M, \text{ etc.} \tag{4}$$

Soit $\omega(y_1, \ldots, y_n)$ une fonction possédant, pour toutes les valeurs des variables $y_1, \ldots, y_n$ des dérivées partielles continues et bornées des deux premiers ordres:

$$\left|\frac{\partial \omega}{\partial y_i}\right| \leqslant m^*, \qquad \left|\frac{\partial^2 \omega}{\partial y_i\, \partial y_j}\right| \leqslant M^*. \tag{5}$$

Ceci étant, nous affirmons que l'équation (1) possède une intégrale (du reste unique) qui 1⁰) pour $x = 0$ se réduit à $\omega(y_1, \ldots, y_n)$, qui 2⁰) est définie et possède des dérivées partielles continues du second ordre pour tous les points de l'ensemble

$$|x| < b; \quad y_1, \ldots, y_n \text{ quelconques} \tag{6}$$

où

$$b = \text{minimum}\,(a, c) \tag{7}$$

c désignant la plus petite racine positive [1]) de l'équation en x

$$M(1 + n\,M^* + m^*) \int_0^x e^{\int_0^x \lambda(t)\, dt}\, dx = \frac{1}{n}. \tag{8}$$

La fonction λ figurant dans cette équation est définie par la formule

$$\lambda(x) = m + 2n\,M(1 + m^*)\, e^{mx}. \tag{9}$$

Le fait essentiel réside en ce que le nombre b et par suite le domaine (6), dans lequel existe notre intégrale, pourra être apprécié *exclusivement au moyen des constantes m, M, m^*, M^*.*

Démonstration. Nous nous appuierons sur les deux théorèmes suivants.

I. *Conséquence d'un théorème de* M. Hadamard [2]). Soit

$$y_\nu = \overline{\varphi}_\nu(v_1, \ldots, v_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

[1]) Si une telle racine n'existe pas on doit poser $b = a$.

[2]) J. Hadamard, Sur les transformations ponctuelles, Bull. d. l. Soc. Math. de France, T. XXXIV, p. 71.

une transformation dont les fonctions composantes $\bar{\varphi}_\nu$ possèdent dans l'espace des points $(v_1, \ldots, v_n)$ tout entier des dérivées partielles du premier ordre *continues et bornées.* Supposons en plus qu'en tout point $v_1, \ldots, v_n$ on ait

$$\left|\frac{D(\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_n)}{D(\eta_1, \ldots, \eta_n)}\right| \geqslant \beta > 0$$

où β désigne un nombre fixe. La transformation en question admet alors une transformation inverse $v_\nu = \varrho_\nu(y_1, \ldots, y_n)$ qui est définie dans l'espace $(y_1, \ldots, y_n)$ tout entier et cette transformation inverse possède partout des dérivées partielles continues du premier ordre.

II. *Théorème sur le système majorant d'équations différentielles ordinaires* [1]). Considérons deux systèmes d'équations différentielles

$$\frac{dy_i}{dx} = h_i(x, y_1, \ldots, y_n), \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

$$\frac{dy_i}{dx} = H_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

et supposons que 1⁰) les fonctions h_i soient continues dans la couche

$$|x| < \gamma, \ -\infty < y_\nu < +\infty, \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

2⁰) les fonctions H_i soient définies et continues dans l'ensemble

$$0 \leqslant x < \gamma, \ 0 \leqslant y_\nu < +\infty, \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{13}$$

3⁰) la fonction H_i $(i = 1, \ldots, n)$ soit croissante au sens large par rapport à chacune des variables $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$, c.-à-d. que l'on ait pour toute couple de points de l'ensemble (13) l'inégalité

$$H_i(x, y_1, \ldots, y_{j-1}, \bar{y}_j, y_{j+1}, \ldots, y_n) \geqslant H_i(x, y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j, y_{j+1}, \ldots, y_n)$$

lorsque

$$\bar{y}_j > y_j, \qquad (j \neq i)$$

4⁰) on ait dans la couche (12)

$$|h_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant H_i(|x|, |y_1|, \ldots, |y_n|)$$

---

[1]) Nous avons signalé ce théorème, qui est bien maniable, dans notre travail anterieur (T. Ważewski l. c. p. 8). Il peut être facilement déduit des théorèmes de M. Kamke sur l'intégrale maximale et minimale d'un système *spécial* d'équations différentielles ordinaires (Acta Mathematica T. 58 p. 82 Satz 9).

5°) entre les coordonnées des points

$$y_1^0, \dots, y_n^0 \tag{14}$$

$$Y_1^0, \dots, Y_n^0 \tag{15}$$

substistent les inégalités

$$|y_\nu^0| \leqslant Y_\nu^0, \qquad (\nu = 1, \dots, n)$$

6°) le système (11) admette une intégrale unique $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$ passant par le point (15) et cette intégrale existe dans l'intervalle $0 \leqslant x < \gamma$.

Ceci étant, chaque intégrale $y_1(x), \dots, y_n(x)$ du système (10) passant par le point (14) se laisse prolonger de façon à exister dans l'intervalle $-\gamma < x < \gamma$ et on a dans cet intervalle

$$|y_\nu(x)| \leqslant Y_\nu(|x|), \qquad (\nu = 1, \dots, n;\ -\gamma < x < \gamma).$$

III. En adoptant les notations habituelles $Y_i = \dfrac{\partial f}{\partial y_i}$, $Z = \dfrac{\partial f}{\partial z}$, $Q_i = \dfrac{\partial f}{\partial q_i}$ considérons les équations des caractéristiques de l'équation (1)

$$\frac{dy_i}{dx} = -Q_i, \quad \frac{dz}{dx} = f - \Sigma Q_j q_j, \quad \frac{dq_i}{dx} = Y_i + Z q_i. \tag{16}$$

Désignons par

$$\left|\begin{aligned} y_i &= y_i(x, y_1^*, \dots, y_n^*, z^*, q_1^*, \dots, q_n^*) \\ z &= z(x, y_1^*, \dots, y_n^*, z^*, q_1^*, \dots, q_n^*) \\ q_i &= q_i(x, y_1^*, \dots, y_n^*, z^*, q_1^*, \dots, q_n^*) \end{aligned}\right. \tag{17}$$

l'intégrale du système (16) issue du point $x = 0$, $y_i = y_i^*$, $q_i = q_i^*$ $(i = 1, \dots, n)$.

Effectuons, dans les fonctions (17), les substitutions

$$y_i^* = v_i, \quad z^* = \omega(v_1, \dots, v_n), \quad q_i^* = \frac{\partial \omega(v_1, \dots, v_n)}{\partial v_i}. \tag{18}$$

Nous obtiendrons alors les fonctions

$$y_i = \bar{y}_i(x, v_1, \dots, v_n), \tag{19}$$

$$z = \bar{z}(x, v_1, \dots, v_n), \tag{20}$$

$$q_i = \bar{q}_i(x, v_1, \dots, v_n). \tag{21}$$

V. En nous adressant à la méthode classique nous aurons à examiner la transformation inverse de la transformation (19) (pour les x fixes et remplissant l'inégalité $|x| < b$). Cet examen devra posséder un caractère intégral, ce qui le distinguera de la méthode classique. Nous nous appuierons, à cet effet, sur le théorème de M. Hadamard (cf. I), ce qui nécessitera la démonstration préalable des trois propriétés suivantes:

Propriété A. Les fonctions $\bar{y}_i$, $\bar{z}$, $\bar{q}_i$ sont de classe C^1 dans l'ensemble [1])

$$|x| < b, \quad -\infty < v_i < +\infty. \tag{22}$$

Propriété B. Il existe une fonction $G(x)$ telle que l'on ait dans (22) les inégalités

$$\left|\frac{\partial \bar{y}_i}{\partial v_j}\right| \leqslant G(x). \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{23}$$

Propriété C. Il existe une fonction $L(x)$ telle que l'on ait dans (22) l'inégalité

$$\left|\frac{D(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)}{D(v_1, \ldots, v_n)}\right| \geqslant L(x) > 0. \tag{24}$$

Nous démontrerons la propriété A à l'aide du théorème sur le système majorant (cf. I). Remaquons que les fonctions $\bar{y}_i$, $\bar{z}$, $\bar{q}_i$ satisfont aux équations (16), désignons par $s(x)$ le plus grand de deux nombres $|f(x, 0, \ldots, 0)|$, $|f(-x, 0, \ldots, 0)|$ et formons pour le système (16) le système majorant qui suit (cf. (3)) [2])

$$\frac{dy_i}{dx} = m, \quad \frac{dz}{dx} = s(x) + m(z + \Sigma y_j + \Sigma q_j) + m\, \Sigma q_j, \tag{25}$$

$$\frac{dq_i}{dx} = m(1 + q_i). \tag{26}$$

On sait que chaque intégrale de ce système linéaire existe dans l'intervalle $|x| < a$. En vertu du théorème sur le système majorant, les integrales $\bar{y}_i$, $\bar{z}$, q_i existeront dans l'ensemble (22). Elles y seront

---

[1]) c.-à-d. elles possèdent des dérivées partielles continues du premier ordre dans cet ensemble par rapport à toutes les variables.

[2]) Afin d'apprécier $|f(x, y_1, \ldots, q_n)|$ on appliquera à la différence $f(x, y_1, \ldots, q_n) -$ $- f(x, 0, \ldots, 0)$ le théorème sur les accroissements finis.

de classe C^1 car les deuxièmes membres des équations (16) étant de classe C^1 il en sera de même des fonctions (17) [1]) et par suite aussi les fonctions $\bar{y}_i$, $\bar{z}$, $\bar{q}_i$ seront de la même classe dans l'ensemble (22). La propriété A est ainsi établie.

L'intégrale du système (26) qui pour $x=0$ prend les valeurs $q_i = m^*$ est: $q_i = (1+m^*)\,e^{mx} - 1$. On aura donc (cf. 5 et II) l'inégalité

$$|\bar{q}| \leqslant (1+m^*)\,e^{mx} - 1 = h(x) \tag{27}$$

qui est valable dans l'ensemble (22).

Pour établir les propriétés B et C il suffira de prouver l'existence d'une fonction $K(x)$ telle que dans l'ensemble (22) subsistent les inégalités:

$$\left|\frac{\partial \bar{y}_i(x, v_1, \dots, v_n)}{\partial v_j} - \frac{\partial \bar{y}_i(0, v_1, \dots, v_n)}{\partial v_j}\right| \leqslant K(x) < \frac{1}{n}. \tag{28}$$

Supposons en effet qu'une telle fonction $K(x)$ existe. On a évidemment $\bar{y}_i(0, v_1, \dots, v_n) = v_i$ et, par conséquent $\dfrac{\partial \bar{y}_i(0, v_1, \dots, v_n)}{\partial v_j} = 0$ lorsque $i \neq j$ et $\dfrac{\partial \bar{y}_i(0, v_1, \dots, v_n)}{\partial v_i} = 1$. De la relation (28) il résulte donc que l'inégalité

$$\left|\frac{\partial \bar{y}_i(x, v_1, \dots, v_n)}{\partial y_j}\right| \leqslant 1 + K(x)$$

est valable dans l'ensemble (22), ce qui exprime que la propriété B a lieu. En vertu des inégalités (28) le jacobien (24) pourra être mis sous la forme

$$\frac{D(\bar{y}_1(x, v_1, \dots, v_n), \dots, \bar{y}_n(x, v_1, \dots, v_n))}{D(v_1, \dots, v_n)} = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon_{11}, & \varepsilon_{1,2}, \dots, & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21}, & 1+\varepsilon_{22}, \dots, & \varepsilon_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{n1}, & \varepsilon_{n2}, \dots, & 1+\varepsilon_{nn} \end{vmatrix} \tag{29}$$

où les fonctions ε_{ij} (continues en $x, v_1, \dots, v_n$) rempliront dans l'ensemble (22) les inégalités

$$|\varepsilon_{ij}| \leqslant K(x) < \frac{1}{n}. \tag{30}$$

[1]) E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, p. 155, Satz 1.

Fixons maintenant notre attention sur un x quelconque ($|x| < b$) et envisageons, autrement que tout à l'heure, le déterminant (29) comme fonction des n^2 variables indépendentes ε_{ij} qui prennent toutes les valeurs appartenant à l'ensemble (borné et fermé) défini par les inégalités (30). On vérifie facilement que notre déterminant ne peut pas s'annuler dans cet ensemble. Le module de ce déterminant atteint donc dans cet ensemble un minimum positif $L(x) > 0$ relativement auquel subsiste évidemment la propriété C.

Adressons nous maintenant à la démonstration de l'existence de la fonction $K(x)$ figurant dans l'inégalité (28). Posons pour un r fixe

$$(31) \quad \left| \begin{aligned} \eta_i &= \frac{\partial \bar{y}_i(x, v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_r} - \frac{\partial \bar{y}_i(0, v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_r}, \\ \varkappa_i &= \frac{\partial \bar{q}_i(x, v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_r} - \frac{\partial \bar{q}_i(0, v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_r}, \\ \zeta &= \frac{\partial \bar{z}(x, v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_r} - \frac{\partial \bar{z}(0, v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_r}, \end{aligned} \right.$$

et posons pour abréger

$$\eta_i^* = \frac{\partial \bar{y}_i(0, v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_r}, \quad \varkappa_i^* = \frac{\partial \bar{q}_i(0, v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_r}, \quad \zeta^* = \frac{\partial \bar{z}(0, v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_r}.$$

VI. On aura évidemment pour $x = 0$ et $v_1, \ldots, v_n$ quelconques: $\eta_i = 0$, $\varkappa_i = 0$, $\zeta = 0$.

VII. En vertu de (18) et (5) on aura les relations suivantes valables pour tous les $v_1, \ldots, v_n$.

$$(32) \quad |\eta_i^*| = 0 \text{ (pour } i \neq r), \quad |\eta_r^*| = 1, \quad |\varkappa_i^*| \leqslant M^*, \quad |\zeta^*| \leqslant m^*.$$

En différentiant les deux membres des équations caractéristiques (16) par rapport à v_r nous obtiendrons le système qui suit et qui sera vérifié par les fonctions η_i, $\varkappa_i$, ζ en tout point de l'ensemble $|x| < a$, $-\infty < v_i < +\infty$ [1])

$$\frac{d\eta_i}{dx} = -\sum_j \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}(\varkappa + \varkappa_j^*) - \sum \frac{\partial Q_i}{\partial y_j}(\eta_j + \eta_j^*) - \frac{\partial Q_i}{\partial z}(\zeta + \zeta^*)$$

$$\frac{d\zeta}{dx} = -\sum (\varkappa_j + \varkappa^*) \left(\sum_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \bar{q}_i \right) -$$

$$- \sum_j (\eta_j + \eta_j^*) \left(-Y_j + \sum_i \bar{q}_i \frac{\partial Q_i}{\partial y_j} \right) - (\zeta + \zeta^*) \left(-Z + \sum_i \bar{q}_i \frac{\partial Q_i}{\partial z} \right)$$

[1]) Pour la justification de ce fait v. le livre cité de M. Kamke p. 155.

$$\frac{d\varkappa_i}{dx}=\sum_j(\varkappa_j+\varkappa_j^*)\left|\frac{\partial Y_i}{\partial q_j}+\frac{\partial Z}{\partial q_j}\bar{q}_i\right|+Z(\varkappa_i+\varkappa_i^*)+$$
$$+\sum_j(\eta_j+\eta_j^*)\left(\frac{\partial Y_i}{\partial y_j}+\bar{q}_i\frac{\partial Z}{\partial y_j}\right)+(\zeta+\zeta^*)\left(\frac{\partial Y_i}{\partial z}+\bar{q}_i\frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

[Dans les fonctions Y_i, Z, Q_i et leurs dérivées partielles on doit effectuer les substitions (19), (20) et (21)]. Le système majorant pour le système précédent sera (cf. (3), (4), (32), (27))

$$\frac{d\eta_i}{dx}=M\left[\sum_j(\varkappa_j+\eta_j)+\zeta+1+nM^*+m^*\right],$$

$$\frac{d\zeta}{dx}=nMh(x)[nM^*+\Sigma\varkappa_j]+[m+nMh(x)](1+\Sigma\eta_j)+$$
$$+[m+nMh(x)](\zeta+m^*).$$

$$\frac{d\varkappa_i}{dx}=M(1+h(x))[\Sigma\varkappa_j+nM^*]+m[\varkappa_i+M^*]+$$
$$+M(1+h(x))[\Sigma\eta_j+1]+M[1+h(x)](\zeta+m^*).$$

L'intégrale $\hat{\eta}_i$, $\hat{\varkappa}_i$, $\hat{\zeta}$ de ce système d'équations linéaires qui s'annule pour $x=0$ existe dans l'intervalle $(-\infty,+\infty)$ et l'on aura (cf. les alinéas II et VI) dans l'intervalle $|x|<a$ et pour les $v_1,\ldots,v_n$ quelconques les inégalités

(33) $$|\eta_i|\leqslant|\hat{\eta}_i(|x|)|,\quad |\varkappa_i|\leqslant|\hat{\varkappa}_i(|x|)|,\quad |\zeta|\leqslant\hat{\zeta}(|x|).$$

Or l'intégrale $\hat{\eta}_i$, $\hat{\zeta}$, $\varkappa$ se calcule effectivement [1]). On trouvera

(34) $$\hat{\eta}_i=M(1+nM^*+m^*)\int_0^x e^{\int_0^x\lambda(x)\,dx}\,dx$$

où

$$\lambda(x)=2nM\{1+h(x)\}+m=2nM(1+m^*)e^{mx}+m.$$

Les fonctions $\hat{\eta}_i$ sont toutes identiques au premier membre de l'équation (8). Or c désigne la plus petite racine positive de cette équation. En posant $K(x)=\hat{\eta}_1(x)=\ldots=\hat{\eta}_n(x)$ on voit donc que, dans l'ensemble (22), l'inégalité (28) a lieu (cf. 31, 32, 7, 8). Les propriétés A, B, C se trouvent ainsi établies. En rapprochant ces propriétés du

---

[1]) En ajoutant les équations majorantes terme à terme on constatera que la fonction $\zeta+\Sigma(\varkappa_j+\eta_j)$ remplit une équation linéaire qui s'intègre effectivement. On calculera ensuite consécutivemt η_i, $\varkappa_i$ et ζ.

théorème de M. Hadamard (cf. I) on démontre que les équations (19) possèdent une solution unique en $v_1, \ldots, v_n$ lorsque $|x| < b$, $-\infty < y_i < +\infty$. Cette solution $v_i = v_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ est de classe C^1 dans l'ensemble (6). En substituant ces solutions dans l'équation (20) on obtient l'intégrale de l'équation (1) dont l'existence est affirmée par notre théorème [1]).

Remarque. La solution effective de l'équation (8) c.-à-d. de l'équation $K(x) = \frac{1}{n}$ est difficile. Afin d'indiquer *effectivement* un domaine d'existence $|x| < b_1 \leqslant b$, $-\infty < y_\nu < +\infty$ (moins large que le domaine (6)) on peut appliquer le procédé suivant qui n'exige pas la résolution de l'équation (8). On cherche une fonction $K_1(x)$ continue et telle que $K_1(0) = K(0) = 0$ et $K_1(x) \geqslant K(x)$ pour $x > 0$. On choisit K_1 de façon que l'équation $K_1(x) = \frac{1}{n}$ puisse être résolue effectivement. En désignant par c_1 la plus petite racine positive de cette équation il suffit évidemment de poser $b_1 = \min(a, c_1)$ [2]). On peut poser p. e.

$$K_1(x) = M(1 + n M^* + m^*) \int_0^x e^{\int_0^x (\lambda(t) + 1)\, dt} (\lambda(x) + 1)\, dx.$$

[1]) On le démontre par le raisonnement classique (v. p. e. E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris 1921, p. 187).

[2]) Si une telle racine n'existe pas, l'intégrale de l'équation (1) existera dans le domaine $|x| < a$.

Sur l'équation aux dérivées partielles du premier ordre essentiellement non linéaire

par

T. Ważewski

Kraków.

Hypothèse *H*. Considérons l'équation

$$p = f(x, y, z, q) \tag{1}$$

et supposons que la fonction f soit de classe C^2 dans un ensemble ouvert Ω de l'espace des variables réelles x, y, z, q [1]). Nous supposerons que l'équation (1) est essentiellement non linéaire dans Ω, c.-à-d. que l'on y a:

$$f_{qq} \neq 0 \text{ [2])}. \tag{2}$$

Nous désignons par $\omega(v)$ une fonction qui est de classe C^1 dans l'intervalle $a \leqslant v \leqslant b$ et nous supposons que la courbe

$$x = 0, \quad y = v, \quad z = \omega(v), \quad q = \omega'(v) \qquad (a \leqslant v \leqslant b) \tag{3}$$

est située dans Ω. Sous cette hypothèse nous avons le théorème suivant [3]).

Théorème 1. Si les caractéristiques déterminées par la courbe (3) existent dans l'intervalle $0 \leqslant x < \beta$ et engendrent une surface intégrale $z = \varphi(x, y)$ de classe C^1, alors la dérivée première $\omega'(v)$ est à variation bornée dans l'intervalle $a \leqslant v \leqslant b$. La dérivée seconde $\omega''(v)$ existe donc presque partout dans cet intervalle.

---

[1]) Une fonction est, par définition, de classe C^i dans un ensemble lorsqu'elle y possède des dérivées partielles (ou ordinaires) d'ordre i.

[2]) Nous posons pour abréger $f_{qq} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial q^2}$, $f_q = \dfrac{\partial f}{\partial q}$, $f_z = \dfrac{\partial f}{\partial z}$ etc.

[3]) Un théorème moins précis constituait le sujet de la communication que j'ai envoyé au Congrès des Math. des Pays Slaves (Prague, Septembre, 1934).

Démonstration. Les équations des caractéristiques sont

$$\frac{dy}{dx} = -f_q, \quad \frac{dz}{dx} = f - qf_q, \quad \frac{dq}{dx} = f_y + qf_z. \tag{4}$$

Soit

$$y = y(x, y^*, z^*, q^*), \quad z = z(x, y^*, z^*, q^*), \quad q = q(x, y^*, z^*, q^*)$$

la caractéristique issue du point $x = 0$, $y = y^*$, $z = z^*$, $q = q^*$. L'équation de notre surface intégrale écrite sous forme paramétrique est

$$y = y(x, v, \omega(v), \omega'(v)), \quad z = z(x, v, \omega(v), \omega'(v)).$$

Il suffit évidemment de prouver que la dérivée $\omega'(v)$ est à variation bornée dans un voisinage du point v_0 pris arbitrairement dans l'intervalle $a \leqslant v \leqslant b$.

Désignons par K la caractéristique issue du point $x = 0$, $y = v_0$, $z = \omega(v_0)$, $q = \omega'(v_0)$. Nous affirmons qu'il existe, sur K, au moins un point

$$x = x_0, \quad y^* = v_0, \quad z^* = \omega(v_0), \quad q^* = \omega'(v_0); \quad (0 < x_0 < \beta) \tag{5}$$

pour lequel on ait

$$\frac{\partial y}{\partial q^*} \neq 0. \tag{6}$$

Supposons, en effet, le contraire. On aura donc le long de K

$$\frac{\partial y}{\partial q^*} = 0 \qquad (0 < x < \beta) \tag{7}$$

En vertu de l'identité bien connue de Cauchy: $\dfrac{\partial z}{\partial q^*} = q \dfrac{\partial y}{\partial q^*}$ on aura aussi le long de K

$$\frac{\partial z}{\partial q^*} = 0 \qquad (0 < x < \beta) \tag{8}$$

En différentiant la première équation (4) on obtiendra [4]) l'identité

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial q^*}\right) = -f_{qy}\frac{\partial y}{\partial q^*} - f_{qz}\frac{\partial z}{\partial q^*} - f_{qq}\frac{\partial q}{\partial q^*}$$

qui a lieu le long de K. De là en raison des relations (2), (7) et (8) il résulte que l'on aura le long de K

$$\frac{\partial q}{\partial q^*} = 0 \qquad (0 < x < \beta) \tag{9}$$

[4]) E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen (Leipzig 1930) p. 155, Satz 1.

Des identités (7), (8), (9) il s'ensuit que $\frac{D(y, z, q)}{D(y^*, z^*, q^*)} = 0$ (le long de K) ce qui n'est pas possible [4]).

Choisissons maintenant x_0 de façon que l'inégalité (6) ait lieu au point (5) et posons

$$(10) \qquad \lambda(v) = y(x_0, v, \omega(v), \omega'(v)).$$

De l'unicité des solutions des équations caractéristiques et de l'hypothèse que notre surface intégrale est engendrée par des caractéristiques il résulte que la fonction continue $\lambda(v)$ prend des valeurs différentes pour des v différents $(a \leqslant v \leqslant b)$.

Elle est donc à variation bornée (plus précisément monotone au sens strict). En vertu des relation (6) et (10), du fait que la fonction $y(x, \ldots, q^*)$ est [4]) de classe C^1 il résulte l'existence d'une fonction $\psi(y, y^*, z^*)$ qui est de classe C^1 au voisinage du point $y = \lambda(v_0)$, $y^* = v_0$, $z^* = \omega(v_0)$ et telle que l'on ait, au voisinage de v_0, l'identité

$$\omega'(v) \equiv \psi(\lambda(v)), v, \omega(v)).$$

Or ψ étant de classe C^1 et λ et ω étant à variation bornée, il s'ensuit facilement que la dérivée $\omega'(v)$ est à variation bornée au voisinage de v_0 c. q. f. d.

Si nous coupons notre surface intégrale par le plan $x = \xi$, $(0 < \xi < \beta)$, nous obtiendrons une courbe à laquelle s'applique le raisonnement précédent relatif à la courbe (2). De là vient le théorème suivant:

Théorème 2. Sous l'hypothèse H chaque intégrale $\varphi(x, y)$ de classe C^1 qui est engendrée par des caractéristiques possède, presque partout les dérivées $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \, \partial x}$.

Remarque. Sous l'hypothèse supplémentaire que $f_q \neq 0$ (dans Ω) le dérivées $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y}$ existent [5]) aussi presque partout. On pourra, en effet, résoudre localement l'équation (1) en q et invertir ensuite, dans le raisonnements précédents le rôle des variables x et y.

---

[5]) Plus généralement ces dérivées existent pour presque tous les points de notre surface pour lesquels $f_q \neq 0$. Il paraît probable qu'elles existent aussi pour presque tous les points où $f_q = 0$.

Ein Beitrag zur konformen Abbildung von zwei Riemannschen Räumen aufeinander

von

St. Gołąb

Kraków.

Den Gegenstand der vorliegenden Note bildet der Beweis des folgenden Satzes über die Abbildung von zwei Riemannschen Räumen aufeinander.

Hauptsatz. *Wenn die Abbildung von zwei n-dimensionalen Riemannschen Räumen V_n, V'_n mit positiv-definiten Formen aufeinander in der Umgebung von zwei korrespondierenden Punkten P und P' folgende Eigenschaften besitzt:*

I) die Komponenten der Abbildungsfunktionen sind mit ersten s t e t i g e n partiellen Ableitungen versehen,

II) es gibt eine gewisse Zahl α von der Eigenschaft

$$(*) \qquad 0 < |\alpha - \pi| < \pi$$

und von der Art, dass, sobald $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei in P den Winkel α bildende Vektoren sind, auch die entsprechenden Vektoren $\vec{u}'$ und $\vec{v}'$ in P' den Winkel α schliessen,

dann ist die Abbildung im Punkte P k o n f o r m, d. h. es wird das Mass aller Winkel bei der Abbildung erhalten.

§ 1. Zunächst wollen wir bemerken, dass der ausgesprochene Satz einen völlig lokalen Charakter hat. Es geht daraus hervor, dass im Falle, wenn die in der Voraussetzung erwähnte Eigenschaft in einem Gebiete erfüllt ist, die Zahl α von Punkt zu Punkt varieren kann. Man kann jedoch das Beispiel einer solchen Abbildung angeben, die nur in einem einzigen Punkte konform ist.

Zweitens bemerken wir, dass die Vergleichung der Winkel bei einer Abbildung erst dann möglich ist, wenn die Abbildung die kontravarianten Vektoren eines Raumes in kontravariante Vektoren des zweiten Raumes überführt. Eine solche Abbildung wollen wir kurz eine *Vektorabbildung* nennen. Die Eigenschaft I) ist bekanntlich eine hinreichende Bedingung dafür, dass die Abbildung eine Vektorabbildung sei. Dagegen ist sie keineswegs notwendig. In unserem Satze ist aber die Voraussetzung I) wesentlich in dem Sinne, dass ohne diese Voraussetzung der Satz nicht richtig sein braucht, was an einem Beispiele im § 4 gezeigt wird.

§ 2. Der Beweis des Hauptsatzes kann im allgemeinen Falle auf den speziellen zurückgeführt werden, wo die Dimensionszahl n gleich 2 ist. In der Tat, nehmen wir an, dass der Beweis im Sonderfalle $n=2$ geführt wurde und fassen wir ins Auge den allgemeinen Fall. Betrachten wir nun in P zwei beliebige Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die als linear unabhängige vorausgesetzt werden sollen (widrigenfalls ist der Winkel zwischen zwei voneinander linear abhängigen Vektoren schon auf Grund der Voraussetzung I) erhalten). Ein solches Paar von Vektoren bestimmt eindeutig einen zweidimensionalen geodätischen Raum G_2, der zu dem Bivektor der Vektoren $\vec{u}$. $\vec{v}$ gehört und ein Teil des Raumes V_n ist. Der Raum G_2 ist ein Riemannscher Raum und der ihm auf Grund der Abbildung in V'_n entsprechender Raum ist ebenfalls ein Riemannscher. Werden jetzt alle Vektorenpaare ins Spiel hineingezogen die den Winkel α bilden und gleichzeitig dem Raume G_2 angehören und wird der Schluss unseres Satzes für $n=2$ angewandt, so bekommen wir, dass der Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bei der Abbildung erhalten bleibt.

§ 3. Infolge des vorangehenden Paragraphen 2 wenden wir uns zum Beweis des Satzes im Falle $n=2$. Wir bezeichnen mit g_{ik} $(i, k=1, 2)$ die Koeffizienten der ersten quadratischen Differentialform des Raumes V_2 und entsprechend mit g'_{ik} die des Raumes V'_2. Einfachheitshalber nehmen wir weiter an, dass ξ^i $(i=1, 2)$ in V_2 die Koordinaten eines in P geodätischen Koordinatensystems darstellen. Auf Grund dieser Voraussetzung gelten folgende Gleichungen:

(1) $$g_{11}=g_{22}=1; \quad g_{12}=g_{21}=0 \text{ [1]}.$$

---

[1]) Die Gleichungen (1) sind selbstverständlich nur im Punkte P erfüllt. Da es sich aber durchwegs nur um Verhältnisse im Punkt P handelt, brauchen wir diesen und nachfolgenden Gleichungen den Index P nicht anhängen.

Jetzt nehmen wir an, dass im Raum V_2' das Koordinatensystem so gewählt ist, dass die entsprechenden Punkte dieselben Koordinaten besitzen. Hier wollen wir die Aufmerksamkeit des Lesers darauf richten, dass die letzte Annahme nur auf Grund der Voraussetzung I) gerechtfertigt ist [1]). Ohne diese Voraussetzung wäre nämlich der Übergang zu einem solchen Koordinatensystem in V_2' nicht erlaubt. Da auf Grund eines bekannten Resultates die Gleichungen

$$g'_{ik} = \sigma\, g_{ik}, \quad \sigma \neq 0, \qquad (i, k = 1, 2), \tag{2}$$

die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür darstellen, dass die Abbildung in P konform sei, ist unsere Aufgabe festzustellen, dass aus unseren Voraussetzungen folgende Gleichungen entspringen:

$$g'_{11} = g'_{22} \ (\neq 0) \tag{3}$$

und

$$g'_{12} = g'_{21} = 0. \tag{4}$$

Um den Beweis der Beziehungen (3) und (4) durchzuführen, führen wir folgende Bezeichnungen ein. Mit x bezeichnen wir das Mass des orientierten Winkels [2]), den der beliebige Vektor v^k mit dem Vektor e^k (1, 0) schliesst. Dagegen mit $F(x)$ bezeichnen wir das Winkelmass der korrespondierenden Vektoren v'^k und e'^k in P'. Es ist leicht zu beweisen, dass die Vektoren $\vec{v'}$ und $\vec{e'}$ dieselben Bestimmungszahlen haben, wie die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{e}$. Daraus und aus der Definition der Winkelmetrik in Riemannschen Mannigfaltigkeiten gehen folgende Gleichungen hervor:

$$\cos x = \frac{v^1}{\sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2}}, \qquad \sin x = \frac{v^2}{\sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2}} \tag{5}$$

und

$$\cos F(x) = \frac{\sum\limits_{i,k} g'_{ik}\, v^i\, e^k}{\sqrt{\sum\limits_{i,k} g'_{ik}\, v^i\, v^k} \cdot \sqrt{\sum\limits_{i,k} g'_{ik}\, e^i\, e^k}}. \tag{6}$$

---

[1]) Vergleiche in dieser Hinsicht meine Bemerkungen, die in einem auf dem mathematischen Kongresse in Zürich (1932) gehaltenen Vortrage, enthalten sind.

[2]) Vergleiche St. Gołąb, Sur les coordonnées polaires sur une surface, Ann. d. l. Soc. Pol. d. Math. XII (1933), 87—107, insbesondere § 2.

Die Gleichung (6) nimmt infolge (5) folgende Gestalt an:

$$\cos F(x) = \frac{g'_{11} \cos x + g'_{12} \sin x}{\sqrt{g'_{11}} \cdot \sqrt{g'_{11} \cos^2 x + 2\, g'_{12} \cos x \sin x + g'_{22} \sin^2 x}}. \tag{7}$$

Nach einer Folge von nicht besonders schweren Rechnungen bekommt man schliesslich die Formel:

$$F(x) = \sqrt{\Delta} \int_0^x \frac{d\varphi}{g'_{11} \cos^2 \varphi + 2\, g'_{12} \cos \varphi \sin \varphi + g'_{22} \sin^2 \varphi}, \tag{8}$$

$$(\Delta = g'_{11} g'_{22} - (g'_{12})^2).$$

Einfachheitshalber setzen wir noch:

$$a = \frac{g'_{12}}{g'_{11}}, \qquad b = \frac{g'_{22}}{g'_{11}}. \tag{9}$$

Dann gilt die Gleichung:

$$F(x) = \sqrt{b - a^2} \int_0^x \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi + 2a \cos \varphi \sin \varphi + b \sin^2 \varphi}. \tag{10}$$

Daraus geht hervor, dass

$$F'(x) = \frac{\sqrt{b - a^2}}{W(x)}, \tag{11}$$

wenn

$$W(x) = \cos^2 x + 2a \sin x \cos x + b \sin^2 x = a \sin 2x + \frac{1-b}{2} \cos 2x + \frac{1+b}{2} \tag{12}$$

gesetzt wird. Man sieht unmittelbar, dass im Falle

$$a = 0 \quad \text{und} \quad b = 1 \tag{13}$$

$W(x) =$ Constans ist; wenn dagegen (13) *nicht* erfüllt ist, so besitzt die Funktion $F(x)$ die Zahl π als die kleinste positive Periode und dasselbe folgt für $F'(x)$.

Wegen (3), (4) und (9) haben wir eben zu beweisen, dass a, b den Gleichungen (13) genügen. Zwecks Zurückführung ad absurdum nehmen wir an, dass

$$a^2 + (b - 1)^2 > 0 \tag{14}$$

ist. Führen wir die Hifsfunktion

$$\Phi(x) = F(x) - x \tag{15}$$

ein, so überzeugt man sich leicht auf Grund des oben Erwähnten, dass die Zahl π die kleinste positive Periode der Funktion $\Phi'(x)$ darstellt. Andererseits aber machen wir Gebrauch von der Voraussetzung II; es stellt sich heraus, dass

$$F(x+\alpha) = F(x) + \alpha \tag{16}$$

ist und dass α eine Periode der Funktion $\Phi'(x)$ ist. Wegen der Ungleichung (*) führt das jedoch zu einem Widerspruch. In dieser Weise ist der Beweis unseres Satzes zum Ende gebracht.

Bemerkung I. Wir fügen dem vorgestellten Beweis die folgende interessante Bemerkung hinzu. Auf Grund des bekannten Satzes über die Möglichkeit der konformen Abbildung jeder zweidimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit auf die euklidische Ebene könnte man im ersten Augenblicke glauben, dass unter Berücksichtigung dieser Tatsache nach der Zurückführung des Problems auf die Abbildung von zwei euklidischen Ebenen vielleicht eine Vereinfachung des obigen Beweises gewonnen werden könnte. Diese Vermutung erweist sich aber als nicht richtig. Die Tatsache, dass auch im Falle der Abbildung von euklidischen Ebenen der Beweis nicht einfacher als im Riemannschen Falle verläuft, hat ihre Erklärung in der Formel für den Winkel, den zwei (durch ihre Bestimmungszahlen) gegebene Vektoren machen. Diese Formel ist in einem Koordinatensystem, das durch eine beliebige (nicht notwendig orthogonale) affine Transformation aus einem rechtwinkligen Kartesischen entsteht, nicht weniger komplieziert als jene allgemeine Formel der Riemannschen Geometrie.

Bemerkung II. Wir können einen stärkeren Satz aussprechen indem wir die Voraussetzung II) durch eine schwächere ersetzen:

II′) Es existiert eine Zahl α von der Eigenschaft (*) und eine zweite konstante Zahl α' sodass, sobald $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei in P den Winkel α schliessende Vektoren sind, die entsprechenden Vektoren $\vec{u'}$ und $\vec{v'}$ den Winkel vom Masse α' bilden.

Die Vervollständigung des Beweises kann dem Leser überlassen werden.

Bemerkung III. Der Beweis unseres Satzes kann im speziellen Falle, wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$, sofort durchgeführt werden. Es genügt zu beachten, dass, wenn die Gleichung

$$\sum_{i,k} g'_{ik} u^i v^k = 0, \tag{17}$$

stets eine Konsequenz der Gleichung

$$\sum_{i,k} g_{ik} u^i v^k = 0 \tag{18}$$

ist, so müssen dann die Beziehungen (2) bestehen.

§ 4. Es sei eine Funktion $\omega(x)$ gegeben, die überall definiert ist und die den folgenden Bedingungen genügt:

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{a)} & \omega(0) = 0, \\ \text{b)} & \omega\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \equiv \omega(x), \\ \text{c)} & \frac{d\omega}{dx} \text{ existiert und es ist stets } \left|\frac{d\omega}{dx}\right| < 1, \\ \text{d)} & \omega(x) \not\equiv 0. \end{array}\right.$$

Es gibt tatsächlich Funktionen, die obigen vier Bedingungen genügen (z. B. $\omega(x) = \frac{1}{8} \sin 4x$). Wir nehmen jetzt zwei euklidisch-metrische Ebenen R_2 und R'_2 der Punkte (ξ, η) bzw. $(\xi' \eta')$ und definieren die Abbildung der beiden Ebenen aufeinander, wie folgt: In den Ebenen R_2 und R'_2 soll das Polarkoordinatensystem (φ, ϱ) eingeführt und dem Punkte $\xi = \varrho \cos \varphi$, $\eta = \varrho \sin \varphi$ soll der Punkt (ξ', η') zugeordnet sein, wo

$$\xi' = \varrho \cos \{\varphi + \omega(\varphi)\}, \quad \eta' = \varrho \sin \{\varphi + \omega(\varphi)\}. \tag{20}$$

Diese Abbildung — wie man mit leichter Rechnung bestätigen kann — besitzt in jedem Punkte partielle Ableitungen erster Ordnung und ausserdem ist sie eine *Vektorabbildung*. Man sieht weiter leicht, dass die Voraussetzung II) unseres Satzes hier erfüllt ist $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$. Dagegen ist die Abbildung im Punkte $P(0, 0)$ *nicht konform*. Selbstverständlich ist in diesem Falle die Voraussetzung I) nicht erfüllt.

§ 5. In speziellem Falle, wenn $n=2$ und wenn die Riemannschen Räume euklidisch sind, bekommen wir aus unserem Satze ein Resultat, das sich auf die Theorie der konformen Abbildung in üblichem Sinne bezieht. Die Voraussetzung der Stetigkeit der ersten partiellen Ableitungen ist hier natürlich wesentlich. Das Bestehen der Voraussetzung II) in einem Gebiete garantiert uns den *analytischen* Charakter der Abbildung in diesem Gebiete.

§ 6. Es ist interessant, dass der Satz auf den Fall einer allgemeineren Geometrie nicht ausgedehnt werden kann. Bezeichnen wir nämlich mit M_2 und M_2' zwei Ebenen mit *Minkowskischer* Metrik. Die Indicatrix von Carathéodory der Ebene M_2 genüge der Voraussetzung, dass sie durch Drehung um einen „euklidisch" rechten Winkel um den Anfangspunkt in sich übergeht ohne dabei ein Kreis zu sein. In M_2' wählen wir dieselbe Indicatrix und bilden M_2 und M_2' so aufeinander, dass die Abbildung eigentlich eine starre Drehnng um einen Winkel vom Masse $\alpha < \frac{\pi}{2}$ der Ebene M_2 in sich bildet. Werden jetzt die Winkel einer Winkelmetrik im Sinne von Bliss oder Landsberg unterworfen, so werden bei dieser Abbildung alle Winkel vom Masse α erhalten ohne das dass die Abbildung konform wird.

Note sur les systèmes quasi-ergodiques

par

W. S. Urbański

Pionki.

Envisageons une variété métrique Γ à n dimensions telle que tous ses points soient intérieurs et tout point limite des points de Γ y appartienne.

Le tenseur métrique g_{ik} soit positivement défini, à coefficients bornés.

Dans cette variété prenons un système de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Soit donné un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt \tag{1}$$

où

$$X_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Les fonctions X_i remplissent, par hypothèse, les conditions suivantes:

1°. $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 > 0$; (on a aussi $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 > k > 0$ à cause des propriétés de la variété Γ).

2°. Les X_i et leurs dérivées $\dfrac{\partial X_i}{\partial x_k}$ sont continues.

Le paramètre t soit appelé le temps.

Les solutions des équations (1) jouissent alors, comme on le sait, des propriétés suivantes:

A). Unicité. Par un point $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ quelconque de Γ il passe une solution (trajectoire) unique: $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$.

B). Les solutions dépendent d'une manière continue des valeurs initiales; on peut exprimer cela comme il suit:

Soient $x_i(t)$ et $\bar{x}_i(t)$ deux solutions passant par x_i^0 et $\bar{x}_i^0$ pour $t = 0$; ε et τ étant deux nombres positifs, il existe un $\eta > 0$ tel que la condition $|x_i^0 - \bar{x}_i^0| < \eta$ entraîne les inégalités $|x_i(t) - \bar{x}_i(t)| < \varepsilon$ pour $0 \leqslant t \leqslant \tau$.

L'ensemble des trajectoires, parcourues par les points mobiles se mouvant selon (1), forme un flux continu.

C). La vitesse V du point se mouvant selon les équations (1) ne s'annule pas, car $V = \left|\frac{ds}{dt}\right| = \frac{\sqrt{\Sigma g_{ik}\, dx_i\, dx_k}}{|dt|} = \sqrt{\Sigma g_{ik} X_i X_k}$ et la forme quadratique $\Sigma g_{ik} X_i X_k$ est positive (cf. 1⁰).

A priori sont possibles des trajectoires qui remplissent d'une manière partout dense un domaine à n dimensions de la variété Γ, ou bien une hyper-surface (surface intégrale) plongée dans cette variété [1]. Dans ce dernier cas c'est cette hyper-surface que nous considérons comme la variété en question dans les considérations qui suivent.

On n'a pas jusqu'à présent éclairci la possibilité de l'existence de trajectoires remplissant d'une manière partout dense le niveau équi-énergetique dans la dynamique; néanmoins on utilise cette hypothèse dans la mécanique statistique et l'on appelle de telles trajectoires „quasi-ergodiques" [2].

Envisageons dans la variété Γ une surface sans contact S.

Aucune trajectoire n'est tangente à la surface S.

On sait que les trajectoires peuvent traverser la surface S au plus en une infinité dénombrable de points.

Soit P un point sur cette surface S; par ce point passe une trajectoire T. Lorsqu'une autre trajectoire T' possède sur la surface S un ensemble de points ayant pour point limite le point P, nous appellerons la trajectoire T' *asymptotique* à la trajectoire T. Il est aisé de voir que, à cause de la continuité B), la propriété de la trajectoire T' d'être asymptotique à la trajectoire T ne dépend ni du choix de la surface S, ni du point P sur T.

Considérons sur la surface S un petit voisinage ouvert G_1 du point P. Ce domaine G_1 de la surface S engendre dans son mouvement de $t = -\infty$ à $t = +\infty$ un domaine ouvert K_1 de la

---

[1]) un tel cas est donné p. e. par les équations $\frac{d\varphi}{dt} = a$, $\frac{d\psi}{dt} = b$, où φ et ψ sont les coordonnées de la surface du tore; lorsque a et b sont incommensurables, les trajectoires: $\varphi = at + \varphi_0$, $\psi = bt + \psi_0$ remplissent d'une manière partout dense la surface du tore.

[2]) P. Ehrenfest, Encycl. de math. Wissensch. IV 2, II Heft 6; A. Rosenthal, Ann. d. Physik **43** (1914), p. 894; Gans u. Weber, Repertorium der Physik I, 2, p. 483; G. D. Birkhoff, Proceed. Nation. Acad. Sci. U. S. A., **17**, (1931), p. 650, 656.

variété Γ. (La possibilité du prolongement du temps à $+\infty$ et à $-\infty$ résulte de la propriété B).

Toute trajectoire qui rencontre le voisinage G_1 est totalement située à l'intérieur de K_1.

Diminuons le domaine G_1 en le serrant autour du point P, nous aurons une suite de domaines

$$G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \ldots \to P.$$

Alors, au lieu de K_1 nous trouverons une suite de domaines

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$$

Ce que nous avons dit au sujet de K_1 se rapporte à tout K_i.

Désignons par $\mathscr{K}$ la classe des points appartenant à tous les K_i

$$\mathscr{K} = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot \ldots$$

À l'ensemble $\mathscr{K}$ appartient la trajectoire T et en outre toutes celles qui sont asymptotiques à T; c'est évident, car les trajectoires de cette sorte traversent chaque G_i et sont par suite totalement situées dans chaque K_i. En dehors de cette catégorie aucune autre trajectoire ne se trouve dans $\mathscr{K}$, car en diminuant infiniment les domaines G_i on met de côté chaque trajectoire restant à distance finie du point P.

Il est évident que deux trajectoires partout denses sur le même domaine ouvert W de la variété Γ sont asymptotiques l'une à l'autre. On en conclut que, si la trajectoire T est partout dense sur le domaine W et que l'on construit l'ensemble $\mathscr{K}$ pour elle, toute trajectoire jouissant par rapport à W de la même propriété s'y trouve, et aucune autre n'y entre pas.

Théorème. S'il y a une trajectoire T partout dense dans un domaine ouvert de la variété Γ, il existe une famille de puissance du continu de trajectoires analogues.

Démonstration. Appelons W le domaine en question et L_i sa partie qui reste en dehors de K_i (K_i sont formés pour la trajectoire T).

$$L_i = W - K_i, \quad L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset \ldots$$

Dans le cas envisagé tous les L_i sont nulle part denses (ou bien vides), car les K_i sont des domaines partout denses dans W.

Donc les L_i sont de la 1-ère catégorie de M. Baire. Leur somme

$$\mathfrak{L} = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots$$

est aussi de la 1-ère catégorie.

L'ensemble $\mathfrak{K} = W - \mathfrak{L}$ qui contient seulement les trajectoires partout denses est donc de la 2-éme catégorie de M. Baire.

Ce que nous avons dit au sujet de ces deux ensembles de trajectoires $\mathfrak{K}$, et $\mathfrak{L}$, s'étend immédiatement à leurs intersections avec la surface sans contact S. En effet, comme L_i est nulle part dense, son intersection avec la variété S

$$\lambda_i = L_i \frown S$$

est aussi nulle part dense et, par conséquent, de la 1-ère catégorie.

L'ensemble $\Lambda = \mathfrak{L} \frown S = (L_1 + L_2 + L_3 + \ldots) \frown S = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots$ (intersection de l'ensemble $\mathfrak{L}$ avec la surface S) est aussi de la 1-ére catégorie. L'ensemble complémentaire de Λ est donc de la 2-ème catégorie; cet ensemble $S - \Lambda$ se compose des points qui engendrent les trajectoires de $\mathfrak{K}$. Étant de la 2-ème catégorie, il est de la puissance du continu.

Mais une seule trajectoire engendre sur S un ensemble dénombrable de points. On conclut de cela qu'il y a dans l'ensemble de points $S - \Lambda$ une infinité de puissance du continu de tels ensembles appartenant chacun à une seule trajectoire. Donc il y a une infinité de puissance du continu de trajectoires partout denses dans le domaine W.

Nous ne pouvons rien conclure de cela sur la mesure de cet ensemble. (La mesure de M. Lebesgue d'un ensemble, comme on le sait, exprime dans la mécanique statistique la probabilité relative de cet ensemble).

Dans la mécanique statistique notre résultat signifie: s'il y a une trajectoire quasi-ergodique, il y en a une infinité de puissance du continu formant un ensemble de la 2-ème catégorie de M. Baire.

Sur les fonctions caractéristiques et leur application aux théorèmes limites du calcul des probabilités

par

W. Kozakiewicz

Warszawa.

Dans son mémoire: „Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes" [1]. M. S. Bernstein démontre un théorème extrêmement important du point de vue des applications. M. V. Romanowskij a généralisé ce théorème et simplifié sa démonstration [2] en se basant sur une généralisation d'un théorème de M. P. Lévy, concernant les fonctions caractéristiques [3].

Je me propose de démontrer deux théorèmes sur les fonctions caractéristiques, dont le premier peut être considéré comme une généralisation du théorème mentionné de M. Lévy, et le second concerne les lois de probabilités des variables qui sont des fonctions de variables aléatoires. Comme application du premier théorème j'obtiens un théorème limite plus général que ceux de MM. Bernstein et Romanowskij (comp. 5). Le second théorème permet de démontrer un théorème sur les fonctions des variables aléatoires d'une forme particulière; les fonctions de cette forme se rencontrent en statistique mathématique et il paraît que notre théorème pourrait rendre des services dans ce domaine.

Les théorèmes sont énoncés et démontrés pour *deux* suites de variables aléatoires, mais s'étendent aisément au cas d'un *nombre arbitraire* de ces suites.

---

[1] Math. Ann. 97 (1926) p. 44.

[2] Bull. de l'Académie des sciences de l'URSS 1929, p. 209.

[3] Recueil Mathématique de la Société Mathématique de Moscou 1929.

1. Soient x, y deux variables aléatoires; posons:

(1) $$F_1(\xi, \eta) = P\{x < \xi, y < \eta\}$$

ξ, η étant réels et P désignant la probabilité simultanée des inégalités entre crochets. Appellons *fonction de la probabilité totale des variables x, y la fonction:*

(2) $$F(\xi, \eta) = F_1(\xi, \eta) + \tfrac{1}{2} P\{x = \xi, y < \eta\} + \tfrac{1}{2} P\{x < \xi, y = \eta\} + $$
$$+ \tfrac{1}{4} P\{x = \xi, y = \eta\};$$

cette définition est entièrement analogue à celle de M. Lévy, concernant le cas d'une variable; elle présente de grands avantages au point de vue de l'application de l'intégrale de Dirichlet.

$F(\xi, \eta)$ satisfait aux conditions suivantes:

(U_1) On a pour $\delta_1 \geqq 0 \leqq \delta_2$:

(3) $$F(\xi + \delta_1, \eta + \delta_2) - F(\xi, \eta + \delta_2) - F(\xi + \delta_1, \eta) + F(\xi, \eta) \geqq 0$$

(U_2) $$\lim_{\xi, \eta \to +\infty} F(\xi, \eta) = 1$$

(U_3) $$\lim_{\xi, \eta \to -\infty} F(\xi, \eta) = \lim_{\xi \to -\infty} F(\xi, \eta) = \lim_{\eta \to -\infty} F(\xi, \eta) = 0$$

Désignons par $F_1(\xi)$, $F_2(\eta)$ respectivement les lois de probabilité de x resp. y.

On a:

(4) $$F_1(\xi) = \lim_{\eta \to +\infty} F(\xi, \eta)$$
$$F_2(\eta) = \lim_{\xi \to +\infty} F(\xi, \eta)$$

Nous démontrerons l'inégalité:

(5) $$|F(\xi + \alpha, \eta + \beta) - F(\xi, \eta)| \leqq |F_1(\xi + \alpha) - F_1(\xi)| +$$
$$+ |F_2(\eta + \beta) - F_2(\eta)|.$$

On a:

(6) $$|F(\xi + \alpha, \eta + \beta) - F(\xi, \eta)| \leqq |F(\xi + \alpha, \eta + \beta) - F(\xi + \alpha, \eta)| +$$
$$+ |F(\xi + \alpha, \eta) - F(\xi, \eta)|.$$

L'inégalité (3) conduit à

(7) $$|F(\xi + \alpha, \eta + \beta) - F(\xi + \alpha, \eta)| \leqq |F_2(\eta + \beta) - F_2(\eta)|$$

(8) $$|F(\xi + \alpha, \eta) - F(\xi, \eta)| \leqq |F_1(\xi + \alpha) - F_1(\xi)|$$

(6), (7), (8) entraînent (5). En faisant tendre α et β vers $+\infty$ on obtient de (5) l'inégalité:

$$(9) \qquad 1 - F(\xi, \eta) \leqq 1 - F_1(\xi) + 1 - F_2(\eta).$$

Considérons une famille $\{F(\xi, \eta)\}$ de lois de probabilité. Nous dirons qu'elle est *régulière* si à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un nombre N tel que pour toute fonction F de la famille:

$$(10) \qquad 1 - F(\xi, \eta) < \varepsilon \qquad \text{si} \quad \xi > N < \eta$$

$$(11) \qquad F(\xi, \eta) < \varepsilon \qquad \text{si} \quad \xi < -N \text{ ou } \eta < -N.$$

Remarquons qu'il existe une definition analogue dans le cas d'une seule variable aléatoire.

Théorème I. *Si les familles $\{F_1(\xi)\}$ et $\{F_2(\eta)\}$ sont régulières, alors la famille $\{F(\xi, \eta)\}$ est aussi régulière.*

Ce théorème résulte immédiatement de (9) et des inégalités évidentes: $F_1(\xi) \geqq F(\xi, \eta) \leqq F_2(\eta)$.

2. On appelle fonction caractéristique de la loi de probabilité $F(\xi, \eta)$ de deux variables aléatoires x, y la fonction $\varphi_{xy}(t', t'')$ des variables réelles t', t'' définie par:

$$(12) \qquad \varphi_{xy}(t', t'') = \mathcal{E}[e^{i(t'x+t''y)}] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t'\xi+t''\eta)}\, d^2 F(\xi, \eta)$$

l'intégrale à droite étant prise au sens de Stjeltjes.

La fonction caractéristique possède les propriétés suivantes:

(W_1) Si

$$(13) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n$$

$$(14) \qquad y_1, y_2, \ldots, y_n$$

designent deux suites de variables aléatoires telles que la variable x_k ne puisse être dépendante que de la variable y_k, on a

$$(15) \qquad \varphi_{X_n, Y_n} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{x_k, y_k}(t', t'')$$

où

$$(16) \qquad X_n = \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad Y_n = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

(W_2) si x, y sont indépendantes, alors:

$$\varphi_{xy}(t', t'') = \varphi_x(t')\,\varphi_y(t'') \tag{17}$$

(W_3) on a:

$$\varphi_x(t') = \varphi_{xy}(t', 0); \quad \varphi_y(t'') = \varphi_{xy}(0, t''). \tag{18}$$

Posons pour $\alpha_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < \beta_2$:

$$P(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = F(\beta_1, \beta_2) - F(\alpha_1, \beta_2) - F(\beta_1, \alpha_2) + F(\alpha_1, \alpha_2) \tag{19}$$

$$f(t', t''; \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \frac{e^{-i\alpha_1 t'} - e^{-i\beta_1 t'}}{i\,t'}\,\frac{e^{-i\alpha_2 t''} - e^{-i\beta_2 t''}}{i\,t''} \tag{20}$$

$$\psi_x(t', \alpha_1, \beta_1) = \frac{\sin(x-\alpha_1)\,t' - \sin(x-\beta_1)\,t'}{t'} \tag{21}$$

$$\psi_y(t'', \alpha_2, \beta_2) = \frac{\sin(y-\alpha_2)\,t'' - \sin(y-\beta_2)\,t''}{t''}. \tag{22}$$

Nous démontrerons la relation suivante:

$$P(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \tag{23}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xy}(t', t'')\,\frac{e^{-i\alpha_1 t'} - e^{-i\beta_1 t'}}{i\,t'}\,\frac{e^{-i\alpha_2 t''} - e^{-i\beta_2 t''}}{i\,t''}\,dt'\,dt'' =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xy}(t', t'')\,f(t', t''; \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)\,dt'\,dt''$$

qui est une généralisation aisée d'une relation analogue valable dans le cas d'une seule variable.

Remarquons que l'on a, d'après les propriétés fondamentales de l'intégrale de Dirichlet:

$$P(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \mathcal{E}\left\{\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x-\alpha_1)\,t' - \sin(x-\beta_1)\,t'}{t'}\right. \tag{24}$$

$$\left.\frac{\sin(y-\alpha_2)\,t'' - \sin(y-\beta_2)\,t''}{t''}\,dt'\,dt''\right\} =$$

$$= \mathcal{E}\left\{\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(t', \alpha_1, \beta_1)\,\psi_y(t'', \alpha_2, \beta_2)\,dt'\,dt''\right\}.$$

D'autre part:

$$(25) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x-\alpha_1)t' - \sin(x-\beta_1)t'}{t'}\,dt' =$$

$$= i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x-\alpha_1)t' - \sin(x-\beta_1)t'}{i\,t'}\,dt' +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x-\alpha_1)t' - \cos(x-\beta_1)t'}{i\,t'}\,dt' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(x-\alpha_1)t'} - e^{i(x-\beta_1)t'}}{i\,t'}\,dt' = e^{ixt'}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha_1 t'} - e^{-i\beta_1 t'}}{i\,t'}\,dt'$$

et pareillement:

$$(26) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(y-\alpha_2)t'' - \sin(y-\beta_2)t''}{t''} = e^{iyt''}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha_2 t''} - e^{-i\beta_2 t''}}{i\,t''}\,dt''.$$

Il faut introduire dans la formule (24) les expressions (25), (26) et intervertir l'ordre d'intégration, opération dont la légitimité se démontre aisément. On obtient alors (23).

Plus généralement l'intégrale double figurant dans (23), prise entre les limites $-N < t' < N$; $-N < t'' < N$ peut être représentée par l'espérance mathématique de l'intégrale double figurant dans (24) prise entre les mêmes limites.

M. P. Lévy a démontré que dans le cas d'une seule variable aléatoire la correspondance entre la fonction caractéristique et la loi de probabilité possède un caractère de continuité, en vertu du théorème suivant [1]).

Si pour une suite $x_1, x_2, \ldots$ de variables aléatoires on a:

$$(27) \qquad \lim_{n\to\infty} \varphi_{x_n}(t) = \varphi(t)$$

uniformément dans chaque intervalle fini et si $\varphi(t)$ est une fonction caractéristique d'une variable x, admettant la loi de probabilité totale continue $F(\xi)$ alors la loi de probabilité totale de x_n, tend uniformément vers $F(\xi)$.

---

[1]) P. Lévy, Calcul des probabilités, 1925, p. 192.

Ce théorème a été étendu aux cas de deux suites de variables aléatoires par M. Romanowskij [1]), dont la démonstration ne diffère pas essentiellement de celle de M. Lévy.

Je me propose de démontrer un théorème sur les fonctions caractéristiques, qui peut être considérée comme une nouvelle généralisation du théorème cité de M. Lévy.

Nous dirons que la suite de fonctions $\{f_n(x)\}$, $n = 1, 2, \ldots$ est *presque également continue*, si à chaque $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre des nombres $N(\varepsilon)$ et $\xi(\varepsilon) > 0$ tels que les inégalités:

$$n \geqq N(\varepsilon); \quad |x_1 - x_2| < \xi(\varepsilon) \tag{28}$$

entraînent:

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon. \tag{29}$$

Théorème II. *Soient: $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{\bar{x}_n\}$, $\{\bar{y}_n\}$ des suites de variables aléatoires, $F_n(\xi, \eta)$, $F'_n(\xi, \eta)$ les lois de probabilité totale de x_n, y_n et de $\bar{x}_n$, $\bar{y}_n$ respectivement, $\varphi_{x_n y_n}(t', t'')$, $\varphi_{\bar{x}_n \bar{y}_n}(t', t'')$ les fonctions caractéristiques correspondantes, $F_{n,1}(\xi)$, $F_{n,2}(\eta)$, $F'_{n,1}(\xi)$, $F'_{n,2}(\eta)$ les lois de probabilités de x_n, y_n, $\bar{x}_n$, $\bar{y}_n$ respectivement. Supposons remplies les conditions suivantes:*

$$\lim_{n\to\infty} [\varphi_{x_n y_n}(t', t'') - \varphi_{\bar{x}_n \bar{y}_n}(t', t'')] = 0 \tag{Z_1}$$

uniformément dans tout domaine borné des variables t', t''.

(Z_2) *Les quatre suites: $\{F_{n,1}(\xi)\}$, $\{F_{n,2}(\eta)\}$, $\{F'_{n,1}(\xi)\}$, $\{F'_{n,2}(\eta)\}$ sont presque également continues.*

(Z_3) *Une des suites: $\{F_n(\xi, \eta)\}$, $\{F'_n(\xi, \eta)\}$ forme une famille régulière.*

Alors on a:

$$\lim_{n\to\infty} [F_n(\xi, \eta) - F'_n(\xi, \eta)| = 0 \tag{30}$$

et cela uniformément.

Démonstration. Evidemment il suffit de démontrer que l'on a uniformément:

$$\lim_{n\to\infty} [P_n(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) - P'_n(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)] = 0 \tag{31}$$

$P_n(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ et $P'_n(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)]$ étant définies par (19) où l'on a remplacé $F(\xi, \eta)$ par $F_n(\xi, \eta)$, $F'_n(\xi, \eta)$ respectivement.

---

[1]) Romanowskij, l. c.

Soit N un nombre positif arbitraire. On aura:

$$P_n(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) - P'_n(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \tag{32}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t', t''; \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)\,[\varphi_{x_n y_n}(t', t'') - \varphi_{\bar{x}_n \bar{y}_n}(t', t'')]\,dt'\,dt'' =$$

$$= I_{N,n} = R_{N,n}$$

où

$$I_{N,n} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-N}^{N}\int_{-N}^{N} f(t, t''; \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)[\varphi_{x_n y_n}(t', t'') - \varphi_{\bar{x}_n \bar{y}_n}(t', t'')]\,dt'\,dt'' \tag{33}$$

$$R_{N,n} = \mathcal{E}\Big\{\int_{N}^{\infty}\int_{-\infty}^{N} + \int_{-N}^{\infty}\int_{N}^{\infty} + \int_{-\infty}^{N}\int_{-\infty}^{-N} + \tag{34}$$

$$+ \int_{-\infty}^{-N}\int_{-N}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2}\psi_{x_n}(t', \alpha_1, \beta_1)\,\psi_{y_n}(t'', \alpha_2, \beta_2)\,dt'\,dt''\Big\} - \mathcal{E}\Big\{\int_{N}^{\infty}\int_{-\infty}^{N} + \int_{-N}^{\infty}\int_{N}^{\infty} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{N}\int_{-\infty}^{-N} + \int_{-\infty}^{-N}\int_{-N}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2}\psi_{\bar{x}_n}(t', \alpha_1, \beta_1)\,\psi_{\bar{y}_n}(t'', \alpha_2, \beta_2)\,dt'\,dt''\Big\}.$$

Supposons d'abord que le point de l'espace à 4 dimensions aux coordonnées α_1, β_1, α_2, β_2 soit contenu dans un domaine borné A. Démontrons d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut déterminer N et $n(\varepsilon)$ de manière que l'espérance mathématique de chacune des 8 intégrales figurant dans (34) soit plus petite que ε pour la valeur de N déterminée et pour $n \geqq n(\varepsilon)$. Il suffit évidemment de considérer l'espérance mathématique de la première de ces intégrales que nous désignerons par $J_{N,n}$:

$$J_{N,n} = \mathcal{E}\Big\{\frac{1}{4\pi^2}\int_{N}^{\infty}\int_{-\infty}^{N} \psi_{x_n}(t', \alpha_1, \beta_1)\,\psi_{y_n}(t''. \alpha_2, \beta_2)\,dt'\,dt''\Big\}. \tag{35}$$

Il est aisé de démontrer que a, b, c étant des nombres réels quelconques on a toujours l'inégalité:

$$\left|\int_{a}^{b} \frac{\sin ct}{t}\,dt\right| \leqq 2\pi \tag{36}$$

il en résulte:

$$J_{N,n} \leqq \mathcal{E}\left|\frac{1}{4\pi^2}\left|\int_{N}^{\infty}\psi_{x_n}(t', \alpha_1, \beta_1)\,dt'\right|\;\left|\int_{-\infty}^{N}\psi_{y_n}(t'', \alpha_2, \beta_2)\,dt''\right|\right| \leqq \tag{37}$$

$$\leqq \mathcal{E}\left|\frac{1}{\pi}\left|\int_{N}^{\infty}\psi_{x_n}(t', \alpha_1, \beta_1)\,dt'\right|\right|.$$

On a pour $0 < \delta < \dfrac{\beta_1 - \alpha_1}{2}$:

$$(38) \qquad \mathcal{E}\left\{\frac{1}{\pi}\left|\int_N^\infty \psi_{x_n}(t', \alpha_1, \beta_1)\,dt'\right|\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\alpha_1-\delta} + \int_{\alpha_1-\delta}^{\alpha_1+\delta} + \int_{\alpha_1+\delta}^{\beta_1-\delta} + \int_{\beta_1-\delta}^{\beta_1+\delta} + \int_{\beta_1+\delta}^{\infty} \left|\int_N^\infty \psi_{x_n}(t', \alpha_1, \beta_1)\,dt'\right| d\,F_{n,1}(\xi)\right\}.$$

D'après la condition (Z_2) on aura pour n suffisamment grand et δ suffisamment petit:

$$(39) \quad F_{n,1}(\alpha_1 + \delta) - F_{n,1}(\alpha_1 - \delta) < \frac{\varepsilon}{16} > F_{n,1}(\beta_1 + \delta) - F_{n,1}(\beta_1 - \delta)$$

donc, en tenant compte de (46):

$$(40) \quad \frac{1}{\pi}\left\{\int_{\alpha_1-\delta}^{\alpha_1+\delta} + \int_{\beta_1-\delta}^{\beta_1+\delta} \left|\int_N^\infty \psi_{x_n}(t', \alpha_1, \beta_1)\,dt'\right| d\,F_{n,1}(\xi)\right\} < \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{8}\cdot 4\pi = \frac{\varepsilon}{2}$$

quel que soit N.

Mais δ étant fixé, il résulte de la convergence uniforme de l'intégrale de Dirichlet pour $|\xi - \alpha_1| \geqq \delta \leqq |\xi - \beta_1|$ que pour N suffisamment grand on aura:

$$(41) \quad \left|\int_N^\infty \psi_{x_n}(t', \alpha_1, \beta_1)\,dt'\right| = \left|\int_N^\infty \frac{\sin(\xi - \alpha_1)t' - \sin(\xi - \beta_1)t'}{t'}\,dt'\right| < \frac{\pi}{2}\varepsilon$$

donc:

$$(42) \qquad \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\alpha_1-\delta} + \int_{\alpha_1+\delta}^{\beta_1-\delta} + \int_{\beta_1+\delta}^{\infty} \left|\int_N^\infty \psi_{x_n}(t', \alpha_1, \beta_1)\right| d\,F_{n,1}(\xi)\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

et cela quel que soit n. Donc d'après (40), (42) on a pour n et N suffisamment grands:

$$(43) \qquad |J_{N,n}| < \varepsilon.$$

D'autre part N étant fixé, on aura d'après la condition (Z_1) et en vertu du fait que la fonction f est bornée: $I_{N,n} \to 0$ pour $n \to \infty$.

En résumé, nous avons démontré que l'on a (31) uniformément dans tout domaine borné des α_1, β_1, α_2, β_2. Mais en vertu de la condition (Z_3) on démontre facilement que la relation (30) subsiste uniformément pour tous les ξ, η, c. q. f. d.

Corollaire. Les conditions (Z_2) et (Z_3) du théorème II sont remplies en particulier dans le cas où dans chacune des suites $\{F_{n,1}(\xi)\}$, $\{F_{n,2}(\eta)\}$ (ou bien $\{F'_{n,1}(\xi)\}$, $\{F'_{n,2}(\eta)\}$) toutes les fonctions sont continues et identiques entre elles, c. à d.

$$(44) \qquad F_{n,1}(\xi) = F_1(\xi); \quad F_{n,2}(\eta) = F_2(\eta) \qquad n = 1, 2 \ldots$$

La condition (Z_3) est remplie en vertu du théorème I.

D'autre part on a:

$$(45) \qquad \varphi_{\bar{x}_n}(t') = \varphi_{\bar{x}_n \bar{y}_n}(t', 0)$$

$$(46) \qquad \varphi_{x_n}(t') = \varphi_{x_n y_n}(t', 0) = \varphi(t')$$

et il résulte de (Z_1) que $\varphi_{\bar{x}_n}(t')$ tend vers $\varphi(t')$ Donc d'après le théorème de M. Lévy, on aura:

$$(47) \qquad \lim_{n \to \infty} F'_{n,1}(\xi) = F_1(\xi)$$

et pareillement:

$$(48) \qquad \lim_{n \to \infty} F''_{n,2}(\eta) = F_2(\eta).$$

Les relations (44), (47), (48) montrent que l'on a en effet (Z_2).

Remarque. Le théorème II est encore valable dans des conditions un peu moins restrictives. Il suffit de supposer au lieu de (Z_2), que seulement les deux suites $\{F_{n,1}(\xi)\}$ et $\{F_{n,2}(\eta)\}$ sont presque également continues. Mais la démonstration exige des raisonnements plus délicats, d'ailleurs analogues à ceux de M. Lévy, et basés sur l'inégalité (5).

3. Soient maintenant x, y deux variables aléatoires, $F(\xi, \eta)$ leur loi de probabilité totale.

On sait que l'on peut introduire une fonction d'ensemble $F(E)$ définie pour chaque ensemble E mesurable (L) du plan et égale à la probabilité que le point aléatoire (x, y) appartienne à E.

Nous dirons que la suite de lois de probabilité totale $\{F_n(\xi, \eta)\}$, $n = 1, 2 \ldots$ est *presque absolument continue*, si à chaque $\varepsilon > 0$ correspondent des nombres positifs: $\mu(\varepsilon)$ et $\delta(\varepsilon)$ tels que l'inégalité:

$$(49) \qquad \text{Mes. } E < \delta(\varepsilon)$$

entraîne pour $n > \mu(\varepsilon)$:

$$(50) \qquad F_n(E) < \varepsilon.$$

En particulier la suite des lois de Gauss réduites (comp. 4), où l'on a $|R_n| < R < 1$ est une suite presque absolument continue. Nous considérons dans la suite, des suites de fonctions $\{f_n(u, v)\}$ mesurables (L) et satisfaisant aux trois conditions suivantes:

(P_1) Etant donné deux nombres: $\gamma > 0$ et $L_0 > 0$ nous pouvons déterminer deux nombres positifs $\nu(\gamma)$ et $\alpha(\gamma)$ tels que:

$$(51) \qquad \text{Mes.} \{\underset{u,v}{E}[L - \alpha \leqq f_n(u, v) \leqq L + \alpha]\} < \gamma$$

si: $|L| \leqq L_0$ et $n > \nu(\gamma)$.

(P_2) La suite $\{f_n(u, v)\}$ est uniformément bornée dans tout ensemble borné, c. à d. à tout ensemble plan borné D correspond un nombre B_D tel que la condition:

$$(52) \qquad u, v \in D$$

entraîne:

$$(53) \qquad |f_n(u, v)| < B_D \qquad n = 1, 2 \ldots$$

(P_3) La suite $\{f_n(\xi, \eta)\}$ est presque également continue dans tout domaine borné.

Théorème III. *Soient $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{\bar{x}_n\}$, $\{\bar{y}_n\}$ des suites des variables aléatoires, $F_n(\xi, \eta)$, $F'_n(\xi, \eta)$ les lois de probabilité totale de x_n, y_n et $\bar{x}_n$, $\bar{y}_n$ respectivement, $f_n(u, v)$ une fonction des variables réelles u, v, $\overline{F}_n(\zeta)$ et $\overline{F}'_n(\zeta)$ les lois de probabalité totale des variables $f_n(x_n, y_n)$ et $f_n(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ respectivement, $\varphi_{f_n}(t)$ et $\varphi'_{f_n}(t)$ les fonctions caractéristiques correspondantes.*

Supposons remplies les conditions suivantes:

$$(Q_1) \qquad \lim_{n\to\infty} [F_n(\xi, \eta) - F'_n(\xi, \eta)] = 0$$

et cela uniformément.

(Q_2) Une de suites $F_n(\xi, \eta)$, $F'_n(\xi, \eta)$ forme une famille regulière.

(Q_3) Une de suites $F_n(\xi, \eta)$, $F'_n(\xi, \eta)$ est presque absolument continue.

(Q_4) La suite des fonctions $\{f_n(u, v)\}$ satisfait aux conditions (P_1), (P_2) et (P_3).

Alors on a

$$(54) \qquad \lim_{n\to\infty} [\overline{F}_n(\zeta) - \overline{F}'_n(\zeta)] = 0$$

et cela uniformément.

Démonstration. D'abord on peut choisir N, assez grand pour qu'on ait

(55) $$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{if_n(\xi,\eta)t}\, dF_n(\xi,\eta) - \int_{-N}^{N}\int_{-N}^{N} e^{if_n(\xi,\eta)t}\, dF_n(\xi,\eta)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

et

(56) $$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{if_n(\xi,\eta)t}\, dF'_n(\xi,\eta) - \int_{-N}^{N}\int_{-N}^{N} e^{if_n(\xi,\eta)t}\, dF'_n(\xi,\eta)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

où $\varepsilon > 0$ désigne un nombre donné quelconque.

Soit $|t| \leqslant T$, T étant un nombre positif, arbitraire nous pouvons déterminer les nombres $\delta(\varepsilon)$ et $n(\varepsilon)$ de manière que

(57) $$\left|e^{if_n(\xi,\eta)t} - e^{if_n(\xi_1,\eta_1)t}\right| < \frac{\varepsilon}{8}$$

si $|\xi - \xi_1| < \delta$, $|\eta - \eta_1| < \delta$, (ξ,η), $(\xi_1, \eta_1) \in K_N$, $n > n(\varepsilon)$.

K_N désigne le carré $|x| \leqslant N \geqslant |y|$.

Divisons K_N en p^2 carrés E_{ij}, de côté plus petit que 2δ, et désignons par (ξ_i, η_j) les coordonnées du centre d'un carré E_{ij}.

Nous avons

(58) $$\left|\int_{-N}^{N}\int_{-N}^{N} e^{if_n(\xi,\eta)t}\, dF_n(\xi,\eta) - \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} e^{if_n(\xi_i,\eta_j)t}\, F_n(E_{ij})\right| < \frac{\varepsilon}{8}$$

(59) $$\left|\int_{-N}^{N}\int_{-N}^{N} e^{if_n(\xi,\eta)t}\, dF'_n(\xi,\eta) - \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} e^{if_n(\xi_i,\eta_j)t}\, F'_n(E_{ij})\right| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Mais on a

(60) $$|F_n(E_{ij}) - F'_n(E_{ij})| < \frac{\varepsilon}{4p^2} \qquad i = 1, 2 \ldots p \quad j = 1, 2 \ldots p$$

pour n suffisamment grand.

Il s'ensuit que

(61) $$\lim_{n\to\infty} [\varphi_{f_n}(t) - \varphi'_{f_n}(t)] = 0$$

et cela uniformément dans l'intervalle $|t| \leqslant T$.

Pour que le théorème II soit applicable il faut démontrer encore que les conditions (Z_2) et (Z_3) subsistent. En effet ayant donné $\sigma > 0$, nous pouvons déterminer d'après la condition (Q_2) un nombre M tel, qu'on ait

(62) $$F_n(\xi, \eta) > 1 - \sigma, \quad |\xi| \leqslant M \geqslant |\eta|.$$

Posons $B = B_{K_M}$ (B_D désignant la constante qui figure dans (P_2)).

Or, en nous appuyant sur la condition (P_2), nous avons

(63) $$P\{|f_n(x_n, y_n)| < B\} > 1 - \sigma.$$

D'autre part prenons $|L| \leqslant L_0$ où L_0 est un nombre fixé quelconque. On a

(64) $$\overline{F}_n(L+\alpha) - \overline{F}_n(L-\alpha) \leqslant P\{L-\alpha \leqslant f_n(x_n, y_n) \leqslant L+\alpha\}.$$

Etant donné un nombre λ, il existe des nombres $\nu(\lambda)$ et $\gamma(\lambda)$ tels qu'on ait

$$F_n(E') < \lambda$$

si $n > \nu(\lambda)$, pour chaque ensemble E' satisfaisant à la condition

(65) $$\text{Mes}(E') < \gamma.$$

Mais en vertu de la condition (P_1) il existe un nombre α tel qu'on ait

(66) $$\text{Mes}\{\underset{u,v}{E}[L-\alpha < f_n(u,v) < L+\alpha]\} < \gamma, \qquad |L| \leqslant L_0$$

pour n suffisament grand. Nous voyons donc que

(67) $$\overline{F}_n(L+\alpha) - \overline{F}_n(L-\alpha) < \lambda$$

si n croît indéfiniment.

Les inégalités (63), (67) montrent que les conditions (Z_2) et (Z_3) du théorème II (comp. aussi la remarque) sont remplies.

En conséquence

$$\lim_{n\to\infty} [\overline{F}_n(\zeta) - \overline{F}'_n(\zeta)] = 0.$$

4. Considérons maintenant la loi de probabilité:

(68) $$F(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}} \int_{-\infty}^{\xi}\int_{-\infty}^{\eta} e^{-\frac{1}{2(1-R^2)}(\xi_1^2+\eta_1^2-2R\xi_1\eta_1)}\, d\xi_1\, d\eta_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\xi}\int_{-\infty}^{\eta} \varrho(\xi_1, \eta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1$$

c. à d. la loi normale réduite avec R comme coëfficient de corrélation.

Les lois des variables x et y s'expriment par:

(69) $$F_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{\xi_1^2}{2}}\, d\xi_1$$

$$F_2(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\eta} e^{-\frac{\eta_1^2}{2}} d\eta_1 \tag{70}$$

et on voit qu'elles sont indépendantes de R. La fonction caractéristique est:

$$\varphi_{xy}(t', t'') = e^{-\frac{1}{2}(t'^2 + t''^2 + 2Rt't'')} \tag{71}$$

on a:

$$P(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \varrho(\xi_1, \eta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1 . \tag{72}$$

Cette fonction est bien définie si $|R| < 1$. On peut démontrer sans peine qu'elle tend vers une limite si R tend vers 1 (ou bien vers -1).

Si $R \to 1$, cette limite est égale à 0 pour $\alpha_2 \geqq \beta_1$ ou $\alpha_1 \geqq \beta_2$, et à l'expression:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{\alpha}_1}^{\bar{\beta}_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad \bar{\alpha}_1 = \max(\alpha_1, \alpha_2), \quad \bar{\beta}_1 = \min(\beta_1, \beta_2) \tag{73}$$

pour $\beta_1 > \alpha_2$ et $\alpha_1 < \beta_2$.

Si $R \to -1$, cette limite est égale à 0 pour $-\beta_2 \geqq \beta_1$ ou $\alpha_1 \geqq -\alpha_2$, et à l'expression (64) où $\bar{\alpha}_1 = \max(\alpha_1, -\beta_2)$, $\bar{\beta}_1 = \min(\beta_1, -\alpha_2)$ pour $\beta_1 > -\beta_2$ et $\alpha_1 < -\alpha_2$.

4. Passons maintenant à l'énoncé du théorème généralisé de M. Bernstein.

Soient

$$\begin{matrix} x_1, x_2 \ldots x_n \\ y_1, y_2 \ldots y_n \end{matrix} \tag{1}$$

deux suites de variables aléatoires. Posons:

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad Y_n = \sum_{i=1}^{n} y_i . \tag{75}$$

Désignons par $\mathcal{E}(x)$ l'espérance mathématique d'une variable x. L'existence de $\mathcal{E}(x_i)$, $\mathcal{E}(y_i)$, $i = 1, 2 \ldots$ étant admise, nous pouvons supposer sans restreindre la généralité, que l'on ait:

$$\mathcal{E}(x_i) = \mathcal{E}(y_i) = 0. \tag{76}$$

Posons:

(77) $$\mathcal{E}(x_i^2) = b_i^2; \quad \mathcal{E}(y_i^2) = c_i^2; \quad \mathcal{E}(x_i\, y_i) = g_i$$

(78) $$\mathcal{E}(|x_i|^{2+\sigma}) = b_i^{(2+\sigma)}; \quad \mathcal{E}(|y_i|^{2+\sigma}) = c_i^{(2+\sigma)}; \quad \sigma > 0$$

(79) $$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = B_n; \quad \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = C_n; \quad \sum_{i=1}^{n} g_i = G_n$$

(80) $$\sum_{i=1}^{n} b_i^{(2+\sigma)} = B_n^{(2+\sigma)}; \quad \sum_{i=1}^{n} c_i^{(2+\sigma)} = C_n^{(2+\sigma)}$$

(81) $$R_n = \frac{G_n}{\sqrt{B_n\, C_n}}.$$

Théorème généralisé de M. Bernstein. *Si les variables* (74) *satisfont aux conditions:*

(V_1) *pour $i \neq k$, x_i est indépendante de x_k et y_k*

(V_2) *pour un σ positif:*

(82) $$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n^{(2+\sigma)}}{B_n^{1+\frac{\sigma}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_n^{(2+\sigma)}}{C_n^{1+\frac{\sigma}{2}}} = 0$$

alors pour $\alpha_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < \beta_2$ la différence entre la probabilité de l'existence simultanée des inégalités:

(83) $$\alpha_1 \sqrt{B_n} < X_n < \beta_1 \sqrt{B_n}$$

(84) $$\alpha_2 \sqrt{C_n} < Y_n < \beta_2 \sqrt{C_n}$$

et l'expression:

(85) $$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-R_n^2}} \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2} e^{-\frac{t'^2+t''^2-2R_n t' t''}{2(1-R_n^2)}}\, dt'\, dt''$$

tend uniformément vers zero.

Dans le cas où on aurait constamment $R_n = 1$ (resp. $R_n = -1$), l'expression (12) doit être remplacée par sa limite pour $R \to 1$ (resp. pour $R \to -1$); comp. **4**.

M. Berstein suppose que l'on a (V_1) et

(V_2') $$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n^{(3)}}{[(1-R_n^2)\, B_n]^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_n^{(3)}}{[(1-R_n^2)\, C_n]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

M. Romanowskij suppose que l'on a (V_1), (V_2) et $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = R < 1$.

Lemme. Soit un système de fonctions réelles ou complexes $\{f_{nk}(x, y)\}$ $n = 1, 2 \ldots, k = 1, 2 \ldots, n$. Supposons que l'on ait:

$$f_{nk}(x, y) = 1 + \sigma_{nk}(x, y) = 1 + \psi_{nk}(x, y) + \theta_{nk}(x, y) \tag{86}$$

les fonctions ψ_{nk}, θ_{nk} satisfaisant aux conditions suivantes: quel que soit le nombre positif m, on a:

(T_1) $\quad \psi_{nk} \to 0$ $\quad$ uniformément pour $n \to \infty$, $|x| \leqq m$, $|y \leqq m$

(T_2) $\quad \sum_{k=1}^{n} |\theta_{nk}| \to 0$ $\quad$ uniformément pour $n \to \infty$, $|x| \leqq m$, $|y| \leqq m$

(T_3) $\quad \sum_{k=1}^{n} |\psi_{nk}| < M$ $\quad$ pour $|x| \leqq m$, $|y| \leqq m$

M étant indépendant de n (mais dépendant en général de m).

Alors on a, uniformément pour $|x| \leqslant m \geqq |y|$:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\prod_{k=1}^{n} f_{nk} - e^{\sum_{k=1}^{n} \psi_{nk}} \right] = 0. \tag{87}$$

Démonstration. Supposons que l'on ait: $|x| \leqq m \geqq |y|$.

On a pour n suffisamment grand:

$$\log f_{nk} = \log (1 + \sigma_{nk}) = \sigma_{nk}(1 + \alpha_{nk}) \tag{88}$$

où $|\alpha_{nk}| < |\sigma_{nk}|$

$$\sum_{k=1}^{n} \log f_{nk} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{nk} + \sum_{k=1}^{n} \sigma_{nk} \alpha_{nk} = \sum_{k=1}^{n} \psi_{nk} + \sum_{k=1}^{n} \theta_{nk} + \sum_{k=1}^{n} \sigma_{nk} \alpha_{nk}. \tag{89}$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, nous pouvons d'après (T_1), (T_2), (T_3) déterminer N_1 de manière que pour $n \geqq N_1$:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \theta_{nk} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{90}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sigma_{nk} \right| \leqq \sum_{k=1}^{n} |\psi_{nk}| + \sum_{k=1}^{n} |\theta_{nk}| < M + 1 \tag{91}$$

$$|\alpha_{nk}| \leqq |\sigma_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)} \tag{92}$$

il en résulte:

$$(93) \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} \log f_{nk} - \sum_{k=1}^{n} \psi_{nk} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(M+1)\varepsilon}{2(M+1)} = \varepsilon$$

ce qui démontre le lemme.

(94) Nous aurons besoin dans la suite de quelques inégalités de Liapounoff:

(S_1) On a pour z réel et $0 < \delta \leqq 1$:

$$(95) \qquad \cos z < 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2^\delta} |z|^{2+\delta}$$

$$(96) \qquad |\sin z - z| < \frac{1}{2} |z|^{2+\delta}.$$

(S_2) On a pour $p, q > 0$, $p < q$:

$$(97) \qquad \mathcal{E}(|x|^p) \leqq [\mathcal{E}(|x|^q)]^{\frac{p}{q}}$$

enfin:

$$(S_3) \qquad |a+b|^{2+\delta} \leqslant 2^{1+\delta}(|a|^{2+\delta} + |b|^{2+\delta}).$$

(S_1) se démontre aisément à l'aide du développement de Taylor, les inégalités (S_2), (S_3) résultent de l'inégalité connue de Jensen, concernant les fonctions convexes.

Passons à la démonstration du théorème généralisé de M. Bernstein. Nous pouvons supposer que le nombre δ figurant dans (V_2) satisfait à l'inégalité $0 < \delta \leqq 1$. En effet, si (82) est verifiée pour un $\delta_1 > 0$, elle l'est encore pour tout $\delta < \delta_1$ et positif.

La démonstration consiste dans trois étapes. On calcule d'abord la fonction caractéristique des variables $\frac{X_n}{\sqrt{B_n}}, \frac{Y_n}{\sqrt{C_n}}$. Une application du lemme montre que la différence entre cette fonction caractéristique et celle qui correspond à la loi de Gauss tend uniformément vers zéro. L'application du théorème II termine la démonstration.

Posons:

$$(98) \qquad \varphi_{nk}(t', t'') = \mathcal{E}\{e^{i\left(\frac{x_k}{\sqrt{B_k}} t' + \frac{y_k}{\sqrt{C_k}} t''\right)}\}$$

$$(99) \qquad \Phi_n(t', t'') = \prod_{=1}^{n} \varphi_{nk}(t', t'').$$

Evidemment $\varphi_{nk}(t', t'')$ est la fonction caractéristique de $\frac{x_k}{\sqrt{B_n}}$, $\frac{y_k}{\sqrt{C_n}}$, et d'après (V_1), (W_1), $\Phi_n(t', t'')$ est celle de $\frac{X_n}{\sqrt{B_n}}$, $\frac{Y_n}{\sqrt{C_n}}$.

D'après les inégalités (S_1) et (S_3) nous aurons:

$$(100)\quad e^{i\left(\frac{\xi t'}{\sqrt{B_n}}+\frac{\eta t''}{\sqrt{C_n}}\right)} = 1 + i\left(\frac{\xi t'}{\sqrt{B_n}} + \frac{\eta t''}{\sqrt{C_n}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi t'}{\sqrt{B_n}} + \frac{\eta t''}{\sqrt{C_n}}\right)^2 + R_n(t', t'')$$

où

$$(101)\quad |R_n(t', t'')| < 4\left(\left|\frac{t'\xi}{\sqrt{B_n}}\right|^{2+\delta} + \left|\frac{t''\eta}{\sqrt{C_n}}\right|^{2+\delta}\right).$$

Comme $\mathcal{E}(x_k) = \mathcal{E}(y_k) = 0$, il en résulte:

$$(102)\quad \varphi_{nk}(t', t'') = 1 - \mathcal{E}\left\{\left(\frac{t' x_k}{\sqrt{B_n}} + \frac{t'' y_k}{\sqrt{C_n}}\right)\right\} + R_{nk}(t', t'')$$

$$(103)\quad |R_{nk}(t, t'')| \leqq 4\left[\left|\frac{t'}{\sqrt{B_n}}\right|^{2+\delta} b_k^{(2+\delta)} + \left|\frac{t''}{\sqrt{C_n}}\right|^{2+\delta} c_k^{(2+\delta)}\right].$$

On a:

$$(104)\quad \mathcal{E}\left\{\left(\frac{t' x_k}{\sqrt{B_n}} + \frac{t'' y_k}{\sqrt{C_n}}\right)^2\right\} \leqslant 2\,\mathcal{E}\left\{\frac{|t'|^2 x_k^2}{B_n} + \frac{|t''|^2 y_k}{C_n}\right\} = 2\left(|t'|^2 \frac{b_k^2}{B_n} + |t''|^2 \frac{c_k^2}{C_n}\right)$$

donc:

$$(105)\quad \sum_{k=1}^{n} \mathcal{E}\left\{\left(\frac{t' x_k}{\sqrt{B_n}} + \frac{t'' y_k}{\sqrt{C_n}}\right)^2\right\} \leqq 2\,(|t'|^2 + |t''|^2)$$

la condition (T_3) du lemme est par suite remplie. L'inégalité (S_2) de Liapounoff donne:

$$(106)\quad \frac{b_k^2}{B_n} \leqq \left(\frac{b_k^{(2+\delta)}}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}}\right)^{\frac{2}{2+\delta}} \leqq \left[\frac{B_n^{(2+\delta)}}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}}\right]^{\frac{2}{2+\delta}}$$

donc d'après (82) on a $\frac{b_k^2}{B_n} \to 0$ et de même $\frac{c_k^2}{C_n} \to 0$. La condition (T_1) est par suite remplie. Enfin, il résulte de (103)

$$(107)\quad \sum_{k=1}^{n} |R_{nk}(t', t'')| \leqq 4\,|t'|^{2+\delta} \frac{B_n^{(2+\delta)}}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}} + 4\,|t''|^{2+\delta} \frac{C_n^{(2+\delta)}}{C_n^{1+\frac{\delta}{2}}}$$

l'expression à droite tend vers zéro (uniformément dans tout domaine borné des variables t', t'') en vertu de (82) et la condition (T_2) est aussi remplie. Par conséquence, comme:

$$(108) \qquad \sum_{k=1}^{n} \mathcal{E}\left\{\left(\frac{t' x_k}{\sqrt{B_n}} + \frac{t'' y_k}{\sqrt{C_n}}\right)^2\right\} = t'^2 + t''^2 + 2 R_n t' t''$$

on aura d'après le lemme

$$(109) \qquad \lim_{n \to \infty} [\Phi_n(t', t'') - e^{-\frac{1}{2}(t'^2 + t''^2 + 2R_n t' t'')}] = 0$$

uniformément pour $|t'|$, $|t''| \leqq m$.

Mais $e^{-\frac{1}{2}(t'^2+t''^2+2R_n t' t'')}$ est la fonction caractéristique de la loi de **Gauss** (110), — l'application du théorème II donne par suite le théorème fondamental.

Remarque. Il est aisé de verifier, que $1 - \lambda_{nk}$ désignant la probabilité de l'existence simultanée des inégalités: $|x_k| \leqq L_n$ et $|y_k| \leqq L_n$, le théorème limite sera applicable toutes les fois que l'on a en même temps: $\frac{L_n}{B_n} \to 0$, $\frac{L_n}{C_n} \to 0$, et $\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k} \to 0$, la valeur de B_n, C_n et G_n étant calculée dans l'hypothèse que l'on a:

$$|x_k| \leqq L_n, \quad |y_k| \leqq L_n.$$

6. Considérons deux suites de variables aléatoires (13), (14). Supposons que l'on a (76). Posons (75), (77), (78), (79), (80) et:

$$(111) \qquad U_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2; \quad V_n = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

$$(112) \quad b_i^{(3)} = \mathcal{E}(x_i^3) = \mathcal{E}[x_i(x_i^2 - b_i^2)]; \quad c_i^{(3)} = \mathcal{E}(y_i^3) = \mathcal{E}[y_i(y_i^2 - c_i^2)]$$

$$(113) \qquad b_i^{(4)} = \mathcal{E}(x_i^4); \quad c_i^{(4)} = \mathcal{E}(y_i^4)$$

$$(114) \quad d_i^{(4)} = \mathcal{E}[(x_i^2 - b_i^2)^2] = b_i^{(4)} - b_i^4; \quad f_i^{(4)} = \mathcal{E}[(y_i^2 - c_i^2)^2] = c_i^{(4)} - c_i^4$$

$$(115) \qquad D_n^{(4)} = \sum_{i=1}^{n} d_i^{(4)}; \quad F_n^{(4)} = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(4)}.$$

Enfin pour $\delta > 0$:

(116) $$d_i^{(4+2\delta)} = \mathcal{E}(|x_i^2 - b_i^2|^{2+\delta}); \quad f_i^{(4+2\delta)} = \mathcal{E}(|y_i^2 - b_i^2|^{2+\delta})$$

(117) $$D_n^{(4+2\delta)} = \sum_{i=1}^{n} d_i^{(4+2\delta)}; \quad F_n'^{(4+2\delta)} = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(4+2\delta)}.$$

Considérons une suite de fonctions: $\{f_n(u, v)\}$ et posons:

(118) $$Z_n = f_n\left(\frac{X_n}{\sqrt{B_n}}, \ \frac{U_n - B_n}{\sqrt{D_n^{(4)}}}\right)$$

(119) $$Z_n' = f_n\left(\frac{Y_n}{\sqrt{C_n}}, \ \frac{V_n - C_n}{\sqrt{F_n^{(4)}}}\right)$$

Désignons par $F_n(\xi, \eta)$ la loi de probabilité des variables: $\dfrac{X_n}{\sqrt{B_n}}$ et $\dfrac{U_n - B_n}{\sqrt{D_n^{(4)}}}$ par $F_n'(\xi, \eta)$ celle des variables: $\dfrac{Y_n}{\sqrt{C_n}}$ et $\dfrac{V_n - C_n}{\sqrt{F_n^{(4)}}}$.

Enfin soient $F_n(\zeta)$ la loi de probabilité de Z_n et $F_n'(\zeta)$, celle de Z_n'.

Théorème IV. *Si les variables x_n, y_n et les fonctions $f_n(u, v)$ satisfont aux conditions suivantes:*

(R_1) *pour $i \neq k$, x_i est indépendant de x_k et y_i de y_k.*

(R_2) $b_i = c_i$, $b_i^{(3)} = c_i^{(3)}$, $b_i^{(4)} = c_i^{(4)}$.

(R_3) *la suite $\{f_n(u, v)\}$ satisfait aux conditions (P_1), (P_2), (P_3).*

(R_4) $$\left|\frac{B_n^{(3)}}{\sqrt{B_n D_n^{(4)}}}\right| = \left|\frac{C_n^{(3)}}{\sqrt{C_n F_n^{(4)}}}\right| < R < 1.$$

(R_5) *Il existe un $\delta_1 > 0$ et un $\delta_2 > 0$ tels que:*

(120) $$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n^{(2+\delta_1)}}{B_n^{1+\frac{\delta_1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{D_n^{(4+2\delta_1)}}{[D_n^{(4)}]^{1+\frac{\delta_1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_n^{(2+\delta_2)}}{C_n^{1+\frac{\delta_2}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n^{(4+2\delta_2)}}{[F_n^{(4)}]^{1+\frac{\delta_2}{2}}} = 0.$$

Alors on a:

(121) $$\lim_{n\to\infty} [F_n(\zeta) - F_n'(\zeta)] = 0$$

et cela uniformément.

D'après les conditions (R_1) et (R_5) les variables x_i, x_i^2 et de même y_i, y_i^2 satisfont aux conditions du théorème généralisé de M. Bernstein. Il en résulte (le coëfficient de corrélation étant d'après (R_2) le même), que $F_n(\xi, \eta) \to F_n'(\xi, \eta) \to 0$ et cela uniformément. En outre les suites: $\{F_n(\xi, \eta(\}$, $\{F'_n(\xi, \eta)\}$ sont d'après (R_4) presque absolument continues. Le théorème III est par suite applicable et il en résulte (121).

Corollaire. Supposons que: $x_1 \ldots x_n$; $y_1 \ldots y_n$ désignent respectivement les n valeurs de deux variables aléatoires x, y se produisant dans n épreuves indépendantes.

Nous admettons que y satisfait à la loi de Gauss et que x possède les quatre premiers moments égaux aux moments correspondants de y, enfin qu'il existe $\mathcal{E}(|x|^{4+\delta})$ pour un $\delta > 0$.

Il en résulte que la différence entre $F_n(\zeta)$ et $F'_n(\zeta)$ d'après les notations du théorème précédent) tend uniformément vers zéro.

Institut de statistique de l'École Centrale Agronomique.

Sur la structure de l'ensemble des solutions cycliques d'un système d'équations différentielles

par

W. S. Urbański

Pionki.

Soit donné un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt \tag{1}$$

où

$$X_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

sont des fonctions analytiques, réelles, uniformes remplissant la condition

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 > 0.$$

Les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient envisagées comme des coordonnées cartesiennes dans un hyper-espace à n dimensions; le paramètre t peut être appelé le temps.

Les solutions des équations (1) jouissent alors, comme on le sait, des propriétés suivantes:

A) Unicité: par un point initial $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ il passe une solution unique $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$.

B) Les solutions dépendent d'une manière continue des valeurs initiales; on peut exprimer cela comme il suit: soient $x_i(t)$ et $\bar{x}_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ deux solutions passant par x_i^0 et $\bar{x}_i^0$ pour $t = 0$; ε et τ étant deux nombres positifs, il existe un $\eta > 0$ tel que la condition $|x_i^0 - \bar{x}_i^0| < \eta$ entraîne les inégalités $|x_i(t) - \bar{x}_i(t)| < \varepsilon$ pour $0 \leqslant t \leqslant \tau$.

Envisageons une surface sans contact S. Pour simplifier les raisonnements, cette surface soit une portion ouverte d'un hyperplan à $n - 1$ dimensions; prenons les coordonnées de façon que $x_n = 0$ représente l'équation de la surface S.

Envisageons un point initial P_0 sur la surface S. Par ce point il passe une trajectoire représentant la solution des équations (1). Il peut arriver que cette trajectoire retourne, après un intervalle de temps $\theta(P_0)$, de nouveau à un point P_1 de cette surface. On appelle ce point P_1 le 1-er conséquent du point P_0; P_0 s'appelle l'antécédent du point P_1. P_1 peut avoir pour son 1-er conséquent sur S un point P_2 qui s'appelle le 2-ème conséquent du point P_0; par analogie on obtient les conséquents d'ordres 3, 4, . . .

Lorsque la trajectoire issue du point P_0 revient à la surface S, un ensemble de trajectoires voisines le fait de même (a cause de la propriété B); seulement le temps du retour à la surface S varie de point à point, cette fonction $\theta(P)$ étant d'ailleurs une fonction continue de la position du point pour un voisinage de P_0.

Du fait que les fonctions X_i sont analytiques résulte la propriété suivante sur laquelle est basé le théorème à démontrer:

C) Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ $(x_n = 0)$ les coordonnées du point initial P_0 et $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ les coordonnées de son point conséquent P_1. Alors, pour les coordonnées d'un point $Q_0(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ assez voisin du point P_0 et les coordonnées de son point conséquent $Q_1(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1})$ on a la propriété fondamentale:

Les différences $\eta_1 - y_1$, $\eta_2 - y_2, \ldots, \eta_{n-1} - y_{n-1}$ sont des fonctions analytiques des différences $\xi_1 - x_1$, $\xi_2 - x_2, \ldots, \xi_{n-1} - x_{n-1}$.

Supposons que par un point P_0 passe une trajectoire cyclique telle que P_0 coïncide avec son 1-er conséquent P_1. (On peut toujours prendre une portion de la surface S assez petite pour que les autres points conséquents ne s'y trouvent pas).

Pour simplifier les formules prenons le commencement du système des coordonnées au point P_0, donc

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0.$$

Comme P_1 coïncide avec P_0, on a aussi

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_{n-1} = 0.$$

On peut écrire pour les coordonnées $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ les formules

$$\eta_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{2}$$

où les φ_i sont des fonctions analytiques des variables réelles $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$.

Pour qu'un point $Q_0(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ coïncide avec son 1-er conséquent $Q_1(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ il faut et il suffit que pour ce point

$$\eta_i = \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3}$$

Les $2(n-1)$ équations (3) et (2) permettent de trouver les points en question. Elles conduisent aux $n-1$ équations en ξ_i

$$\xi_i = \varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{4}$$

Or il est facile d'établir la proposition suivante: Soit $g(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ une fonction réelle de variables réelles qui est analytique dans un voissinage V d'un point $\xi_1^0, \ldots, \xi_m^0$.

Sous cette hypothèse un des deux cas suivants a lieu:

L'équation

$$g(\xi_1, \ldots, \xi_m) = 0$$

est remplie par tous les points de V; ou bien l'ensemble des solutions de cette équation qui sont situées dans V est de mesure nulle.

En appliquant cette proposition aux équations (4) on a la conclusion suivante:

Dans le voisinage d'un point cyclique quelconque P_0 qui coïncide avec son 1-er conséquent ou bien

F_1 { les points cycliques du même genre remplissent un voisinage de P_0;

ou bien

F_2 { ces points forment un ensemble de mesure nulle. (En outre cet ensemble est alors nulle part dense).

Le temps du retour à la surface S, $\theta(P)$, qui représente la période pour les points cycliques de la catégorie envisagée (se fermant au 1-er retour), est une fonction continue de la position du point; on peut la représenter, comme $\theta(P_0) + \tau$, τ étant une fonction continue du point; $\tau = 0$ pour le point P_0.

Toutes les considérations précédentes subsisteront, lorsqu'on examinera le 2-ème, 3-ème,... retour du point P_0 Les points de son voisinage engendrent les 2-èmes, 3-èmes,... conséquents, auquels on pourra appliquer les mêmes raisonnements qu'auparavant.

Il peut arriver que pour un point Q_0 de ce voisinage le premier conséquent Q_1 ne coïncide pas avec Q_0, mais le deuxième (ou troisième,...) conséquent $Q_2 (Q_3, \ldots)$ réalise cette coïncidence.

Dans ce cas la période peut être représentée, comme $2\theta(P_0) + \tau$ (ou $3\theta(P_0) + \tau, \ldots$), où τ est une fonction continue s'annulant au point P_0.

Au moins un des cas F_1 et F_2 cosidérés plus haut pour le premier retour se présentera forcément pour le 2-ème, 3-ème,... retour.

Formulons les propriétés des points conséquents d'ordre quelconque p qui se trouvent dans le voisinage du point cyclique P_0 coïncidant avec son 1-er conséquent:

F_1 — Lorsque pour le p-ème retour du point choisi P_0 les équations (4) sont satisfaites identiquement, tous les points d'un voisinage de ce point P_0 ferment leurs cycles. (La même chose arrivera pour le $2p$-ème, $3p$-ème,... retour).

F_2 — Dans le cas contraire, l'ensemble des points cycliques de cette catégorie est de mesure nulle.

Lorsque le dernier cas a lieu pour tout nombre p, la somme de tous les ensembles des points cycliques correspondant aux valeurs $p = 1, 2, 3, \ldots$ est de mesure nulle. Le point P_0 est donc un point de densité nulle relativement à l'ensemble formé par toutes les trajectoires cycliques.

En vertu des considérations ci-dessus, on peut maintenant formuler la proposition suivante:

Lemme. Sous les hypothèses énoncées au commencement du travail, l'ensemble des points cycliques situés sur une surface sans contact se laisse décomposer en une somme de deux sous-ensembles dont l'un est ouvert [1]) et l'autre est de mesure nulle.

Comme une conséquence immédiate on peut énoncer la même propriété des trajectoires cycliques sous la forme du théorème suivant:

Théorème. Sous les hypothèses énoncées au commencement du travail, les intégrales cycliques peuvent être partagées en deux catégories de la façon suivante: les trajectoires de la 1-ère catégorie forment un ensemble ouvert, celles de la 2-ème catégorie forment un ensemble de mesure nulle (dans la variété à n dimensions).

Il est donc impossible que l'ensemble de tous les points cycliques ait une densité non nulle en un de ses points frontières.

Conséquence 1. Lorsque dans tout voisinage d'une trajectoire cyclique il y a au moins une trajectoire non fermée, presque tout le voisinage de cette trajectoire cyclique se compose de trajectoires non fermées.

En effet, la catégorie 1-ère du théorème est exclue dans ce voisinage.

---

[1]) relativement à cette surface sans contact.

En ce qui concerne la structure des ensembles de la 1-ère catégorie, ils ont le caractère suivant. Des considérations précédentes il s'ensuit facilement que dans le voisinage du point P_0 à période $\theta(P_0)$ les points cycliques peuvent avoir pour périodes exclusivement les valeurs:

$$\theta(P_0)+\tau_1,\quad q_1\theta(P_0)+\tau_{q_1},\quad q_2\theta(P_0)+\tau_{q_2},\ldots,p\theta(P_0)+\tau_p,$$

où p est un nombre fixe et les $q_1, q_2, \ldots$ sont les diviseurs de p; les τ sont des fonctions continues et qui s'annulent au point P_0.

On voit aussi facilement de ce qui précède que les ensembles des points qui ferment leurs cycles au temps $k\theta(P_0)+\tau_k$, où $k<p$, sont de mesure nulle, seulement l'ensemble des points à période $p\theta(P_0)+\tau_p$ a une mesure positive: il épuise donc le voisinage de P_0 presque tout entier.

Pour l'existence d'un domaine de points cycliques (cas F_1) il faut donc qu'il y ait un nombre $p=$ ordre de conséquence relativement à une surface sans contact, pour lequel certaines équations deviennent identités dans ce domaine.

Nous obtenons ainsi la suivante

Conséquence 2. Lorsque dans chaque voisinage d'une trajectoire cyclique il y a des trajectoires à périodes allant à ∞ $(\theta+\tau,\ k_1\theta+\tau_1,\ k_2\theta+\tau_2,\ldots;\ k_1,k_2,\ldots\rightarrow+\infty)$ ces trajectoires cycliques forment un ensemble de mesure nulle.

En effet, les cas F_2, pour les conséquents de tous les ordres, sont les seuls possibles.

Généralisation 1. On peut concevoir une variété métrique, où les équations (1) jouissent des propriétés A, B, C, et des formules analogues à (2) sont applicables aux solutions. Le théorème reste valable.

Généralisation 2. Le théorème démontré s'appuie sur l'hypothèse que les fonctions φ_i sont analytiques. Or il peut arriver que les fonctions φ_i soient analytiques sans que les fonctions X_i figurant dans les équations (1) le soient. Nos résultats subsisteront évidemment aussi dans ce cas.

P. e. le mouvement d'un point (masse $=1$) soumis à la force: $f=-ax$ pour $x>0$, $f=-bx$ pour $x>0$, $a,b>0$, $a\neq b$, représenté par les équations $\dfrac{dx}{\dot{x}}=\dfrac{d\dot{x}}{f(x)}=dt$, se passe tout à fait régulièrement et jouit des propriétés considérées dans le travail, quoique la fonction f ne soit pas analytique sur le plan $x=0$.

Application à la mécanique. Nos résultats peuvent trouver quelque application dans la mécanique, p. e. dans le problème des trois corps. L'existence des solutions cycliques est établie dans ce problème [1]). Mais il y a aussi des „solutions asymptotiques", c'est-à-dire s'approchant, pour le temps croissant à l'infini ($t \to +\infty$, ou $t \to -\infty$), des autres [2]). On s'aperçoit immédiatement, lorsque cela a lieu pour une trajectoire cyclique, que les conditions de l'application de la „Conséquence 1" sont réalisées. Par conséquent, les solutions cycliques y forment un ensemble de mesure nulle.

Je tiens à remercier M. T. Ważewski pour les bons et bienveillants conseils qu'il a bien voulu me donner.

---

[1]) Poincaré, Acta Math. **13**, p. 122; Méthodes Nouv. Méc. Cél. I, 117; pour le cas des systèmes mécaniques à 2 degrés de liberté, voir aussi G. D. Birkhoff „Dynamical Systems" p. 233.

[2]) Poincaré, Acta Math. **13**, p. 25, 225; Méth. Nouv. I ch. VII, III ch. XXXIII.

Birkhoff l. c.; Whittaker „Treatise on the Analytical Dynamics" p. 389.

Sur les intégrales stables non périodiques [1]) des systèmes d'équations différentielles

par

T. Ważewski

Kraków.

Dans une note insérée au présent volume [2]) M. Urbański conclut de l'existence d'une *intégrale* qui est *partout dense sur une variété ouverte* à l'existence d'une famille non dénombrable (plus précisément de la puissance du continu) d'intégrales du même genre.

Sans conserver cette hypothèse, nous obtiendrons un résultat analogue en adoptant une hypothèse essentiellement [3]) plus générale, à savoir que l'intégrale envisagée est stable, non périodique et que tous ses points d'accumulation sont réguliers (c.-à-d. vérifient (3) v. plus bas). Nous procédons par la méthode de M. Urbański convenablement modifiée. Notre généralisation réussit grâce à l'observation, fondamentale pour nos raisonnements, que les points limites d'une intégrale stable non périodique qui sont situés sur une surface sans contact renferment un ensemble parfait donc non dénombrable (de la puissance du continu). Grâce aux résultats bien généraux de M. Kamke nous pouvons remplacer l'hypothèse que les équations envisagées sont de classe C^1 par une hypothèse plus générale.

Théorème. Considérons un système d'équations

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, \ldots, y_n), \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

dont les deuxièmes membres ne dépendent pas de t et sont continus

---

1) Nous entendons par intégrale stable non périodique du système (1) (v. plus bas) toute intégrale non périodique $y_i = y_i(t)$, $(-\infty < t < +\infty)$ jouissant de la propriété suivante: Si notre intégrale passe par um point $y_1^0, \ldots, y_n^0$ il existe une suite $t_1, t_2, \ldots$ telle que $t_\nu \to +\infty$ et $y_i(t_\nu) \to y_i^0$, $(i = 1, \ldots n)$.

2) Note sur les systèmes quasi-ergodiques, v. ce volume p. 20 s. s.

3) Pour la justification cf. l'exemple signalé dans la note de M. Denjoy: Sur les caractéristiques à la surface du tore (C. R. Paris T. 194, p. 830, année 1932).

dans un ensemble ouvert Ω. Supposons que par tout point de Ω il passe une intégrale (c.-à-d. caractéristique) unique de ce système. Supposons qu'une intégrale I

(2) $$y_i = \varphi_i(t), \quad (-\infty < t < +\infty, \quad i = 1, \ldots, n)$$

de ce système soit stable non périodique et que l'ensemble $\bar{I}$ (composé des points de I et de ses points d'accumulation) soit borné et contenu dans Ω. Supposons enfin que l'on ait en tout point de $\bar{I}$ l'inégalité

(3) $$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 > 0, \quad (\text{sur } \bar{I}).$$

Sous cette hypothèse la famille F des intégrales stables non périodiques, contenues dans $\bar{I}$ et partout denses relativement à $\bar{I}$ est non dénombrable (plus précisément de la puissance du continu). L'ensemble H des points situés sur de telles intégrales est de la seconde catégorie de Baire (et à la fois un ensemble G_δ) relativement à $\bar{I}$. L'ensemble $\bar{I} - H$ est de la première catégorie de Baire relativement à $\bar{I}$.

Démonstration. I. Choisissons, sur l'intégrale I, un point $P = (y_1^0, \ldots, y_n^0)$. Soit T la tangente à I au point P et désignons par π l'hyperplan à $n-1$ dimensions passant par P et perpendiculaire à T. Choisissons enfin sur π un voisinage sphérique ouvert S centré en P de façon que $\bar{S}$ soit une surface sans contact.

On pourra facilement établir les propriétés suivantes des intégrales de notre système *):

II. L'ensemble $I \cdot S$ est dense en lui-même car l'intégrale I est stable et non périodique. L'ensemble $\overline{I \cdot S}$ est, par consequent, parfait.

III. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale J appartienne à la famille F consiste en ce qu'il existe une suite de points appartenant à $\bar{I} \cdot J$ et tendant vers un point de I. Pour toute intégrale J de cette sorte on a $\overline{I \cdot S} = \overline{J \cdot S}$.

---

*) La démonstration peut être déduite des propositions suivantes insérées dans le livre de M. Kamke (Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930): Hilfssatz 1, 2, 3, 4 (pages 204—209) et Satz 3 (p. 213) sans la propriété y figurant sous b. Ces propositions y sont démontrées pour le cas de deux équations mais elles se généralisent facilement au cas de n équations. On s'en convaicra en observant que les démonstrations de ces propositions peuvent être remaniées de façon à éviter l'usage des polygones.

IV. Toute intégrale passant par un point de $\bar{I}$ est entièrement contenue dans $\bar{I}$.

Considérons maintenant une suite de voisinages sphériques ouverts G_ν

$$G_{\nu+1} \subset G_\nu \subset S \qquad (\nu = 1, 2, ...)$$

centrés au point P et de rayons tendant vers zéro. Désignons par

$$K_\nu$$

la zone d'émission [1]) de l'ensemble $G_\nu \cdot \bar{I}$.

Les ensembles K_ν sont ouverts et partout denses [2]) relativement à $\bar{I}$ *).

Les ensembles $B_\nu = K_\nu \cdot \overline{S \cdot I}$ sont aussi ouverts et partout denses relativement à $\overline{S \cdot I}$ *).

Il résulte de là que les ensembles $C_\nu = \overline{S\,I} - B_\nu$ sont fermés et non denses relativement à $\overline{S\,I}$. L'ensemble $C = \Sigma C_\nu$ est donc de première catégorie relativement à $\overline{S\,I}$. Mais l'ensemble $\overline{S\,I}$ est parfait; il est par conséquent de seconde catégorie par rapport à lui même et possède la puissance du continu. L'ensemble

$$R = \prod_{\nu/1}^{\infty} B_\nu = \overline{S\,I} - C$$

possède, par suite, la puissance du continu et est de seconde catégorie relativement à $\overline{S\,I}$.

En vertu des alinéas III et IV on a $H = \prod\limits_{\nu/1}^{\infty} K_\nu$; l'ensemble H qui constitue évidemment la zone d'émission de R est donc de seconde catégorie relativement à $\bar{I}$ *). (Il est clair que K est un ensemble G_δ). L'ensemble $\bar{I} - H$ présente la somme des ensembles fermés $\bar{I} - K_\nu$ non denses relativement à $\bar{I}$ il est donc de première catégorie relativement à $\bar{I}$.

Or chaque point de R appartient à une intégrale de la famille F et inversement chaque intégrale de cette famille coupe R suivant un ensemble *dénombrable* de points. R possédant la puissance du continu il s'ensuit que la famille F possède aussi la puissance du continu.

---

[1]) c.-à-d. l'ensemble des points situés sur les intégrales rencontrant l'ensemble $G_\nu \cdot \bar{I}$.

[2]) I est partout dense relativement à $\bar{I}$ et l'on a $I \subset K_\nu$.

Sur une suite de fonctions liée aux ensembles plans fermés

par

F. Leja

Warszawa.

1. Soit E un ensemble fermé et borné de points du plan, n un nombre naturel fixe et

$$\zeta_0,\ \zeta_1,\dots,\ \zeta_n \tag{1}$$

$n+1$ points quelconques de l'ensemble E, différents entre eux. Formons la matrice à $n+1$ lignes et $n+1$ colonnes que voici

$$\left|\begin{matrix} 1, & \dfrac{z-\zeta_1}{\zeta_0-\zeta_1},\dots, & \dfrac{z-\zeta_n}{\zeta_0-\zeta_n} \\ \dfrac{z-\zeta_0}{\zeta_1-\zeta_0}, & 1,\dots, & \dfrac{z-\zeta_n}{\zeta_1-\zeta_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{z-\zeta_0}{\zeta_n-\zeta_0}, & \dfrac{z-\zeta_1}{\zeta_n-\zeta_1},\dots, & 1 \end{matrix}\right| \tag{2}$$

dont chaque terme diagonal est égal à 1 et le terme de la j-ième ligne et la k-ième colonne est égal à $\dfrac{z-\zeta_k}{\zeta_j-\zeta_k}$ si $j\neq k$, z étant une variable complexe.

Désignons par $L_n^{(j)}(z,\zeta)$, où ζ représente l'ensemble des points (1), le produit de tous les termes de la j-ième ligne de la matrice (2) et par $C_n^{(j)}(z,\zeta)=C_n^{(j)}(z,\zeta_0,\zeta_1,\dots,\zeta_n)$ le produit de tous les termes de la j-ième colonne. On a donc pour $j=0,1,\dots,n$:

$$L_n^{(j)}(z,\zeta)=\frac{z-\zeta_0}{\zeta_j-\zeta_0}\cdots\frac{z-\zeta_{j-1}}{\zeta_j-\zeta_{j-1}}\cdot\frac{z-\zeta_{j+1}}{\zeta_j-\zeta_{j+1}}\cdots\frac{z-\zeta_n}{\zeta_j-\zeta_n}, \tag{3}$$

$$C_n^{(j)}(z,\zeta)=\frac{(z-\zeta_j)^n}{(\zeta_0-\zeta_j)\dots(\zeta_{j-1}-\zeta_j)(\zeta_{j+1}-\zeta_j)\dots(\zeta_n-\zeta_j)}. \tag{4}$$

Le plus grand des modules

$$|L_n^{(0)}(z,\zeta)|,\quad |L_n^{(1)}(z,\zeta)|,\ldots,\quad |L_n^{(n)}(z,\zeta)|,$$

où z est quelconque mais fixe, varie avec les points (1) parcourant l'ensemble E et atteint dans E un minimum qui sera désigné comme il suit

$$L_n(z)=\min_{(\zeta)}\{\max_{(j)}|L_n^{(j)}(z,\zeta)|\}. \tag{5}$$

Paraillement posons

$$C_n(z)=\min_{(\zeta)}\{\max_{(j)}|C_n^{(j)}(z,\zeta)|\}. \tag{6}$$

Faisons maintenant varier n dans les formules (5) et (6). On obtient deux suites des fonctions nonnégatives $\{L_n(z)\}$ et $\{C_n(z)\}$ définies dans le plan entier et liées intimement à l'ensemble donné E. J'ai démontré ailleurs [1]) que, si le diamètre transfini de l'ensemble E est positif (ce qui a lieu toujours lorsque E contient un continu quelconque), la suite

$$\sqrt[n]{L_n(z)}, \qquad n=1,2,\ldots,$$

tend dans le plan entier vers une fonction limite, le logarithme de cette fonction étant égal à la fonction de Green d'un domaine infini extérieur à l'ensemble E.

Le but de ce travail est de démontrer que la suite

$$C_1(z),\quad C_2(z),\ldots,\quad C_n(z),\ldots \tag{7}$$

jouit d'une propriété analogue à celle de la suite $\{L_n(z)\}$.

2. J'aurai à m'appuyer dans ce qui suivra sur le lemme suivant:

Lemme 1. *Les fonctions* (7) *satisfont, quel que soit* z, *aux inégalités que voici:*

$$C_{n+k}(z)\geqq C_n(z)\cdot C_k(z),\quad \text{où}\quad n \text{ et } k=1,2,\ldots \tag{8}$$

Démonstration. Soit z un point quelconque mais fixe du plan et

$$x_0,\ x_1,\ldots,\ x_n,\ x_{n+1},\ldots,\ x_{n+k} \tag{9}$$

$n+k+1$ points de l'ensemble E pour lesquels on ait

$$C_{n+k}(z)=\max_{(j)}|C_{n+k}^{(j)}(z,x)|,\quad \text{où}\quad \{x=x_0,x_1,\ldots,x_{n+k}\}, \tag{10}$$

[1]) Ce journal t. 12, 1934, p. 57--71.

l'indice j parcourant les nombres $0, 1, \ldots, n+k$. Choisissons k points quelconques de la suite (9), soit $x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_k}$, et désignons par

$$V(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}) = \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq k} |x_{j_\mu} - x_{j_\nu}|$$

le produit de tous les distances mutuelles entre ces points [1]). Formons ensuite l'expression

$$\text{(11)} \qquad \frac{|(z - x_{j_1})(z - x_{j_2}) \ldots (z - x_{j_k})|^k}{V(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})}$$

et cherchons le minimum de cette expression lorsque, z et k étant fixes, les points $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}$ parcourent la suite (9). En changeant convenablement les indices des points (9) on peut toujours supposer que ce minimum soit égal à

$$\text{(12)} \qquad \frac{|(z - x_{n+1})(z - x_{n+2}) \ldots (z - x_{n+k})|^k}{V(x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})}.$$

L'expression (11) est donc au moins égale à l'expression (12) quels que soient les indices $j_1, j_2, \ldots, j_k \leqq n+k$. En particulier, on a, quel que soit $i = 0, 1, \ldots, n$ et $l = n+1, \ldots, n+k$, l'inégalité

$$\frac{|(z-x_i)(z-x_{n+1}) \ldots (z-x_{l-1})(z-x_{l+1}) \ldots (z-x_{n+k})|^k}{V(x_i, x_{n+1}, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_{n+k})} \geqq \frac{|(z-x_{n+1}) \ldots (z-x_{n+k})|^k}{V(x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})},$$

d'où résulte l'inégalité suivante:

$$\frac{|z - x_i|^k}{|(x_i - x_{n+1}) \ldots (x_i - x_{l-1})(x_i - x_{l+1}) \ldots (x_i - x_{n+k})|} \geqq$$
$$\geqq \frac{|z - x_l|^k}{|(x_l - x_{n+1}) \ldots (x_l - x_{l-1})(x_l - x_{l+1}) \ldots (x_l - x_{n+k})|}.$$

En la multipliant membre à membre par $\dfrac{1}{|x_l - x_i|} = \dfrac{1}{|x_i - x_l|}$ on obtient l'inégalité que voici

$$\frac{|z - x_i|^k}{|(x_i - x_{n+1}) \ldots (x_i - x_{n+k})|} \geqq \frac{|z - x_l|^k}{|(x_l - x_i)(x_l - x_{n+1}) \ldots (x_l - x_{l-1})(x_l - x_{l+1}) \ldots (x_l - x_{n+k})|}$$

qui peut être écrite, d'après la notation (4), comme il suit

$$\text{(13)} \qquad |C_k^{(i)}(z, x_i, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})| \geqq |C_k^{(l)}(z, x_i, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})|.$$

[1]) Si $k = 1$, posons $V(x_{j_1}) = 1$.

Cette inégalité a lieu quel que soit $i = 0, 1, \ldots, n$ et $l = n+1, \ldots$ $\ldots, n+k$.

Cela posé, considérons les $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de la suite (9) et supposons que l'indice $p \leqslant n$ soit tel qu'on ait $|C_n^{(p)}(z, x_0, x_1, \ldots, x_n)| = \max\limits_{(j)} |C_n^{(j)}(z, x_0, x_1, \ldots, x_n)|$.

D'après (6) on aura

$$|C_n^{(p)}(z, x_0, x_1, \ldots, x_n)| \geqq C_n(z) \tag{14}$$

et d'après (10) on a

$$C_{n+k}(z) \geqq C_{n+k}^{(p)}(z, x_0, x_1, \ldots, x_{n+k})$$

d'où, en tenant compte de l'identité

$$C_{n+k}^{(p)}(z, x_0, x_1, \ldots, x_{n+k}) = C_n^{(p)}(z, x_0, x_1, \ldots, x_n) \cdot C_k^{(p)}(z, x_p, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}),$$

on obtient en vertu de (13) et (14) l'inégalité (8). Le lemme est donc démontré.

Lemme 2. *Les polynômes* (4) *satisfont, quel que soit* z *et* $\zeta = \{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$, *à l'équation*

$$C_n^{(0)}(z, \zeta) + C_n^{(1)}(z, \zeta) + \ldots + C_n^{(n)}(z, \zeta) = 1. \tag{15}$$

Démonstration. Etant donné $n+1$ points différents quelconques $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$, formons le déterminant de Vandermonde

$$V(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = |\zeta_j^n, \zeta_j^{n-1}, \ldots, \zeta_j, 1| = \prod_{0 \le j < k \le n} (\zeta_j - \zeta_k).$$

D'après les propriétés connues de déterminants on a, quel que soit z, l'identité

$$V(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = |(\zeta_j - z)^n, \zeta_j^{n-1}, \ldots, \zeta_j, 1|$$

d'où l'on obtient, en developpant le dernier déterminant par rapport aux termes de la prémière colonne,

$$V(\zeta_0, \ldots, \zeta_n) = (\zeta_0 - z)^n \cdot V(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) - (\zeta_1 - z)^n \cdot V(\zeta_0, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n (\zeta_n - z)^n \cdot V(\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}).$$

De cette équation résulte l'équation (15) car on a, quel que soit $j = 0, 1, \ldots, n$,

$$\frac{V(\zeta_0, \ldots, \zeta_{j-1}, \zeta_{j+1}, \ldots, \zeta_n)}{V(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)} = \frac{(-1)^j}{(\zeta_j - \zeta_0) \ldots (\zeta_j - \zeta_{j-1})(\zeta_j - \zeta_{j+1}) \ldots (\zeta_j - \zeta_n)}.$$

3. Formons maintenant la suite suivante

$$\sqrt[n]{C_n(z)}, \qquad \text{où} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

Je vais démontrer ce que voici:

Théorème. *Si le diamètre transfini de l'ensemble E est positif la suite* (16) *tend dans le plan entier vers une fonction limite* (*partout finie*).

$$\sqrt[n]{C_n(z)} \to \gamma(z).$$

Démonstration. Je dis d'abord que les termes de la suite (16) sont positifs quel que soit z et n. En effet, soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ une suite de $n+1$ points de l'ensemble E pour lesquels on ait

$$C_n(z) = \max_{(j)} |C_n^{(j)}(z, x)|, \quad \text{où} \quad x = (x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

D'après le lemme 2 on a l'inégalité

$$1 = |C_n^{(0)}(z, x) + C_n^{(1)}(z, x) + \ldots + C_n^{(n)}(z, x)| \leqq (n+1) \cdot \max_{(j)} |C_n^{(j)}(z, x)|,$$

d'où il résulte que

$$C_n(z) \geqq \frac{1}{n+1}. \tag{17}$$

Je dis maintenant que la suite (16) est uniformément bornée dans chaque domaine borné du plan. En effet, considérons les points (1) de l'ensemble E et désignons par $\Delta_j(z, \zeta)$ le polynôme suivant

$$\Delta_j(z, \zeta) = (z - \zeta_0) \ldots (z - \zeta_{j-1})(z - \zeta_{j+1}) \ldots (z - \zeta_n), \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Lorsque les points (1) varient arbitrairement dans l'ensemble E le plus petit des modules $|\Delta_0(\zeta_0 \zeta)|$, $|\Delta_1(\zeta_1, \zeta)|, \ldots, |\Delta_n(\zeta_n, \zeta)|$, où n est fixe, reste borné et atteint dans E un maximum qui sera désigné par Δ_n. On a donc

$$\Delta_n = \max_{(\zeta)} \{\min_{(j)} |\Delta_j(\zeta_j, \zeta)|\}.$$

Or, la suite $\{\sqrt[n]{\Delta_n}\}$ est convergente [1]) et on a

$$\lim \sqrt[n]{\Delta_n} = d(E),$$

où $d(E)$ désigne le diamètre transfini de l'ensemble E.

---

[1]) Ce journal t. 12, 1934, p. 29—34.

Soient $y_0, y_1, \ldots, y_n$, $n+1$ points de E tels pour lesquels on ait

$$\Delta_n = \min_{(j)} |\Delta_j(y_j, y)|,$$

où y désigne la suite $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$. D'autre part, soit D un domaine borné quelconque du plan. Désignons par R le diamètre (proprement dit) de l'ensemble $D+E$ donc, d'après les formules (4) et (6), on aura quel que soit z dans D

$$C_n(z) \leqq \max_{(j)} \left|\frac{(z-y_j)^n}{\Delta_j(y_j, y)}\right| \leqq \frac{R^n}{\Delta_n}$$

et par suite

(18) $$\sqrt[n]{C_n(z)} \leqq \frac{R}{\sqrt[n]{\Delta_n}}.$$

Il s'ensuit que la suite (16) est uniformément bornée dans le domaine D car la limite de la suite $\{\sqrt[n]{\Delta_n}\}$ est, d'après l'hypothèse, positive.

Notre théorème est une conséquence immédiate des inégalités (8), (17), (18) et de la proposition suivante démontrée antérieurement [1]):

Si les termes d'une suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sont positifs et satisfont aux inégalités

$$a_{n+k} \geqq a_n \cdot a_k, \quad \text{pour} \quad n \text{ et } k = 1, 2, \ldots$$

la suite $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ tend vers une limite (finie ou infinie).

Observons que la fonction limite $\gamma(z)$ de la suite (16) satisfait dans le plan entier à l'inégalité $\gamma(z) \geqq 1$, ce qui résulte de l'inégalité (17). De la même propriété jouit la fonction limite de la suite $\{\sqrt[n]{L_n(z)}\}$. Il se pose la question de savoir si ces deux fonctions sont identiques [2]).

---

[1]) Ce journal t. 12, 1934, p. 63.

[2]) Voir aussi: Bulletin de l'Acad. Polon. des Sc. et des Lettres, Série A, 1933, p. 281—289.

Les systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles.

Etude spéciale du cas de deux équations à une inconnue

par

Maurice Janet

Caen.

J'étudie surtout, dans le présent mémoire, les systèmes de deux équations linéaires aux dérivées partielles, à une fonction inconnue de n variables indépendantes; je caractérise ceux dont la solution dépend de fonctions arbitraires de $n-1$ variables, et, parmi les autres, ceux pour lesquels les conditions de compatibilité peuvent s'exprimer par une seule relation. J'ai été naturellement amené à encadrer cette étude dans une autre, d'ordre plus général, et j'ai précisé à cette occasion des notions et des résultats qui me semblent fondamentaux et qui ne semblent pas avoir fait jusqu'ici l'objet d'aucun exposé. D'autre part, l'origine de cette étude étant dans un résultat d'ordre particulier indiqué par M. Hadamard au Congrès de Zurich (1932), j'ai indiqué une généralisation naturelle de ce résultat (relatif aux équations linéaires à premier membre décomposable).

Certains des faits exposés ont été brièvement indiqués dans une Note des Comptes-Rendus [1]). Je rappelle ici, comme dans cette Note, qu'une démonstration du résultat de M. Hadamard, ainsi qu'une généralisation (moins complète, il est vrai, que celle qu'on trouvera ici) avait été donnée autérieurement par M. G. Cerf [2]); la méthode de M. G. Cerf, qui se rattache à ses beaux travaux sur les équations aux dérivées partielles, est essentiellement limitée au cas de deux variables indépendantes.

---

[1]) C. R. Ac. Sc. t. 198 p. 1565. 30 avril 1934.

[2]) C. R. Ac. Sc. t. 197 p. 892 23 oct. 1933.

J'utilise à plusieurs reprises un important résultat de Riquier relatif à l'invariance [1]) du „degré de généralité" entendu convenablement: nombre maximum λ des arguments des fonctions arbitraires, nombre μ des fonctions arbitraires de λ arguments.

Je me suis attaché à donner des exemples typiques des divers cas que j'envisage, et j'ai cru utile de traiter l'un d'eux en detail.

Chemin faisant, j'ai trouvé des résultats, qui figurent en quelque sorte à titre d'auxiliaires dans ce mémoire, mais qui me semblent avoir quelque intérét par eux mêmes (théorème du n° 5, sur la *forme caractéristique relative à une condition de compatibilité;* théorème du n° 3 sur *les diverses relations de compatibiltté relatives à un même système*).

Je ne répétérai pas que je me bornerai, dans tout ce qui suit, aux équations aux dérivées partielles *linéaires,* et que toutes les fonctions qui interviendront seront supposées *analytiques.*

1. Donnons-nous *autant* d'*équations* que de *fonctions inconnues,* et écrivons, à la manière habituelle, dans les premiers membres les termes contenant les inconnues et leurs dérivées, dans les deuxièmes membres les termes connus:

$$\sum_{k,\alpha} a_{ks}^{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}\, u_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}^{(k)} = f_s \tag{1}$$

$u^{(k)}$ où $k = 1, 2, \ldots, N$ désigne les N fonctions inconnues, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ affectés comme indices *inférieurs* à une fonction u indiquent des dérivations effectuées par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ fois; s prend les valeurs $1, 2, \ldots, N$; les a et f sont des fonctions données des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Désignons par $A_s(u)$ le premier membre de l'équation précédente; nous supposons que A_s n'est pas identiquement nulle, c'est à dire que les a ne sont pas tous identiquement nuls; nous désignerons plus loin par $A_s^{(k)}(u^{(k)})$ la partie de l'expression $A_s(u)$ relative à la fonction $u^{(k)}$.

Il n'existe pas en général d'expressions différentielles linéaires D_s (non toutes nulles) *telles que l'on ait*

$$\sum_{s=1}^{s=N} D_s A_s \equiv 0$$

[1]) Voir Riquier. Les systèmes d'équations aux dérivées partielles (G. V. 1910) p. 578.

(c'est à dire telles que l'on ait $\sum_{s=1}^{s=N} D_s[A_s(u) = 0]$ quelles que soient les fonctions $u^{(1)} u^{(2)} \ldots u^{(N)}$). Autrement dit le système (1) est compatible quelles que soient les f. Nous dirons dans ce cas que les expressions $A_1\, A_2 \ldots A_N$ sont *indépendantes* [1]). On sait d'ailleurs que si le système (1) est susceptible d'être mis (au besoin par un changement de variables indépendantes) sous la forme de Cauchy-Kowalevsky, non seulement il y a compatibilité quelles que soient les f, mais la solution dépend même de fonctions arbitraires de $n-1$ variables.

Les A_s étant toujours supposées *indépendantes*, il peut fort bien arriver que la solution de (1) soit entièrement déterminée, puisque le système (1) peut se réduire à un système d'équations ordinaires ne contenant aucune dérivée de fonction inconnue, mais ce cas évident n'est pas le seul où la solution soit entièrement déterminée; c'est ce que montrent des exemples tels que le suivant

$$\left\{\begin{array}{l} u_{x^2} + v_{xy} - v = f \\ u_{xy} + u + v_{y^2} = g \end{array}\right.$$

dont la seule solution est

$$\left\{\begin{array}{l} u = f_{y^2} - g_{xy} + g \\ v = -f_{xy} - f + g_{x^2}. \end{array}\right.$$

Il serait intéressant de donner des critères simples du degré de généralité de la solution du système (1) *dans tous les cas où les A_s sont indépendantes.* J'ai abordé précédemment cette étude et examiné en particulier le premier cas qui se présente naturellement après celui de Cauchy-Kowalevsky [2]); la solution dépend encore de fonctions arbitraires de $n-1$ variables.

Il me semble très vraisemblable que, le cas de détermination complète sur lesquels on vient d'appeler l'attention étant mis à part, on peut affirmer que la solution dépend *toujours* de fonctions arbitraires de $n-1$ variables.

Autrement dit caractérisons le degré de généralité de la solution par le nombre maximum λ des arguments des fonctions arbi-

---

[1]) Cf. ma Note aux C. R. Acad. Sc. t. 172 p. 1637, 27 juin 1921.

[2]) J. de Math. pures et appl. (9e série VIII 1929 p. 339). J'avais traité complètement le cas de trois équations du premier ordre à trois inconnues dans la Note aux C. R. que je viens de rappeler.

traires en nombre fini dont elle dépend, et par le nombre μ de ces fonctions arbitraires de λ arguments (nombres qui ont une signification intrinsèque, c'est à dire indépendante de celle des formes „complètement intégrables ordinaires“ [1]) sous laquelle on met le système pour avoir à son sujet un théorème précis):

Si les A_s sont indépendantes, λ ne peut être inférieur à $n-1$ que si, à la fois, $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. (théorème T).

Nous verrons plus loin (nº 9) un mode de démonstration de ce théorème dans le cas où tous les a sont des constantes.

2. Supposons maintenant que, dans les équations données, on envisage peut-être *plus d'inconnues qu'il n'y a d'équations.* On pourra récrire le système (1) où s prend encore les valeurs $1, 2, \ldots N$, mais où k prend les valeurs $1, 2, \ldots N,\ N+1, \ldots, N+p$ avec $p \geqslant 0$. Supposons, comme précédemment, qu'il n'existe pas d'expressions différentielles linéaires D_s (non toutes nulles) telles que l'on ait

$$\sum_{s=1}^{s=N} D_s A_s = 0$$

(c'est à dire telles que l'on ait $\sum\limits_{s=1}^{s=N} D_s A_s(u) = 0$ quelles que soient les fonctions $u^{(1)} u^{(2)} \ldots u^{(N+p)}$). Nous dirons encore que les expressions A_s sont *indépendantes.* Le système d'équations données aux inconnues u *est compatible quelles que soient les f.* Les f étant données, *p des fonctions u, et pas plus de p, pourront être prises arbitrairement.* Autrement dit pour le système aux $(N+p)+N$ fonctions inconnues $u^{(1)} \ldots u^{(N+p)}$, $f_1 \ldots f_N$, les nombres caractéristisant le degré de généralité de la solution sont $\lambda = n \quad \mu = N+p$; ce fait s'aperçoit immédiatement puisque dans un tel système on peut choisir arbitrairement tous les u, soit $N+p$ fonctions de n arguments, et que, alors, les f sont entièrement déterminées.

Il convient d'ajouter que les p fonctions u que l'on peut choisir arbitrairement ne sont pas toujours *p quelconques* des $N+p$ fonctions u. C'est ainsi qu'en supposant $N = p = 1$ et tous les coefficients de $A^{(2)}$ identiquement nuls, on ne pourra évidemment pas se donner arbitrairement $u^{(1)}$. Grâce à un changement éventuel de numérotage des fonctions u, on a le droit de supposer que l'on peut choisir arbitrairement $u^{(N+1)}, u^{(N+2)}, \ldots u^{(N+p)}$: en faisant passer dans les deuxièmes

[1]) Riquier. Systèmes d'equations aux dérivées partielles p. 578.

membres les termes qui leur sont relatifs, on trouve dans les prémiers mémbres N *expressions differentielles indépendantes, aux N inconnues* $u^{(1)} u^{(2)} \dots u^{(N)}$.

3. Considérons maintenant (avec des notations analogues) un système de N équations à $N+p$ inconnues (p soit égal à zéro comme dans 1, soit supérieur ou égal à zéro comme l'est p dans 2) *dont les premiers membres ne sont pas indépendants.*

Supposons que les premiers membres de $N-1$ d'entre elles, par exemple $A_1 A_2 \dots A_{N-1}$, *soient indépendants.*

Il existe donc *quelque relation*

$$\sum_{1}^{s=N} D_s A_s = 0$$

mais il n'en existe pas d'analogue où D_N soit nulle.

Autrement dit, il existe N expressions différentielles $D_1 D_2 \dots D_N$, telles que

$$\sum_{s=1}^{s=N} D_s A_s^{(1)} = 0 \quad \sum_{s=1}^{s=N} D_s A_s^{(2)} = 0 \dots \sum_{s=1}^{s=N} D_s A^{(N+p)} = 0$$

mais il existe pas de système d'expressions D satisfaisant aux mêmes relations et tel de plus que D_N soit nulle. Nous avons le droit de supposer (voir fin du nº 2) que les portions de $A_1 A_2 \dots A_{N-1}$ relations à $u^{(1)} u^{(2)} \dots u^{(N-1)}$ sont indépendantes.

Cela posé, imaginons qu'il existe entre $A_1^{(\lambda)} A_2^{(\lambda)} \dots A_N^{(\lambda)}$ une relation différentielle vraie pour toutes les valeurs $\lambda = 1, 2, \dots, N-1$

$$\sum_{s=1}^{s=N} \Delta_s A_s^{(1)} = 0 \quad \sum_{s=1}^{s=N} \Delta_s A_s^{(2)} = 0 \dots \sum_{s=1}^{s=N} \Delta_s A_s^{(N-1)} = 0.$$

Je dis que *cette relation est également vraie pour les valeurs* $\lambda = N, N+1, \dots, N+p$ c'est à dire que l'on a aussi $\sum_{s=1}^{s=N} \Delta_s A_s^{(\mu)} = 0$ pour $\mu = N, N+1, \dots, N+p$ et que suite *on aura aussi*

$$\sum_{s=1}^{s=N} \Delta_s A_s = 0.$$

Considérons le système donné (1) comme relatif aux $N+p+N$ inconnues u, f et supposons que l'on ait par exemple $\sum_{s=1}^{s=N} \Delta_s A_s^{(N)} \neq 0$.

En admettant que $f_1, f_2, \ldots, f_{N-1}$ aient été choisies, la fonction f_N ne peut être prise arbitrairement puisqu'elle doit satisfaire à $\sum_{s=1}^{s=N} D_s f_s = 0$ où D_N *est différent de zéro.* En admettant maintenant que les f, ainsi que éventuellement $u^{(N+1)}, \ldots u^{(N+p)}$ aient été choisies, la fonction $u^{(N)}$ ne peut pas être choisie arbitrairement puisqu'une certaine combinaison des équations données fait connaître

$$\sum_{s=1}^{1=N} \Delta_s A_s^{(N)}(u^N)$$

où $\sum_{s=1}^{s=N} \Delta_s A_s^{(N)}$ *est différent de zéro.* Enfin les f et $u^{(N)}, u^{(N+1)}, \ldots, u^{(N+p)}$ étant supposées choisies, aucune des fonctions restantes $u^{(1)} u^{(2)} \ldots u^{(N-1)}$ ne peut être choissie arbitrairement puisqu'elle satisfont en particulier à un système de $N-1$ équations indépendantes (voir la démonstration du n° 2; cas de $p=0$). Au total la solution du système (1), considéré comme relatif aux $N+p+N$ fonctions inconnues u, f dépendrait *tout au plus de*

$$N-1+p$$

fonctions arbitraires de n variables. Or on peut dans ce système choisir arbitrairement toutes les fonctions u soit $N+p$ *fonctions de n variables;* les f s'en déduisent immédiatement. La contradiction trouvée démontre le fait annoncé.

Exemple (relatif au cas le plus simple $N=2$, $p=0$).

Soient $X\,Y$ deux expressions différentielles linéaires telles que

$$XY - YX = 1$$

$$\left(\text{par ex.}\quad \begin{array}{l} X(u) = u_x + a\,b_x\,u \\ Y(u) = u_y + a\,b_y\,u \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 1\right).$$

On aperçoit entre X, Y les relations distinctes

$$\left|\begin{array}{r} (XY+1)(X) - X^2(Y) = 0 \\ Y^2(X) - (YX-1)(Y) = 0. \end{array}\right.$$

Le théorème précédent appliqué au système

$$\begin{array}{c} X(u) + H(v) \\ Y(u) + K(v) \end{array}$$

où H, K sont des expressions différentielles quelconques montre que *si l'on a identiquement c'est à dire quelle que soit* ν

$$(XY+1)\,[H(\nu)] - X^2\,[K(\nu)] = 0$$

on aura aussi, quelle que soit ν,

$$Y^2\,[H(\nu)] - (YX-1)\,[K(\nu)] = 0.$$

Ainsi, bien que l'*on ne puisse pas réduire à une seule* (cf. n° 10) les conditions de compatibilité du système

$$\begin{cases} X(u) = f \\ Y(u) = g \end{cases}$$

ces conditions de compatibilité ont entre elles une parenté assez intime pour que si l'une d'elles est condition de compatibilité d'un autre système

$$\begin{cases} H(\nu) = f \\ K(\nu) = g \end{cases}$$

les autres le soient aussi.

4. Attachons maintenant notre attention aux systèmes „surabondants" les plus simples, à savoir les systèmes de *deux* équations à *une* fonction inconnue; nous écrirons ces équations

$$\left|\begin{array}{l} \sum\limits_{\alpha} a^{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}\, u_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = f \\ \sum\limits_{\beta} b^{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\, u_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n} = g. \end{array}\right.$$

Nous désignerons leurs premiers membres par $A(u)$, $B(u)$ et leurs ordres par p, q $(p, q \geqslant 1)$.

Nous nous proposons d'abord de caractériser les cas où, pour le système *sans second membres*, le nombre λ est égal à $n-1$, autrement dit où *la solution dépend d'arbitraires du „genre"* [1]) *le plus grand possible.* Ces cas devront comprendre ceux où A, B sont de la forme $A'(C)$, $B'(C)$, A', B', C étant des expressions différentielles dont la troisième est au moins d'ordre 1.

[1]) Nous convenons de désigner pour abréger, dans le présent mémoire, par *genre* d'une fonction arbitraire le nombre des arguments de cette fonction.

Considérons le système

$$\begin{cases} A(u) = 0 \\ B(u) = g \end{cases}$$

où u et g désignent deux inconnues. Pour y satisfaire, on pourra choisir d'abord u satisfaisant à la première équation; la seconde donnera g. La solution *dépend donc de fonctions arbitraires de $n-1$ arguments, en nombre p.*

Si nous commencions par former les conditions C_g auxquelles doit satisfaire g pour que le système des deux équations, où u est la seule inconnue, soit compatible, u s'obtiendrait en fonction de g avec le degré d'indétermination même de la solution du système sans seconds membres

$$\begin{cases} A(u) = 0 \\ B(u) = 0. \end{cases}$$

Les cas qui nous intéressent sont donc *ceux où la solution générale de C_g dépend d'arbitraires soit de genres seulement inférieurs à $n-1$, soit de genre égal à $n-1$ mais en nombre inférieur à p.*

Supposons *les variables choisies* de manière que *les multiplicités $x_n = x_n^0$ ne soient pas caractéristiques* (au voisinage de $\bar{x}_1^0 \bar{x}_2^0 \ldots \bar{x}_{n-1}^0 x_n^0$) pour $A=0$. Cette équation sera résoluble au voisinage de $\bar{x}_1^0 \bar{x}_2^0 \ldots \bar{x}_{n-1}^0 x_n^0$ (ce dernier étant arbitraire au voisinage de $\bar{x}_n^0$) par rapport à $\frac{\partial^p u}{\partial x_n^p}$, autrement dit est *normale en x_n*. Il résulte d'un théorème que nous démontrerons plus loin (n° 5) que l'une au moins des conséquences de C_g est normale en x_n autrement dit *l'une au moins de ces conséquences Γ_g, supposée d'ordre P,* est *résoluble (au voisinage du point indiqué) par rapport à* $\frac{\partial^P g}{\partial x_n^P}$. Cela étant, nous montrerons que la condition cherchée est que l'une au moins des conséquences de C_g *ne fasse intervenir que des dérivées de g dont l'ordre en x_n soit inférieur à p.*

1°) *La condition est suffisante.* S'il existe une conséquence de C_g telle que l'ordre maximum en x_n des dérivées de g qui y entrent soit $h \leqslant p-1$, on en déduit éventuellement, par dérivations par rapport à x_n, d'autres relations, d'ordre maximum en x_n $h+1$, $h+2, \ldots, P-1$; d'après cela, au total sur $x_n = x_n^0$, h *au plus* des fonctions g, $\frac{\partial g}{\partial x_n}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2}, \ldots$ seront des fonctions arbitraires de $n-1$

variables, à savoir les h premières; les autres dépendront d'arbitraires de genre inférieur à $n-1$; une fois ces fonctions, jusqu'à $\frac{\partial^{p-1} g}{\partial x_n^{p-1}}$ compris, choisies sur $x_n = x_n^0$, l'équation Γ_g détermine entièrement, d'après le théorème classique de Cauchy, la fonction g de $x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n$. Le nombre de fonctions arbitraires de $n-1$ variables dont dépend g est donc au plus $p-1$.

2°) *La condition est nécessaire.* Mettons C_g sous une forme „canonique complètement intégrable, x_n étant la variable de cote la plus élevée“ [1]). Une des dérivées principales sera $\frac{\partial^p g}{\partial x_n^p}$. Soit k l'ordre minimum en x_n des dérivées principales; il y aura des dérivées principales d'ordres (en x_n) $k+1$, $k+2, \dots$ Les règles qui permettent de fixer „l'économie“ des conditions initiales montrent que la solution dépend de k fonctions arbitraires de $n-1$ variables, *à savoir* les valeurs de g, $\frac{\partial g}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^{k-1} g}{\partial x_n^{k-1}}$ sur $x_n = x_n^0$ (et peut-être d'arbitraires de genres *inférieurs*). Si donc les fonctions arbitraires de $n-1$ variables dont dépend la solution de C_g sont en nombre au plus égal à $p-1$ le nombre k est au plus égal à $p-1$, et les valeurs de g, $\frac{\partial g}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^{p-1} g}{\partial x_n^{p-1}}$ ne peuvent pas être prises toutes arbitrairement sur $x_n = x_n^0$; les conditions auxquelles elles doivent satisfaire s'expriment par au moins une équation aux dérivées partielles aux variables $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

Revenons à un système quelconque de variables indépendantes. Nous venons de trouver que *la condition nécessaire et suffisante pour que la solution du système $A=0$ $B=0$ dépende de fonctions arbitraires de $n-1$ arguments est que sur une multiplicité non caractéristique M_{n-1}, dépendant d'un paramètre, de l'équation $A=0$, l'expression B et ses $p-1$ premières dérivées suivant une direction non tangente à M_{n-1} soient liées en vertu de $A=0$ par quelque équation aux dérivées partielles à $n-1$ variables indépendantes* (cette équation dépendant bien entendu en général du paramètre dont dépend M_{n-1}). La condition trouvée ne donne pas le même rôle aux expressions A, B. De là résulte la proposition de *réciprocité*:

---

[1]) Voir par exemple mes „Leçons sur les Systèmes d'équations aux dérivées partielles“ G. V. 1929 (professées à l'Université de Cracovie en 1926).

Si, sur une multiplicité M_{n-1} (dépendant d'un paramètre), non caractéristique pour A, expression d'ordre p, l'expression B et ses $p-1$ premières dérivées suivant une direction non-tangente à M_{n-1} sont liées, en vertu de $A=0$, par quelque équation aux dérivées partielles à $n-1$ variables, on peut affirmer que réciproquement, sur une multiplicité M'_{n-1} (dépendant d'un paramètre) non caractéristique pour B, expression d'ordre q, l'expression A et ses $q-1$ premières dérivées suivant une direction non tangente à M'_{n-1} sont liées, en vertu de $B=0$, par quelque équation aux dérivées partielles à $n-1$ variables.

Le cas que nous venons d'étudier comprend évidemment celui où A et B sont liées par quelque relation

$$L(A)+M(B)=0$$

où M est d'ordre *inférieur* à p (et par suite L d'ordre inférieur à q). Ce dernier cas est bien connu: la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes „en involution" en fournit des exemples variés. En voici d'ailleurs de très simples

$$A=\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad B=\frac{\partial}{\partial x} \qquad L=1 \qquad M=-\frac{\partial}{\partial x}$$

$$A=\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad B=x\frac{\partial}{\partial x}-1 \qquad L=x \qquad M=-\frac{\partial}{\partial x}$$

$$A=\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad B=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \qquad L=\frac{\partial}{\partial y} \qquad M=-\frac{\partial}{\partial x}.$$

Pour mieux illustrer l'énoncé général, nous traiterons en détail un exemple qui n'est pas de ce type [1]).

Etude d'un exemple.

Posons

$$\begin{cases} A=p_{44}-x_3\,p_{34}-p_4 \\ B=p_{43}-x_4\,p_{41} \end{cases}$$

où, comme d'habitude,

$$p_h=\frac{\partial u}{\partial x_h}$$

$$p_{hk}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k}.$$

Nous désignerons la dérivée totale de A, B par rapport à x_h par A_h, B_h,...

[1]) Il est d'ailleurs du type $A'(C)$, $B'(C)$, où C est d'ordre 1.

Le calcul de $\frac{\partial B}{\partial x_4}$ conduit à former la combinaison $B_4 - A_3 + x_4 A_1$ que nous appellerons $B^{(1)}$. On trouve

$$B^{(1)} = x_3\, p_{432} - x_4\, x_3\, p_{431} + p_{43} + p_{43} - (x_4 + 1)\, p_{41}$$

ce qui peut d'ailleurs s'écrire plus simplement

$$x_3\, B_2 + B + p_{43} - p_{41}.$$

Sur $x_4 = x_4^0$, B et $B^{(1)}$ peuvent être regardées comme des expressions différentielles à trois variables x_1, x_2, x_3 en u et p_4; mais elles ne contiennent pas effectivement u; elles sont donc liées par une relation au moins. On reconnaît d'ailleurs immédiatement qu'on peut déduire toutes les relations différentielles entre $p_{43} - x_4 p_{41}$ et $p_{42} - p_{41}$ de l'unique relation :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_3} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)(p_{42} - p_{41}) - \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\right)(p_{43} - x_4\, p_{41}) = 0$$

autrement dit

$$\text{(1)}\quad \left(\frac{\partial}{\partial x_3} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)(B_4 - x_3\, B_2 - B - A_3 + x_4\, A_1) - \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\right) B = 0.$$

En faisant dans cette équation $A = 0$ (et par suite $A_3 = A_1 = 0$) et $x_4 = x_4^0$, on a la relation différentielle à trois variables entre B et B_4 dont il est question dans l'énoncé général.

Pour obtenir un énoncé précis sur le degré d'indétermination des solutions du système $Au = f$, $Bu = g$, dérivons une deuxième fois par rapport à x_4 l'expression B. En utilisant les équations déjà écrites, nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial x_4}(B^{(1)} - x_3\, B_2 - B) = p_{442} - p_{441}$$

ce qui, grâce à l'expression de A, s'écrit

$$A_2 + (x_3\, p_{24} + p_4)_2 - A_1 - (x_3\, p_{24} + p_4)_1 = A_2 - A_1 + x_3\, H_2 + H$$

en désignant pour abréger par H l'expression $B^{(1)} - x_3\, B_2 - B$, de sorte qu'en définitive nous obtenons l'identité

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_4} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - 1\right)(B^{(1)} - x_3\, B_2 - B) - (A_2 - A_1) = 0$$

ou plus explicitement

$$(2)\quad \left(\frac{\partial}{\partial x_4} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - 1\right)(B_4 - x_3 B_2 - B - A_3 + x_4 A_1) - (A_2 - A_1) = 0.$$

Pour que le système $A(u) = f$, $B(u) = g$ soit compatible, il est évidemment *nécessaire* que les fonctions f, g satisfassent aux relations $(1)'$, $(2)'$ déduites de (1), (2) en y remplaçant A, B par f, g. Supposons qu'il en soit ainsi, où même simplement que $(1)'$ soit vérifiée pour $x_4 = x_4^0$, et $(2)'$, quels que soient les x. Alors pour toute fonction u des variables x_1, x_2, x_3, x_4 les expressions

$$\bar{A} = Au - f \qquad \bar{B} = Bu - g$$

satisfont aux relations $(1)''$ pour $x_4 = x_4^0$, $(2)''$ quels que soient les x, en désignant par $(1)''$ $(2)''$ les relations déduites de (1), (2) en y remplaçant A, B par $\bar{A}$, $\bar{B}$.

Donnons-nous arbitrairement *sur* $x_4 = x_4^0$ *la valeur de* u *fonction de* x_1, x_2, x_3 puis, toujours sur $x_4 = x_4^0$, *déterminons* p_4 *en nous donnant arbitrairement sa valeur sur la multiplicité à une dimension* $x_3 = x_3^0$, $x_2 = x_2^0$, et en utilisant les relations qui donnent sur $x_4 = x_4^0$ les valeurs de $p_{43} - x_4 p_{41}$, $p_{42} - p_{41}$.

u sera alors déterminé, grâce à ces données initiales, u, p_4, et à l'équation $A(u) - f = 0$.

Les relations auxquelles nous avons astreint p_4 expriment, si l'on tient compte de ce que $Au - f$ est nulle quels que soient x_1, x_2, x_3, x_4, que $\bar{B}$ et $\bar{C}$ sont nulles pour $x_4 = x_4^0$ (en appelant $\bar{C}$ l'expression $\left(\frac{\partial}{\partial x_4} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - 1\right)\bar{B}$).

Mais d'après $(2)''$, $\left(\frac{\partial}{\partial x_4} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - 1\right)\bar{C} = 0$ quels que soient les x; donc $\bar{C}$ est nul quels que soit les x.

D'où résulte $\left(\frac{\partial}{\partial x_4} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - 1\right)\bar{B} = 0$ quels que soient les x, et par suite $\bar{B} = 0$ quels que soient les x.

En définitive la fonction u satisfait, quels que soient les x, au système $\bar{A} = 0$ $\bar{B} = 0$. Elle dépend d'une fonction arbitraire de trois variables (et aussi, dans le mode de détermination indiqué, d'une fonction arbitraire d'une variable).

Remarques. 1°) Il résulte de la démonstration que si deux fonctions f, g, des variables x_1, x_2, x_3, x_4 satisfont.

1°) pour $x_4 = x_4^0$ à $\left(\frac{\partial}{\partial x_3} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)(g_4 - x_3 g_2 - g - f_3 + x_4 f_1) - \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\right) g = 0$

2°) quels que soient les x à $\left(\frac{\partial}{\partial x_4} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - 1\right)(g_4 - x_3 g_2 - g - f_3 + x_4 f_1) - \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\right) f = 0$, elles satisfont aussi quels que soient les x à la première équation. Pour essayer de le montrer directement, on appellera β et α les premiers membres des équations qu'on vient d'écrire, et on sera amené à chercher si $\frac{\partial \beta}{\partial x_4}$ ne peut s'exprimer à l'aide de β et des autres dérivées premières de β, de α et de ses dérivées. On sera effectivement amené à une identité:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_4} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - 1\right)\beta - \left(\frac{\partial}{\partial x_3} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)\alpha = 0$$

qui prouve immédiatement le fait prévu.

2°) Le système en f, g que l'on vient d'écrire est complètement intégrable: f peut être choisie d'une manière entièrement arbitraire; puis le système étant résolu par rapport à $\frac{\partial^2 g}{\partial x_4^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial x_4 \partial x_3}$, on peut se donner arbitrairement sur $x_4 = x_4^0$ la valeur de g et sur $x_4 = x_4^0$, $x_3 = x_3^0$ la valeur de $\frac{\partial g}{\partial x_4}$. Le système ne peut donc avoir aucune conséquence du premier ordre; il ne peut avoir d'autre conséquence du second ordre que les combinaisons linéaires mêmes des équations écrites; etc.... Autrement dit on voit nettement que

a) il *n'existe pas entre les expressions différentielles* A, B *de relation* $L(A) + M(B) = 0$ où l'une au moins des expressions L; M soit d'ordre *inférieur à* 2.

b) il existe entre A, B exactement *deux* relations distinctes

$$L_1 A + M_1 B = 0$$
$$L_2 A + M_2 B = 0$$

où L_1, M_1; L_2, M_2 sont d'ordre deux, à savoir les deux relations trouvées (et leurs combinaisons linéaires bien entendu).

5. Nous avons admis au n° 4 que si l'équation $A(u) = 0$ est normale en x_n l'une au moins des conditions de possibilité du système

$$\left| \begin{array}{l} A(u) = 0 \\ B(u) = g \end{array} \right.$$

est aussi normale en x_n. Ce fait peut être considéré comme une conséquence du suivant qui a son intérêt propre et que nous allons démontrer.

L'une au moins (et par suite une infinité) des *conditions de possibilité* du système

$$\left| \begin{array}{l} Au = 0 \\ Bu = g \end{array} \right.$$

a pour *forme caractéristique* une *puissance de la forme caractéristique de A.*

Formons les expressions différentielles linéaires

$$AB - BA \equiv B_1, \quad AB_1 - B_1 A \equiv B_2 \ldots \quad AB_{n-1} - B_{n-1}A \equiv B_n \ldots$$

d'ordres respectivement au plus

$$p - 1 + q, \quad 2(p-1) + q, \ldots, \quad n(p-1) + q, \ldots$$

Nous obtenons en posant $A(A) = A^2 \ldots A(A^p) = A^{p+1} \ldots$ les équations conséquences du système donné

$$B_1(u) = A(g); \quad B_2(u) = A^2(g); \ldots \quad B_n(u) = A^n(g) \ldots$$

où les ordres en g sont respectivement $p, 2p, \ldots, np, \ldots$

Cela remarqué, traitons le système donné, aux inconnues u, g, en écrivant d'abord des conditions nécessaires et suffisantes en g pour que le système en u soit compatible, puis des équations *en nombre fini* permettant de déterminer u en fonction de g par un système *de forme canonique en u.* Dans ce dernier système, les premiers membres sont des „dérivées principales“ de u; chaque second membre peut contenir, outre des dérivées de u, principales ou paramétriques, antérieures au premier membre correspondant, des dérivées de g. La différence (ordre en g) — (ordre en u) relative à une de ces équations (E), qui sont en nombre fini, a un maximum k. Pour les équations $(E)'$ qu'on en déduit par simples dérivations, la différence (ordre en g) — (ordre en u) ne dépasse pas k. Substituons éventuellement à quelque dérivée principale de u figurant dans un second membre de (E, E') son expression tirée d'une équation de (E, E') et cela un nombre quelconque de fois; la différence (ordre en g) — (ordre en u) de l'équation obtenue ne dépassera jamais k. Il en sera ainsi en particulier pour chaque équation exprimant *une dérivée principale de u* à l'aide de dérivées de u antérieures *paramétriques*, et de dérivées de g. Portons ces expressions dans les équations formées précédemment:

$$B_n(u) = A^{(n)}(g).$$

Nous obtiendrons au premier membre une expression d'ordre au plus égal à $n(p-1)+q$ en u, et par suite d'ordre au plus égal à $n(p-1)+q+k$ en g, qui ne contiendra *aucune dérivée principale de u*.

Comme nous ne pouvons avoir aucune relation entre les dérivées parametriques de u, cette relation doit ou bien se réduire à une identité, ou bien être une condition relative à g seule. Mais on peut choisir n assez grand pour que

$$n(p-1)+q+k < np$$

(il suffit de choisir $n > q+k$); g figurera effectivement, de plus l'ordre en g sera n, et la forme caractéristique de l'équation obtenue sera *la $n^{\text{ième}}$ puissance de la forme caractéristique de A.*

Ainsi, parmi les équations auxquelles satisfait $B(u)$ quand u est assujettie à l'équation $A(u)=0$, *il en est* qui ont *exactement les mêmes caractéristiques* (mais en général avec un autre ordre de multiplicité) que l'équation $A(u)=0$.

On peut énoncer le résultat obtenu sous la forme suivante en apparence un peu plus générale:

Parmi les relations $LA+MB=0$ qui existent entre deux expressions différentielles A, B il en est pour lesquelles la forme caractéristique de M est une puissance de la forme caractéristique de A.

Il en est naturellement aussi pour lesquelles la forme caractéristique de L est une puissance de la forme caractéristique de B. Mais il n'en existe pas en général pour lesquelles les deux propriétés soient à la fois réalisées [1]).

6. Excluons maintenant le cas, étudié et caractérisé au n° 4, où la solution de $A(u)=0$ $B(u)=0$ dépend d'une ou plusieurs

[1]) Ce point résulte facilement de l'étude qui suit.

fonctions arbitraires de $n-1$ variables. Parmi les relations différentielles qui existent entre A et B, admettons qu'il en existe quelqu'une $L(A)+M(B)=0$ où L soit *d'ordre* q (et par suite M d'ordre p). Pour que le système $A(u)=f$ $B(u)=g$ soit compatible, il est évidemment *nécessaire* que l'on ait

$$L(f)+M(g)=0.$$

Nous allons montrer que cette condition est *suffisante*.

Considérons d'abord le cas où f est identiquement nulle. La solution générale du système *aux deux inconnues* u, g

$$\begin{cases} A(u)=0 \\ B(u)=g \end{cases}$$

dépend de p *fonctions arbitraires de* $n-1$ *variables*, car u est donnée avec ce degré d'indétermination par la première de ces équations, puis g, entièrement, par la seconde. Commençons par former le système C_g auquel doit satisfaire g pour que les équations, en u, $A(u)=0$ $B(u)=g$ soient compatibles; une fois g choisie, u ne dépend que d'arbitraires de genre au plus égal à $n-2$ (puisque dans le cas $g=0$, il en est ainsi); il résulte de là que la solution de C_g dépend de p *fonctions arbitraires de* $n-1$ *variables*; or parmi les équations de C_g figure l'équation

$$M(g)=0$$

qui est d'ordre p; si quelque équation de C_g n'était pas conséquence de $M(g)=0$ la solution de C_g dépendrait de fonctions arbitraires de genre $n-1$ en nombre inférieur à p, ou même ne dépendrait que de fonctions arbitraires de genre inférieur à $n-1$; autrement dit la relation $M(g)=0$ suffit pour que le système, en u, $A(u)=0$ $B(u)=g$ soit *compatible.*

Considérons maintenant le cas général (f quelconque). Les conditions de compatibilité du système en u

$$\begin{cases} A(u)=f \\ B(u)=g \end{cases}$$

forment un système linéaire en f, g sans „seconds membres". Ces conditions ne peuvent avoir pour conséquence d'équation en f seul (car $A(u)=f$ est résoluble en u, puisque A n'est pas identiquement nul, pour un f donnée quelconque, et que l'on peut prendre ensuite pour g la valeur prise par $B(u)$). La solution du système en f, g où g est considérée maintenant comme l'inconnue a donc pour f prise arbitrairement le même degré de généralité que le système correspondant à $f=0$, or nous venons de montrer que ce dernier système se réduit à l'équation unique $M(g)=0$ et à ses conséquences. Le système en f, g se réduit donc à l'équation unique $L(f)+$ $+M(g)=0$ et à ses conséquences.

7. Il est intéressant d'obtenir autrement le résultat qui vient d'être démontré. La méthode qui suit donnera, dans bien des cas, des renseignements plus complets sur le degré de généralité de $A(u)=0$, $B(u)=0$.

Supposons les variables choisies de manière que les expressions A et M soient „normales" en x_n. L'équation $A(u)=0$ est résoluble par rapport à $\frac{\partial^p u}{\partial x_n^p}$. Utilisons éventuellement cette équation et celles qu'on peut en déduire par dérivations pour remplacer dans B toutes les dérivées de u où l'ordre en x_n est au moins p par leurs expressions à l'aide de dérivées de u où l'ordre en x_n est *inférieur à p*. Opérons sur $\frac{\partial B}{\partial x_n}$ comme nous avons opéré sur B (le signe $\frac{\partial}{\partial x_n}$ désignant bien entendu une dérivation totale par rapport à x_n, B étant fonction des $x_1\, x_2 \ldots x_n$ directement et par l'intermédiaire de u et de ses dérivées), puis de même sur $\frac{\partial^2 B}{\partial x_n^2}, \ldots$ jusqu'à $\frac{\partial^{p-1} B}{\partial x_n^{p-1}}$ compris.

Nous sommes conduits à mettre en évidence p conséquences particulières du système

$$A(u)=0 \qquad B(u)=g$$

déduites respectivement de l'équation $B(u)=g$ et de ses $p-1$ premières dérivées par rapport à x_n en y tenant compte de $A=0$, conséquences ne contenant d'ailleurs comme dérivées de u que celles dont l'ordre en x_n est inférieur à p. Ces conséquences (où nous faisons $x_n=x_n^0$) peuvent être considérées comme p *équations aux dérivées partielles* à $n-1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ auxquelles doivent satisfaire sur $x_n=x_n^0$ les p fonctions u, $\frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x^{p-1}}$.

Les premiers membres de *ces p équations sont indépendants*, car sans cela il existerait, en tenant compte de $A = 0$, quelque relation différentielle en $x_1\, x_2 \dots x_{n-1}$ entre B, $\frac{\partial B}{\partial x_n}, \dots \frac{\partial^{p-1} B}{\partial x_n^{p-1}}$, ce qui serait contraire à l'hypothèse d'après laquelle la solution de $A = 0$ $B = 0$ dépend d'arbitraires de genre au plus $n - 2$. *Ces p équations sont donc compatibles quel que soit g.* Nous pouvons même ajouter, sous réserve de démonstration du théorème T indiqué comme vraisemblable au nº 1, que la solution dépend de *fonctions arbitraires de $n - 2$ variables, ou bien est entièrement déterminée.*

Servons-nous maintenant des fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ qui constituent une telle solution comme conditions initiales sur $x_n = x_n^0$ *pour l'équation* $A(u) = 0$. Je dis que, si la fonction g satisfait à la condition $M(g) = 0$, la fonction u bien déterminée (dont le théorème de Cauchy, appliqué à l'équation unique $A(u) = 0$, apprend l'existence) *satisfait à l'équation* $B(u) = g$.

Considérons en effet le quantité $Bu - g$. Elle satisfait, en raison des hypothèses faites, à $M[B(u) - g] = 0$ quel que soient $x_1, x_2, \dots, x_n$. D'autre part, d'après la manière dont ont été choisies les conditions initiales on peut affirmer que *pour* $x_n = x_n^0$, la quantité $Bu - g$ et ses $p - 1$ premières dérivées par rapport à x_n sont nulles; mais M contient un terme en $\frac{\partial^p u}{\partial x_n^p}$; donc $Bu - g$ est *identiquement* nulle.

Autrement dit $M(g) = 0$ est une *condition suffisante* pour que les équations $A(u) = 0$ $B(u) = g$ soient compatibles.

On obtient donc le résultat suivant (en excluant toujours le cas où la solution générale de $A(u) = 0$ $B(u) = 0$ dépend d'arbitraires de genre $n - 1$)

1º) Si parmi les relations différentielles qui existent entre A, B, il y en a quelqu'une $L(A) + M(B) = 0$ où L est d'ordre q, la condition *nécessaire et suffisante* pour que $A(u) = f$ $B(u) = g$ soient compatibles est $L(f) + M(g) = 0$.

2º) Cette condition étant supposée réalisée la solution générale du système $A(u) = f$ $B(u) = g$ dépend effectivement d'arbitraires *de genre* $n - 2$, ou bien *est entièrement déterminée.*

(l'énoncé (2º) *n'étant établi que sous réserve de la démonstration du théorème T).*

8. Considérons en particulier le cas où les coefficients des expressions A, B sont des constantes. La substitution à u et à ses

dérivées $\frac{\partial u}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \ldots,$ de l'unité et des monômes $x_k, \ldots, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}, \ldots,$ conduit à deux polynomes „*images*" $\bar{A}$, $\bar{B}$ aux n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'ordres respectivement p, q.

Distinguons deux cas

ou bien *ces deux polynomes ont un facteur commun*, c'est à dire qu'ils sont identiques aux produits d'un même polynome $\bar{C}$ (de degré $\geqslant 1$) par des polynomes $\bar{A}'$, $\bar{B}'$; la solution générale de $A(u) = 0$ $B(u) = 0$ dépend de fonctions arbitraires de $n-1$ variables.

ou bien *ces deux polynomes n'ont pas de facteur commun;* la solution générale de $A(u) = 0$ $B(u) = 0$ dépend de fonctions arbitraires de $n-2$ variables, ou bien est entièrement déterminée (à savoir zéro).

Ces conclusions s'obtiennent lorsqu'on cherche, à la manière habituelle, à mettre le système $A(u) = 0$ $B(u) = 0$ sous une forme canonique complètement intégrable; on est amené à faire certaines dérivations et certaines combinaisons linéaires à coefficients constants des équations données et de leurs dérivées.

Dans le premier cas, les polynomes images de toutes les combinaisons ont en facteur $\bar{C}$; les règles qui indiquent la nature des conditions initiales montrent alors que le genre λ maximum des fonctions arbitraires est $n-1$.

Dans le second cas, supposons (ce qui est réalisable grâce à un changement linéaire, éventuel, de variables) que le coefficient de x_n^p dans $\bar{A}$ soit l'unité; le résultant des deux polynomes en x_n, $\bar{A}$, $\bar{B}$ est un certain polynome $\bar{R}$ *non identiquement nul* en $x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}$ seuls qui est l'image d'une certaine combinaison linéaire des équations $A(u) = 0$ $B(u) = 0$ et de leurs dérivées. D'après les règles qui indiquent la nature des conditions initiales, le fait que $\bar{R}$ ne contient pas x_n entraine que le genre des arbitraires est *au plus* $n-2$. (Cf. n° 4.).

Ce point acquis, appliquons la méthode indiquée au n° 7, mais au lieu de former des équations aux dérivées partielles, formons les équations algébriques images correspondantes. Outre

$$\bar{A} = x_n^p + a_1\, x_n^{p-1} + a_2\, x_n^{p-2} + \ldots + a_p$$

où a_h est un polynome d'ordre au plus h en $(x_1, x_2 \ldots x_{n-1})$, donnons-nous le polynome

$$\bar{B}^0 = l_1^0\, x_n^{p-1} + l_2^0\, x_n^{p-2} + \ldots + l_p^{(0)}$$

où les l sont des polynomes en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, image de B ou éventuellement de l'équation obtenue entenant compte dans B de l'équation $A=0$ de manière à n'avoir plus aucun terme où x_n figure plus de $p-1$ fois.

Nous sommes amenés à former la combinaison

$$x_n \overline{B}^{(0)} - l_1^0 \overline{A} = l_1^{(1)} x_n^{p-1} + l_2^{(1)} x_n^{p-2} + \ldots + l_p^{(1)}$$

les l désignant encore des polynomes en $x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}$, combinaison que nous appellerons $\overline{B}^{(1)}$, puis

$$x_n \overline{B}^{(1)} - l_1^1 \overline{A} = l_1^{(2)} x_n^{p-1} + l_2^{(2)} x_n^{p-2} + \ldots + l_p^{(2)}$$

que nous appellerons $\overline{B}^{(1)}, \ldots$ et ainsi de suite jusqu'à $\overline{B}^{(p-1)}$.

Sur $x_n = x_n^0$ nous obtenons p équations aux dérivées partielles *indépendantes* aux p fonctions inconnues $u, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \dfrac{\partial^{p-1} u}{\partial x_n^{p-1}}$ des $n-1$ variables $x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}$ équations linéaires à coefficients constants dont la solution ou bien dépend de *fonctions de $n-2$ variables indépendantes*, ou *bien est entièrement déterminée* (théorème T, dont la démonstration complète, pour le cas des coefficients constants, est exposée en supposant $N=2$, puis $N=3$). Prenons ces fonctions comme conditions initiales pour $A(u)=0$; la solution de cette équation satisfera en même temps, d'après ce qui a été vu au n° 7, à $B(u)=0$.

L'énoncé (2°) de la fin du n° 7 pourra donc ici être regardé comme acquis dès qu'on aura donné la démonstration de (T) relative aux coefficients constants.

Remarques. 1°) On a posé $\overline{B}^{(k)} = x_n \overline{B}^{(k-1)} - l_1^{(k-1)} \overline{A}$ pour $k = 1, 2, \ldots\, p-1$; appliquons cette formule à $k=p$. D'après les résultats précédents, $\overline{B}^{(p)}$ devra n'être qu'une combinaison linéaire des $\overline{B}^{(0)}, \overline{B}^{(1)}, \ldots, \overline{B}^{(p-1)}$ à coefficients fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Nous allons voir que ces coefficients ne sont autres que les a, au signe près. Remarquons d'abord que $\overline{B}^{(k)} = x_n^k \overline{B}^0 + c_k \overline{A}$ où c_k désigne un polynome en $x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}\, x_n$. D'où

$$\begin{aligned}\overline{B}^{(p)} + a_1 \overline{B}^{(p-1)} + \ldots + a_p \overline{B}^{(0)} &= (x_n^p + a_1 x_n^{p-1} + \ldots + a_p) \overline{B}^0 + P \cdot \overline{A} \\ &= (\overline{B}^0 + P) \cdot \overline{A}\end{aligned}$$

où P désigne un certain polynome en $x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}\, x_n$. Mais les B ne contenant x_n qu'au degré $p-1$ au plus, et A contenant effectivement x_n^r, l'identité précédente ne peut avoir lieu que si le premier membre est identiquement nul; la relation cherchée est obtenue. On voit de plus que $B^0 + P$ est aussi identiquement nul, autrement dit que la relation écrite n'est autre que

$$\bar{A} \cdot \bar{B}^0 + (-\bar{B}^0)\,\bar{A} = 0.$$

2°) Le cas où la solution est entièrement déterminée est celui où il existe deux polynomes $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ tels que

$$\bar{\alpha}\,\bar{A} + \bar{\beta}\,\bar{B} = 1$$

autrement dit où les équations $\bar{A} = 0$ $\bar{B} = 0$ n'ont aucune solution commune. Tel est en supposant $n = 2$ et en employant le langage géométrique le cas d'une hyperbole et d'une de ses asymptotes, par exemple

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

image du système

$$\begin{cases} r - t - z = 0 \\ p - q - 0. \end{cases}$$

9. 1°) *Démonstration du théorème T dans les cas où $N = 2$, et où les coefficients sont constants.*

Considérons un système de *deux* équations à *deux* inconnues à coefficients *constants* sans seconds membres:

$$A(u) + A'(v) = 0$$
$$B(u) + B'(v) = 0$$

où les premiers membres sont *indépendants*.

Le théorème fondamental (T) n'est à démontrer que si $\bar{A}$, $\bar{B}$ n'ont pas de facteur commun: s'ils en avaient, la valeur de u, une fois v choisie avec les rectrictions convenables, dépendrait encore de fonctions arbitraires de $n-1$ variables. Si $\bar{A}$, $\bar{B}$ n'ont pas de facteur commun, la condition de compatibilité nécessaire et suffisante du système en u (voir n° 6 et début [1]) du n° 8) est l'équation $\Delta(v) = 0$, où

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} \bar{A} & \bar{A}' \\ \bar{B} & \bar{B}' \end{vmatrix}.$$

---

[1]) Où nous démontrons, grâce au résultant, que les arbitraires de la solution de $A(u) = 0$ $B(u) = 0$ sont de genre $n-2$ au plus. Nous ne nous servons pas ici bien entendu de la fin de ce n°, où le théorème T est considéré comme acquis dans le cas des coefficients constants.

Il nous suffit d'examiner le cas où $\Delta(v)=0$ n'admet d'autre solution que zéro, autrement dit où $\bar{\Delta}$ se réduit à une *constante non nulle.*

Dans ce cas, d'après la remarque faite à la fin du n° 8, $A(u)=0$ $B(u)=0$ n'ont d'autre solution que zéro. Mais v étant nul, $A'(v)$ et $B'(v)$ le sont, le système proposé n'a donc d'autre solution que $(u=0 \;\; v=0)$.

Remarquons que, dans tous les cas, le degré du polynome $\bar{\Delta}$ représente le nombre des arbitraires de genre $n-1$ dont dépend la solution du système d'équations aux dérivées partielles étudié.

2°) a) *Extension au cas de 3 équations à 2 inconnues, (dans l'hypothèse de coefficients constants), du résultat du n° 6.*

Supposons que la solution de

$$\begin{gathered} A(u)+A'(v)=0 \\ B(u)+B'(v)=0 \\ C(u)+C'(v)=0 \end{gathered}$$

ne dépende tout au plus que d'arbitraires de genre $n-2$. Soit p le nombre des fonctions arbitraires de $n-1$ variables dont dépend le système des deux premières supposées indépendautes. On a vu que si $p=0$, on a nécessairement $u=v=0$; il en résulte que la valeur de $C(u)+C'(v)$ ne peut être que nulle. Supposons $p \neq 0$, et *supposons qu'il existe entre les premiers membres* α, β, γ *quelque relation*

$$L(\alpha)+M(\beta)+N(\gamma)=0$$

où N *soit d'ordre* p. Pour que les équations

$$\begin{gathered} A(u)+A'(v)=0 \\ B(u)+B'(v)=0 \\ C(u)+C'(v)=h \end{gathered}$$

soient compatibles, il est évidemment *nécessatre* que $N(h)=0$. Je dis que cette condition est *suffisante.* La solution du système en u, v, h que l'on vient d'écrire dépend de p fonctions de $n-1$ variables; car on pourra choisir u, v par les deux premières seules, puis déterminer h par la troisième. Commençons par former le système K_h des conditions auxquelles doit satisfaire h; une fois h choisie, u, v en résultent avec des arbitraires de genre $n-2$ au plus; la solution de K_h dépend donc de p fonctions de $n-1$ variables; or $N(h)=0$, d'ordre p, fait partie de ce système, cela n'est possible que si toutes les conditions K_h sont *conséquences de* $N(h)=0$. Autrement dit $N(h)=0$ est une condition suffisante de compatibilité du système.

Remarquons d'ailleurs que le cas de $p=0$ peut être englobé dans l'énoncé final.

Il est aisé maintenant de passer au cas général. Pour que les équations en u, v

$$\left|\begin{array}{l} A(u)+A'(v)=f \\ B(u)+B'(v)=g \\ C(u)+C'(v)=h \end{array}\right.$$

soient compatibles, il est évidemment *nécessaire* que

$$L(f)+M(g)+N(h)=0.$$

On voit comme plus haut (n⁰ 6) que cette condition est *suffisante*.

b) *Démonstration du théorème T dans le cas où $N=3$ et où les coefficients sont constants.*

Considérons un système de *trois* équations à *trois inconnues*, à coefficients constants sans seconds membres.

$$(S)\quad\left|\begin{array}{l} A(u)+A'(v)+A''(w)=0 \\ B(u)+B'(v)+B''(w)=0 \\ C(u)+C'(v)+C''(w)=0. \end{array}\right.$$

Les premiers membres étant indépendants, le déterminant

$$\bar{\Delta}=\begin{vmatrix} \bar{A} & \bar{A}' & \bar{A}'' \\ \bar{B} & \bar{B}' & \bar{B}'' \\ \bar{C} & \bar{C}' & \bar{C}'' \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul; par suite l'un au moins de ses mineurs $\begin{vmatrix} \bar{A} & \bar{A}' \\ \bar{B} & \bar{B}' \end{vmatrix}$ par exemple, ne l'est pas. Le théorème T n'est à démontrer que si la solution de

$$(S)_1\quad\left|\begin{array}{l} A(u)+A'(v)=0 \\ B(u)+B'(v)=0 \\ C(u)+C'(v)=0 \end{array}\right.$$

ne dépend que d'arbitraires de genre inférieur à $n-1$. D'après ce qui vient d'être vu (a) et d'après la remarque faite à la fin de (1⁰), il *suffit* pour la possibilité (en u, v) du système (S) en u, v, w donné que l'on ait $\Delta(w) = 0$. Le théorème T n'est alors à démontrer que si $\bar{\Delta}$ se réduit à une constante (différente de zéro). Mais alors le système des équations obtenues en égalant à zéro les déterminants à deux lignes et deux colonnes déduits du tableau

$$\left\| \begin{matrix} \bar{A} & \bar{A}' \\ \bar{B} & \bar{B}' \\ \bar{C} & \bar{C}' \end{matrix} \right\|$$

n'a aucune solution. Il en résulte que le système d'équations $(S)_1$ n'a d'autre solution que $u = v = 0$. Mais w étant nul, $A''(w)$ et $B''(w)$ le sont; le système S n'a donc d'autre solution que $u = v = w = 0$.

Il conviendrait maintenant de démontrer que le degré de $\bar{\Delta}$ représente toujours le nombre d'arbitraires de genre $n-1$ dont dépend la solution de S, puis de passer au cas de $N = 4$, et ainsi de suite...

10. On peut remarquer que (en excluant toujours l'hypothèse envisagée au n° 4 où $A(u) = 0$ $B(u) = 0$ auraient une solution dépendant de fonctions arbitraires de $n-1$ variables) le cas étudié au n° 6 où il existe une relation

$$L(A) + M(B) = 0$$

avec L, M d'ordres respectivement $q =$ ordre de B. $p =$ ordre de A, *est le seul* où les relations $\lambda(A) + \mu(B) = 0$ qui existent entre A et B puissent toutes se déduire par dérivations et combinaisons *d'une relation unique.*

Soit $\lambda_0(A) + \mu_0(B) = 0$ une telle relation. Le système en u

$$\left\{ \begin{array}{l} A(u) = 0 \\ B(u) = g \end{array} \right.$$

serait compatible sous la seule condition $\mu_0(g) = 0$. Or la solution de ce système aux deux inconnues (u, g) dépend évidemment de p fonctions arbitraires de $n-1$ variables, puisqu'il en est ainsi de u (qui n'a qu'à satisfaire à la première), et que g est ensuite entièrement déterminée.

Si nous choisissons g d'abord, comme u ne dépend alors que d'arbitraires de genre $n-2$ au plus (de même que la solution du système sans seconds membres $A(u) = 0$ $B(u) = 0$ il faut nécessairement que le système de conditions auxquelles g est assujettie la fasse dépendre de p fonctions de $n-1$ variables; mais ce système de conditions se réduit à une seule équation, à savoir $\mu_0(g) = 0$; *μ_0 est donc d'ordre p.* Cela suffit pour que nous puissions affirmer que nous sommes dans le cas étudié au n° 6.

Ce cas est en somme celui où *par la transformation $g = B(u)$ l'équation $A(u) = 0$ se transforme en une équation unique $\mu_0(g) = 0$;* cette équation, en raison de l'hypothèse exclue (n° 4), est nécessairement d'ordre p.

Si maintenant on désire un exemple ne satisfaisant ni à l'hypothèse du n° 4, ni à celle du n° 6, il suffit de se reporter à celui qui a été donné à la fin du n° 3

$$\left\{\begin{aligned} A(u) &= u_x + a\, b_x\, u \\ B(u) &= u_y + a\, b_y\, u \end{aligned}\right. \quad \text{où} \quad \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 1.$$

D'après ce que l'on vient de dire, le seul fait que nous ne soyons ni dans le cas du n° 4 ni dans celui du n° 6 prouve que les relations entre A, B *ne sont* pas combinaisons différentielles d'*une seule* d'entre elles.

11. La considération de systèmes à coefficients constants ne peut donner d'exemple de la nature de ce dernier, puisque, pour eux, on peut toujours écrire la relation

$$B(A) - A(B) = 0$$

et que en excluant le cas du n° 4, on est alors nécessairement dans celui du n° 6.

Mais cette relation donne naturellement l'idée d'envisager les couples d'expressions A, B à coefficients non tous constants pour lesquels on peut écrire la relation précèdente, expressions „permutables“. A notre point de vue actuel, elle n'ont pas d'intérêt particulier.

Dans les deux exemples suivants, on peut immédiatement affirmer que l'on n'est pas dans le cas du n° 4, parce que *les formes caractéristiques de A et de B n'ont pas de facteur commun.* La découverte d'une relation $L(A) + M(B) = 0$ (avec L ordre 2, M ordre 1) entre les deux expressions A, B d'ordre 1, 2 données suffit donc à affirmer que le système en u $A(u) = f$ $B(u) = g$ est compatible dès que $L(f) + M(g) = 0$.

1°)
$$\left|\begin{array}{l} A(z) \equiv p + \frac{y}{2} z \\ B(z) \equiv t + xq + \frac{x^2}{4} z. \end{array}\right.$$

Il y a permutabilité. La seule condition de possibilité du système

$$\left|\begin{array}{l} p + \frac{y}{2} z = f \\ t + xq + \frac{x^2}{4} z = g \end{array}\right.$$

est

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x^2}{4}\right) f - \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\right) g = 0.$$

2°)
$$A(z) \equiv p + yq$$
$$B(z) = t.$$

Il n'y a pas permutabilité. La seule condition de possibilité du système

$$\left|\begin{array}{l} p + yq = f \\ t = g \end{array}\right.$$

est

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2\right) g = 0.$$

Dans d'autres cas, la conclusion est un peu moins immédiate parce que les formes caractéristiques de A, B ont un facteur commun; mais *elle n'en subsiste pas moins* si l'on parvient à former quelque combinaison de A, B et de leurs dérivées succesives dont la forme caractéristique ne contienne plus ce facteur.

Exemple.

$$A(z) \equiv r - x^2 t$$
$$B(z) \equiv s + x t.$$

Le combinaison $B_x - x B_y - A_y \equiv t$ satisfait à cette condition. La seule condition de possibilité du système

$$r - x^2 t = f$$
$$s + x t = g$$

est

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial}{\partial y}\right) g = 0.$$

Ainsi pour arriver à un cas bien caractérisé au point de vue degré de généralité, nous avons été amenés

1°) à introduire non pas l'hypothèse particulière de la permutabilité, mais bien l'hypothèse *plus générale* (n° 6) $LA + MB = 0$ (avec L de l'ordre de B, M de l'ordre de A)

2°) à exclure non pas l'hypothèse d'un facteur commun des formes caractéristiques de A, B, mais l'hypothèse plus particulière d'un degré de généralité de $A(u) = 0$, $B(u) = 0$ caractérisé par des fonctions arbitraires de $n - 1$ variables.

L'énoncé suggéré par la communication de M. Hadamard [1]) au Congrès de Zurich 1932 se trouve ainsi non seulement démontré, mais généralisé dans deux directions différentes.

12. La question qui avait amené M Hadamard à l'énoncé auquel nous venons de faire allusion était relative aux dérivées partielles linéaires à premier membre décomposable. $F(G(z)) = 0$ où F et G sont permutables. Elle suggère de faire l'application suivante de l'étude qui précède, application qui généralisera le résultat signalé comme vraisemblable par M Hadamard.

Plaçons-nous dans le cas où A, B satisfont aux conditions indiquées au n° 6; et considérons l'unique équation aux dérivées partielles d'ordre $p + q$

$$L(A(w)) = 0$$

ou ce qui revient au même

$$M(B(w)) = 0.$$

Je dis que sa *solution générale* s'obtient en faisant la *somme des solutions générales* u, v *de chacune des équations*

$$A(u) = 0 \qquad B(v) = 0$$

1°) Supposons $A(u) = 0$ et $B(v) = 0$; comme

$$L[A(u+v)] = L(A(u) + A(v)) = L(A(u)) + L(A(v)) = L(A(u)) - M(B(v))$$

on voit que

$$L(A(u + v)) = 0$$

2°) Supposons $L[A(w)] = 0$; alors le système en v

$$\begin{cases} A(v) = A(w) \\ B(v) = 0 \end{cases}$$

[1]) Congrès de Zurich 1932 t. 2 p. 80 et G. Cerf. (C. R. Acad. Sc. t. 197 p. 892 23 oct. 1933).

est compatible; on peut donc trouver, au moins, une fonction v telle que

$$\begin{cases} A(w-v)=0 \\ B(v)=0 \end{cases}$$

autrement dit un système de deux fonctions u, v telles que $w=u+v$ et

$$\begin{cases} A(u)=0 \\ B(v)=0. \end{cases}$$

Par exemple, la solution générale de

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2\frac{\partial}{\partial y}\right)(s+x\,t)=0$$

ou, ce qui revient au même, de

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+x\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(r-x^2t)=0$$

s'obtient en ajoutant les solutions générales de *chacune* des équations

$$r-x^2t=0 \qquad s+x\,t=0.$$

Application astronomique de l'invariant adiabatique en mécanique einsteinienne

par

Godofredo Garcia

Lima.

Dans une brillante communication présentée par le professeur Tullio Levi-Civita au Congrès international de mathématiciens réuni à Bologne on trouve deux applications remarquables à l'Astronomie de la notion d'invariant adiabatique introduite en mécanique atomistique par le physicien hollandais Ehrenfest.

Problème einsteinien de deux corps de masse variable

(Méthode du professeur Tullio Levi-Civita).

Soient G_1 et G_2 les centres de gravité des deux corps et G_0 le centre de gravité du système, r la distance et $M = m + m_1$ la somme des masses. On aura

$$(1) \qquad G_1 G_0 = \frac{m_1}{M} r, \quad G_2 G_0 = \frac{m}{M} r.$$

Désignons par l et L la latitude et la longitude de $G_1 G_2$. Le force vive absolue de G_1 est [1])

$$(2) \qquad \frac{1}{2} m \left(\frac{m_1}{M}\right)^2 [r'^2 + r^2 l'^2 + r^2 \cos^2 l L'^2]$$

et celle de G_2

$$(3) \qquad \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m}{M}\right)^2 [r'^2 + r^2 l'^2 + r^2 \cos^2 l L'^2].$$

La force vive du système

$$(4) \qquad T = \frac{1}{2} \frac{m m_1}{M} [r'^2 + r^2 l'^2 + r^2 \cos^2 l L'^2].$$

---

[1]) Tullio Levi-Civita, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 1928.

En désignant par f la constante de la force d'attraction universelle, on a l'expression du potentiel newtonien

$$U = f\frac{m\,m_1}{r}. \tag{5}$$

Si l'on multiple T et U par une même constante, l'équation lagrangienne du mouvement ne change pas. En multipliant donc par $\frac{M}{m\,m_1}$ nous aurons l'expression unitaire de la force vive et du potentiel

$$T = \frac{1}{2}\left[r'^2 + r^2 l'^2 + r^2 \cos^2 l\, L'^2\right], \tag{6}$$

$$U = \frac{fM}{r} \tag{7}$$

de manière que l'expression du potentiel due à M. Levi-Civita est

$$U^* = \left(1 + \frac{4E^*}{c^2}\right)\frac{fM}{r} + \frac{3}{c^2}\frac{f^2 M^2}{r^2}. \tag{8}$$

L'énergie totale est donnée par

$$H^* = T - U^*. \tag{9}$$

En introduisant les variables conjuguées de Poisson

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial r'} = r', \quad p_l = \frac{\partial T}{\partial l'} = r^2 l', \quad p_L = \frac{\partial T}{\partial L'} = r^2 \cos^2 l\, L'$$

on a

$$H^* = \frac{1}{2}\left[p_r^2 + \frac{p_l^2}{r^2} + \frac{p_L^2}{r^2 \cos^2 l}\right] - \left[1 + \frac{4E^*}{c^2}\right]\frac{fM}{r} - \frac{3}{c^2}\frac{f^2 M^2}{r^2} \tag{10}$$

ce qui est la fontion caractéristique du système canonique

$$\begin{aligned} \frac{dp_r}{dt} &= -\frac{\partial H^*}{\partial r}, & \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H^*}{\partial p_r}, \\ \frac{dp_l}{dt} &= -\frac{\partial H^*}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= \frac{\partial H^*}{\partial p_l}, \\ \frac{dp_L}{dt} &= -\frac{\partial H^*}{\partial L}, & \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial H^*}{\partial p_L}. \end{aligned} \tag{11}$$

Calcul effectif de l'invariant adiabatique et conséquences immédiates.

Lorsque H^* ne contient pas la variable t nous pouvons écrire

$$(12)\quad \frac{1}{2}\left[p_r^2+\frac{p_l^2}{r^2}+\frac{p_L^2}{r^2\cos^2 l}\right]-\left[1+\frac{4E^*}{c^2}\right]\frac{fM}{r}-\frac{3}{c^2}\frac{f^2M^2}{r^2}=E^*$$

et poser

$$(13)\quad k=\left[1+\frac{4E^*}{c^2}\right]fM, \qquad (14)\quad k_1=\frac{6f^2M^2}{c^2},$$

ainsi que

$$(15)\qquad E^*=-\frac{k}{2a}$$

$$(16)\qquad E^*=-\frac{fM}{2a\left[1+\frac{2fM}{c^2a}\right]}.$$

Le mouvement moyen sera

$$(17)\qquad n^*=\sqrt{\frac{fM}{a^3}}\left[1-\frac{5fM}{c^2a}\right].$$

De (12) on obtient p_r^2

$$(18)\qquad p_r^2=2E^*+\frac{2k}{r}-\left[1-\frac{k_1}{G^2}\right]\frac{G^2}{r^2}-\frac{W^2}{r^2\cos^2 l}.$$

En posant pour simplifier

$$(19)\qquad G^{*2}=\left[1-\frac{k_1}{G^2}\right]G^2=\beta^2G^2$$

on réduit (18) à la forme très simple

$$(20)\qquad p_r^2=2E^*+\frac{2k}{r}-\frac{G^{*2}}{r^2}-\frac{W^2}{r^2\cos^2 l}.$$

L'aire V^* (du plan r, p_r) intérieure à la courbe (20) est exprimée par

$$(21)\qquad V^*=\int_0^T p_r\,d\,r,$$

en considérant t comme variable indépendante de cette intégrale.

Alors comme on a

$$d\,r=r'\,d\,t=p_r\,d\,t,$$

en remplaçant dans (21) r par t on a

$$V^* = \int_0^T p_r^2 \, d\,t. \tag{22}$$

De plus, le mouvement moyen étant

$$n^* = \frac{2\pi}{T} \tag{23}$$

on aura

$$V^* = 2E^* \frac{2\pi}{n^*} + 2k \int_0^T \frac{d\,t}{r} - G^* \int_0^T \frac{G^* \, d\,t}{r^2} - W \int_0^T \frac{W\,d\,t}{r^2 \cos^2 l}. \tag{24}$$

L'équation de Kepler différentiée donne (α représente l'anomalie excentrique, ε l'excentricité de l'orbite)

$$(1 - \varepsilon \cos \alpha)\, d\,\alpha = n^* \, d\,t. \tag{25}$$

Comme on a

$$a\,(1 - \varepsilon \cos \alpha) = r \tag{26}$$

ces équations permettent de déterminer les intégrales:

$$\int_0^T \frac{d\,t}{r} = \frac{2\pi}{a\,n^*}, \tag{27}$$

$$\int_0^T \frac{G^* \, d\,t}{r^2} = \int_0^T \frac{G\,d\,t}{r^2} - \frac{k_1}{2\,G^2} \int_0^T \frac{G\,d\,t}{r^2} = 2\pi \left[1 - \frac{k_1}{2\,G^2}\right], \tag{28}$$

$$\int_0^T \frac{W\,d\,t}{r^2 \cos^2 l} = \int_0^T d\,\Theta = 2\pi. \tag{29}$$

L'expression (24) prend donc la forme suivante

$$V^* = 2\,E^* \frac{2\pi}{n^*} + 2\,k\,\frac{2\pi}{a\,n^*} - 2\pi\,G^* \left[1 - \frac{k_1}{2\,G^2}\right] - 2\pi\,W. \tag{30}$$

À cause de (15) on a

$$V^* = \frac{2\pi}{a\,n^*} k - 2\pi\,G^* \left[1 - \frac{k_1}{2\,G^2}\right] - 2\pi W \tag{31}$$

où bien

$$V^* = 2\pi \left\{ \sqrt{k\,a} \left[1 + \frac{5\,f\,M}{c^2\,a}\right] - G^* \left[1 - \frac{k_1}{2\,G^2}\right] - W \right\}, \tag{32}$$

et puisque l'on a

$$(33)\quad k = \frac{f M}{1 + \frac{2 f M}{c^2 a}} \qquad\qquad (34)\quad W = G \cos i$$

l'expression précédente se transforme en la suivante

$$(35)\qquad \frac{V^*}{2\pi} = \sqrt{f M a}\left[1 + \frac{3 f M}{c^2 a}\right] - G\,[1 + \cos i] + \frac{6 f^2 M^2}{c^2 G}$$

ou bien

$$(36)\qquad \frac{V^*}{2\pi} = \sqrt{f M a}\left[1 + \frac{3 f M}{c^2 a}\right] - 2\, G \cos^2 \frac{i}{2} + \frac{6 f^2 M^2}{c^2 G}.$$

En élevant (36) au carré on peut écrire en seconde approximation

$$(37)\quad \frac{6}{c^2}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{1}{a^2}\right](f M a)^2 + f M a - \left[\frac{V^*}{2\pi} + 2\, G \cos^2 \frac{i}{2}\right]^2 = 0.$$

En posant

$$(38)\qquad P = \frac{6}{c^2}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{1}{a^2}\right],$$

$$Q = \left[\frac{V^*}{2\pi} + 2\, G \cos^2 \frac{i}{2}\right]^2$$

l'équation (37) se réduit à

$$(39)\qquad (f M a)^2 + \frac{1}{P} f M a - \frac{Q}{P} = 0.$$

On a

$$(40)\qquad f M a = \frac{1}{2P}\left[-1 \pm \sqrt{1 + 4 P Q}\right]$$

et en seconde approximation

$$(41)\qquad f M a = \frac{1}{2P}\left[-1 \pm (1 + 2 P Q)\right].$$

Les racines sont

$$(42)\qquad f M a = Q = \left[\frac{V^*}{2\pi} + 2\, G \cos^2 \frac{i}{2}\right]^2,$$

$$(43)\quad f M a = -\frac{1}{P}[1 + P Q] = -\left[\frac{V^*}{2\pi} + 2\, G \cos^2 \frac{i}{2}\right]^2 - \frac{c^2}{6}\,\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{1}{a^2}}.$$

Observons que (42) est la même que dans la théorie classique. La racine exprimée par (42) est celle qui satisfait au problème. Observons que Q est constant, donc lorsque a tend vers zéro M croît indéfiniment et au contraire lorsque a croît indéfiniment M tend vers zéro (toujours lentement et avec une loi quelconque). Ceci peut nous expliquer la loi de la variation séculaire de a avec M.

Considérant le cas $i = 90^0$ la formule (42) se réduit à

$$fMa = \frac{V}{2\pi} + G \tag{44}$$

ce qui est la formule rencontrée par le professeur T. Levi-Civita en traitant le problème plan et en mécanique classique.

Le problème des deux corps de masse variable est de grande importance en astronomie. La *chute des météorites* tend à augmenter les m, m_1 des deux corps, donc leurs somme M, et il se produit le phénomène étudié par le professeur Armellini et qu'a résolu complètement dans le plan le professeur T. Levi-Civita.

Lima-Perú, 1. Février 1935.

Erratum.

Pag. 92. ligne 8, [formule (44)]: *au lieu de*

$$f\,M\,a = \frac{V}{2\pi} + G.$$

lire:

$$\sqrt{f\,M\,a} = \frac{V}{2\pi} + G.$$

Sur les valeurs asymptotiques des intégrales des équations différentielles

par

M. Biernacki
Poznań.

§ 1. G. H. Hardy a établi [1]) le lemme suivant: „Si la somme $y(x) + y'(x)$ tend vers une limite finie lorsque $x \to +\infty$, $y(x)$ tend vers cette même limite". O. Perron a démontré [2]) ce lemme en utilisant la formule qui fournit l'intégrale de l'équation linéaire du 1^{er} ordre et a étendu le résultat aux expressions linéaires d'ordre superieur. Ces généralisations ont été poursuivies par plusieurs auteurs. J'ai obtenu des propositions [3]) qui étendent l'énoncé de M. Hardy à certaines expressions non linéaires du 1^{er} ordre:

I. *Supposons que la fonction $f(x,y)$ satisfasse aux conditions suivantes:*

1) *$f(x,y)$ est continue dans un demi-plan $x > a$,*

2) *il existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,y) = \varphi(y)$, uniformément pour $-\infty < y < +\infty$* [4]),

3) *$\varlimsup\limits_{y\to+\infty} \varphi(y)$ est négative, tandis que $\varliminf\limits_{y\to-\infty} \varphi(y)$ est positive*

alors toute valeur-limite y_0 pour $x \to +\infty$ d'une intégrale $y(x)$ de l'équation $y' = f(x,y)$ est finie et telle que $\varphi(y_0) = 0$ [5]), *$y'(x)$ tend donc vers zéro lorsque $x \to +\infty$* [6]).

---

[1]) The quarterly Journal of pure and applied Mathematics **35** (1903).

[2]) Mathematische Zeitschrift, **17** (1923).

[3]) Dans le cas de l'équation algébrique M. Michel Petrovitch a obtenu, en 1895, des résultats en partie plus généraux (cf. Mémorial des sciences mathém. fascicule 48: M. Petrovitch. Intégration qualitalive des équations différentielles p. 22).

[4]) $\varphi(y)$ est donc une fonction continue.

[5]) On ne suppose pas nécessairement que l'intégrale tende vers une limite déterminée.

[6]) Il résulte des conditions 1—3 que toute intégrale reste finie lorsque x tend en croissant vers une valeur finie plus grande qu'un nombre fixe.

Il est impossible qu'une valeur-limite de l'intégrale soit $+\infty$, par exemple, car en vertu des conditions 2) et 3) il existe une suite de demi-droites: $x > b$, $y = y_n$ $(n = 1, 2, 3,\ldots)$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ sur lesquelles $f(x, y) < 0$, aucune intégrale ne peut pas franchir ces demi-droites en croissant.

Supposons qu'il existe une suite $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$ qui tend vers $+\infty$ et une intégrale $y(x)$ telles que $\lim\limits_{n\to\infty} y(x_n) = y_0$, y_0 étant fini et $\varphi(y_0) \neq 0$, $\varphi(y_0) > 0$ pour fixer les idées. En vertu de la condition 2) il existe une demi-bande B définie par des inégalités: $x \geqslant b$, $y_0 - h \leqslant y \leqslant y_0 + h$ telle que dans B $f(x, y) > k > 0$, k étant un nombre fixe. Si l'indice n est assez grand et si x croît à partir de x_n l'on a $y'(x) > k$ tant que l'intégrale reste dans B, cette intégrale quitte donc B et reste au-dessus de cette demi-bande, en contradiction avec l'hypothèse faite.

Remarques [7]).

I. Si tous les zéros de $\varphi(y)$ sont isolés, toute intégrale tend vers un de ces zéros lorsque $x \to +\infty$.

II. Il n'est pas possible de remplacer la condition 2) de l'énoncé I par celle-ci: „il existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x, y) = \varphi(y)$, uniformément dans tout intervalle $c \leqslant y \leqslant d$". En effet, $y = \sqrt{x}$ est une intégrale de l'équation

$$y' = -y + \frac{y + 2y^3}{2x},$$

pour laquelle $\varphi(y) = -y$.

III. Il n'est pas possible de remplacer la condition 3) de l'énoncé I par celle-ci: „il existe une suite infinie de valeurs $z_1, z_2, \ldots z_n, \ldots$ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = +\infty$ telle que $\varphi(z_n) < 0$ et une suite $t_1, t_2, \ldots t_n \ldots$ $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = -\infty$ telle que $\varphi(t_n) > 0$". En effet, $y = \sqrt{x}$ est une intégrale de l'équation

$$y' = \frac{\sin y}{1 + y^2} - \frac{\sin(\sqrt{x})}{1 + x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

pour laquelle $\varphi(y) = \dfrac{\sin y}{1 + y^2}$.

---

[7]) Les remarques II et III sont des réponses à des questions posées par T. Ważewski.

§ 2. En supprimant la condition 3) de l'énoncé I on obtient évidemment l'énoncé que voici:

II. *Supposons que la fonction $f(x, y)$ satisfasse aux conditions suivantes:*

1) $f(x, y)$ est continue dans le domaine: $x > a$, $c < y < d$ (c et d finis ou non),

2) il existe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x, y) = \varphi(y)$, uniformément dans chaque intervalle $c' \leqslant y \leqslant d'$, si $c < c'$ et $d' < d$.

Si une intégrale de l'équation $y' = f(x, y)$ reste finie pour toute valeur finie de $x > a$ et si y_0 ($c < y_0 < d$) est une des valeurs-limites pour $x \to +\infty$ de cette intégrale, on a $\varphi(y_0) = 0$.

En conservant toutes les hypothèses des énoncés I ou II *je supposerai, dans tout ce qui suit, que par chaque point du demi-plan $x > a$ ou du domaine $x > a$, $c < y < d$ il ne passe qu'une seule intégrale de l'équation $y' = f(x, y)$.* Je me bornerai d'ailleurs à l'étude des intégrales qui tendent vers un zéro *isolé* y_0 de $\varphi(y)$ (dans le cas de l'énoncé II on suppose que $c < y_0 < d$).

§ 3. *Si le signe de $\varphi(y)$ passe du positif au négatif lorsque y passe par y_0 en croisant, il existe une infinité d'intégrales qui tendent vers y_0.*

En effet, il existe des nombres b, h et h' ($0 < h' < h$) tels que y_0 soit le seul zéro de $\varphi(y)$ dans l'intervalle ($y_0 - h$, $y_0 + h$) et que dans la demi-bande B_1 définie par les inégalités $x \geqslant b$, $y_0 - h \leqslant y \leqslant y_0 - h'$ $f(x, y)$ soit positive, tandis que dans la demi-bande B_2 où $x \geqslant b$, $y_0 + h' \leqslant y \leqslant y_0 + h$ $f(x, y)$ soit négative. Considérons une intégrale qui passe par un point $P(\xi, \eta)$ de B_1; lorsque x croît à partir de ξ, cette intégrale croît tant qu'elle reste dans B_1, or elle ne peut pas pénétrer dans la demi-bande B_2 et doit par suite (d'après les théorèmes I ou II) tendre vers y_0 lorsque $x \to +\infty$.

Remarquons que *s'il existe $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\partial f}{\partial y} = \varphi'(y)$, uniformément dans un intervalle ($y_0 - h$, $y_0 + h$) et si $\varphi'(y_0)$ est négative, les intégrales qui tendent vers y_0 diffèrent d'une quantité décroissante avec x qui tend vers zéro comme $e^{\varphi'(y_0) \cdot x}$.*

En effet, soient $y(x)$ et $z(x)$ deux intégrales qui tendent vers y_0; en posant $z - y = u$ on aura:

$$(1) \qquad u' = f(x,z) - f(x,y) = u\frac{\partial f}{\partial y}[x, y+\theta(z-y)] \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 1)$$

u conserve un signe constant. par exemple positif, u' est donc négative pour x assez grand et l'on aura dans les mêmes conditions

$$\varphi'(y_0) - \varepsilon < \frac{u'}{u} < \varphi'(y_0) + \varepsilon$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit. En intégrant, on obtient les inégalités:

$$u(x_0)\cdot e^{[\varphi'(y_0)-\varepsilon](x-x_0)} < u(x) < u(x_0)\cdot e^{[\varphi'(y_0)+\varepsilon](x-x_0)}$$

x_0 étant un nombre fixe. Ces inégalités précisent le sens de l'assertion: „tend vers zéro comme $e^{\varphi'(y_0)\cdot x}$".

§ 4. *Si le signe de $\varphi(y)$ passe du négatif au positif lorsque y passe par y_0 en croissant, il existe au moins une intégrale qui tend vers y_0.*

Il existe des nombres b et h tels que y_0 soit le seul zéro de $\varphi(y)$ dans l'intervalle $(y_0 - h, y_0 + h)$ et que sur la demi-droite D_1 où $x \geqslant b$. $y = y_0 - h$ $f(x,y)$ soit négative tandis que sur la demi-droite D_2 où $x \geqslant b$, $y = y_0 + h$ $f(x,y)$ soit positive. Les demi-droites D_1, D_2 et le segment S où $x = b$, $y_0 - h \leqslant y \leqslant y_0 + h$ délimitent une demi-bande B. Considérons les intégrales issues de S et supposons qu'aucune de ces intégrales ne tende vers y_0; lorsque x croît, chacune de ces intégrales finira par quitter la demi-bande B et rester en dehors de cette demi-bande (dans le cas de l'énoncé II il est possible qu'une intégrale devienne infinie lorsque x tend vers une valeur finie). Nous dirons qu'un point de S appartient à la 1ère (respect. 2ème) classe si l'intégrale issue de ce point quitte la demi-bande B en un point de la demi-droite D_1 (respect. D_2). Il existe des points des deux classes et chaque point de la 1e classe est au-dessous de chaque point de la 2e classe. Le point séparatif des deux classes devrait appartenir à une de ces classes, c'est pourtant en contradiction avec le fait qu'une intégrale est fonction continue des conditions initiales.

On peut d'ailleurs affirmer que *s'il existe (dans le cas envisagé) des nombres b et h tels que $\frac{\partial f}{\partial y}$ soit positive pour $x > b$, $y_0 - h < y < y_0 + h$ il n'y a qu'une seule intégrale qui tend vers y_0.*

Supposons, en effet, qu'il en existe deux $y(x)$ et $z(x)$, en posant encore $z - y = u$ on peut supposer que $u > 0$, d'après l'égalité (1) du § 3 u' serait positive et u ne pourrait pas tendre vers zéro.

En particulier, *s'il existe* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\partial f}{\partial y} = \varphi'(y)$, *uniformément dans un intervalle* $(y_0 - h,\ y_0 + h)$ *et si* $\varphi'(y_0)$ *est positive, il n'ya qu'une seule intégrale qui tend vers* y_0.

T. Ważewski a montré que *si* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *n'est pas positive en tous les points du domaine* $x > b,\ y_0 - h < y < y_0 + h$ *il peut y avoir une infinité des intégrales qui tendent vers* y_0.

Dans l'exemple de M. Ważewski il existe $\lim \dfrac{\partial f}{\partial y} = \varphi'(y)$, uniformément dans un intervalle $(y_0 - h,\ y_0 + h)$ et l'on a cependant $\varphi'(y_0) = 0$. Voici cet exemple [8]):

Considérons l'équation $y' = f(x, y)$ où $f(x, y)$ est définie pour $x > 1$. Si $|y| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ on pose $f(x, y) = \dfrac{-2y}{x}$, si $|y| \geqslant \dfrac{1}{x}$ on pose $f(x, y) = y^3$.

Pour $\dfrac{1}{x^2} \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{x}$ on pose

$$f(x, y) = P(x, y) \equiv a_3(x)\, y^3 + a_2(x)\, y^2 + a_1(x)\, y + a_0(x),$$

le polynôme du 3e degré en y $P(x, y)$ satisfaisant aux conditions [9]):

$$\text{pour} \quad y = \frac{1}{x^2}, \quad P(x, y) = \frac{-2y}{x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2}{x},$$

$$\text{pour} \quad y = \frac{1}{x}, \quad P(x, y) = y^3, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2.$$

Pour $-\dfrac{1}{x} \leqslant y \leqslant -\dfrac{1}{x^2}$ on posera $f(x, y) = -P(x, -y)$.

Il est clair que la fonction $f(x, y)$ ainsi définie est continue, ainsi que sa dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, pour $x > 1$. Lorsque $x \to +\infty$ $f(x, y)$ tend vers $\varphi(y) = y^3$, uniformément dans tout intervalle.

---

[8]) Je remercie M. Ważewski d'avoir bien voulu m'autoriser à publier son curieux exemple.

[9]) Il existe un polynôme unique du 3e degré qui satisfait à ces conditions. Cf. W. Wilkosz. Sur l'intégrale fondamentale de l'équation linéaire aux dérivées partielles du 1er ordre. Ann. de la Soc. Pol. de Mat. tome 10 (1931) p. 96.

Pour le voir il suffit de montrer que $f(x,y)$ tend uniformément vers zéro lorsque $x \to +\infty$ et $|y| \leqslant \frac{1}{x}$. Or si $|y| \leqslant \frac{1}{x^2}$, $|f(x,y)| \leqslant \frac{2}{x^3}$ et si $\frac{1}{x^2} \leqslant |y| \leqslant \frac{1}{x}$ l'on a $|f(x,y)| \leqslant \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} \cdot \underset{\frac{1}{x^2} \leqslant |y| \leqslant \frac{1}{x}}{\operatorname{Max}} \left|\frac{\partial P}{\partial y}\right|$. Nous profiterons maintenant du lemme suivant [10]): Si $P(y)$ est un polynôme du 3e degré et si les 3 nombres:

$$|P'(a)|, \quad |P'(b)| \quad \text{et} \quad \left|\frac{P(b)-P(a)}{b-a}\right|$$

ne dépassent pas N, on a $|P'(y)| \leqslant 25N$ pour $a \leqslant y \leqslant b$.

En posant $a = \frac{1}{x^2}$, $b = \frac{1}{x}$, il vient:

$$\left|\frac{\partial P}{\partial y}(x,a)\right| = \frac{2}{x}, \quad \left|\frac{\partial P}{\partial y}(x,b)\right| = \frac{3}{x^2}, \quad \left|\frac{P(x,b)-P(x,a)}{b-a}\right| = \frac{3}{x^2-x}.$$

En appliquant le lemme on trouve que le maximum de $\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right|$ pour $\frac{1}{x^2} \leqslant |y| \leqslant \frac{1}{x}$ tend vers zéro lorsque $x \to +\infty$ et il en est donc de même avec $f(x,y)$.

On voit en même temps que $\frac{\partial f}{\partial y}$ tend vers $\varphi'(y) = 3y^2$, uniformément dans toud intervalle. Il suffit encore de prouver que $\frac{\partial f}{\partial y}$ tend uniformément vers zéro lorsque $x \to +\infty$ et $|y| \leqslant \frac{1}{x}$. Or, si $|y| \geqslant \frac{1}{x^2}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$ et si $|y| \leqslant \frac{1}{x^2}$ l'on a $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{x}$.

Il est aisé de vérifier que $y = \frac{k}{x^2}$ en une intégrale de l'équation considérée si $-1 \leqslant k \leqslant +1$, il y a donc une infinité d'intégrales qui tendent vers zéro.

§ 5. Supposons maintenant que $\varphi(y)$ ne change pas de signe dans le voisinage d'un zéro isolé y_0 de $\varphi(y)$. Considérons les deux équations:

$$y' = f_2(x,y) \equiv \varphi(y) - \psi(x), \tag{2}$$

$$y' = f_3(x,y) \equiv \varphi(y) + \psi(x) \tag{3}$$

---

[10]) W. Wilkosz loc. cit.

où $\varphi(y)$ est une fonction qui s'annule pour $y = y_0$, qui est positive lorsque $y \neq y_0$, $y_0 - h \leqslant y \leqslant y_0 + h$ et qui possède partout une dérivée finie. Nous supposons en outre que $\underline{\lim}_{y \to +\infty} \varphi(y)$ est négative, tandis que $\overline{\lim}_{y \to -\infty} \varphi(y)$ est positive. $\psi(x)$ est une fonction positive et continue pour $x > a$, qui tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$, de manière que $\int_a^\infty \psi(x)\,dx$ diverge. Il est clair que toutes les conditions de l'énoncé I du § 1 sont remplies pour les équations (2) et (3) et que par chaque point du demi-plan $x > a$ il ne passe qu'une seule intégrale de ces équations.

L'équation (2) possède une *infinité* d'intégrales qui tendent vers y_0. Il existe, en effet, une demi-bande: $x \geqslant b$, $y_0 - h \leqslant y \leqslant y_0 - \frac{h}{2}$ $(h > 0)$ ou $f_2(x, y)$ est positive. Une intégrale issue d'un point quelconque du segment qui limite à gauche cette demi-bande croît avec x tant qu'elle reste dans la demi-bande, $f_2(x, y_0)$ étant cependant négative, cette intégrale ne peut pas atteindre y_0 pour une valeur finie de x, tend donc nécessairement, d'après le théorème I, vers cette valeur.

Au contraire, *aucune* intégrale de l'équation (3) ne tend vers y_0 lorsque $x \to +\infty$. En effet, dans la demi-bande $x > a$, $y_0 - h \leqslant y \leqslant y_0 + h$ $f_3(x, y)$ est positive, considérons une intégrale qui passe par un point $P(\xi, \eta)$ de cette demi-bande. Si $\eta \geqslant y_0$ l'intégrale ne peut évidemment pas tendre vers y_0; supposons que $\eta < y_0$, tant que l'intégrale $y(x)$ ne dépasse pas $y_0 + h$ l'on a $y'(x) \geqslant \psi(x)$ et par suite

$$y(x) \geqslant \eta + \int_\xi^x \psi(x)\,dx,$$

$\int_a^\infty \psi(x)\,dx$ étant divergente $y(x)$ finira par surpasser y_0 pour x assez grand, ne tend donc pas vers y_0.

En résumé, *lorsque $\varphi(y)$ ne change pas de signe dans le voisinage d'un zéro isolé y_0 la considération de la fonction $\varphi(y)$ ne suffit pas en général pour décider s'il existe des intégrales qui tendent vers y_0.*

Ein Beitrag zur Theorie der sukzessiven Approximationen von Picard-Lindelöf

von

St. Gołąb

Kraków.

Das Ziel der vorliegenden Note ist einige einfache Beziehungen festzustellen, die zwischen dem Integral einer gewöhnlichen Differentialgleichung (4) und seinen sukzessiven Approximationen (im Sinne von Picard-Lindelöf) bestehen.

Um sich kurz ausdrücken können, nehmen wir folgende Verabredung an:

Die Funktion $f(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n)$ gehöre in bezug auf die Variablen y_i zur Klasse C_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, wenn sie im Falle $k = 0$ die Lipschitzsche Bedingung in bezug auf die Variablen y_i erfüllt, im Falle $k \geqslant 1$ dagegen, wenn sie die stetigen partiellen Ableitungen $\frac{\partial^j f}{\partial y_{l_1} \ldots \partial y_{l_j}}$ $(l_j = 1, \ldots, n)$ bis zur k-ten Ordnung $(j = 1, \ldots, k)$ besitzt.

Wir stellen nun den Begriff des k-ten *Derivates* einer Funktion $f(x)$. Unser Begriff ist nur eine unbedeutende Modifikation jenes, von O. Perron [1]) eingeführten, und beide sind, wie man leicht nachweisen kann, zwischeneinander aequivalent.

Definition. Eine Funktion $f(x)$, die in einer Umgebung des Punktes x_0 erklärt ist, besitzt im Punkte x_0 das k-te Derivat, wenn es $k+1$ Konstanten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ von der Art gibt, dass die Beziehung

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + \frac{a_2}{2!} h^2 + \ldots + \frac{a_k}{k!} h^k + \varepsilon(h) \cdot h^k \tag{1}$$

mit

$$\lim_{h/0} \varepsilon(h) = 0 \tag{2}$$

erfüllt ist.

---

[1]) O. Perron, Über Maxima und Minima und eine Modifikation des Begriffs der höheren Ableitungen, Sitz. Bayer. Akad. Wissensch. (1926), 309—315.

Man zeigt ohne Schwierigkeit, dass aus der Existenz des k-ten Derivates der Funktion $f(x)$ im Punkte x_0 folgt, dass die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_k$ eindeutig bestimmt sind ($a_0 = f(x_0)$) und dass auch das $k-1$-te Derivat im Punkte x_0 vorhanden ist. Man zeigt weiter, dass aus der Existenz der k-ten Ableitung (Derivierten) im Punkte x_0 die Existenz des k-ten Derivates in diesem Punkte folgt und dass in diesem Falle die Beziehungen

$$(3) \qquad a_i = f^{(i)}(x_0) \qquad (i = 0, 1, \ldots, k; \quad f^{(0)}(x) = f(x))$$

bestehen. Es ist also erlaubt die Konstante a_i den Wert des i-ten Derivates der Funktion $f(x)$ im Punkte x_0 zu nennen. Somit ist der Begriff des k-ten Derivates eine Verallgemeinerung des Begriffes der k-ten Ableitung. Es ist zu bemerken, dass für $k = 2$ der Begriff des Derivates nicht so allgemein ist, wie der Begriff der verallgemeinerten Schwarzschen Ableitung. Man kann nämlich beweisen, das die Existenz des zweiten Derivates auch die Existenz der Schwarzschen Ableitung mit sich bringt, wobei das Umgekehrte nicht der Fall ist.

Satz 1. *Es sei die Differentialgleichung*

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

gegeben, wo die Funktion $f(x, y)$ in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) in bezug auf beide Variablen zur C_{k-1} gehört (für $k = 1$ genügt die Voraussetzung der Stetigkeit in bezug auf die Variabel x). Wir bezeichnen mit

$$(5) \qquad \varphi(x)$$

das einzige Integral der Gleichung (4), *das durch den Punkt (x_0, y_0) hindurchgeht und mit*

$$(6) \qquad \varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$$

die Folge der durch das Picard-Lindelöf'sche Verfahren konstruierten sukzessiven Approximationen (d. h. $\varphi_0(x)$ ist eine beliebige, in der Umgebung des Punktes x_0 stetige und der Gleichung

$$(7) \qquad \varphi_0(x_0) = y_0$$

genügende Funktion, $\varphi_{i+1}(x)$ dagegen durch die Rekurrenzformel

$$(8) \qquad \varphi_{i+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_i(s))\, ds$$

definiert ist).

Dann bestehen die folgenden Relationen:

$$(9)\qquad \left[\frac{d^i \varphi_j}{d x^i}\right]_{x=x_0} = \left[\frac{d^i \varphi}{d x^i}\right]_{x=x_0} \quad \text{für} \quad \begin{cases} i=1,2,\ldots,j \\ j=1,2,\ldots,k. \end{cases}$$

Der Beweis gestaltet sich so einfach, daß wir ihn nur skizzieren werden. I) Zunächst wollen wir bemerken, dass es die Richtigkeit der Beziehungen (9) für $j=k$ zu beweisen genügt, da unter der Annahme, dass (9) wirklich für $j=k$ bewiesen wurden, bestätigen wir leicht, für ein $j<k$, dass die Funktion f zur C_{j-1} gehört und folglich die Relationen auch für den Index j gelten. Es ist also nur zu zeigen, dass

$$(10)\qquad \left[\frac{d^i \varphi_k}{d x^i}\right]_{x=x_0} = \left[\frac{d^i \varphi}{d x^i}\right]_{x=x_0} \qquad \text{für} \quad i=1,2,\ldots,k,$$

ist.

II) Das Integral $\varphi(x)$ besitzt unter unseren Voraussetzungen in der Umgebung des Punktes x_0 die stetigen Ableitungen bis zur k-ten Ordnung. In der Tat, wir haben

$$(11)\quad \varphi'(x)=f[x,\varphi(x)],\ \varphi''(x)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\varphi'(x)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot f[x,\varphi(x)]$$

und man zeigt leicht mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass die i-te Ableitung $\varphi^{(i)}(x)$ sich (ganz und rational) durch die Funktion f und ihre partielle Ableitungen bis zur $i-1$-ten Ordnung ausdrückt (bei der nachträglichen Einsetzung $\varphi(x)$ statt y). Da auf Grund der Voraussetzung f zur Klasse C_{k-1} gehört, so besitzt $\varphi(x)$ die Ableitungen bis zur k-ten Ordnung.

III) Gehört die Funktion $f(x,y)$ zu C_k und sind die Funktionen $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ mit den Ableitungen bis zur k-ten Ordnung ausgestattet, so besitzt die zusammengesetzte Funktion $f[\alpha(t),\beta(t)]$ die Ableitungen bis zur k-ten Ordnung. Sind weiter zwei Paare von Funktionen $\alpha_1(t), \beta_1(t)$; $\alpha_2(t), \beta_2(t)$ gegeben von den Eigenschaften

$$(12)\qquad \left[\frac{d^i \alpha_1}{d t^i}\right]_{t_0} = \left[\frac{d^i \alpha_2}{d t^i}\right]_{t_0}; \quad \left[\frac{d^i \beta_1}{d t^i}\right]_{t_0} = \left[\frac{d^i \beta_2}{d t^i}\right]_{t_0} \quad \text{für } i=0,1,\ldots,k,$$

so gelten die Relationen

$$(13)\qquad \left\{\frac{d^i f[\alpha_1(t),\beta_1(t)]}{d t^i}\right\}_{t_0} = \left\{\frac{d^i f[\alpha_2(t),\beta_2(t)]}{d t^i}\right\}_{t_0} \quad \text{für } i=0,1,\ldots,k.$$

Der leichte Beweis mag dem Leser überlassen werden.

IV) Jetzt wenden wir uns zum Beweise der Beziehungen (10). Auf Grund II) sind die rechten Seiten von (10) für $i=1,\dots,k$ bestimmt. Nun soll die vollständige Induktion in bezug auf den Index k angewandt werden. Für $k=1$ haben wir

$$(14) \qquad \varphi_1'(x)=f(x,\varphi_0(x)), \qquad \varphi'(x)=f(x,\varphi(x)).$$

Da aber $\varphi_0(x_0)=y_0$, $\varphi(x_0)=y_0$ ist, so gilt die Gleichung $\varphi_1'(x_0)=\varphi'(x_0)$. Setzen wir jetzt voraus, dass die Beziehungen (10) erfüllt sind, sobald die Funktion f zur C_{k-1} gehört und nehmen wir an, dass f zur C_k gehört. Dann gehört sie natürlich zu C_{k-1} und aus der Definition der $\varphi_{k+1}(x)$ folgt, dass

$$(15) \qquad \varphi_{k+1}'(t)=\omega_1(t)=f(t,\varphi_k(t)).$$

Wir setzen ferner

$$(16) \qquad \varphi'(t)=\omega_2(t)=f(t,\varphi(t)).$$

und bemerken, dass auf Grund der vorläufigen Voraussetzung die Beziehungen (10) erfüllt sind. Wenn nun

$$(17) \qquad \alpha_1(t)=\alpha_2(t)=t; \qquad \beta_1(t)=\varphi_k(t), \quad \beta_2(t)=\varphi(t)$$

gesetzt wird, so sieht man leicht, dass auf Grund des Hilfssatzes III) die Relationen

$$(18) \qquad \left[\frac{d^i\omega_1}{dt^i}\right]_{x_0}=\left[\frac{d^i\omega_2}{dt^i}\right]_{x_0} \qquad i=0,\dots,k$$

gefolgert werden konnen. In anderen Bezeichnungen bedeutet dies aber:

$$(19) \qquad \left[\frac{d^i\varphi_{k+1}}{dx^i}\right]_{x_0}=\left[\frac{d^i\varphi}{dx^i}\right]_{x_0} \qquad \text{für } i=1,2,\dots,k,k+1,$$

und die Induktion führt schon den Beweis zum Ende.

Anmerkung. Das Beispiel der Gleichung $\dfrac{dy}{dx}=x+y$ zeigt, dass die Übereinstimmung der Werte der sukzessiven Ableitungen des Integrals $\varphi(x)$ und der Approximationsfunktion $\varphi_k(x)$ im Punkte x_0 über die k-te Ordnung hinaus nicht gelten braucht.

Satz 2. *Unter vorigen Bezeichnungen setzen wir Folgendes voraus:*

1) *Die Funktion $f(x,y)$ gehört zur Klasse C_0 (Stetigkeit in bezug auf x und Lipschitzsche Eigenschaft in bezug auf y),*

2) *die Approximationsfunktion $\varphi_k(x)$ besitzt im Punkte x_0 das $k-1$-te Derivat.*

Dann gilt:

3) *Das Integral $\varphi(x)$ besitzt im Punkte x_0 das $k-1$-te Derivat und*

4) *die Werte der sukzessiven Derivate der Funktion $\varphi(x)$ stimmen mit den Werten der entsprechenden Derivate der Funkion $\varphi_k(x)$ überein.*

Es gilt auch das Umgekehrte in dem Sinne, dass 2) und 3) vertauscht werden können.

Wenn noch zusätzlich vorausgesetzt wird, dass

1′) *die Ausgangsfunktion $\varphi_0(x)$ im Punkte x_0 alle vier verallgemeinerte Ableitungen („nombres dérivés") endliche besitzt (was z. B. bei dem Picardschen Verfahren erfüllt ist, da dort $\varphi_0(x)=y_0=$ Constans ist), dann*

5) *kann $k-1$ in 2) und 3) durch k ersetzt werden.*

Beweis. Wir entnehmen aus der Theorie der sukzessiven Approximationen die folgende Ungleichung [2]):

$$(20)\quad |\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)| \leqslant \frac{AM^{k-1}}{k!}|x-x_0|^k + \frac{BM^{k-1}}{(k-1)!}|x-x_0|^{k-1}.$$

Hier bedeutet: M die Lipschitzsche Konstante für die Funktion $f(x,y)$, A die obere Schranke der Werte von $|f|$ in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) und B die obere Schranke der Werte von $|\varphi_0(x)-y_0|$ in der Umgebung des Punktes x_0. Aus der obigen Ungleichung bekommt man leicht:

$$(21)\quad |\varphi(x)-\varphi_k(x)| \leqslant \left\{e^{M|x-x_0|}\cdot\frac{M^k}{k!}(A|x-x_0|+B)\right\}|x-x_0|^k$$

und mit Hilfe dieser Formel wird schon der Leser selbst den Beweis zum Ende bringen.

Anmerkung 1. Die beiden Sätze können auf Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen verallgemeinert werden.

Anmerkung 2. Die Voraussetzung der Existenz einer inzigen Lösung der Gleichung (4) ist in unseren Sätzen in gewissem Sinne wesentlich, was an folgendem Beispiele gezeigt wird.

---

[2]) Siehe z. B. E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig (1930), S. 55.

Betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = n|y|^{\frac{n-1}{n}} \cdot \operatorname{sgn}(x^{n-1}), \qquad n \text{ natürliche Zahl.} \tag{22}$$

Durch den Punkt (0, 0) gibt es (unendlich) viele Integrale dieser Gleichung. Eines von ihnen ist

$$y = x^n. \tag{23}$$

Nehmen wir nun als Ausgangsfunktion $\varphi_0(x)$ die Funktion $\equiv 0$, so haben wir

$$\varphi_k(x) \equiv 0 \qquad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{24}$$

Die Approximationen $\varphi_k(x)$ streben dem Integral (23) nicht zu und die beiden unseren Sätze gelten nicht mehr. Die Übereinstimmung der Werte der Ableitungen des Integrals (23) im Punkte $x = 0$ und der entsprechenden Werte der Ableitungen von $\varphi_k(x)$ gilt nur bis auf die Ordnung n, hängt also nicht von k ab.

Über eine Verallgemeinerung der Leja'schen Konvergenz der Doppelreihen

von

Agustin Durañona y Vedia

Buenos Aires.

In den Mathematischen Annalen Bd. 103 (1930) hat F. Leja [1]) den Begriff der Summe einer Doppelreiche in der Richtung (α, β) in folgender Weise eingeführt: Es sei eine Doppelreihe mit beliebigen komplexen Gliedern

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} \tag{1}$$

und ein Paar positiver Zahlen (α, β) gegeben, wobei $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Es möge mit $\sum\limits_{\alpha i+\beta j<\lambda} a_{ij}$ die Summe aller Glieder a_{ij}, deren Indices der Ungleichung $\alpha i + \beta j < \lambda$ genügen, bezeichnet werden. Dann ist durch die Formeln

$$\left|\begin{array}{ll} \sigma(\lambda) = 0 & \text{für} \quad \lambda = 0, \\ \sigma(\lambda) = \sum\limits_{\alpha i+\beta j<\lambda} a_{ij} & \text{für} \quad \lambda > 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

die Funktion $\sigma(\lambda)$ für alle $\lambda \geqq 0$ definiert [2]). Die Doppelreihe (1) wird nach Leja als in der Richtung (α, β) zur Summe s konvergent bezeichnet, falls der Limes

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sigma(\lambda) = s$$

existiert.

---

[1]) Siehe auch: Annales de la Soc. Polon. de Mathém. t. 9, 1931, S. 135—142.

[2]) Leja betrachtet die Summen $\sum\limits_{\alpha i+\beta j\leq\lambda} a_{ij}$. Für uns wird es nötig sein die Gleichheit $\alpha i + \beta j = \lambda$ auszuschliessen.

Wir werden eine Verallgemeinerung dieses Begriffes einführen und einige Eigenschaften dieser verallgemeinerten Konvergenz beweisen. Der Bequemlichkeit halber werden wir in der Folge die Schreibweise benutzen:

$$\sum_{(\lambda)} a_{ij} = \sum_{\alpha i+\beta j<\lambda} a_{ij},$$

$$\sum_{(p,q)} a_{ij} = \sum_{p\leqq \alpha i+\beta j<q} a_{ij}.$$

Definition. Die Reihe (1) wollen wir als in der Richtung (α, β) mit der Summe s CL_δ-summierbar bezeichnen, wenn der Limes

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{(\lambda)} a_{ij}\left(1-\frac{\alpha i+\beta j}{\lambda}\right)^\delta = s \tag{3}$$

existiert. Die Leja'sche Konvergenz ist ein Spezialfall dieser Summierbarkeit; sie ist mit der Summierbarkeit CL_δ im Falle $\delta=0$ identisch.

Wir werden später mehrmals folgenden Satz benutzen:

Satz 1. *Für jedes $\delta \geqq 0$ und $\lambda > 0$ gilt die Gleichheit*

$$\sum_{(\lambda)} a_{ij}\left(1-\frac{\alpha i+\beta j}{\lambda}\right)^\delta = \int_0^\lambda \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^\delta d\,\sigma(t), \tag{4}$$

wo $\sigma(t)$ durch die Formeln (2) definiert ist.

Beweis. Bekanntlich existiert das Stjeltjes'sche Integral $\int_0^\lambda f(t)\,d\sigma(t)$ für jede in abgeschlossenem Intervalle $<0, \lambda>$ stetige Funktion $f(t)$, weil $\sigma(t)$ in diesem Intervalle von beschränkter Variation ist. Wir behaupten nun, dass

$$\sum_{(\lambda)} a_{ij}(\alpha i+\beta j)^r = \int_0^\lambda t^r\,d\,\sigma(t) \tag{5}$$

ist, wobei r eine beliebige natürliche Zahl bezeichnet. Um dies zu beweisen, wollen wir eine Einteilung des Intervalls $<0, \lambda>$ in n Teile durch die Zahlen $0 \leqq \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = \lambda$ vornehmen und es sei dabei für jedes $p=0, 1, \ldots, n-1$, $\lambda_{p+1}-\lambda_p < \eta$, wo η eine willkürlich kleine positive Zahl ist. Dann ist offenbar

$$(6)\qquad \sum_{(\lambda)} a_{ij}(\alpha i+\beta j)^r = \sum_{p=0}^{n-1}\left|\sum_{(\lambda_p,\lambda_{p+1})} a_{ij}(\alpha i+\beta j)^r\right|,$$

und

$$\left|\sum_{(\lambda_p,\lambda_{p+1})} a_{ij}(\alpha i+\beta j)^r - \sum_{(\lambda_p,\lambda_{p+1})} a_{ij}\,\lambda_p^r\right| \leqq (\lambda_{p+1}^r-\lambda_p^r)\cdot\sum_{(\lambda_p,\lambda_{p+1})}|a_{ij}|.$$

Da aber

$$\sum_{(\lambda_p,\lambda_{p+1})} a_{ij} = \sigma(\lambda_{p+1})-\sigma(\lambda_p),$$

$$\lambda_{p+1}^r-\lambda_p^r \leqq r\,\lambda^{r-1}(\lambda_{p+1}-\lambda_p) < r\,\lambda^{r-1}\,\eta,$$

so erhält man

$$A_p = \left|\sum_{(\lambda_p,\lambda_{p+1})} a_{ij}\,(\alpha i+\beta j)^r - [\sigma(\lambda_{p+1})-\sigma(\lambda_p)]\,\lambda_p^r\right| < r\,\lambda^{r-1}\,\eta\cdot\sum_{(\lambda_p,\lambda_{p+1})}|a_{ij}|,$$

woraus wegen (6) die Ungleichung

$$\left|\sum_{(\lambda)} a_{ij}(\alpha i+\beta j)^r - \sum_{p=0}^{n-1}[\sigma(\lambda_{p+1})-\sigma(\lambda_p)]\,\lambda_p^r\right| \leqq \sum_{p=0}^{n-1} A_p \leqq r\,\lambda^{r-1}\,\eta\cdot\sum_{(\lambda)}|a_{ij}|$$

folgt. Das letzte Glied dieser Ungleichung ist aber beliebig klein, wenn nur η (bei festem r und λ) genügend klein gewählt wird. Die Gleichheit (5) ist hierdurch bewiesen.

Es sei nun $P(t)$ ein beliebiges Polynom. Aus (5) ersieht man, dass

$$\sum_{(\lambda)} a_{ij}\,P(\alpha i+\beta j) = \int_0^\lambda P(t)\,d\,\sigma(t).$$

Anderseits folgt aber aus der letzten Gleichung nach dem bekannten Satze von Weierstraß über die Annäherung stetiger Funktionen durch Polynome, dass

$$(7)\qquad \sum_{(\lambda)} a_{ij}\,f(\alpha i+\beta j) = \int_0^\lambda f(t)\,d\,\sigma(t)$$

ist, wenn mit $f(t)$ eine beliebige, im Intervalle $<0,\lambda>$ stetige Funktion bezeichnet wird. Wird schiesslich in der letzten Formel

$$f(t) = \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^\delta \qquad \text{mit} \quad \delta \geqq 0$$

gesetzt, so erhält man die Formel (4), w. z. b. w.

Satz 2. *Ist die Reihe* (1) *für* $\delta > 0$ *in einer Richtung* (α, β) *CL_δ-summierbar, so ist sie auch für jedes $\delta' > \delta$ in derselben Richtung $CL_{\delta'}$-summierbar, und beide Summen sind gleich.*

Beweis. Auf Grund des vorigen Satzes genügt es zu zeigen, dass der Limes

$$(8) \qquad \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^\delta d\,\sigma(t) = s \qquad \text{für} \quad \delta > 0$$

die Existenz des Limes

$$(9) \qquad \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{\delta'} d\,\sigma(t) = s \qquad \text{für} \quad \delta' > \delta$$

zur Folge hat. Durch partielle Integration

$$\int \left(1 - \frac{x}{y}\right)^\delta d\,\sigma(x) = \left(1 - \frac{x}{y}\right)^\delta \sigma(x) + \frac{\delta}{y} \int \left(1 - \frac{x}{y}\right)^{\delta - 1} \sigma(x)\,dx,$$

erhält man wegen $\sigma(0) = 0$ die Formel

$$(10) \qquad \int_0^y \left(1 - \frac{x}{y}\right)^\delta d\,\sigma(x) = \frac{\delta}{y} \int_0^y \left(1 - \frac{x}{y}\right)^{\delta - 1} \sigma(x)\,dx.$$

Infolgedessen hat die Funktion

$$(11) \qquad r(y) = \frac{\delta}{y} \int_0^y \left(1 - \frac{x}{y}\right)^{\delta - 1} \sigma(x)\,dx - s.$$

auf Grund der Voraussetzung (8) für $y \to \infty$ den Grenzwert Null.

Es möge mit $B(p, q)$ das binomische Integral

$$B(p, q) = \int_0^1 u^{p-1} (1 - u)^{q-1}\,du$$

und mit k die Differenz

$$k = \delta' - \delta$$

bezeichnet werden. Auf Grund von (11) hat man

$$y^\delta \cdot r(y) = \delta \int_0^y (y - x)^{\delta - 1}\,\sigma(x)\,dx - s y^\delta,$$

und daraus folgt durch Multiplikation mit $(\lambda - y)^{k-1}$ und durch hierauffolgende Integration in bezug auf y die Gleichung

$$(12) \qquad \int_0^\lambda y^\delta (\lambda - y)^{k-1}\, r(y)\, dy = \delta I_1 - s I_2,$$

wo

$$I_1 = \int_0^\lambda (\lambda - y)^{k-1} \left[\int_0^y (y-x)^{\delta-1} \sigma(x)\, dx\right] dy, \qquad I_2 = \int_0^\lambda y^\delta (\lambda - y)^{k-1} dy.$$

Transformiert man nun das Integral I_1 mittels der Formel $\int_0^\lambda [\int_0^y f(xy)\, dx]\, dy = \int_0^\lambda [\int_x^\lambda f(xy)\, dy]\, dx$, so ergibt sich

$$I_1 = \int_0^\lambda \sigma(x) \left[\int_x^\lambda (y-x)^{\delta-1} (\lambda - y)^{k-1}\, dy\right] dx.$$

Da aber $\int_0^\lambda (y-x)^{\delta-1} (\lambda - y)^{k-1}\, dy = (\lambda - x)^{\delta'-1} \cdot B(\delta, k)$, was mit Hilfe der Transformation $y = x + u(\lambda - x)$, wo u eine neue Veränderliche bezeichnet, leicht beweisbar ist, so folgt

$$I_1 = B(\delta, k) \int_0^\lambda (\lambda - x)^{\delta'-1} \sigma(x)\, dx = B(\delta, k) \cdot \lambda^{\delta'-1} \int_0^\lambda \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^{\delta'-1} \sigma(x)\, dx,$$

oder auf Grund von (10)

$$I_1 = B(\delta, k) \cdot \frac{1}{\delta'}\, \lambda^{\delta'} \cdot \int_0^\lambda \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^{\delta'} d\sigma(x).$$

Anderseits kann mittels der Transformation $y = \lambda u$ leicht gezeigt werden, dass

$$I_2 = \int_0^\lambda y^\delta (\lambda - y)^{k-1}\, dy = \lambda^{\delta'}\, B(\delta + 1, k).$$

Wird nun berücksichtigt, dass die Symbole $B(p, q)$ der Relation $p \cdot B(p, q) = (p + q) \cdot B(p + 1, q)$ genügen, und dass infolgedessen $\delta \cdot B(\delta, k) = \delta' \cdot B(\delta + 1, k)$ ist, so ergibt sich aus (12)

$$(13) \qquad \int_0^\lambda y^\delta (\lambda - y)^{k-1} r(y)\, dy = \lambda^{\delta'} \cdot B(\delta + 1, k) \cdot \left[\int_0^\lambda \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^{\delta'} d\sigma(x) - s\right].$$

Nun ist aber $r(y) \to 0$, für $y \to \infty$. Es gibt also zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl p derart, dass

$$|r(y)| < \varepsilon \qquad \text{für} \quad y > p.$$

Im Intervalle $\langle 0, p \rangle$ ist $|r(y)|$ beschränkt, also kleiner als eine genügend grosse Zahl M, folglich ist für $\lambda > p$

$$\left| \int_0^\lambda y^\delta (\lambda - y)^{k-1} r(y)\, dy \right| \leqq \left| \int_0^p \right| + \left| \int_p^\lambda \right| \leqq M \cdot I_3 + \varepsilon \cdot I_4,$$

wo

$$I_3 = \int_0^p y^\delta (\lambda - y)^{k-1} dy = \lambda^{\delta'} \int_0^{p/\lambda} u^\delta (1-u)^{k-1} du = \lambda^{\delta'} \cdot I_5,$$

$$I_4 = \int_p^\lambda y^\delta (\lambda - y)^{k-1} dy = \lambda^{\delta'} \int_{p/\lambda}^1 u^\delta (1-u)^{k-1} du \leqq \lambda^{\delta'} \cdot B(\delta+1, k).$$

Man enthält demnach aus (13)

$$\left| \int_0^\lambda \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^{\delta'} d\,\sigma(x) - s \right| \leqq \frac{M}{B(\delta+1, k)} \cdot I_5 + \varepsilon.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung kann aber beliebig klein gemacht werden, wenn nur λ als hinreichend gross angenommen wird, weil I_5 für $\lambda \to \infty$ dem Werte Null zustrebt, und weil ε beliebig klein ist. Folglich ist die Gültigkeit der Formel (9) und damit auch der Satz 2 bewiesen.

Die Doppelreihe (1) wird als **durch Rechtecke konvergent** bezeichnet, wenn seine Partialsummen

$$s_{ij} = \sum_{\mu=0}^{i} \sum_{\nu=0}^{j} a_{\mu\nu} \qquad i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

eine konvergente Doppelfolge bilden. Wenn alle s_{ij} einer Ungleichung $|s_{ij}| < M$ genügen, wo M eine feste Zahl ist, wird die Doppelreihe (1) **beschränkt** genannt [3]). Wir werden jetzt einen Satz beweisen, durch den ein von F. **Leja** erhaltenes Resultat erweitert wird.

---

[3]) Eine durch Rechtecke (oder im Sinne von Pringsheim) konvergente Doppelreihe ist nicht notwendig beschränkt.

Satz 3. *Eine durch Rechtecke konvergente und beschränkte Doppelreiche mit der Summe s ist in jeder Richtung CL_1-summierbar mit derselben Summe s* [4]).

Beweis. Es sei vorausgesetzt, dass die Partialsummen s_{ij} der Reihe (1) folgenden Bedingungen genügen

$$\lim_{i,j\to\infty} s_{ij} = s, \qquad |s_{ij}| < M \tag{14}$$

wo M eine feste Zahl bezeichnet. Da die Glieder einer beschränkten Doppelreihe beschränkt sind, so konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}\,\xi^i\,\eta^j = (1-\xi)(1-\eta)\sum_{i,j=0}^{\infty} s_{ij}\,\xi^i\,\eta^j$$

im Gebiete $|\xi| < 1$ und $|\eta| < 1$ absolut. Es möge $\xi = e^{-\alpha z}$, $\eta = e^{-\beta z}$ gesetzt werden, wobei z eine komplexe Veränderliche ist, und $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Im Gebiete $Rz > 0$ [5]) besteht dann die Identität:

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}\,e^{-(\alpha i+\beta j)z} = (1-e^{-\alpha z})\,(1-e^{-\beta z})\sum_{i,j=0}^{\infty} s_{ij}\,e^{-(\alpha i+\beta j)z}. \tag{15}$$

Es sei nun in dem ersten Quadranten der Ebene eine Funktion $s(x, y)$ durch die Formel

$$s(x, y) = s_{i,j} \qquad \text{für} \quad [x] = i, \quad [y] = j$$

definiert, wo $[u] =$ entier u. Im Hinblick auf die Identität

$$(1-e^{-\alpha z})\,(1-e^{-\beta z})\,e^{-(\alpha i+\beta j)z} = \alpha\,\beta\,z^2 \int_i^{i+1}\left[\int_j^{j+1} e^{-(\alpha x+\beta y)z}\,dy\right]dx$$

ersieht man, dass die rechte Seite von (15) die Form

$$\alpha\,\beta\,z^2 \sum_{i,j=0}^{\infty} s_{ij}\int_i^{i+1}\left[\int_j^{j+1} e^{-(\alpha x+\beta y)z}\,dy\right]dx = \alpha\,\beta\,z^2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} s(x, y)\,e^{-(\alpha x+\beta y)z}\,dx\,dy$$

---

[4]) F. Leja hat Folgendes bewiesen (Ann. de la Soc. Polon. de Math. t. 9, 1930, S. 137, Satz II): Wenn eine Doppelreiche durch Rechtecke konvergent und beschränkt ist, und wenn sie in einer Richtung (oder durch Dreiecke) konvergiert, so konvergiert sie in den beiden Fällen zu derselben Summe.

[5]) $Rz =$ Realteil von z.

annimmt, welch'letztere auf die Form

$$z^2\int_0^\infty e^{-vz}\left[\int_0^v s\left(\frac{u}{\alpha}, \frac{v-u}{\beta}\right) d\,u\right] d\,v$$

gebracht werden kann, falls man neue Integrationsveränderlichen u, v einführt, wobei:

$$u = \alpha x, \qquad v = \alpha x + \beta y.$$

Anderseits ist die linke Seite von (15) im Gebiete der absoluten Konvergenz $Rz > 0$ dem Limes

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{(\lambda)} a_{ij}\, e^{-(\alpha i+\beta j)z}$$

gleich. Da aber die Formel (7), nach Einführung des Wertes e^{-tz} für $f(t)$ die Form annimmt:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{(\lambda)} a_{ij}\, e^{-(\alpha i+\beta j)z} = \int_0^\infty e^{-tz}\, d\sigma(t), \tag{16}$$

so ergibt sich aus (15) die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-tz}\, d\,\sigma(t) = z^2\int_0^\infty e^{-vz}\int_0^v s\left(\frac{u}{\alpha}, \frac{v-u}{\beta}\right) du\, dv, \tag{17}$$

welche für $Rz > 0$ gilt.

Wir werden jetzt folgendes Lemma benützen [6]): Ist $F(t)$ eine für $t \geqq 0$ definierte Funktion, die für $t = 0$ gleich Null, und in jedem Intervall $<0, t>$, wo $t > 0$, von beschränkter Variation ist, und existiert dabei für $Rz > \sigma$ das Integral $\int_0^\infty e^{-tz}\, d\,F(t)$, so besteht für $Rz > \sigma$ die Identität

$$\int_0^\infty e^{-tz}\, d\,F(t) = z\int_0^\infty e^{-tz}\, F(t)\; d\,t.$$

Wendet man dieses Lemma zweimal auf die linke Seite von (17) an, so ergibt sich für $Rz > 0$

$$\int_0^\infty e^{-tz}\, d\,\sigma(t) = z\int_0^\infty e^{-tz}\,\sigma(t)\,d\,t = z^2\int_0^\infty e^{-tz}\left[\int_0^t \sigma(x)\; dx\right] dt,$$

[6]) Siehe D. V. Widder: Trans. of the Amer. Math. Soc. t. 31, 1929, S. 694—743 (insbesondere S. 695 und 706).

und wenn man noch die Bezeichnungen

$$(18) \qquad \psi(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \sigma(x)\,dx, \quad \varphi(v)=\frac{1}{v}\int_0^v s\left(\frac{u}{\alpha}, \frac{v-u}{\beta}\right)du$$

einführt, so nimmt (17) die folgende Form an:

$$\int_0^\infty t\,\psi(t)\,e^{-tz}\,dt=\int_0^\infty t\,\varphi(t)\,e^{-tz}\,dt.$$

Wird nun ein von M. Lerch [7]) erhaltenes Resultat berücksichtigt, so geht aus der letzten Gleichung hervor, dass die Funktionen

$$\varphi(t), \quad \psi(t)$$

äquivalent sind, d. h. sie sind etweder identisch, oder sie können höchstens in einer Menge von Punkten, deren Mass gleich Null ist, differieren.

Nun soll gezeigt werden, dass

$$(19) \qquad \lim_{v\to\infty}\varphi(v)=\lim_{v\to\infty}\frac{1}{v}\int_0^v s\left(\frac{u}{\alpha}, \frac{v-u}{\beta}\right)du=s.$$

Es ist zunächst zu beachten, dass wegen der Voraussetzung (14)

$$r(x, y)=s(x, y)-s\to 0 \quad \text{für } x \text{ und } y\to\infty.$$

Es existiert demnach für jedes $\varepsilon>0$ eine Zahl N derart, dass $|r(x, y)|<\frac{\varepsilon}{2}$ ist, für $x\geqq N$ und $y\geqq N$, oder

$$(20) \qquad \left|r\left(\frac{u}{\alpha}, \frac{v-u}{\beta}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad u\geqq\alpha N=p, \quad v-u\geqq\beta N=q.$$

Es möge nun das Intervall $<0, v>$, wo $v>p+q$ ist, in drei Teilintervalle $<0, p>$, $<p, v-q>$, $<v-q, v>$ zerlegt werden. Dann folgt aus der Formel

$$\varphi(v)-s=\frac{1}{v}\int_0^v\left[s\left(\frac{u}{\alpha}, \frac{v-u}{\beta}\right)-s\right]du=\frac{1}{v}\int_0^v r\left(\frac{u}{\alpha}, \frac{v-u}{\beta}\right)du,$$

---

[7]) M. Lerch: Acta Mathematica t. 27, 1903, S. 339.

wenn man die Funktion $r\left(\frac{u}{\alpha}, \frac{v-u}{\beta}\right)$ kurzweg mit r bezeichnet, die Ungleichung:

$$(21)\qquad |\varphi(v)-s| \leqq \frac{1}{v}\int_0^p |r|\,du + \frac{1}{v}\int_p^{v-q} |r|\,du + \frac{1}{v}\int_{v-q}^{v} |r|\,du.$$

Da nun aber wegen (20) $|r| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist für $p \leqq u \leqq v-q$ und wegen (14)

$$|r| = \left| s\left(\frac{u}{\alpha}, \frac{v-u}{\beta}\right) - s \right| < M + |s| \quad \text{für jedes } u \text{ und } v,$$

so folgt aus (21), wenn man $M + |s| = K$ setzt, die Ungleichung

$$|\varphi(v) - s| \leqq \frac{1}{v}\,Kp + \frac{1}{v}\cdot\frac{\varepsilon}{2}(v-p-q) + \frac{1}{v}\,Kq \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{K(p+q)}{v}.$$

Ist nun $v > \frac{2}{\varepsilon}K(p+q) = v_0$, so erhält man offenbar $|\varphi(v) - s| < \varepsilon$ für $v > v_0$, und hierdurch ist die Richtigkeit der Formel (19) bewiesen.

Überdies kann gezeigt werden, dass auch

$$(22)\qquad \lim_{v\to\infty} \psi(v) = \lim_{v\to\infty} \frac{1}{v}\int_0^v \sigma(x)\,dx = s.$$

Da nämlich $|\varphi(v) - s| < \varepsilon$ für $v > v_0$, so folgt aus der Äquivalenz der Funktionen $\varphi(v)$ und $\psi(v)$, dass die Ungleichheit

$$(23)\qquad |\psi(v) - s| < \varepsilon \quad \text{für } v > v_0$$

entweder allgemein gilt, oder sie gilt mit Ausnahme der Punkte einer Menge E deren Mass gleich Null ist. Ist aber v^* ein Punkt von E derart, dass $v^* > v_0$, so existiert eine Folge $\{v_n\}$ von Punkten, die der Menge E nicht angehören und für welche $v_n > v_0$, $v_n \to v^*$. Die Ungleichung (23) gilt nun für die Punkte v_n. Da aber die Funktion $\psi(v)$ stetig ist, so gilt diese Ungleichung auch für $v = v^*$, und demzufolge ist die Formel (22) richtig.

Beachtet man nun, dass die Gleichung (10) mit $\delta = 1$ die Form annimmt:

$$\int_0^y \left(1 - \frac{x}{y}\right) d\,\sigma(x) = \frac{1}{y}\int_0^y \sigma(x)\,dx = \psi(y),$$

so erhält man wegen (22)

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right) d\,\sigma(t) = s.$$

Aus dieser Gleichung geht aber auf Grund des Satzes 1 hervor, dass die Doppelreihe (1) CL_1-summierbar ist. Infolgedessen erscheint der Satz 3 bewiesen.

Zum Schlusse wollen wir noch eine Bedingung angeben unter welcher beim Zutreffen der Konvergenz der Potenzreihe

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}\, x^i\, y^j = f(x, y) \tag{24}$$

in dem Dizylinder $\{|x| < 1, |y| < 1\}$ und bei der Existenz des Limes

$$\lim_{x \to 1, y \to 1} f(x, y) = s \tag{25}$$

für reelle x und y die Reihe $\sum\limits_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ in beliebiger Richtung (α, β) konvergiert.

Wir knüpfen an die Formel (16) an. Ist die Reihe (24) im Gebiete $\{|x| < 1, |y| < 1\}$ konvergent, so besteht im Gebiete $Rz > 0$ die Gleichung

$$\int_0^{\infty} e^{-tz}\, d\sigma(t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}\, e^{-(\alpha i + \beta j)z}.$$

Wenn also der Limes (25) für reelle x und y existiert, so ist für reelle $z > 0$

$$\lim_{z \to 0} \int_0^{\infty} e^{-tz}\, d\sigma(t) = s. \tag{26}$$

Es sei nun vorausgesetzt, dass die Koëffizienten a_{ij} reel sind und dass bei jedem $\varepsilon > 0$ zwei Zahlen p_0 und λ existieren, für welche die Bedingung

$$\sigma(q) - \sigma(p) > -\varepsilon \quad \text{für } p > p_0,\ q - p < p\lambda \tag{27}$$

erfüllt ist. Nach einem Ergebnis von O. Szász [8]) ist $\lim\limits_{t \to \infty} \sigma(t) = s$, wenn der Limes (26) existiert und wenn die Bedingung (27) erfüllt ist. Man gelangt also zu dem

Satz 4. *Wenn die Potenzreiche* (24) *mit reellen Koëffizienten* a_{ij} *in dem Dizylinder* $\{|x| < 1, |y| < 1\}$ *konvergiert, und wenn der Limes* (25) *für reelle* x *und* y *existiert, so konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$ *in der Richtung* (α, β) *gegen* s, *falls nur die Bedingung* (27) *erfüllt ist.*

---

[8]) O. Szász: Sitzungsber. der Math. Abt. der Bayer. Akad. der Wiss. zu München, 1929, S. 325—340 (insbesondere S. 332).

Comptes-rendus et analyses.

Elie Cartan, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés.*

Dans cet excellent ouvrage, l'auteur, en se plaçant au point de vue général où la géométrie apparaît comme la théorie de cettes propriétés des figures définies dans un espace à n dimensions qui sont invariantes par rapport aux transformations constituant un groupe déterminé, développe la théorie générale de la méthode qui contient comme cas particulier celle du trièdre mobile appliquée par G. Darboux avec tant de succès dans l'étude des courbes et des surfaces situées dans l'espace euclidien ordinaire à trois dimensions. Avant d'aborder le cas général, l'auteur envisage quelques cas particuliers, ce qui facilite grandement l'intelligence de la théorie générale.

Henri Cartan, Professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg. *Sur les groupes de transformations analytiques.*

Cet ouvrage constitue une trés importante contribution à la question de savoir si tous les groupes abstraits (à p paramètres) sont des groupes de Lie.

L'auteur obtient des résultats particulièrement complets en ce qui concerne les groupes de transformations pseudo-conformes (c'est à dire de transformations analytiques dans le domaine complexe).

Georges Bouligand, Professeur à l'Université de Poitiers. *Relations d'incertitude en Géométrie et en Physique.* Avec une préface de M. Louis de Broglie.

Cet ouvrage se rapporte aux fondements des Sciences physiques puisque l'auteur s'y occupe des considérations qui font douter certains savants de la valeur absolue du déterminisme dans les sciences susdites. L'auteur est conduit à envisager l'intervention de „relations d'incertitude" dans trois domaines différents:

1° En mécanique de l'atome, d'après les travaux classiques d'Heisenberg et Pauli;

2° En théorie classique de la diffusion, d'après les développements mathématiques de R. Furth;

3° En géométrie, dans l'étude de la dépendance, vis-à-vis d'un point de la courbe, de la direction de la tangente en ce point.

Etant donné l'importence du sujet il eut été, nous semble-t-il, utile pour la Science si le savant auteur, sans se borner à présenter une esquisse de ses idées, les avait développées d'une façon détaillée.

G. Bouligand, Prof. à la Fac. des Sciences de Poitiers, G. Giraud, Prof. à la Fac. des Sciences de Clermont-Ferrand et P. Delens, Prof. agrégé au Lycée du Havre. *Le problème de la dérivée oblique en théorie du Potentiel.*

L'extrait suivant de la préface à cet ouvrage due à M. Elie Cartan donnera une idée de ce trés intéressant ouvrage. „Dans une première Partie, qui peut être regardée comme une Introduction générale, M. Georges Bouligand expose sous ses différents aspects le problème de la dérivée oblique dans la théorie du Potentiel. Dans la seconde Partie, M. Georges Giraud donne, sous des conditions trés générales, une solution rigoureuse de ce problème dans le cas régulier. Enfin dans une troisième Partie, M. Paul Delens expose la théorie géométrique des congruences des courbes dans ses rapports avec le problème homogène de la dérivée oblique".

Lindelöf-Ullrich. *Einführung in die höhere Analysis.* 1934. Leipzig und Berlin, Verlag von B. G. Teubner.

Le titre de cet ouvrage, rédigé en allemand par M. Ullrich d'après la première édition suédoise et la seconde édition finoise, indique suffisamment le but que le célèbre auteur avait en vue. Ainsi que le nom de l'auteur le faisait prévoir, l'ouvrage présente de rares caractères de perfection.

J. H. M. Wedderburn. *Lectures on Matrices.* American Mathematical Society, Colloquium publications, vol. XVII, 1934.

On trouvera, dans cet ouvrage, une exposition très claire de la théorie des matrices ainsi que de très intéressantes indications sur l'histoire de cette théorie et une bibliographie bien complète.

Marston Morse. *The Calculus of Variations in the large.* American Mathematical Society, Colloquium publications, vol. XVIII.

L'auteur, au lieu de n'envisager que des méthodes du calcul des variations dont la validité est bornée à un domaine assez petit, étudie, au contraire, des méthodes qui permettent de s'affranchir de la restriction précédente.

Les démonstrations des théorèmes que l'on rencontre dans l'ouvrage considéré, sont remarquablement rigoureuses et reposent sur des hypothèses aussi peu restrictives que la science moderne le permet.

Raymond E. A. C. Paley and Norbert Wiener. *Fourier Transforms in the complex domain.* American Mathematical Society, Colloquium publications. Vol. XIX, 1934. Les nombreuses questions étudiées dans cet ouvrage se groupent principalement autour des diverses conséquences du théorème suivant dû à M. Plancherel.

Lorsqu'une fonctiton $f(x)$ est telle que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx$$

ait un sens, il existe une fonction $g(x)$ telle que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 \, dx$$

ait un sens et que l'on ait :

$$\lim_{A \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| g(u) - (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-A}^{+A} f(x) \, e^{iux} \, dx \right|^2 du = 0.$$

Georges Bouligand, Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers. *Premières leçons sur la théorie générale des groupes.* Paris, 1935, chez Vuibert.

Cet ouvrage a pour but de familiariser le lecteur avec la notion de groupe en lui présentant les diverses théories où cette notion se présente.

Ce but est atteint par le choix judicieux des exemples très variés que le savant auteur étudie. L'étude de l'ouvrage considéré engagera le lecteur à étudier à fond les théories qui y sont esquissées d'une façon très attrayante.

Nouveaux fascicules du „Mémorial des Sciences mathématiques“ (Chez Gauthier-Villars & C^ie^, Paris, Quai des Grands-Augustins, 55) [1]).

[1]) Voir le T. XI de ces Annales.

Les titres des fascicules que nous avons à mentionner indiquent suffisamment la nature des sujets traités. D'autre part, disposant d'une place strictement limitée, nous nous bornerons à énumérer les titres des fascicules en question en indiquant, bien entendu, le nom de l'auteur de chaque fascicule.

Fascicule LX. *Propriétés générales des groupes discontinus*, par M. Th. Got, Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers.

Fascicule LXI. *Points singuliers des équations différentielles*, par M. H. Dulac, Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

Fascicule LXII. *Gravifique, Groupes, Mécanique*, par M. A. Buhl, Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Fascicule LXIII. *Les courbes de la variété générale à n dimensions*, par M. Václav Hlavaty, Professeur à l'Université Charles de Prague.

Fascicule LXIV. *Les corps algébriques et la théorie des idéaux*, par M. O. Ore.

Fascicule LXV. *La balistique extérieure*, par M. R. D'Adhémar.

Fascicule LXVI. *Théorie générale des polynomes orthogonaux de Tchebichef*, par M. J. Shohat (Jacques Chokhate), Professeur à l'Université de Pensylvanie.

Fascicule LXVII. *Les transformations birationnelles de l'espace*, par M. Lucien Godeaux, Professeur à l'Université de Liège, Correspondant de l'Académie royale de Belgique.

Fascicule LXVIII. *Domaines fondamentaux des groupes fuchsiens et automorphes*, par M. Th. Got, Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers.

Fascicule LXIX. *Applications des équations intégrales (applications statistiques)*, par M. V. A. Kostitzin.

Fascicule LXX. *Méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue*, par M. Saltykow, Professeur à l'Université de Belgrade.

Fascicule LXXI. *Géométrie infinitésimale directe et physique mathématique classique*, par M. G. Bouligand, Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers.

Fascicule LXXII. *Solutions exactes des équations du mouvement des liquides visqueux*, par M. A. Rosenblatt.

Fascicule LXXIII. *Approximation by Polynomials in the complex Domain*, by J. L. Walsh, Associate Professor of Mathematics in Harvard University.

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique à Cracovie,

année 1934.

15. I et 29. I. A. Rosenblatt: Sur l'équation n-harmonique (*Cf.* la note *Sur les équations n-harmoniques non linéaires à deux variables indépendantes*, C. R. de l'Ac. des Sci., **198** (1934), p. 633 et suiv).

22. I. S. Turski: Sur l'unicité et la limitation des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre (voir ces Annales, XII (1933)).

5. II. T. Ważewski: Sur le domaine d'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre (*Cf.* Bulletin des Sc. Mathém., **59**, p. 1).

12. II. S. Turski: Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles du second ordre.

19. II. T. Ważewski: Sur la limitation et l'unicité des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles.

26. II. A. Rosenblatt: Sur l'équation biharmonique non linéaire à deux variables indépendantes dans un domaine général (*Cf.* C. R. de l'Ac. des Sci., **198** (1934), p. 1110 et suiv.).

12. III. W. Wilkosz: Sur la possibilité de fermer des corps algébriques arbitraires (Le texte de cette communication sera inséré dans ces Annales).

7. V. E. Stamm: Joseph Naronowicz-Naroński, un mathématicien polonais oublié du XVII siècle.

11. VI. T. Ważewski: Extension aux systèmes d'équations différentielles du théorème de Montel sur l'intégrale supérieure (Voir ces Annales, XII, p. 72—80: *Eine Verallgemeinerung des Montel'schen Satzes über das Maximal und Minimalintegral auf Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen*).

15. X. A. Rosenblatt: Sur l'application de la méthode des approximations successives de M. Picard à l'étude des équations du 2^d ordre elliptiques et non linéaires à trois variables indépendantes (C. R. de l'Ac. des Sci., **199**, p. 921 et suiv.).

22. X. T. Ważewski: Sur l'équation aux dérivées partielles du premier ordre.

29. X. W. Wilkosz: Sur le théorème de Steinitz dans la théorie des corps algébriques.

Le théorème appelé le théorème fondamental de Steinitz, énoncé en 1911, a été muni par lui d'une démonstration insérée dans son mémoire intitulé *„Theorie der algebraischen Körper“* (édité à nouveau en 1930 par Hasse et Baer). Le théorème de Steinitz est répété par les autres auteurs sans changements essentiels. Le conférencier montre que la démonstration de Steinitz s'appuie sur des méthodes de la théorie des ensembles, soumises à des critiques annihilantes pendant les dernières dizaines d'années. Elle est en désacord surtout avec le principe d'homogénéité sous n'importe quelle forme, observé aujourd'hui par tous. Comme, malgré les plus grands efforts, il n'a pas été possible de remplacer les méthodes douteuses par d'autres, n'étant plus sujettes à la critique, le conférencier considère que la valeur du raisonnement de Steinitz ne suffit pas à reconnaitre le théorème en question comme ayant été démontré jusqu'à présent.

5. XI. 1934. W. Wilkosz: Sur la relativisation de la logique des propositions.

La relativisation de la logique des propositions consiste à: 1° adjoindre aux postulats de la théorie des propositions des prémisses stipulant que les symboles faisant partie de ces postulats sont des propositions, l'idée d'„être une proposition“ étant primitive; 2° imposer aux systèmes déductifs la nécessité de décider lesquelles des expressions apparaissant dans la déduction peuvent être considérées comme des propositions; 3° à réduire ce qu'on appelle la logique des propositions à un certain nombre de règles (= modes d'inférence) indispensables. En même temps on introduit un système de postulats dans lequel l'implication est une notion primitive et il apparaît la possibilité de simplifier le principe de substitution jusqu'à la règle „on peut substituer n'importe quoi“.

12. XI. T. Ważewski: Sur l'équation aux dérivées partielles du premier ordre essentiellement non linéaire. (Voir ce volume, p. 10 et suiv.).

10. XII. W. Wilkosz et A. Bielecki: Les propriétés des domaines de Green, I^e^ partie (à paraître dans ces Annales).

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique.

Section de Poznań, année 1934.

11. V. K. Abramowicz: Sur la sommabilité des séries d'après Knopp.

30. XI. K. Abramowicz: Une généralisation du théorème de Markoff.

En outre, les membres de la section de Poznań ont fait les conférences suivantes au XIV^e^ Congrès des Médecins et des Naturalistes Polonais tenu à Poznań en septembre 1933:

M. Denizot: Sur la trigonométrie de Śniadecki,

— Sur la chute des corps non rigides.

Z. Krygowski: Les méthodes de Weierstrass dans la théorie des fonctions elliptiques,

— Sur un problème de la théorie de la représentation conforme.

M. Biernacki: Sur la représentation conforme,

— Sur les propriétés asymptotiques des intégrales des équations différentielles linéaires.

Z. Zawirski: Sur le rapport de la logique multivalente au calcul des probabilités.

K. Abramowicz: Sur les fonctions automorphes,

— Sur la dérivée d'une fonction implicite.

W. Ślebodziński: Sur les invariants intégraux des systèmes d'équations différentielles ordinaires du second ordre.

M. Kryzan: Sur le problème de l'applatissement de la terre.

Mlle L. Seipeltówna: La solution de l'équation du 5e degré au moyen des séries hypergéométriques.

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique.

Section de Wilno, année 1934.

29. I. S. Kempisty: Sur les dérivées extrèmes des fonctions d'une et de plusieurs variables (Journ. of the London Math. Soc., **9**, 1934, 303—308).

5. II. K. Matulewicz: Sur le nouveau programme de mathématiques dans les lycées.

5. III. A. Zygmund: Quelques inégalités dans la théorie des fonctions analytiques (Trans. Amer. Math. Soc., **36**, 1934).

12. III. S. K. Zaremba: Sur les singularités des équations différentielles ordinaires du premier ordre (C. R. de l'Ac. des Sci., **198**, Paris, 1934, 790—792).

30. IV. S. Kempisty: Les fonctions absolument continues sur un ensemble (Sur la totalisation des fonctions de deux variables, C. R. de l'Ac. des Sci., **198**, Paris, 1934, 2060—2062).

5. XII. S. K. Zaremba: Sur une extension de la notion d'équation differentielle (C. R. de l'Ac. des Sci., **199**, Paris 1934, 545—548).

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique.

Section de Varsovie, année 1933.

[Abréviations: C. R. = Comptes Rendus des séances de l'Académie de Sciences (Paris); C. R. de Varsovie = Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, cl. III; Fund. Math. = Fundamenta Mathematicae].

13. I. K. Menger (Wien): „Einige neuere Ergebnisse des Wiener Mathem. Kolloquiums".

20. I. O. Nikodym: „Sur l'existence du potentiel uniforme sur une surface de Riemann quelconque" [Bulletin de la Société Mathématique de France 61 (1933), p. 220].

10. II. B. Knaster et S. Mazurkiewicz: „Sur un problème concernant les transformations continues". [Fund. Math. 21 (1933), p. 85].

E. Szpilrajn: „Sur une classe de fonctions holomorphes" [Cf. S. Kierst et E. Szpilrajn: „Sur certaines singularités des fonctions analytiques uniformes", C. R. 196 (1933), p. 1453 et Fund. Math. 21 (1933), p. 276].

17. II. K. Zarankiewicz: „Über doppelt-zerlegende Punkte" [Fund. Math. 23 (1934), p. 85].

S. Kierst: „Sur une classe de fonctions holomorphes" [Cf. S. Kierst et E. Szpilrajn l. c.].

24. II. S. Mazurkiewicz: „Über nicht plattbare Kurven" [Fund. Math. 20 (1933, p. 281].

A. Lindenbaum: „Sur le „problème fondamental" du jeu d'échecs".

Soit donnée une position des pièces sur l'échiquier. On démande quel sera le résultat de la partie, en supposant un jeu idéal des deux partenaires; s'il existe pour l'un d'eux la possibilité de gagner, quelle que soit la défense de l'adversaire, — indiquer la tactique convenable à son jeu (et aussi „la meilleure défense" de l'adversaire) [1]).

C'est le *problème fondamental* du jeu d'échecs, ainsi que des autres jeux dans lesquels n'intervient ni le hasard, ni l'habileté physique du joueur, et dans lesquels les coups successifs de l'un des partenaires sont connus à l'autre. Une analyse directe de ce problème est extrêmement pénible, pratiquement irréalisable (bien entendu, à l'exception des jeux très simples).

[1]) Cf. W. Ahrens: Mathematische Unterhaltungen und Spiele, I (3 éd., 1921), p. 164—170, 399—400; II (2 éd., 1918), p. 336—337.

Grâce à la nouvelle théorie générale des jeux du type décrit (Zermelo, v. Neumann, D. König, Kalmár), on peut définir précisément des notions convenables et on peut montrer que[1]) pour une disposition quelconque des pièces il est en fait possible: 1) de *décider* lequel des partenaires doit gagner, 2) de lui en *indiquer* la meilleure voie, etc.

Quoique le problème se laisse resoudre d'une façon complètement *effective* et *finitiste*, on ne peut pas pourtant donner une réponse catégorique et directe (*oui-non*) à la question suivante: si l'on sort de la position initiale des pièces sur l'échiquier, lequel des trois cas doit-il se produire: a) le partie est gagnée par les Blancs, b) par les Noirs, c) la partie est nulle? — Car il faudrait se servir d'une méthode facile, même triviale, mais pratiquement très longue et compliquée: le „calcul" à effectuer exigerait des milliers d'années.

Nous y voyons un excellent exemple de la profonde différence qu'on peut souvent observer entre une solution suffisante du point de vue de la théorie pure, et une solution propre aux applications. C'est en même temps une illustration d'une certaine insuffisance des postulats finitistes.

Il est à remarquer qu'il existe (parmi les jeux peu connus) des jeux qui ne sont plus triviaux du point de vue du mathématicien pur.

3. III. W. Sierpiński: „Sur un problème de la théorie des relations" [Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa (2) 2 (1933), p. 285].

J. Spława-Neyman: „Sur les méthodes statistiques indépendantes des probabilités a priori".

10. III. W. Sierpiński: „Sur une propriété caractéristique des ensembles non dénombrables mesurables (B)". [Bulletin de l'Acad. Polon. 1933, p. 276].

A. Lindenbaum: „Sur les superpositions des fonctions représentables analytiquement" [Fund. Mat. 23 (1934), p. 15 et 304].

17. III. S. Straszewicz: „Zur Theorie konvexer Körper".

Es sei K ein konvexer Körper im R_n. Ein Begrenzugspunkt p von K heisse ein exponierter Punkt von K, falls eine $(n-1)$-dimensionale Stützebene an K existiert, die nur p mit K gemeinsam hat. Über die Menge E der exponierten Punkte von K gelten die Sätze: 1) E enthalt stets $n+1$ Punkte, die nicht in einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene liegen; 2) die abgeschlossene Hülle $\bar{E}$ ist der Durchschnitt aller Punktmengen, deren konvexe Hülle K ist; 3) die Menge der extremen Punkte von Minkowski ist zwischen E und $\bar{E}$ enthalten, braucht aber mit keiner dieser Mengen zusammen zu fallen; 4) der Minkowski'sche Satz über die Approximation konvexer Körper durch Polyeder, deren Ecken extreme Punkte dieser Körper sind, kann in dem Sinne verschärft werden, dass man darum extreme Punkte durch exponierte ersetzen kann.

H. Szmuszkowiczówna: „Un théorieme sur les polynômes et son application à la théorie des fonctions quasi-analytiques" [C. R. 198 (1934), p. 1119].

---

[1]) Chez les auteurs cités cette question n'est pas posée explicitement.

24. III. F. Leja: „Sur certaines limites relatives aux polynômes de Lagrange et aux ensembles fermés [Bull. Acad. Polonaise, 1933, p. 281].

31. III. W. Sierpiński: „Sur les constituantes des ensembles analytiques“ [Fund. Math. 31 (1933), p. 29].

W. Sierpiński: „Sur une propriété des fonctions qui n'ont que des discontinuités de I-ère espèce“ [Bull. Acad. Roumaine 16 (1933), p. 1].

S. Mazurkiewicz: „Sur les ensembles de capacité nulle et les ensembles H“ [Fund. Math. 21 (1923), p. 59].

21. IV. W. Sierpiński: „Sur le recouvrement du plan par une infinité dénombrable des courbes congruentes“ [Fund. Math. 21 (1933), p. 39].

S. Kierst et E. Szpilrajn: „Sur certaines singularités des fonctions analytiques uniformes“ [l. c.].

5. V. S. Mazurkiewicz: „Sur la décomposition du plan en courbes“ [Fund. Math. 21 (1933), p. 43].

E. Szpilrajn: „Sur certains invariants de l'opération (A)“. [Fund. Math. 21 (1933), p. 229].

W. Sierpiński: „Remarque sur un problème de M. Banach“.

19. V. F. Leja: „Sur les séries de polynômes homogènes“ [Rendiconti di Palermo 58 (1934), p. 144].

S. Mazurkiewicz: „Sur un problème de M. Borsuk“ [C. R. de Varsovie 26 (1934), p. 68].

Z. Charzyński: „Sur un problème de M. Steinhaus“. [Cf. Z. Charzyński: „Sur les fonctions dont la dérivée symétrique est partout finie“, Fund. Math. 21 (1933), p. 21].

2. VI. C. Kuratowski: „Sur les théorèmes topologiques de la théorie des fonctions de variables réelles“ [C. R. 197 (1933), p. 19].

9. VI. W. Sierpiński: „Une proposition équivalente à l'hypothèse du continu“ [Publications Mathém. de l'Univ. de Belgrade 2 (1933), p. 17].

— „Sur les espaces métriques localement séparables“ [Fund. Math. 21 (1933), p. 107].

— „Sur une fonction universelle pour les fonctions de Baire“ [Bull. Matém. de la Société Roumaine des Sciences, 35 (1933), p. 225].

23. VI. C. Kuratowski (Lwów): „Sur certaines propriétés des ensembles F_σ et G_δ“.

K. Borsuk: „Zur Dimensionstheorie der lokal zusammenziehbaren Räume“ [Math. Annalen 109 (1934), p. 376].

H. Grużewska: „The precision of the weighted average“. [Annals of Math. Statistic 1933].

W. Sierpiński: „Remarque sur l'axiome du choix“.

6. X. A. Tarski: „Über die Grundlagen der Methodologie der deduktiven Wissenschaften“ [C. R. de Varsovie 1934].

S. Mazurkiewicz: „Über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung I“. [Monatshefte für Mathem. u. Physik, 41 (1934), p. 343].

13. X. Z. Charzyński: „Sur les fonctions dont la dévivée symétrique est partout finie“ [Fund. Math. 21 (1933), p. 214].

E. Szpilrajn: „Remarque sur la dérivée symétrique“ [Fund. Math. 21 (1933), p. 226; cf. Fund. Math. 22 (1934), p. 319].

20. X. W. Sierpiński: »Sur une suite décroissante transfinie d'ensembles F_σ“ [C. R. de Varsovie 26 (1934). p. 8].

— „Sur la convergence uniforme“.

27. X. S. Kierst: „Sur les valeurs asymptotiques des fonctions méromorphes“.

[Un point a de la sphère de Riemann est une valeur asymptotique d'une fonction $f(z)$, méromorphe dans le cercle-unité U, lorsqu'il existe un chemin continu, contenu dans U et tendant vers la frontière de U, sur lequel $f(z)$ tend vers a]. M. K. démontre qu'il existe pour tout ensemble analytique (au sens de M. Lusin) E de points de la sphère de Riemann — une fonction méromorphe dans U, dont l'esemble des valeurs asymptotiques coïncide avec E.

10. XI. F. Leja: „Sur une fonction positive d'ensemble fermé“ [C. R. 197 (1934)].

W. Ślebodziński (Poznań): „Sur les espaces basés sur la notion d'élement“.

17. XI. S. Mazurkiewicz: „Über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung II“ [Monatshefte für Mathem. und Physik, à paraître].

Z. Waraszkiewicz: „Sur un problème de M. Hahn“ [Fund. Math. 22 (1934), p. 180].

24. X. C. Kuratowski (Lwów): „Sur une généralisation de la notion d'homéomorphie“ [Fund. Math. 22 (1934), p. 206].

W. Sierpiński: „Sur une extension de la notion d'homéomorphie“ [Fund. Math. 22 (1934), p. 270].

— „Remarque sur les types de dimensions“.

1. XII. S. Mazurkiewicz: „Les moyennes translatives et la loi de Gauss“ [Bull. Acad. Polonaise 1934, p 1].

S. Lubelski: „Der jetzige Zustand der systematischen Zahlentheorie. I. Entwicklung der Poincaré'schen Ideen“.

Nach einer von Poincaré ausgesprochenen Idee (s. H. Poincaré: La science et la méthode, Avenir des Mathémaitqnes, oder Atti d. IV Con. inter. d. Mat. S. 175) wäre es wohl möglich die Schwierigkeiten der Zahlentheorie durch Schaffung eines dieses ganze Gebiet umfassenden Systems zu überwinden. Zu diesem Zwecke rät er, *diese Wissenschaft den anderen mathematischen Disziplinen, wo die Stetigkeit eine Rolle spielt, methodologisch zu nähern*. Dabei hat Poincaré auf die Kongruenztheorie hingewiesen und den Gedanken geäussert, das dieses Kapitel der Zahlentheorie dazu besonders geeignet ist.

Das Ziel des vorliegenden Referats ist, gerade die elementaren Eigenschaften der Theorie der algebraischen Gleichungen auf die Kongruenztheorie zu übertragen.

Die Darbouxschen (Darboux, Bull. de sc. math. et astr. B. X und XII, 1876, 1877) und Weierstrass-Rouchéschen[1]) Sätze können z. B. gänzlich auf die Kongruenztheorie (mod. p), wo p eine ungerade Primzahl ist, übertragen werden. Es wird dazu die Resultante zweier ganz rationalen Polynome mit ganzzahligen Koeftizienten in der Sylvesterschen Determinatenform betrachtet und ihr Rang (mod. p) bez. ihre Hauptminoren s. 1) erörtert. Als Anwendung dieser Sätze erhalten wir unter anderem eine Verallgemeinerung des Euklidischen Primzahlsatzes:

„Jede endlich viele beliebige ganz-rationale Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten haben unendlich viele gemeinsame Primteiler der Forn $nx+1$, wo n eine beliebige natürliche Zahl ist“.

Als andere Anwendung erhält man, den für die Zahlentheorie charakteristischen (in der algebraischen Gleichungstheorie keine Parallele findenden) Satz:

„Damit die ganz-rationale Polynome $f(x)$ und $\varphi(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten (mod. p), wo p eine ungerade Primzahl ist, einen gemeinsamen Teiler mindestens zweiten Grades haben sollen, ist es notwendig, dass ihre Resultante durch p^2 teilbar sei“.

Ist $f(x)=x^n-a$, so transformiert sich die Sylvestersche Determinante in eine „Hyperzyrkulante“ (für $a=1$ zyklische Determinante) und wir erhalten somit als Folgerung

1) Verallgemeinerungen der König-Radischen-Kroneckerschen Kriterien (s. L. Dickson: History of Numbers I, Washington 1919 S. 226) für die Existenz von Wurzeln in einer Kongruenz,

2) Widerlegung eines Bachmannschen Kriteriums (s. P. Bachmann: Das Fermatproblem... Leipzig und Berlin 1919 S. 58) bezüglich der Lösbarkeit der Fermatschen Gleichung (I) $x^n+y^n+z^n=0$; $(p, xyz)=1$. Es wird von mir nämlich bewiesen, das die zyklische Determinante $\left[1, \binom{p-1}{1}, \binom{p-1}{2} \dots \binom{p-1}{p-2}\right]$ für $p \geq 7$ stets durch p^8 teilbar ist. Dabei ist zu beachten, dass, wie Bachmann

[1]) Rouché: Nouv. Annales d. Math. 2e serie B. XVI, 1877.

bewiesen hat, diese Determinante, wenn die Gleichung (I) lösbar ist, nur durch p^3 teilbar ist.

Es werden noch andere Fragen gestreift, wie:

1) der Zusammenhang der Kongruenztheorie mit den rekurrenten Reihen und zwar abzählt Ref. für die Glieder dieser Reihen die Länge der kleinsten Periode (mod. p) (bekanntlich wiederholen sich die Glieder periodisch). Diese Frage ist unter anderen von Interesse für die Lückentheorie der Taylorschen Reihen und auch für ein Problem der Himmelsmechanik.

2) die Nützlichkeit der Übertragung der Galoischen Theorie auf die Kongruenztheorie. Dabei wird dies auf die Theorie der kubischen Kongruenzen angewandt und diese Theorie ausführlich besprochen.

3) das Hilbertsche Problem Kongruenzen zu finden, welche algebraisch irreduzibel ist, doch (mod. p) stets reduzibel sind.

Auf die obigen Probleme wird Ref. noch in den folgenden Referaten ausführlich eingehen.

9. XII. Z. Łomnicki i S. Ulam (Lwów): „La mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilités“ [Fund. Math. 23 (1934), p. 237].

15. XII. W. Sierpiński: „Sur la superposition de fonctions qui jouissent de la propriété de Baire“ [Fund. Math. 22 (1934), p. 21].

W. Wolibner: „Sur les coëfficients des fonctions analytiques univalentes“.

1) Soit $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{1} b_n z^n$, $b_1 = 1$, une fonction holomorphe à l'extérieur du cercle K de rayon 1 et de centre à l'origine. Soit $P_m(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k x^k$, $P_m[f(z)] = \sum_{l=-\infty}^{m} c_l^m z^l$, où c_l^m est un polynome des coëfficients b_n et a_k. Pour que la fonction $f(z)$ soit univalente à l'extérieur de K, il faut et il suffit que pour tout nombre naturel m soit remplie l'inégalité $\sum_{c=-m}^{m} l \cdot |c_l^m|^2 \geqslant 0$, les coëfficients a_k, $k = 1, 2 \ldots m$, étant des nombres complexes arbitraires.

2) Corollaire. Quelque soit la condition nécéssaire pour que la fonction $f(z)$ soit univalente à l'extérieur de K, exprimée par une inégalité $W \geqslant 0$, où W désigne un polynôme des variables b_n ou des leurs parties réelles et imaginaires, il existe, pour tout $\varepsilon < 0$, un nombre naturel m tel que l'inégalité $W \geqslant -\varepsilon$ est une conséquence de l'inégalité $\sum_{c=-m}^{m} l \cdot |c_l^m|^2 \geqslant 0$, les coëfficients a_k, $k = 1, 2 \ldots m$, étant des nombres complexes arbitraires.

3) Si la fonction $f(z)$ est univalente à l'extérieur de K, on a $|b_{-1}| \leqslant \frac{2}{3}$, l'inégalité ne pouvant pas être renforcée.

4) Si la fonction $f(z)$ est univalente à l'extérieur de K et si $b_{-1} = b_{-2} = \ldots b_{-(n-1)} = 0$, on a $|b_{-n}| \leqslant \frac{2}{n+1}$, l'inégalité ne pouvant pas être renforcée.

5) M W. fait l'hypothèse que l'inégalité $|b_{-n}| \leqslant \frac{2}{n+1}$ est une condition nécessaire pour que la fonction $f(z)$ soit univalente à l'extérieur de K.

Il est à remarquer que l'hypothèse analogue $|b_n| \leqslant n$ de M. Bieberbach, pour l'intérieur du cercle K, en découle.

29. XII. W. Sierpiński: „Sur un problème de M. Kuratowski concernant la propriété de Baire des ensembles“ [Fund. Math. 22 (1934), p. 54].

H. Grużewska: „Sur la décomposition des prix du terrain“ [Kwartalnik Statystyczny 1934].

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique.

Section de Varsovie, année 1934.

[Abréviations: F. M. = Fundamenta Mathematicae; C. R. = Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences (Paris)].

---

12. I. W. Sierpiński: „La propriété de Baire et l'homéomorphie généralisée“ [F. M. 22 (1934), p. 262].

— „Sur un problème concernant la continuité uniforme“.

E. Szpilrajn: „Remarque sur un problème de la mesure“ [Cf. „Remarques sur les fonctions complètement additives...“ F. M. 22 (1934), p. 303].

— „Remarques sur les ensembles plans fermés“.

Soient: I — l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$; J — le carré $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$; 2^I l'espace des sous-ensembles fermés de I, métrisé à laide de la formule connue de M. Hausdorff.

F étant un ensemble plan, désignons par $\mathsf{D}(F)$ la famille de tous les intersections de F avec les droites parallèles à l'axe de y.

I. *F étant un sous-ensemble fermé de J, la famille $\mathsf{D}(F)$ constitue un sous-ensemble analytique de 2^I.*

II. *A étant un sous-ensemble analytique de 2^I, il existe un sous-ensemble fermé F de J et une famille au plus dénombrable B de sous-ensembles fermés de I — tels que $\mathsf{D}(F) = \mathsf{A} + \mathsf{B}$.*

III. *Il existe un sous-ensemble H de 2^I, étant un G_δ et tel que pour tout ensemble fermé $F \subset J$ et tout ensemble fini (ou vide) $\mathsf{B} \subset 2^I$ on a $\mathsf{D}(F) \neq \mathsf{H} + \mathsf{B}$.*

19. I. H. Szmuszkowiczówna: „Un théorème sur les polynômes et son application à la théorie des fonctions quasi-analytiques“ [C. R. 198 (1934), p. 1119].

A. Lindenbaum: „Sur le nombre des invariants des familles de tranformations arbitraires".

K étant une famille quelconque de fonctions univoques (pas nécessairement biunivoques), on dira que deux ensembles X et Y sont comparables relativement à **K**, lorsqu'une fonction de **K** transforme l'un d'eux en l'autre (X en Y ou Y en X).

A la séance du 16. I. 1931 [1]), M. L. a démontré (à l'aide de l'axiome du choix, mais sans avoir recours à aucune hypothèse non démontrée sur les nombres cardinaux) qu'il existe une classe de puissance 2^c ($c =$ la puissance du continu) formée d'ensembles linéaires incomparables deux à deux relativement à la famille des transformations continues.

M. L. démontre à présent le théorème suivant (obtenu en 1932): Soit M — un espace de puissance m, m étant un nombre cardinal infini tel que pour $n < m$ on a $2^n \leqslant m$, **K** — une famille de puissance $\leqslant m$ de fonctions quelconques: alors il existe 2^m ensembles de puissance m (contenus dans M) incomparables relativement à **K** [2]).

L'hypothèse de ce théorème peut être encore affaiblie et on parvient p. ex. au corollaire: **K** étant la famille des fonctions de Baire, il existe $2^{\aleph_1}$ ensembles linéaires incomparables relativement à **K**.

De ces théorèmes, on obtient des renseignements sur le nombre des invariants (classes d'ensembles clos) des familles de transformations. Enfin, on peut remarquer que si ce nombre est $> 2^m$ ($m =$ la puissance de l'espace M) et si **T** est une classe de puissance $\leqslant m$ d'ensembles, alors il existe autant de propriétés invariantes (non équivalentes) propres à tous les ensembles de **T** qu'il y a de propriétés invariantes en général.

A. Lindenbaum: „Remarques sur le groupe des permutations de l'ensemble des nombres entiers".

MM. J. Schreier et S. Ulam ont étudié le groupe S_∞ de toutes les permutations de l'ensemble des nombres naturels [3]). Leur théorème II s'énonce comme il suit: Il existe trois permutations telles que le groupe Π engendré par elles permet d'approximer toute permutation de S_∞; plus précisément, si f est une permutation donnée, k — un entier positif, il existe une permutation g de Π, telle que $f(i) = g(i)$, quel que soit $i \leqslant k$.

Or, on peut démontrer

1° qu'il existe deux permutations de S_∞ assez simples qui engendrent un groupe Π dense dans S_∞;

2° que le groupe Π engendré par une seule permutation de S_∞ n'est jamais dense dans S_∞ (puisque ses itérations ne peuvent approximer que des éléments de Π ou bien des permutations qui n'ont que des cycles finis).

---

[1]) Ces *Annales*, t. 10 (1931), p. 114.

[2]) Cf. le théorème de M. Sierpiński: Fund. Math. 19 (1932), pp. 209—210. V. aussi: *Hypothèse du continu* (1934), Chap. IV § 6, en particulier pp. 140, 139.

[3]) C. R. 197 (1933). V. aussi: Studia Math. 4 (1933).

A. Lindenbaum: „Sur les relations contenues dans les relations ordinales".

On démontre que lorsqu'une relation ϱ établit un ordre partiel dans un ensemble A, il existe une relation contenant ϱ et établissant un ordre complet (= relation ordinale) dans A [1]). Evidemment, le théorème inverse n'est pas vrai. Or, on peut donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une *relation* ϱ soit *contenue dans une relation ordinale* dans A, à savoir: il faut et il suffit que ϱ soit une relation acyclique, c.-à-d. qu'il n'existe aucune suite finie: $a_1, a_2, \dots, a_n$ (d'éléments de A), telle que:

$$a_n \varrho a_{n-1} \varrho \dots \varrho a_2 \varrho a_1$$

et à la fois $a_1 \varrho a_n$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une *relation* ϱ soit *contenue dans une relation qui établit un bon ordre* dans A — est la suivante: il faut et il suffit qu'il n'existe aucune suite infinie: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ (d'éléments de A), telle que:

$$\dots \varrho a_{n+1} \varrho a_n \varrho \dots \varrho a_2 \varrho a_1.$$

26. I. S. Mazurkiewicz: „Über total zusammenhanglose Mengen" [F. M. 22 (1934), p. 267].

F. Leja: „Sur les suites de polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green" [ces Annales 12 (1933), p. 57].

W. Sierpiński: „Sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle" [F. M. 22 (1934), p. 276].

E. Szpilrajn: „Remarques sur les fonctions complètement additives d'ensemble..." [F. M. 22 (1934), p. 303].

9. II. S. Lubelski: „Der jetzige Zustand der systematischen Zahlentheorie II. Zur Einführung in die systematische Zahlentheorie".

In den Arbeiten „Über die Teiler der Form $x^2 + Dy^2$" [Prace Matematyczno-Fizyczne 38, 40 (1931, 1932)] habe ich eine neue Theorie der binären quadratischen Formen dargestellt, die in der Hauptsache auf Induktion beruht. Ich will jetzt auf die Wichtigkeit eines Birkhoff-Vandiverschen Satzes (s. Vandiver: Annals of Math. 1930) aufmerksam machen mit dessen Hilfe man ebenso die Theorie der binären quadratischen Formen aufbauen kann. Dieser Satz lautet: „*Kongruenz* $xa \equiv \pm y$ mod p, *wo p eine beliebige Primzahl ist*, *ist stets mit* $0 < x < \sqrt{p}$, $0 < y < \sqrt{p}$ *lösbar*". Diesen Satz können wir ohne Schwierigkeit folgendermassen verallgemeinern:

Die Kongruenz

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_k x_k \equiv 0 \pmod{p},$$

---

[1]) Pour la démonstration et pour les definitions des termes—voir la note de M. Szpilrajn: Fund. Math. 16 (1930).

wo p Primzahl ist, $A_1, A_2, \ldots A_k$ *ganze rationale konstante Zahlen sind, ist stets mit*

$$-p_i < x_i < p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots k); \qquad p_1 p_2 \ldots p_k \geqslant p$$

lösbar, wobei $p_1 . p_2 \ldots p_k$ *beliebige Zahlen sind.*

Beweis. Wir betrachten die Menge aller Zahlen

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_k x_k \neq 0, \quad -\frac{p_i}{2} \leqslant x_i \leqslant \frac{p_i}{2}.$$

Ihre Anzahl beträgt mindestens $p_1 p_2 \ldots p_k \geqslant p$. Ist keine dieser Zahlen durch p teilbar, so müssen unter ihnen mindestens zwei mod p gleich sein. Nach Subtraktion erhält man so mit die gesuchte Lösung.

Den Birkhoffschen Satz erhalten wir, wenn $k = 2$, $|x_i| < \sqrt{p}$, $i = 1, 2$ ist. Es ist jetzt leicht einen Satz zu erhalten, der etwa dem Lagrangeschen Reduktionssatz aequivalent ist: „Ist $a^2 + Db^2 \equiv 0$ mod p, wo p prim ist, so finden sich solche Zahlen u, v, für die $\frac{u}{v} \equiv \pm \frac{a}{b}$, $u^2 + Db^2 = cp$, $|c| < 2\sqrt{|D|}$ ist". Es genügt nämlich in (1) $A_1 \equiv \frac{a}{b}$ (mod p), $p_1 = \frac{p}{\sqrt{|D|}}$, $p_2 = \sqrt{|D|}$ zu setzen.

Unser Ziel ist aber den Beweis eines Hermiteschen Satzes zu geben, der eigentlich der Gausschen Kompositionstheorie als gleichbedeutend angesehen werden kann. Damit erhält man, dass die Komposition der Formen in der Reduktionstheorie implizite enthalten ist.

Hermitesche Satz: *Ist L ein Teiler von* $x^2 + Dy^2$, *so findet sich eine nur von D abhängige Zahl h, für die* $L^h = u^2 + Dv^2$ *ist.*

Den Beweis erhält man, wenn man jeder Primzahlpotenz p^k ein Paar ganzer rationalen Zahlen (A, z_0) zuordnet, wobei $0 < A < 2\sqrt{D}$ und z_0 Wurzel der Kongruenz $z^2 + D \equiv 0$ (mod A) ist. Die Anzahl dieser Paare ist offenbar endlich und unter den Zahlen $p, p^2, \ldots p^n$ finden sich also zwei den den dasselbe Paar entspricht. Das Produkt dieser Zahlen wird durch $x^2 + Dy^2$ darstellbar sein.

Als Folgerungen erhalten wir die Sätze:

1° *Ist* $D \gtrless 0$ *prim und* $D \equiv 3$ mod 4, *so kann die Zahl h ungerade angenommen werden*;

2° Ist $D \equiv 2, 5, 13, 14$ mod 16, *so kann h als doppeltes einer ungeraden Zahl angenommen werden*;

und damit auch das *Reziprositätsgesetz.*

Es ist aber von Wichtigkeit zu betonen, dass man die obige Methode auf algebraische Körper anwenden kann. Man erhalt nämlich für algebraische Körper einen Satz, der den Birkhoffschen analog ist und somit können wir den Hermiteschen Satz auf algebraische Körper übertragen. Diese Verallgemeinerung kann in zwei Richtungen geschehen, je nach dem Sinne, welche man den Teiler t der Form $x^2 + Dy^2$ beilegt

1° t bezeichnet ganze algebraische Zahlen;

2° t bezeichnet sämtliche, also auch Idealteiler von $x^2 + Dy^2$.

Nun muss bemerkt werden, dass in 1° der Exponent h in manchen Fällen (wahrscheinlich allgemein) von der Klassenzahl des grundlegenden Körpers unabhängig angenommen werden kann.

16. II. K. Borsuk: „Sur la notion de la catégorie de MM. Lusternik et Schnirelmann“ [C. R. 198 (1934), p. 1731].

Z. Waraszkiewicz: „Sur quelques invariants des transformations continues“ [F. M. 33 (1934), p. 172].

23. II. S. Mazurkiewicz: „Sur les nombres dérivés“ [F. M. 23 (1934), p. 9].

2. III. S. Mazurkiewicz: „Ein Zerlegungssatz“ [F. M. 23 (1934), p. 11].

B. Knaster: „Sur la quasi-connexité de M. Čech“.

9. III. W. Kozakiewicz: „Sur un théorème de M. Bernstein“.

23. III. A. Rajchman: „Sur l'équation de MM. Tinbergen et Kalecki“.

P. Szymański et W. Wolibner: „Exemple d'une fonction continue bornée $f(x, y)$, déterminée dans tout le plan et satisfaisant pour tout a et b à l'équation:

$$(*) \qquad \iint_{K_{a,b}} f(x, y)\, dx\, dy = 0$$

($K_{a,b}$ désignant le cercle de centre a, b et de rayon 1) [1])“.

Posons

$$f(x, y) = \cos(px + qy),$$

p et q désignant des constantes arbitraires satisfaisant à l'équation $p^2 + q^2 = r^2$, où r désigne un zéro arbitraire de la fonction de Bessel de première classe. La fonction $f(x, y)$ satisfait à l'équation (*). (On peut aussi remplacer cos par sin). En variant les constantes p et q et en ajoutant ces fonctions multipliées par des constantes arbitraires, on obtient une classe vaste de fonctions continues satisfaisant à l'équation (*).

28. St. Kołodziejczyk: „On an Important Class of Statistical Hipotheses“ [Biometrica 1934 ou bien „O pewnej klasie hipotez statystycznych, związanych z teorją najmniejszych kwadratów“, Kwartalnik Statystyczny 1934, z. 3—4].

6. IV. S. Lubelski: „Der jetzige Zustand der systematischen Zahlentheorie III. Binäre quadratische Formen und abzählende Methoden“.

In vorigen Referate haben wir gesehen, inwieweit die Reduktionstheorie für die Theorie der binären quadratischen Formen grundlegent ist. Wir wollen hier andere Anwendungen dieser Theorie bieten. Wir wenden nämlich diesie Theorie auf Fragen bei denen man auf den ersten Blick eine Zusammenhang mit der

[1]) Cf. D. Pompeiu, Bulletin Acad. Bruxelles (5) 15, p. 265.

Therie der binären quadratischen Formen nicht sieht. Wir geben zunächst eine eine Verallgemeinerung eines Gausschen Satzes: *Ist D eine beliebige rationale Zahl, so existiert unterhalb $\sqrt{D}$ mindestens ein Primteiler $q \equiv -1 \bmod 4$, der Nichtrest für D ist* (Ist $D \equiv 1 \bmod 8$ prim und $q \equiv \pm 1 \bmod 4$, so erhält man den genannten Gausschen Satz; vgl. auch meine Arbeit: Zur Reduzibilität von Polynomen in der Kongruenztheorie. Acta Arithmetica 1_2 § 1).

In allen Fragen, wo die binären quadratischen Formen angewendet werden, kann man etwa annehmen, dass es immer über die Eigenschaften ihrer Diskriminante gesprochen wird. Nun kennen wir allgemeiner die Frage stellen: „die analogen Eigeschaften der Diskriminante D eines beliebigen Polynoms $f(x)$ zu finden"? Bekanntlich ist die Adjunktion der Quadratwurzel der Diskriminante als erster Schritt zur Lösung eines algebraischen Polymons nötig. Mittels der Theorie der binären quadratischen Form kann man beweisen, dass bei einer sehr ausgedehnter Klasse von kubischer Polynome dieser Schritt genügt, um die Gleichung zu lösen. Diese Erwägungen, die im Wesentlichen auf einem Jermakoffschen Satz beruhen, geben uns die Möglichkeit einen Kapfererschen Satz zu verallgemeinern:

Ist die Gleichung (1) $ax^n + by^n + cz^n = 0$, *wo a, b, c ganze rationale Zahlen sind und n eine beliebige natürliche Zahl ist, in ganzen rationalen Zahlen x, y, z lösbar, so ist die Gleichung* (2) $u^3 - v^2 = 3^3 \cdot 2^{-2} a^2 b^2 c^2 w^{2n}$ *in ganzen rationalen Zahle u, v, w lösbar. Ist n ungarade, $a = \pm 1$, $b = \pm 1$ und c Potenz einer Primzahl, so muss auch ungekehrt aus der Lösbarkeit der Gleichung* (2) *in ganzen rationalen u, v, w, von denen je zwei teilerfremd sind, auch die Lösbarkeit der Gleichung* (1) *in ganze von Null verschiedenen Zahlen x, y, z folgen.*

Den Kopfererschen Satz erhalten wir, wenn $a = b = c = 1$. Unser Satz kann also, als eine Übergang von der Fermatschen Gleichung zu den Formen höheren Grades angesehen werden (vgl. meine Studien über den grossen Fermatschen Satz; Prace Matematyczno-Fizyczne 42 (1934)). Ferner können wir auch allgemein die zyklischen Gleichungen dritten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten charakteriseren. Dabei ist zu betonen, dass für zyklische Gleichungen dritten Grades mit rationalen Koeffinenten hat F. Seidelmann (Math. Annalen 1917) dieses Problem gelöst, aber dort ist der zahlentheoretischer Kern nicht sichtbar.

Die Beweise aller obigen Sätze benutzen die sogenannte statistische Methode, und zwar z. B. wieviel Mal eine Zahl durch die Form $ax^2 + bxy + cy^2$ darstellbar ist. Ref. betont die Wichtigkeit dieser Methode für die Zahlentheorie und gibt noch einige Anwendungen, die er in den nachfolgenden Referaten eingehender betrachten wird.

13. IV. W. Sierpiński: „Sur les résultats nouveaux de M. Lusin".

F. Leja: „Sur une méthode de la représentation conforme".

27. IV. W. Sierpiński: „Sur l'approximation des fonctions continues par les superpositions de quatre fonctions" [F. M. 23 (1934), p. 119].

Z. Waraszkiewicz: „Über ein Hyperraum der Kontinua".

Es wird ein metrischer Hyperraum $\mathbf{M}(R)$ der Kontinua eines anderen metrischen und kompakten Raumes R behandelt. $\mathbf{M}(R)$ hat u. a. die folgende Eigenschaft: jeder in sich kompakten Teilmenge **K** von **M**(R) kann man ein (etwa in dem Hilbertschen Universalraum gelegenes Kontinuum M(**K**) so zuordnen, dass jedes Kontinuum des Raumes R, welches irgendeinem Elemente von **K** entspricht das stetige Bild von M(**K**) ist.

11. V. D. Pompeiu (Bucuresti): „Sur les fonctionsi indéfiniment symétriques".

G. Tzitzeica (Bucuresti): „Sur certaines propriétés affines des courbes gauches".

W. Sierpiński: „Sur un problème de M. Ruziewicz concernant les superpositions de fonctions jouissant de la propriété de Baire" [F. M. 24 (1935), p. 11]

18. V. W. Sierpiński: „Sur les ensembles jouissant de la propriété de Baire" [F. M. 23 (1934), p. 121].

E. Szpilrajn: „Sur une classe de fonctions de M. Sierpiński et la classe correspondante d'ensembles" [F. M. 24 (1935), p. 17].

1. VI. S. Mazurkiewicz: „Sur l'espace des continus péaniens" [F. M. 24 (1935). p. 118].

W. Sierpiński: „Sur une propriété des ensembles linéaires quelconques" [F. M. 23 (1934), p. 125].

W. Sierpiński: „Les superpositions transfinies des fonctions continues et les fonctions de Baire" [F. M. 24 (1935), p. 1].

8. VI. W. Sierpiński: „Sur les itérations transfinies des fonctions continues" [Bull. Acad. Roum.].

— „Sur un problème de M. Ruziewicz concernant les ensembles de mesure nulle" [Mathematica 10 (1935), p. 189; cf. „Sur deux problèmes de M. Ruziewicz concernant la décomposition de l'intervalle en paires de points", F. M. 24 (1935), p. 43].

E. Szpilrajn: „Sur la multiplication cartésienne des ensembles et la superposition des fonctions".

15. VI. H. Milicer-Grużewska: „Sur les mesures statistiques" [„O miarach statystycznych", Kwartalnik Statystyczny 1935].

W. Kozakiewicz: „Sur une généralisation d'un théorème de M. Bernstein".

22. VI. K. Borsuk et S. Mazurkiewicz: „Sur les rétractes absolus indécomposables" [C. R. 199 (1934) p. 110].

S. Saks: „Sur un théorème de M. Orlicz".

Dans son Mémoire „Zur Theorie der Orthogonalreihen" (Bull. Ac. Pol. (**A**), (1927), 81—113, en part. p. 101) M. Orlicz a démontré que pour tout système orthogonal, normé et complet $\{\varphi_n(x)\}$ la serie $\sum\limits_n \varphi_n^2(x)$ diverge presque partout.

La démonstration de M. Orlicz s'appuie sur certaines méthodes de la théorie générale des opérations fonctionnelles. M. Saks communique une démonstration un peu plus directe.

Supposons, par impossible, que $\sum_n \varphi_n^2(x)$ converge sur un ensemble de mesure positive. On a par suite $\sum_n \varphi_n^2(x) \leqslant M < +\infty$ sur un ensemble E tel que mes $E > 0$. En appliquant le théorème de Lusin, on peut supposer que toutes les fonctions $\varphi_n(x)$ sont continues sur E. On peut admettre aussi que E est un ensemble parfait dont chaque portion est de mesure positive; on peut donc poser $E = A + B$ où A et B sont deux ensembles mesurables disjoints et de mesure positive sur toute portion de E. Soit $\sum_n a_n \varphi_n(x)$ le développement orthogonal de la fonction caractéristique de A. En vertu de l'inégalite $[\sum_{n=m}^{p} a_n \varphi_n(x)]^2 \leqslant M(\sum_{n=m}^{p} a_n^2)$ valable pour $x \in E$, la série $\sum_n a_n \varphi_n(x)$ converge uniformément sur l'ensemble E vers une fonction continue sur cet ensemble. Par conséquent, la fonction caractéristique de l'ensemble A serait équivalente (c. à d. égale presque partout) à une fonction continue sur E, ce qui est évidemment contradictoire à la définition de l'ensemble A.

Une méthode analogue permet de prouver un autre énoncé de M. Orlicz (ibid., p. 101), notamment que la série $\sum_n [\int_E |\varphi_n| dx]^2$ diverge pour tout ensemble E de mesure positive.

28. IX. H. Milicer-Grużewska: „The probable value of the weighted average".

The universe W is a set of pairs of variable quantities: $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots;$ N pairs of them are selected independently and at random. It is treated abaut the weighted average of the quantities x_i with y_i as weights e. i abaut the expression:

$$x_y = \sum_i x_i y_i : \sum_i y_i \tag{1}$$

If the selected quantities are: $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots x_N, y_N$, then the calculated weighted average is:

$$X_y = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i : \sum_{i=1}^{N} y_i \tag{2}$$

It will be proved that it is, under certain suppositions:

$$E[X_y - x_y] = O\left(\frac{1}{N}\right) \tag{3}$$

According to that and a result of the part I of my article unt. „The precision of the weighted average" [1]) it may be said, that under certain suppositions [2]) the calculated weighted average, as well as the calculated arithmetic mean, are the most probable values of the unknown weighted average and arithmetic mean

[1]) The Annals of the Math. Statistics, Michigan, August 1933.

[2]) The suppositions of this article and the just cited one.

respect., and the latests are respect. the probable values of the calculated weighted average and the calculated arithmetic mean, if only N — the size of the sample — is great enough, that the quantity $O\left(\frac{1}{N}\right)$ may be neglected.

Denote wit $p_{i|j}$ the probability that the selected pair is x_i, y_j, and with $p'_{i|j}$ its calculated frequency, and put:

$$(4) \qquad m_{k|l} = \sum_{i,j} p_{i|j}\, x_i^k\, y_j^l; \quad m'_{k|l} = \sum_{i,j} p'_{i|j}\, x_i^k\, y_j^l$$

$$(5) \quad M_{1/1} = \sum_{i,j} \left| \frac{x_i\, y_j}{m_{1/1}} \right| p_{i|j}; \; M_{1/3} = \sum_{i,j} \left| \frac{x_i\, y_j^3}{m_{1/1}\, m_{0/1}^3} \right| p_{i|j}; \; \frac{m_{1/2}}{m_{1/1} \cdot m_{0/1}} = a; \; \frac{m_{0/2}}{m_{0/1}^2} = b$$

$$(6) \qquad Pr\left[\frac{m'_{1/1}}{m_{1/1}} = u\right] = \pi_u; \quad Pr\left[\frac{m'_{0/1}}{m_{0/1}} = v\right] = \pi_v$$

$$Pr\left[\frac{m'_{1/1}}{m_{1/1}} = u, \quad \frac{m'_{0/1}}{m_{0/1}} = v\right] = \pi_{uv} = \pi_u\, \pi_v^u = \pi_v\, \pi_u^v$$

Suppose now that:

I The quantities (6′) are finisbe

$$\left.\begin{array}{ll} \text{II} & \sum_u |u|\, \pi_u^v \leqslant \text{const.} \\ \text{III} & |m'_{0/1}| \geqslant \text{const.} \end{array}\right\} \text{for all possible samples.}$$

Deducing from the Tshebysheff's inequality and from prof. Tshuproff's results [1]), I prove following theoreme and corrolairs:

Theorem. If the suppositions I, II, III are satified than:

$$E\left[\frac{X_y - x_y}{x_y}\right] = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

Corrolair I. *The relative constant error, of the approximation of the weighted average, of a finished set of pairs of a finished variables (the value of one of the variables, theated as weigts), with the selected weighted average, is of order of* $\frac{1}{N}$, *N denoting the size of the sample, if 1º the mean product of the pairs of variable is different from zero, and 2º if the mean value of the weights of the universe, and also all their possible selected means, have moduls greater than a positive constant.*

Corrolair II. *If the frequency surface of a universe of pairs of variables is normal, then the relative error of the approximation of the weighted average of this pairs of variables (the value of one of the variables threated as weights), with the selected weighted average, is of the order of* $\frac{1}{N}$, *N denoting the size of the sample, if the mean product of the pairs of variables the mean of the*

---

[1]) „Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationslehre", Berlin, Teubner, 1925.

weights and also all their possible selected means are moduls greater then a positive constant.

Remark I. If the mean product of the pairs of variables is zero one can't treat with the relative constant error of the approximation of the weighted average (just equal to zero) with the selected average, but simply with their constant error. The analogical theorem and corrolairs as previously, may he proved.

Remark II. If we hawe $m_{1/1} = 0$, and $m_{0/1} = 0$, the variables are not corrolated and we need not treat about the weighted average, but only about the arithmetic means of each of them.

Remark III. The one essential supposition of all cases, is that the arithmetical mean of the weights and its selected means have moduls greater than a positive constant; if we are not in the case of the remark II, the weighted average is then infinite.

Remark IV. With the same method it may be proved that

$$E(X_y - x_y)^2 = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

W. Kozakiewicz: „Sur certaines inégalités concernant les lois de probabilité de n variables aléatoires".

12. X. C. Kuratowski: „Sur les rétractes n-dimensionnels" [Cf. F. M. 24 (1935), p. 269].

A. Rajchman: „Sur la théorie des déterminants" [Cf. „Teorja wyznaczników. Wykład opisowo indukcyjny" Mathesis Polska 9 NN° 7—8 et 9—10].

9. XI. W. Sierpiński: „Sur les suites infinies de fonctions définies dans les ensembles quelconques" [F. M. 24 (1935), p. 209].

S. Saks: „Sur la dérivée relative".

Deux notes, récemment parues (Petrovsky, Rec. math. Soc. math. Moscou t. 41 (1934) 48—58; Caccioppoli, Atti Mem. Acad. Sc. Padova 50 (1934), 93—98) contiennent une solution affirmative du problème suivant posé par M. Lebesgue dans la 2e édition de ses „Leçons sur l'intégration": Les fonctions $f(t)$ et $w(t)$ étant continues dans un intervale (a, b), la fonction $f(t)$ est-elle constante lorsque sa dérivée ralative par rapport à $w(t)$ existe et s'annulle partout dans cet intervalle (c. à d. que $df(t)/dw(t) = \lim\limits_{h \to 0} [f(t+h) - f(t)]/[w(t+h) - w(t)] = 0$ pour $a \leqslant t \leqslant b$). La démonstration de M. Caccioppoli (plus simple que celle de M. Petrovsky) s'appuie sur le fait que le théorème suggéré par M. Lebesgue peut être énoncé dans une forme géométrique que voici: Une courbe continue $x = w(t)$, $y = f(t)$ possédant en chaque point une tangente determinée et parallèle à l'axe des abscisses, est située sur un segment parallèle à cet axe. M. Saks, observe que ce théorème est contenu dans la proposition suivante établie par M. Zygmund et lui dans une note de Fundam. Mathem., 6 (1924), p. 117—121: Étant donnée une courbe arbitraire (non nécessairement continue) dans le plan, l'ensemble des ordonnés de ces points de cette courbe où une demi-tangente, d'un côté au moins, existe et est parallèle à l'axe des abscisses, est de mesure nulle.

A l'aide de cette proposition on peut même affaiblir les hypothèses du théorème de M. Lebesgue, en l'énonçant dans la forme suivante: Si $w(t)$ est une fonction quelconque et $f(t)$ une fonction satisfaisant à la condition de Darboux et si $f(t)$ possède par rapport à $w(t)$ une dérivée determinée et égale à 0, même seulement d'un côté en général variable, de tout point t à un ensemble au plus dénombrable près, alors $f(t)$ se reduit à une constante.

16. XI. A. Rajchman: „Sur l'inégalité de Hausdorff-Riesz" [F. M. 24 (1935), p. 288].

14. XII. W. Sierpiński: „Sur une propriété de la droite" [F. M. 24 (1935), p. 247].

C. Kuratowski: „Sur les espaces localement connexes et péaniens en dimension n" [F. M. 24 (1935), p. 269].

21. XII. S. Saks: „On the differentiability of multiple integrals" [F. M. 25 (1935)].

J. Spława-Neyman: „Sur le problème de la reconstruction dans la statistique mathématique".

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique.

Section de Lwów.

13. I. J. Schauder: „Das Cauchy'sche Problem für hyperbolische Differentialgleichungen" [Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen, Fundam. Math. 24 (1935)].

J. Schauder: „Über stetige Abbildungen in Räumen vom Typus (B)".

Ref. knüpft an eine frühere Veröffentlichung an, in der er mit Herrn J. Leray die Grundlagen zu einer Theorie des Abbildungsgrades in den Räumen vom Typus (B) legt [Topologie et équations fonctionnelles, Ann. École norm. 51 (1934)]; einige Sätze über Existenz der Fixpunkte und deren Eigeschaften können mit Hilfe dieses Begriffs ganz einfach bewiesen werden. Dies wird an dem folgenden Beispiel illustriert: *Ist $F(x)$ eine vollstetige Abbildung der Kugel $|x| \leqslant 1$ auf ihren Teil, so gibt es einen Fixpunkt.* Zum Beweise betrachte man die Hilfsabbildungen $G_\lambda(x) = x - \lambda F(x)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Bei der Abbildung $G_0(x)$ gehört 0 zum Bilde der Kugel, nicht aber zu dem ihres Randes; der Abbildungsgrad in 0 ist gleich Eins. Wäre der Satz falsch, so könnte 0 auch für $0 < \lambda \leqslant 1$ bei der Abbildung $G_\lambda(x)$ nicht dem Bilde des Randes angehören; folglich wäre der Abbildungsgrad von $G_\lambda(x)$ in 0 stets gleich Eins; mithin aber müßte 0 speziell bei der Abbildung $G_1(x)$ zum Bilde gehören, entgegen der Annahme. Es gilt noch: *Ist bei einer vollstetigen Abbildung $F(x)$ eines beschränkten Gebietes nur ein Fixpunkt x_0 vorhanden und der Abbildungsgrad von $x - F(x)$ in 0 von Null verschieden, so ist dieser Fixpunkt stabil;* d. h.: läßt man die vollstetigen Abbildungen $F_\lambda(x)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, von λ stetig (gleichmäßig in x) abhängen, so daß $F_0(x) = F(x)$, so liegt für hinreichend kleine λ mindestens ein Fixpunkt von $F_\lambda(x)$ in der gegeben Umgebung von x_0. Ähnlicher Sachverhalt liegt übrigens vor, wenn bei der Abbildung $F(x)$ eine endliche Anzahl von Fixpunkten vorhanden ist.

S. Mazur: „Über die im kleinen konvexen Mengen".

Eine Teilmenge M eines linearen normierten Raumes heißt im kleinen konvex, wenn sich um jeden ihrer Punkte eine Kugel legen läßt, deren Durchschnitt mit M konvex ist. In Verallgemeinerung eines Satzes des Herrn H. Tietze [Über Konvexheit im kleinen und im großen und über gewisse den Punkten einer Menge zugeordnete Dimensionszahlen, Math. Z. 28 (1928)] wird bewiesen: *Eine abgeschlossene und zusammenhängende Punktmenge eines linearen normierten Raumes, die konvex im kleinen ist, ist konvex.*

S. Ulam: „Über stetige Abbildungen von Mannigfaltigkeiten".

Der Punkt x_0 heißt stabiler Fixpunkt der stetigen Abbildung $f(x)$ eines topologischen Raumes auf sich selbst, wenn er ein Fixpunkt ist und wenn dabei jede hinreichend nahe $f(x)$ gelegene Abbildung mindestens einen nahe x_0 gelegenen Fixpunkt besitzt. Es wird die Aufgabe gestellt, die stabilen Fixpunkte durch innere Eigenschaften zu charakterisieren, und die Frage der Existenz von stabilen Fixpunkten bei stetigen Abbildungen von Funktionalräumen aufgeworfen. Mit Hilfe dieses Begriffes beweist man leicht: *Im Raume aller stetigen Abbildungen einer Mannigfaltigkeit auf sich selbst, bilden diejenigen Abbildungen, die einen Fixpunkt besitzen, die abgeschlossene Hülle einer offenen Menge.*

20. I. S. Mazur: „Über konvexe Funktionen mehrerer Veränderlichen" [Über konvexe Funktionen mehrerer Veränderlichen, Studia Math. 6 (1935)].

S. Banach: „Über ein von Herrn S. Ulam gestelltes Problem".

Ref. gibt einen einfachen Beweis für den von Herrn S. Ulam herrührenden Satz [vgl. diese Berichte, 13. I.]; die angewandte Methode erlaubt sofort die Richtigkeit dieses Satzes für Räume, welche die Mannigfaltigkeiten als Spezialfall enthalten, zu verifizieren.

17. II. S. Mazur und W. Orlicz: „Über das Verhalten von Polynomen in konvexen Mengen" [Über das Verhalten von Polynomen in konvexen Mengen, Studia Mat. 6 (1935)].

J. Schreier und S. Ulam: „Bemerkungen über die stetigen Abbildungen von topologischen Räumen".

Es sei A ein topologischer Raum; mit $T(A)$ bezeichnen wir den Raum aller topologischen Abbildungen von A auf sicht selbst. Es wird die gruppentheoretisch-topologische Struktur dieses Raumes studiert im Falle, wo A die Gerade und die euklidische Ebene ist. Es wird bewiesen: *Die Gruppe $T(K)$, wo K die Kreislinie ist, ist einfach in dem Sinne, daß die Einheitskomponente keine nichttrivialen Normalteiler besitzt.*

10. III. S. Kaczmarz: „Beispiel einer divergenten Orthogonalreihe" [Notes on orthogonal series II, Studia Math. 5 (1934)].

H. Steinhaus: „Ein Apparat zur Integration einer gewissen Funktion über beliebige ebene Gebiete" [Su un' applicazione del Calcolo delle probabità alla teoria del mercato, Giorn. Ist. Ital. Attuari, 12 (1934)].

W. Orlicz: „Zur Theorie der Orthogonalreihen" [Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen IV, Studia Mat. 5 (1934)].

17. III. W. Sierpiński: „Über Analogien zwischen den Eigenschaften der Mengen vom Maße Null und Mengen von erster Kategorie" [Sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle, Fundam. Math. 22 (1934)].

H. Steinhaus: „Graphische Darstellung einer medizinischen Theorie" [Tuberkulosestudien IV, Zeitschrift für Kinderheilkunde 56 (1934)].

16. IV. W. Orlicz: „Zur Theorie der Orthogonalreihen" [Über Folgen linearer Operationen, die von einem Parameter abhängen, Studia Math. 5 (1934)].

S. Banach: „Über Wroński's Oberstes Gesetz".

Ref. analysiert vom Standpunkte der Theorie der linearen Operationen die von Wroński beim Beweise des Obersten Gesetzes angewandte Methode und erhält die Erklärung der Tatsache, daß diese Methode in vielen Fällen, so z. B. bei Entwicklungen in Potenzreihen oder Fouriersche Reihen, erfolgreich ist.

19. V. E. Żyliński: „Über die Lagrange'sche Multiplikatorenmethode".

L. Chwistek: „Über den Empfindungsraum".

Durch Einführung an Stelle der Einstein'schen Zeit t, der Zeit $T = t + \frac{r}{c}$ (wobei r die Entfernung des Aufpunktes vom Beobachtungspunkte und c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet), welcher wir in Wirklichkeit die Beobachtungen zuordnen, werden folgende Vereinfachungen bei Beschreibung von Ereignissen gewonnen: Die Räume zweier Beobachter, die sich in demselben Punkte befinden, sind identisch ohne Rücksicht auf eventuelle Geschwindigkeitdifferenzen, und nur die Arten, diese Räume zu messen, sind voneinander verschieden; dagegen sind die Räume zweier in verschiedenen Punkten befindlicher Beobachter stets voneinander verschieden; die an dieser Zeit T gemessene relative Geschwindigkeit V zweier Systeme läßt sich mit der Einstein'schen Geschwindigkeit v durch die Formel $V = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ verbinden und ist daher beliebig großer Werte fähig.

26. V. W. Orlicz: „Zur Theorie der Orthogonalreihen".

Es wird u. a. der folgende Satz bewiesen: *Es bezeichne* $\{\varphi_i(x)\}$ *ein, in* (L) *vollständiges Orthogonalsystem, dessen Funktionen beschränkt sind; dafür, daß für fast jede Vorzeichenverteilung* $\varepsilon_n = \pm 1$ *die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n p_n \varphi_n(x)$ *die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus* (L^a) *sei,* $a \geqslant 1$, *ist notwendig und hinreichend, daß die Ungleichung*

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{p} p_n^2 \varphi_n^2(x)\right]^{\frac{a}{2}} dx \leqslant C \quad (p = 1, 2, \ldots)$$ *bestehe.*

S. Mazur und J. Schauder: „Über Extreme von mehrfachen Integralen".

Durch Benutzung gewisser Sätze über konvexe Mengen in Funktionalräumen können die wichtigsten Ergebnisse der Theorie von Herrn L. Tonelli [L'Estremo Assoluto degli Integrali Doppi, Ann. di Pisa, 2 (1933)] wiedergewonnen werden, ohne die Halbstetigkeit der vorkommenden Funktionale wesentlich zu benutzen. Die erwähnten Hilfsmittel erlauben nämlich eine solche nach z gleichmäßig konvergierende Minimalfolge $\{z_n\}$ zu bestimmen, bei der auch die partiellen Ableitungen erster Ordnung von z_n im Mittel gegen entsprechende Ableitungen von z konvergieren; z ist dann das gesuchte Minimum. Die Methode ist ohne weiteres auf Variationsprobleme verallgemeinerungsfähig, bei denen unter dem Integralzeichen auch höhere Ableitungen vorkommen; die Integrationsmannigfaltigkeit kann auch geschlossen sein.

9. VI. S. Kaczmarz: „Zur Theorie der Orthogonalreihen" [Notes on orthogonal series I, Studia Math. 5 (1934)].

Z. Waraszkiewicz: „Über stetige Abbildungen von Kontinuen" [Sur quelques invariants des transformations continues, Fund. Math. 23 (1934)].

M. Kac: „Über einige Sätze von Borel und Hardy-Littlewood".

Sei $\{\varphi_i(x)\}$ das Rademacher'sche Orthogonalsystem. Ref. gibt einen einfachen Beweis für den Satz von Herrn E. Borel, laut welchem $|\varphi_1(x) + \ldots + \varphi_n(x)| = o(n)$ fast überall, sowie für die von den Herren G. H. Hardy und J. E. Littlewood herrührende Verschärfung, nach der $|\varphi_1(x) + \ldots + \varphi_n(x)| = O(\sqrt{n \log n})$ fast überall. Die Borel'sche Behauptung folgt unmittelbar aus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \int_0^1 [\varphi_1(x) + \ldots + \varphi_n(x)]^4\, dx < +\infty$ und ihre Verschärfung aus (*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \int_0^1 e^{\sqrt{\log n}\,\frac{|\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)|}{n}}\, dx < +\infty$; um (*) zu beweisen, geht man aus der Relation $\int_0^1 a^{\varphi_1(x)+\cdots+\varphi_n(x)}\, dx = \left(\frac{a+a^{-1}}{2}\right)^n$ aus.

30. VI. S. Ruziewicz: „Über meßbare Punktmengen".

S. Banach: „Aus der Theorie der Orthogonalreihen".

Sei E die Menge aller normierten und vollständigen Orthogonalsysteme $\{\varphi_n(x)\}$ in $<0, 1>$; setzt man $(\{\varphi_n(x)\}, \{\psi_n(x)\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\varphi_n - \psi_n|}{1 + |\varphi_n - \psi_n|}$, $|\varphi_n - \psi_n| = \left(\int_0^1 [\varphi_n(x) - \psi_n(x)]^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$, für $\{\varphi_n(x)\}$, $\{\psi_n(x)\}\ \varepsilon E$, so wird E zu einem metrischen, vollständigen und separablen Raume. Ref. beweist u. a.: *1° Die Menge aller* $\{\varphi_n(x)\}\ \varepsilon E$ *mit der Eigenschaft, daß die Entwicklung jeder Funktion* $\varphi(x)\ \varepsilon (L^2)$

nach dem System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergiert, ist von erster Kategorie; 2° Verschwindet die Funktion $\varphi(x)\,\varepsilon\,(L^2)$ nicht identisch, so ist die Menge aller $\{\varphi_n(x)\}\,\varepsilon E$ mit der Eigenschaft, daß die Entwicklung von $\varphi(x)$ nach dem System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergiert, von erster Kategorie.

20. X. A. Łomnicki: „Über eine Interpretation von singulären Punkten". Ref. weist auf einige didaktisch interessante Zusammenhänge zwischen den Punkten der Fläche $f(x, y) = z$ hin, in denen die Tangentialebene zur Ebene x, y parallel ist, und den singulären Punkten der Kurven $f(x, y) =$ const.

J. Pepis: „Das Entscheidungsproblem in der Mathematik I".

Nach Erklärung des Begriffs einer arithmetischen rekursiven Eigenschaft wird folgender Satz formuliert: Die Entscheidbarkeit einer beliebigen Aussage der Form $\underset{x}{\Pi} F(x)$, wobei $F(x)$ eine arithmetische rekursive Eigenschaft ist, ist äquivalent mit der Bestimmung einer arithmetischen entscheidbaren Funktion, die eine Majorante einer gewissen arithmetischen, durch ein vom Ref. gestelltes kombinatorisches Problem bestimmten Funktion $\Phi(r, s, m)$ wäre.

10. XI. J. Pepis: „Das Entscheidungsproblem in der Mathematik II".

Unter Präzisierung der vorigen Ergebnisse wird folgender Satz angegeben: Jeder Aussage der Form $\underset{x}{\Pi} F(x)$, wobei $F(x)$ eine arithmetische rekursive Funktion ist, kann man effektiv eine Aussage derselben Form $\underset{x}{\Pi} G(x)$ sowie Zahlen r, s, m derart zuordnen, daß die Aussage $\underset{x}{\Pi} F(x)$ dann und nur dann wahr bzw. falsch ist, wenn die Zahl $\Phi(r, s, m)$ die Eigenschaft $G(x)$ aufweist bzw. nicht aufweist.

S. Ruziewicz: „Über ein Mengensystem".

Die Konstinuumhypothese ist dem folgenden Satze äquivalent: *Es gibt ein System von abzählbaren Mengen reeller Zahlen, mit der Eigenschaft, daß die Summe beliebiger unabzählbar vieler Mengen dieses Systems alle reelle Zahlen enthält.*

S. Ruziewicz: „Über mehrfache Separierbarkeit von Mengen" [Sur la séparabilité multiple des ensembles, Fund. Math. 24 (1935)].

24. XI. Mazur und W. Orlicz: „Über rationale Operationen" [Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen. Zweite Mitteilung, Studia Math. 5 (1934)].

J. Schauder: „Elliptische Differentialgleichungen mit stetigen Koeffizienten" [Sur les équations linéaires du type elliptique à coefficients continus, Sur les équations quasilinéaires du type elliptique à coefficients continus, C. R. Acad. Sci. Paris 199 (1934)].

10. XII. H. Auerbach: „Über ein schwimmende Körper betreffendes Problem“.

Im Anschluß an eine von Herrn S. Ulam gestellte Frage wird folgendes Problem behandelt: Es ist die Klasse K_g aller Querschnitte der homogenen Zylinder, die bei der Dichte g in jeder durch das Archimedische Gesetz zugelassenen Lage, bei der die Erzeugenden zum Wasserspiegel parallel sind, sich im Gleichgewicht befinden, zu charakterisieren. Ref. beweist: *Eine konvexe Kurve C, die kein Kreis ist, gehört der Klasse $K_{\frac{1}{2}}$ dann und nur dann, wenn C keinen Mittelpunkt besitzt und jede Sehne, die den Inhalt des von C begrenzten Gebietes halbiert, zugleich auch die Länge von C halbiert; es gibt auch Kurven, die zur Klasse $K\frac{1}{2}$ angehören, ohne konvex zu sein.* Das Problem, ob es für $g \neq \frac{1}{2}$ vom Kreise abgesehen noch andere Kurven in der Klase K_g gibt, bleibt offen.

État
de la Société Polonaise de Mathématique à la fin de l'année 1934.

Président: M. S. Mazurkiewicz.
Vice-Présidents: MM. S. Banach et S. Zaremba.
Secrétaire: M. T. Ważewski.
Vice-Secrétaires: MM. R. Dniestrzański et S. Turski.
Trésorier: M. S. Gołąb.
Autres Membres du Bureau: MM. A. Hoborski, A. Rosenblatt et W. Wilkosz.
Commission de Contrôle: M^{me} Wilkosz et MM. Chwistek et Vetulani.

Il existe quatre sections de la Société, l'une à Lwów, présidée par M. S. Banach, la seconde à Varsovie, présidée par M. S. Mazurkiewicz, la troisième à Poznań, présidée par M. Z. Krygowski, la quatrième à Wilno, présidée par M. J. Rudnicki.

Liste des Membres de la Société.

Malgré le soin avec lequel cette liste a été établie, certaines fautes ont pu s'y glisser; MM. les Membres sont priés instamment de vouloir bien envoyer les rectifications au Secrétaire (Cracovie, rue Gołębia 20, Institut de Mathématique) et de le prévenir de tous les changements d'adresse.

Abrévations: L — membre de la Section de Lwów, Wa — membre de la Section de Varsovie, P — membre de la Section de Poznań, Wl — membre de la Section de Wilno. Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels.

Abramowicz Kazimierz Doc. Dr. (P), Poznań, ul. Wyspiańskiego 15.
Archibald R. C. Prof. Dr. (Wa), Providence R. I. (U. S. A.), Brown. University.
Aronszajn Natan Dr. (Wa), Warszawa, ul. Nowolipki 43, m. 7.
Auerbach Herman Dr. (L), Lwów, ul. Konopnickiej 6.
Banach Stefan Prof. Dr. (L), Lwów, ul. św. Jacka 22.
Banachiewicz Tadeusz Prof. Dr., Kraków, Obserwatorjum Astronomiczne, ul. Kopernika 27.
Baran Jan, Toruń, Gimnazjum Męskie, Małe Garbary.
Barnett I. A. Prof. Dr., Cincinnati (Ohio, U. S. A.), University.
Bartel Kazimierz Prof. Dr. (L), Lwów, Politechnika.
Bary Nina Prof. Dr. (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Pokrowka 29, kw. 22.
Bergman Stefan Prof. Dr. (Wa), Tomsk (U. R. S. S.), Uniwersytet, Instytut Matem. i Mech., Temiriazewski 3.
Bessaga Mieczysław Inż., Lwów, Aleja Foch'a III, Dom Kolejowy.
Białobrzeski Czesław Prof. (Wa), Warszawa, Akademicka 3 m. 13.
Bielecki Adam Dr., Kraków, Syrokomli 17.
Biernacki Mieczysław Prof. Dr. (P), Poznań, Uniwersytet, Seminarjum Matematyczne, Collegium Majus, Zamek, Sala Nr. 6.
Birkenmajer Aleksander Doc. Dr., Kraków, Uniwersytet.
Birnbaum Zygmunt Dr. (L), Lwów, ul. św. Anny 1.
Blumenfeld Izydor Inż. Dr. (L), Lwów, ul. Kąpielna 6.
Borsuk Karol Dr. (Wa), Warszawa, Seminarjum Matem., Oczki 3.
Bouligand Georges Prof. Dr., Poitiers (Vienne, France), 50, rue Renaudot.
Böttcher Łucjan Doc. Dr. (L), Lwów, ul. Sadowa 4.
Brablec Franciszek, Kraków, ul. Pierackiego 4.
Braunówna Stefanja Mr. (Wa). Warszawa, Marszałkowska 91.
Burstin Celestin Dr. (L), Institut mathématique de l'Université de Minsk (U. R. S. S.).
Cartan Elie Prof. Dr., Le Chesnay (Seine-et-Oise, France), 27, Avenue de Montespan.

Chromiński Antoni (Wa), Warszawa. Politechnika, Wydział Inżynierji Lądowej.
Chwistek Leon Prof. Dr. (L), Lwów, Uniwersytet.
Cwojdziński Kazimierz Dr. (P), Poznań, Grunwaldzka, Hotel Polonja.
Czernik Tadeusz Mr. (Wl), Wilno, Wiwulskiego 13.
Čech Eduard Prof. Dr., Brno, ul. Nova 49.
Delsarte Jean, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences, 35, rue Saint-Michel, Nancy (Meurthe-et-Moselle, France).
Denizot Alfred Prof. Dr. (P), Poznań, Kolejowa.
Dickstein Samuel Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 117.
Dniestrzański Roman Mr., Kraków, ul. Łobzowska 15.
Dobrzycki Stanisław Mr. (P), Poznań, Matejki 53.
Dollon Jean, Prof. de Mathématiques spéciales, Lycée Poincaré, Nancy (Meurthe-et-Moselle, France).
Durand Georges, Bourges (Cher, France), 3, rue Pasteur.
Dziewulski Wacław Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 21.
Dziewulski Władysław Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 23.
Dziwiński Placyd Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Kleinowska 3.
Eilenberg Samuel Mr. (Wa), Warszawa, Twarda 11.
Fijoł Kazimierz, Kraków-Podgórze, ul. Józefińska 31.
Flamant Paul Prof. Dr., Strasbourg (Bas-Rhin, France), 35, rue Schweighauser.
Garcia Godofredo Prof. Ing. (Wa), Lima (Peru) Apartodo 1979.
Godeaux Lucien Prof. Dr., Liège (Belgique), 75 rue Frédéric Nyst.
Gołąb Stanisław Doc. Dr., Kraków, Akademja Górnicza.
Grabowski Lucjan Prof. Dr. (L), Lwów, Politechnika.
Greniewski Henryk Dr. (Wa), Warszawa, ul. Opaczewska 54 m. 12.
Gruder Henryk Dr. (L), Lwów, ul. Kopernika 14.
Grużewska Halina Dr. (Wa), Warszawa, ul. Natolińska 8.
Grużewski Aleksander Dr. (Wa), Warszawa, ul. Natolińska 8.
Härlen Hasso Dr., Merseburg (Allemagne), Gutenbergstraße 8.
Hoborski Antoni Prof. Dr., Kraków, ul. Jabłonowskich 6.
Hossiasson Janina Dr. (Wa), Warszawa, ul. Trębacka 6 m. 5.
Huber Maksymiljan Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 75, dom A.
Hurewicz Witold Doc. Dr. (Wa), Amsterdam (Hollande), Université.
Infeld Leopold Doc. Dr., Lwów, ul. Długosza 8.
Janet Maurice, Prof. Dr. Caen (Calvados, France), 7, rue de la Délivrande.

Janik Wincenty, Kraków, ul. Pierackiego, Gimnazjum.
Jantzen Kazimierz Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Wielka 24.
Kaczmarz Stefan Doc. Dr. (L), Lwów, Politechnika.
Kalandyk Stanisław Prof. Dr. (P), Poznań, ul. Słowackiego 29.
Kalicun-Chodowicki Bazyli Dr. (L), Lwów, ul. Kubali 4.
Kampé de Fériet Joseph Prof. Dr., S. P., Lille (Nord, France), 16, rue des Jardins.
Kempisty Stefan Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 24 m. 5.
Kerner Michał Dr. (Wa), Warszawa, ul. Pańska 20 m. 17.
Klawekówna Stefanja (P), Poznań, ul. Młyńska 11.
Kline J. R. Prof. Dr. (Wa), Philadelphia (U. S. A.), University of Pensylvania.
Knaster Bronisław Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Narbuta 9 m. 3.
Kobrzyński Zygmunt Dr., (Wa), Pruszków, ul. Graniczna 4.
Kołodziejczyk Stanisław Mr. (Wa), Warszawa, Szkoła Główna Gosp. Wiejskiego, Zakład Statystyki, Miodowa 23.
Koźniewski Andrzej Mr. (Wa), Warszawa, Hoża 61.
Krygowski Zdzisław Prof. Dr. (P), Poznań, Marszałka Foch'a 54, II p.
Krzyżański Mirosław Mr. (Wl), Drohiczyn n/Bugiem, Warszawska 43.
Kuratowski Kazimierz Prof. Dr. (Wa), Warszawa, Polna 72 m. 10.
Kwietniewski Stefan Dr. (Wa), Warszawa, ul. Oczki 3, Seminarjum Matematyczne U. W.
Labrousse Léon. Prof., 7, rue Léon Vaudoyer, Paris (7°) (France).
Lainé Edouard Prof. Dr., Angers (Maine-et-Loire, France), 3 rue de Rabelais.
Leja Franciszek Prof. Dr. (Wa), Warszawa, Koszykowa 75 m. 16.
Leśniewski Stanisław Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Brzozowa 12.
Leśnodorski Gustaw, Kraków, ul. Sobieskiego 10.
Levi-Civita Tullio Prof. Dr., Roma 25 (Italie), via Sardegna 50.
Lichtenberg Władysław (L), Lwów, Wulecka Droga 78.
Lindenbaum Adolf Dr. (Wa), Warszawa, ul. Złota 45 m. 4.
Loria Stanisław Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Sykstuska 37.
Łomnicki Antoni Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Kosynierska 18.
Łomnicki Zbigniew (Wa), Warszawa, ul. Berezyńska 37.
Łukasiewicz Jan Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Brzozowa 12.
Łuzin Nikołaj Prof. Dr. (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Arbat 25/8.
Maksymowicz Adam Dr. (L), Lwów, ul. Batorego 5.
Mandelbrojt S., Prof. Dr., Clermond-Ferrand (Puy-de-Dôme, France), Université.

Marconi Andrzej (P), Poznań, ul. Libelta 3.
Matulewicz Konstanty (Wl), Wilno, Witoldowa 53—39.
Mazur Stanisław Dr. (L), Lwów, Kętrzyńskiego 17.
Mazurkiewicz Stefan Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Oboźna 11.
Menger Karl Prof. Dr. (Wa), Wien IX, Fruchthallergasse 2.
Mieńszow Dimitrij Prof. Dr. (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Dievitchie Pole, Bojeninowski per. 5 kw. 14.
Montel Paul Prof. Dr. (L), Paris.
Moore R. L. Prof. Dr. (Wa), Austin (U. S. A.), University of Texas.
Moroń Władysław, Katowice.
Napadiewiczówna Zofja (L), Lwów, ul. Bonifratrów 8.
Spława-Neyman Jerzy Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Kopernika 11, m. 6.
Nikliborc Władysław Doc. Dr. (L), Lwów, ul. Listopada 44 a.
Nikodym Otton Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 53, m. 35.
Nikodymowa Stanisława Dr. (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 53, m. 35.
Ohrenstein Szymon, Drohobycz. I. pryw. Gimnazjum żeńskie.
Orlicz Władysław Dr. (L), Lwów, ul. Kopcowa 3.
Orłowski Józef (P), Poznań, ul. Matejki 44.
Otto Edward Mr. (L), Lwów, Grodecka 131.
Pareński Aleksander Dr. (L), Lwów, ul. Szeptyckich 10.
Patkowski Józef Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Nowogrodzka 22.
Pearson Egon Sharpe Dr., London W. C. 1, University College Galton Laboratory.
Pearson Karl Prof. Dr., London W. C. 1, University College.
Plamitzer Antoni Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Gipsowa 32.
Popruženko Jerzy Dr. (Wa), Warszawa, ul. Rozbrat 32, m. 7.
Posament Tadeusz Mr. (L), Lwów, Krasickich 11.
Prasad Gonesh Prof. Dr. (Wa), Calcutta (East India) Samavaya Manshions 2 Corporation str.
Przeborski Antoni Prof. Dr. (Wa), Warszawa, Nowy Zjazd 5.
Rajchman Aleksander Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Zajęcza 7 m. 9.
Rosenblatt Alfred Prof. Dr., Kraków, ul. Radziwiłłowska 35.
Rozental Stefan Dr., Łódź, ul. Nawrot 4.
Rozmus Antoni, Piotrków, Gimnazjum Państwowe.
Rudnicki Juljusz Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 11, Seminarjum Matematyczne U. S. B.
Ruziewicz Stanisław Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Supińskiego 11.
Sabatowska Walerja (L), Lwów, ul. Zielona, Gimn. Strzałkowskiej.

Saks Stanisław Doc. Dr. (Wa), Warszawa, Krasińskiego 16 m. 94.
Schauder Juljusz Doc. Dr. (L), Lwów, ul. Leśna 7.
Scheybal Adolf, Gimnazjum Państwowe, Wadowice.
Schreier Józef (L), Drohobycz, Bednarska 8.
Sedlak Stefan, Kraków, ul. św. Wawrzyńca 30.
Seipeltówna Lidja Dr. (P), Poznań, ul. Grunwaldzka 14.
Sergesco Pierre Prof. Dr., Cluj (Roumanie), Seminar matematic universital.
Sieczka Franciszek Ks. Dr. (Wa), Płock, Seminarjum Duchowne.
Sierpiński Wacław Prof. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 73.
Smosarski Władysław Prof. Dr. (P), Golęcin.
Sokół-Sokołowski Konstanty Mr. (Wl), Wilno, Zamkowa 11, Seminarjum Matematyczne U. S. B.
Stamm Edward Dr., Kraków, ul. Pawła Popiela.
Stankiewicz Ksawery Inż., Kraków, ul. Długa 50.
Starosolska - Szczepanowska Zofja (L), Chełmno, Korpus Kadetów Nr. 2.
Steckel Samuel Dr. (Wa), Białystok, Gimnazjum.
Steinhaus Hugo Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Kadecka 14.
Sternbach Ludwik, Lwów, (L), Leona Sapiehy 5a.
Stożek Włodzimierz Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Nabielaka 55a.
Straszewicz Stefan Prof. Dr. (Wa), Warszawa, 6 Sierpnia 46, m. 14.
Szczeniowski Szczepan Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Długosza 8.
Szczepanowski Karol Mjr. (L), Chełmno, Korpus Kadetów Nr. 2.
Szmuszkowiczówna Hanna Mr. (Wa), Warszawa, Kupiecka 8.
Szpilrajn Edward Dr., (Wa), Warszawa, Al. Ujazdowska 32, m. 9.
Szymański Piotr Dr. (Wa), Warszawa, Instytut Aerodynamiczny, Nowowiejska 50.
Ślebodziński Władysław Dr. (P), Poznań, ul. Chełmońskiego 4.
Tamarkin J. D. Prof. Dr. (Wa), Providence R. I. (U. S. A.), Brown. University.
Tarski Alfred Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 51.
Titz Henryk Dr., Kraków, ul. św. Tomasza 27.
Turowicz Andrzej Mr., Kraków, ul. Sobieskiego 7.
Turski Stanisław Dr., Kraków, ul. Mickiewicza 49.
Ulam Stanisław Dr. (L), Lwów, ul. Kościuszki 16.
Urbański Włodzimierz Dr., Pionki, P. W. P. Laboratorjum centralne.
Vetulani Kazimierz Inż., Kraków, ul. Smoleńsk 14.
Walfisz Arnold Doc. Dr. (Wa), Radość p. Warszawą, Jasna 11.

Waraszkiewicz Zenon Dr. (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 69 m. 10.
Ważewski Tadeusz Prof. Dr., Kraków, Uniwersytet.
Weigel Kasper Prof. Dr. (L), Lwów, Politechnika.
Weinlösówna Sala Dr. (L), Lwów, ul. Klonowicza 18.
Weyssenhoff Jan Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Zygmuntowska 20.
Węgrzynowicz Leopold, Kraków, ul. Krowoderska 74.
Whyburn G. T. Dr., Austin (Texas, U. S. A.).
Wilk Antoni Dr., Kraków, ul. Wybickiego 4.
Wilkosz Witold Prof. Dr., Kraków, ul. Zyblikiewicza 5/7.
Wilkoszowa Irena Mr., Kraków, ul. Zyblikiewicza 5/7.
Witkowski Józef Prof. Dr. (P), Poznań, ul. Palacza 64.
Wolibner Witold Dr. (Wa), Warszawa, Instytut Aerodynamiczny, Nowowiejska 50.
Wundheiler Aleksander Dr. (Wa), Warszawa, ul. Pawia 39.
Zakrocki Stanisław, Kraków, ul. Smoleńsk 21.
Zalcwasser Zygmunt Dr. (Wa), Warszawa, ul. Leszno 51.
Zarankiewicz Kazimierz Doc. Dr. (Wa), Warszawa, ul. 6 Sierpnia 27.
Zaremba Stanisław Prof. Dr., Kraków, ul. Żytnia 6.
Zaremba Stanisław Krystyn Dr. (Wl), Wilno, ul. Wielka 17, m. 13.
Zarycki Miron (L), Lwów, ul. Dwernickiego 32 a.
Zawirski Zygmunt Prof. Dr. (P), Poznań, ul. Focha 68.
Zermelo E. Prof. Dr. (Wa), Freiburg i. B. Karlstr. 60.
Zygmund Antoni Prof. Dr. (Wl), Wilno, ul. Wielka 24, m. 17.
Zygmundowa Irena (Wl), Wilno, Wielka 24, m. 17.
Żorawski Kazimierz Prof. Dr. (Wa), Warszawa, Nowy-Zjazd 5.
Żyliński Eustachy Prof. Dr. (L), Lwów, ul. Supińskiego 11.

Membres dont les adresses manquent.

Babski Bohdan.
Bogucki Władysław.
Chmiel Juljan Dr.
Dehryng Bohdan Dr.
Długowski Gerhard.
Kaszycki Ludwik Inż.
Majewski Władysław (L)
Ostrzeniewski Ludwik.
Sobaczek Jan.
Włodarski Franciszek Dr.

Liste des publications périodiques avec lesquelles la Société polonaise de Mathématique échange ses Annales.

1. Acta litterarum et scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae (Sectio scientiarum mathematicarum), Szeged (Hongrie).
2. Abhandlungen des Mathematischen Seminars der Universität in Hamburg, Hamburg (Allemagne).
3. Bulletin de la Société Mathématique de France et Comptes Rendus des Séances, Paris (France).
4. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, Calcutta (Indes).
5. Annales scientifiques de l'Université de Jassy, Jassy (Roumanie).
6. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Berlin (Allemagne).
7. Monatshefte für Mathematik und Physik, Wien (Autriche).
8. Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg, Strasbourg (Bas-Rhin, France).
9. Rendiconti del Seminario Matematico della Facoltà di Scienze della R. Università di Roma, Roma (Italie).
10. Bulletin Scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara, Timişoara (Roumanie).
11. Contributions al Estudio de las Ciencias Fisicas y Matematicas, La Plata (Argentine).
12. Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, Brno, (Tchécoslovaquie).
13. Fundamenta Mathematicae, Warszawa.
14. Prace Matematyczno-Fizyczne, Warszawa.
15. Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Zürich (Suisse).
16. Annals of Mathematics, Princeton (New-Jersey, U. S. A.).
17. Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, Toulouse (Haute-Garonne, France).
18. Transactions of the American Mathematical Society, New-York City (U. S. A.).
19. Journal de l'Ecole Polytechnique, Paris (France).
20. Revue semestrielle des publications mathématiques, Amsterdam (Hollande).
21. Wiskundige opgaven met de Oplosingen, Amsterdam (Hollande).

22. Nieuw Archief voor Wiskunde, Amsterdam (Hollande).
23. Journal de la Société Physico-mathématique de Léningrade, Leningrad (U. R. S. S.).
24. Journal of the Faculty of Science, Imperial University of Tokyo, Tokyo (Japon).
25. Thèses soutenues devant la Faculté des Sciences de l'Université de Bâle, Basel (Suisse).
26. Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine, Bucuresti (Roumanie).
27. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Louvain (Belgique).
28. Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München (Allemagne).
29. Scripta universitatis atque bibliothecae Hierosolymitanarum, Jerusalem (Palestine).
30. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Edinburgh (Ecosse).
31. Archives Néerlandaises exactes et naturelles, Harlem (Hollande).
32. Communications de la Société Mathématique de Kharkow, Kharkow (U. R. S. S.).
33. Revista Matemática Hispano-Americana, Madrid (Espagne).
34. Koniklijke Akademie van Wetenschappen (publications), Amsterdam (Hollande).
35. Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, Hamburg (Allemagne).
36. Unterrichtsblätter für Mathematik u. Naturwissenschaften, Stuttgart (Allemagne).
37. Proceedings of the London Mathematical Society, London (Angleterre).
38. Revista de la Academia de Ciencias Exactas, Fisico-Quimicas y Naturales, Madrid (Espagne).
39. Proceedings of the Philosophical Society, Cambridge (Angleterre).
40. Norsk Matematisk Tidsskrift,
    Norsk matematisk Forenings Skrifter, Oslo (Norvège).
41. Bulletin de la Classe de Sciences de l'Académie Royale des Sciences, Bruxelles (Belgique).
42. Mitteilungen des Mathematischen Seminars der Universität Giessen, Giessen (Allemagne).

43. Commentationes Physico-Mathematicae, Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Helsingfors (Finlande).
44. Matematisk Tidsskrift, Copenhague (Dannemark).
45. Bulletin de la Société Physico-Mathématique de Kazan, Kazan (U. R. S. S.).
46. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Heidelberg (Allemagne).
47. The Tôhoku Mathematical Journal, Sendai (Japon).
48. Sitzungsberichte der Naturforscher Gesellschaft bei der Universität Tartu, Tartu (Esthonie).
49. Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse, Leipzig (Allemagne).
50. The Mathematical Gazette, London (Angleterre).
51. Proceedings of the Benares Mathematical Society, Benares (Indes).
52. Annual report of the Smitsonian Institution, Washington (U. S. A.).
53. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Edinburgh (Ecosse).
54. Akademja Górnicza (publications), Kraków.
55. Bulletin mathématique de la Société Roumaine des Sciences, Bucuresti (Roumanie).
56. Mémoires de la Société Royale de Liège, Liège (Belgique).
57. Recueil de la Société Mathématique de Moscou, Moskwa (U. R. S. S.).
58. Journal of Mathematics and Physics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge (Mass., U. S. A.).
59. Bolletin del Seminario Matemático Argentino, Buenos Aires (Argentine).
60. Procès verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux, Bordeaux (Gironde, France).
61. Studia Mathematica, Lwów.
62. Časopis pro pěstováni Matematiky a Fysiky, Praha (Tchécoslovaquie).
63. Mathematica, Cluj (Roumanie).
64. Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, Milano (Italie).
65. Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova, Padova (Italie).

66. Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique de Bucarest, Bucuresti (Roumanie).
67. Prace geofizyczne, Warszawa.
68. Annali della R. Scuola Normale Superiora di Pisa, Pisa (Italie).
69. Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze della R. Università di Cagliari, Cagliari (Italie).
70. Statistica, Warszawa.
71. Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade, Beograd (Yougoslavie).
72. Bulletin de la Société Mathématique de Grèce, Athènes (Grèce).
73. Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Liège (Belgique).
74. Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Sapporo (Japon).
75. Académie des Sciences d'Ukraine, Kyiv (Kieff, U. R. S. S.):
    Journal du cycle Mathématique.
    Bulletin de la Classe de Sciences Naturelles et Techniques.
    Mémoires de la Classe des Sciences Physiques et Mathématiques.
76. Annales de l'Institut Henri Poincaré, Paris (France).
77. Thèses soutenues devant l'Université d'Uppsala, Uppsala (Suède).
78. Meddelanden från Lunds Universitets Matematiska Seminarium, Lund (Suède).

Table des matières.