

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

**ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE  
DE MATHÉMATIQUE**

FONDÉES EN 1921 par STANISŁAW ZAREMBA

Rédacteur FRANCISZEK LEJA

Membres de la Rédaction

STANISŁAW GOŁĄB

TADEUSZ WAŻEWSKI

Rédacteur des Comptes Rendus de la Société

KAROL BORSUK

**TOME XXI**

ANNÉE 1948, FASCICULE II

Dédié à

**M. WACŁAW SIERPIŃSKI**

à l'occasion de son Jubilé

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA OŚWIATY

KRAKOW 1949

INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO  
UL. ŚW. JANA 22

## Avis

Les tomes des Annales de la Société Polonaise de Mathématique paraissent en un ou en deux fascicules par an. Les manuscrits doivent être envoyés à l'une des adresses:

F. Leja, Kraków (Pologne), ul. Łobzowska 61.

T. Ważewski, Kraków (Pologne), ul. Starowiślna 77.

S. Gołąb, Kraków (Pologne), ul. Łobzowska 61.

Les auteurs ont le droit à 50 tirages à part gratuitement.

Pour ce qui concerne l'achat et l'échange de ces Annales s'adresser à:

Administration des Annales de la Société de Mathématique

Kraków (Pologne), ul. św. Jana 22.

Les membres de la Société Polonaise de Mathématique ont le droit d'abonner le périodique américain »*Mathematical Reviews*« à un pris modéré de \$ 6,50 par an.

## Table des matières

	Page
M. Picone. Intorno alla teoria di una classica equazione a derivate parziali della Fisica-Matematica .....	161
F. Leja. Remarques sur le travail précédent .....	170
K. Menger. Stieltjes integrals considered as lengths .....	173
J. H. C. Whitehead. The homotopy type of a special kind of polyhedron .....	176
A. Denjoy. Quelques propriétés des ensembles rangés .....	187
A. Hlavatý. Théorie d'immersion d'une $W_m$ dans $W_n$ .....	196
M. Fréchet. Sur l'estimation statistique .....	207
V. Jarník. Sur la symétrie des nombres dérivés approximatifs .....	214
C. Kuratowski. Sur la notion de limite topologique d'ensembles .....	219
S. Gołąb. Espace pourvu d'une métrique définie au moyen de l'écart triangulaire et les espaces métriques généralisés .....	226
M. Morse. L-S-homotopy classes of locally simple curves .....	236
K. Borsuk. On topological approximation of polytopes .....	257
T. Ważewski. Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles tangentes aux hyperplans caractéristiques issues du point singulier .....	277
S. Jaśkowski. Une modification des définitions fondamentales de la géométrie des corps de M. A. Tarski .....	298
K. Borsuk. Correction à mon travail „Sur la courbure totale des courbes fermées“ .....	302
O. Taussky and J. Todd. Covering theorems for groups .....	303
Z. Zahorski. Sur la classe de Baire des dérivées approximatives d'une fonction quelconque .....	306
A. Marchaud. Sur les ovales .....	324
R. Sikorski. A theorem on extension of homomorphisms .....	332
E. Marczewski. Sur l'isomorphie des relations et l'homéomorphie des espaces .....	336
Comptes Rendus de la Société Polonaise de Mathématique 1. II. 1948 — 30. VI. 1948 .....	343
Errata to the paper: On a theorem of Hadamard (pages 52-69, fasc. I of this volume) .....	357

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

**ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE  
DE MATHÉMATIQUE**

FONDÉES EN 1921 par STANISŁAW ZAREMBA

Rédacteur FRANCISZEK LEJA

Membres de la Rédaction

STANISŁAW GOŁĄB

TADEUSZ WAŻEWSKI

**TOME XXI**

ANNÉE 1948, FASCICULE I

Dédié à

**M. WACŁAW SIERPIŃSKI**

à l'occasion de son Jubilé

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA OŚWIATY

Biblioteka Jagiellońska



1003047100

**KRAKÓW 1948**

**INSTYTUT MATEMATYCZNY, UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO  
UL. SW. JANA 22**

403653

II

087101



21(1948)

087101

Podpisano do druku: 10. 9. 1948

Nakład 600 egzemplarzy

Arkuszy 10<sup>1</sup>/<sub>4</sub> + wklejka

Papier offset nr 227, V kl. 70×100, 95 g

Państwowe Poznańskie Zakłady Graficzne — Okręg Północ — Zakład Główny 1104







Wacław Serpiński

*Dédié à Monsieur*

*Wacław Sierpiński*

*Orgueil de la Mathématique Polonaise*

*Un des fondateurs de l'Ecole Mathématique de Pologne*

*Meilleur Maître et Ami de ses élèves*

*à l'occasion de son Jubilé scientifique.*







# SUR UNE PROPRIÉTÉ DES SUITES DE POLYNOMES

par

F. LEJA (Kraków)

1. Soit  $\{P_n(z)\}$  une suite des polynomes de la forme  
(1)  $P_n(z) = a_0^{(n)} z^n + a_1^{(n)} z^{n-1} + \dots + a_n^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$   
C un continu quelconque et  $z_0$  un point de C. J'ai démontré ailleurs<sup>1)</sup> que:

I. Si une suite (1) satisfait sur C à l'inégalité

$$|P_n(z)| \leq M, \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots, z \in C,$$

où  $M$  est un nombre positif fixe<sup>2)</sup>, alors quel petit que soit  $\varepsilon > 0$  la suite

$$\frac{P_n(z)}{(1+\varepsilon)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

est uniformément bornée dans un voisinage du point  $z_0$  (ce voisinage pouvant dépendre de  $\varepsilon$ )

Supposons maintenant que la suite (1) satisfasse sur C à une inégalité opposée

$$(2) \quad |P_n(z)| \geq M, \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots, z \in C,$$

où  $M$  est un nombre positif et demandons si à chaque  $\varepsilon > 0$  on peut faire correspondre un nombre positif  $\eta = \eta(\varepsilon)$  tel que les inégalités

$$(3) \quad |P_n(z)| (1 + \varepsilon)^n \geq \eta, \quad n = 1, 2, \dots,$$

soient satisfaites dans un voisinage du point  $z_0$ ?

La réponse est négative comme le prouve l'exemple suivant:

<sup>1)</sup> Mathem. Annalen, t. 108 (1933), p. 517—524.

<sup>2)</sup> Le théorème reste vrai dans le cas où  $M$  varie avec  $z$  parcourant C,  $M = M(z)$ , et même dans le cas où l'inégalité  $|P_n(z)| \leq M(z)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , n'est satisfaite que presque partout sur C (loc. cit.).

$$R_n(z) = \frac{(1+z)\left(\frac{1}{2}+z\right)\dots\left(\frac{1}{n}+z\right)}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)\dots\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}, \quad n=1, 2, \dots$$

Cette suite satisfait sur le demi-axe réel nonnégatif à l'inégalité  $|R_n(z)| \geq 1$ ,  $n=1, 2, \dots$ , tandis que les inégalités

$$|R_n(z)|(1+\varepsilon)^n \geq \eta, \quad n=1, 2, \dots$$

ne sont satisfaites dans aucun voisinage du point  $z=0$  quel petit que soit  $\eta > 0$  et quel grand que soit  $\varepsilon > 0$ .

2. Néanmoins je vais démontrer que:

II. Si la condition (2) est remplie sur un continu  $C$  et s'il existe un voisinage  $|z-z_0| < \delta$  d'un point  $z_0$  de ce continu tel que

$$(4) \quad P_n(z) \neq 0 \quad \text{pour } |z-z_0| < \delta, \quad n=1, 2, \dots,$$

alors à chaque  $\varepsilon > 0$  on peut faire correspondre un nombre  $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$  tel que les inégalités (3) soient satisfaites dans un voisinage du point  $z_0$ .

Démonstration. 1° Je dis d'abord qu'il existe deux nombres  $A > 0$  et  $B > 0$  tels que les inégalités

$$(5) \quad |P_n(z)|(1+A)^n \geq B, \quad n=1, 2, \dots$$

ont lieu dans un voisinage du point  $z_0$ .

En effet, désignons par  $m = m(n)$  le degré du polynome  $P_n(z)$ . D'après l'hypothèse on a  $0 \leq m \leq n$ . Si  $m=0$  on a, d'après (2),  $|P_n(z)|(1+A)^n \geq M$  pour chaque  $z$  et chaque  $A \geq 0$ . Si  $m > 0$  posons

$$P_n(z) = c_m(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_m).$$

Puisque  $P_n(z) \neq 0$  dans le cercle  $|z-z_0| < \delta$ , on a  $|z_i - z_0| \geq \delta$  pour  $i=1, 2, \dots, m$ . D'autre part, d'après (2) on a  $|P_n(z_0)| \geq M$ , donc

$$|c_m| \geq \frac{M}{|(z_0-z_1)(z_0-z_2)\dots(z_0-z_m)|}$$

et par suite quel que soit  $z$

$$|P_n(z)| \geq M \cdot \left| \frac{z-z_1}{z_0-z_1} \cdot \frac{z-z_2}{z_0-z_2} \dots \frac{z-z_m}{z_0-z_m} \right|.$$

Mais, si  $|z - z_0| < \frac{1}{2}\delta$  on a  $|z - z_0| < \frac{1}{2}|z_i - z_0|$  pour  $i = 1, 2, \dots, m$ , donc si  $|z - z_0| < \frac{1}{2}\delta$

$$\left| \frac{z - z_i}{z_0 - z_i} \right| = \left| 1 - \frac{z_0 - z}{z_0 - z_i} \right| \geq 1 - \left| \frac{z - z_0}{z_i - z_0} \right| > \frac{1}{2}$$

et par suite

$$|P_n(z)| \geq M \left(\frac{1}{2}\right)^m \geq M \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Les inégalités (5) sont donc satisfaites au moins dans le voisinage  $|z - z_0| < \frac{1}{2}\delta$  pour  $A = 1$  et  $B = M$ .

2° Supposons que les inégalités (5) soient satisfaites dans un cercle

$$(6) \quad |z - z_0| < r.$$

La fonction  $1/P_n(z)$  est développable dans ce cercle en une série entière

$$(7) \quad \frac{1}{P_n(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} \cdot (z - z_0)^k, \quad n = 1, 2, \dots$$

Puisque

$$\left| \frac{1}{P_n(z)} \right| \leq \frac{(1+A)^n}{B}, \quad \text{pour } |z - z_0| < r, \quad n = 1, 2, \dots$$

on a d'après les formules classiques de CAUCHY

$$(8) \quad |a_k^{(n)}| \leq \frac{(1+A)^n}{B r^k}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad n = 1, 2, \dots$$

Partageons la somme (7) en deux sommes

$$\frac{1}{P_n(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} \cdot (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^n + \sum_{k=n+1}^{\infty}$$

et désignons par  $Q_n(z)$  le polynome

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} \cdot (z - z_0)^k.$$

En vertu de (8) on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^{(n)} \cdot (z - z_0)^k &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(1+A)^n}{B} \cdot \frac{|z - z_0|^k}{r^k} = \\ &= \frac{(1+A)^n}{B} \cdot \frac{|z - z_0|^{n+1}}{r^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|z - z_0|}{r}} \end{aligned}$$

donc

$$|Q_n(z)| \leq \frac{1}{|P_n(z)|} + \frac{|z-z_0|}{Br} \cdot \left\{ \frac{(1+A)|z-z_0|}{r} \right\}^n \cdot \frac{1}{1 - \frac{|z-z_0|}{r}}$$

Mais, sur le continu  $C$  on a d'après (2)  $1:|P_n(z)| \leq 1:M$  donc sur la partie de  $C$  contenue dans le cercle

$$(9) \quad |z-z_0| \leq \frac{r}{1+A}$$

on a pour  $n=1, 2, \dots$

$$|Q_n(z)| \leq \frac{1}{M} + \frac{1}{(1+A)B} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+A}} = \frac{1}{M} + \frac{1}{AB}$$

On voit donc que la suite de polynomes  $\{Q_n(z)\}$  est uniformément bornée sur un continu passant par le point  $z_0$ . Or, en vertu du théorème I quel petit que soit  $\varepsilon > 0$  la suite  $Q_n(z) : (1+\varepsilon)^n$ ,  $n=1, 2, \dots$ , est uniformément bornée dans un voisinage du point  $z_0$ . Soient  $M_1 > 0$  et  $\varrho > 0$  deux nombres tels qu'on ait

$$\frac{|Q_n(z)|}{(1+\varepsilon)^n} \leq M_1 \quad \text{dans le cercle } |z-z_0| < \varrho.$$

Puisque

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^{(n)} \cdot (z-z_0)^k \right| \leq \frac{1}{AB} \quad \text{dans le cercle (9)}$$

et que

$$\frac{1}{P_n(z)} \cdot \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} = \frac{Q_n(z)}{(1+\varepsilon)^n} + \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^{(n)} \cdot (z-z_0)^k$$

dans le cercle (6), on a dans le plus petit des cercles

$$|z-z_0| < \frac{r}{1+A} \quad \text{et } |z-z_0| < \varrho \quad \text{l'inégalité}$$

$$\frac{1}{|P_n(z)|} \cdot \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \leq M_1 + \frac{1}{AB} = M_2$$

et par suite l'inégalité

$$|P_n(z)| (1+\varepsilon)^n \geq \frac{1}{M_2} \quad \text{pour } n=1, 2, \dots,$$

c. q. f. d.



3. Remarquons que les théorèmes I et II cessent d'être vrais dans le cas où les  $P_n(z)$  sont des fonctions analytiques quelconques régulières dans un domaine contenant le continu  $C$ . Ils cessent d'être vrais même dans le cas où les  $P_n(z)$  sont des polynomes des degrés quelconques.

En effet, désignons par  $D_n$  le domaine balayé par le cercle  $|z - x| < \frac{1}{n}$  lorsque son centre  $x$  parcourt le demi-axe réel négatif  $-\infty < x \leq 0$ , par  $C_n$  le cercle  $|z| < n$  et par  $R_n, S_n, T_n$  les trois domaines bornés définis par les formules

$$\begin{aligned} R_n &= C_n - \overline{D}_n, \\ S_n &= (D_{n+1} - \overline{D}_{n+2}) C_n, \\ T_n &= C_n \cdot D_{n+3}, \end{aligned}$$

où  $\overline{D}_n = D_n +$  la frontière de  $D_n$ . Les domaines  $R_n, S_n, T_n$  sont à connexion simple et chacun d'eux est extérieur aux autres.

Or, d'après les théorèmes connus de C. RUNGE et P. MONTEL, il existe un polynome  $P_n(z)$  remplissant les conditions suivantes

$$|P_n(z)| < \frac{1}{n} \quad \text{dans } R_n + T_n.$$

$$|P_n(z) - n^n| < \frac{1}{n} \quad \text{dans } S_n^1).$$

Il résulte de ces inégalités que, si  $n \rightarrow \infty$ , la suite  $\{P_n(z)\}$  tend vers zéro en chaque point du plan et que la convergence est uniforme dans chaque segment borné du demi-axe  $-x \leq 0$  et dans chaque domaine fermé et borné n'ayant aucun point commun avec ce demi-axe.

En particulier, cette suite est uniformément bornée dans le segment  $-1 \leq x \leq 0$ . Néanmoins il n'existe aucun voisinage du point  $z=0$  dans lequel la suite  $P_n(z) / (1+\varepsilon)^n$ ,  $n=1, 2, \dots$ , soit uniformément bornée car chaque cercle  $|z| < \delta$  contient des points du domaine  $S_n$  dès que l'indice

<sup>1)</sup> Le degré de  $P_n(z)$  peut maintenant surpasser  $n$ .

$n$  est suffisamment grand et dans ce domaine on a

$$|P_n(z)| > n^n - \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Pareillement le théorème II cesse d'être vrai lorsque les degrés des polynomes  $P_n(z)$  sont quelconques car dans ce cas les inégalités (5) ne peuvent pas être déduites des hypothèses du théorème.

Néanmoins, s'il existe deux nombres positifs  $A$  et  $B$  (quel grand que soit  $A$  et quel petit que soit  $B$ ) tels que la condition (5) soit remplie, alors le théorème II reste vrai dans le cas général, où les  $P_n(z)$  sont des fonctions analytiques quelconques régulières dans un domaine contenant le continu  $C$ . Cela résulte immédiatement du fait que dans la partie 2<sup>o</sup> de la démonstration du théorème II n'intervient que cette dernière hypothèse et les inégalités (2) et (5).

# SUR CERTAINS SYSTÈMES D'INÉGALITÉS DIFFÉRENTIELLES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

par

JACEK SZARSKI (Kraków).

Le but de la note présente est de généraliser, pour certains systèmes d'inégalités différentielles aux dérivées partielles du premier ordre, le résultat relatif à l'inégalité:

$$\frac{\partial u}{\partial x} > f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \text{ obtenu par M. M. NAGUMO.}^{1)}$$

J'envisage d'abord un système d'inégalités différentielles à une fonction inconnue, de la forme:

$$\frac{\partial z}{\partial x_\nu} > f_\nu\left(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right), \quad (\nu = 1, \dots, k).$$

et ensuite un système d'inégalités différentielles à plusieurs fonctions inconnues, de la forme:

$$\frac{\partial z_\nu}{\partial x} > f_\nu\left(x, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_k, \frac{\partial z_\nu}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z_\nu}{\partial y_n}\right), \quad (\nu = 1, \dots, k).$$

Je démontre aussi comment un théorème de M. A. HAAR <sup>2)</sup> relatif aux systèmes d'inégalités différentielles découle immédiatement des résultats que j'ai obtenus. J'en indique ensuite l'application pour évaluer la différence entre deux intégrales et pour démontrer l'unicité des solutions des certains systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre,

---

<sup>1)</sup> Mitio Nagumo: *Ueber die Ungleichung*  $\frac{\partial u}{\partial x} > f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ , Japanese Journal of Mathematics, t. XV, 1938, p. 51—56.

<sup>2)</sup> A. Ha ar, *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, 1928 (Bologne), t. III, p. 5—10.

**Théorème 1.** Considérons dans l'espace à  $k+n$  dimensions de points  $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n$ , l'ensemble borné défini par les inégalités:

$$(1) \quad \hat{x}_\nu \leq x_\nu < \hat{x}_\nu + a, \quad (a > 0); \quad B_\mu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) \geq 0$$

$$\nu = 1, \dots, k \qquad \mu = 1, \dots, 2n$$

où  $B_\mu$  sont des fonctions de classe  $C^1$  dans l'espace tout entier.

Les points de la frontière de l'ensemble (1) sont situés, par hypothèse, sur les plans  $x_\nu = \hat{x}_\nu$ , ( $\nu = 1, \dots, k$ ),  $x_\nu = \hat{x}_\nu + a$ , ( $\nu = 1, \dots, k$ ), ou bien sur un nombre fini, au plus égal à  $n$ , de surfaces  $B_\mu = 0$ .

Supposons que pour toute suite d'indices  $\mu_1, \dots, \mu_r$ , ( $1 \leq r \leq n$ ), et pour tout point  $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$  situé simultanément sur les  $r$  surfaces:

$$(2) \quad B_{\mu_\alpha}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r)$$

le rang de la matrice:

$$(3) \quad \left\| \frac{\partial B_{\mu_\alpha}}{\partial y_i} \right\|$$

$$\alpha = 1, \dots, r.$$

$$i = 1, \dots, n.$$

soit égal à  $r$ .

Supposons que les fonctions:

$$(4) \quad f_\nu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, u, q_1, \dots, q_n), \quad (\nu = 1, \dots, k)$$

soient définies dans un domaine  $D$  (de l'espace à  $2n+k+1$  dimensions) dont la projection sur l'espace de points  $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n$  recouvre l'ensemble (1).

Supposons ensuite que pour tout point  $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$  frontière de l'ensemble (1) vérifiant les équations (2) on ait les inégalités:

$$(5) \quad f_\nu(x_\sigma, y_j, u, q_j) - f_\nu\left(x_\sigma, y_j, u, q_j - \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha \frac{\partial B_{\mu_\alpha}}{\partial y_j}\right)$$

$$\geq \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha \frac{\partial B_{\mu_\alpha}}{\partial x_\nu}, \quad (\nu = 1, \dots, k)$$

où  $\lambda_\alpha \geq 0$  sont des nombres quelconques assujettis à la seule condition que le point:



(6)

$$x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, u, q_1 - \sum_{\alpha=1}^r \lambda_{\alpha} \frac{\partial B_{\mu\alpha}}{\partial y_1}, \dots, q_n - \sum_{\alpha=1}^r \lambda_{\alpha} \frac{\partial B_{\mu\alpha}}{\partial y_n}$$

appartienne au domaine  $D$ .

Soient  $u(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$  et  $v(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$  deux fonctions définies et possédant la différentielle totale en tout point de l'ensemble (1) et telles que leurs éléments de contact respectifs:

$$(7) \quad x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, u, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y_n}.$$

$$(8) \quad x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, v, \frac{\partial v}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial y_n}.$$

appartiennent au domaine  $D$ .

Supposons enfin qu'on ait dans l'ensemble (1), les inégalités suivantes:

$$(9) \quad u(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k, y_1, \dots, y_n) > v(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k, y_1, \dots, y_n)$$

$$(10) \quad \frac{\partial u}{\partial x_{\nu}} > f_{\nu}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, u, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y_n}) \quad (\nu=1, \dots, k).$$

$$(11) \quad \frac{\partial v}{\partial x_{\nu}} \leq f_{\nu}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, v, \frac{\partial v}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial y_n})$$

*Nous affirmons que, dans ces hypothèses, l'inégalité:*

$$(12) \quad u(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) > v(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$$

*est remplie dans l'ensemble (1) tout entier.*

**Démonstration.** Supposons, par impossible, que l'inégalité (12) ne soit pas vérifiée pour un certain point de l'ensemble (1).

Il existerait alors, en vertu de la continuité des fonctions  $u$  et  $v$  et d'après l'inégalité (9), un point  $\bar{P}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$  de l'ensemble (1) tel que:

$$(13) \quad u(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) = v(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$$

et que l'inégalité:

$$(14) \quad u(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) \geq v(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$$

soit remplie pour tout point de l'ensemble:

$$(15) \quad \begin{array}{l} \hat{x}_\nu \leq x_\nu \leq \bar{x}_\nu; \\ \nu = 1, \dots, k \end{array} \quad \begin{array}{l} B_\mu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) \geq 0. \\ \mu = 1, \dots, n. \end{array}$$

D'après (9) et (13), pour un indice  $\nu$  au moins, par exemple pour  $\bar{\nu}$ , on a l'inégalité:

$$(16) \quad \hat{x}_{\bar{\nu}} < \bar{x}_{\bar{\nu}}.$$

Nous allons distinguer deux cas:

**Cas 1<sup>er</sup>.** Le point  $\bar{P}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$  n'est situé sur aucune surface  $B_\mu = 0$ . Dans ce cas le point  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, y_1, \dots, y_n)$  appartient à l'ensemble (15) pourvu que le point  $(y_1, \dots, y_n)$  appartienne à un voisinage suffisamment petit du point  $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ . Donc, d'après (13) et (14), la différence:

$$(17) \quad u(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, y_1, \dots, y_n) - v(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, y_1, \dots, y_n)$$

considérée comme fonction à  $n$  variables  $y_1, \dots, y_n$ , possède un minimum au point intérieur  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ . Nous avons par conséquent:

$$(18) \quad \left( \frac{\partial u}{\partial y_i} \right)_{\bar{P}} = \left( \frac{\partial v}{\partial y_i} \right)_{\bar{P}} \quad , \quad (i = 1, \dots, n).$$

En vertu des inégalités (10) et (11) on a:

$$(19) \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x_{\bar{\nu}}} \right)_{\bar{P}} > \left[ f_{\bar{\nu}} \left( x_\sigma, y_j, u, \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) \right]_{\bar{P}}$$

$$(20) \quad \left( \frac{\partial v}{\partial x_{\bar{\nu}}} \right)_{\bar{P}} \leq \left[ f_{\bar{\nu}} \left( x_\sigma, y_j, v, \frac{\partial v}{\partial y_j} \right) \right]_{\bar{P}}$$

et puisque, d'après (13) et (18):

$$(21) \quad \left[ f_{\bar{\nu}} \left( x_\sigma, y_j, u, \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) \right]_{\bar{P}} = \left[ f_{\bar{\nu}} \left( x_\sigma, y_j, v, \frac{\partial v}{\partial y_j} \right) \right]_{\bar{P}}$$

on en conclut que:

$$(22) \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x_{\bar{\nu}}} \right)_{\bar{P}} > \left( \frac{\partial v}{\partial x_{\bar{\nu}}} \right)_{\bar{P}}.$$

D'autre part le point  $\bar{P}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$  n'étant situé, par hypothèse, sur aucune surface  $B_\mu = 0$  et en vertu de l'inégalité (16), le point  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{\bar{\nu}-1}, x_{\bar{\nu}}, \bar{x}_{\bar{\nu}+1}, \dots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$  appartient à l'ensemble (15), pourvu que  $x_{\bar{\nu}}$  soit suffisamment

voisin de  $\bar{x}_{\bar{p}}$  et remplisse l'inégalité  $x_{\bar{p}} < \bar{x}_{\bar{p}}$ . Pour une telle valeur de  $x_{\bar{p}}$  nous avons donc, d'après (13) et (14):

$$(23) \quad \frac{u(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{\bar{p}-1}, x_{\bar{p}}, \bar{x}_{\bar{p}+1}, \dots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) - u(\bar{x}_\sigma, \bar{y}_j)}{x_{\bar{p}} - \bar{x}_{\bar{p}}} < \frac{v(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{\bar{p}-1}, x_{\bar{p}}, \bar{x}_{\bar{p}+1}, \dots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) - v(\bar{x}_\sigma, \bar{y}_j)}{x_{\bar{p}} - \bar{x}_{\bar{p}}}$$

En faisant tendre  $x_{\bar{p}}$  vers  $\bar{x}_{\bar{p}}$  nous en obtenons à la limite l'inégalité:

$$(24) \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x_{\bar{p}}} \right)_{\bar{P}} < \left( \frac{\partial v}{\partial x_{\bar{p}}} \right)_{\bar{P}}$$

ce qui contredit à l'inégalité (22).

**Cas 2<sup>ième</sup>.** Le point  $\bar{P}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$  est situé sur certaines surfaces  $B_\mu = 0$ . D'après nos hypothèses sur la frontière de l'ensemble (1), le point  $\bar{P}$  n'appartient qu'à un nombre, au plus égal à  $n$ , d'entre elles. Supposons donc que ce soient les surfaces (2).

Nous allons démontrer maintenant que dans le cas envisagé il existe une suite finie de nombres  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  ( $\lambda_\alpha > 0$ ), tels qu'on ait les relations:

$$(25) \quad \left[ \frac{\partial(u-v)}{\partial y_i} \right]_{\bar{P}} = \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha \left( \frac{\partial B_{\mu_\alpha}}{\partial y_i} \right)_{\bar{P}}, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Or, puisque le point  $\bar{P}$  est situé sur les surfaces (2) et appartient à l'ensemble (1), ses coordonnées remplissent les relations suivantes:

$$(26) \quad B_{\mu_\alpha}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r).$$

$$(27) \quad B_\mu(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) > 0, \quad (\mu \neq \mu_\alpha).$$

Considérons une suite finie de nombres quelconques  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , vérifiant les inégalités:

$$(28) \quad \sum_{i=1}^n \xi_i \left( \frac{\partial B_{\mu_\alpha}}{\partial y_i} \right)_{\bar{P}} > 0^1, \quad (\alpha = 1, \dots, r).$$

<sup>1)</sup> Ces inégalités veulent dire que le vecteur  $(0, \dots, 0, \xi_1, \dots, \xi_n)$  est dirigé vers l'intérieur de l'ensemble (1).

et la droite passant par le point  $\bar{P}$  et parallèle au vecteur  $(0, \dots, 0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ :

$$(29) \quad x_\nu = \bar{x}_\nu \quad (\nu = 1, \dots, k); \quad y_i = \bar{y}_i + t\xi_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Nous affirmons que pour  $t > 0$  suffisamment petit les points de la droite (29) appartiennent à l'ensemble (15). Or, en vertu de la continuité des fonctions  $B_{\mu}$ , et des inégalités (27), pour  $t$  suffisamment petit, on a les inégalités:

$$(30) \quad B_{\mu}(\bar{x}_\sigma, \bar{y}_j + t\xi_j) > 0, \quad (\mu \neq \mu_\alpha).$$

En appliquant à la fonction  $B_{\mu_\alpha}$  la formule de Peano nous obtenons:

$$(31) \quad B_{\mu_\alpha}(\bar{x}_\sigma, \bar{y}_j + t\xi_j) - B_{\mu_\alpha}(\bar{x}_\sigma, \bar{y}_j) = \sum_{i=1}^n \xi_i \left( \frac{\partial B_{\mu_\alpha}}{\partial y_i} \right)_{\bar{P}} \cdot t + \varepsilon_\alpha(t) t^2, \quad (\alpha = 1, \dots, r)$$

où  $\varepsilon_\alpha(t)$  désigne une fonction remplissant la relation:

$$(32) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_\alpha(t) = 0$$

De la formule (31) et en vertu de (26), (28) et (32) nous déduisons pour  $t > 0$  suffisamment petit les inégalités:

$$(33) \quad B_{\mu_\alpha}(\bar{x}_\sigma, \bar{y}_j + t\xi_j) > 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r).$$

Les inégalités (30) et (33) que nous venons d'établir veulent dire que les points de la droite (29) appartiennent à l'ensemble (15) pourvu que  $t > 0$  soit suffisamment petit. Pour une telle valeur de  $t$  nous avons donc, d'après (13) et (14):

$$(34) \quad \frac{u(\bar{x}_\sigma, \bar{y}_j + t\xi_j) - u(\bar{x}_\sigma, \bar{y}_j)}{t} \geq \frac{v(\bar{x}_\sigma, \bar{y}_j + t\xi_j) - v(\bar{x}_\sigma, \bar{y}_j)}{t}$$

En faisant tendre  $t$  vers 0 nous obtenons à la limite l'inégalité:

$$(35) \quad \sum_{i=1}^n \xi_i \left( \frac{\partial(u-v)}{\partial y_i} \right)_{\bar{P}} \geq 0$$



Posons pour abrégé:

$$(36) \quad b_{\alpha i} = \left( \frac{\partial B_{\mu\alpha}}{\partial y_i} \right) \bar{p} \quad ; \quad a_i = \left( \frac{\partial(u-v)}{\partial y_i} \right) \bar{p}$$

D'après (28) et (35) nous avons l'implication suivante:

$$(37) \quad \sum_{i=1}^n b_{\alpha i} \xi_i > 0, \quad (\alpha=1, \dots, r), \supset \sum_{i=1}^n a_i \xi_i \geq 0.$$

Il en résulte immédiatement l'implication:

$$(38) \quad \sum_{i=1}^n b_{\alpha i} \xi_i < 0, \quad (\alpha=1, \dots, r), \supset \sum_{i=1}^n a_i \xi_i \leq 0.$$

En passant à la limite nous obtenons, en vertu de (37) et (38), l'implication:

$$(39) \quad \sum_{i=1}^n b_{\alpha i} \xi_i = 0, \quad (\alpha=1, \dots, r), \supset \sum_{i=1}^n a_i \xi_i = 0.$$

Or, le rang de la matrice  $\| b_{\alpha i} \| = \left\| \left( \frac{\partial B_{\mu\alpha}}{\partial y_i} \right) \bar{p} \right\|$  étant, par

hypothèse, égal à  $r$ , il résulte de (39) qu'il existe une suite de nombres  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , tels que:

$$(40) \quad a_i = \sum_{\alpha=1}^r \lambda_{\alpha} b_{\alpha i}, \quad (i=1, \dots, r).$$

Pour terminer la démonstration de notre proposition concernant les relations (25) il reste encore à prouver que  $\lambda_{\alpha} \geq 0$ , ( $\alpha=1, \dots, r$ ). Supposons donc, par impossible, que par exemple:

$$(41) \quad \lambda_{\beta} < 0.$$

Puisque le rang de la matrice  $\| b_{\alpha i} \|$  est égal à  $r$ , il existent  $\xi_1, \dots, \xi_n$  tels que:

$$(42) \quad \sum_{i=1}^n b_{\beta i} \xi_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n b_{\alpha i} \xi_i = \varepsilon \quad \text{pour } \alpha \neq \beta,$$

où:  $0 < \varepsilon$  et  $|\varepsilon \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_{\alpha}| < |\lambda_{\beta}|$ .

D'après (40) nous avons alors:

$$(43) \quad \sum_{i=1}^n a_i \xi_i = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha b_{\alpha i} \xi_i = \varepsilon \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha + \lambda_\beta < 0.$$

Nous aurions donc simultanément, en vertu de (42) et (43):

$$(44) \quad \sum_{i=1}^n b_{\alpha i} \xi_i > 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad \sum_{i=1}^n a_i \xi_i < 0.$$

ce qui contredit à l'implication (37). Ainsi les relations (25) avec  $\lambda_\alpha \geq 0$ , sont établies.

Revenons maintenant aux inégalités (10) et (11). Il en résulte, d'après (13), que:

$$(45) \quad \left[ \frac{\partial(u-v)}{\partial x_{\bar{p}}} \right]_{\bar{P}} > \left[ f_{\bar{v}} \left( x_\sigma, y_j, u, \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) - f_{\bar{v}} \left( x_\sigma, y_j, u_j, \frac{\partial u}{\partial y_j} - \frac{\partial(u-v)}{\partial y_j} \right) \right]_{\bar{P}}$$

ou encore, en vertu de (25):

$$(46) \quad \left[ \frac{\partial(u-v)}{\partial x_{\bar{p}}} \right]_{\bar{P}} > \left[ f_{\bar{v}} \left( x_\sigma, y_j, u, \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) - f_{\bar{v}} \left( x_\sigma, y_j, u_j, \frac{\partial u}{\partial y_j} - \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha \frac{\partial B_{\mu_\alpha}}{\partial y_j} \right) \right]_{\bar{P}}$$

Nous en déduisons, d'après (5), l'inégalité suivante:

$$(47) \quad \left[ \frac{\partial(u-v)}{\partial x_{\bar{p}}} \right]_{\bar{P}} > \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha \left( \frac{\partial B_{\mu_\alpha}}{\partial x_{\bar{p}}} \right)_{\bar{P}}$$

Considérons d'autre part une courbe de classe  $C^1$  aux équations paramétriques:

$$(48) \quad x_1 = \bar{x}_1, \dots, x_{\bar{p}-1} = \bar{x}_{\bar{p}-1}, \quad x_{\bar{p}} = t, \quad x_{\bar{p}+1} = \bar{x}_{\bar{p}+1}, \dots, \\ x_k = \bar{x}_k, \quad y_1 = y_1(t), \dots, y_n = y_n(t),$$

qui soit située sur les surfaces (2) et passe par le point  $\bar{P}$  ( $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ ).

Une telle courbe existe certainement, le rang de la matrice (3) au point  $\bar{P}$  étant, par hypothèse, égal à  $r$ . Le long de la courbe (48) nous avons les identités:

$$(49) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial B_{\mu\alpha}}{\partial y_i} y'_i(t) + \frac{\partial B_{\mu\alpha}}{\partial x_{\bar{p}}} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r).$$

En vertu des inégalités (16) et (27) la courbe (48) est contenue dans l'ensemble (15), pourvu que  $t$  soit suffisamment voisin de  $\bar{x}_{\bar{p}}$  et remplisse l'inégalité  $t < \bar{x}_{\bar{p}}$ .

Pour une telle valeur de  $t$  nous avons donc d'après (13) et (14) l'inégalité:

$$(50) \quad \frac{u(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{\bar{p}-1}, t, \bar{x}_{\bar{p}+1}, \dots, \bar{x}_k, y_j(t)) - u(\bar{x}_\sigma, \bar{y}_j)}{t - \bar{x}_{\bar{p}}} \leq \\ \leq \frac{v(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{\bar{p}-1}, t, \bar{x}_{\bar{p}+1}, \dots, \bar{x}_k, y_j(t)) - v(\bar{x}_\sigma, \bar{y}_j)}{t - \bar{x}_{\bar{p}}}$$

d'où, en faisant tendre  $t$  vers  $\bar{x}_{\bar{p}}$ , nous obtenons à la limite:

$$(51) \quad \left[ \frac{\partial(u-v)}{\partial x_{\bar{p}}} \right]_{\bar{P}} \leq - \sum_{i=1}^n y'_i(\bar{x}_{\bar{p}}) \left[ \frac{\partial(u-v)}{\partial y_i} \right]_{\bar{P}}.$$

Il en résulte, d'après les relations (25), l'inégalité:

$$(52) \quad \left[ \frac{\partial(u-v)}{\partial x_{\bar{p}}} \right]_{\bar{P}} \leq - \sum_{i=1}^n y'_i(\bar{x}_{\bar{p}}) \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha \left( \frac{\partial B_{\mu\alpha}}{\partial y_i} \right)_{\bar{P}}.$$

ou encore, en vertu des identités (49), l'inégalité:

$$(53) \quad \left[ \frac{\partial(u-v)}{\partial x_{\bar{p}}} \right]_{\bar{P}} \leq \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha \left( \frac{\partial B_{\mu\alpha}}{\partial x_{\bar{p}}} \right)_{\bar{P}}.$$

ce qui contredit à l'inégalité (47).

Nous aboutissons ainsi dans tous les deux cas envisagés à une contradiction. Notre théorème est donc démontré.

### Théorème 1<sup>bis</sup>.

Considérons dans l'espace à  $k+n$  dimensions l'ensemble défini par les inégalités:

$$(54) \quad \hat{x}_\nu \leq x_\nu < \hat{x}_\nu + a; \\ \nu = 1, \dots, k, \\ a_i + M \sum_{\nu=1}^k (x_\nu - \hat{x}_\nu) \leq y_i - \hat{y}_i \leq b_i - M \sum_{\nu=1}^k (x_\nu - \hat{x}_\nu), \quad (i = 1, \dots, n).$$

où  $a_i < b_i$ ,  $M > 0$  et  $a < \frac{b_i - a_i}{2M}$ .

Supposons que les fonctions  $f_v(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, u, q_1, \dots, q_n)$  soient définies dans un domaine  $\Delta$  de l'espace à  $2n + k + 1$  dimensions dont la projection recouvre l'ensemble (54). Supposons ensuite que les fonctions  $f_v$  remplissent dans  $\Delta$  la condition de Lipschitz:

$$(55) \quad \left| f_v(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, u, q_1, \dots, q_n) - f_v(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, u, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n) \right| \leq M \sum_{i=1}^n |q_i - \bar{q}_i|.$$

Soient enfin  $u(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$  et  $v(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$  deux fonctions vérifiant les hypothèses du théorème 1 et les inégalités (9), (10) et (11) dans l'ensemble (54).

*Nous affirmons que dans ces hypothèses l'inégalité (12) est remplie dans l'ensemble (54) tout entier.*

**Démonstration.** Nous allons réduire le théorème 1 bis au théorème 1, en montrant que les hypothèses du théorème 1 bis entraînent celles du théorème 1, si l'on pose:

$$(56) \quad B_\mu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) = y_\mu - \hat{y}_\mu - a_\mu - M \sum_{v=1}^k (x_v - \hat{x}_v)$$

$$(57) \quad (\mu = 1, \dots, n).$$

$$B_{\mu+n}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) = -y_\mu + \hat{y}_\mu + b_\mu - M \sum_{v=1}^k (x_v - \hat{x}_v)$$

$$(\mu = 1, \dots, n).$$

Or, on voit immédiatement que dans notre cas le rang de la matrice (3) est égal à  $r$ . Il reste donc à démontrer que les inégalités (5) sont remplies. Supposons, à cet effet, que le point  $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$  soit situé sur les plans  $B_{\mu\alpha} = 0$ , ( $\alpha = 1, \dots, r$ ), et soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , une suite de nombres quelconques tels que:

$$(58) \quad \lambda_\alpha \geq 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r)$$

et que le point (6) appartienne à l'ensemble (54). En vertu de la condition (55) nous avons alors l'inégalité:



$$(59) \quad f_v(x_\sigma, y_j, u, q_j) - f_v(x_\sigma, y_j, u, q_j - \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha \frac{\partial B_{\mu_\alpha}}{\partial y_i}) \geq \\ \geq -M \sum_{i=1}^n \left| \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha \frac{\partial B_{\mu_\alpha}}{\partial y_i} \right| \geq -M \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^r |\lambda_\alpha| \cdot \left| \frac{\partial B_{\mu_\alpha}}{\partial y_i} \right|.$$

Mais, en vertu de (56) et (57), il résulte que:  $\frac{\partial B_{\mu_\alpha}}{\partial y_i} = 0$

pour  $i \neq \mu_\alpha$ , et  $\left| \frac{\partial B_{\mu_\alpha}}{\partial y_{\mu_\alpha}} \right| = 1$ , tandis que  $\frac{\partial B_{\mu_\alpha}}{\partial x_v} = -M$ . Donc

en tenant compte des inégalités (58) nous obtenons de (59) l'inégalité (5).

Voici maintenant comment, en vertu du théorème 1 bis, on obtient immédiatement un théorème de M. A. HAAR relatif aux systèmes d'inégalités différentielles.

**Théorème 2.** Soit  $u(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$  une fonction définie et possédant la différentielle totale en tout point de l'ensemble (54). Supposons que la fonction  $u$  satisfasse aux inégalités différentielles:

$$(60) \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x_v} \right| \leq M \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial y_i} \right| + N|u| + L \quad (v=1, \dots, k),$$

où  $N > 0$ ,  $L \geq 0$ , et qu' on ait:

$$(61) \quad |u(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k, y_1, \dots, y_n)| \leq C$$

On a alors, dans l'ensemble (54) tout entier l'inégalité suivante:

$$(62) \quad |u(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)| \leq C e^{N \sum_{v=1}^k (x_v - \hat{x}_v)} + \\ \frac{L}{N} \left( e^{N \sum_{v=1}^k (x_v - \hat{x}_v)} - 1 \right)$$

**Démonstration.** Soit  $C' > C$ ,  $N' > N$  et  $L' > L$ . En vertu de (60) et (61) nous avons.:

$$(63) \quad \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \leq M \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial y_i} \right| + N|u| + L$$

$$(64) \quad u(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k, y_1, \dots, y_n) < C'.$$

$$(65) \quad \frac{\partial(-u)}{\partial x_\nu} \leq M \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial(-u)}{\partial y_i} \right| + N|-u| + L.$$

$$(66) \quad -u(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k, y_1, \dots, y_n) < C'.$$

D'autre part, en posant pour abrégé:

$$(67) \quad \varphi(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) = C'e^{N' \sum_{\nu=1}^k (x_\nu - \hat{x}_\nu)} + \\ + \frac{L'}{N'} \left( e^{N' \sum_{\nu=1}^k (x_\nu - \hat{x}_\nu)} - 1 \right)$$

on vérifie immédiatement que:

$$(68) \quad \varphi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k, y_1, \dots, y_n) = C'$$

$$(69) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} > M \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right| + N|\varphi| + L.$$

Il s'ensuit des relations (63), (64), (65), (66), (68), et (69), en vertu du théorème 1 bis, qu'on a les inégalités:

$$(70) \quad u(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) < \varphi(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n).$$

$$(71) \quad -u(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) < \varphi(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n).$$

donc

$$(72) \quad |u(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)| < C'e^{N' \sum_{\nu=1}^k (x_\nu - \hat{x}_\nu)} + \\ + \frac{L'}{N'} \left( e^{N' \sum_{\nu=1}^k (x_\nu - \hat{x}_\nu)} - 1 \right).$$

En faisant tendre  $C'$ ,  $L'$  et  $N'$  respectivement vers  $C$ ,  $L$  et  $N$  nous obtenons l'inégalité (62).

**Remarque 1.** Le théorème 2 peut être utilisé pour évaluer la différence entre deux intégrales du système d'équations différentielles de la forme:

$$(73) \quad \frac{\partial z}{\partial x_\nu} = f_\nu \left( x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y_n} \right), (\nu=1, \dots, k),$$

ainsi que pour démontrer l'unicité des solutions du système (73). Supposons en effet que les fonctions  $f_\nu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, z, q_1, \dots, q_n)$  soient définies dans un domaine  $\Delta$  à  $2n+k+1$  dimensions recouvrant l'ensemble (54) et qu'elles y remplissent la condition de Lipschitz par rapport aux variables  $z, q_1, \dots, q_n$

$$(74) \quad |f_\nu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, z, q_1, \dots, q_n) - f_\nu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, \bar{z}, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n)| \\ \leq M \left( \sum_{i=1}^n |q_i - \bar{q}_i| + |z - \bar{z}| \right).$$

Soient  $u(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$  et  $v(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$  deux intégrales du système (73) définies et possédant dans l'ensemble (54) la différentielle totale et telles que leurs éléments de contact (7) et (8) appartiennent à  $\Delta$ . Supposons enfin qu'on ait:

$$(75) \quad |u(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k, y_1, \dots, y_n) - v(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k, y_1, \dots, y_n)| \leq C.$$

On a alors dans l'ensemble (54) l'inégalité suivante:

$$(76) \quad |u(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) - v(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)| \\ \leq C e^{M \sum_{\nu=1}^k (x_\nu - \hat{x}_\nu)}.$$

Ceci résulte immédiatement du théorème 2, si l'on tient compte du fait qu'en vertu de (74) on a:

$$(77) \quad \left| \frac{\partial(u-v)}{\partial x_\nu} \right| \leq M \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial(u-v)}{\partial y_i} \right| + M |u-v|.$$

En particulier, lorsque  $C=0$ , les intégrales  $u$  et  $v$  sont identiques.

Remarquons que nous n'avons point supposé que le système (73) soit en involution et que nous n'avons fait

aucune hypothèse sur la régularité des intégrales  $u$  et  $v$  sauf celle d'existence des différentielles totales.

**Théorème 3.** Considérons dans l'espace à  $n + 1$  dimensions de points  $x, y_1, \dots, y_n$  l'ensemble borné, défini par les inégalités:

$$(78) \quad \hat{x} \leq x < \hat{x} + a \quad (a > 0); \quad B_\mu(x, y_1, \dots, y_n) \geq 0, \quad (\mu = 1, \dots, 2n).$$

où les fonctions  $B_\mu$  sont de classe  $C^1$  dans l'espace tout entier.

Les points de la frontière de l'ensemble (78) sont situés, par hypothèse, ou bien sur les plans  $x = \hat{x}$ , respectivement  $x = \hat{x} + a$ , ou bien sur un nombre fini, au plus égal à  $n$ , de surfaces  $B_\mu = 0$ . Supposons que pour toute suite d'indices  $\mu_1, \dots, \mu_r$ , ( $1 \leq r \leq n$ ) et pour tout point  $(x, y_1, \dots, y_n)$  situé simultanément sur les  $r$  surfaces:

$$(79) \quad B_{\mu_\alpha}(x, y_1, \dots, y_n) = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r),$$

le rang de la matrice:

$$(80) \quad \left\| \left\| \frac{\partial B_{\mu_\alpha}}{\partial y_l} \right\| \right\|_{\substack{\alpha = 1, \dots, r \\ l = 1, \dots, n}}$$

soit égal à  $r$ .

Supposons que les fonctions:

$$(81) \quad f_\nu(x, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_n, q_1^{(\nu)}, \dots, q_n^{(\nu)}), \quad (\nu = 1, \dots, k),$$

soient définies respectivement dans des domaines  $D_\nu$  de l'espace à  $2n + k + 1$  dimensions dont les projections sur le plan  $x, y_1, \dots, y_n$  recouvrent l'ensemble (78).

Supposons que la fonction  $f_\nu$  remplisse dans  $D_\nu$  la suivante condition (W) de monotonie:

Lorsque:

$$(82) \quad \left. \begin{aligned} u_1 > \bar{u}_1, \dots, u_{\nu-1} > \bar{u}_{\nu-1}, u_\nu = \\ \bar{u}_\nu, u_{\nu+1} > \bar{u}_{\nu+1}, \dots, u_k > \bar{u}_k \end{aligned} \right\}$$

alors:

$$(83) \quad \left. \begin{aligned} f_\nu(x, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_k, q_1^{(\nu)}, \dots, q_n^{(\nu)}) > \\ f_\nu(x, y_1, \dots, y_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k, q_1^{(\nu)}, \dots, q_n^{(\nu)}) \end{aligned} \right\} (W).$$



Supposons ensuite que pour tout point frontière de l'ensemble (78) situé sur les surfaces (79) on ait les inégalités:

$$(84) \quad f_v(x, y_j, u_\sigma, q_j^{(v)}) - f_v(x, y_j, u_\sigma, q_j^{(v)} - \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha \frac{\partial B_{\mu_\alpha}}{\partial y_j}) \geq \\ \geq \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha \frac{\partial B_{\mu_\alpha}}{\partial x} \quad (v=1, \dots, k).$$

où  $\lambda_\alpha \geq 0$  sont des nombres quelconques assujettis à la seule condition que le point:

$$(85) \quad x, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_k, q_1^{(v)} - \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha \frac{\partial B_{\mu_\alpha}}{\partial y_1}, \dots, q_n^{(v)} - \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha \frac{\partial B_{\mu_\alpha}}{\partial y_n}$$

appartienne à  $D_v$ .

Soient  $u_v(x, y_1, \dots, y_n), v_v(x, y_1, \dots, y_n), (v=1, \dots, k), 2k$  fonctions possédant la différentielle totale en tout point de l'ensemble (78) et telles que les points:

$$(86) \quad x, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_k, \frac{\partial u_v}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u_v}{\partial y_n},$$

$$(87) \quad x, y_1, \dots, y_n, v_1, \dots, v_k, \frac{\partial v_v}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial v_v}{\partial y_n}$$

appartiennent à  $D_v$ .

Supposons enfin que, dans l'ensemble (78), les inégalités suivantes soient remplies:

$$(88) \quad u_v(x, y_1, \dots, y_n) > v_v(x, y_1, \dots, y_n) \quad (v=1, \dots, k).$$

$$(89) \quad \frac{\partial u_v}{\partial x} > f_v(x, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_k, \frac{\partial u_v}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u_v}{\partial y_n}) \quad (v=1, \dots, k).$$

$$(90) \quad \frac{\partial v_v}{\partial x} \leq f_v(x, y_1, \dots, y_n, v_1, \dots, v_k, \frac{\partial v_v}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial v_v}{\partial y_n}) \quad (v=1, \dots, k).$$

*Nous affirmons que, dans ces hypothèses, les inégalités:*

$$(91) \quad u_v(x, y_1, \dots, y_n) > v_v(x, y_1, \dots, y_n) \quad (v=1, \dots, k)$$

*sont remplies dans l'ensemble (78) tout entier.*

**Démonstration.** Supposons, par impossible, que les inégalités (91) ne soient pas vérifiées en un certain point de l'ensemble (78). En vertu de la continuité des fonctions  $u_{\bar{v}}$  et  $v_{\bar{v}}$  et d'après l'inégalité (88), il existerait alors un point  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$  de l'ensemble (88) et un indice  $\bar{v}$  tels que:

$$(92) \quad u_{\bar{v}}(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) = v_{\bar{v}}(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$$

et

$$(93) \quad u_{\nu}(x, y_1, \dots, y_n) \geq v_{\nu}(x, y_1, \dots, y_n), \quad (\nu = 1, \dots, k)$$

pour tous les points de l'ensemble:

$$(94) \quad \hat{x} \leq x \leq \bar{x}; \quad B_{\mu}(x, y_1, \dots, y_n) \geq 0, \quad (\mu = 1, \dots, 2n).$$

Nous allons distinguer deux cas:

**Cas 1<sup>mier</sup>.** Le point  $\bar{P}$  appartient à l'intérieur de l'ensemble (78).

La différence:

$$(95) \quad u_{\bar{v}}(\bar{x}, y_1, \dots, y_n) - v_{\bar{v}}(\bar{x}, y_1, \dots, y_n)$$

considérée comme fonction à  $n$  variables  $y_1, \dots, y_n$  possède alors, en vertu de (92) et (93), le minimum en point  $\bar{P}$  intérieur.

Nous avons donc:

$$(96) \quad \left( \frac{\partial u_{\bar{v}}}{\partial y_i} \right)_{\bar{P}} = \left( \frac{\partial v_{\bar{v}}}{\partial y_i} \right)_{\bar{P}}, \quad (i = 1, \dots, n).$$

D'après (89), (90) et (96) nous avons les inégalités:

$$(97) \quad \left( \frac{\partial u_{\bar{v}}}{\partial x} \right)_{\bar{P}} > \left[ f_{\bar{v}}(x, y_j, u_{\sigma}, \frac{\partial u_{\bar{v}}}{\partial y_j}) \right]_{\bar{P}}$$

$$(98) \quad \left( \frac{\partial v_{\bar{v}}}{\partial x} \right)_{\bar{P}} \leq \left[ f_{\bar{v}}(x, y_j, v_{\sigma}, \frac{\partial u_{\bar{v}}}{\partial y_j}) \right]_{\bar{P}}$$

Mais en vertu de la condition (W) et des relations (92) et (93) on a:

$$(99) \quad \left[ f_{\bar{v}}(x, y_j, u_{\sigma}, \frac{\partial u_{\bar{v}}}{\partial y_j}) \right]_{\bar{P}} \geq \left[ f_{\bar{v}}(x, y_j, v_{\sigma}, \frac{\partial u_{\bar{v}}}{\partial y_j}) \right]_{\bar{P}}$$

Par conséquent nous obtenons de (97), (98) et (99):

$$(100) \quad \left( \frac{\partial u_{\bar{v}}}{\partial x} \right)_{\bar{P}} > \left( \frac{\partial v_{\bar{v}}}{\partial x} \right)_{\bar{P}}.$$

D'autre part il résulte de (92) et (93) que pour  $x < \bar{x}$ , on a:

$$(101) \quad \frac{u_{\bar{v}}(x, \bar{y}_j) - u_{\bar{v}}(\bar{x}, \bar{y}_j)}{x - \bar{x}} < \frac{v_{\bar{v}}(x, \bar{y}_j) - v_{\bar{v}}(\bar{x}, \bar{y}_j)}{x - \bar{x}}$$

d'où en faisant tendre  $x$  vers  $\bar{x}$  nous obtenons l'inégalité:

$$(102) \quad \left( \frac{\partial u_{\bar{v}}}{\partial x} \right)_{\bar{P}} \leq \left( \frac{\partial v_{\bar{v}}}{\partial x} \right)_{\bar{P}}$$

ce qui contredit à l'inégalité (100).

**Cas 2<sup>ième</sup>.** Le point  $\bar{P}$  est situé sur la frontière de l'ensemble (78). Il appartient alors à un nombre fini, au plus égal à  $n$ , de surfaces  $B_{\mu} = 0$ . Supposons donc que ce soient les surfaces (79). On montre d'une façon analogue, comme dans le théorème 1, qu'il existe alors une suite de nombres  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  ( $\lambda_{\alpha} > 0$ ) tels qu'on a les relations:

$$(103) \quad \left[ \frac{\partial(u_{\bar{v}} - v_{\bar{v}})}{\partial y_i} \right]_{\bar{P}} = \sum_{\alpha=1}^r \lambda_{\alpha} \left( \frac{\partial B_{\mu_{\alpha}}}{\partial y_i} \right)_{\bar{P}}, \quad (i=1, \dots, n).$$

En vertu des inégalités (89) et (90) nous avons:

$$(104) \quad \left[ \frac{\partial(u_{\bar{v}} - v_{\bar{v}})}{\partial x} \right]_{\bar{P}} > \left[ f_{\bar{v}} \left( x, y_j, u_{\sigma}, \frac{\partial u_{\bar{v}}}{\partial y_j} \right) - f_{\bar{v}} \left( x, y_j, v_{\sigma}, \frac{\partial v_{\bar{v}}}{\partial y_j} \right) \right]_{\bar{P}}$$

et d'après la condition (W) et les relations (92) et (93):

$$(105) \quad \left[ f_{\bar{v}} \left( x, y_j, v_{\sigma}, \frac{\partial v_{\bar{v}}}{\partial y_j} \right) \right]_{\bar{P}} < \left[ f_{\bar{v}} \left( x, y_j, u_{\sigma}, \frac{\partial v_{\bar{v}}}{\partial y_j} \right) \right]_{\bar{P}}$$

Il s'ensuit de (104) et (105) que:

$$(106) \quad \left[ \frac{\partial(u_{\bar{v}} - v_{\bar{v}})}{\partial x} \right]_{\bar{P}} > \left[ f_{\bar{v}} \left( x, y_j, u_{\sigma}, \frac{\partial u_{\bar{v}}}{\partial y_j} \right) - f_{\bar{v}} \left( x, y_j, u_{\sigma}, \frac{\partial u_{\bar{v}}}{\partial y_j} - \frac{\partial(u_{\bar{v}} - v_{\bar{v}})}{\partial y_j} \right) \right]_{\bar{P}}.$$

ou encore d'après (103):

$$(107) \quad \left[ \frac{\partial(u_{\bar{v}} - v_{\bar{v}})}{\partial x} \right]_{\bar{P}} > \left[ f_{\bar{v}} \left( x, y_j, u_{\sigma}, \frac{\partial u_{\bar{v}}}{\partial y_j} \right) - \right. \\ \left. - f_{\bar{v}} \left( x, y_j, u_{\sigma}, \frac{\partial u_{\bar{v}}}{\partial y_j} - \sum_{\alpha=1}^r \lambda_{\alpha} \frac{\partial B_{\mu_{\alpha}}}{\partial y_j} \right) \right]_{\bar{P}}.$$

Il en résulte, en vertu de (84), que:

$$(108) \quad \left[ \frac{\partial(u_{\bar{v}} - v_{\bar{v}})}{\partial x} \right]_{\bar{P}} > \sum_{\alpha=1}^r \lambda_{\alpha} \left( \frac{\partial B_{\mu_{\alpha}}}{\partial x} \right)_{\bar{P}}.$$

Soit  $y_i = y_i(x)$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), une courbe de classe  $C^1$  passant par le point  $\bar{P}$  et située sur les surfaces (79). Une telle courbe existe certainement au voisinage du point  $\bar{P}$ . le rang de la matrice (80) étant, par hypothèse, égal à  $r$ .

Le long de cette courbe nous avons les identités:

$$(109) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial B_{\mu_{\alpha}}}{\partial y_i} y'_i(x) + \frac{\partial B_{\mu_{\alpha}}}{\partial x} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r).$$

Pour tout  $x$  suffisamment voisin de  $\bar{x}$  et vérifiant l'inégalité  $x < \bar{x}$ , la courbe envisagée appartient évidemment à l'ensemble (94). Pour une telle valeur de  $x$  nous avons par conséquent, en vertu de (92) et (93), l'inégalité:

$$(110) \quad \frac{u_{\bar{v}}(x, y_j(x)) - u_{\bar{v}}(\bar{x}, \bar{y}_j)}{x - \bar{x}} \leq \frac{v_{\bar{v}}(x, y_j(x)) - v_{\bar{v}}(\bar{x}, \bar{y}_j)}{x - \bar{x}}$$

d'où en faisant tendre  $x$  vers  $\bar{x}$  nous obtenons à la limite:

$$(111) \quad \left[ \frac{\partial(u_{\bar{v}} - v_{\bar{v}})}{\partial x} \right]_{\bar{P}} \leq - \sum_{i=1}^n y'_i(\bar{x}) \left[ \frac{\partial(u_{\bar{v}} - v_{\bar{v}})}{\partial y_i} \right]_{\bar{P}}$$

Nous avons par conséquent, d'après (108),:

$$(112) \quad \left[ \frac{\partial(u_{\bar{v}} - v_{\bar{v}})}{\partial x} \right]_{\bar{P}} \leq - \sum_{i=1}^n y'_i(\bar{x}) \sum_{\alpha=1}^r \lambda_{\alpha} \left( \frac{\partial B_{\mu_{\alpha}}}{\partial y_i} \right)_{\bar{P}}.$$



ou encore en vertu de (109):

$$(113) \quad \left[ \frac{\partial(u_{\bar{v}} - v_{\bar{v}})}{\partial x} \right]_{\bar{P}} < \sum_{\alpha=1}^r \lambda_{\alpha} \left( \frac{\partial B_{\mu\alpha}}{\partial x} \right)_{\bar{P}}$$

ce qui contredit à l'inégalité (108). Nous aboutissons ainsi dans tous les deux cas à une contradiction, le théorème se trouve donc démontré.

**Théorème 3<sup>bis</sup>.** Considérons dans l'espace à  $n + 1$  dimensions l'ensemble défini par les inégalités:

$$(114) \quad \begin{aligned} \hat{x} &\leq x < \hat{x} + a \quad (a > 0); \\ a_i + M(x - \hat{x}) &\leq y_i - \hat{y}_i \leq b_i - M(x - \hat{x}), \quad (i = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

où  $M > 0$ ,  $a_i < b_i$ ,  $a < \frac{b_i - a_i}{2M}$ .

Supposons que les fonctions  $f_{\nu}(x, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_k, q_1^{(\nu)}, \dots, q_n^{(\nu)})$ , ( $\nu = 1, \dots, k$ ) soient définies respectivement dans des domaines  $\Delta_{\nu}$  de l'espace à  $2n + k + 1$  dimensions dont les projections sur le plan  $x, y_1, \dots, y_n$  recouvrent l'ensemble (114).

Supposons que la fonction  $f_{\nu}$  satisfasse dans  $\Delta_{\nu}$  à la condition (W) et à celle de Lipschitz:

$$(115) \quad |f_{\nu}(x, y_j, u_{\sigma}, q_j^{(\nu)}) - f_{\nu}(x, y_j, u_{\sigma}, \bar{q}_j^{(\nu)})| \leq M \sum_{j=1}^n |q_j^{(\nu)} - \bar{q}_j^{(\nu)}|$$

Soient enfin  $u_{\nu}(x, y_1, \dots, y_n)$  et  $v_{\nu}(x, y_1, \dots, y_n)$ , ( $\nu = 1, \dots, k$ ),  $2k$  fonctions satisfaisant dans (114) aux hypothèses du théorème 3 et remplissant les inégalités (88), (89) et (90).

*Nous affirmons que, dans ces hypothèses, les inégalités (91) sont vérifiées dans l'ensemble (114) tout entier.*

La démonstration de ce théorème découle du théorème 3 tout comme celle du théorème 1 bis a résulté du théorème 1.

# SUR LES ZÉROS DES INTÉGRALES DE L'ÉQUATION $x^{(5)}(t) + A(t) \cdot x(t) = 0$

par

M. BIERNACKI (Lublin).

§ 1. J'ai établi dans l'article: „Sur des intégrales d'une équation différentielle du 4. ordre“ que si  $A(t)$  est une fonction continue dans un intervalle  $I$  et si l'on a  $0 \leq A(t) \leq M$  dans cet intervalle les longueurs des intervalles entre les zéros consécutifs, situés dans  $I$ , d'une intégrale quelconque de l'équation  $x^{(4)}(t) + A(t) \cdot x(t) = 0$  surpassent  $M^{-\frac{1}{4}}$ , sauf pour 2 intervalles exceptionnels au plus. M. J. G. MIKUSINSKI a établi, en 1939, un énoncé entièrement analogue dans le cas de l'équation  $x'''(t) + A(t) \cdot x(t) = 0$ : les longueurs des intervalles surpassent  $2\sqrt[3]{3} M^{-\frac{1}{3}}$  et il y a un seul intervalle exceptionnel au plus (J. MIKUSINSKI a montré que si l'intégrale est oscillante pour  $t \rightarrow -\infty$ , c. à. d. si elle possède une infinité des zéros négatifs, l'intervalle exceptionnel n'existe pas). Ces résultats ainsi que le théorème bien connu de Sturm relatif à l'équation  $x''(t) + A(t) \cdot x(t) = 0$  rendent probable le théorème suivant:

„Considérons l'équation

$$(1) \quad x^{(n)}(t) + A(t) \cdot x(t) = 0$$

où  $A(t)$  est continue et où l'on a  $0 \leq A(t) \leq M$  dans un intervalle  $I$ . Les longueurs des intervalles entre les zéros consécutifs, situés dans  $I$ , d'une intégrale quelconque de (1) surpassent  $k_n M^{-\frac{1}{n}}$  sauf pour  $(n-2)$  intervalles exceptionnels au plus; le facteur  $k_n$  ne dépend que de  $n$ .

Cet énoncé s'applique aussi aux zéros d'une dérivée d'ordre  $i$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) d'une intégrale quelconque de (1), pourvu que l'on y remplace  $k_n$  par le facteur  $k_{in}$  qui ne dépend que de  $i$  et de  $n$ .

Il est clair que les  $(n-2)$  intervalles exceptionnels peuvent exister effectivement: cela résulte de ce que l'on peut fixer arbitrairement  $(n-1)$  zéros d'une intégrale convenable ou de sa dérivée.

Je me propose de démontrer, dans cet ordre d'idées, un résultat partiel:

**Théorème.** *Si la fonction  $A(t)$  est continue et non croissante dans un intervalle  $I$  (fini ou infini) et si l'on a  $0 \leq A(t) \leq M$  dans cet intervalle, les longueurs des intervalles entre les zéros consécutifs, situés dans  $I$ , d'une intégrale quelconque  $x(t)$  de l'équation:*

$$(2) \quad x^{(5)}(t) + A(t) \cdot x(t) = 0$$

*surpassent  $(2 + \sqrt{3})^{-1} M^{-\frac{1}{5}}$ , sauf pour 3 intervalles exceptionnels au plus. Si  $x(t)$  est oscillante pour  $t \rightarrow -\infty$  il y a 2 intervalles exceptionnels au plus.*

§ 2. Etant donnée une intégrale  $x(t)$  de l'équation (2) nous dirons qu'un intervalle „est complet par rapport à cette intégrale“ s'il contient au moins un zéro de  $x(t)$  et de chacune des dérivées  $x'(t)$ ,  $x''(t)$ ,  $x'''(t)$ ,  $x^{(4)}(t)$ .

**Lemme 1.** *Si  $A(t)$  est continue et si  $|A(t)| \leq M$  la longueur de tout intervalle complet dépasse  $M^{-\frac{1}{5}}$ .*

Pour établir ce lemme qui n'est qu'un cas particulier des résultats connus on peut utiliser, par exemple, la formule de Nakano-Gontscharoff<sup>1)</sup>

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_1) \int_{t_0}^t dt + x''(t_2) \int_{t_0}^t dt \int_{t_1}^t dt + \dots \\ + x^{(n-1)}(t_{n-1}) \int_{t_0}^t dt \dots \int_{t_{n-2}}^t dt + \int_{t_0}^t dt \dots \int_{t_{n-1}}^t x^{(n)}(t) dt$$

<sup>1)</sup> H. Nakano, Tôhoku Mat. Journal, 39, 1934; Gontscharoff Thèse, Ann. Ecole Norm. Le lemme 1 a été démontré par W. B. Fite (Annals of Math. (2), 18, 1916-17).

où l'on pose  $n = 5$  et où l'on choisit pour  $t_0$  le zéro de  $x(t)$  et pour  $t_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) le zéro de  $x^{(i)}(t)$ . Si la longueur de l'intervalle complet est  $d$  on trouve ainsi

$$\text{Max} |x(t)| \leq d^5 M. \text{Max} |x(t)|$$

et par suite le résultat annoncé.

En tenant compte du théorème de Rolle on déduit de suite du lemme (1) le corollaire suivant: *Parmi les 4 intervalles entre les zéros consécutifs d'une intégrale de l'équation (2) ou de la dérivée d'ordre  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) d'une intégrale il y en a un au moins dont la longueur surpasse  $\frac{1}{4} M^{\frac{1}{5}}$ .*

§ 3. On peut évidemment supposer dans la démonstration que  $0 < A(t) \leq M$  et que les zéros de l'intégrale considérée et de ses dérivées d'ordre  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) soient tous simples, c'est ce que nous admettrons dans tout ce qui suit.

**Lemme 2.** *Si  $A(t)$  est continue et ne s'annule pas il y a au plus 3 intervalles entre les zéros consécutifs d'une intégrale  $x(t)$  de l'équation (2) qui ne contiennent pas des zéros de  $x^{(4)}(t)$ .*

En effet, il résulte du théorème de Rolle que tout intervalle entre les zéros consécutifs de  $x(t)$  contient au plus un zéro de  $x^{(4)}(t)$ ; en appliquant successivement le même théorème on voit, d'autre part, que l'ensemble de  $n$  ( $n > 3$ ) intervalles consécutifs entre les zéros consécutifs de  $x(t)$  contient au moins  $(n - 3)$  zéros de  $x^{(4)}(t)$ . Nous dirons qu'un intervalle entre les zéros consécutifs de  $x(t)$  dépourvu des zéros de  $x^{(4)}(t)$  est „exceptionnel de 1 espèce” ou que c'est un intervalle  $E_1$ .<sup>3)</sup>

§ 4. Nous allons considérer encore d'autres intervalles exceptionnels: nous dirons qu'un intervalle entre les zéros consécutifs de  $x(t)$  est „exceptionnel de 2 espèce” ou que c'est un intervalle  $E_2$  lorsque:

3) Cette définition s'applique aussi à des intervalles de la forme  $(-\infty, a)$  ou  $(b, +\infty)$  dans lesquels  $x(t)$  ne s'annule pas, tandis que l'on a  $x(a) = 0$  ou  $x(b) = 0$ . On ne suppose rien sur le comportement de  $x(t)$  lorsque  $t \rightarrow \pm \infty$ .



1° ou bien on a  $x(t) \cdot x'''(t) < 0$  dans tout intervalle,

2° ou bien l'intervalle contient 2 zéros de  $x'''(t)$ , on a  $x(t) \cdot x'''(t) < 0$  dans le voisinage des extrémités de l'intervalle, tandis que  $x''(t)$  ne s'annule pas dans l'intervalle.<sup>3)</sup> Cette définition sera justifiée par le lemme suivant:

**Lemme 3.** *Si  $A(t)$  est continue et positive il y a au plus un intervalle exceptionnel de 2 espèce<sup>4)</sup>.*

Supposons qu'il existe 2 intervalles exceptionnels de 2 espèce, soit  $t_1 t_2$  et  $t_n t_{n+1}$ ; on peut évidemment admettre qu'aucun des intervalles intermédiaires  $t_2 t_3, \dots, t_{n-1} t_n$  n'est pas un  $E_2$ , on peut aussi supposer que l'on a  $x(t) > 0$  dans l'intervalle  $t_1 t_2$  (autrement il suffit de considérer l'intégrale  $-x(t)$ )

Supposons, en premier lieu, que l'on a aussi  $x(t) > 0$  dans l'intervalle  $t_n t_{n+1}$ .

On peut remarquer que tout intervalle entre les zéros consécutifs de  $x(t)$  contient au plus 2 zéros de  $x'''(t)$  autrement on obtient une contradiction avec le théorème de Rolle, l'équation (2) et la condition  $A(t) \neq 0$ .

Cela posé, on a  $x'''(t_2) < 0$  et  $x'''(t_n) < 0$ ; il s'ensuit que les intervalles  $t_2 t_3, \dots, t_{n-1} t_n$  dont le nombre est impair, contiennent un nombre pair des zéros de  $x'''(t)$ , donc un de ces intervalles, soit l'intervalle  $t_i t_{i+1}$ , ne contient pas des zéros de  $x'''(t)$  ou bien en contient deux. On peut évidemment supposer que chacun des intervalles  $t_2 t_3, \dots, t_{i-1} t_i$  contient exactement un zéro de  $x'''(t)$ . On constate alors aisément que l'intervalle  $t_i t_{i+1}$  ne peut contenir deux zéros de  $x'''(t)$ , on voit, en effet, que  $x'''(t)$  serait négative ou positive entre ces deux zéros selon que  $x(t)$  serait positive ou négative dans l'intervalle  $t_i t_{i+1}$ ; il en résulterait, en supposant par exemple  $x(t) > 0$ , l'existence d'un minimum de la fonction  $x'''(t)$  où la dérivée  $x^{(5)}(t)$  devrait être positive en contradiction avec le fait que  $A(t) > 0$ . Ainsi donc l'intervalle  $t_i t_{i+1}$  ne contient pas des zéros de  $x'''(t)$ . Supposons d'abord que  $x(t) > 0$  dans  $t_i t_{i+1}$ ; si l'on aurait  $x'''(t) < 0$  dans cet

4) Nous ne considérons que des intervalles de longueur finie.

intervalle il serait un  $E_2$ , en contradiction avec nos hypothèses, on a donc  $x'''(t) > 0$  dans  $t_1 t_{i+1}$ . On voit sans peine que l'intervalle  $t_1 t_2$  contient un seul zéro  $z_1$  de  $x'(t)$  et de même que l'intervalle  $t_1 t_{i+1}$  contient un seul zéro, soit  $z_i$ , de cette dérivée. Désignons par  $p_1$  ce zéro de  $x''(t)$  qui est situé le plus près de  $z_1$  du côté droit et de même soit  $p_i$  ce zéro de  $x''(t)$  qui est situé le plus près de  $z_i$  du côté gauche. L'intervalle  $p_1 p_i$  contient, d'après le théorème de Rolle, au moins  $(i-2)$  zéros de  $x'''(t)$  à son intérieur; or on a  $x'''(t_1) < 0$ ,  $x'''(p_1) < 0$ ,  $x'''(t_{i+1}) > 0$ ,  $x'''(p_i) < 0$ , donc chacun des intervalles  $t_1 p_1$  et  $p_i t_{i+1}$  contient au moins un zéro de  $x'''(t)$  (si l'intervalle  $t_1 t_2$  contient 2 zéros de  $x'''(t)$  le point  $p_1$  est situé, selon la définition d'un  $E_2$ , dans l'intervalle  $t_2 t_3$  et l'intervalle  $t_2 p_1$  contient un zéro de  $x'''(t)$ ). On voit ainsi que les  $i$  intervalles  $t_1 t_2, \dots, t_i t_{i+1}$  devraient contenir au moins  $i$  zéros de  $x'''(t)$  (et même au moins  $(i+2)$  de ces zéros dans le cas où  $t_1 t_2$  contient 2 zéros de  $x'''(t)$ ). Or ceci est en contradiction avec nos hypothèses selon lesquelles chacun des intervalles  $t_2 t_3, \dots, t_{i-1} t_i$  contient un seul zéro de  $x'''(t)$  et l'intervalle  $t_i t_{i+1}$  en est dépourvu. Le raisonnement est tout pareil dans le cas où on aurait  $x(t) < 0$  et par suite  $x'''(t) < 0$  dans l'intervalle  $t_i t_{i+1}$ : on aboutit de même à une contradiction.

Supposons maintenant que l'on a  $x(t) < 0$  dans l'intervalle  $t_n t_{n+1}$ . On a  $x'''(t_2) < 0$  et  $x'''(t_n) > 0$  mais le nombre des intervalles  $t_2 t_3, \dots, t_{n-1} t_n$  est maintenant pair, comme ils contiennent un nombre impair des zéros de  $x'''(t)$  un d'eux ne contient pas de ces zéros ou bien en contient deux et il suffit de reprendre des considérations qui précèdent pour aboutir à une contradiction.

§ 5. Nous allons voir maintenant qu'il existe certaines relations entre les intervalles exceptionnels des deux espèces. On a d'abord le lemme suivant:<sup>5)</sup>

---

<sup>5)</sup> On suppose toujours dans les lemmes 4—7 que  $A(t)$  est continue et positive. Si l'intervalle de la définition de  $A(t)$  est fini, soit  $(k, l)$ , on peut toujours le remplacer au besoin par l'intervalle  $(-\infty, +\infty)$  en posant, par exemple  $A(t) = A(k)$  pour  $t < k$  et  $A(t) = A(l)$  pour  $t > l$ .

**Lemme 4.** *Considérons un intervalle  $A$  qui est exceptionnel de 1 espèce et l'intervalle  $B$  voisin de  $A$  et situé à droite ou à gauche de  $A$  selon que l'on a  $xx^{(4)} > 0$  ou  $xx^{(4)} < 0$  dans  $A$ . Un des intervalles  $A$  et  $B$  est exceptionnel de 2 espèce.<sup>6)</sup>*

En remplaçant, s'il y a lieu,  $x(t)$  par  $-x(t)$  on peut toujours supposer que  $x(t) > 0$  dans l'intervalle  $A$ . Supposons d'abord que l'on a  $x^{(4)}(t) > 0$  dans cet intervalle. Il résulte de nos hypothèses que  $x'''(t)$  est croissante dans  $A$  et ne possède pas de maximum dans  $B$  (car  $x^{(5)}(t) > 0$  dans cet intervalle), donc  $x'''(t)$  est croissante dans l'ensemble des intervalles  $A$  et  $B$  et s'y annule au plus une fois. Si  $x'''(t)$  ne s'annule pas dans  $A$  et  $B$  il est évident qu'un de ces intervalles est un  $E_2$ . Si  $x'''(t)$  s'annule dans  $A$  elle reste nécessairement positive dans  $B$ , donc cet intervalle est un  $E_2$ . Si  $x'''(t)$  s'annule dans  $B$  elle reste négative dans  $A$ , donc cet intervalle est encore un  $E_2$ .

Nous avons supposé que l'on a  $x^{(4)}(t) > 0$  dans l'intervalle  $A$ , si  $x^{(4)}(t) < 0$  dans cet intervalle  $x'''(t)$  est décroissante dans l'ensemble des intervalles  $A$  et  $B$  et le raisonnement s'achève comme tout à l'heure.

Il résulte de cette démonstration que la dérivée  $x'''(t)$  est toujours monotone dans l'ensemble des intervalles  $A$  et  $B$ , on obtient donc immédiatement le lemme suivant:

**Lemme 5.** *L'intervalle  $B$  dont il est question dans le lemme 4 est comme  $A$  exceptionnel de 1 espèce, un intervalle  $E_1$  n'est donc jamais isolé, sauf peut-être dans le cas où il est du type  $(b, +\infty)$ .*

Nous allons établir maintenant le lemme suivant:

**Lemme 6.** *Il y a au plus 3 intervalles exceptionnels dont les longueurs sont finies. Si ces 3 intervalles, soit  $t_1, t_2, t_3, t_4$  sont tous adjacents  $x(t)$  ne s'annule pas dans l'intervalle*

---

<sup>6)</sup> Dans cet énoncé l'intervalle  $B$  peut être l'intervalle  $(-\infty, a)$  si  $a$  est le plus petit zéro de  $x(t)$  ou l'intervalle  $(b, +\infty)$ , si  $b$  est le plus grand zéro de  $x(t)$ . L'intervalle  $A$  peut être du type  $(\infty, a)$  mais non pas du type  $(b, +\infty)$ , car dans ce dernier cas on aurait  $xx^{(4)} > 0$  dans  $A$ .

$(-\infty, t_1)$ . Si  $x(t)$  possède une infinité des zéros négatifs l existe au plus 2 intervalles exceptionnels.

D'après le lemme 2 il y a au plus 3 intervalles  $E_1$ , d'après e lemme 3 au plus un intervalle  $E_2$ ; si donc il y a au plus 2 intervalles  $E_1$  la première assertion du lemme 6 est évidente. S'il y a effectivement 3 intervalles  $E_1$  les intervalles voisins de l'un au moins de ces intervalles, soit de l'intervalle  $C$ , sont tous les deux de longueur finie et d'après les lemmes 4 et 5 l'intervalle  $C$  ou l'un de ces intervalles voisins est simultanément exceptionnel de 1 et de 2 espèces; il en résulte encore la première assertion du lemme 6.

Pour établir la deuxième assertion de ce lemme remarquons d'abord que l'un des 3 intervalles est un  $E_2$ , en effet, en supposant le contraire on voit, en tenant compte du lemme 4 que l'intervalle  $t_2 t_3$  est un  $E_2$ . Supposons donc que l'intervalle  $t_1 t^2$  soit un  $E_2$ , il résulte alors du lemme 3 que les intervalles  $t_2 t^3$  et  $t_3 t_4$  sont des  $E_1$ ; on a certainement  $xx^{(4)} > 0$  dans l'intervalle  $t_3 t_4$  car autrement il existeraient, d'après le lemme 4, deux  $E_2$  dont les longueurs seraient finies. Pour la même raison  $x(t)$  ne peut s'annuler dans l'intervalle  $(t_4, +\infty)$  et d'après le lemme 5 ce dernier intervalle est un  $E_1$  où l'on a  $xx^{(4)} < 0$ . Cela n'est cepedant possible car si l'on a par exemple  $x^{(4)}(t) < 0$  dans cet intervalle on trouve, en intégrant, que l'on y a aussi  $x(t) > 0$  pour des grandes valeurs de  $t$ . Supposons maintenant que l'intervalle  $t_2 t_3$  serait un  $E_2$ . Si l'on avait  $xx^{(4)} > 0$  dans  $t_1 t_2$ , l'intervalle  $t_2 t_3$  serait un  $E_1$ , d'après le lemme 5, et l'on aurait aussi  $xx^{(4)} > 0$  dans l'intervalle  $t_3 t_4$ , or nous avons déjà vu qu'il en résulte une contradiction. Il faut donc supposer que l'on a  $xx^{(4)} < 0$  dans l'intervalle  $t_1 t_2$ , alors  $x(t)$  ne peut s'annuler dans l'intervalle  $(-\infty, t_1)$  car autrement il existeraient, d'après le lemme 4, deux  $E_2$  dont les longueurs seraient finies. Supposons enfin que c'est l'intervalle  $t_3 t_4$  qui soit un  $E_2$ , on a nécessairement  $xx^{(4)} < 0$  dans l'intervalle  $t_1 t_2$  car autrement il existeraient encore deux  $E_2$  dont les longueurs seraient finies. On voit comme tout-à-l'heure que  $x(t)$  ne peut s'annuler dans l'intervalle  $(-\infty, t_1)$ .



Occupons nous maintenant de la dernière assertion du lemme 6, supposons qu'il existe 3 intervalles exceptionnels; nous venons de voir que ces intervalles ne peuvent être tous adjacents, donc l'un d'eux serait isolé. Il résulte du lemme 5 que cet intervalle devrait être un  $E_2$ <sup>7)</sup>, et d'après le lemme 3 les deux intervalles restants seraient nécessairement des  $E_1$ . En appliquant le lemme 4 à l'un de ces deux intervalles on arriverait à la conclusion qu'il y a deux intervalles  $E_2$  ce qui n'est pas possible.

**Lemme 7.** *Si  $t_1, t_2$  sont des zéros consécutifs de l'intégrale  $x(t)$  qui n'est s'annule pas dans l'intervalle  $(-\infty, t_1)$  il y a au plus 2 intervalles exceptionnels dont les longueurs sont finies et qui sont situés à droite du point  $t = t_2$ .*

Supposons, au contraire, qu'il existe 3 de tels intervalles. D'après le lemme 6 ils ne peuvent être tous adjacents et l'intervalle  $t_1 t_2$  ne peut être exceptionnel. Il s'ensuit, en tenant compte des lemmes 3, 4 et 5, que deux parmi les 3 intervalles sont adjacents et le troisième, soit  $t_{n-1} t_n$  adjacent à l'intervalle  $(t_n, +\infty)$  où  $x(t)$  ne s'annule pas. Comme l'un des deux intervalles adjacents est un  $E_2$  l'intervalle  $t_{n-1} t_n$  est un  $E_1$  dans lequel on a  $xx^{(4)} > 0$ , car autrement l'intervalle voisin du côté gauche serait un  $E_1$ , d'après le lemme 5. Il en résulte, d'après le même lemme, que l'intervalle  $(t_n, +\infty)$  est un  $E_1$  où l'on a  $xx^{(4)} < 0$ , or nous avons déjà vu que cela n'est pas possible.

§ 6. Considérons un intervalle  $(a, b)$  entre les zéros consécutifs  $a$  et  $b$  d'une intégrale  $x(t)$  de l'équation (2) où  $A(t)$  est une fonction continue et non croissante telle, que  $0 < A(t) \leq M$ . Nous allons voir que si l'intervalle  $(a, b)$  n'est pas exceptionnel et si  $x(t)$  s'annule pour une valeur finie de l'intervalle  $(-\infty, a)$  on a l'inégalité:

$$b - a > (2 + \sqrt{3})^{-1} M^{-\frac{1}{5}}.$$

7) Cette conclusion peut être en défaut si l'intervalle en question est  $(t_{n-1}, t_n)$  et  $x(t)$  ne s'annule pas pour  $t > t_n$ . Or, dans ce cas on aurait  $xx^{(4)} > 0$  dans l'intervalle considéré et par suite  $xx^{(4)} < 0$  pour  $t > t_n$ ; ceci est cependant impossible.

De cette inégalité on déduit immédiatement, en tenant compte des lemmes 6 et 7 le théorème du § 1. Dans la démonstration nous allons distinguer deux cas; nous supposons toujours que l'on a  $x(t) > 0$  dans l'intervalle  $(a, b)$ .

*Premier cas: on a  $x'''(a) > 0$ .*

Si  $x''(a) > 0$ ,  $x''(t)$  s'annule nécessairement dans l'intervalle  $(a, z')$  où  $x'(z') = 0$  et  $x'(t) > 0$  pour  $a < t < z'$ . Si  $x''(t_0) = 0$  ( $a < t_0 < z'$ ) et  $x''(t) < 0$  pour  $t_0 < t < z'$  on a  $x'''(t_0) < 0$ , donc  $x'''(t)$  s'annule aussi dans  $(a, b)$ , cet intervalle est donc complet (cf. § 2), d'après le lemme 1 sa longueur surpasse  $M^{-\frac{1}{4}}$ . Nous pouvons donc supposer que l'on a  $x''(a) < 0$ . Considérons la valeur  $c$  telle, que  $c < a$ ,  $x(c) = 0$ ,  $x(t) < 0$  pour  $c < t < a$ , et désignons par  $z$  le zéro de  $x(t)$  situé dans l'intervalle  $(c, a)$  ou le plus grand de ces zéros, s'il y en a plusieurs. L'intervalle  $(z, a)$  contient nécessairement des zéros de  $x''(t)$ , désignons par  $p$  ce zéro (ou le plus grand d'eux, s'il y en a plusieurs). Soit  $r'$  ce zéro de  $x^{(4)}(t)$  qui est situé dans l'intervalle  $(a, b)$ ; si  $x^{(4)}(t)$  s'annule dans l'intervalle  $(c, a)$  soit  $r$  le zéro correspondant, posons enfin  $h = \text{Max}(p, r)$ . (Si  $r$  n'existe pas on a  $h = p$ ).  $x^{(4)}(t)$  est croissante dans l'intervalle  $(c, a)$  on a donc évidemment:  $x^{(4)}(r) - x^{(4)}(h) \leq 0$  et par suite, en tenant compte de l'équation (2):

$$\int_h^{r'} A(t) x(t) dt \geq 0 \quad \text{donc, } A(t) \text{ étant non croissante,}$$

$$(3) \quad A(a) \int_h^{r'} x(t) dt \geq 0$$

Si nous désignons par  $S$  l'aire limitée par l'ordonnée  $t = h$ , le segment  $ha$  de l'axe  $ot$  et la courbe  $x = x(t)$  et de même par  $S'$  l'aire limitée par l'ordonnée  $t = r'$ , le segment  $ar'$  de l'axe  $ot$  et la courbe  $x = x(t)$ , l'inégalité (3) peut s'écrire:

$$(4) \quad S' \geq S$$

Or l'arc de la courbe:  $h < t < z'$ ,  $x = x(t)$  est concave car nous pouvons supposer, d'après ce qui précède, que l'on a  $x''(t) < 0$  pour  $h < t < z'$ , il s'ensuit que l'aire  $S$  est plus grande que l'aire  $\Delta$  du triangle rectangle dont les côtés sont

situés sur la tangente à la courbe  $x = x(t)$  au point  $t = a$ , sur l'axe  $0t$  et sur l'ordonnée  $t = h$ . De même l'aire  $S'$  est plus petite que l'aire  $\Delta'$  du triangle rectangle dont les côtés sont situés sur la même tangente, sur l'axe  $0t$  et sur l'ordonnée  $t = r'$ <sup>8)</sup>. Il résulte donc de (4) que l'on a, a fortiori,  $\Delta' > \Delta$  et par suite  $r' - a > a - h$ . Si  $h = p$  on a donc  $b - a > a - p$ , c.à.d.  $b - a > \frac{1}{2}(b - p)$ ; or, l'intervalle  $(b, p)$  est complet, nous obtenons donc, en tenant compte du lemme 1, l'inégalité:

$$(5) \quad b - a > \frac{1}{2} M^{-\frac{1}{5}}$$

Supposons maintenant que  $h = r$ . Nous partons de l'inégalité:  $x'''(a) - x'''(p) > 0$ , qui peut s'écrire sous la forme:

$$\int_p^r du \int_r^u A(t)x(t) dt < \left| \int_r^a du \int_r^u A(t)x(t) dt \right|$$

$A(t)$  étant non croissante on peut remplacer dans cette inégalité  $A(t)$  par  $A(r)$  et il vient ainsi:

$$(6) \quad \int_p^r du \int_r^u x(t) dt < \left| \int_r^a du \int_r^u x(t) dt \right|$$

Or  $x(t)$  est croissante dans l'intervalle  $(p, a)$ , on a par suite:

$$\int_r^u x(t) dt > (r - u) |x(r)|, \quad (p < u < r);$$

$$\left| \int_r^u x(t) dt \right| < (u - r) |y(r)|, \quad (r < u < a).$$

En intégrant ces inégalités et en tenant compte de l'inégalité (6) il vient:  $\frac{1}{2}(r - p)^2 |x(r)| < \frac{1}{2}(a - r)^2 |x(r)|$ , c. à. d.  $r - p < a - r$ . Or, nous avons vu que l'on a:  $a - r < r' - a < b - a$ , on obtient donc l'inégalité  $b - a > \frac{1}{3}(b - p)$  et l'intervalle  $(p, b)$  étant complet:

$$(7) \quad b - a > \frac{1}{3} M^{-\frac{1}{5}}$$

<sup>8)</sup> On suppose que l'intervalle  $(a, b)$  ne contient qu'un seul zéro  $z'$  de  $x(t)$ ; dans le cas contraire cet intervalle serait complet.

*Deuxième cas*: on a  $x'''(a) < 0$ .

L'intervalle  $(a, b)$  n'étant pas un  $E_2$   $x'''(t)$  s'y annule exactement une fois, si cet intervalle contenait un zéro de  $x''(t)$  il serait complet, on peut donc supposer que l'on a  $x''(t) < 0$  dans tout intervalle. Des lettres  $c, p, r, r', h...$  ayant la même signification que dans le premier cas si  $h = p$  le raisonnement employé dans ce cas s'applique sans modification et nous obtenons encore l'inégalité (5).

Supposons maintenant que  $h = r$  et désignons par  $q'$  le zéro de  $x'''(t)$  situé dans l'intervalle  $(a, b)$ . On a visiblement  $x'''(p) < 0$ , donc  $x'''(q') - x'''(p) > 0$ , l'inégalité qui peut s'écrire:

$$\int_p^q du \int_r^u A(t) x(t) dt < 0$$

ou encore:

$$\begin{aligned} & \int_p^r du \int_r^u A x dt + \int_r^a du \int_r^u A x dt + \\ & + (q' - a) \int_r^a A x dt + \int_a^{q'} du \int_a^u A x dt < 0 \end{aligned}$$

On constate sans peine que le premier et le dernier termes de la dernière inégalité sont positifs, tandis que le deuxième et le troisième termes sont négatifs, il en résulte que nous pouvons supprimer le dernier terme de l'inégalité et  $-A(t)$  étant non croissante — remplacer dans les trois premiers termes  $A(t)$  par  $A(r)$ , il vient ainsi:

$$\int_p^r du \int_r^u x dt + \int_r^a du \int_r^u x dt + (q' - a) \int_r^a x dt < 0$$

On voit comme dans le premier cas que le premier terme de la dernière inégalité est supérieur à  $\frac{1}{2}(r-p)^2 |x(r)|$  et que le deuxième terme est inférieur, en valeur absolue, à  $\frac{1}{2}(a-r)^2 |x(r)|$ ; le troisième terme est évidemment inférieur, en valeur absolue, à  $(q' - a)(a - r) |x(r)|$ . En définitive nous obtenons



l'inégalité:  $\frac{1}{2} (r-p)^2 - \frac{1}{2} (a-r)^2 - (q'-a)(a-r) < 0$ . Or, nous avons déjà vu que l'on a:  $a-r < r'-a < b-a$ , il vient ainsi:  $b-a > (2 + \sqrt{3})^{-1} (b-p)$ , donc, l'intervalle  $(p, b)$  étant complet:

$$(8) \quad b-a > (2 + \sqrt{3})^{-1} M^{-\frac{1}{5}}.$$

Les inégalités (5), (7) et (8) entraînent bien l'inégalité énoncée au début du § 6 et par suite, le théorème du § 1.

---

# UNE GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE CANTOR-LEBESGUE.

par

W. Orlicz (Poznań)

L'ensemble  $B$  de nombres réels de l'intervalle  $\langle a, b \rangle$  est dit *base rationnelle* lorsque chaque nombre réel  $x$  admet au moins une représentation

$$x = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \dots + r_k x_k,$$

où  $r_i$  sont des nombres rationnels et  $x_1, x_2, \dots, x_k$  appartiennent à  $B$ .

Si cette représentation est unique, la base est dite *base de Hamel*.

En suivant la méthode de HAMEL<sup>1)</sup>, on peut démontrer sans peine que toute base rationnelle contient un sousensemble qui constitue une base de Hamel.

Les ensembles de mesure positive de Lebesgue et les ensembles boreliens de II-ème catégorie de Baire fournissent des exemples importants de bases rationnelles. On obtient une autre classe intéressante des bases rationnelles comme il suit: soit  $g > 2$  un nombre naturel,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  ( $n < g$ ,  $c_i < g$ ) des nombres naturels, l'ensemble des nombres de l'intervalle  $\langle 0, 1 \rangle$  qui admettent au moins un développement  $g$ -adique dans lequel les chiffres  $c_1, \dots, c_n$  manquent, constitue une base rationnelle. On voit p. ex. que l'ensemble triadique de CANTOR appartient à cette classe; ceci montre que les bases rationnelles peuvent être non denses et de mesure nulle. Il existe aussi des bases rationnelles non mesurables au sens de Borel, telles sont p. ex. toutes les bases de Hamel, il

---

<sup>1)</sup> Voir: G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , Math. Ann. 60 (1905) p. 459—462.

existe de même des bases non mesurables au sens de Lebesgue. Telle est p.ex. l'ensemble bien connu de VITALI.

Les fonctions réelles  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  sont dites *linéairement indépendantes au sens fort* dans l'intervalle (fini ou infini)  $\langle a, b \rangle$  si,  $p_1, p_2, \dots, p_n$  étant des nombres réels qui ne sont pas simultanément égaux à 0, la combinaison linéaire

$$p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x) + \dots + p_n f_n(x)$$

ne s'annule dans  $\langle a, b \rangle$  que dans un ensemble au plus dénombrable.

On obtient des exemples bien simples de fonctions linéairement indépendantes au sens fort en considérant les polynomes trigonométriques

$$P_k(x) = \frac{1}{2} a_0^{(k)} + \sum_{i=1}^m (a_i^{(k)} \cos ix + b_i^{(k)} \sin ix), \quad k = 1, 2, \dots, m$$

dont les coefficients  $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \dots, a_i^{(m)}, b_i^{(1)}, b_i^{(2)}, \dots, b_i^{(m)}$  sont linéairement indépendants pour  $i = 1, 2, \dots, m$ , ou les fonctions

$$f_k(x) = Q_k(x - [x]), \quad \text{où } Q_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} x^n, \quad k = 1, 2, \dots \quad \text{où}$$

$|x| \leq 1$  et les coefficients  $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \dots, a_i^{(m)}$  sont linéairement indépendants pour  $i = 0, 1, \dots$

Le résultat principal<sup>2)</sup> de la Note présente est la généralisation suivante du théorème classique de CANTOR-LEBESGUE<sup>3)</sup> sur les séries trigonométriques qui convergent dans un ensemble de mesure positive:

*Soient  $f(x)$  et  $g(x)$  des fonctions réelles définies dans  $(-\infty, +\infty)$  de période 1, linéairement indépendantes au sens fort dans  $\langle 0, 1 \rangle$  et discontinues dans un ensemble au plus dénombrable. Si la série*

2) Les résultats de cette Note ont été présentés à la Société Polon. de Mathématique, Section de Cracovie, séance de 20. XI. 1945.

3) Comparer: A. Zygmund, Trigonometrical series, Warszawa (1935) spéc. p. 267.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n f(nx) + b_n g(nx))$$

converge pour chaque  $x$  appartenant à une base rationnelle, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 1 que nous allons démontrer dans la suite.

Nous désignerons par  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$  une suite arbitraire des nombres, par  $\omega_1, \omega_2, \dots$  une suite des nombres telle que  $\omega_n \neq 0$  et  $\omega_n \rightarrow +\infty$ .

**Lemme.** Soit  $B$  une base rationnelle; il existe pour toute suite partielle  $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots$  un nombre  $x \in B$  tel que l'ensemble des points d'accumulation de la suite

$$\omega_{i_1} x + \vartheta_{i_1} - [\omega_{i_1} x + \vartheta_{i_1}]$$

est de puissance du continu.

**Démonstration.** Convenons d'écrire  $x_n \overset{*}{\rightarrow} x_0$  pour désigner que la suite  $x_1 - [x_1], x_2 - [x_2], \dots$  converge vers  $x_0 - [x_0]$ , ou bien qu'elle n'admet que les valeurs 0 et 1 au plus comme des points d'accumulation, suivant que  $x_0 - [x_0] > 0$  ou  $x_0 - [x_0] = 0$ . On voit sans peine que la relation  $x_n \overset{*}{\rightarrow} x_0$  équivaut à  $e^{2\pi x_n i} \rightarrow e^{2\pi x_0 i}$ . Cette remarque entraîne des propositions suivantes qui nous seront utiles dans la suite: a) lorsque  $x_n \overset{*}{\rightarrow} x_0$  et  $x_n \overset{*}{\rightarrow} y_0$ , on a  $x_0 = y_0 + s$ , où  $s$  est un nombre entier; b) si  $x_n \overset{(1)}{\rightarrow} x_0^{(1)}, x_n \overset{(2)}{\rightarrow} x_0^{(2)}, \dots, x_n \overset{(k)}{\rightarrow} x_0^{(k)}$ , on a  $\pm x_n^{(1)} \pm x_n^{(2)} \pm \dots \pm x_n^{(k)} \rightarrow \pm x_0^{(1)} \pm x_0^{(2)} \pm \dots \pm x_0^{(k)}$ ; c) toute suite  $x_1, x_2, \dots$  contient une suite partielle  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots$  telle que  $x_{i_j} \overset{*}{\rightarrow} x_0$ ; d) si la suite  $x_1 - [x_1], x_2 - [x_2], \dots$  admet un nombre fini ou dénombrable des points d'accumulation et  $r$  est un nombre rationnel arbitraire différent de 0, la suite  $r x_1 - [r x_1], r x_2 - [r x_2], \dots$  admet aussi un nombre fini ou dénombrable des points d'accumulation.

Pour démontrer notre lemme, supposons que pour tout  $x \in B$  l'ensemble des points d'accumulation de la suite  $\omega_{i_1} x + \vartheta_{i_1} - [\omega_{i_1} x + \vartheta_{i_1}], \omega_{i_2} x + \vartheta_{i_2} - [\omega_{i_2} x + \vartheta_{i_2}], \dots$  est au plus dénombrable. On peut admettre d'après c) sans restreindre la



généralité qu'il existe un  $\vartheta$  tel que  $\vartheta_{l_i} \xrightarrow{*} \vartheta$ , car on peut toujours remplacer la suite d'indices  $l_1, l_2, \dots$  par une suite partielle. Soit  $y = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \dots + r_k x_k$ , où  $x_i \in B$  et  $r_i$  sont des nombres rationnels; désignons par  $A_1, A_2, \dots, A_k, A$  les ensembles des points d'accumulation des suites

$$\omega_{l_i} r_p x_p - [\omega_{l_i} r_p x_p], \omega_{l_i} r_p x_p - [\omega_{l_i} r_p x_p], \dots \quad (p=1, 2, \dots, k),$$

$$\omega_{l_i} y - [\omega_{l_i} y], \omega_{l_i} y - [\omega_{l_i} y], \dots$$

respectivement. Pour tout  $a \in A$ , on peut extraire de la suite  $l_1, l_2, \dots$  une suite partielle  $k_1, k_2, \dots$  telle qu'on ait simultanément

$$\omega_{k_i} y \xrightarrow{*} a, \omega_{k_i} r_1 x_1 \xrightarrow{*} a_1, \omega_{k_i} r_2 x_2 \xrightarrow{*} a_2, \dots, \omega_{k_i} r_k x_k \xrightarrow{*} a_k,$$

où  $a_i \in A_i$ . D'après b) on a  $a = a_1 + a_2 + \dots + a_k + s$ ,  $s$  étant un nombre entier convenablement choisi. Les ensembles des points d'accumulation des suites  $\omega_{k_i} x_p + \vartheta_{k_i} - [\omega_{k_i} x_p + \vartheta_{k_i}]$ ,  $\omega_{k_i} x_p + \vartheta_{k_i} - [\omega_{k_i} x_p + \vartheta_{k_i}], \dots$  ( $p=1, 2, \dots, k$ ) étant au plus dénombrables, on a le même pour les suites  $\omega_{k_i} x_p - [\omega_{k_i} x_p]$ ,  $\omega_{k_i} x_p - [\omega_{k_i} x_p], \dots$  ( $p=1, 2, \dots, k$ ) et d'après d) les ensembles  $A_1, A_2, \dots, A_k$  sont au plus dénombrables. Il en résulte que pour tout  $y$  l'ensemble  $A$  est aussi au plus dénombrable. On obtient ainsi une contradiction, car un raisonnement élémentaire montre qu'il existe des nombres  $y$  pour qu'ils les points d'accumulation de la suite  $\omega_{l_i} y - [\omega_{l_i} y]$ ,  $\omega_{l_i} y - [\omega_{l_i} y], \dots$  remplissent l'intervalle  $\langle 0, 1 \rangle$  tout entier<sup>4</sup>). En effet, remarquons que l'ensemble des  $x$  assujétis aux inégalités

$$w - \frac{1}{s} \leq kx - [kx] \leq w + \frac{1}{s}, \frac{1}{s} < w < 1 - \frac{1}{s}, s=1, 2, \dots$$

est composé des tous les intervalles

4) Ce n'est qu'un cas spécial d'un théorème connu, que nous allons démontrer ici d'une façon élémentaire. En effet on sait que presque tout  $y$  jouit de la propriété en question, voir: G. H. Hardy et J. E. Littlewood, Some problems of diophantine approximation, Acta Math. 37 (1914) p. 155-239, spec. p. 181, th. 1.40; comp. aussi S. Mazur et W. Orlicz, Sur quelques propriétés de fonctions périodiques et presque-périodiques, Studia Math. 9 (1940), où se trouve une généralisation du théorème de MM. Hardy et Littlewood.

$$\frac{w - \frac{1}{s}}{k} + \frac{m}{k} \leq x \leq \frac{w + \frac{1}{s}}{k} + \frac{m}{k},$$

où  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Rangeons tous les nombres rationnels de l'intervalle  $(0,1)$  en une suite  $w_1, w_2, \dots$  et désignons par

$$\delta_{lm}^{w_1 s} \text{ l'intervalle } \frac{w_1 - \frac{1}{s}}{\omega_1} + \frac{m}{\omega_1} \leq x \leq \frac{w_1 + \frac{1}{s}}{\omega_1} + \frac{m}{\omega_1}, \text{ où } \frac{1}{s} < w_1 < 1 - \frac{1}{s}.$$

Il existe une suite partielle  $k_1, k_2, \dots$ , extraite de la suite  $l_1, l_2, \dots$ , et des suites de nombres naturels  $m_1, m_2, \dots$  et  $s_1, s_2, \dots$  telles que  $\delta_{k_1 m_1}^{w_1 s_1} \supset \delta_{k_2 m_2}^{w_2 s_2} \supset \dots$ . Pour tout  $y$  appartenant au produit de ces intervalles, les points d'accumulation de la suite  $\omega_{l_1} y - [\omega_{l_1} y], \omega_{l_2} y - [\omega_{l_2} y], \dots$  remplissent l'intervalle  $\langle 0,1 \rangle$ .

Nous avons démontré que l'ensemble des points d'accumulation est indénombrable. Mais, cet ensemble étant toujours fermé, il en résulte qu'il est de puissance du continu.

**Théorème 1.** Soient  $f_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , des fonctions réelles définies dans l'intervalle  $(-\infty, +\infty)$  de période  $l$ , linéairement indépendantes au sens fort dans l'intervalle  $\langle 0, l \rangle$  et dont les ensembles des points de discontinuité sont au plus dénombrables.

Si pour tout  $x$  appartenant à une base rationnelle  $B$  la suite

$$(1) \quad a_n^{(1)} f_1(\omega_n x + \vartheta_n) + a_n^{(2)} f_2(\omega_n x + \vartheta_n) + \dots + a_n^{(k)} f_k(\omega_n x + \vartheta_n)$$

est convergente vers 0 ou bornée respectivement, les suites

$$a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \dots, a_n^{(k)}$$

sont convergentes vers 0 ou bornées respectivement.

**Démonstration.** Posons

$$\varphi_n(x) = a_n^{(1)} f_1(x) + a_n^{(2)} f_2(x) + \dots + a_n^{(k)} f_k(x),$$

$$d_n = |a_n^{(1)}| + |a_n^{(2)}| + \dots + |a_n^{(k)}|$$

et admettons d'abord que  $\varphi_n(x) \rightarrow 0$  pour tout  $x \in B$ . Supposons que la thèse du théorème ne soit pas vraie. Il existe-

rait alors une suite d'indices  $l_1, l_2, \dots$  telle que  $d_{l_i} > d$ , où  $d > 0$ . De plus, on peut admettre que les relations

$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{a_l^{(k)}}{d_{l_i}} = p_k$  sont remplies pour  $k = 1, 2, \dots, n$ . En vertu

du lemme, il existe un  $x_0 \in B$  tel que l'ensemble  $D$  des points d'accumulation de la suite

$$u_{l_i} = \omega_{l_i} x_0 + \vartheta_{l_i} - l \left[ \omega_{l_i} x_0 \Gamma^{-1} + \vartheta_{l_i} \Gamma^{-1} \right]$$

est de puissance du continu. L'ensemble  $C$  de ces points de  $D$  où les fonctions  $f_i(x)$  sont simultanément continues est donc aussi de puissance du continu. Soit  $\xi \in C$  et désignons par  $k_1, k_2, \dots$  une suite partielle extraite de la suite  $l_1, l_2, \dots$ , telle que  $u_{k_i} \rightarrow \xi$ . On a

$$\frac{\varphi_{k_i}(x_0)}{d_{k_i}} \rightarrow 0,$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{k_i}(x_0)}{d_{k_i}} &= \frac{a_{k_i}^{(1)}}{d_{k_i}} f_1(u_{k_i}) + \frac{a_{k_i}^{(2)}}{d_{k_i}} f_2(u_{k_i}) + \dots + \frac{a_{k_i}^{(k)}}{d_{k_i}} f_k(u_{k_i}) \rightarrow \\ &\rightarrow p_1 f_1(\xi) + p_2 f_2(\xi) + \dots + p_k f_k(\xi) \end{aligned}$$

où  $|p_1| + |p_2| + \dots + |p_k| = 1$ . On a ainsi  $p_1 f_1(\xi) + p_2 f_2(\xi) + \dots + p_k f_k(\xi) = 0$  pour chaque  $\xi \in C$ ; il en résulte une contradiction puisque, les fonctions  $f_i(x)$  étant linéairement indépendantes au sens fort dans  $\langle 0, l \rangle$ , on a

$$|p_1| + |p_2| + \dots + |p_k| = 0.$$

Admettons maintenant que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n(x)| < +\infty$  pour tout  $x \in B$ . Soit  $r_1, r_2, \dots$  une suite quelconque qui tend vers  $+\infty$  et soit  $a_n^{(i)} = a_n^{(i)} / r_n$ ,  $\Psi_n(x) = \varphi_n(x) / r_n$ .

Pour tout  $x \in B$ , on a  $\Psi_n(x) \rightarrow 0$ ; il s'en suit d'après ce qui précède que  $a_n^{(i)} \rightarrow 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, k$ , ce qui entraîne évidemment  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n^{(i)}| < +\infty$  pour  $i = 1, 2, \dots, k$ .

On obtient le théorème de CANTOR-LEBESGUE en appliquant le théorème 1 pour  $n = 2$ ,  $f_1(x) = \cos x$ ,  $f_2(x) = \sin x$ ,



$\omega_n = n, \vartheta_n = 0$  et en prenant pour  $B$  un ensemble de mesure positive. On obtient aussi ce théorème d'un cas special du théorème 1, à savoir pour  $n = 1$ , qui s'énonce comme il suit:

**Théorème 2.** *Soit  $f(x)$  une fonction réelle de période 1, discontinue dans un ensemble au plus dénombrable et qui ne s'annule que dans un ensemble au plus dénombrable. Si  $B$  est une base rationnelle et que l'on a pour chaque  $x \in B$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n f(\omega_n x + \vartheta_n) = 0,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Supposons que la relation

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x) = 0$$

a lieu pour tout  $x$  appartenant à une base rationnelle  $B$ .

Puisque

$$a_n \cos n x + b_n \sin n x = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n x + \vartheta_n),$$

on obtient en posant  $\omega_n = n$  et en appliquant le théorème 2

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Si  $B$  est un ensemble de mesure positive dans  $\langle 0, 2\pi \rangle$  nous sommes dans le cas du théorème de CANTOR-LEBESGUE. Supposons maintenant que (2) a lieu dans un ensemble de II-ème catégorie dans  $\langle 0, 2\pi \rangle$ . Il s'en suit que l'ensemble de tous points où la suite  $\{a_n \cos n x + b_n \sin n x\}$  converge vers 0, qui est un ensemble borelien, constitue une base rationnelle, et par conséquent on a (3); c'est le contenu d'un théorème de W. H. YOUNG<sup>5)</sup>.

Les exemples suivants montrent que les hypothèses dans le théorème 2 sont essentielles.

*Il existe une fonction continue qui s'annule dans un ensemble parfait non dense, pour laquelle la thèse du théorème 2 n'est pas vraie.*

<sup>5)</sup> W. H. Young, A note on trigonometrical series, Messenger of Mathematics 38 (1909) p. 44—48.



En effet, considérons l'ensemble triadique de Cantor comme une base rationnelle  $B$  dans  $\langle a, b \rangle$  et définissons la fonction  $f(x)$  en posant  $f(x) = 0$  pour  $x \in B$ ,  $f(x)$  égale à la distance du point  $x$  de l'ensemble  $B$  pour tout  $x \in \langle 0, 1 \rangle - B$  et prolongeons la fonction  $f(x)$  périodiquement sur tout l'axe réel. Posons  $a_n = 1$  pour  $n = 1, 2, \dots$ ; on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n f(3^n x) = 0$ ,  $x \in B$ , puisque  $3^n x - [3^n x] \in B$  si  $x \in B$ , mais la relation  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  n'est pas remplie.

*Il existe une fonction mesurable partout différente de 0, discontinue dans un ensemble non dénombrable, pour laquelle la thèse du théorème 2 n'est pas vraie.*

Soit  $B$  une base de Hamel extraite du l'ensemble triadique de Cantor  $C$ . On peut admettre évidemment que  $1 \in B$ . Si  $u \in B$ ,  $v \in B$ ,  $u \neq 1$ ,  $v \neq 1$ ,  $u \neq v$  et si  $m$  et  $n$  sont des nombres entiers différents, on a  $nu - [nu] \neq mv - [mv]$ .

Posons:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+2} & \text{pour } x = 3^n u - [3^n u], \text{ où } u \in B, u \neq 1, \\ \frac{1}{2} & \text{pour } x \in C, x \neq 3^n u - [3^n u], \text{ où } u \in B, \\ & u \neq 1, \\ 1 & \text{pour } x = 0, 1, \\ 1 & \text{pour } x \in \langle 0, 1 \rangle - C, \end{cases}$$

et prolongeons la fonction périodiquement sur tout l'axe réel. La fonction  $f(x)$  est partout différente de 0 et discontinue pour  $x \in C$ . Posons  $a_n = 1$  pour  $n = 1, 2, \dots$ ; on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n f(3^n x) = 0$  pour tout  $x \in B$ , mais la relation  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  n'est pas remplie.

---

## SUR LES FONCTIONS

$$k_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{n+k\nu}}{(n+k\nu)!} \quad (k=1, 2, \dots; n=0, 1, \dots, k-1)$$

par

JAN G.-MIKUSINSKI (Lublin)

Ces fonctions peuvent être considérées comme une généralisation des fonctions trigonométriques: notamment on a pour  $k=2$ :  $2_0(x) = \cos x$ ,  $2_1(x) = \sin x$ . Nous nous proposons d'étudier les propriétés générales de ces fonctions.

1. On a évidemment

$$(1) \quad \begin{cases} k_n^{(r)}(x) = k_{n-r}(x) & \text{pour } 0 \leq r \leq n < k, \\ k_n^{(r)}(x) = -k_{n-r+k}(x) & \text{pour } 0 \leq n < r < k, \\ k_n^{(rk)}(x) = (-1)^{\nu} k_n(x) & \text{pour } \nu = 1, 2, \dots \end{cases}$$

2. Si le nombre  $k$  est fixé, les  $k$  fonctions

$$(2) \quad k_0(x), \dots, k_{k-1}(x)$$

constituent un système fondamental de l'équation différentielle de  $k^{\text{ème}}$  ordre

$$(3) \quad Y^{(k)} + Y = 0,$$

tel que

$$(4) \quad k_n^{(r)}(0) = \delta_{rn}^* \quad (r, n = 0, \dots, k-1).$$

Or, intégrale générale de (3) peut s'écrire sous la forme

$$(5) \quad \begin{cases} \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}} a_r \exp \left[ x \cos \frac{r\pi}{k} \right] \cdot \sin \left[ x \sin \frac{r\pi}{k} + \beta_r \right], & \text{si } k \text{ est pair,} \\ a_0 e^{-x} + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} a_r \exp \left[ x \cos \frac{r\pi}{k} \right] \cdot \sin \left[ x \sin \frac{r\pi}{k} + \beta_r \right], & \\ \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

---

\*)  $\delta_{rn} = 1$  pour  $r = n$ ,  $\delta_{rn} = 0$  pour  $r \neq n$ .

En choisissant les constantes  $\alpha_r, \beta_r$  d'une manière convenable, chacune des fonctions  $k_n(x)$  peut donc s'exprimer à l'aide de la fonction *exponentielle* et de la fonction *sinus*. On a par exemple:

$$\begin{aligned} 1_0(x) &= e^{-x}, & 3_0(x) &= \frac{1}{3} e^{-x} - \frac{2}{3} e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\pi}{2}\right), \\ 2_0(x) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & 3_1(x) &= -\frac{1}{3} e^{-x} + \frac{2}{3} e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{6}\right), \\ 2_1(x) &= \sin x, & 3_2(x) &= \frac{1}{3} e^{-x} + \frac{2}{3} e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Remarquons encore que, (2) étant un système fondamental de (3), il existe au moins l'une parmi les fonctions (2) pour laquelle le coefficient  $\alpha_1$  dans (5) est différent de zéro. Cette remarque nous sera utile dans la suite.

3. On vérifie sans peine que la fonction  $k_n(x+y)$ , où  $y$  est supposé constant, satisfait encore à l'équation (3). Comme (2) est un système fondamental, il s'en suit que

(6)  $k_n(x+y) = k_0(x) \cdot a_0 + \dots + k_{k-1}(x) \cdot a_{k-1}$ ,  
où les coefficients  $a_0, \dots, a_{k-1}$  ne dépendent pas de  $x$ . Pour déterminer ces coefficients nous dérivons (6)  $r$  fois

$$k_n^{(r)}(x+y) = k_0^{(r)}(x) \cdot a_0 + \dots + k_{k-1}^{(r)}(x) \cdot a_{k-1}.$$

Lorsque  $x=0$ , cette formule donne, d'après (4) et (1), successivement pour  $r=0, 1, \dots, k-1$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= k_n(y), \quad a_1 = k_{n-1}(y), \dots, \quad a_n = k_0(y), \\ a_{n+1} &= -k_{k-1}(y), \quad a_{n+2} = -k_{k-2}(y), \dots, \quad a_{k-1} = k_{n+1}(y). \end{aligned}$$

On est amené ainsi à la formule

$$(7) \quad k_n(x+y) = k_0(x)k_n(y) + \dots + k_n(x)k_0(y) - k_{n+1}(x)k_{k-1}(y) - \dots - k_{k-1}(x)k_{n+1}(y).$$

Cette formule est facile à retenir, car la somme des indices est dans chaque produit congruente avec  $n$  modulo  $k$ . Le signe du produit est  $+$  ou  $-$  suivant que cette somme est égale à  $n$  ou  $n+k$ .

En particulier on a

$$\begin{aligned} 1_0(x+y) &= 1_0(x)1_0(y), \\ 2_0(x+y) &= 2_0(x)2_0(y) - 2_1(x)2_1(y), \\ 2_1(x+y) &= 2_0(x)2_1(y) + 2_1(x)2_0(y), \end{aligned}$$





Considérons maintenant deux fonctions quelconques  $k_p(x)$  et  $k_q(x)$ . Le déterminant

$$\kappa(x) = \begin{vmatrix} k'_p(x) & k'_q(x) \\ k_p(x) & k_q(x) \end{vmatrix}$$

est, à signe près, égal à l'un des déterminants  $C$ , il est donc constamment différent de zéro pour  $x > 0$ . Il s'en suit que les zéros des fonctions  $k_p(x)$  et  $k_q(x)$  sont simples et ne peuvent pas se confondre. Nous démontrerons encore que si  $x_1$  et  $x_2$  ( $0 < x_1 < x_2$ ) sont deux zéros consécutifs de  $k_p(x)$ , il existe entre  $x_1$  et  $x_2$  exactement un zéro de  $k_q(x)$ . En effet, si l'on avait  $k_q(x) \neq 0$  pour  $x_1 \leq x \leq x_2$ , la fonction  $\varphi(x) = \frac{k_p(x)}{k_q(x)}$  serait continue pour  $x_1 \leq x \leq x_2$  et nulle aux extrémités de cet intervalle. On aurait donc  $\varphi'(\xi) = \frac{\kappa(\xi)}{k_q(\xi)^2} = 0$  pour  $x_1 < \xi < x_2$ , ce qui est impossible, car  $\kappa(\xi) \neq 0$ .

Il existe donc un zéro de  $k_q(x)$  entre  $x_1$  et  $x_2$ . Ce zéro est unique. En effet, s'il y en avait deux  $\xi_1$  et  $\xi_2$ , il existerait, par raisons de symétrie, un zéro de  $k_p(x)$  entre  $\xi_1$  et  $\xi_2$  et les zéros  $x_1, x_2$  ne seraient pas consécutifs.

On voit facilement d'après (5) que toutes les fonctions de la suite (2) ont une infinité de zéros positifs (pour  $k \geq 2$ ). Comme les fonctions  $k_p(x)$  et  $k_q(x)$  ont été choisies arbitrairement, il résulte de ce que nous venons de dire que ces zéros s'entrelacent pour chaque couple des fonctions de la suite (2). Cette propriété est bien connue, dans le cas  $k = 2$ , pour les fonctions sinus et cosinus.

5. Écrivons l'une quelconque  $k_n(x)$  des fonctions (2) sous la forme (5) et soit  $r$  le moindre indice positif, tel que

$\alpha_r \neq 0$ . Si  $\omega(x) = \alpha_r \exp \left[ x \cos \frac{r\pi}{k} \right]$ , on voit facilement que

le quotient  $\frac{k_n(x)}{\omega(x)}$  et la fonction  $\sin \left[ x \sin \frac{r\pi}{k} + \beta_r \right]$  diffèrent

très peu pour  $x$  assez grand et qu'il en est de même de leurs dérivées. Il s'en suit que les zéros de ces deux fonc-

tions différent aussi très peu pour  $x$  assez grand. Si donc  $x_1, x_2, \dots$ , est la suite croissante de zéros de  $k_n(x)$ , on a

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = \frac{\pi}{\sin \frac{r\pi}{k}}.$$

Nous démontrerons qu'on a toujours

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{k}}.$$

En effet, il existe au moins l'une  $k_{n_0}(x)$  des fonctions (2) pour laquelle  $\alpha_1 \neq 0$ . La relation (11) est donc vraie pour cette fonction. Si l'on avait maintenant (10) avec  $r \geq 2$  pour quelque fonction  $k_n(x)$ , les zéros de  $k_{n_0}(x)$  et de  $k_n(x)$  ne pourraient pas s'entrelacer, ce qui est en contradiction avec le paragraphe précédent.

Nous avons ainsi démontré que *les distances des zéros voisins de chacune des fonctions  $k_n(x)$  tendent vers  $\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{k}}$  à mesure que ces zéros s'éloignent vers l'infini*. Ce fait est trivial, dans le cas  $k=2$ , pour les fonctions *sinus* et *cosinus*.

6. D'après la formule de Taylor on peut écrire, en profitant des relations (1) et (4),

$$k_n(x) = w_{kn}(x) + \frac{x^{2k}}{(2k)!} k_n(\xi_1), \text{ où } w_{kn}(x) = \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+k}}{(n+k)!}, \quad 0 < \xi_1 < x;$$

$$k_n(x) = W_{kn}(x) - \frac{x^{3k}}{(3k)!} k_n(\xi_2), \text{ où } W_{kn}(x) = \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+k}}{(n+k)!} + \frac{x^{n+2k}}{(n+2k)!}, \quad 0 < \xi_2 < x.$$

Désignons respectivement par  $p_{kn}$ ,  $p_{kn}$  et  $P_{kn}$  les *moindres zéros positifs* des trois fonctions  $w_{kn}(x)$ ,  $k_n(x)$  et  $W_{kn}(x)$ . Un raisonnement très simple conduit aux inégalités

$$(12) \quad p_{kn} < p_{kn} < P_{kn}.$$

Ces inégalités peuvent servir à une appréciation approchée des valeurs des moindres zéros positifs de  $k_n(x)$ . On a, en effet,

$$(13) \quad p_{kn} = \sqrt[k]{(n+1)\dots(n+k)}, \quad P_{kn} < \sqrt[k]{2} \sqrt[k]{(n+1)\dots(n+k)}.$$

L'égalité pour  $p_{kn}$  est évidente. Pour démontrer la dernière inégalité pour  $P_{kn}$  il suffit de vérifier que le polynôme  $W_{kn}(x)$  est négatif pour  $x = \sqrt[k]{2} \sqrt[k]{(n+1)\dots(n+k)}$ . En effet, en substituant cette valeur dans  $W_{kn}(x)$ , il vient après quelques calculs très simples

$$W_{kn}(x) = x^n \left( -1 + \frac{4(n+1)\dots(n+k)}{(n+k+1)\dots(n+2k)} \right)$$

et, en vertu des inégalités  $0 \leq n \leq k-1$ ,

$$W_{kn}(x) < x^n \left( -1 + \frac{4 \cdot k \dots (2k-1)}{(2k)\dots(3k-1)} \right).$$

D'où  $W_{kn}(x) < 0$  pour  $k \geq 3$ .

Les formules (12) et (13) donnent

$$(14) \quad 1 < \frac{p_{kn}}{\sqrt[k]{(n+1)\dots(n+k)}} < \sqrt[k]{2}.$$

Cette formule a été démontrée pour  $k=3, 4, \dots$ , mais on peut vérifier directement qu'elle est encore vraie pour  $k=2$ .

On déduit facilement de (14) les relations suivantes:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{kn}}{k} = \frac{1}{e}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k, k-n}}{k} = \frac{4}{e}.$$

Les valeurs approchées de  $p_{kn}$ , pour les indices  $k \leq 6$ , peuvent être arrangées dans le tableau suivant:

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5
2	1'571	3'142				
3	1'850	3'009	4'232			
4	2'221	3'345	4'443	5'553		
5	2'605	3'728	4'790	5'828	6'853	
6	2'994	4'141	5'217	6'265	7'299	8'324

# ON A THEOREM OF HADAMARD

by

A. ZYGMUND (Chicago)

## § 1.

The very well known result of Hadamard asserts that if a lacunary power series

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{n_k} = f(z)$$

with  $n_{k+1}/n_k > q > 1$  has a finite and positive radius of convergence, the function  $f(z)$  is not continuable across the circle of convergence. This theorem was considerable generalized later. In particular, we know that the function  $f(z)$  is still non-continuable, if instead of the condition  $n_{k+1}/n_k > q > 1$  we merely assume that  $n_{k+1} - n_k \rightarrow +\infty$ . In this note we propose to generalize Hadamard's theorem in a different direction.

The main generalization is given in this section (Theorem 1, below). Further extensions are given in section 2.

There is another formulation of Hadamard's theorem, bearing on lacunary trigonometric series

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x) \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{in_k x} \quad (n_{-k} = -n_k) \end{aligned}$$

and on the associated harmonic functions

$$(3) \quad \begin{aligned} u(r, x) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x) r^{n_k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{in_k x} r^{|n_k|} \end{aligned}$$



In what follows we consider only real-valued series (extensions to complex-valued ones being immediate), so that  $c_{-k} = \bar{c}_k$  for all  $k$ . Whenever we write the condition  $n_{k+1}/n_k > q > 1$ , we shall always mean it for  $k=1, 2, \dots$ . Let  $z = r e^{ix}$ , and let us assume for simplicity that  $|z|=1$  is the circle of convergence for (3). Then the function  $u(r, x)$  cannot be continued as a harmonic function across  $|z|=1$ . For otherwise, we could also continue the conjugate harmonic function

$$v(r, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin n_k x - b_k \cos n_k x) r^{n_k},$$

and so also the analytic function  $f(z) = u + iv$ . Or to put it slightly differently, if the trigonometric series (2), with its missing terms replaced by zeros, is uniformly summable by the Abel method on an arc  $\alpha \leq x \leq \beta$  to a limit function which is an analytic function of  $x$ , then  $u(r, x)$  is harmonic in a circle  $|z| < 1 + \epsilon, \epsilon > 0$ .

*Theorem 1.* a) Suppose that the series (2) with  $n_k + 1/n_k > q > 1$  is convergent for every  $x$  belonging to a set  $E$  of positive measure, and that the sum  $f(x)$  of (2) coincides on  $E$  with a function  $\varphi(x)$  which is analytic in an interval  $(\alpha, \beta)$  containing  $E$ . Then the function (3) is harmonic in a circle  $|z| < 1 + \epsilon, \epsilon > 0$ . b) If (2) converges to 0 in a set  $E$  of positive measure, then the series vanishes identically.

Let us first observe that nothing would be gained here by considering instead of convergence the Abel summability, or summability by any linear method, of the series (2). For it is well known (see Zygmund [5], p. 120) that if a lacunary series (2) is summable by any linear method of summation in a set of positive measure, the series converges almost everywhere. For Abel's summability we even have a stronger result. (Hardy and Littlewood [2]). namely that if (2) is Abel summable at any point it is convergent there.

Part b) of the theorem is not new (see Zygmund [6]).

We begin the proof of the theorem by a few auxiliary remarks.

(I) Let  $g(x)$  be a measurable function defined for  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Then there is a sequence of numbers  $h_n$  independent of  $x$ , tending to zero, and such that  $g(x + h_n) \rightarrow g(x)$  for almost every  $x$ . Moreover,  $\{h_n\}$  can be selected from any given sequence  $\{k_n\} \rightarrow 0$ . (Auerbach [1]).

Without loss of generalite, we may assume that  $g(x)$  is periodic of period  $2\pi$ . If  $g(x)$  is bounded (or merely integrable), then, as is well known,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} |g(x+h) - g(x)| dx = 0$$

and so 
$$\int_0^{2\pi} |g(x+k_n) - g(x)| dz \rightarrow 0.$$

It is therefore sufficient to apply the familiar fact that from every sequence of functions converging in the mean, we can select a subsequence converging almost everywhere. For the general case, we consider the function

$$\gamma(x) = g(x)/\{1 + |g(x)|\}, \text{ which is bounded.}$$

(II) Let  $E$  be a measurable set of points situated in the interval  $(0, 2\pi)$ . We can then find a sequence of numbers  $\{h_n\} \rightarrow 0$  and such that for almost all  $x \in E$  the points  $x + h_m$  will belong to  $E$  for  $m > m_0(x)$ .

For let  $f(x)$  be the characteristic function of the set  $E$ , and let  $\{k_n\}$  be any sequence tending to zero. From it we can select a sequence  $l_n$  such that  $f(x + l_n) \rightarrow f(x)$  almost everywhere, and from  $\{l_n\}$  a sequence  $\{h_m\}$  such that  $f(x - h_m) \rightarrow f(x)$  almost everywhere. Since  $f$  takes on the values 0, 1 only, the relation  $f(x \pm h_m) \rightarrow f(x)$  implies that  $f(x \pm h_m) = f(x)$  for  $m > m_0(x)$ .

(III) If a lacunary series (2) is summable by a linear method of summation in a set of positive measure, then the series  $\Sigma(a_k^2 + b_k^2)$  converges.

This is well known. (See e. g. Zygmund [5], p. 120).

(IV) Let  $E$  be a set of positive measure and situated in the interval  $(0, 2\pi)$ . Let  $\lambda$  be a given number greater than 1. There is then a number  $\mu_0 = \mu_0(\lambda, q, E)$  such that the sum

$f(x)$  of every series (2) satisfying  $n_{k+1}/n_k > q > 1$ ,  $a_0 = 0$ , and  $n_1 > \mu_0$  satisfies the double inequality.

(4)

$$\lambda^{-1} |E|^{-1} \frac{1}{2} \sum (a_k^2 + b_k^2) < \int_E f^2 dx < \lambda |E|^{-1} \frac{1}{2} \sum (a_k^2 + b_k^2)$$

This result is known though it has not been stated explicitly. Its proof is part of the proof of the theorem on p. 69 of Zygmund [5]. Only the first inequality (4) will be needed here, and any fixed value of  $\lambda$ , say  $\lambda = 2$ .

We now pass to the proof of part a) of the theorem. Let  $E$  be the set of the theorem. There is a sequence  $\{h_m\} \rightarrow 0$  such that for almost every  $x \in E$  and for all  $m$  large enough  $x \pm h_m \in E$ . Hence

$$\frac{\varphi(x+h_m) - \varphi(x-h_m)}{2h_m} = \frac{f(x+h_m) - f(x-h_m)}{2h_m} = \sum_{k=1}^{\infty} n_k (b_k \cos n_k x - a_k \sin n_k x) \frac{\sin n_k h}{n_k h}$$

As  $m \rightarrow \infty$ , the left side here tends to  $\varphi'(x)$ , and so almost everywhere in  $E$  the series  $\sum n_k (b_k \cos n_k x - a_k \sin n_k x)$  is summable by a linear method of summation to sum  $\varphi'(x)$  (the method applied is the familiar method of Lebesgue, the parameter  $h$  tending to 0 being confined to a fixed sequence of values). Let us denote the series (2) by  $S$ , and let  $S', S'', \dots$  denote the series obtained from  $S$  by repeated termwise differentiation. On account of (III), the series  $\sum n_k^2 (a_k^2 + b_k^2)$  is convergent. Thus there is a set  $E_1$  contained in  $E$  and of the same measure, and such that the series  $S'$  converges in  $E_1$  to sum  $\varphi'(x)$ . Repeating the argument we see that there is a set  $E_2 \subset E_1$ , such that  $|E_2| = |E_1| = |E|$ , and that  $S''$  converges almost everywhere in  $E_2$  to sum  $\varphi''(x)$ . Generally, there is a set  $E_\nu \subset E_{\nu-1} \subset \dots \subset E_1 \subset E$ , with  $|E_\nu| = |E|$  and such that  $S^{(\nu)}$  converges in  $E$  to sum  $\varphi^{(\nu)}(x)$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ )

Let  $E^* = E \setminus E_1 \setminus E_2 \dots$ , so that  $E^* \subset E$ ,  $|E^*| = |E|$ . Let us apply the first inequality (4), with  $\lambda = 2$ , to the series  $S^{(\nu)}$

and to the set  $E^*$ . By rejecting a few first terms of the series (2) which merely changes the function  $\varphi$ , we may assume that  $n_1 > \mu_0$  ( $\lambda = 2, q, E^*$ ). The integral in (4) is not changed if  $E^*$  is replaced by  $E_\nu$ . Hence

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) n_k^{2\nu} \leq \frac{4}{|E_\nu|} \int_{E_\nu} \varphi^{(\nu)^2} dx \leq \frac{4}{|E|} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^{(\nu)^2} dx.$$

We may assume that the interval  $(\alpha, \beta)$  of analyticity of  $\varphi$  is closed. We then have a familiar inequality (a consequence of Cauchy's formula for  $\varphi^{(\nu)}$ )

$$|\varphi^{(\nu)}(x)| \leq M \nu! \delta^{-\nu} \quad (\alpha \leq x \leq \beta)$$

where  $M$  and  $\delta$  are positive numbers independent of  $\nu$ . Hence, denoting by  $M_1$  another constant, and writing

$\gamma_k = (a_k^2 + b_k^2)^{\frac{1}{2}}$ , we get from (5) the inequality

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 n_k^{2\nu} \leq (M_1 \nu! \delta^{-\nu})^2,$$

and in particular,

$$(6) \quad \gamma_k n_k^\nu \leq M_1 \nu! \delta^{-\nu} \leq M_1 \nu^\nu \delta^{-\nu}$$

Let us set  $\nu = [\frac{1}{2} \delta n_k] =$  the integer part of  $\frac{1}{2} \delta n_k$ . Then by (6),

$$\gamma_k^{1/n_k} \leq M_1^{1/n_k} (\nu / \delta n_k)^{\nu/n_k} \leq M_1^{1/n_k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu/n_k},$$

and so  $\limsup \gamma_k^{1/n_k} \leq 2^{-1/2} \leq 1$ , which proves part a) of the theorem.

The proof of part b) is still simpler. Initially the function  $\varphi$  is identically zero, but in order to apply (w) we have to drop a few first terms of  $S$ , so that ultimately  $\varphi$  is a trigonometric polynomial of order  $m$  less than  $n_1$ . It is clear that  $|\varphi^\nu|$  does not exceed  $Mm^\nu$ , where  $M$  is the sum of the absolute values of the coefficients of  $\varphi$ . The first inequality (5) thus leads to

$$\sum \gamma_k^2 n_k^2 \leq 4M^2 m^{2\nu}$$

Let us assume that  $\gamma_1 \neq 0$ . The last inequality then gives

$$\gamma_1 n_1^\nu \leq 2Mm^\nu$$



which on account of  $m < n_1$  is impossible for  $\nu$  large enough. Hence  $\gamma_2$  is zero, and so are all the subsequent  $\gamma$ 's. Thus the function  $f$  is a trigonometric polynomial of order  $m$ . Since it vanishes in a set of positive measure, it must be identically zero.

*Remarks:* 1. The theorem remains valid even if the  $n_k$  are not necessarily integers, provided we keep the condition  $n_{k+1}/n_k > q > 1$ . In the foregoing proof we only have to modify (IV). Combining its proof with a remark that if  $0 < h > \frac{1}{2} \text{Max } |n_k - n_l|$  for all  $n_k \neq n_l$ , then the system  $\{e^{in_k x}\}$  is orthogonal over  $(-\infty, +\infty)$  with respect to the weight function  $(x^{-1} \sin hx)^2$  (see, in particular, Hartman [3] Kac [4]) we immediately get that

$$\begin{aligned} |6a| \quad \lambda^{-1} \frac{1}{2} \sum (a_k^2 + b_k^2) &< \int_E K(x) f^2(x) dx / \int_E K(x) dx \\ &< \lambda \frac{1}{2} \sum (a_k^2 + b_k^2) \end{aligned}$$

provided  $n_1 > \mu_0$  ( $\lambda > 1$ ,  $q$ ,  $E$ ),  $a_0 = 0$ . Otherwise the proof remains the same.

2. The proof of Theorem 1 shows that if  $\varphi(x)$ , instead of being regular in  $(\alpha, \beta)$ , is  $k$  times differentiable there, then  $S^{(k)}$  is of the class  $L^2$ . Even less stringent assumption concerning  $\varphi$  would ensure the same conclusion.

## § 2.

Part b) of Theorem 1 asserts that if two lacunary trigonometric series converge on a set of positive measure, and if their sums coincide there, then the two series are identical, *provided the exponents of the two series are the same* (or, what is the same thing, provided the joint sequences of the exponents in both series is still lacunary). Our main purpose now will be to show that the italicized assumption about the exponents can be omitted.

*Theorem 2.* a) Suppose that two lacunary series

$$(7) \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c'_k e^{in'_k x}, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c''_k e^{in''_k x}$$

$(n'_k + 1/n'_k > q > 1, \quad n''_{k+1}/n''_k > q > 1, \quad k = 1, 2, \dots)$

converge in a set  $E$  of positive measure to sums  $f_1(x)$ , and  $f_2(x)$  respectively, and that  $f_1(x) - f_2(x)$  coincides on  $E$  with a function  $\varphi(x)$  which is regular in an interval  $(\alpha, \beta)$  comprising  $E$ . Then the difference

$$u_1(r, x) - u_2(r, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c'_k e^{in'_k x} \frac{|n'_k|}{r} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c'_k e^{in''_k x} \frac{|n''_k|}{r}$$

of the harmonic functions associated with the series (7) is harmonic in a circle  $|z| < 1 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . b) If  $\varphi(x) = 0$ , the two series (7) are identically the same.

In proving this theorem we are led to consider trigonometric series which are differences or, what is the same thing, sums of two lacunary series.

It is natural to generalize this notion by considering trigonometric series which are sums of a finite number  $m$  of lacunary series. Such series will be called of type  $m$ . A series of type  $m > 1$  need not be lacunary (take, for example,  $m = 2$ ,  $n'_k = 2^k$ ,  $n''_k = 2^k + 1$ , for  $k = 1, 2, \dots$ ) though it must possess infinitely many gaps. For taking, as we may, the same  $q > 1$  for the  $m$  lacunary components, and setting  $q_1 = q^{1/(m+1)}$  we see that for every integer  $N > 0$  at least one of the intervals  $(Nq_1^j, Nq_1^{j+1})$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , does not contain any exponent of our  $m$  lacunary series, and that  $Nq_1^{j+1}/Nq_1^j = q_1 > 1$ .

Theorem 2 is a corollary, for  $m = 2$ , of the following.

*Theorem 3.* *Theorem 1 holds if the condition of lacunarity of the series (2) is replaced by the condition that (2) is of type  $m$ .*

On account of Theorem 3, also in Theorem 2 we can replace the condition of lacunarity of the series (7), by its being of type  $m$ .

Analyzing the proof of Theorem 1, we see that the only properties of lacunary series we required were a) proposi-

tion (III), b) its converse, asserting that a lacunary series of the class  $L^2$  converges almost everywhere, c) proposition (IV), or, rather, the first part of inequality (4) for some  $\lambda > 1$ . If we therefore, can prove the same results for series of type  $m$ , the proof of Theorem 3 will be merely a repetition of that of Theorem 1, and need not be gone into.

The results we need are of independent interest and will be stated as separate theorems.

*Theorem 4. If a trigonometric series*

$$(8) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}$$

is of type  $m$ , and if it converges on a set  $E$  of positive measure, then  $\sum |C_n|^2$  converges. The conclusion holds if instead of the convergence of (8) on  $E$  we assume that (8) is summable there by any linear method of summation.

*Theorem 5. If a series of type  $m$  is also a Fourier series of the class  $L^2$ , the series converges almost everywhere.\*)*

*Theorem 6. Suppose that (8) is of type  $m$ , so that it is a sum of  $m$  lacunary series,*

$$(S_j) \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{(j)} e^{in_k^{(j)} x}, \quad n_{k+1}^{(j)} / n_k^{(j)} > q > 1, \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

and that (8) converges on a set  $E$ ,  $|E| > 0$ , to sum  $f(x)$ . Then there is an integer  $p_0 = p_0(q, E, m)$  and a constant  $A = A(q, E, m)$  such that

$$(9) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 < A \int_E f^2 dx,$$

provided  $C_n = 0$  for  $|n| \leq p_0$ .

We begin with the proof of Theorem 6. It will be based on the following lemma.

---

\*) Theorem 5 can also be deduced from a result of Erdős, [7]. We prove it here because it is needed for Theorem 2 and because it easily follows from Theorem 4.

(v) Given a set  $E$  of positive measure and any integer  $m \geq 1$ , there is a positive number  $\delta = \delta(E, m)$  such that for every sum  $c_1 e^{ip_1 x} + c_2 e^{ip_2 x} + \dots + c_m e^{ip_m x}$  with integral exponents  $p_1 < p_2 < \dots < p_m$  we have

$$(10) \quad \int_E \left| \sum_{s=1}^m c_s e^{ip_s x} \right|^2 dx \geq \delta |E| \sum_{s=1}^m |c_s|^2$$

$$(11) \quad \sum_{s \neq t} c_s \bar{c}_t \int_E e^{i(p_s - p_t)x} dx \geq -(1 - \delta) |E| \sum_s |c_s|^2$$

We shall only need (11), but it is enough to prove (10) from which (11) follows immediately.

The inequality (10), with  $\delta = 1$ , is obvious for  $m = 1$ . Suppose we have already proved (10) for  $m = 1, 2, \dots, k$ . We shall show its validity for  $m = k$ . Without loss of generality we may assume that  $p_1 = 0$  and that  $\sum |c_s|^2 = 1$ .

Suppose that (v) is not true for  $m = k$  and for a certain  $E$ ,  $|E| > 0$ . We can then find a sequence of sums  $T_h(x) =$

$$c_1^h e^{ip_1^h x} + \dots + c_k^h e^{ip_k^h x}, \quad (h = 1, 2, \dots)$$

such that  
 $|c_s^h|^2 = 1, p_1^h = 0 < p_2^h < \dots < p_k^h$ , and that

$$(12) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \int_E \left| \sum_s c_s^h e^{ip_s^h x} \right|^2 dx = 0.$$

Taking a subsequence of  $\{T_h(x)\}$  but keeping the previous notation, we may assume that, for each  $s$ ,

- a) the coefficient  $c_s^h$  tends to a limit  $c_s^*$ ,
- b) the exponent  $p_s^h$  tends to a limit  $p_s^*$ .

Clearly,  $\sum |c_s^*|^2 = 1$ . Some of the numbers  $p_s^*$  may be  $+\infty$ , but not all, since  $p_1^* = 0$ . Let  $p_1^* < p_2^* < \dots < p_r^*$  be finite, and let  $p_{r+1}^* = \dots = p_k^* = +\infty$  (the latter category does not exist if  $r = k$ ). Since  $p_s^h = p_s^*$  for  $s = 1, 2, \dots, r$  and for  $h$  large enough, (12) implies

$$(13) \quad \int_E \left| \sum_{s=1}^r c_s^* e^{ip_s^* x} + \sum_{s=r+1}^m C_s^h e^{ip_s^h x} \right|^2 dx \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow \infty)$$



If  $r=k$ , the second sum in the integrand does not exist, and we get  $\int_E \left| \sum_s c_s^* e^{ip_s^* x} \right|^2 dx = 0$ , which contradicts the assumption that  $\sum_s |c_s^*|^2 = 1$ . Therefore,  $1 \leq r < m$ . It cannot happen that  $c_1^* = c_2^* = \dots = c_r^* = 0$ . For that would mean that  $|c_{r+1}^h|^2 + \dots + |c_k^h|^2 = 1$ , and this, together with (13), would contradict the validity of (v) for  $m < k$ . Hence the sum  $T^* = c_1^* e^{ip_1^* x} + \dots + c_r^* e^{ip_r^* x}$  is not identically zero. Let us take a subset  $E_1$  of  $E$ ,  $|E_1| > 0$ , such that the integral of  $T^*$  over  $E_1$  is not zero. Since (13) remains valid if  $E$  is replaced by  $E_1$ , we immediately get (using Schwarz's inequality and dropping the sign of absolute value)

$$(14) \quad \int_{E_1} T^* dx + \sum_{s=r+1}^m c_s^h \int_{E_1} e^{ip_s^h x} dx \rightarrow 0.$$

The integral of  $\exp ip_s^h x$  over  $E_1$ , tends to 0, in virtue of the Riemann-Lebesgue theorem, and since  $|c_s^h| \leq 1$ , (14) implies that  $\int_{E_1} T^* dx = 0$ , contrary to assumption. This completes the proof of (v). (The assumption that the  $p_s$  are integers can be dropped, but this is not needed for our purposes).

Let us revert to the proof of Theorem 6. We shall first assume that each of the series  $S_j$ , and so also (8), is a finite trigonometric polynomial. Without loss of generality we may also assume that no two sequences  $\{n_k(j)\}_{k=\pm 1, \pm 2, \dots}$  have elements in common. For if an  $n_h^{(1)}$  also belongs to any of the sequences  $\{n_k^{(2)}\}, \{n_k^{(3)}\}, \dots, \{n_k^{(m)}\}$ , we shift the corresponding terms from  $S_2, S_3, \dots, S_m$  to  $S_1$ . If after this an  $n_h^{(2)}$  belongs to any of the sequences  $\{n_k^{(3)}\}, \dots, \{n_k^{(m)}\}$ , we shift the corresponding terms from  $S_3, \dots, S_m$  to  $S_2$ ; and so on. Under these operations neither side of (9) will be affected, but the sequences  $\{n_k^{(j)}\}$  will not overlap (for  $k \neq 0$ ), and (9) will take the form

$$(15) \quad \sum_{j=1}^m \sum_k |c_k^{(j)}|^2 \leq A \int_E (f_1 + f_2 + \dots + f_n)^2 dx,$$

where  $f_j$  is the sum of  $S_j$ . Since we anyway assume that  $C_0 = 0$ , we shall also have  $c_0^{(1)} = c_0^{(2)} = \dots = 0$ .

We write

$$(16) \quad \int_E (f_1 + f_2 + \dots + f_m)^2 dx = \sum_j \int_E f_j^2 dx + \sum_{h \neq j} \int_E f_h f_j dx.$$

By (IV), given any  $\lambda > 1$  we have

$$(17) \quad \lambda^{-1} |E| \sum_k |c_k^{(j)}|^2 \leq \int_E f_j^2 dx \quad (j=1, 2, \dots, m),$$

provided  $n_1^{(1)}, n_1^{(2)}, \dots, n_1^{(m)}$  are large enough (or, what is the same thing, provided  $C_n = 0$  for  $|n| \leq N$ ). We define the  $\lambda$  in (17) by the formula  $\lambda^{-1} = 1 - \delta/4$ , where  $\lambda$  is taken from (v). If we can prove that

$$(18) \quad -\left(1 - \frac{1}{2} \delta\right) |E| \sum_j \sum_k |c_k^{(j)}|^2 \leq \sum_{h \neq j} \int_E f_h f_j dx,$$

then, by adding this to the sum of the formulas (17), and taking into account (16), we shall get the inequality (15) with  $A = 4/\delta |E|$ . It remains therefore to prove the validity of (18) if  $n_1^{(1)}, \dots, n_1^{(m)}$  are large enough.

Let us set

$$\alpha(n) = \int_E e^{inx} dx, \quad q_1 = q^{1/2m}$$

On account of Bessel's inequality,

$$(19) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} |\alpha(n)|^2 < +\infty$$

Let us temporarily fix  $h$  and  $j$ . Two exponents  $n_k^{(h)}$  and  $n_k^{(j)}$  will be called *neighbors* if they are distinct and if their ratio is contained between  $q_1^{-1}$  and  $q_1$ . In particular, neighbors are of the same sign. Since  $q_1/q_1^{-1} = q_1^2 = q^{1/m} < q$ , every  $n_k^{(h)}$  has (for  $j$  fixed) at most one neighbor  $n_l^{(j)}$ . If  $n_k^{(h)}$  is a neighbor of  $n_l^{(j)}$ , then  $n_l^{(j)}$  is a neighbor of  $n_k^{(h)}$ . Clearly  $h$  and  $j$  must then be distinct. We write

$$(20) \quad \int_E f_h f_j dx = \sum_{k,l} c_k^{(h)} c_l^{-(j)} \alpha(n_k^{(h)} - n_l^{(j)}) = \sum' + \sum'',$$

where summation in  $\Sigma'$  is extended over all pairs of neighbors, and in  $\Sigma''$  over the remaining pairs  $k, l$ . By Schwarz's inequality,

$$(21) \quad \begin{aligned} |\Sigma'' c_k^{(h)} c_l^{-(j)} \alpha(n_k^{(h)} - n_l^{(j)})| &\leq (\Sigma'' |c_k^{(h)} c_l^{(j)}|^2)^{\frac{1}{2}} (\Sigma'' |\alpha(n_k^{(h)} - n_l^{(j)})|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \sum_k |c_k^{(h)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_l |c_l^{(j)}|^2 \right) (\Sigma'' |\alpha(n_k^{(h)} - n_l^{(j)})|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \sum_k |c_k^{(h)}|^2 + \sum_l |c_l^{(j)}|^2 \right) (\Sigma'' |\alpha(n_k^{(h)} - n_l^{(j)})|^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Let us temporarily take it for granted that every integer  $N$  can be represented no more than  $\Delta$  times, with  $\Delta$  independent of  $N$ , in the form  $n_k^{(h)} - n_l^{(j)}$ , where  $n_k^{(h)}$  and  $n_l^{(j)}$  are not neighbors. Then the last sum in (21) does not exceed  $\Delta \Sigma |\alpha(N)|^2$ , where summation is extended over all integers  $N$  admitting of at least one such representation. Clearly, if  $n_1^{(h)}$  and  $n_1^{(j)}$  are large enough, and  $n_k^{(h)}$  and  $n_l^{(j)}$  are not neighbors, the difference  $n_k^{(h)} - n_l^{(j)}$  is always numerically large. This fact, combined with (19), implies that the last factor in (21) can be made arbitrarily small by assuming  $n_1^{(h)}$  and  $n_1^{(j)}$  large enough. Let us assume that this factor  $\leq \delta/(m-1)$  (see (v)). Then, considering all possible values  $h \neq j$  we get from (21)

$$(22) \quad \left| \sum_{h \neq j} \sum_{k,l} c_k^{(h)} c_l^{-(j)} \alpha(n_k^{(h)} - n_l^{(j)}) \right| \leq \frac{1}{2} \delta |G| \sum_{h=1}^m \sum_k |c_k^{(h)}|^2$$

It remains to consider the sum

$$(23) \quad \begin{aligned} \sum_{h \neq j} \sum_{k,l} c_k^{(h)} c_l^{-(j)} \alpha(n_k^{(h)} - n_l^{(j)}) &= \\ &= \sum_{h \neq j} \sum_{k,l} c_k^{(h)} c_l^{-(j)} \int \exp i(n_k^{(h)} - n_l^{(j)}) dx \end{aligned}$$

We shall say that two exponents  $n_k^{(h)}$  and  $n_l^{(j)}$  are associates if they are extreme terms of a finite sequence of exponents

$$(24) \quad n_k^{(h)}, n_{k'}^{(h')}, n_{k''}^{(h'')}, \dots, n_l^{(j)}$$

in which every two successive terms are neighbors. We assume, as we may, that the sequence (24) cannot be reduced, that is to say that no element of it occurs twice. Clearly every two successive superscripts  $h, h', h'', \dots, j$  must be distinct. We shall prove that the sequence  $h = h^{(0)}, h', h'', \dots, h^{(r)} = j$  does not contain more than  $m$  elements, and that all the elements are distinct. For if we had  $r \geq m$ , we would have  $h^{(s)} = h^{(t)}$  for  $s$  and  $t$  satisfying  $0 < t - s \leq m$ . Since the ratio of two consecutive terms in (24) is contained between  $q_1^{-1}$  and  $q_1$ , the ratio of the terms with superscripts  $h^{(s)}$  and  $h^{(t)}$  would be contained between  $q_1^{-m}$  and  $q_1^m$ , that is between  $q_1^{-\frac{1}{2}}$  and  $q_1^{\frac{1}{2}}$ . Since  $q^{\frac{1}{2}} / q^{-\frac{1}{2}} = q$ , that would imply not only  $h^{(s)} = h^{(t)}$  but also  $k^{(s)} = k^{(t)}$ , and so, contrary to assumption, (24) would contain two identical terms. Thus (24) contains no more than  $m$  terms. That all the numbers  $h^{(0)}, h', \dots, h^{(r)}$  are distinct follows by the same argument as we have just used: if  $h^{(s)} = h^{(t)}$  with  $s < t$ , then  $0 \leq t - s < m$ , and we would also have  $k^{(s)} = k^{(t)}$ .

In particular, therefore,  $h \neq j$ .

Let us now revert to the sum (23) and suppose that it contains a term  $c_k^{(h)} c_l^{-(j)} \alpha (n_k^{(h)} - n_l^{(j)})$ . We shall collect in one group the terms

$$(25) \quad c_{k'}^{(h')} c_{l'}^{-(j')} \alpha (n_{k'}^{(h')} - n_{l'}^{(j')})$$

such that  $n_{k'}^{(h')}$  is either identical with  $n_k^{(h)}$  or is its associate. Since the notion of associate is transitive, two groups having a term (25) in common are identical. In this way, we split (25) into a (finite) number of non-overlapping groups of terms. If a group contains a term (25), it also contains its conjugate  $c_{(l)}^{(j')} c_{(k)}^{-(h')} \alpha (n_{l'}^{(j')} - n_{k'}^{(h')})$  since  $n_{k'}^{(h')}$  and  $n_{l'}^{(j')}$  are neighbors). Let us consider the  $n_k^{(h)}$  connected with the terms of one group. They are all associates, and therefore the superscripts  $h$  are all distinct. Suppose that they take the values  $h_1, h_2, \dots, h_r$  with  $r \leq m$ , and that the corresponding values of  $k$  are  $k_1, k_2, \dots, k_m$ . Then the group is of the form



$$\sum_{\substack{s,t=1 \\ s \neq t}}^r c_{k_s}^{(h_s)} c_{h_t}^{-(k_t)} a(n_{k_s}^{(h_s)} - h_{k_t}^{(h_t)}).$$

Hence, it is a real number not less, by (11) than the quantity

$$-(1 - \delta) |E| \sum_{s=1}^r |c_{k_s}^{(h_s)}|^2$$

Since no two of the distinct groups into which we split (25) contain the same coefficient  $c_{k_s}^{(h_s)}$ , summing all the groups, we obtain that (23) does not exceed

$$-(1 - \delta) |E| \sum_{h,k} |c_k^{(h)}|^2.$$

Adding this inequality to (22), and taking into account (20), we immediately obtain (18).

In order to complete the proof of Theorem 6, it remains to prove the existence of the number  $\Delta$  used in the foregoing argument, and to remove the restrictions that the  $S_j$  are polynomials.

To simplify notation, let us write  $n_k, n'_l$  instead of  $n_k^{(h)}$  and  $n_l^{(j)}$ . Suppose that

$$N = n_k - n'_l,$$

where  $n_k$  and  $n'_l$  are not neighbors, and suppose, for example that  $N > 0$  (the case  $N = 0$  is impossible). We distinguish three possibilities

$$(I) n_k > n'_l > 0, \quad (II) 0 > n_k > n'_l, \quad (III) n_k > 0 > n'_l.$$

In case (I), we have  $n_k(1 - q_1^{-l}) < N < n_k$ . Thus  $n_k$  is contained between two fixed multiples on  $N$ . Hence  $k$  (and so also  $l$ ) can only take a limited number of values. Case (II) is reducible to case (I) by writing  $N = n'_{-l} - n_{-k}$ . Finally, in case (III) we write  $N = n_k + n'_l$ , where  $l' = -l > 0$ . If, for example,  $n_k > n'_l$ , then  $n_k < N < n_k(1 + q^{-l'})$ , and the argument concludes as in case (I).

Suppose now that we no longer assume that the  $S_j$  are polynomials. The convergence of  $S$  on  $E$  implies that we

can find a set  $E_1 \subset E, |E_1| > 0$ , such that the partial sums  $S^p$  of  $S$  are all uniformly bounded on  $E_1$ . They will remain so even if we omit from  $S$  any finite number of united terms. But  $S^p = S_1^p + S_2^p + \dots + S_m^p$ . Hence we are back in the polynomial case, and so applying (9) to  $S^p$ , with  $E$  replaced by  $E_1$ , and making  $p$  tend to  $+\infty$ , we obtain that  $\sum |C_n|^2$  is finite. It follows that  $S$  is a Fourier series of a function  $f$  of the class  $L^2$ . This function coincides almost everywhere on  $E$  with the sum of the series (8). Since

$\int_0^{2\pi} (f - S^p)^2 dx \rightarrow 0$ , we also have

$$(26) \quad \int_E (f - S^p)^2 dx \rightarrow 0, \quad \int_E \{S^p\}^2 dx \rightarrow \int_E f^2 dx.$$

But in the polynomial case

$$\sum_{n=-p}^p |C_n|^2 < A \int_E \{S^p\}^2 dx,$$

provided  $C_n = 0$  for  $|n| > p_0(q, E, m)$ . Making here  $p \rightarrow \infty$ , and using the second relation (26) we obtain (9) in the general case.

This completes the proof of Theorem 6.

The first part of Theorem 4, concerning convergent series, is obviously a consequence of (9). In the second part we assume that linear means

$$(27) \quad \sigma^p(x) = \alpha_{p0} S^0 + \alpha_{p1} S^1 + \dots + \alpha_{pn} S^n + \dots$$

(I) exist in  $E$ ;

(II) converge everywhere in  $E$  to a finite limit as  $p \rightarrow \infty$ .

About the matrix  $\{\alpha_{pn}\}$  we assume only two out of the three very well known conditions of Toeplitz (see e. g. Zygmund [5], p. 40), namely we assume that

$$(28) \quad \lim \alpha_{pn} = 0 \quad (p=0, 1, \dots), \quad \sum_n \alpha_{pn} \rightarrow 1 \quad \text{as } p \rightarrow \infty.$$

Condition (I) just stated is automatically satisfied if the matrix  $\{\alpha_{pn}\}$  is row-finite. Let us confine our attention to this case. Then

$$\sigma_p(x) = \sum_n C_n e^{inx} R_{p,|n|}$$

where  $R_{p,s} = \alpha_{ps} + \alpha_{ps+1} + \dots$  for  $s > 0$  (the series here are finite in appearance only.) We may assume that the  $\sigma_p(x)$  are not only convergent in  $E$  but are also uniformly bounded there. The latter property holds if we drop from  $S$  the terms with  $|n| \leq p_0$  (see Theorem 6). Hence

$$\sum_n |C_n|^2 R_{p,|n|}^2 \leq A \int_E \sigma_p^2 dx = o(1),$$

and using the properties (28) of the  $\alpha_{pn}$  we easily obtain that

$$\sum |C_n|^2 < +\infty.$$

The case of a general matrix  $\{\alpha_{pn}\}$  can be reduced to that of a row finite  $\{\alpha_{pn}\}$  by a familiar and simple device (see Zygmund [5], p. 122) and need not be discussed here. This completes the proof of Theorem 4.

The proof of Theorem 5 is almost immediate. For as in the proof of Theorem 6, we may assume that the  $m$  lacunary series whose sum is  $S$  have non overlapping exponents. Then the inequality (15) shows that each of the lacunary series is of the class  $L^2$ , and so converges almost everywhere. Hence  $S$  converges almost everywhere.

*Remarks. 1.* The results of section 2 can also be extended to the case of not necessarily integral  $n_k$ . Essential here is an extension of (9), which will now take the form

$$(29) \quad \sum_n |C_n|^2 \leq A \int_E K(x) f^2(x) dx,$$

(see (6a)). Here  $f(x)$  is the sum of the series  $\sum C_n e^{i\lambda_n x}$  convergent on  $E$ , and of type  $m$ . It is assumed that the  $\lambda'_s$  which actually occur in the series satisfy an inequality  $|\lambda_n| \geq p_0(q, E, m)$ . Also  $A = A(q, E, m)$ . The proof of (29) is obtained by combining the ideas leading to (6a) see Hartman [3] and to (9). Once (29) is established, the extensions of Theorems 4 and 5 follow easily. Also the

proof of the extension of Theorem 6 is immediate, if one uses Kac's generalization of the theorem that lacunary series of the class  $L^2$  converge almost everywhere. (See Kac [4]).

2. As the proof of Theorem 4 shows, its conclusion still holds, if instead of the linear sumability of the series (8) we assume that the means  $\sigma_p(x)$  are bounded at every point of  $E$ . More generally.

*Theorem 7.* If linear means  $\sigma_p(x)$  for the series (8) of type  $m$  satisfy the inequality  $\limsup_{p \rightarrow \infty} \sigma_p(x) > -\infty$  at every point  $x \in E, |E| > 0$ , then  $\Sigma |C_n|^2 < \infty$ .

The result is known in the case  $m=1$  (see Zygmund [6]), and the proof in the general case is similar. For suppose that  $\Sigma |C_n|^2 = +\infty$ . Then, on account of condition (T),

$$(30) \quad \Gamma_p = \{ \Sigma |C_n|^2 R_{p,|n|}^2 \}^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty \quad \text{as } p \rightarrow \infty.$$

By reducing  $E$ , if necessary, we may assume that there is a constant  $M > 0$  such that  $\sigma_p(x) > -M$  for  $x \in E$  and for all  $p$ . Then, if  $\alpha(n)$  has the same meaning as before,

$$(31) \quad \begin{aligned} \int_E |\sigma_p| dx &\leq \int_E (|\sigma_p + M| + M) dx = \int_E \sigma_p dx + 2M \\ &= 2M + \Sigma_n C_n R_{p,|n|} \alpha(n) \\ &\leq 2M + \{ \Sigma |C_n|^2 R_{p,|n|}^2 \}^{\frac{1}{2}} \{ \Sigma |\alpha(n)|^2 \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Since we can always drop a finite number of terms in (8) (possibly affecting the value of  $M$ ), the last factor  $\Sigma |\alpha(n)|^2$  in (31) may be made as small as we please, and this together with (30) gives

$$(32) \quad \int_E |\sigma_p| dx = o(\Gamma_p)$$

However we also have

$$(33) \quad \int_E \sigma_p^2 dx = A \Gamma_p^2, \quad \int_E \sigma_p^4 dx = B \Gamma_p^4.$$

The first inequality here follows from (9). The second, even with  $E$  replaced by  $(0, 2\pi)$ , is well known for lacunary series (see Zygmund [5], p. 216), and for series of type  $m$  follows



immediately by splitting them into  $m$  lacunary and non-overlapping components. By Hölder's inequality,

$$\int_E \sigma_p^2 dx \leq \left( \int_E |\sigma_p| dx \right)^{2/3} \left( \int_E \sigma_p^4 dx \right)^{1/3},$$

and this is impossible on account of (32) and (33). Thus  $\Sigma |C_n|^2$  converges.

The same argument shows that if  $\sigma_p^+ = \text{Max}(\sigma_p, 0)$ ,  $\sigma_p^- = \text{Min}(\sigma_p, 0)$ , and if (8) is of type  $m$  with  $\Sigma |C_n|^2 = +\infty$ , the relations  $\sigma_p^+ = 0 (I_p)$ ,  $\sigma_p^- = 0 (I_p)$  are possible only in sets of measure zero.

### References

- [1] H. Auerbach, Sur la relation  $\lim f(x+h_n) = f(x)$ , *Fundamenta Math.*, 11 (1928), 193—197.
- [2] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, A further note on the converse of Abel's theorem. *Proc. London Math. Soc.* 25 (1926), 219—236.
- [3] Ph. Hartman, The divergence of non-harmonic gap series, *Duke Journal*, 9 (1942), 404—405.
- [4] M. Kac, Convergence and divergence of non-harmonic gap series, *Duke Journal*, 8 (1941), 541—545.
- [5] A. Zygmund, *Trigonometrical Series*,
- [6] „ „ , On lacunary trigonometric series, *Trans. American Math. Soc.* 34 (1932), 435—446.
- [7] P. Erdős, On the convergence of trigonometric series, *Journal of Mathematics and Physics*, 22 (1943), 37—39.

# SUR L'ÉQUIVALENCE DE DEUX CONSTRUCTIONS DE LA FONCTION DE GREEN GÉNÉRALISÉE D'UN DOMAINE PLAN QUELCONQUE

par

JERZY GÓRSKI (Kraków)

1. Soit  $D$  un domaine plan quelconque contenant le point  $z = \infty$  dans son intérieur et  $F$  la frontière de  $D$ . Nous supposons que le diamètre transfini  $d(F)$  de  $F$  soit positif.

Dans son travail „*Sur les suites de polynomes, les ensembles fermés et la fonction de Green*“ (Annales de la Société Polonaise de Mathématique, t. XII, 1933, p. 57—71) M. F. LEJA a donné à l'aide d'une suite de polynomes la construction d'une fonction  $G_0(z)$  harmonique dans le domaine  $D$  à l'exception du point  $z = \infty$  et il a démontré que, si la frontière  $F$  est la somme de continus,  $G_0(z)$  est la fonction classique de Green de  $D$  avec le pôle  $z = \infty$ .

Le but de ce travail est de démontrer que dans le cas le plus général la fonction  $G_0(z)$  de M. F. LEJA est identique avec la fonction de Green généralisée au sens de O. D. KELLOG et N. WIENER pour le domaine  $D$ .

2. Voici la construction de la fonction  $G_0(z)$  due à M. F. LEJA:

Soit  $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$  un système de  $n+1$  points différents quelconques de la frontière  $F$ . Formons le produit

$$V(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n) = \prod_{0 \leq j < k \leq n} |\zeta_j - \zeta_k|$$

de toutes les distances mutuelles de ces points et observons que la fonction  $V(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$  atteint un maximum fini  $V_n$  lorsque les points  $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$  varient sur  $F$ . Soit

(1)  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$   
un système de  $n+1$  points de  $F$  pour lesquels on a

$$V_n = V(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n).$$

Supposons que les indices des points (1) soient choisis de manière que parmi les produits

$$\Delta_j = |(\eta_j - \eta_0) \dots (\eta_j - \eta_{j-1})(\eta_j - \eta_{j+1}) \dots (\eta_j - \eta_n)|, \quad j=0, 1, \dots, n,$$

le  $\Delta_0$  soit le plus petit:

$$\Delta_0 \leq \Delta_j, \quad \text{pour } j=1, 2, \dots, n.$$

Cela posé, formons le polynome

$$(2) \quad L_n(z, \eta) = \frac{z - \eta_1}{\eta_0 - \eta_1} \cdot \frac{z - \eta_2}{\eta_0 - \eta_2} \dots \frac{z - \eta_n}{\eta_0 - \eta_n}$$

et faisons varier  $n$ . On obtient une suite de polynomes  $\{L_n(z, \eta)\}$  intimément liés à l'ensemble  $F$ . Dans son travail cité plus haut M. LEJA a démontré que:

La suite  $\left\{ \frac{1}{n} \log |L_n(z, \eta)| \right\}$  converge en dehors de  $F$  vers une fonction limite

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |L_n(z, \eta)| = G_0(z)$$

jouissant des propriétés suivantes:

1°  $G_0(z)$  est positif et harmonique dans  $D$  pour  $z \neq \infty$ .

2° Lorsque  $z \rightarrow \infty$  la différence  $G_0(z) - \log |z|$  tend vers la limite finie suivante:

$$(4) \quad G_0(z) - \log |z| \rightarrow \log \frac{1}{d(F)}.$$

3° Lorsque  $z$  tend vers un point  $z_0$  de  $F$  et que  $z_0$  est un point d'un continu appartenant à  $F$ , alors  $G_0(z)$  tend vers zéro.

Il résulte immédiatement de ces propriétés que, si  $F$  est un continu ou une somme de continus, alors  $G_0(z)$  est la fonction de Green classique du domaine  $D$  avec le pôle  $z = \infty$ .

3. Considérons le cas le plus générale, où la frontière  $F$  du domaine  $D$  est quelconque, et soit

$$(5) \quad D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$$

une suite des domaines jouissant des propriétés suivantes:

1° Chaque  $D_n$  contient le point  $z = \infty$  et chaque  $D_n$  fermé est contenu dans  $D$ .

2°  $D_n \subset D_{n+1}$  pour  $n=1, 2, \dots$

3°  $D_n \rightarrow D$  dans le sens que chaque ensemble fermé  $\Delta$  contenu dans  $D$  appartient à presque tous les  $D_n$ .

4° La frontière  $F_n$  de  $D_n$  est une somme de continus et par suite chaque  $D_n$  possède la fonction de Green classique.

Désignons par  $G_n(z)$  la fonction de Green de  $D_n$  avec le pôle à l'infini. On sait que la suite  $\{G_n(z)\}$  tend dans le domaine  $D$  vers une fonction limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(z) = G(z), \quad \text{pour } z \in D, z \neq \infty,$$

indépendante du choix des domaines (5) remplissant les conditions 1°—4°.

La limite  $G(z)$  est dite *fonction de Green généralisée* du domaine  $D$  avec le pôle  $z = \infty$ .

4. Je dis que la fonction  $G_0(z)$  de M. LEJA est identique avec la fonction  $G(z)$ :

$$G_0(z) = G(z) \quad \text{pour } z \in D.$$

*Démonstration.* Considérons les fonctions de Green classiques

$$(6) \quad G_1(z), G_2(z), \dots, G_n(z), \dots$$

correspondant respectivement aux domaines (5). Les différences

$$(7) \quad F_n(z) = G_0(z) - G_n(z), \quad n = 1, 2, \dots,$$

sont harmoniques régulières dans le domaine  $D$ , le point  $z = \infty$  y compris. En effet, d'après (4) on a

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \{G_0(z) - \log |z|\} &= \log \frac{1}{d(F)}, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \{G_n(z) - \log |z|\} &= \log \frac{1}{d(F_n)}, \end{aligned}$$

où  $d(F_n)$  est le diamètre transfini de la frontière  $F_n$  de  $D_n$ , donc la différence  $F_n(z) = G_0(z) - G_n(z)$  tend vers la limite finie

$$\log \frac{1}{d(F)} - \log \frac{1}{d(F_n)} \quad \text{lorsque } z \rightarrow \infty,$$

ce qui prouve que  $F_n(z)$  reste régulier à l'infini.

Observons maintenant que

$$F_n(z) = G_0(z) - G_n(z) > 0 \quad \text{pour } z \in D_n$$

car sur la frontière  $F_n$  de  $D_n$  on a  $G_0(z) > 0$  pour  $z \in D_n$  et  $G_n(z) = 0$ , donc la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) = G_0(z) - G(z)$$



est non négative dans le domaine  $D$ . D'autre part, cette limite s'annule en un point intérieur de  $D$  car

$$F_n(\infty) = \log \frac{1}{d(F)} - \log \frac{1}{d(F_n)}$$

et, d'après un théorème de M. FEKETE<sup>1)</sup>, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(F_n) = d(F)$$

donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\infty) = 0$ .

La différence  $G_0(z) - G(z)$  est identiquement nulle dans le domaine  $D$  en vertu de principe de minimum car elle y est harmonique régulière non négative et s'annule en un point intérieur de  $D$ .

---

<sup>1)</sup> Math. Zeitschrift, t. 32 (1930), p. 108—111.

# SUR LES DÉVELOPPEMENTS UNITAIRES NORMAUX

par

EMILE BOREL (Paris)

1. Soit  $a$  un nombre réel compris entre 0 et 1. Soit  $b$  un nombre réel et  $n$  un entier assujettis aux conditions

$$(1) \quad 0 < b \leq a; \quad n > 2.$$

**Théorème.** Le nombre  $a$  vérifie une égalité et une seule de la forme

$$(2) \quad na = 1 + b,$$

$n$  et  $b$  vérifiant les conditions (1).

Soit en effet,  $n$  le plus petit entier tel que l'on ait:

$$(3) \quad na > 1$$

de sorte que l'on a:

$$(4) \quad (n-1)a \leq 1.$$

L'entier  $n$  est au moins égal à 2, puisque  $a$  est inférieur à 1; si l'on pose:

$$(5) \quad na - 1 = b$$

les inégalités (3) et (4) entraînent les conditions (1); si, dans (5) on remplaçait  $n$  par un nombre entier plus grand  $n'$ , on aurait, d'après (3)

$$b' = n'a - 1 > (n' - n)a > a$$

et la condition (1) ne serait pas vérifiée; le théorème est donc démontré.

Désignons maintenant par  $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$  des nombres compris entre 0 et 1; nous pourrons, d'après ce théorème,  $a_1$  étant donné, définir d'une manière unique les nombres  $a_2, \dots, a_k, \dots$  et les entiers  $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$  de manière à vérifier les égalités

$$(6) \quad n_k a_k = 1 + a_{k+1}; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

et les inégalités

$$(7) \quad a_1 > a_2 \dots > a_{k-1} > a_k > a_{k+1} \dots$$

$$(8) \quad 2 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \dots n_k \leq n_{k+1} \dots$$

car, d'après (6) les inégalités (7) entraînent les inégalités (8) et réciproquement. Le nombre  $a_1$  admet donc un développement unique de la forme:

$$(8) \quad a_1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1 n_2} + \frac{1}{n_1 n_2 n_3} + \dots + \frac{1}{n_1 n_2 \dots n_k} + \dots$$

dans lequel les entiers  $n_k$  vérifient les inégalités (8); un tel développement sera dit *développement unitaire normal*.

Il peut se présenter deux cas; ou bien, à partir d'un certain rang les  $n_k$  sont tous égaux; le nombre  $a_1$  est alors rationnel; ou bien, les  $n_k$  augmentent indéfiniment avec  $k$ ; les  $a_k$  tendent alors vers zéro pour  $k$  infini et  $a_1$  est irrationnel.

2. Nous dirons que  $a$  est choisi *au hasard* entre 0 et 1 lorsque la probabilité pour que  $a$  appartienne à un intervalle est égale à la longueur de cet intervalle. Si nous posons, en outre, la condition (d'après les inégalités (3) et (4))

$$(10) \quad \frac{1}{n} < a < \frac{1}{n-1}$$

la probabilité pour que  $a$  soit compris dans un intervalle  $dx$  satisfaisant aux inégalités (10) sera  $n(n-1)dx$ .

Lorsque le nombre  $a$  est choisi au hasard sous les conditions (10), le nombre  $b$  défini par (5) satisfait aux inégalités

$$(11) \quad 0 < b < \frac{1}{n-1}$$

et est choisi au hasard dans l'intervalle (11). En effet, si  $p$  et  $q$  appartiennent à l'intervalle (11), pour que l'on ait

$$(12) \quad p < b < q,$$

il faut et il suffit, d'après (5) que l'on ait

$$(13) \quad \frac{p+1}{n} < a < \frac{q+1}{n}$$

mais, si l'intervalle (12) est intérieur à (11), on voit immédiatement que l'intervalle (13) appartient à (10); la probabilité pour que l'inégalité (13) soit vérifiée est donc  $(n-1)(q-p)$ ; c'est la probabilité pour que l'inégalité (12) soit vérifiée,

ce qui revient à dire que  $b$  est choisi au hasard dans l'intervalle (11).

Lorsque  $b$  appartient à (11), il existe un entier  $m$  et un seul, supérieur ou égal à  $n$ , tel que l'on ait

$$(14) \quad \frac{1}{m} < b < \frac{1}{m-1}.$$

Si l'on donne le nombre  $m$ , le nombre  $b$  sera choisi au hasard dans l'intervalle (14), c'est à dire que la probabilité pour que  $b$  appartienne à un intervalle  $dx$  (vérifiant (14)) sera  $m(m-1)dx$ .

Nous allons maintenant étudier les probabilités du rapport  $\frac{b}{a}$  lorsque  $a$  vérifie les inégalités (10). Nous poserons

$$(15) \quad a = \frac{1}{n-1} - \frac{t}{n(n-1)}$$

le nombre  $t$  sera alors choisi au hasard entre 0 et 1. On a, d'après (5):

$$(16) \quad b = na - 1 = \frac{1}{n-1} - \frac{t}{n-1}$$

et, par suite, nous pourons poser

$$(17) \quad x = \frac{b}{a} = \frac{1-t}{1-\frac{t}{n}}$$

Lorsque  $t$  varie de 0 à 1, le rapport  $x$  varie de 1 à 0, mais  $x$  ne peut pas être regardé comme choisi au hasard dans cet intervalle.

Nous allons calculer la valeur moyenne de  $\log x$  lorsque  $t$  est choisi au hasard; cette valeur moyenne, que nous appellerons  $\log \mu$  est définie par la relation

$$(18) \quad \log \mu = \int_0^1 \log x dt = \int_0^1 \log(1-t) dt - \int_0^1 \log\left(1-\frac{t}{n}\right) dt.$$

Pour calculer la seconde intégrale, nous supposons  $n$  assez grand pour que l'on puisse négliger les termes en  $\frac{1}{n^2}$  et nous aurons alors, en calculant les deux intégrales:



$$(19) \quad \log \mu = -1 + \frac{1}{2n}$$

et, par suite, en négligeant toujours  $\frac{1}{n^2}$ :

$$(20) \quad \mu = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

Si nous considérons les nombres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots$  définis par (6), (7), (8) et si nous supposons  $\alpha_1$  choisi au hasard entre 0 et 1, nous pourrions considérer  $\alpha_k$  comme choisi au hasard entre  $\frac{1}{n_k}$  et  $\frac{1}{n_k - 1}$  et appliquer les résultats obtenus

pour  $\frac{b}{a}$  au rapport  $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}$ , en remplaçant dans les équations (15) à (20) le nombre  $n$  par  $n_k$ . Le nombre  $\alpha_1$  étant choisi au hasard entre 0 et 1 est certainement irrationnel et  $n_k$  augmente indéfiniment avec  $k$ ; nous pourrions donc utiliser les relations approchées (19) et (20) à partir d'une certaine valeur finie de  $k$ ; pour les valeurs plus petites, en nombre fini, la valeur de  $\mu$  sera multipliée par un facteur fini dont la valeur n'a pas d'importance pour ce qui suit. En d'autres termes, si l'on pose:

$$(21) \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \mu_1, \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \mu_2, \dots, \quad \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \mu_k, \dots$$

la valeur moyenne de  $\log \mu_k$  est donnée par les équations (19) et (20) où  $n$  est remplacé par  $n_k$ , dès que  $n_k$  est assez grand, c'est à dire dès que  $k$  dépasse une certaine valeur finie  $h$ . Si donc  $k$  est supérieur à  $h$ , on aura:

$$(22) \quad \mathfrak{M}(\alpha_k) = A \frac{1}{e^k} \left(1 + \frac{1}{2n_1}\right) \left(1 + \frac{1}{2n_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2n_k}\right)$$

le nombre  $A$  étant une constante indépendante de  $k$ , car elle ne dépend que des valeurs de  $\alpha_1, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_h$ .

D'après (6) la valeur du produit  $n_k \alpha_k$  est comprise entre 1 et 2; on en conclut que, lorsque  $k$  augmente indéfiniment, le produit infini qui figure alors au second membre de (22) est convergent; on peut donc écrire

$$(23) \quad \mathfrak{M}(a_k) = \frac{B_k}{e^k} \quad A < B_k < B$$

les nombres  $A$  et  $B$  étant des constantes indépendantes de  $k$ .

On a également, d'après (6):

$$(24) \quad \mathfrak{M}(n_k) = C_k e^k; \quad D < C_k < E$$

les constantes  $D$  et  $E$  ne dépendant pas de  $k$ .

Les relations (23) et (24) sont vérifiées avec une probabilité aussi voisine de 1 que l'on veut, lorsque  $a_1$  est choisi au hasard et que  $k$  augmente indéfiniment.

On sait, d'autre part, que les écarts probables par rapport à la moyenne de la somme d'un certain nombre  $k$  de variables aléatoires sont égaux au produit par  $\sqrt{k}$  de l'écart probable de chacune des variables; on peut donc écrire, au lieu de (24):

$$n_k = e^{k + \lambda \sqrt{k}}$$

la constante  $\lambda$  étant comprise entre des limites indépendantes de  $k$ .

3. Les résultats précédents peuvent être généralisés de bien des manières; nous en indiquerons seulement deux, mais il semble que ces généralisations sont moins intéressantes que le développement unitaire normal, dont la définition a un caractère particulièrement simple.

Désignons par  $a$  un nombre irrationnel; il existe un entier  $n$  et un seul tel que l'on ait

$$(25) \quad na = 1 \pm b, \quad b < \frac{a}{2}.$$

On en conclut un développement unitaire alterné (c'est à dire dont les termes peuvent être positifs ou négatifs), de la forme

$$(26) \quad a = \frac{1}{n_1} \pm \frac{1}{n_1 n_2} \pm \frac{1}{n_1 n_2 n_3} \pm \dots$$

danş lequel on a, au moins à partir d'un certain rang,

$$(27) \quad n_k > 2n_{k-1} - 1.$$

On peut d'autre part, développer tout nombre irrationnel  $a$ , soit en une série à termes positifs de la forme

$$(28) \quad a = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k} + \dots$$

dans laquelle les  $n_k$  sont des entiers croissants satisfaisant, à partir d'un certain rang, aux inégalités

$$(29) \quad n_{k+1} > n_k(n_k - 1)$$

soit en une série dont les termes peuvent être positifs ou négatifs

$$(30) \quad a = \frac{1}{n_1} \pm \frac{1}{n_2} \pm \dots \pm \frac{1}{n_k} \pm \dots$$

l'inégalité (29) étant remplacée par la suivante

$$(31) \quad n_{k+1} > 2n_k(n_k - 1).$$

On peut remarquer que les plus petites valeurs que puissent avoir les  $n_k$  dans (28) sont

$$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 7, n_4 = 43, n_5 = 1807, n_6 > 3240000, \\ n_7 > 10^{13}, n_8 > 10^{26}, n_9 > 10^{52}, n_{10} > 10^{104}.$$

Il faut donc au maximum 10 termes pour représenter un nombre irrationnel avec une erreur inférieure à  $10^{-160}$ ; il en faut encore moins avec le développement (30).

---

# SUR LES POLYNOMES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE

par

F. LEJA (Kraków).

1. Soit  $F$  la frontière d'un domaine plan quelconque contenant le point à l'infini dans son intérieur. Faisons correspondre à chaque nombre  $n = 1, 2, \dots$ , un système de  $n + 1$  points différents quelconques  $\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$  situés sur  $F$ . Le système  $n$ -ième sera désigné par une seule lettre  $\xi^{(n)}$

$$(1) \quad \xi^{(n)} = \{ \xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)} \}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Pour simplifier l'écriture je le désignerai aussi plus brièvement par

$$(2) \quad \xi = \{ \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n \}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Les  $n + 1$  polynomes

$$(3) \quad L_n^{(i)}(z; \xi) = \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq i)}}^n \frac{z - \xi_k}{\xi_i - \xi_k}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

seront dits *polynomes de Lagrange* correspondant au système (2).

Portageons la frontière  $F$  en deux ensembles disjoints non vides  $F_1$  et  $F_2$

$$F = F_1 + F_2, \quad F_1 \cdot F_2 = 0,$$

et supposons que parmi les points (2) les  $\mu = \mu(n)$  initiaux appartiennent à  $F_1$  et les  $\nu = \nu(n)$  restant à  $F_2$ . On a donc

$$\mu + \nu = \mu(n) + \nu(n) = n + 1$$

et les points

$$(4) \quad \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{\mu-1} \quad \text{appartiennent à } F_1,$$

$$(5) \quad \xi_\mu, \xi_{\mu+1}, \dots, \xi_n \quad \text{,, à } F_2.$$

Supposons encore que l'ensemble  $F_1$  soit fermé et que l'on ait



$\mu > 1, \nu > 0$ . La partie (5) du système (2) peut donc être vide pour certaines valeurs de l'indice  $n$ .

Soit  $z$  un point quelconque mais fixe du plan. Désignons par  $M_n^{(1)}(z)$  le plus grand des  $\mu$  modules  $|L_n^{(i)}(z; \xi)|, i = 0, 1, \dots, \mu - 1$ , et par  $M_n^{(2)}(z)$  le plus grand des  $\nu$  modules  $|L_n^{(i)}(z; \xi)|, i = \mu, \mu + 1, \dots, n$ ,

$$(6) \quad M_n^{(1)}(z) = \max_{i=0, \dots, \mu-1} |L_n^{(i)}(z; \xi)|,$$

$$(7) \quad M_n^{(2)}(z) = \max_{i=\mu, \dots, n} |L_n^{(i)}(z; \xi)|.$$

La quantité  $M_n^{(2)}(z)$  n'est définie que dans le cas  $\nu > 0$ ; si  $\nu = 0$  posons par définition  $M_n^{(2)}(z) = 0$ .

Observons que le plus grand des nombres (6) et (7) n'est jamais plus petit que  $\frac{1}{n+1}$ , ce qui résulte de l'identité

$\sum_{i=0}^n L_n^{(i)}(z; \xi) \equiv 1$ ; il est égal précisément à  $\frac{1}{n+1}$  dans le cas où les points (2) sont sommets d'un polygone régulier de centre au point  $z$ . Observons encore que, si le point  $z$  se trouve dans  $F_2$  et s'il est identique, quel que soit  $n$ , avec un des points (5), on a  $M_n^{(1)}(z) = 0$  et  $M_n^{(2)}(z) = 1$  et par suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n^{(1)}(z)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n^{(2)}(z)} = 1.$$

Je vais démontrer le théorème:

I. Si  $z_0$  est un point de l'ensemble  $F_2$  et

$$(8) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n^{(2)}(z_0)} < 1,$$

on a

$$(9) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n^{(1)}(z_0)} > 1.$$

2. La démonstration sera appuyée sur un résultat antérieur<sup>1)</sup> que voici: Soit  $E$  un ensemble fermé et borné de points du plan et

$$(10) \quad \zeta = \{\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n\}$$

<sup>1)</sup> Annales de la Soc. Polon. de Mathém. t. XII (1934), p. 57—71. Voir aussi t. XVIII (1945), p. 4—11.

un système de  $n+1$  points différents de  $E$ . Formons les polynômes de Lagrange  $L_n^{(i)}(z; \zeta)$ ,  $i=0, 1, \dots, n$ , correspondant au système (10) et désignons par  $L_n(z, E)$  la borne inférieure du plus grand des modules de ces polynômes lorsque, le point  $z$  et le nombre  $n$  étant fixes, le système (10) varie arbitrairement dans  $E$

$$(11) \quad L_n(z, E) = \inf_{\zeta \in E} \{ \max_{(i)} |L_n^{(i)}(z; \zeta)| \}.$$

Désignons encore par  $D(E)$  le plus grand domaine contenu dans l'ensemble complémentaire à  $E$  et contenant le point  $z = \infty$  dans son intérieur. Voici le résultat en question:

II. *Si le diamètre transfini de  $E$  est positif, alors la suite  $\{\sqrt[n]{L_n(z, E)}\}$  converge en chaque point fini du plan vers une limite finie*

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{L_n(z, E)} = L(z, E)$$

*jouissant des propriétés suivantes:*

1°  $L(z, E) = 1$  en dehors du domaine  $D(E)$ ,

2°  $L(z, E) > 1$  dans le domaine  $D(E)$  et  $\log L(z, E)$  est identique à la fonction de Green classique ou généralisée du domaine  $D(E)$  avec le pôle  $z = \infty$ .

Observons que ce théorème entraîne immédiatement la conclusion suivante: Lorsque  $E_1$  et  $E_2$  sont des ensembles fermés et bornés de diamètre transfini positif on a en chaque point du plan

$$(13) \quad L(z, E_1) > L(z, E_2) \quad \text{si } E_1 \subset E_2.$$

On peut prouver que si  $E_1 \subset E_2$  et si le diamètre transfini de la partie de la différence  $E_2 - E_1$  contenue dans le domaine  $D(E_1)$  est positif, alors  $L(z, E_1) > L(z, E_2)$  dans le domaine  $D(E_1)$ .

3. *Démonstration du théorème I.* Désignons par  $\delta$  la distance du point donné  $z_0$  à l'ensemble  $F_1$ . Puisque  $F_1$  est fermé et que  $z_0$  n'appartient pas à  $F_1$  on a  $\delta > 0$ .

1° Supposons d'abord qu'il existe une infinité des systèmes (1) dont tous les points appartiennent à  $F_1$  et soient

$$\xi^{(n_1)}, \xi^{(n_2)}, \dots \quad \text{où } n_1 < n_2 < \dots$$

ces systèmes. Alors  $M_n^{(2)}(z_0) = 0$  pour  $n = n_1, n_2, \dots$ , ce qui assure que l'hypothèse (8) est remplie, et d'après (6) et (11)

$$M_n^{(1)}(z_0) = \max_{(i)} |L_n^{(i)}(z_0; \xi)| > L_n(z_0, F_1)$$

pour  $n = n_1, n_2, \dots$  Par suite

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n^{(1)}(z_0)} > L(z_0, F_1)$$

ce que entraîne l'inégalité (9) car d'après le théorème II on a  $L(z, F_1) > 1$  dans le domaine  $D(F_1)$  et le point  $z_0$  appartient à ce domaine.

2° Supposons maintenant que  $\nu = \nu(n) > 0$  pour presque tous les  $n$ . D'après l'hypothèse (8) il existe un nombre positif  $\Theta < 1$  et une suite croissante d'indices  $n_1 < n_2 < \dots$  telle que

$$(14) \quad M_n^{(2)}(z_0) \leq \Theta^n \quad \text{pour } n = n_1, n_2, \dots$$

Considérons la suite  $\left\{ \frac{\nu(n)}{n} \right\}$ , où  $n = n_1, n_2, \dots$ , et posons

$$(15) \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\nu(n_k)}{n_k} = \alpha.$$

Il est clair que  $0 \leq \alpha \leq 1$ . En rejetant en cas de besoin un nombre fini ou infini des termes de la suite  $\{n_k\}$  on peut supposer que

$$(16) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\nu(n_k)}{n_k} = \alpha.$$

Admettons tout d'abord que  $\alpha = 0$  et soit  $\xi_n$  celui des points du système (5) dont la distance au point donné  $z_0$  est la plus petite, c'est-à-dire

$$|z_0 - \xi_n| \leq |z_0 - \xi_j| \quad \text{pour } j = \mu, \mu+1, \dots, n.$$

Alors

$$|\xi_n - \xi_j| < |z_0 - \xi_n| + |z_0 - \xi_j| \leq 2|z_0 - \xi_j|$$

et par suite

$$\left| \frac{z_0 - \xi_j}{\xi_n - \xi_j} \right| > \frac{1}{2} \quad \text{pour } j = \mu, \mu+1, \dots, n,$$

ce qui entraîne l'inégalité

$$|L_n^{(n)}(z_0; \xi)| = \prod_{k=0}^{n-1} \left| \frac{z_0 - \xi_k}{\xi_n - \xi_k} \right| > \frac{1}{2^{\nu-1}} \cdot \prod_{k=0}^{\mu-1} \left| \frac{z_0 - \xi_k}{\xi_n - \xi_k} \right|.$$

Mais, d'après (7) et (14) on a pour  $n = n_1, n_2, \dots$

$$\Theta^n > M_n^{(2)}(z_0) > |L_n^{(n)}(z_0; \xi)| > \frac{1}{2^{\nu-1}} \cdot \prod_{k=0}^{\mu-1} \left| \frac{z_0 - \xi_k}{\xi_n - \xi_k} \right|$$

et par suite

$$\prod_{k=0}^{\mu-1} \left| \frac{z_0 - \xi_k}{\xi_n - \xi_k} \right| \leq (2^{\frac{\nu-1}{n}} \Theta)^n \quad \text{pour } n = n_1, n_2, \dots$$

Soit  $\Theta_1$  un nombre quelconque remplissant la condition  $\Theta < \Theta_1 < 1$ . Puisque  $\frac{\nu-1}{n} \rightarrow 0$  on aura, en rejetant en cas de besoin certains termes initiaux de la suite  $\{n_k\}$ ,

$$(17) \quad \prod_{n=0}^{\mu-1} \left| \frac{z_0 - \xi_k}{\xi_n - \xi_k} \right| < \Theta_1^n \quad \text{pour } n = n_1, n_2, \dots$$

Je dis que la distance  $|z_0 - \xi_n|$ , où  $n = n_1, n_2, \dots$ , satisfait à l'inégalité

$$(18) \quad |z_0 - \xi_n| > (1 - \Theta_1) \frac{\delta}{2} \quad n = n_1, n_2, \dots$$

En effet, dans le cas contraire on aurait  $|z_0 - \xi_n| < (1 - \Theta_1) \frac{\delta}{2}$  pour une valeur  $n_p$  de  $n$ . Puisque  $|z_0 - \xi_k| > \delta$  lorsque  $\xi_k$  appartient à  $F_1$ , on a pour  $k = 0, 1, \dots, \mu - 1$

$$|\xi_k - \xi_n| > |z_0 - \xi_k| - |z_0 - \xi_n| > \delta - (1 - \Theta_1) \frac{\delta}{2} = (1 + \Theta_1) \frac{\delta}{2}$$

et par suite

$$\left| \frac{z_0 - \xi_n}{\xi_k - \xi_n} \right| < \frac{1 - \Theta_1}{1 + \Theta_1} \quad \text{pour } n = n_p, k = 0, 1, \dots, \mu - 1,$$

donc

$$\left| \frac{z_0 - \xi_k}{\xi_n - \xi_k} \right| = \left| 1 - \frac{z_0 - \xi_n}{\xi_k - \xi_n} \right| > 1 - \frac{1 - \Theta_1}{1 + \Theta_1} = \frac{2\Theta_1}{1 + \Theta_1} > \Theta_1,$$

ce qui entraîne pour  $n = n_p$  l'inégalité

$$\prod_{k=0}^{\mu-1} \left| \frac{z_0 - \xi_k}{\xi_n - \xi_k} \right| > \Theta_1^\mu > \Theta_1^n$$

incompatible avec (17).

Il s'ensuit que tous les points  $\xi_j$  du  $n$ -ième système (5), où

$$(19) \quad n = n_1, n_2, \dots,$$

satisfont aux inégalités

$$|z_0 - \xi_j| > \eta, \quad \text{où } \eta = (1 - \Theta_1) \frac{\delta}{2} > 0.$$



Désignons par  $R$  le diamètre (proprement dit) de l'ensemble  $F_1 + F_2$ ; alors lorsque  $\xi_i$  est un point quelconque du système (4) on a

$$|z_0 - \xi_j| : |\xi_i - \xi_j| > \eta : R$$

et

$$|L_n^{(i)}(z_0; \xi)| = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{\mu-1} \left| \frac{z_0 - \xi_k}{\xi_i - \xi_k} \right| \cdot \prod_{j=\mu}^n \left| \frac{z_0 - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \right| > \left(\frac{\eta}{R}\right)^\nu \cdot \prod_{\substack{n=0 \\ k \neq i}}^{\mu-1} \left| \frac{z_0 - \xi_k}{\xi_i - \xi_k} \right|$$

pour  $i = 0, 1, \dots, \mu - 1$ , donc en vertu de (6)

$$M_n^{(i)}(z_0) > \left(\frac{\eta}{R}\right)^\nu \cdot \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq i)}}^{\mu-1} \left| \frac{z_0 - \xi_k}{\xi_i - \xi_k} \right| \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, \mu - 1$$

et par suite

$$M_n^{(i)}(z_0) > \left(\frac{\eta}{R}\right)^\nu \cdot \max_{(i)} \left\{ \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq i)}}^{\mu-1} \left| \frac{z_0 - \xi_k}{\xi_i - \xi_k} \right| \right\} > \left(\frac{\eta}{R}\right)^\nu \cdot L_{\mu-1}(z_0, F_1)$$

pour  $n = n_1, n_2, \dots$ , d'où

$$(20) \quad \sqrt[n]{M_n^{(i)}(z_0)} > \left(\frac{\eta}{R}\right)^{\frac{\nu}{n}} \cdot \left[ \sqrt[n]{L_{\mu-1}(z_0, F_1)} \right]^{\mu-1}$$

Faisons tendre  $n$  vers l'infini par les valeurs (19). Comme  $\frac{\nu}{n} \rightarrow 0$  et  $\frac{\mu-1}{n} \rightarrow 1$  le membre droit de (20) tend d'après le théorème II vers la limite  $L(z_0, F_1)$  donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n^{(i)}(z_0)} > L(z_0, F_1)$$

et l'inégalité (9) est démontrée car  $L(z_0, F_1) > 1$ .

3° Il reste à examiner le cas où les inégalités (14) sont satisfaites et la limite (15) est positive. Soit  $r$  un nombre quelconque remplissant la condition

$$0 < r \leq \delta.$$

Désignons par  $F_1^{(r)}$  la partie de  $F$  située en dehors du cercle  $|z - z_0| < r$ ,

par  $F_2^{(r)}$  la partie de  $F$  contenue dans ce cercle, par  $\mu_r = \mu_r(n)$  le nombre de ceux des points du  $n$ -ième système (2) qui sont situés sur  $F_1^{(r)}$  et par  $\nu_r = \nu_r(n)$  le nombre de ceux des points (2) qui sont situés sur  $F_2^{(r)}$ .

Je dis que la limite

$$(21) \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\nu_r(n_k)}{n_k}$$

ne peut pas être positive quel que soit  $r > 0$ .

En effet, supposons que la limite (21) soit positive pour chaque  $r > 0$  et désignons par  $s$  le nombre positif

$$(22) \quad s = (1 - \Theta) \frac{r}{2}$$

et par  $C$  la partie de  $F$  contenue dans la couronne circulaire

$$s \leq |z - z_0| < r.$$

Les ensembles  $F_1^{(r)}$ ,  $C$  et  $F_2^{(s)}$  sont disjoints et on a  $F = F_1^{(r)} + C + F_2^{(s)}$ . En changeant convenablement les indices des points du  $n$ -ième système (2) on peut supposer que ces points se répartissent comme il suit:

$$(23) \quad \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{\mu_r - 1} \quad \text{appartiennent à } F_1^{(r)},$$

$$(24) \quad \xi_{\mu_r}, \xi_{\mu_r + 1}, \dots, \xi_{\mu_s - 1} \quad \text{,, à } C,$$

$$(25) \quad \xi_{\mu_s}, \xi_{\mu_s + 1}, \dots, \xi_n \quad \text{,, à } F_2^{(s)}.$$

Le système (24) peut naturellement être vide si  $\mu_r = \mu_s$ .

Soit  $r_1$  un nombre quelconque remplissant la condition  $0 < r_1 \leq \delta$ . Formons la suite

$$(26) \quad r_1, r_2, r_3, \dots, \quad \text{où } r_{i+1} = (1 - \Theta) \frac{r_i}{2},$$

posons  $\liminf_{k \rightarrow \infty} [\nu_{r_1}(n_k) : n_k] = \alpha_1$  et soit  $\{n_{1k}\}$  une suite partielle de la suite  $\{n_k\}$  pour laquelle

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\nu_{r_1}(n_{1k}) : n_{1k}] = \alpha_1.$$

Posons ensuite  $\liminf_{k \rightarrow \infty} [\nu_{r_2}(n_{1k}) : n_{1k}] = \alpha_2$  et soit  $\{n_{2k}\}$  une suite partielle de la suite  $\{n_{1k}\}$  pour laquelle

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\nu_{r_2}(n_{2k}) : n_{2k}] = \alpha_2$$

et ainsi de suite.

La suite diagonale  $\{n_{kk}\}$  des suites  $\{n_{1k}\}$ ,  $\{n_{2k}\}$ ,  $\{n_{3k}\}$ , ... est manifestement une suite partielle de  $\{n_k\}$  et on a

$$(27) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} [\nu_{r_i}(n_{kk}) : n_{kk}] = \alpha_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots$$

Comme la limite (21) est positive pour chaque  $r > 0$ , les nombres  $\alpha_i$  sont positifs pour chaque  $i = 1, 2, \dots$ . Ils ne croissent pas avec  $i$  car étant  $r_i > r_{i+1}$  on a  $\nu_{r_i}(n) > \nu_{r_{i+1}}(n)$  pour chaque  $i$  et  $n$ , donc  $\alpha_i$  tend vers une limite

$$(28) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = \alpha, \quad \text{à } \alpha > 0.$$

Soit  $r$  un des nombres (26),  $s$  la fonction de  $r$  définie par la formule (22),  $n$  un terme de la suite  $\{n_{kk}\}$  et  $\xi_j$  un point quelconque de système (25) correspondant à la valeur choisie de  $n$ . D'après (7) on a

$$(29) \quad M_n^{(2)}(z_0) > |L_n^{(j)}(z_0; \xi)| = J_1 \cdot J_2 \cdot J_3,$$

où

$$J_1 = \prod_{k=1}^{\mu_r-1} \left| \frac{z_0 - \xi_k}{\xi_j - \xi_k} \right|, \quad J_2 = \prod_{k=\mu_r}^{\mu_s-1} \left| \frac{z_0 - \xi_k}{\xi_j - \xi_k} \right|, \quad J_3 = \prod_{\substack{k=\mu_s \\ (k \neq j)}}^n \left| \frac{z_0 - \xi_k}{\xi_j - \xi_k} \right|.$$

Dans le cas où le système (24) est vide on doit poser  $J_2 = 1$ . Puisque la somme des  $\nu_s$  produits

$$\prod_{\substack{k=\mu_s \\ (k \neq j)}}^n \frac{z - \xi_k}{\xi_j - \xi_k}, \quad j = \mu_s, \mu_s + 1, \dots, n,$$

est quel que soit  $z$  égale à 1, l'indice  $j$  du point  $\xi_j$  peut être choisi parmi les valeurs  $\mu_s, \mu_s + 1, \dots, n$  de manière qu'on ait

$$(30) \quad J_3 > \frac{1}{\nu_s}.$$

Je dis qu'on a

$$(31) \quad J_1 > \left( \frac{2\theta}{1+\theta} \right)^{\mu_r} \quad \text{et} \quad J_2 > \left( \frac{1-\theta}{3-\theta} \right)^{\mu_s - \mu_r}$$

En effet, lorsque le point  $\xi_k$  appartient au système (23) on a  $|z_0 - \xi_k| > r$  donc étant  $|z_0 - \xi_j| < s$  on a

$$|\xi_k - \xi_j| > |z_0 - \xi_k| - |z_0 - \xi_j| > r - s = (1 + \theta) \frac{r}{2}$$

et

$$\left| \frac{z_0 - \xi_j}{\xi_k - \xi_j} \right| < \frac{1 - \theta}{1 + \theta}$$

ce qui entraîne les inégalités

$$\left| \frac{z_0 - \xi_k}{\xi_j - \xi_k} \right| > 1 - \frac{1 - \theta}{1 + \theta} = \frac{2\theta}{1 + \theta} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, \mu_r - 1$$

et par suite la première des inégalités (31) est vraie. D'autre part, lorsque  $\xi_k$  appartient au système (24) on a  $s \leq |z_0 - \xi_k| < r$  et

$$|\xi_j - \xi_k| \leq |z_0 - \xi_j| + |z_0 - \xi_k| < s + r = (3 - \Theta) \frac{r}{2}$$

donc

$$\left| \frac{z_0 - \xi_k}{\xi_j - \xi_k} \right| > \frac{s}{s + r} = \frac{1 - \Theta}{3 - \Theta} \quad \text{pour } k = \mu_r, \dots, \mu_s - 1,$$

ce qui entraîne la seconde des inégalités (31).

Observons maintenant que  $\mu_r = n + 1 - \nu_r$  et  $\mu_s - \mu_r = \nu_r - \nu_s$  donc les relations (14) et (29) — (31) conduisent à l'inégalité

$$\left( \frac{2\Theta}{1 + \Theta} \right)^{1 - \frac{\nu_r - 1}{n}} \cdot \left( \frac{1 - \Theta}{3 - \Theta} \right)^{\frac{\nu_r - \nu_s}{n}} \cdot \left( \frac{1}{\nu_s} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \Theta.$$

Faisons tendre  $n$  vers l'infini par les valeurs  $n_{11}, n_{22}, n_{33}, \dots$  dans l'hypothèse que  $r$  soit égal à  $r_i$ . Alors

$$\frac{\nu_r}{n} \rightarrow a_i, \quad \frac{\nu_s}{n} \rightarrow a_{i+1}, \quad \sqrt[n]{\nu_s} \rightarrow 1^1)$$

donc l'inégalité précédente prend la forme

$$\left( \frac{2\Theta}{1 + \Theta} \right)^{1 - a_i} \left( \frac{1 - \Theta}{3 - \Theta} \right)^{a_i - a_{i+1}} < \Theta.$$

Faisons maintenant tendre  $i$  vers l'infini par les valeurs  $1, 2, \dots$ . Puisque  $a_i \rightarrow \alpha$ , où  $0 \leq \alpha \leq 1$ , on obtient

$$\left( \frac{2\Theta}{1 + \Theta} \right)^{1 - \alpha} < \Theta.$$

Mais, cette inégalité est fautive car elle est équivalente à la suivante  $\Theta^\alpha > \left( \frac{2}{1 + \Theta} \right)^{1 - \alpha}$  donc la limite (21) doit s'annuler pour une valeur positive de  $r$ .

Soit  $r$  un nombre positif plus petit que  $\delta$  et tel qu'on ait

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\nu_r(n_k)}{n_k} = 0.$$

1) On a  $1 \leq \nu_s \leq n$ .



Désignons par  $N_n^{(1)}(z_0)$  le plus grand des modules  $|L_n^{(i)}(z_0; \xi)|$ , où  $i = 0, 1, \dots, \mu_r - 1$ , et par  $N_n^{(2)}(z_0)$  le plus grand des modules  $|L_n^{(i)}(z_0; \xi)|$ , où  $i = \mu_r, \mu_r + 1, \dots, n$ . Il est clair qu'on a  $\mu_r > \mu$  et par suite  $N_n^{(2)}(z_0) \leq M_n^{(2)}(z_0)$  donc d'après (14)  $N_n^{(2)}(z_0) \leq \Theta^n$  pour  $n = n_1, n_2, \dots$ . En appliquant la partie 2<sup>o</sup> du raisonnement précédent on trouve

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{N_n^{(1)}(z_0)} > L(z_0, F_1^{(r)}) > 1.$$

Mais, le nombre  $\sqrt[n]{N_n^{(1)}(z_0)}$  est égal au plus grand des deux nombres

$$\sqrt[n]{M_n^{(1)}(z_0)} \text{ et } \max_{(i = \mu, \dots, \mu_r - 1)} \sqrt[n]{|L_n^{(i)}(z_0; \xi)|}$$

dont le second devient plus petit que 1 pour tous les  $n = n_1, n_2, \dots$ , ce qui résulte de (14). Par suite

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n^{(1)}(z_0)} > L(z_0, F_1^{(r)}) > 1$$

et le théorème est complètement démontré.

# UN THÉORÈME SUR LA LARGEUR DES ENSEMBLES CONVEXES

par

S. STRASZEWICZ (Warszawa)

Soit  $E$  un ensemble de points du plan euclidien. On nomme largeur de  $E$  le minimum de la distance de deux droites d'appui parallèles de  $E$ . La note présente a pour l'objet la démonstration du théorème<sup>1)</sup>:

*Si l'ensemble convexe  $E$  est contenu dans la somme de deux autres ensembles  $E_1$  et  $E_2$ , sa largeur  $\lambda$  est au plus égale à la somme  $\lambda_1 + \lambda_2$  des largeurs respectives de  $E_1$  et  $E_2$ .*

Pour le montrer, enfermons  $E_i$  ( $i=1,2$ ) dans une bande  $B_i$  limitée par deux droites parallèles à distance  $\lambda_i$ . Si les bandes  $B_1$  et  $B_2$  sont parallèles, l'inégalité  $\lambda \leq \lambda_1 + \lambda_2$  est évidente, supposons donc qu'elles s'entrecroisent et désignons par  $A_1, A_2, A_3, A_4$  les sommets consécutifs du parallélogramme  $P$  ainsi déterminé, de telle manière, que  $A_1, A_3$  correspondent à ses angles non obtus et que la droite  $A_1 A_2$  appartient à  $B_1$ .

Les points  $A_k$  n'étant pas intérieurs à l'ensemble convexe  $E$ , il existe pour chaque  $A_k$  une droite  $a_k$  passant par  $A_k$  et ne contenant pas des points intérieurs à  $E$ . Nous distinguerons trois cas possibles (abstraction faite du cas trivial, où  $E$  serait contenu dans un des ensembles  $E_1$  et  $E_2$ ).

I. Aucun coté du parallélogramme  $P$  n'est disjoint avec l'intérieur de  $E$ . Chaque droite  $a_k$  n'a alors avec le périmètre de  $P$  que le sommet  $A_k$  en commun, et les quatre

---

<sup>1)</sup> C'est A. Lindenbaum, qui a attiré mon attention sur ce théorème, paraissant presque évident, mais dont la démonstration, quoique simple, n'est point immédiate. Il semble bien, que, généralement, l'inclusion  $E \subset E_1 + E_2 + \dots + E_n$  entraîne l'inégalité  $\lambda \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ , mais je n'en connais pas la démonstration. Cf. ces Annales tome XVI (1937), p. 198.

droites  $a_k$  déterminent un quadrilatère  $Q$ , enfermant  $E$ , circonscrit à  $P$ . Soient  $M_1, M_2, M_3, M_4$  les sommets de  $Q$ , la notation étant choisie de telle manière, que sur le périmètre de  $Q$  les  $A_i$  et les  $M_i$  se succèdent dans l'ordre  $M_1 A_1 M_2 A_2, \dots$ . Désignons par  $h_1, h_2, h_3, h_4$  les hauteurs de  $Q$  abaissées des sommets  $M_1, M_2, M_3, M_4$  respectivement sur les côtés  $M_2 M_3, M_1 M_4, M_1 M_4, M_2 M_3$ . Soit par exemple  $h_1 \geq h_4$ , et, par suite  $h_2 \geq h_3$ . La largeur de  $Q$ , et à plus forte raison la largeur  $\lambda$  de  $E$  ne dépasse alors la plus petite des longueurs  $h_1, h_2$ , c.a.d.

$$(1) \quad \lambda \leq \min (h_1, h_2)$$

Considérons maintenant les perpendiculaires  $d_1, d_2$  abaissées du point  $A_1$  sur les droites  $M_1 M_4$  et  $M_2 M_3$  respectivement. Comme la droite  $M_1 M_4$  passe par l'intérieur des angles non obtus des droites  $A_1 A_4$  et  $A_3 A_4$ , la distance  $d_1$  du point  $A_1$  à la droite  $M_1 M_4$  est plus petite, que la distance  $\lambda_1$  de  $A_1$  à la droite  $A_3 A_4$ ,  $d_1 < \lambda_1$ ; de même  $d_2 < \lambda_2$ , donc

$$(2) \quad d_1 + d_2 < \lambda_1 + \lambda_2$$

Or, si un point décrit le segment  $M_1 M_2$ , la somme de ses distances aux droites  $M_1 M_4$  et  $M_2 M_3$  varie d'une façon monotone, puisque c'est une fonction linéaire des coordonnées de ce point, dans un système de coordonnées convenablement choisi; par suite

$$(3) \quad \min (h_1, h_2) \leq d_1 + d_2$$

Des inégalités (1), (2), (3) on tire

$$(4) \quad \lambda < \lambda_1 + \lambda_2$$

II. Un seul coté du parallélogramme  $P$ , p. ex.  $A_3 A_4$  est disjoint avec l'intérieur de  $E$ .

Les droites  $a_1, a_2$  et  $A_3 A_4$  déterminent alors un triangle  $T$  enfermant  $E$ , dont nous désignerons les sommets par  $M_1, M_2, M_3$ , en conservant l'ordre des points  $A_i$  et  $M_i$  adopté plus haut.

Soient  $h_1$  et  $h_2$  les hauteurs de  $T$  relatives aux sommets  $M_1$  et  $M_2$ , et  $d_1, d_2$  les distances du point  $A_1$  aux droites  $M_1 M_3$  et  $M_2 M_3$  respectivement. On a, pour les mêmes raisons que plus haut, les inégalités (1) et (3); l'inégalité (2)

est aussi vérifiée, puisque maintenant  $d_1 = \lambda_1$ ,  $d_2 < \lambda_2$ , donc on retrouve dans ce cas l'inégalité (4).

III. Il y a deux cotés adjacents du parallélogramme  $P$  qui sont disjoints avec l'intérieur de  $E$ .

Supposons d'abord, que ce sont deux cotés renfermant un angle  $\cong \frac{\pi}{2}$  de  $P$ , p. ex.  $A_3 A_4$  et  $A_4 A_1$ . Soient  $M_2$  le point d'intersection des droites  $a_2$  et  $A_4 A_1$ ,  $M_3$  celui des droites  $a_2$  et  $A_3 A_4$  et  $h_1, h_2, h_3$  les hauteurs du triangle  $A_4 M_2 M_3$  correspondant respectivement aux sommets  $A_4, M_2, M_3$ . Comme  $\sphericalangle A_1 A_4 A_3 \cong \frac{\pi}{2}$  et comme l'ensemble  $E$  est contenu dans le triangle considéré, on a

$$\lambda \leq h_1 < \min(h_2, h_3)$$

D'autre part, les distances du point  $A_2$  aux droites  $A_3 A_4$  et  $A_4 A_1$  étant  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , il vient

$$\min(h_2, h_3) \leq \lambda_1 + \lambda_2$$

et par suite

$$\lambda < \lambda_1 + \lambda_2$$

Si les cotés en question renferment un angle aigu de  $P$ , le raisonnement analogue conduit à la conclusion

$$(5) \quad \lambda \leq \lambda_1 + \lambda_2$$

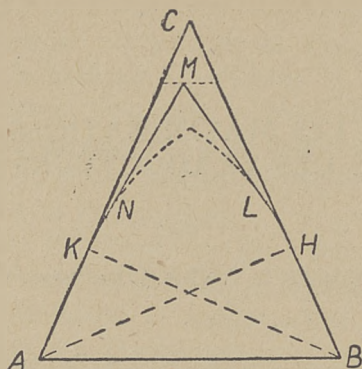
l'égalité n'étant pas exclue, car on ne connaît pas dans ce cas la plus petite hauteur du triangle considéré.

La démonstration est ainsi achevée. Il est à remarquer, que les cas II et III pourraient être traités comme cas limites de I, quand un ou deux des sommets du quadrilatère  $Q$  tendent vers les cotés de  $P$ . Mais alors on n'arriverait d'abord qu'au résultat plus faible (5).

La démonstration précédente permet de reconnaître les conditions dans lesquelles peut se présenter l'égalité  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ . On voit sans difficulté, que cette égalité n'a lieu que dans les cas suivants.

a) La décomposition  $E = EE_1 + EE_2$  est produite par une droite située dans une bande de largeur  $\lambda$  contenant  $E$ .





b) L'ensemble convexe  $E$  est contenu dans un triangle isocèle  $ABC$ , dont l'angle  $C$  au sommet est  $\leq \frac{\pi}{3}$ , et contient lui même l'ensemble convexe limité par le contour  $ABHL MNKA$  (cf. la figure), où  $M$  est un point du triangle tel, que sa distance à  $AB$  égale les hauteurs  $AH$  et  $BK$ ,  $HL$  et  $KN$  sont des arcs des cercles aux centres en  $A$  et en  $B$ , enfin  $ML$  et  $MN$  sont les tangentes menées du point  $M$  à ces cercles. Les ensembles  $EE_1$  et  $EE_2$  sont alors déterminés par deux droites parallèles à  $BC$  et à  $AC$  passant par un point quelconque de  $AB$ .

# LES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE DES TRADUCTEURS DE TOLEDE

par

FRANCISCO VERA (Buenos Aires)

Les connaissances mathématiques de l'Occident latin dans la première moitié du XII-e siècle étaient si modiques et lamentables que l'histoire des sciences exactes pendant une telle période n'est que l'histoire de son ignorance. Elle fait un vif contraste avec la situation des autres disciplines qu'on cultivait avec succès et spécialement la philosophie. On y suivait le chemin tracé en XI-e siècle par Saint Anselme et bifurqué en XII-e par Guillaume de Champeaux défenseur du réalisme et son rival Abélard, l'amant tourmenté d'Héloïse qui ont donné origine à un système de pensées d'où sortirent les discussions publiques de la collectivité des maîtres et des disciples.

La philosophie d'Aristote a reçu alors le nom de Scolastique ou science des écoles et Paris s'est converti en un paradis de délices: le *Parisius quidam paradisus deliciarum* comme chanta Jean de Necker. Un grand nombre d'étudiants de toutes les nations qui ont passé des arts libéraux à la Philosophie et de celle-là à la Théologie y est accouru: gloire de l'antique Lutèce depuis 1150, année dans laquelle on dictait à peine dans la colline de Sainte Gèneviève quelques cours du *quadrivium* pour les copistes.

Bologne était alors un autre centre scientifique. On y cultivait le Droit qui ne tarda pas à annuler l'attachement aux arts, car les juristes obtenaient des emplois bien rémunérés, tandis que l'étude du *quadrivium* était plutôt une curiosité intellectuelle qu'une profession lucrative.

Enfin — et c'est un phénomène intéressant dans l'histoire de la pensée humaine — à côté de la Théologie et du Droit apparaît d'abord à Salerno et ensuite à Montpellier une discipline de caractère pratique: la Médecine, faisant partie de la Physique qui se rapporte à l'homme quant à la matière et le mouvement. De tes études respectives sortiront plus tard l'Anatomie et la Physiologie.

La Théologie, le Droit et la Médecine c'étaient les sciences cultivées dans la deuxième moitié du XII<sup>e</sup> siècle en France et en Italie où — comme nous l'avons dit — on ignorait absolument les Mathématiques, puisque les splendeurs débiles de Lorraine, de Chartres et de Saint-Victor se sont éteintes. Ces écoles ont été absorbées par l'Université de Paris récemment fondée où les Sentences de Pierre Lombard et les disputes des réalistes et des nominalistes ont attiré l'intérêt des étudiants.

Et pourtant les Mathématiques non seulement ne sont pas mortes, mais au contraire elles devaient repousser avec de nouvelles forces grâce au travail d'une autre grande nation du monde latin: de l'Espagne. Dans ce temps quand le croisement de la civilisation orientale et occidentale a divisé l'histoire scientifique du Moyen-Age en deux époques distinctes, la seconde d'entre elles sort de l'École des Traducteurs de Tolède. Elle a été fondée par le Grand Chancelier de Castille Don Raimundo († 1152), nommé archevêque environ 1130, date à laquelle l'École a commencé ses travaux, au moment où la conquête de Tolède par Alphonse VI a facilité le croisement des deux civilisations: orientale et occidentale. Ce croisement a été d'abord favorisé par la persécution almohade, qui a obligé beaucoup de savants, de musulmans et d'Hébreux de s'abriter dans la ville de Tajo, et ensuite par la réforme de Cluny, dont les moines en apportant en Espagne la culture française ont influé sur la littérature espagnole, surtout sur l'épopée et le roman chevaleresque.

Tolède était dans ce temps-là un vrai foyer scientifique dans lequel venaient les hommes de tous les pays attirés spécialement par les arts magiques qu'on supposait y pou-

voir apprendre mieux qu'ailleurs. „Les clercs — a dit Elipando — vont à Paris pour étudier les arts libéraux, à Bologne les codes, à Tolède les diables et nulle part les bonnes coutumes.“ Mais outre les alchimistes et les nigromantes étrangers qui cherchaient à connaître les secrets de la pierre philosophale, l'élixir de la vie et la faculté divinatoire venaient dans l'antique capitale wisigothique beaucoup d'hommes de l'autre côté des Pyrénées qui sentaient la pure inquiétude du savoir désintéressé.

Les uns et les autres sans distinction de race, avec l'esprit de tolérance qu'exige le développement scientifique ont contribué à la splendeur de l'Ecole dans ces moments bien funestes de l'histoire de l'Espagne. Les Pedros, les Rodrigos et les Pelayos ont travaillé à côté des Abderrahmanes, des Yehudas, Adlalas et Garifes sous la direction de Domingo Gundisalvo († 1151) de Segovia, qu'on peut considérer comme précurseur de la nouvelle Scolastique puisque de ses jours se conservait encore le sédiment platonico-augustinien et on tendait en même temps aux grandes synthèses qui devaient s'ensuivre.

Tous ces hommes ont réalisé le travail méritoire de traduire en latin qui avait alors la valeur oecuménique les grandes oeuvres des auteurs antiques dont les traductions étaient soumises à un double procédé: d'abord un juif ou mozarabe faisait la traduction dans le grossier langage vulgaire ou en latin barbare, et ensuite les savants l'interprétaient dans l'idiome culte du Latium dans lequel il devait se répandre à travers toute l'Europe.

Quelques traducteurs ont abandonné l'anonymat et parmi eux, en ce que concerne les Mathématiques, les Espagnols Esteban Arnaldo et Juan Hispalense, les Anglais Athelard de Bath et Robert de Chester, les Italiens Gérard de Crémone et Platon de Tivoli, le Flamand Rodolphe de Brujas et un certain Hermann, de nationalité douteuse qui ont secoué les éternelles mathématiques assoupies de l'Occident latin, qui ont alors appris pour la première fois le raisonnement abstrait.



La Géométrie réduite à une collection de recettes, pas toujours exactes, a été connue par les Eléments d'Euclide dont la première version est due à Athelard de Bath avec ses propres commentaires, et la seconde à Gérard de Crémone qui a traduit non seulement les livres XIV et XV inclus, dont le caractère apocryphe est déjà démontré, mais aussi les Commentaires de Abulabbas el Fadl Abenatim el Nairizi connu en Occident comme Anarice, contenant une grande quantité d'intéressantes observations.

Si grande qu'était l'impression produite par l'oeuvre euclidienne une plus grande encore a causé la Trigonométrie dont l'Europe n'avait aucune idée. Elle savait de la Géométrie à la fin des fins le peu qui s'est conservé de Boèce et de Saint Isidore de Séville, ainsi que les recensions de Gerbert et n'ignorait pas l'existence d'une Géométrie théorique sans connaître son contenu. Mais dans la Trigonométrie l'ineptie du monde latin était absolue, puisque elle n'était pas considérée comme science autonome mais dependante de l'Astronomie et dans les premiers temps d'une manière incomplète à travers les Sphériques de Théodose et La science des étoiles d'Albatenio, les deux oeuvres traduites par Platon de Tivoli, et ensuite de la version du traité sur l'Astronomie d'Alfragano faite par Juan Hispalense. Tandis que la traduction correcte de l'Almageste de Ptolémée n'a pas été connue jusque 1175 dans la version de Gérard de Crémone qui contre sa coutume a daté son oeuvre nous permettant ainsi de fixer exactement l'année de son introduction.

La traduction du livre de Tâbit sur les transversales est aussi de Gérard, un autre sur la Géométrie élémentaire des trois fils de Abenmusa Abenschacher et les Eléments astronomiques du Sévillien Chéber Benafлах, dans lesquels on trouve le théorème fondamental de la Trigonométrie sphérique, ce qui prouve que les musulmans espagnols avaient déjà rompu le lien d'union entre l'Astronomie et la Trigonométrie et cultivaient cette dernière à la marge de son application à la connaissance du ciel.

D'autres traductions dont on ne doit pas oublier sont: le *Traité du Globe* de Costa ben Luca par Esteban Arnaldo, le *Quadripartito* de Ptolémée par Platon de Tivoli, et les *Figures sphériques* de Menelao par Gérard de Crémone qui a aussi traduit en latin les *Données* d'Euclide, la *Mesure du cercle* d'Archimède et les *Coniques* d'Apollonius.

On doit enfin à l'Ecole de Tolède l'introduction de l'Algèbre par la version du *Chèber u Almocábala* du Joarizmi, faite par Juan Hispalense, qui contient quelques types d'équations du second degré résolues par des méthodes géométriques que Leonardo de Pisa a transféré dans son fameux *Liber Abbaci*, ce qui donna origine à la croyance que le mathématicien italien a été l'introducteur de l'équation du second degré en Europe, mais il est déjà prouvé que Leonardo la connaissait<sup>m</sup> par la traduction latine aussi de Platon de Tivoli, du *Sépher hibbur hameixihá uehatixbóret* — livre du traité de la mesure et du calcule — du juif catalan Savasorda sous le titre de *Liber Embadorum*, oeuvre qui surpasse toutes les antérieures et beaucoup de postérieures jusqu'en pleine Renaissance.

Tel est le résumé de ce qu'ont fait dans le domaine des Mathématiques pendant la seconde moitié du XII-e siècle les bien mérités traducteurs de Tolède grâce auxquels la première renaissance mathématique du XIII-e siècle a été possible.

---

# SUR UN SYSTEME D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

par

M. PAUL MONTEL (Paris)

1. Soit  $f(x)$  une fonction de la variable réelle  $x$ ; désignons par

$$\Delta_h[f] = f(x+h) - f(x)$$

l'accroissement de  $f$  pour l'accroissement  $h$  de la variable et soit

$$\Delta_{h_2} \Delta_{h_1}[f] = \Delta_{h_2}[\Delta_{h_1}[f]] = \Delta_{h_1}[f(x+h_2)] - \Delta_{h_1}[f(x)].$$

On a

$$\Delta_{h_2} \Delta_{h_1} = \Delta_{h_1} \Delta_{h_2}.$$

On définit de même

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_{n-1}} \dots \Delta_{h_1}[f] = \Delta_{h_n} [\Delta_{h_{n-1}} \dots \Delta_{h_1}[f]].$$

La différence d'ordre  $n$ ,  $\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_n}$ , a une valeur indépendante de l'ordre des accroissements  $h_1, h_2, \dots, h_n$ .

2. Tout polynome  $f(x)$  de degré  $n-1$  vérifie l'équation

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_n}[f] = 0.$$

Réciproquement, on a le théorème:

*Théorème.* Si la fonction  $f(x)$ , continue de la variable réelle  $x$ , vérifie le système d'équations fonctionnelles

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_n} = 0, \\ \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_n} = 0, \end{cases}$$

dans lequel le rapport  $\frac{h_i}{k_j}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) est irrationnel,  $f(x)$  est un polynome de degré  $n-1$  au plus.

La condition est évidemment nécessaire. D'autre part, l'hypothèse que  $\frac{h_i}{k_j}$  est irrationnel est indispensable pour que la condition soit suffisante. Supposons en effet que l'un de ces rapports soit rationnel; on peut toujours supposer que ce rapport est  $\frac{h_n}{k_n}$  puisque les accroissements sont interchangeables. Alors  $h_n$  et  $k_n$  sont des multiples entiers d'un nombre  $\omega$ . Il suffit de prendre pour  $f(x)$  une fonction continue périodique de période  $\omega$  pour satisfaire aux équations (1).

Démontrons que la condition est suffisante. Soit d'abord  $n=1$ . La fonction  $f(x)$  admet les périodes  $h_1$  et  $k_1$  dont le rapport est irrationnel; on en déduit

$$f(x + ph_1 + qk_1) = f(x),$$

$p$  et  $q$  désignant deux entiers. Or, on peut choisir ces entiers de manière que la période  $ph_1 + qk_1$  soit aussi voisine qu'on le veut de n'importe quelle valeur de  $x$ , par exemple de  $x_0 - x$ . On en déduit, si la fonction est continue,

$$f(x_0) = f(x)$$

et  $f$  est une constante.†

Soit encore les équations

$$\Delta_{h_1} = C_1, \quad \Delta_{k_1} = C_2,$$

$C_1, C_2$  désignant des constantes. La fonction  $f(x+h) - f(x)$  vérifie, quel que soit  $h$ , les équations

$$\Delta_{h_1} = \Delta_{k_1} = 0;$$

c'est donc une constante, égale à  $f(h)$  et

$$f(x+h) = f(x) + f(h),$$

quels que soient  $x$  et  $h$ : donc  $f(x)$  est une fonction linéaire de  $x$ . Si  $C_1$  ou  $C_2$  est nul,  $f(x)$  est une constante et  $C_2$  ou  $C_1$  est nécessairement nul.

Supposons établi que le système

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-1}} = 0, \\ \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} = C, \end{cases}$$



$C$  désignant une constante, admette comme solution un polynôme de degré  $n-2$  et montrons que le système

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_n} = 0, \\ \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_n} = C, \end{cases}$$

obtenu en remplaçant dans le précédent  $n$  par  $n+1$  a comme solution un polynôme de degré  $n-1$ . Comme la proposition est vraie pour  $n=1$ , elle est générale.

Soit

$$\varphi = \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} [f]$$

on a

$$\Delta_{h_n} [\varphi] = 0, \quad \Delta_{k_n} [\varphi] = 0$$

et, comme  $\frac{h_n}{k_n}$  est irrationnel, on en déduit, en désignant par  $C$  une constante,

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} = C.$$

Or,

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{h_n} = 0,$$

donc  $C$  est nul et

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-2}} = C.$$

On démontrerait de même que la nouvelle constante  $C$  est nulle et que

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-3}} = C,$$

etc.; finalement, on obtient

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-1}} = C_1.$$

On a de même

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} = 0,$$

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{k_n} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} = 0,$$

donc

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-2}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} = C;$$

or,

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-2}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{h_{n-1}} = 0,$$

donc

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-2}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-2}} = C$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-2}} \Delta_{k_1} = C.$$

On établirait de la même façon le tableau

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-3}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} = 0,$$

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-3}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-2}} = 0,$$

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-3}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} = C,$$

etc. jusqu'à

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-2}} = 0,$$

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-3}} = C$$

et

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} = 0,$$

$$\Delta_{h_1} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-2}} = C.$$

On a donc

$$\Delta_{h_1} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} = 0,$$

$$\Delta_{k_n} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} = C,$$

et

$$\Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} = C_2.$$

Nous aboutissons ainsi au système

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-1}} = C_1,$$

$$\Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} = C_2.$$

Posons

$$f(x) = C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)! h_1 h_2 \dots h_{n-1}} + g(x);$$

on aura

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-1}} [g] = 0,$$

$$\Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} [g] = C_2 - C_1 \frac{k_1 k_2 \dots k_{n-1}}{h_1 h_2 \dots h_{n-1}};$$

par hypothèse,  $g(x)$  est un polynome de degré  $n-2$ ; donc  $f(x)$  est un polynome de degré  $n-1$ .

En particulier, si  $h_1 = h_2 = \dots = h_n = h$  et  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$ , on voit que les équations

$$\Delta_k^n [f] = 0, \quad \Delta_h^n [f] = 0$$

caractérisent, si  $\frac{h}{k}$  est irrationnel, un polynôme de degré  $n-1$ <sup>1)</sup>.

3. Soit  $f(z)$ , une fonction analytique de la variable complexe  $z$  et  $h, k, l$  trois périodes indépendantes, c'est-à-dire telles qu'il n'existe entre elles aucune relation linéaire à coefficients entiers  $p, q, r$  de la forme

$$ph + qk + rl = 0.$$

On sait que, si  $f(z)$  vérifie les équations fonctionnelles

$$\Delta_h = 0, \quad \Delta_k = 0, \quad \Delta_l = 0,$$

$f(z)$  est une constante: c'est le théorème de Jacobi. On en déduit aussitôt que la solution du système

$$\Delta_h = C_1, \quad \Delta_k = C_2, \quad \Delta_l = C_3$$

est une fonction linéaire puisque  $f'(z)$  vérifie le système précédent. Tout polynôme en  $z$ , de degré  $n-1$  satisfait à l'équation

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_n} = 0,$$

quels que soient  $h_1, h_2, \dots, h_n$ . Réciproquement, on a le

*Théorème.* Si la fonction analytique  $f(z)$  vérifie le système d'équations fonctionnelles

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_n} = 0, \\ \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_n} = 0, \\ \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \dots \Delta_{l_n} = 0, \end{array} \right.$$

dans lequel les périodes  $h_i, k_j, l_s$  ( $i, j, s = 1, 2, \dots, n$ ) sont indépendantes,  $f(z)$  est un polynôme de degré  $n-1$  au plus.

La condition relative aux périodes est indispensable. Si, en effet, un seul groupe était formé de périodes dépendantes, on pourrait toujours supposer qu'il s'agit du groupe  $h_n, k_n, l_n$ ; ces nombres appartiendraient à un réseau de périodes ayant pour base  $\omega$  et  $\omega'$  et toute fonction analytique doublement

<sup>1)</sup> Cf. Paul Montel, Sur quelques extensions d'un théorème de Jacobi, publié à la mémoire de L. Lichtenstein, (Prace Matematyczno-Fizyczne, pp. 315 — 329, 1936).

périodique de périodes  $\omega$  et  $\omega'$  satisferrait aux équations du système (4).

Nous démontrons la proposition par récurrence. Supposant que toute solution du système

$$(5) \quad \begin{cases} \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_{n-1}} = 0, \\ \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \cdots \Delta_{k_{n-1}} = 0, \\ \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \cdots \Delta_{l_{n-1}} = 0 \end{cases}$$

est un polynôme de degré  $n-2$ , nous en déduisons que toute solution du système (4) est un polynôme de degré  $n-1$ . Comme la proposition est vraie pour  $n=1$ , elle sera générale. Partons du système (4) et suivons la même marche qu'au numéro précédent. Soit

$$\varphi = \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \cdots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \cdots \Delta_{l_{n-1}} ;$$

on a

$$\Delta_{h_n}[\varphi] = 0, \quad \Delta_{k_n}[\varphi] = 0, \quad \Delta_{l_n}[\varphi] = 0,$$

et, comme les périodes  $h_n, k_n, l_n$ , sont indépendantes,  $\varphi$  est une constante. On établira comme précédemment le tableau des égalités

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \cdots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \cdots \Delta_{l_{n-1}} &= 0, \\ \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \cdots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \cdots \Delta_{l_{n-2}} &= 0, \\ \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \cdots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} &= 0, \\ \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \cdots \Delta_{k_{n-1}} &= C; \end{aligned}$$

ensuite,

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \cdots \Delta_{k_{n-1}} &= 0, \\ \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \cdots \Delta_{k_{n-2}} &= 0, \\ \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} &= 0, \\ \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_{n-1}} &= C_1. \end{aligned}$$

On établirait de même les équations

$$\begin{aligned} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \cdots \Delta_{k_{n-1}} &= C_2, \\ \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \cdots \Delta_{l_{n-1}} &= C_3; \end{aligned}$$

$f'(z)$  vérifie donc le système (5); c'est un polynôme de degré  $n-2$  et  $f(z)$  est un polynôme de degré  $n-1$ .



Si l'on suppose  $h_1 = h_2 = \dots = h_n = h$ ;  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$ ;  $l_1 = l_2 = \dots = l_n = l$ ,  $h, k, l$  désignant trois périodes indépendantes, on retrouve le système

$$\Delta_h^n = 0, \quad \Delta_k^n = 0, \quad \Delta_l^n = 0.^2)$$

4. On obtient des résultats un peu différents pour les fonctions de plusieurs variables. Soit, par exemple,  $f(x, y)$  une fonction continue de deux variables réelles vérifiant le système fonctionnel suivant

$$(6) \quad \begin{cases} \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_n} = 0, \\ \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_n} = 0, \\ \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \dots \Delta_{l_n} = 0 \end{cases}$$

dans lequel on suppose que  $\Delta_h$  est défini par l'égalité

$$\Delta_h[f] = f(x + \eta, y + \eta') - f(x, y), \quad h = \eta + i\eta',$$

et que les périodes  $h_p, k_j, l_s$  sont strictement indépendantes, c'est-à-dire que le corps de périodes qu'elles définissent possède des périodes infiniment petites dont les directions sont denses dans tout angle du plan. On peut énoncer le théorème suivant:

*Théorème.* *Toute fonction continue de deux variables réelles vérifiant le système (6) est un polynome dont le degré par rapport à l'ensemble des variables ne dépasse pas*  

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Le polynome est arbitraire si son degré ne dépasse pas  $n-1$ ; sinon, il est soumis à des conditions et, lorsque ce degré dépasse  $\frac{3}{2}(n-1)$ , les directions des vecteurs-périodes sont aussi soumises à des restrictions. Ces conditions n'agissant que sur les directions, on peut toujours déterminer les grandeurs des périodes de manière à assurer leur stricte indépendance.

La marche de la démonstration est semblable aux précédentes.

<sup>2)</sup> loc. cit.<sup>1)</sup>, p. 318.

5. Considérons enfin une fonction  $f(z, z')$  analytique de deux variables complexes et les accroissements

$$\Delta_{\omega} [f] = f(z + h, z' + h') - f(z, z'),$$

$$h = \eta_1 + i\eta_2, \quad h' = \eta_3 + i\eta_4;$$

$\omega$  désigne le vecteur-période défini, dans l'espace à quatre dimensions, par ses composantes  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ . Il faut alors introduire le système

$$\Delta_{\omega_1}^{(r)} \Delta_{\omega_2}^{(r)} \dots \Delta_{\omega_n}^{(r)} = 0, \quad (r = 1, 2, 3, 4, 5)$$

et supposer que les périodes  $\omega_i^{(1)}, \omega_j^{(2)}, \omega_s^{(3)}, \omega_t^{(4)}, \omega_u^{(5)}$  soient strictement indépendantes, c'est-à-dire que le corps de périodes défini par  $\omega_i^{(1)}, \omega_j^{(2)}, \omega_s^{(3)}, \omega_t^{(4)}, \omega_u^{(5)}$  possède des périodes infiniment petites dont les directions sont partout denses dans l'espace à quatre dimensions ou sur des variétés à trois dimensions.

On obtient alors un théorème entièrement semblable à celui qui concerne les fonctions de deux variables réelles

# SUR UNE FORMULE EXACTE, CARDINALE ET CANONIQUE DES TENSIONS INTERNES ET SUR L'ÉQUATION CARDINALE, CANONIQUE DU MOUVEMENT DES FLUIDES VISQUEUX

par

GODOFREDO GARCÍA (Lima)

Dans un travail publié dans les „*Actas de la Academia Nacional de Ciencias Exáctas Físicas y Naturales de Lima*“ sous le titre „*Ecuaciones exáctas y soluciones exáctas del movimiento y de las tensiones en los fluidos viscosos*“, j'ai fait une révision des équations de la Mécanique des fluides en obtenant des équations complètes pour les déformations et les mouvements finis<sup>1)</sup>.

Maintenant je me propose de donner au problème une forme cardinale et canonique. Je me borne à n'étudier que le cas du mouvement plan et je trouve les formules complètes des composantes normales et tangentes des tensions internes pour les déformations finies. J'obtiens ensuite l'équation exacte du mouvement qui comprend, comme cas particulier, celle de M. Hamel, lorsque les déformations et les mouvements sont petits.

## Tensions internes dans un fluide.

La formule vectorielle exacte que j'ai trouvé pour déterminer les tensions dans les fluides visqueux et compressibles, lorsque les déformations sont finies, est:

$$(1) \quad \vec{T} = \vec{n} \left[ P + \frac{2}{3} \nu \operatorname{div} \vec{p} + \frac{\nu}{3} (\operatorname{grad} \vec{p})^2 \right] - \\ - 2\nu \left[ \frac{\partial \vec{p}}{\partial n} + \frac{1}{2} \vec{n} \wedge \operatorname{rot} \vec{p} + \frac{\vec{n}}{2} \left( \frac{\partial \vec{p}}{\partial n} \right)^2 \right]$$

---

<sup>1)</sup> Actas de la Academia Nacional de Ciencias Exáctas Físicas y Naturales de Lima, Año X, vol X, fasciculos III y IV.

## Mouvements plans.

Les cosinus des angles formés par la tangente et par la normale avec les axes du système des coordonnées sont:

$$(2) \quad \cos a_\tau = \frac{p_x}{p}, \quad \cos b_\tau = \frac{p_y}{p}, \quad \cos a_n = -\frac{p_y}{p}, \quad \cos b_n = \frac{p_x}{p}.$$

La composante normale de la tension est:

$$(3) \quad T_n = P + \frac{2}{3} \nu \left[ \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial p_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial p_y}{\partial y} \right)^2 \right\} \right] - \\ - 2\nu \left[ \frac{\partial p_x}{\partial x} p_y^2 + \frac{\partial p_y}{\partial y} p_x^2 - \left\{ \frac{\partial p_x}{\partial y} + \frac{\partial p_y}{\partial x} \right\} p_x p_y \right] \frac{1}{p^2} - \\ - \nu \left[ \left\{ \left( \frac{\partial p_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p_y}{\partial x} \right)^2 \right\} p_y^2 + \left\{ \left( \frac{\partial p_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial p_y}{\partial y} \right)^2 \right\} p_x^2 - \right. \\ \left. - 2 \left\{ \frac{\partial p_x}{\partial x} \frac{\partial p_x}{\partial y} + \frac{\partial p_y}{\partial x} \frac{\partial p_y}{\partial y} \right\} p_x p_y \right] \frac{1}{p^2}$$

La composante tangente de la tension est:

$$T_\tau = -2\nu \left[ \left\{ \frac{\partial p_y}{\partial y} - \frac{\partial p_x}{\partial x} \right\} \sin a_\tau \cos a_\tau - \frac{\partial p_y}{\partial x} \sin^2 a_\tau + \frac{\partial p_x}{\partial y} \cos^2 a_\tau + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \xi_3 \right]$$

où

$$\xi_3 = \frac{\partial p_y}{\partial x} - \frac{\partial p_x}{\partial y}.$$

L'équation complète du mouvement relatif d'un fluide visqueux et compressible est:

$$(4) \quad \vec{Q}'' + 2\vec{\psi} \wedge \vec{Q}' + \vec{\psi}' \wedge \vec{Q} + [\vec{Q} \times \vec{\psi}] \vec{\psi} - \varrho^2 \vec{Q} = -\frac{1}{\varrho} \text{grad } \beta + \vec{J}$$

où  $\vec{\psi}$  est le vecteur caractéristique de la vitesse angulaire,  $\varrho$  la densité du fluide,  $\beta$  le potentiel de la force interne et  $\vec{J}$  le vecteur d'accélération des forces qui agissent.

En introduisant la variable canonique vectorielle:

$$(5) \quad \vec{p} = \vec{Q}' + \vec{\psi} \wedge \vec{Q}$$

on peut réduire l'équation (4) à la forme canonique:



$$(6) \quad \vec{p}' + \vec{\psi} \wedge \vec{p} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } \beta + \vec{J}.$$

La dérivée substantielle est exprimée par:

$$(7) \quad \vec{p}' = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + \frac{d\vec{p}}{dQ} \vec{p} - \frac{d\vec{p}}{dQ} (\vec{\psi} \wedge \vec{Q})$$

et l'accélération par:

$$(8) \quad \vec{J} = \text{grad } U + \vec{J}_0$$

où  $U$  est le potentiel de gravitation et  $\vec{J}_0$  l'accélération d'une force non-conservative.

Nous définirons une généralisation de la célèbre fonction d'Helmholtz par:

$$(9) \quad H = \int \frac{d\beta}{\rho} - U + \frac{1}{2} p^2$$

L'équation du mouvement relatif (6) prendra alors la forme suivante:

$$(10) \quad \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + \text{rot } \vec{p} \wedge \vec{p} + \vec{\psi} \wedge \vec{p} - \vec{\psi} \wedge \vec{Q} \times \text{grad } \vec{p} = -\text{grad } H + \vec{J}_0.$$

En introduisant l'opérateur vectoriel dans l'équation (10) on obtient:

$$(11) \quad \frac{\partial \text{rot } \vec{p}}{\partial t} + \text{rot} (\text{rot } \vec{p} \wedge \vec{p}) + \text{rot} (\vec{\psi} \wedge \vec{p}) - \text{rot} (\vec{\psi} \wedge \vec{Q} \times \text{grad } \vec{p}) = \text{rot } J_0.$$

En tenant compte du fait que:

$$\text{grad } \beta = \sum_{i=1}^3 \iota_i \text{div } T_{ik}.$$

où  $\iota_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), sont les verseurs fondamentaux d'un système orthogonal et  $T_{ik}$  les composantes de la tension et en représentant par

$$(12) \quad H_0 = \int \frac{d \left( p - \frac{\nu}{3} \text{div } \vec{p} - \frac{\nu}{3} (\text{grad } \vec{p})^2 \right)}{\rho} - U + \frac{1}{2} p^2$$

la fonction généralisée d'Helmholtz pour les déformations et les mouvements finis, où  $P$  est la pression et  $\nu$  le coefficient de viscosité, on pourra écrire l'équation (11) sous la forme:

$$(13) \quad \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + \text{rot } \vec{p} \wedge \vec{p} + \psi \wedge \vec{p} - \psi \wedge \vec{Q} \times \text{grad } \vec{p} = \\ = -\text{grad } H_0 + \frac{\nu}{\varrho} \left[ \Delta_2' \vec{p} - n \left( \frac{\partial \vec{p}}{\partial n} \times \Delta_2' \vec{p} \right) \right] + \vec{J}_0;$$

$n$  est le verseur parallèle à la normale. Le laplacien du vecteur  $\vec{p}$  est:

$$\Delta_2' \vec{p} = \text{grad } \text{div } \vec{p} - \text{rot } \text{rot } \vec{p}.$$

et l'équation de continuité est:

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \text{div } \vec{Q}' = 0.$$

$$(I) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\text{rot } \vec{p}}{\varrho} \right] - \frac{d\vec{p}}{dQ} \frac{\text{rot } \vec{p}}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \text{rot} [\vec{\psi} \wedge \vec{p}] + \text{div} [\vec{\psi} \wedge \vec{Q}] \frac{\text{rot } \vec{p}}{\varrho} + \\ + \frac{d \text{rot } \vec{p}}{dQ} \frac{\psi \wedge \vec{Q}}{\varrho} - \frac{1}{\varrho} \text{rot} [\vec{\psi} \wedge \vec{Q} \times \text{grad } \vec{p}] = \frac{\text{rot } \vec{J}_0}{\varrho}.$$

C'est l'équation d'Helmholtz pour le mouvement relatif du fluide en forme cardinale canonique.

### Mouvements plans.

Pour les mouvements plans l'équation vectorielle (13) est équivalente aux deux équations scalaires suivantes:

$$(14) \quad \frac{\partial p_x}{\partial t} - \left[ \frac{\partial p'_y}{\partial x} - \frac{\partial p_x}{\partial y} \right] p_y - \bar{r} p_y + \bar{r} \left[ x \frac{\partial p_x}{\partial y} - y \frac{\partial p_y}{\partial x} \right] = \\ = -\frac{\partial H_0}{\partial x} + \frac{\nu}{\varrho} \left[ \left\{ 1 - \left( \frac{\partial p_x}{\partial x} \cos a_n + \frac{\partial p_x}{\partial y} \cos b_n \right) \right\} \Delta_2 p_x + \right. \\ \left. + \left\{ \frac{\partial p_y}{\partial x} \cos a_n + \frac{\partial p_y}{\partial y} \cos b_n \right\} \Delta_2 p_y \right] \cos a_n + J_{0x},$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial p_y}{\partial t} + \left[ \frac{\partial p_y}{\partial x} - \frac{\partial p_x}{\partial y} \right] p_x + \bar{r} p_x + \bar{r} \left[ x \frac{\partial p_y}{\partial y} - y \frac{\partial p_y}{\partial x} \right] = \\
 (14) \quad & = -\frac{\partial H_0}{\partial y} + \frac{\nu}{\varrho} \left[ \left\{ 1 - \left( \frac{\partial p_y}{\partial x} \cos a_n + \frac{\partial p_y}{\partial y} \cos b_n \right) \right\} \Delta_2 p_y + \right. \\
 & \left. + \left\{ \frac{\partial p_x}{\partial x} \cos a_n + \frac{\partial p_x}{\partial y} \cos b_n \right\} \Delta_2 p_x \right] \cos b_n + J_{0y}
 \end{aligned}$$

dans lesquelles  $\bar{r}$  est la composante de la vitesse angulaire par rapport à l'axe  $z$ .

Si l'on introduit la fonction de Stokes  $\Phi$ :

$$(15) \quad p_x = -\Phi_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad p_y = \Phi_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

les équations (14) prendront la forme:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \Phi_y}{\partial t} - \Phi_x \Delta_2 \Phi - \bar{r} \Phi_x - \bar{r} \left[ x \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} \right] = \\
 & = -\frac{\partial H_0}{\partial x} - \frac{\nu}{\varrho} \Delta_2 \Phi_y - \frac{\nu}{2\varrho} \left[ \frac{\partial l p^2}{\partial y} \Delta_2 \Phi_y - \frac{\partial l p^2}{\partial x} \Delta_2 \Phi_x \right] \Phi_x + J_{0x}, \\
 (16) \quad & \frac{\partial \Phi_x}{\partial t} - \Phi_y \Delta_2 \Phi - \bar{r} \Phi_y + \bar{r} \left[ x \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} \right] =
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{\partial H_0}{\partial y} - \frac{\nu}{\varrho} \Delta_2 \Phi_x - \frac{\nu}{2\varrho} \left[ \frac{\partial l p^2}{\partial y} \Delta_2 \Phi_y + \frac{\partial l p^2}{\partial x} \Delta_2 \Phi_x \right] \Phi_y + J_{0y}.$$

Posons:

$$(17) \quad K = \frac{\partial l p^2}{\partial y} \Delta_2 \Phi_y + \frac{\partial l p^2}{\partial x} \Delta_2 \Phi_x,$$

où la lettre  $l$  désigne le logarithme naturel.

En différenciant la première équation (16) par rapport à la variable  $y$  et la seconde par rapport à la variable  $x$  et en l'ajoutant multipliée par  $(-1)$  à la première, on obtient:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial \Delta_2 \Phi}{\partial t} - \frac{D[\Phi, \Delta_2 \Phi]}{D[x, y]} - \bar{r} \left[ x \frac{\partial \Delta_2 \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Delta_2 \Phi}{\partial x} \right] + \\
 (18) \quad & + \frac{\nu}{\varrho} \Delta_2 \Delta_2 \Phi - \frac{\nu}{2\varrho} \frac{D[\Phi, K]}{D[x, y]} = \frac{\partial J_{0x}}{\partial y} - \frac{\partial J_{0y}}{\partial x}.
 \end{aligned}$$

En dérivant le vecteur  $\vec{Q}$  du potentiel d'un déplacement  $\gamma$  on a :

$$\vec{Q} = \text{grad } \gamma, \quad x = \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad y = \frac{\partial \gamma}{\partial y}.$$

L'équation (18) se transforme alors en l'équation suivante:

$$(19) \quad - \frac{\partial \Delta_2 \Phi}{\partial t} - \frac{D[\Phi, \Delta_2 \Phi]}{D[x, y]} - \bar{r} \frac{D[\gamma, \Delta_2 \Phi]}{D[x, y]} + \frac{\nu}{\rho} \Delta_2 \Delta_2 \Phi - \\ - \frac{\nu}{2\rho} \frac{D[\Phi, K]}{D[x, y]} = \frac{\partial J_{0x}}{\partial y} - \frac{\partial J_{0y}}{\partial x}$$

qui est l'équation du mouvement dans les coordonnées cartésiennes.

### Coordonnées isométriques.

M. G. Hamel a introduit les coordonnées isométriques qui permettent de réduire le problème aux équations différentielles ordinaires. En effet, la fonction de la variable complexe est:  $\omega = \omega(z)$ , où  $z = x + iy$ . En désignant par  $\varphi$  et  $\chi$  les coordonnées isométriques on aura

$$(20) \quad \omega = \varphi + i\chi.$$

Cette formule et les équations de Riemann-Cauchy permettent d'introduire dans le problème les coordonnées isométriques.

Remarquons maintenant que:

$$(21) \quad E = \left| \frac{\partial \omega}{\partial z} \right|^2 = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2$$

$$\Delta_2 \Phi = E \Delta_2^* \Phi, \quad p^2 = E p_1^2, \quad p_1^2 = \Phi_\varphi^2 + \Phi_\chi^2$$

où

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = Ea, \quad \frac{\partial E}{\partial \chi} = -Eb.$$

La composante normale de la tension sera:

$$(22) \quad T_n = P + \frac{\nu}{3} \left[ \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial \chi} \right)^2 \right] E^2 - \\ - \nu \left[ \frac{\partial p_1^2}{\partial \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} - \frac{\partial p_1^2}{\partial \chi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + a \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} + b \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right] E -$$



$$-\frac{\nu}{4} \left[ \left( \frac{\partial l p_1^2}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial l p_1^2}{\partial \chi} \right)^2 + 2 \left\{ a \frac{\partial l p_1^2}{\partial \varphi} - b \frac{\partial l p_1^2}{\partial \chi} \right\} + a^2 + b^2 \right] E^2 p_1^2$$

tandis que le composante tangente sera:

$$T_\tau = \nu E \left[ a \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - b \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial l p_1^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} \frac{\partial l p_1^2}{\partial \chi} - \Delta_2^* \Phi \right]$$

En posant:

$$(23) \quad K^* = \frac{\partial l p^2}{\partial \varphi} \frac{\partial \Delta_2 \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial l p^2}{\partial \chi} \frac{\partial \Delta_2 \Phi}{\partial \chi}$$

on obtient enfin l'équation dans les coordonnées isométriques:

$$(24) \quad \begin{aligned} & -\frac{1}{E} \frac{\partial \Delta_2^* \Phi}{\partial t} - \frac{D(\Phi, \Delta_2^* \Phi)}{D(\varphi, \chi)} + \left\{ a \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + b \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} \right\} \Delta_2^* \Phi - \\ & - \frac{D(\gamma, \Delta_2^* \Phi)}{D(\varphi, \chi)} + \left\{ a \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} + b \frac{\partial \gamma}{\partial \chi} \right\} \Delta_2^* \Phi + \\ & + \frac{\nu}{\rho} \left[ \Delta_2^* \Delta_2^* \Phi + 2 \left\{ a \frac{\partial \Delta_2^* \Phi}{\partial \varphi} + b \frac{\partial \Delta_2^* \Phi}{\partial \chi} \right\} + \right. \\ & \left. + \left\{ a^2 + b^2 \right\} \Delta_2^* \Phi - \frac{1}{2} \frac{D(\Phi, K^*)}{D(\varphi, \chi)} + \frac{1}{2} \left\{ a \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + b \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} \right\} K^* \right] = \\ & = \frac{1}{E} \left[ \left\{ \frac{\partial J_{0x}}{\partial \varphi} + \frac{\partial J_{0y}}{\partial \chi} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial J_{0x}}{\partial \chi} - \frac{\partial J_{0y}}{\partial \varphi} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]. \end{aligned}$$

Cette équation est complète et détermine les solutions exactes lorsque les mouvements et les déplacements sont finis.

On en obtient, comme cas particulier, l'équation de M. G. Hamel: 1° lorsqu'on considère le cas, où  $\vec{J}_0 = 0$ ;  $\bar{r} = 0$ ;  $K^* = 0$ , 2° lorsqu'on a, à côté de  $\bar{r} = 0$ ,  $K^* = 0$ , les relations:

$$\frac{\partial J_{0x}}{\partial \varphi} = -\frac{\partial J_{0y}}{\partial \chi}, \quad \frac{\partial J_{0x}}{\partial \chi} = \frac{\partial J_{0y}}{\partial \varphi}$$

qui définissent les équations de Riemann-Cauchy.

L'équation (24) conduit à une révision des solutions de l'équation de M. G. Hamel. On en déduit aussi des équations différentielles ordinaires qui permettent de déterminer les déformations et les mouvements finis.

# ON A SET OF INTEGERS NOT DEFINABLE BY MEANS OF ONE-QUANTIFIER PREDICATES

by

ANDRZEJ MOSTOWSKI (Warszawa)

1. This note is a sequel to my paper „*On definable sets of positive integers*“<sup>1)</sup> quoted below as D. For explanation of symbols and notations the reader should refer to section 1 of D. Quotations like D 1.23 mean: theorem 1.23 of D.

We shall assume that conditions  $R_1$  and  $R_2$  given in D 6.1 are satisfied. As it was mentioned in D 6.23 and D 6.31 this assumption implies the fact that  $P_0^{(n)}$  is the class of general recursive  $n$ -adic relations and  $P_0^{(1,1)}$  is the class of general recursive functions.

Let  $R_1^{(n)}$  be the smallest finitely additive field of sets such that  $R_1^{(n)} \supset P_1^{(n)} + Q_1^{(n)}$ . It follows from D 2.18 and D 2.31 that  $R_1^{(n)} \subset P_2^{(n)} \cdot Q_2^{(n)}$ .

It will be proved that  $R_1^{(n)} \neq P_2^{(n)} \cdot Q_2^{(n)}$ , i. e., that there exists a set  $A$  which belongs to  $P_2^{(n)} \cdot Q_2^{(n)}$  but does not belong to  $R_1^{(n)}$ .

For a clearer explanation of the meaning of this result, we have to remember that for every set of  $P_1^{(n)}$  there is a definition of the form

$$(1) \quad E_n [\sum_p \Pi_q (n, p, q) \in R_1]$$

with a general recursive  $R_1$ . For a set of  $Q_2^{(n)}$  there is, likewise, a definition of the form

$$(2) \quad E_n [\Pi_p \sum_q (n, p, q) \in R_2]$$

with a general recursive  $R_2$ . For the sets of  $R_1^{(n)}$  the general form of definition is

---

<sup>1)</sup> Fundamenta Mathematicae, vol. 34 (1947), pp. 81 — 112.

$$(3) E_n \{ \Phi (\Pi_p [(n, p) \in R_1], \dots, \Pi_p [(n, p) \in R_k], \\ \Sigma_q [(n, q) \in S_1], \dots, \Sigma_q [(n, q) \in S_l]) \},$$

where  $\Phi$  is a Boolean polynomial (i. e., a logical sum of logical products) of its arguments and  $R_1, \dots, R_k, S_1, \dots, S_l$  are general recursive sets.

Hence for the set  $A$ , whose existence will be proved below, a definition of the form (1) and a definition of the form (2) exist but no definition of the form (3) can be applied.

We remember here that if a set  $B$  simultaneously admits definitions of the forms  $E_n [\Pi_p (n, p) \in R_1]$  and  $E_n [\Sigma_p (n, p) \in R_2]$  with general recursive  $R_1, R_2$ , then  $B$  is itself a general recursive set<sup>2</sup>).

These theorems are quite analogous to the following well known results concerning projective sets: if a set  $B$  is an  $A$ -set as well as a  $CA$ -set, it must be Borelian; but a set which is a  $PCA$ -set as well as a  $CPCA$ -set does not necessarily belong to the smallest (denumerably additive) field of sets over  $A + CA$ .

2. In the subsequent proofs we shall make much use of the primitive recursive function  $s(k, n)$  defined in the following manner: we first define an auxiliary function  $t(k, n)$ :

$$t(1, n) = n, \quad t(k + 1, n) = s_2 [t(k, n)]$$

and then put  $s(k, n) = s_1 [t(k, n)]$ , where  $s_1(n)$  and  $s_2(n)$  are determined by the equation

$$n = 2^{s_1(n)} (2 s_2(n) - 1).$$

The following theorem exhibits the usefulness of this function:

2. 1. *For any finite sequence of integers  $r_1, r_2, \dots, r_h$  there is an integer  $n$  such that  $s(k, n) = r_k$  for  $k = 1, 2, \dots, h$ .*

3. In this section we shall prove two lemmas (3.3 and 3.4) complementary to the theorems given in section 2 of D.

<sup>2</sup>) S. C. Kleene, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 53 (1943), p. 53; E. L. Post, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 50 (1944), p. 290; D 5.51.

3.1. If  $f(m)$  is a function of class  $P_k^{(1,1)}$ , then the set

$$W = E_{i,m} [i < f(m)]$$

is of class  $P_k^{(2)} \cdot Q_k^{(2)}$ .

Proof. Evidently

$$\begin{aligned} i < f(m) &\equiv \Sigma_h [(h = f(m)) \cdot (i < h)] \\ &\equiv \Pi_h [(h = f(m)) \rightarrow (i < h)]. \end{aligned}$$

Since the sets  $E_{h,m,i} [(h = f(m)) \cdot (i < h)]$  and  $E_{h,m,i} [(h = f(m)) \rightarrow (i < h)]$  are of classes  $P_k^{(3)}$  and  $Q_k^{(3)}$ , it follows from these equivalences for  $k > 0$ , that  $W$  is of class  $P_k^{(2)}$  and  $Q_k^{(2)}$  (cf. D 2. 16). If  $k = 0$ , we obtain  $W \in P_1^{(2)} \cdot Q_1^{(2)}$ , i. e.,  $W \in P_0^{(2)} \cdot Q_0^{(2)}$  in view of D 5.51.

3. 2. Every function  $f(m)$  of class  $P_1^{(1,1)}$  is general recursive<sup>3)</sup>.

Proof.<sup>4)</sup> By definition D 5.1 the set

$$I_f = E_{l,m} [l = f(m)]$$

belongs to  $P_1^{(1,1)}$ . Since

$$(l, m) \in I_f \equiv \Pi_h [(h = f(m)) \rightarrow (l = h)]$$

and the set of  $(h, l, m)$  satisfying the condition in square brackets is of class  $Q_1^{(2)}$ , D 2.16 entails  $I_f \in Q_1^{(2)}$ . Hence by D 5.51  $I_f \in P_1^{(2)} \cdot Q_1^{(2)} = P_0^{(2)}$ , i. e.,  $f$  is a general recursive function.

3.3. If  $M \in P_k^{(n+2)}$  and either (i)  $k \leq 1$  and  $f \in P_k^{(1,1)}$  or (ii)  $k > 1$  and  $f \in P_{k-1}^{(1,1)}$ , then the set

$$P = E_{n,m} [\Pi_{i < f(m)} (n, m, i) \in M]$$

is of class  $P_k^{(n+1)}$ .

Proof. Let us first consider the case  $k = 0$ . By definitions D 1.3 and D 1.5 there are decidable propositional functions  $\varphi(x, x, y)$  and  $\psi(x, y)$  such that

$$(4) \quad (n, m, i) \in M \equiv \vdash \varphi(n, m, i), \quad j = f(m) \equiv \vdash \psi(j, m).$$

The propositional function  $\psi^*(x, y)$  defined as

$$\psi(x, y) \cdot \Pi_u [u < x \rightarrow \psi'(u, y)]$$

<sup>3)</sup> A similar theorem is valid in the theory of projective sets: if the geometric image of a function  $f$  is an analytical set, this function is Borelian. See, e. g., K. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1933, p. 253.

<sup>4)</sup> I owe this proof to a remark of Professor K. Kuratowski.



is decidable again and satisfies the conditions

$$(5) \quad j = f(m) \equiv \vdash \psi^*(j, m),$$

$$(6) \quad \vdash \prod_{x_1, x_2, y} [\psi^*(x_1, y) \cdot \psi^*(x_2, y) \rightarrow x_1 = x_2].$$

Now define  $\vartheta(x, y)$  as

$$\sum_z \{ \psi^*(z, y) \cdot \prod_x [x < z \rightarrow \varphi(x, y, z)] \};$$

using (4), (5), and (6) we can easily prove that this propositional function is decidable and defines  $P$ . Hence  $P \in P_0^{(n+1)}$  and our theorem is proved for  $k=0$ .

Consider now the case  $k > 0$ . As the set  $M$  is of class  $P_k^{(n+2)}$ , there is a set  $N \in Q_{k-1}^{(n+3)}$  such that

$$(n, m, i) \in M \equiv \sum_j [(n, m, i, j) \in N]$$

and consequently

$$(7) \quad (n, m) \in P \equiv \prod_{i < f(m)} \sum_j [(n, m, i, j) \in N].$$

If  $(n, m) \in P$ , there is for any  $i < f(m)$  an  $r_i$  such that  $(n, m, i, r_i) \in N$ . By 2.1 there is an  $r$  such that  $s(i, r) = r_i$  for  $i < f(m)$  and hence

$$(8) \quad (n, m, i, s(i, r)) \in N \quad \text{for } i < f(m).$$

This proves that

$$(n, m) \in P \rightarrow \sum_r \prod_{i < f(m)} [(n, m, i, s(i, r)) \in N].$$

Conversely, if there is an integer  $r$  for which the formula (8) holds, then  $\prod_{i < f(m)} \sum_j [(n, m, i, j) \in N]$ ; therefore the equivalence (7) evidently yields:  $(n, m) \in P$ . Hence

$$(9) \quad (n, m) \in P \equiv \sum_r \prod_{i < f(m)} [(n, m, i, s(i, r)) \in N].$$

If  $k=1$ , the set of  $(n, m, i, r)$  such that

$$(n, m, i, s(i, r)) \in N$$

is by D 5.33 of class  $P_0^{(n+3)}$ . By 3.2  $f(m)$  is a general recursive function. Since our theorem has been already proved for  $k=0$ , the set of  $(n, m, r)$  such that

$$\prod_{i < f(m)} [(n, m, i, s(i, r)) \in N]$$

is of class  $P_0^{(n+2)}$ . By (9) and D 2.16,  $P \in P_1^{(n+1)}$ , which proves our theorem for  $k=1$ .

If  $k > 1$ , we rewrite (9) as

$$(10) \quad (n, m) \in P \equiv \sum_r \prod_i [i < f(m) \rightarrow (n, m, i, s(i, r)) \in N].$$

The set of  $(n, m, i, r)$  satisfying the condition in square brackets is of class  $Q_{k-1}^{(n+3)}$  by 3.1 and D 5.33. Applying D 2.16

and remembering that  $k > 1$ , we conclude from (10) that  $P \in P_k^{(n+1)}$ .

Theorem 3.3 is thus proved. Applying de Morgan's laws we obtain:

3.4. If  $M \in Q_k^{(n+2)}$  and either (i)  $k \leq 1$  and  $f \in P_k^{(1,1)}$  or (ii)  $k > 1$  and  $f \in P_{k-1}^{(1,1)}$ , then the set

$$Q = E_{n,m}[\sum_{i < f(m)} (n, m, i) \in M]$$

is of class  $Q_k^{(n+1)}$ .

4. Let us now consider the smallest field of sets over  $P_1^{(n)} + Q_1^{(n)}$ . Denoting this field by  $R_1^{(n)}$ , we obtain from D 2.12 and D 2.17 the following theorem.

4.1  $P \in R_1^{(n)}$  if and only if there is an integer  $k$  and sets  $M_1, \dots, M_k, N_1, \dots, N_k \in P_1^{(n)}$  such that

$$(11) \quad P = (M_1 - N_1) + (M_2 - N_2) + \dots + (M_k - N_k).$$

We shall also need the following theorem due to Kleene<sup>5</sup>.

4.2. There is a function  $F_1^{(n)}$  universal for the class  $P_1^{(n)}$  and such that the set

$$(12) \quad E_{n,k}[\pi \in F_1^{(n)}(k)]$$

is of class  $P_1^{(n+1)}$ .

Define now the function  $T_1^{(n)}$  by the formula

$$(13) \quad T_1^{(n)}(m) = \sum_{i < s_2(m)} [F_1^{(n)}(s(2i-1, s_1(m))) - F_1^{(n)}(s(2i, s_1(m)))].$$

We shall prove that

4.3. The function  $T_1^{(n)}$  is universal for the class  $R_1^{(n)}$  and the set

$$(14) \quad E_{n,m}[\pi \in T_1^{(n)}(m)]$$

is of class  $P_2^{(n+1)} \cdot Q_2^{(n+1)}$ .

Proof. Since  $F_1^{(n)}(s(j, m)) \in P_1^{(n)}$  for  $j = 1, 2, \dots, 2s_2(m) - 1$ , 4.1 and (13) entail  $T_1^{(n)}(m) \in R_1^{(n)}$  for every integer  $m$ . Let us suppose that  $P \in R_1^{(n)}$ , i.e., that (11) holds for some  $M_1, \dots, M_k, N_1, \dots, N_k \in P_1^{(n)}$ . As the function  $F_1^{(n)}$  is universal for  $P_1^{(n)}$ , there are integers  $r_1, r_2, \dots, r_{2k}$  such that

<sup>5</sup>) S. C. Kleene, l. c. <sup>2</sup>), p. 47.



## REMARQUE SUR LES ESPACES TOPOLOGIQUES DÉNOMBRABLES

par .

MIROSLAV KATĚTOV (Praha)

On sait qu'un espace régulier absolument fermé est (bi)compact (P. Alexandroff et P. Urysohn, *Mémoire sur les espaces compacts*). D'autre part, il est facile de trouver d'exemples des espaces semiréguliers (cf. M. H. Stone, *Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 375—481) qui ne sont pas compacts tout en étant absolument fermés. Or, la question s'impose si la semirégularité héréditaire suffit pour assurer la (bi)compactité d'un espace absolument fermé. Je n'ai réussi de résoudre ce problème que pour des espaces dénombrables.

Tout d'abord, je rappelle quelques définitions connues. Tous les espaces considérés sont des espaces topologiques de Hausdorff.

Un espace  $P$  s'appelle *régulier* s'il existe pour tout  $x \in P$  et tout voisinage  $G$  de  $x$  un ensemble ouvert  $H$  tel que  $x \in H$ ,  $\overline{H} \subset G$ . Un ensemble  $G \subset P$  s'appelle *régulièrement ouvert* si  $G = \text{Int } \overline{G}$ .  $P$  s'appelle *semirégulier* si chaque voisinage d'un point arbitraire contient un voisinage régulièrement ouvert. On dit que  $P$  est *semirégulier d'une manière héréditaire* si chaque sous-espace de  $P$  est semirégulier.

Un espace  $P$  s'appelle *compact* („bicomact“ chez Alexandroff et Urysohn) si l'on peut extraire un recouvrement fini de tout recouvrement ouvert de  $P$ . Un espace  $P$  s'appelle *absolument fermé* s'il est fermé dans n'importe quel espace (de Hausdorff)  $S \supset P$ .



Je fais l'usage des théorèmes suivants connus [pour B v. M. Katětov, *Über H-abgeschlossene und bikompakte Räume*, Cas. mat. fys., 69 (1940), 36 — 49].

A. Pour qu'un espace  $P$  soit absolument fermé, il faut et il suffit que tout recouvrement ouvert de  $P$  contienne des ensembles  $G_1, \dots, G_n$  tels que  $\Sigma \overline{G_i} = P$ .

B. L'intersection d'un système monotone des sous-espaces absolument fermés d'un espace quelconque n'est pas vide.

C. La fermeture d'un sous-ensemble ouvert d'un espace absolument fermé est absolument fermée elle-même.

Exemple 1. L'espace  $P_1$  se compose des points du plan  $a_m = \left(\frac{1}{m}, 0\right)$ ,  $a_{mn} = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$  et de deux points  $a^+$  et  $a^-$ . Les points  $a_m$ ,  $a_{mn}$  possèdent des voisinages usuels; les points  $a^+$  et  $a^-$  possèdent des voisinages  $U_k^+ + a^+$  ou, respectivement,  $U_k^- + a^-$ ,  $U_k^+$  étant l'ensemble des points  $a_{mn}$  tels que  $m > k$ ,  $n > 0$  et  $U_k^-$  étant l'ensemble des points  $a_{mn}$  tels que  $m > k$ ,  $n < 0$ . On voit aisément que  $P_1$  est semirégulier et absolument fermé (en vertu de A), mais il n'est pas compact.

*Théorème. Tout espace  $P$  dénombrable absolument fermé et semirégulier d'une manière héréditaire est compact.*

*Démonstration.* Supposons, en effet, que  $P$  ne soit pas compact. Alors il existe un ensemble infini  $M \subset P$  tel que pour tout  $x \in P$  nous avons  $x \notin \overline{M - x}$ . Rangeons les points de  $P$  en suite  $\{a_n\}$ . Il existe un voisinage ouvert  $H$  de  $a_1$  tel que  $MH$  est fini.  $P$  étant semirégulier, il existe un ensemble régulièrement ouvert  $G$ , tel que  $a_1 \in G \subset H$ . Posons  $Q_1 = P - G = \overline{P - G}$ ; en vertu de C,  $Q_1$  est absolument fermé,  $M - Q_1$  est évidemment fini,  $a_1 \notin Q_1$ .

Supposons maintenant que nous avons déjà construit des ensembles  $Q_k \subset P$  ( $k = 1, \dots, n$ ), tels que (1)  $Q_k \supset Q_{k+1}$ , (2)  $a_k \notin Q_k$ , (3)  $M - Q_k$  est fini, (4)  $Q_k$  est absolument fermé. Si  $a_{n+1} \notin Q_n$ , posons  $Q_{n+1} = Q_n$ . Si  $a_{n+1} \in Q_n$ , nous pouvons, à cause de la semirégularité de  $Q_n$ , démontrer par le

même raisonnement qu'il existe un sous-espace  $Q_{n+1} \subset Q_n$  absolument fermé, tel que  $M - Q_{n+1}$  est fini et  $a_{n+1} \notin Q_{n+1}$ .

Ayant construit les ensembles  $Q_n$  pour  $n = 1, 2, \dots$  nous avons une suite monotone  $\{Q_n\}$  des espaces absolument fermés. Alors, en vertu de B,  $\Pi Q_n$  n'est pas vide ce qui constitue une contradiction, car  $a_n \notin Q_n$ .

On pourrait attendre que la semirégularité héréditaire entraîne, pour un espace dénombrable, sa régularité. L'exemple suivant (cf. E. Čech and J. Novák. *On regular and combinatorial imbedding*, Čas. mat. fys. 72 (1947), 7—16, exemple 3) montre que cette hypothèse est fautive.

Exemple 2. L'espace  $P_2$  se compose des points du plan  $a_m = \left(\frac{1}{m}, 0\right)$ ,  $a_{mn} = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$ ,  $m, n = 1, 2, \dots$  et du point

$a$ . Les points  $a_m, a_{mn}$  possèdent des voisinages usuels (donc, des points  $a_{mn}$  sont isolés dans  $P_2$ ). Le point  $a$  possède des voisinages  $U_k - Z + a$ , où  $U_k$  se compose de tous les points  $a_{mn}$  tels que  $m > k$  et  $Z$  est tel que la somme des ordonnées de tous les points appartenant à  $Z$  est fini. Il est facile de voir que  $a$  est le seul point irrégulier de  $P_2$ . Soit maintenant  $Q \subset P_2$ . Si  $a \notin Q$ , alors  $Q$  est régulier et a fortiori semirégulier. Si  $a \in Q$ , soit  $V$  un voisinage de  $a$  dans  $Q$ . Il existe évidemment, pour tout  $m$  tel que  $a_m \in \overline{V - a_m}$ , des points  $z_{mk} \in V$ ,  $z_{mk} \neq a$ , tels que (1)  $z_{mk} \rightarrow a_m$ , (2) la somme des ordonnées des points  $z_{mk}$  est  $< \frac{1}{2^m}$ . Désignons

maintenant par  $Z$  l'ensemble composé de tous les points  $z_{mk}$  et des points  $a_m$  et posons  $U = V - Z$ . Alors,  $a \in U \subset V$ ,  $U$  est régulièrement ouvert dans  $Q$ . Donc,  $Q$  est semirégulier, ce qui prouve la semirégularité héréditaire de  $P_2$ .

---

## REMARK ON $\mathfrak{M}$ -COMPLETENESS

by

J. NOVÁK (Brno)

Let  $\{\varrho_\iota\}$  ( $\iota \in \mathfrak{M}$ ) be any family of metrics in a set  $P$ . A sequence  $\{x_n\}$  ( $x_n \in P$ ) is  $\mathfrak{M}$ -convergent, if it is  $\varrho_\iota$ -convergent for any  $\iota \in \mathfrak{M}$ ;  $\mathfrak{M}$ -fundamental sequences are defined accordingly.  $P$  is called  $\mathfrak{M}$ -complete, if every  $\mathfrak{M}$ -fundamental sequence is  $\mathfrak{M}$ -convergent. If  $P$  is not  $\mathfrak{M}$ -complete we can enlarge  $P$  by adjoining ideal limits, thus obtaining a set  $P_{\mathfrak{M}}$ . If  $\mathfrak{M}$  consists of one element only,  $P_{\mathfrak{M}}$  is notoriously  $\mathfrak{M}$ -complete. The generalisation to a countable  $\mathfrak{M}$  is trivial. For an uncountable  $\mathfrak{M}$ , however, I give here a counter example. This seems to contradict an assertion made by M. Deuring (*Algebren*, 1935, p. 94, Satz 2, viz.  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}\mathfrak{M}} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$ ).

Let  $P$  be a set of the symbols  $a_{rs}$ , where  $r$  and  $s$  are positive integers. Let  $\mathfrak{M}$  be the family of all sequences  $\iota = n_1, n_2, \dots$  of positive integers. We are going to define the metric  $\varrho_{n_1, n_2, \dots}$  as follows:

$$\varrho_{n_1, n_2, \dots}(a_{rs}, a_{r's'}) = |f_{n_1, n_2, \dots}(a_{rs}) - f_{n_1, n_2, \dots}(a_{r's'})|$$

where  $f_{n_1, n_2, \dots}$  is the one-to-one map of  $P$  into the set of complex numbers such that

$$f_{n_1, n_2, \dots}(a_{rs}) = r + is \quad \text{for } s \leq n_r,$$

$$f_{n_1, n_2, \dots}(a_{rs}) = \frac{1}{r} + \frac{i}{s} \quad \text{for } s > n_r.$$

There are  $2^{\aleph_0}$  different metrics  $\varrho_{n_1, n_2, \dots}$  in the set  $P$  and  $2^{\aleph_0}$  different metric spaces  $(P, \varrho_{n_1, n_2, \dots})$ . Now let

$$\left\{ a_{r_i s_i} \right\}_{i=1}^{\infty}, \quad a_{r_i s_i} \neq a_{r_j s_j} \quad \text{for } i \neq j \quad (1)$$

be any point sequence in  $P$ . Two cases are possible:

1<sup>o</sup> There is an index  $k$  such that  $r_i = k$  for  $i = 1, 2, \dots$  with exception of a finite number of  $i$ . In this case

$\lim s_i = \infty$ . Let  $\iota = n_1, n_2, \dots$  be any element in  $\mathfrak{M}$ . Then  $\lim_i f_{n_1, n_2, \dots} (a_{r_i s_i}) = \lim_i f_{n_1, n_2, \dots} (a_{k s_i}) = \frac{1}{k}$  since  $s_i > n_k$  for nearly all  $i$ . We deduce from this that (1) is a  $\mathfrak{M}$ -fundamental sequence.

2° There is no index  $k = r_i$  for almost all  $i$ . In this case, we may choose a subsequence  $\{a_{r' s_{r'}}\}$  from the sequence (1), where the indexes  $r'$  are different from one another. Let  $c_i = s_{r'}$  for  $i = r'$  and  $c_i = 1$  for  $i \neq r'$ ; then  $f_{c_1, c_2, \dots} (a_{r' s_{r'}}) = (r' + i s_{r'})$ .

Hence  $\varrho_{c_1, c_2, \dots} (a_{r' s_{r'}}, a_{r'' s_{r''}}) > |r' - r''| > 1$  provided  $r' \neq r''$ .

The sequence (1) does not satisfy the Cauchy's condition in the space  $(P, \varrho_{c_1, c_2, \dots})$  and it fails to be  $\mathfrak{M}$ -fundamental.

We arrive at the following statement:

*The sequence (1) is  $\mathfrak{M}$ -fundamental if and only if  $r_i = k$  for all but a finite number of indexes  $i$ .*

According to this statement we may denote by  $A_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , all ideal limits of  $\mathfrak{M}$ -fundamental sequences (1), where  $r_i = k$  for nearly all  $i$ . We obtain the space  $P_{\mathfrak{M}}$  by adjoining the elements  $A_k$  to the space  $P$ . In  $P_{\mathfrak{M}}$ , the sequence  $\{A_k\}_1^{\infty}$  of ideal limits is  $\mathfrak{M}$ -fundamental. Indeed,

$\varrho_{\iota} (A_k, A_l) = \frac{|k-l|}{kl}$  for all metrics  $\varrho_{\iota}$ ,  $\iota \in \mathfrak{M}$ . On the other

hand, there is no element in  $P_{\mathfrak{M}}$ , to which the sequence  $\{A_k\}_1^{\infty}$  converges. Consequently  $P_{\mathfrak{M}\mathfrak{M}} \neq P_{\mathfrak{M}}$ .



# EXTENSIONS OF GENERAL ALGEBRAS

by

SAMUEL EILENBERG (New York)

**1. Introduction.** The theory of group extensions and factor sets has been shown (Eilenberg and Mac Lane [3]) to be closely related with the so called cohomology theory of abstract groups. Analogously Hochschild [4] has shown that extensions of associative algebras connect with the cohomology theory for associative algebras. A similar fact was also established for Lie algebras (Chevalley and Eilenberg [2]).

The purpose of this note is to present a theory of extensions for some general classes of algebras including associative and Lie algebras as special cases. The factor-set relations obtained should be useful in designing cohomology theories for other kinds of algebras.

**2. Abstract forms.** Let  $x_1, \dots, x_n$  be  $n$  distinct symbols. The concept of a monomial of order  $n$  in the symbols  $x_1, \dots, x_n$  is defined by induction as follows. If  $n = 1$  then  $x_1$  is a monomial of order 1. Assume that monomials of order  $< n$  have been defined. Let  $x'_1, \dots, x'_p, x''_1, \dots, x''_q$  ( $p+q=n$ ) be a permutation of the symbols  $x_1, \dots, x_n$ , let  $m'$  be a monomial of order  $p$  in  $x'_1, \dots, x'_p$  and let  $m''$  be a monomial of order  $q$  in the variables  $x''_1, \dots, x''_q$ . Then  $(m' m'')$  is a monomial of order  $n$  in the variables  $x_1, \dots, x_n$ .

Let  $F$  be a field which will be kept fixed throughout the discussion. Denote by  $M$  the set of all monomials of order  $n$  in the symbols  $x_1, \dots, x_n$ . A function  $L$  which to each monomial  $m \in M$  assigns an element  $L_m$  of  $F$  will be called an *abstract form* of order  $n$  (over the field  $F$ ) in the symbols  $x_1, \dots, x_n$ . If we identify each monomial in with the form  $L^m$  such that  $L^m_m = 1$  and  $L^m_{m'} = 0$  for  $m' \neq m$  then we can write

$$(2.1) \quad L = \sum_{m \in M} L_m m, \quad L_m \in F.$$

Notice that it is required for all the monomials occurring in a form to have the same order  $n$  and involve the same  $n$  symbols.

Let  $A$  be any algebra over  $F$ , i.e.  $A$  is a vector space over  $F$  and a bilinear multiplication  $(a_1 a_2) \in A$  for  $a_1, a_2 \in A$  is given. Given a monomial  $m$  of order  $n$  in the symbols  $x_1, \dots, x_n$  and given elements  $a_1, \dots, a_n \in A$  we substitute  $a_i$  for  $x_i$  in the inductive definition of the monomial  $m$  and obtain an  $n$ -linear function  $m(a_1, \dots, a_n)$  with values in  $A$ . Using formula (2.1) we find that each abstract form  $L$  of order  $n$  defines an  $n$ -linear function  $L(a_1, \dots, a_n)$  with values in  $A$ . If  $L(a_1, \dots, a_n) = 0$  for all arguments  $a_1, \dots, a_n \in A$  then we say that *the algebra  $A$  annuls the form  $L$* .

A representation  $R$  of the algebra  $A$  in the vector space  $V$  (over  $F$ ) consists of two bilinear functions  $(av) \in V$  and  $(va) \in V$  defined for  $a \in A$  and  $v \in V$ . If  $m$  is a monomial as above and  $a_1, \dots, a_n \in A$  and  $v \in V$  then  $m(a_1, \dots, a_{i-1}, v, a_{i+1}, \dots, a_n)$  ( $i \leq n$ ) is a well defined element of  $V$ . Similarly if  $L$  is an abstract form of order  $n$  then

$$(2.2) \quad L(a_1, \dots, a_{i-1}, v, a_{i+1}, \dots, a_n) \quad i \leq n$$

is an element of  $V$  and gives a function linear in  $n - 1$  arguments in  $A$  and one argument in  $V$  with values in  $V$ . If (2.2) is zero for all values of the arguments and all  $i = 1, \dots, n$  then we say that *the representation  $R$  annuls the form  $L$* . Note that this condition results in  $n$  identities upon the representation  $R$ . These need not be distinct in view of possible symmetries in the structure of  $L$ .

Forms of order 1 are rather trivial in nature. Henceforth it will be assumed that all forms and monomials have order 1.

**3. Extensions of algebras.** Let  $A$  be an algebra and  $V$  a vector space both over the same field  $F$ . We shall regard  $V$  as an algebra in which  $(v_1 v_2) = 0$  for any  $v_1, v_2 \in V$  (or shorter:  $V^2 = (0)$ ). An *extension* of  $A$  by  $V$  is a pair  $(E, \varphi)$  where  $E$  is an algebra over  $F$  containing  $V$  as a subalgebra

and  $\varphi: E \rightarrow A$  is a homomorphism of  $E$  onto  $A$  with kernel  $V$ . Two extensions  $(E_1, \varphi_1)$  and  $(E_2, \varphi_2)$  of  $A$  by  $V$  are *equivalent* if there is an isomorphism  $\tau: E_1 \approx E_2$  such that  $\tau(v) = v$  for each  $v \in V$  and that  $\varphi_2 = \varphi_1 \tau$ .

Given an extension  $(E, \varphi)$  of  $A$  by  $V$ , consider elements  $a \in A, v \in V$ . Select  $e \in E$  so that  $\varphi(e) = a$ . Since  $V^2 = (0)$  it follows that  $(ev)$  and  $(ve)$  are both independent of the choice of  $e$  (subject to the condition  $\varphi(e) = a$ ). We define

$$(av) = (ev) \quad , \quad (va) = (ve)$$

and thus obtain a representation  $R$  of  $A$  in  $V$ . Two equivalent extensions induce the same representation.

In the sequel we shall assume that  $A, V$  and the representation  $R$  are given, and we shall study extensions  $(E, \varphi)$  of  $A$  by  $V$  realizing the given representation.

Given an extension  $(E, \varphi)$  as above construct a linear map  $\eta: A \rightarrow E$  such that  $\varphi\eta$  is the identity map of  $A$  onto itself. Then for  $a_1, a_2 \in A$  define  $f(a_1, a_2) \in E$  by the formula

$$(\eta(a_1)\eta(a_2)) = \eta(a_1 a_2) + f(a_1, a_2).$$

Applying  $\varphi$  to both sides we find that  $\varphi f(a_1, a_2) = 0$  so that  $f(a_1, a_2) \in V$ . The function  $f$  is bilinear and is called the *factor set* of the extension  $(E, \varphi)$  relative to the *representative function*  $\eta$ .

If  $\eta$  is replaced by another representative function  $\bar{\eta}$  then

$$\bar{\eta} = \eta + h$$

where  $h: A \rightarrow V$  is a linear map. Conversely every  $\bar{\eta}$  of the form  $\eta + h$  is a representative function. If  $\bar{f}$  denotes the factor set relative to  $\bar{\eta}$  then

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(a_1 a_2) + \bar{f}(a_1, a_2) &= (\bar{\eta}(a_1)\bar{\eta}(a_2)) = (\eta(a_1) + h(a_1))(\eta(a_2) + h(a_2)) \\ &= (\eta(a_1)\eta(a_2)) + (\eta(a_1)h(a_2)) + (h(a_1)\eta(a_2)) \\ &= \eta(a_1 a_2) + f(a_1, a_2) + (a_1 h(a_2)) + (h(a_1) a_2). \end{aligned}$$

Consequently

$$\bar{f}(a_1, a_2) - f(a_1, a_2) = (a_1 h(a_2)) - h(a_1 a_2) + (h(a_1) a_2).$$

If we define the bilinear function  $\delta h$  (called the *coboundary* of  $h$ ) by the formula

$$(\delta h)(a_1, a_2) = (a_1 h(a_2)) - h(a_1 a_2) + (h(a_1) a_2)$$

then

$$\bar{f} - f = \delta h.$$

Consider now the totality of all bilinear functions on  $A$  with values in  $V$ . Two such functions are called equivalent if they differ by a coboundary. The preceding argument shows that the factor sets of an extension  $(E, \varphi)$  constitute an equivalence class.

We shall show that two extensions  $(E_1, \varphi_1)$  and  $(E_2, \varphi_2)$  of  $A$  by  $V$  are equivalent if and only if the corresponding equivalence classes of factor sets are equal. Indeed if  $\eta_1$  is a representative function in  $(E_1, \varphi_1)$  and  $\tau: E_1 \approx E_2$  establishes the equivalence of the two extensions then  $\eta_2 = \tau\eta_1$  is a representative function in  $(E_2, \varphi_2)$  and  $\eta_1$  and  $\eta_2$  have the same factor set. Conversely assume that the equivalence classes of factor sets of  $(E_1, \varphi_1)$  and  $(E_2, \varphi_2)$  are the same. The representative functions  $\eta_1$  and  $\eta_2$  can then be selected so that the corresponding factor sets are equal. Any element  $e \in E_1$  can uniquely be expressed as

$$e = \eta_1(a) + v \quad a \in A, v \in V.$$

Define

$$\tau(e) = \eta_2(a) + v.$$

A direct computation then shows that  $\tau$  establishes the equivalence of  $(E_1, \varphi_1)$  and  $(E_2, \varphi_2)$ .

Suppose that  $A, V$ , the representation  $R$  and the bilinear function  $f$  of  $A$  in  $V$  are given. Let  $E$  be the vector space of all pairs  $(a, v)$  for  $a \in A, v \in V$ . Define a multiplication in  $E$  by setting

$$([a_1 v_1][a_2 v_2]) = ([a_1 a_2], [v_1 a_2] + [a_1 v_2] + f[a_1, a_2])$$

and identify the elements  $v \in V$  and  $(o, v) \in E$ . Then  $E$  is an algebra over  $F$  and  $V$  is a subalgebra of  $E$  with  $V^2 = (0)$ . Further define

$$\varphi(a, v) = a, \quad \eta(a) = (a, 0).$$

Then  $\varphi$  is a homomorphism of  $E$  onto  $A$  with kernel  $K$  and

$$\begin{aligned} [\eta(a)v] &= (a, o)(o, v) = [o, (av)] = (av), \\ [v\eta(a)] &= (o, v)(a, o) = [o, (va)] = (va), \\ \eta(a_1)\eta(a_2) &= (a_1, o)(a_2, o) = [a_1 a_2, f(a_1, a_2)] = \\ &= (a_1 a_2, o) + [o, f(a_1, a_2)] = \eta(a_1 a_2) + f(a_1, a_2). \end{aligned}$$



The first two formulas show that extension  $(E, \varphi)$  realizes the given representation  $R$ . The last formula shows that  $f$  is the factor set corresponding to the representative function  $\eta$ .

Summarizing we have

*Theorem A.* *The equivalence classes of extensions  $(E, \varphi)$  of an algebra  $A$  by a vector space  $V$  corresponding to a given representation  $R$  of  $A$  in  $V$ , are in a 1—1 correspondence with the equivalence classes (modulo coboundaries) of bilinear functions on  $A$  with values in  $V$ .*

Following the procedure indicated by Hochschild [4, § 6] the totality of equivalence classes of extensions  $(E, \varphi)$  can be made into a vector space (over  $F$ ). The correspondence of Theorem A is then an isomorphism.

**4. Identities on factor sets.** As above let  $(E, \varphi)$  be an extension of the algebra  $A$  by  $V$ . Assuming that both  $A$  and the representation  $R$  annihilate an abstract form  $L$ , what conditions must the factor sets satisfy in order that  $E$  also annihilate  $L$ ? The answer to this question is contained in Theorem B below. Some preliminary definitions are needed.

Let  $L$  be any abstract form in the symbols  $x_1, \dots, x_n$  and let  $f$  be a bilinear function with arguments in  $A$  and values in  $V$ . We define an  $n$ -linear function

$$f_L(a_1, \dots, a_n), \quad a_1, \dots, a_n \in A$$

with values in  $V$  as follows.

If  $m$  is a monomial of order 1 then

$$(4.1) \quad f_m = 0.$$

Assume now that  $f_m$  is defined whenever  $m$  is a monomial of order  $< n$ . Suppose now that  $x'_1, \dots, x'_p, x''_1, \dots, x''_q$  ( $p + q = n$ ) is a permutation of  $x_1, \dots, x_n$  and that  $m = (m' m'')$  where  $m'$  is a monomial of order  $p$  in  $x'_1, \dots, x'_p$ , while  $m''$  is a monomial of order  $q$  in  $x''_1, \dots, x''_q$ . Let then  $a'_1, \dots, a'_p, a''_1, \dots, a''_q$  be the corresponding permutation of  $a_1, \dots, a_n$  and define

$$(4.2) \quad \begin{aligned} f_m(a_1, \dots, a_n) = & m'(a'_1, \dots, a'_p) f_{m''}(a''_1, \dots, a''_q) + \\ & + f(m'(a'_1, \dots, a'_p), m''(a''_1, \dots, a''_q)) + \\ & + f_{m'}(a'_1, \dots, a'_p) m''(a''_1, \dots, a''_q) \end{aligned}$$

where for convenience some parentheses were omitted.

Having defined  $f_m$  for all monomials consider an abstract form  $L = \sum L_m m$  and define

$$(4.3) \quad f_L = \sum L_m f_m.$$

If  $f_L$  is zero (for all values of the argument) then we say that the function  $f$  annuls the form  $L$ .

*Theorem B.* Let  $(E, \varphi)$  be an extension of the algebra  $A$  by the vector space  $V$  inducing the representation  $R$ . Let  $f$  be a factor set of this extension relative to some representative function  $\eta$ . Let  $L$  be any abstract form of order  $n$ . The algebra  $E$  annuls  $L$  if and only if  $A$ ,  $R$  and  $f$  all annul  $L$ .

*Proof.* Let

$$(4.4) \quad e_i = \eta(a_i) + v_i, \quad a_i \in A, v_i \in V, i = 1, \dots, n.$$

We first prove the following basic formula.

$$(4.5) \quad L(e_1, \dots, e_n) = \eta[L(a_1, \dots, a_n)] + f_L(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n L(a_1, \dots, a_{i-1}, v_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Observe that  $V^2 = (0)$  implies that  $L(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = 0$  for  $i \neq j$ , further  $\eta(a)v = av$  and  $v\eta(a) = va$ . Hence the multilinearity of  $L$  implies

$$L(e_1, \dots, e_n) = L[\eta(a_1), \dots, \eta(a_n)] + \sum_{i=1}^n L(a_1, \dots, a_{i-1}, v_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

Thus (4.5) reduces to the following special case

$$(4.6) \quad L[\eta(a_1), \dots, \eta(a_n)] = \eta[L(a_1, \dots, a_n)] + f_L(a_1, \dots, a_n).$$

In view of (4.3) it suffices to prove (4.6) when  $L$  is a monomial  $m$ . If  $m$  has order 1, (4.6) is trivial. Assume that (4.6) has been proved for monomials of order  $< n$ . Suppose now that  $x'_1, \dots, x'_p, x''_1, \dots, x''_q$  ( $p + q = n$ ) is a permutation of the variables  $x_1, \dots, x_n$  and that  $m = (m' m'')$  where  $m'$  is a monomial of order  $p$  in  $x'_1, \dots, x'_p$  while  $m''$  is a monomial of order  $q$  in  $x''_1, \dots, x''_q$ . Let  $a'_1, \dots, a'_p, a''_1, \dots, a''_q$  be the corresponding permutation of  $a_1, \dots, a_n$ . Since (4.6) holds for  $L = m'$  and  $L = m''$  we have

$$\begin{aligned} m[\eta(a_1), \dots, \eta(a_n)] &= m'(\eta(a'_1), \dots, \eta(a'_p)) m''(\eta(a''_1), \dots, \eta(a''_q)) \\ &= \eta[m'(a'_1, \dots, a'_p)] \eta[m''(a''_1, \dots, a''_q)] + \eta(m'(a'_1, \dots, a'_p)) f_{m'}(a''_1, \dots, a''_q) \\ &\quad + f_{m'}(a'_1, \dots, a'_p) \eta(m''(a''_1, \dots, a''_q)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \eta(m'(a'_1, \dots, a'_p) m''(a''_1, \dots, a''_q)) + f(m'(a'_1, \dots, a'_p), m''(a''_1, \dots, a''_q)) \\
&+ m'(a'_1, \dots, a'_p) f_{m''}(a''_1, \dots, a''_q) + f_{m'}(a'_1, \dots, a'_p) m''(a''_1, \dots, a''_q) \\
&= \eta(m(a_1, \dots, a_n)) + f_m(a_1, \dots, a_n)
\end{aligned}$$

as required by (4.6).

Having proved formula (4.5) the proof of the theorem follows easily. Suppose that  $A$ ,  $R$  and  $f$  all annul the form  $L$ . Formula (4.5) then implies that  $E$  also annuls  $L$ . Assume now that  $E$  annuls  $L$ . Setting  $v_1 = \dots = v_n = 0$  in (4.5) we find

$$\eta(L(a_1, \dots, a_n)) + f_L(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Applying  $\varphi$  to this formula gives  $L(a_1, \dots, a_n) = 0$  so that  $A$  and  $f$  both annul  $L$ . Formula (4.5) then implies

$$\sum_{i=1}^n L(a_1, \dots, a_{i-1}, v_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0.$$

Setting  $v_i = v$  and  $v_j = 0$  for  $j \neq i$  we find

$$L(a_1, \dots, a_{i-1}, v, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, n.$$

Hence the representation  $R$  annuls  $L$ .

5. *Coboundaries.* As a corollary of Theorem B we prove

*Theorem C.* *If the algebra  $A$  and the representation  $R$  of  $A$  in  $V$  both annul an abstract form  $L$  then for every linear mapping  $h: A \rightarrow V$  the coboundary  $\delta h$  annuls  $L$ .*

*Proof.* Let  $(E, \varphi)$  be an extension of  $A$  by  $V$  inducing the representation  $R$  and such that with a suitable representative function  $\eta$  the factor set is zero. By Theorem B, the algebra  $E$  annuls  $L$ . If we replace the representative function by  $\bar{\eta} = \eta + h$  then the factor set relative to  $\bar{\eta}$  will be  $\delta h$ . Hence  $\delta h$  annuls  $L$  by Theorem B.

A direct proof of Theorem C follows from the general formula

$$\begin{aligned}
(5.1) \quad (\delta h)_L(a_1, \dots, a_n) &= -h[L(a_1, \dots, a_n)] + \\
&+ \sum_{i=1}^n L(a_1, \dots, a_{i-1}, h(a_i), a_{i+1}, \dots, a_n)
\end{aligned}$$

proved by the same method as (4.5). If now  $A$  and  $R$  annul  $L$ , both terms on the right are zero and  $(\delta h)_L = 0$ .

6. *Examples.* In the examples that follow, the multiplication in an algebra will be written as  $a_1 a_2$  without paren-

theses, except in the case of Lie algebras where we shall write  $[a_1, a_2]$ .

Commutative algebras. Let

$$L = (x_1 x_2) - (x_2 x_1).$$

Algebras that annul the form  $L$  are called *commutative*. They satisfy the condition

$$a_1 a_2 = a_2 a_1.$$

A representation  $R$  of  $A$  in  $V$  annuls  $L$  if and only if

$$av = va.$$

Further

$$f_L(a_1, a_2) = f(a_1, a_2) - f(a_2, a_1)$$

hence the factor sets that annuls  $L$  are characterized by

$$f(a_1, a_2) = f(a_2, a_1).$$

Associative algebras. Consider the form

$$L = [x_1(x_2 x_3)] - [(x_1 x_2) x_3].$$

An algebra  $A$  that annuls  $L$  is called *associative* and is characterized by the identity

$$a_1(a_2 a_3) = (a_1 a_2) a_3.$$

A representation  $R$  of  $A$  in  $V$  annuls  $L$  provided

$$a_1(a_2 v) = (a_1 a_2) v, a_1(v a_2) = (a_1 v) a_2, (v a_1) a_2 = v(a_1 a_2).$$

Further

$$f_L(a_1, a_2, a_3) = a_1 f(a_2, a_3) + f(a_1, a_2 a_3) - f(a_1, a_2) a_3 - f(a_1 a_2, a_3)$$

so that the factor set that annuls  $L$  are characterized by the identity

$$a_1 f(a_2, a_3) + f(a_1, a_2 a_3) = f(a_1 a_2, a_3) + f(a_1, a_2) a_3.$$

Lie algebras. Consider the abstract forms

$$L^1 = (x_1 x_2) + (x_2 x_1),$$

$$L^2 = [(x_1 x_2) x_3] + [(x_2 x_3) x_1] + [(x_3 x_1) x_2].$$

An algebra  $A$  annulling  $L^1$  and  $L^2$  is called a Lie algebra. It is characterized by the identities

$$[a_1, a_2] + [a_2, a_1] = 0,$$

$$[[a_1, a_2], a_3] + [[a_2, a_3], a_1] + [[a_3, a_1], a_2] = 0$$



the second of which is called the Jacobi identity. A representation  $R$  of  $A$  in  $V$  annuls  $L^1$  and  $L^2$  provided

$$av + va = 0,$$

$$[a_1, a_2]v = a_1(a_2v) - a_2(a_1v).$$

A factor set  $f$  annuls  $L^1$  and  $L^2$  if and only if

$$f(a_1, a_2) + f(a_2, a_1) = 0,$$

$$f(a_1, a_2)a_3 + f(a_2, a_3)a_1 + f(a_3, a_1)a_2 + f([a_1, a_2], a_3) \\ + f([a_2, a_3], a_1) + f([a_3, a_1], a_2) = 0.$$

Jordan algebras. Consider the abstract forms

$$L^1 = (x_1 x_2) - (x_2 x_1),$$

$$L^2 = [(x_1 (x_2 x_3) x_4) + [(x_1 (x_3 x_4)) x_2] + [(x_1 (x_4 x_2) x_3) \\ - [(x_1 x_2) (x_3 x_4)] - [(x_1 x_3) (x_4 x_2)] - [(x_1 x_4) (x_2 x_3)].$$

An algebra  $A$  annulling  $L^1$  and  $L^2$  is called a Jordan algebra (Albert [1]) and is characterized by the identities

$$a_1 a_2 = a_2 a_1,$$

$$[a(a_1 a_2)]a_3 + [a(a_2 a_3)]a_1 + [a(a_3 a_1)]a_2 \\ = (aa_1)(a_2 a_3) + (aa_2)(a_3 a_1) + (aa_3)(a_1 a_2).$$

A representation  $R$  of  $A$  in  $V$  annuls  $L^1$  and  $L^2$  provided

$$av = va,$$

$$a_1[(a_2 a_3)v] + a_2[(a_3 a_1)v] + a_3[(a_1 a_2)v] \\ = (a_1 a_2)(a_3 v) + (a_2 a_3)(a_1 v) + (a_3 a_1)(a_2 v) \\ = [a_1(a_2 a_3)]v + a_3[a_1(a_2 v)] + a_2[a_1(a_3 v)].$$

A factor set  $f$  annuls  $L^1$  and  $L^2$  provided

$$f(a_1, a_2) = f(a_2, a_1)$$

and

$$f[a(a_1 a_2), a_3] + f[a(a_2 a_3), a_1] + f[a(a_3 a_1), a_2] \\ + a_1 f(a, a_2 a_3) + a_2 f(a, a_1 a_3) + a_3 f(a, a_1 a_2) \\ + a_1 [af(a_2, a_3)] + a_2 [af(a_3, a_1)] + a_3 [af(a_1, a_2)] \\ = f(aa_1, a_2 a_3) + f(aa_2, a_3 a_1) + f(aa_3, a_1 a_2) \\ + (aa_1)f(a_2, a_3) + (aa_2)f(a_3, a_1) + (aa_3)f(a_1, a_2) \\ + (a_1 a_2)f(a, a_3) + (a_2 a_3)f(a, a_1) + (a_3 a_1)f(a, a_2).$$

**Bibliography**

1. A. A. Albert: *A structure theory for Jordan algebras*, Annals of Math. 48 (1947), 546—567.
  2. C. Chevalley and S. Eilenberg: *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948), 85—124.
  3. S. Eilenberg and S. Mac Lane: *Cohomology theory in abstract groups I, II*, Annals of Math. 48 (1947), 51—78. 326—341.
  4. G. Hochschild: *Cohomology and representations of associative algebras*, Duke Math. Journ. 14 (1947), 921—948.
-

# DEUX PROPOSITIONS DE LA THÉORIE DES GROUPES DE SUBSTITUTIONS

par

SOPHIE PICCARD (Neuchâtel).

Soient  $m \geq 2$  et  $n > m$  deux entiers. Soit  $G$  un groupe transitif de substitutions des éléments  $1, 2, \dots, m$  et soit  $S$  une substitution ne faisant pas partie de  $G$ , dont les éléments font partie de l'ensemble  $E = \{1, 2, \dots, n\}$ . Nous désignerons par le symbole  $\{S\}$  l'ensemble des éléments permutés par  $S$ . Tout élément de l'ensemble  $S$  fait partie d'un cycle d'ordre  $> 1$  de  $S$ . Posons  $E' = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $E'' = \{m + 1, \dots, n\}$ . On a  $E = E' + E''$ . Supposons que  $\{S\} \supset E''$ .<sup>1)</sup>

Nous dirons que la substitution  $S$  et le groupe  $G$  sont *connexes* si tout cycle de  $S$  qui contient au moins un élément de l'ensemble  $E''$  contient également au moins un élément de l'ensemble  $E'$ .

Lorsque la substitution  $S$  et le groupe  $G$  sont connexes, nous dirons qu'ils sont *imprimitifs* s'il est possible de décomposer l'ensemble  $E$  en une somme de  $k \geq 2$  sous-ensembles  $E_1, E_2, \dots, E_k$ , disjoints deux à deux, tels que  $\overline{E_1} = \overline{E_2} = \dots = \overline{E_k} > 1$ <sup>2)</sup> et que, quels que soient les indices  $i$  et  $j$  ( $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k$ ), si  $T = S$  ou si  $T$  est une substitution quelconque du groupe  $G$  et si  $T$  transforme au moins un élément de  $E_i$  en un élément de  $E_j$ , alors  $T$  transforme tout l'ensemble  $E_i$  en  $E_j$ , et nous dirons que la substitution  $S$  et le groupe  $G$  sont *primitifs* dans le cas contraire. Si  $S$  et  $G$  sont imprimitifs, les ensembles  $E_1, E_2, \dots, E_k$  sont appelés les systèmes d'imprimitivité de  $G$  et de  $S$ .

---

1) Quels que soient les ensembles  $A$  et  $B$ , le symbole  $A \supset B$ , de même que le symbole  $B \subset A$ , exprime que  $A$  contient  $B$  ou que  $B$  est un sous-ensemble de  $A$ , et le symbole  $A \not\supset B$ , le même que le symbole  $B \not\subset A$ , exprime que  $B$  n'est pas un sous-ensemble de  $A$ .

2) Quel que soit l'ensemble  $A$ , le symbole  $\overline{A}$  désigne la puissance de  $A$ .

Si  $\{S\} = \{1, 2, \dots, n\} = E$ , nous dirons que la substitution  $S$  est *imprimitive* si on peut décomposer l'ensemble  $E$  en une somme de  $r > 2$  sous-ensembles  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(r)}$ , disjoints deux à deux et tels que  $\bar{E}^{(1)} = \bar{E}^{(2)} = \dots = \bar{E}^{(r)} > 1$  et que, quel que soit l'indice  $i$  ( $1 \leq i \leq r$ ), ou bien la substitution  $S$  transforme l'ensemble  $E^{(i)}$  en lui-même et alors  $E^{(i)}$  se compose de la totalité des éléments de certains cycles de  $S$ , ou bien il existe un indice  $j \neq i$ , tel que  $1 \leq j \leq r$  et que  $S$  transforme  $E^{(i)}$  en  $E^{(j)}$ , et nous dirons que la substitution  $S$  est primitive dans le cas contraire. Si la substitution  $S$  est imprimitive les ensembles  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(r)}$  sont appelés les systèmes d'imprimitivité proprement dits de la substitution  $S$ .

*Remarque 1.* Quels que soient les entiers  $m \geq 2$  et  $n > m$ , si  $G$  est un groupe transitif et primitif de substitutions des éléments  $1, 2, \dots, m$  et si  $S$  est une substitution connexe avec  $G$ , dont les éléments sont des nombres de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ , les nombres  $m + 1, \dots, n$  étant tous permutés par  $S$ , alors si la substitution  $S$  et le groupe  $G$  sont imprimitifs, la substitution  $S$  est imprimitive et tous les nombres  $1, 2, \dots, m$  font partie d'un même système d'imprimitivité de la substitution  $S$ .

En effet, supposons que  $S$  et  $G$  sont imprimitifs et soient  $E_1, E_2, \dots, E_k$  ( $k > 1$ ) les systèmes d'imprimitivité de  $S$  et  $G$ . Soit  $E_i$  un quelconque de ces systèmes qui contient au moins un élément de l'ensemble  $E' = \{1, 2, \dots, m\}$ . Montrons que  $E_i$  ne saurait être un vrai sous-ensemble de  $E'$ . En effet, supposons le contraire. Alors il existe un indice  $j \neq i$ , tel que  $1 \leq j \leq k$  et que  $E_j$  contient aussi au moins un élément de  $E'$ . Soit  $q$  un tel élément de  $E'$  qui fait partie de  $E_j$  et soit  $p$  un élément fixe quelconque de  $E'$  qui appartient à  $E_i$ . Comme le groupe  $G$  est transitif, il existe (au moins) une substitution  $T$  de  $G$  qui transforme  $p$  en  $q$ . Mais alors, comme  $E_i$  et  $E_j$  sont deux systèmes d'imprimitivité de  $G$  et de  $S$ ,  $T$  doit transformer tout l'ensemble  $E_i$  en  $E_j$  et on doit avoir  $E_j \subset E'$ , puisque  $T \in G$ .<sup>1)</sup> Deux cas sont maintenant possibles.

<sup>1)</sup> Quels que soient l'ensemble  $A$  et l'élément  $a$ , le symbole  $a \in A$  [ $a \bar{\in} A$ ] exprime que  $a$  est [n'est pas] un élément de  $A$ .



1<sup>o</sup>, Ou bien  $E' = E_i + E_j$ .

2<sup>o</sup>. Ou bien  $E' \neq E_i + E_j$ . Dans ce dernier cas, il existe (au moins) un élément  $r$  de  $E'$  qui  $\bar{\epsilon} E_i + E_j$ . Soit  $E_h$  le système d'imprimitivité de  $G$  et  $S$  qui contient  $r$ . Comme le groupe  $G$  est transitif, il existe (au moins) une substitution  $T'$  de  $G$  qui transforme  $p$  en  $r$ . Et comme  $E_i$  et  $E_h$  sont deux systèmes d'imprimitivité de  $G$  et de  $S$ ,  $T'$  doit transformer  $E_i$  en  $E_h$ . Et comme  $T' \in G$ , on a  $E_h \subset E'$ .

Deux éventualités peuvent maintenant se présenter. Ou bien  $E' = E_i + E_j + E_h$ ; ou bien  $E' \neq E_i + E_j + E_h$  et alors il existe un quatrième système d'imprimitivité de  $G$  et de  $S$ , soit  $E_l$ , tel que  $E_l \subset E'$ . Et ainsi de suite.

Il existe donc en tout cas un entier  $u \geq 2$ , et  $u$  systèmes d'imprimitivité  $E_i, E_j, \dots$ , de  $G$  et de  $S$ , dont la somme est l'ensemble  $E'$ . Donc le groupe  $G$  est imprimitif, contrairement à notre hypothèse sur ce groupe.

Donc, si le groupe  $G$  est primitif, l'ensemble  $E_i$  ne saurait être un vrai sous-ensemble de  $E'$ .

Il peut arriver que  $E_i = E'$ . Mais tel n'est pas forcément le cas et, si  $E_i \neq E'$ ,  $E_i$  contient alors au moins un nombre  $> m$ . Soit  $t$  un tel nombre. Toutes les substitutions du groupe  $G$  laissent fixe  $t$  et doivent donc transformer l'ensemble  $E_i$  qui contient l'élément  $p$  de  $E'$  et qui constitue un système d'imprimitivité de  $G$  et de  $S$  en cet ensemble lui-même. Or, quel que soit l'élément  $q$  de  $E'$ , comme le groupe  $G$  est transitif, il contient (au moins) une substitution  $T$  qui transforme  $p$  en  $q$ . Et comme  $T \in G$  et de ce fait transforme l'ensemble  $E_i$  en lui-même, on a  $q \in E_i$ . Donc  $E_i \supset E'$ .

On voit donc bien que, si le groupe  $G$  est transitif et primitif<sup>1)</sup> et si  $G$  et  $S$  sont imprimitifs, la substitution  $S$  est forcément imprimitive et l'ensemble  $E'$  tout entier fait partie d'un système d'imprimitivité de  $S$ . Il peut d'ailleurs constituer tout ce système ou n'en être qu'un vrai sous-ensemble.

1) Donc en particulier, si  $G$  est le groupe symétrique ou le groupe alterné des substitutions des éléments 1, 2, ...  $m$ .

*Notations.* Quel que soit le cycle  $C = (c_1 c_2 \dots c_l)$  d'une substitution  $S$  et quels que soient les éléments  $c_i$  et  $c_j$  de  $C$  ( $1 \leq i \leq l$ ,  $1 \leq j \leq l$ , nous désignerons par le symbole  $\frac{C}{c_i c_j}$  le plus petit entier positif, tel que  $i + \frac{C}{c_i c_j} \equiv j \pmod{l}$ . On a, en général,

$$\frac{C}{c_i c_j} \neq \frac{C}{c_j c_i} \text{ et on a, en tout cas, } \frac{C}{c_i c_j} + \frac{C}{c_j c_i} = l.$$

*Remarque 2.* Soient  $m \geq 2$  et  $n > m$  deux entiers. Soit  $S$  une substitution des éléments \*)  $1, 2, \dots, n$  qui contient chaque élément de la suite \*) dans un cycle d'ordre  $> 1$  et qui contient, dans chaque cycle comprenant au moins un nombre  $> m$ , au moins un nombre  $< m$ . En outre,  $S$  peut contenir des cycles composés uniquement d'éléments de la suite  $1, 2, \dots, m$ .

Soit  $S = (b_1 b_2 \dots b_{m_1}) (b_{m_1+1} \dots b_{m_2}) \dots (b_{m_{r-1}+1} \dots b_{m_r})$ , où  $b_1, b_{m_1+1}, \dots, b_{m_{r-1}+1}$  sont des nombres de la suite  $1, 2, \dots, m$ ,  $m_1, m_2, \dots, m_r$  sont des entiers  $> 1$  et  $r$  est un entier  $\geq 1$ . On peut toujours choisir les notations de façon à avoir  $b_1 = 1$ .

Supposons que la substitution  $S$  est imprimitive et que tous les nombres  $1, 2, \dots, m$  font partie d'un même système d'imprimitivité de  $S$ .

Il existe donc un entier  $m' > m$ , diviseur de  $n$ , et tel que  $n = km'$ , où  $k$  est un entier  $> 2$  et  $E = \{1, 2, \dots, n\} = E^{(1)} + E^{(2)} + \dots + E^{(k)}$ , où  $\bar{E}^{(1)} = \bar{E}^{(2)} = \dots = \bar{E}^{(k)} > 1$ , les ensembles  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(k)}$  sont disjoints deux à deux, et, quels que soient les indices  $i$  et  $j$  ( $1 \leq i \leq k$ ,  $1 \leq j \leq k$ ), si la substitution  $S$  transforme au moins un élément de l'ensemble  $E^{(i)}$  en un élément de l'ensemble  $E^{(j)}$ , alors  $S$  transforme tout l'ensemble  $E^{(i)}$  en  $E^{(j)}$ . Enfin un des ensembles  $E^{(i)}$  contient l'ensemble  $\{1, 2, \dots, m\}$ .

On peut toujours choisir les notations de façon à avoir  $E^{(1)} \supset \{1, 2, \dots, m\}$ .

Alors, si la substitution  $S$  transformait au moins un élément de  $E^{(1)}$  en un élément du même ensemble,  $S$  trans-

formerait tout l'ensemble  $E^{(1)}$  en lui-même ce qui impliquerait que  $E^{(1)}$  se compose de la totalité des éléments de certains (mais non de tous) les cycles de  $S$ . Mais alors  $S$  ne saurait contenir au moins un élément de la suite  $1, 2, \dots, m$  dans tout cycle qui contient au moins un nombre  $> m$ , ce qui est contraire à notre hypothèse sur  $S$ . Donc  $S$  ne saurait transformer un nombre de  $E^{(1)}$  en un nombre du même ensemble et, par conséquent, aucun cycle de  $S$  n'est formé uniquement d'éléments de l'ensemble  $E^{(1)}$ : chaque cycle de  $S$  contient au moins un nombre  $\leq m$  ainsi qu'au moins un nombre  $> m$  et un élément  $\leq m$  est toujours suivi, dans un cycle de  $S$ , d'un nombre  $> m$ .

Posons  $m_0 = 0$ . Soient  $C_1 = (b_1 \ b_2 \dots \ b_{m_1}), \dots, C_r = (b_{m_{r-1}+1} \dots \ b_{m_r})$  les  $r$  cycles de  $S$  et soient  $b_{i_1} = b_{m_{i-1}+1}, b_{i_2} \dots b_{i_{s_i}}$ , où  $s_i$  désigne un entier  $> 1$ , les éléments  $\leq m$  du cycle  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). Alors, comme tous les nombres  $1, 2, \dots, m$  font partie d'un même système d'imprimitivité  $E^{(1)}$  de  $S$ , on doit avoir

$$D \left( \frac{C_1}{b_{11} b_{12}, \dots, b_{11} b_{1s_1}}, m_1, \frac{C_2}{b_{21} b_{22}, \dots, b_{21} b_{2s_2}}, m_2, \dots, \frac{C_r}{b_{r1} b_{r2}, \dots, b_{r1} b_{rs_r}}, m_r \right) > 1.^1)$$

En effet, nous avons vu que  $S$  ne saurait transformer un élément de l'ensemble  $E^{(1)}$  en un élément du même ensemble. Et comme  $E^{(1)}$  est un système d'imprimitivité de la substitution  $S$ , il existe un second système d'imprimitivité, soit  $E^{(2)}$  pour fixer les idées, tel que  $S$  transforme  $E^{(1)}$  en  $E^{(2)}$ . Si la substitution  $S$  ne possède que les deux systèmes d'imprimitivité  $E^{(1)}$  et  $E^{(2)}$ , elle transforme nécessairement  $E^{(2)}$  en  $E^{(1)}$  puisque tout élément permuté par  $S$  fait alors partie soit de  $E^{(1)}$  soit de  $E^{(2)}$  et que tout cycle de  $S$  contient au moins un élément de chacun des deux ensembles  $E^{(1)}, E^{(2)}$ , de sorte que  $S$  transforme au moins un élément de  $E^{(2)}$  en un élément de  $E^{(1)}$ . Or  $E^{(1)}$  et  $E^{(2)}$  sont deux systèmes d'imprimitivité de  $S$  et, par suite,  $S$  transforme bien  $E^{(2)}$  en  $E^{(1)}$ . Supposons

<sup>1)</sup> Quels que soient les entiers  $a, b, \dots, l$ , le symbole  $D(a, b, \dots, l)$  désigne le plus grand commun diviseur des nombres  $a, b, \dots, l$ .

maintenant que la substitution  $S$  possède un nombre  $k > 2$  de systèmes d'imprimitivité. Alors, si la substitution  $S$  transformait au moins un élément de l'ensemble  $E^{(2)}$  en un élément de  $E^{(1)}$ , elle devrait transformer tout l'ensemble  $E^{(2)}$  en l'ensemble  $E^{(1)}$ , ce qui impliquerait que l'ensemble  $E^{(1)} + E^{(2)}$  se composerait de la totalité des éléments de certains (mais non pas de tous) les cycles de  $S$  et qu'il existe des cycles de  $S$  qui ne comprennent aucun élément de la suite  $1, 2, \dots, m$ , ce qui est contraire à notre hypothèse sur  $S$ . Donc  $S$  ne saurait transformer un élément de  $E^{(2)}$  en un élément de  $E^{(1)}$ . D'autre part,  $S$  ne saurait transformer un élément de  $E^{(2)}$  en un élément du même ensemble, sinon  $S$  devrait transformer tout l'ensemble  $E^{(2)}$  en lui-même, ce qui impliquerait que  $E^{(2)}$  se compose de la totalité des éléments de certains cycles de  $S$ , cycles qui sont dépourvus d'éléments de  $E^{(1)}$ , ce qui est contradictoire. Il existe donc un troisième système d'imprimitivité de  $S$ , soit  $E^{(3)}$ , pour fixer les idées, tel que  $S$  transforme  $E^{(2)}$  en  $E^{(3)}$ . Si  $S$  possède en tout trois systèmes d'imprimitivité, on voit sans peine que  $S$  doit alors transformer  $E^{(3)}$  en  $E^{(1)}$ . Et si  $k > 3$ , on démontre sans peine par l'induction, que l'on peut toujours ordonner les systèmes d'imprimitivité de la substitution  $S$  en une suite  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(k)}$ , telle que  $S$  transforme  $E^{(1)}$  en  $E^{(2)}$ , en  $E^{(3)}, \dots, E^{(k)}$  en  $E^{(1)}$ . Il s'ensuit que l'ordre de chaque cycle de  $S$  est  $k$  ou un

multiple de  $k$  et que  $D \left( \frac{C_1}{b_{11} b_{12}, \dots, b_{11} b_{1s_1}}, m_1, \frac{C_2}{b_{21} b_{22}, \dots, b_{21} b_{2s_2}}, m_2, \dots, \frac{C_r}{b_{r1} b_{r_2}, \dots, b_{r1} b_{rs_r}}, m_r \right) = k > 1$ , c. q. f. d.

*Quatre lemmes.* Le but du présent travail est d'établir deux propositions dont la démonstration s'appuie sur les quatre lemmes suivants:

*Leme I.<sup>1)</sup>* Quels que soient l'entier  $n \geq 2$  et la substitution  $S$  (de classe paire) de degré  $n + 1$  portant sur les éléments  $1, 2, \dots, n + 1$  et contenant l'élément  $n + 1$  dans un cycle

<sup>1)</sup> S. Piccard: Sur les bases du groupe symétrique et les couples de substitutions qui engendrent un groupe régulier, Librairie Vuibert, Paris, 1946, lemme 6, page 16.



d'ordre  $> 1$ , en composant  $S$  avec les substitutions du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  (alterné  $\mathfrak{A}_n$ ) des substitutions des éléments  $1, 2, \dots, n$ , on obtient le groupe  $\mathfrak{S}_{n+1}$  ou le groupe  $\mathfrak{A}_{n+1}$ .

*Lemme II (de Hoyer)<sup>2)</sup>*. Soit  $m$  un entier  $\geq 2$ , soit  $G_1$  un groupe de substitutions des éléments  $1) 1, 2, \dots, m$  qui contient le groupe alterné des substitutions de tous les éléments  $1)$  et soit  $S$  un cycle qui contient certains mais pas tout les éléments de la suite  $1)$ . Alors le groupe  $G_2$  engendré par  $S$  et  $G_1$  contient la groupe alterné des substitutions de tous les éléments de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, m\} + \{S\}$ .

*Lemme III.<sup>3)</sup>* Quel que soit l'entier  $n > 2$  ainsi que les  $r (2 \leq r \leq n)$  nombres  $a_1, a_2, \dots, a_r$  (dont  $a_1$  est le plus petit) de la suite  $1, 2, \dots, n$  si  $D(a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_r - a_1, n) = 1$ , en composant la substitution  $S = (1, 2, \dots, n)$  avec le groupe symétrique  $A_r$  des substitutions des éléments  $a_1, a_2, \dots, a_r$ , on obtient le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  des substitutions des éléments  $1, 2, \dots, n$ .

*Lemme IV.<sup>4)</sup>* Quel que soit le nombre pair (impair)  $n > 3$  ainsi que les  $r (3 \leq r \leq n)$  nombres  $a_1, a_2, \dots, a_r$ , dont  $a_1$  est le plus petit, de la suite  $1, 2, \dots, n$ , si  $D(a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_r - a_1, n) = 1$ , en composant la substitution  $S = (1, 2, \dots, n)$  avec les substitutions du groupe alterné  $B_r$  des substitutions des éléments  $a_1, a_2, \dots, a_r$ , on obtient le groupe  $\mathfrak{S}_n$  ( $\mathfrak{A}_n$ ).

*Proposition 1.* Quels que soient les entiers  $m \geq 2$  et  $n > m$ , si  $G$  est le groupe symétrique des substitutions des éléments  $1, 2, \dots, m$ , quelle que soit la substitution  $S$  des éléments  $1, 2, \dots, n$ , connexe et primitive avec  $G$ , si  $\{S\} \supset \supset \{m+1, \dots, n\}$ , en composant  $S$  avec les substitutions du groupe  $G$ , on obtient le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  des substitutions des éléments  $1, 2, \dots, n$ .

<sup>2)</sup> P. Hoyer: Verallgemeinerung zweier Sätze aus der Theorie der Substitutionengruppen, Mathematische Annalen, Bd 46, 1895, p. 539 et suivantes.

<sup>3)</sup> S. Piccard: Sur les bases du groupe symétrique..., Paris, 1946, corollaire 7, p. 18.

<sup>4)</sup> S. Piccard: Ibid, Corollaire 8, p. 19.

*Démonstration.* Soit  $G$  un groupe et  $S$  une substitution qui satisfont les conditions de la proposition 1. Comme  $S$  et  $G$  sont connexes, tout cycle de  $S$  qui contient au moins un élément de l'ensemble  $E'' = \{m+1, \dots, n\}$  contient aussi au moins un élément de l'ensemble  $E' = \{1, 2, \dots, m\}$ . Soient  $C_1, C_2, \dots, C_s$  les cycles d'ordre  $> 1$  de  $S$ . Chacun de ces cycles contient au moins un élément de l'ensemble  $E'$ . Soit  $a_i$  un élément de  $E'$  qui fait partie de  $C_i$ ,  $i=1, 2, \dots, s$ .

Si  $s=1$  et si  $E' \subset \{S\}$ , la proposition à démontrer résulte du lemme II de Hoyer.

Soit encore  $s=1$  et soit  $E' \not\subset \{S\}$ . Mais alors  $S$  se compose d'un seul cycle qui permute tous les éléments  $1, 2, \dots, n$  et, comme  $G$  et  $S$  sont primitifs, d'après la remarque 2,

$D \left( \frac{S}{12}, \frac{S}{13}, \dots, \frac{S}{1m}, n \right) = 1$  et, par conséquent, d'après le lemme III, en composant  $S$  avec les substitutions du groupe  $G$ , on obtient le groupe  $\mathfrak{S}_n$ .

Soit, à présent,  $s > 1$ . Le groupe symétrique  $G$  contient la substitution  $T = (a_1 a_2 \dots a_s)$ . On peut toujours choisir les notations de façon à avoir  $a_1 = 1$ .

Soit  $S = (b_{11} b_{12} \dots b_{1m_1}) (b_{21} b_{22} \dots b_{2m_2}) \dots (b_{s1} b_{s2} \dots b_{sm_s})$  où  $b_{i1} = a_i$ , et  $m_i > 1$ , quel que soit  $i = 1, 2, \dots, s$ .

Soient  $a_{i1} = b_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iu_i}$  les éléments de l'ensemble  $E'$  qui font partie du cycle  $C_i$  de  $S$ . On a  $u_i \geq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ .

Comme  $S$  et  $G$  sont primitifs, on a, d'après la remarque 2.

$$(*) D \left( \frac{C_1}{a_{11} a_{12}, \dots, a_{11} a_{1u_1}, m_1}, \frac{C_1}{a_{21} a_{22}, \dots, a_{21} a_{2u_2}, m_2}, \dots, \frac{C_s}{a_{s1} a_{s2}, \dots, a_{s1} a_{su_s}, m_s} \right) = 1.$$

Posons  $S' = TS$ . On a  $S' = (b_{11} b_{12} \dots b_{1m_1} b_{21} b_{22} \dots b_{2m_2} \dots b_{s1} b_{s2} \dots b_{sm_s})$  et d'après (\*), on a

$$D \left( \frac{S'}{a_{11} a_{12}, a_{11} a_{13}, \dots, a_{11} a_{1s}}, n \right) = 1,$$

puisque  $D \left( \frac{C_1}{a_{11} a_{12}, \dots, a_{11} a_{1u_1}}, m_1, \frac{C_2}{a_{21} a_{22}, \dots, a_{21} a_{2u_2}}, m_2, \dots, \frac{C_s}{a_{s1} a_{s2}, \dots, a_{s1} a_{su_s}}, m_s \right) = D \left( \frac{C_1}{a_{11} a_{12}, \dots,$

$$\begin{aligned} & \frac{C_1}{a_{11} a_{1u_1}, m_1, m_1 + a_{21} a_{22}, \dots, m_2 + a_{21} a_{2u_2}, m_1 + m_2, \dots, m_1 +} \\ & + m_2 + \dots, + m_{s-1} + \frac{C_s}{a_{s1} a_{s2}, \dots, m_1 + m_2 + \dots + m_{s-1} + a_{s1} a_{su_s}} \\ & \left. \frac{C_s}{a_{s1} a_{su_s}} \right) = D \left( \frac{S'}{a_{11} a_{12}, \dots, a_{11} a_{1u_1}}, \frac{S'}{a_{11} a_{21}, \dots, a_{11} a_{22}, \dots,} \right. \\ & \left. \frac{S'}{a_{11} a_{2u_2}, \dots, a_{11} a_{s1}}, \frac{S'}{a_{11} a_{s2}, \dots, a_{11} a_{su_s}}, n \right) \end{aligned}$$

et, par conséquent, d'après le lemme III, en composant  $S'$  avec les substitutions du groupe  $G$ , on obtient le groupe  $\mathfrak{S}_n$ .

La proposition 1 est donc démontrée.

*Proposition 2.* *Quels que soient les entiers  $m \geq 3$  et  $n > m$ , si  $G$  est le groupe alterné des substitutions des éléments  $1, 2, \dots, m$  et si  $S$  est une substitution des éléments  $1, 2, \dots, n$ , connexe et primitive avec  $G$  et qui contient chacun des nombres  $m+1, \dots, n$  dans un cycle d'ordre  $> 1$ , en composant la substitution  $S$  avec les substitutions du groupe  $G$ , on obtient le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  des substitutions des éléments  $1, 2, \dots, n$ , si  $S$  est de classe impaire, ou l'alterné  $\mathfrak{A}_n$  des substitutions des éléments  $1, 2, \dots, n$ , si la substitution  $S$  est de classe paire.*

*Démonstration.* Soient  $G$  un groupe et  $S$  une substitution qui satisfont aux conditions de la proposition 2.

Supposons d'abord que  $S$  ne permute pas tous les éléments de l'ensemble  $E' = \{1, 2, \dots, m\}$ .

Soient  $C_1, C_2, \dots, C_s$  les cycles d'ordre  $> 1$  de  $S$ . D'après nos prémisses, chacun de ces cycles contient au moins un élément de l'ensemble  $E'$ .

Si  $s=1$ , la proposition à démontrer se réduit au lemme II de Hoyer.

Soit  $s > 1$  et soit  $a_i$  un élément de l'ensemble  $E'$  qui fait partie du cycle  $C_i, i=1, 2, \dots, s$ .

Si  $s$  est impair, la substitution  $T=(a_1 a_2 \dots a_s)$  fait partie du groupe  $G$ , la substitution  $S'=TS$  comprend un seul cycle d'ordre  $>1$ ,  $\{S'\}=\{S\}$  et d'après le lemme II de Hoyer, en composant  $S'$  avec les substitutions de  $G$  on obtient le groupe  $\mathfrak{S}_n$  ou le groupe  $\mathfrak{A}_n$ .

Si  $s$  est pair, soit  $a$  un élément de  $E'$  qui n'est pas permuté par  $S$ . Un tel élément existe, d'après nos hypothèses, la substitution  $T'=(a a_1 a_2 \dots a_s)$  appartient au groupe  $G$ , la substitution  $S''=T'S$  comprend un seul cycle d'ordre  $>1$  et on a  $\{S''\}=\{S\}+\{a\}$ . Si  $a$  n'est pas le seul élément de  $E'$  que laisse fixe la substitution  $S$ , la substitution  $S''$  engendre avec  $G$  le groupe  $\mathfrak{S}_n$  ou le groupe  $\mathfrak{A}_n$ , d'après le lemme II de Hoyer. Et si  $E' - \{S\} = \{a\}$ , la substitution  $(a a_1 a_2)$  qui fait partie du groupe  $G$  engendre avec  $S''$  le groupe  $\mathfrak{S}_n$  ou le groupe  $\mathfrak{A}_n$  d'après la proposition 6, p. 21, de notre livre cité

*Sur les bases du groupe symétrique.*

Supposons maintenant que  $\{S\} \supset \{1, 2, \dots, n\}$ . Comme  $S$  et  $G$  sont primitifs, si la substitution  $S$  contient un seul cycle d'ordre  $>1$ , la proposition à démontrer résulte alors du lemme IV. Et, si  $S$  contient plusieurs cycles d'ordre  $>1$ , soient  $C_1, C_2, \dots, C_s$  ces cycles. Chacun d'eux contient au moins un élément de l'ensemble  $E'$ . Soit  $a_i$  un élément de  $E'$  qui fait partie de  $C_i$  ( $i=1, 2, \dots, s$ ). Si  $s$  est impair, la substitution  $T=(a_1 a_2, \dots, a_s)$  appartient au groupe  $G$ , la substitution  $S'=TS$  est circulaire, de degré  $n$  et, comme  $G$  et  $S$  sont primitifs, il ressort de la remarque 2 et de la définition de  $S'$  que

$$D \left( \frac{S'}{1\ 2}, \frac{S'}{1\ 3}, \dots, \frac{S'}{1\ m, n} \right) = 1.$$
 Donc, d'après le lemme IV, en composant  $S'$  avec les substitutions du groupe  $G$ , on obtient le groupe  $\mathfrak{S}_n$  ou le groupe  $\mathfrak{A}_n$ .

Et si  $s$  est pair, donc  $\geq 2$ , deux cas sont à distinguer.

1.  $s=2$ . Donc  $S=C_1 C_2$ . Comme  $m \geq 3$ , que  $S$  et  $G$  sont connexes et que  $\{S\} \supset E'$ , l'un au moins des cycles  $C_1, C_2$  contient au moins deux éléments de  $E'$  et chacun des cycles  $C_1, C_2$  contient au moins un élément de  $E'$ . Soit  $C_1=$



$(b_1 b_2 \dots b_u)$ ,  $C_2 = (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_v)$ . On peut toujours choisir les notations de façon à avoir  $b_1 \in E'$  et  $\beta_1 \in E'$ . Supposons, pour fixer les idées, que  $C_1$  contient plus d'un élément de  $E'$  et soit  $i$  le plus petit entier  $> 1$ , tel que  $b_i \in E'$ . La substitution  $(b_1, b_i \beta_1)$  fait partie du groupe  $G$  et on a  $R = (b_1 b_i \beta_1) S \equiv (b_1 b_2, \dots, b_{i-1} \beta_1 \beta_2, \dots, \beta_v)$ . D'après le lemme II de Hoyer,  $R$  engendre avec les substitutions du groupe  $G$  le groupe symétrique ou le groupe alterné des substitutions des éléments de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, m\} + \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_v\}$ . Soit  $G_1$  ce groupe. Les seuls éléments de la suite  $1, 2, \dots, n$  qui ne sont pas permutés par les substitutions de  $G_1$  sont  $b_i, b_{i+1}, \dots, b_u$ . Si  $v$  est impair,  $C_2 \in G_1$ ,  $C_2^{-1} S = C_1$  et  $C_1$  engendre, avec  $G_1$ , le groupe symétrique ou le groupe alterné des substitutions des éléments  $1, 2, \dots, n$ , d'après le lemme II de Hoyer. Supposons que  $v$  est pair. Alors  $(b_1 b_2) C_2 \in G_1$  et on a  $[(b_1 b_2) C_2]^{-1} S = (b_2 b_3, \dots, b_u)$ . Si  $u > 2$ , cette dernière substitution engendre, avec les substitutions de  $G_1$ , le groupe  $\mathfrak{S}_n$  ou le groupe  $\mathfrak{A}_n$ , d'après le lemme II de Hoyer, car  $b_i$  est un élément du cycle  $(b_2, b_3, \dots, b_u)$  qui est permuté par certaines substitutions du groupe  $G_1$ . Et, si  $u = 2$ , donc  $i = 2$  et  $C_1 = (b_1 b_2)$ , le seul élément de la suite  $1, 2, \dots, n$  qui n'est permuté par aucune substitution de  $G_1$  est  $b_2$ . Donc, d'après le lemme I, en composant  $S$  avec les substitutions de  $G_1$ , on obtient le groupe  $\mathfrak{S}_n$  ou le groupe  $\mathfrak{A}_n$ .

2.  $s$  est pair  $\geq 4$ . Alors le groupe  $G$  contient la substitution  $T' = (a_1 a_2 \dots a_{s-1})$ , la substitution  $S'' = T'S$  se compose de deux cycles d'ordre  $> 1$  dont l'un est  $C_s$ ,  $\{S''\} = \{S\}$ ,  $S''$  et  $G$  sont primitifs et on est ramené au cas 1.

La proposition 2 est donc démontrée.

*Corollaire 1.* Quels que soient les entiers  $m \geq 2$  et  $n > m$ , si  $G$  est le groupe symétrique des substitutions des éléments  $1, 2, \dots, m$  et si  $S$  est une substitution des éléments  $1, 2, \dots, n$ , connexe avec le groupe  $G$  et telle que  $\{S\} \supset \{m+1, \dots, n\}$ , mais que  $\{1, 2, \dots, m\} \not\subset S$ , en composant  $S$  avec les substitutions du groupe  $G$ , on obtient toujours le groupe symétrique des substitutions des éléments  $1, 2, \dots, n$ .

C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.

*Corollaire 2.* Quels que soient les entiers  $m \geq 3$  et  $n > m$ , si  $G$  est le groupe alterné des substitutions des éléments  $1, 2, \dots, m$  et si  $S$  est une substitution de classe paire (impaire) des éléments  $1, 2, \dots, n$ , connexe avec  $G$ , telle que  $\{S\} \supset \{m+1, \dots, n\}$  mais que  $\{1, 2, \dots, m\} \not\subset \{S\}$ , alors en composant  $S$  avec les substitutions de  $G$ , on obtient toujours le groupe alterné (symétrique) des substitutions des éléments  $1, 2, \dots, n$ .

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.

---

# SEQUENCE APPROXIMATIONS TO INTERIOR MAPPINGS

by

G. T. WHYBURN (University of Virginia)

1. *Introduction.* As is well known, the limit mapping of a uniformly convergent sequence of interior transformations need not be interior, although, if the domain space is a locally connected continuum, it must<sup>1)</sup> be quasi-monotone. Indeed, a sequence of homeomorphisms of a sphere  $S$  onto itself may converge uniformly to a mapping which is constant on a hemisphere of  $S$ . In this paper we first characterize those uniformly convergent sequences of mappings on a locally compact space which converge to interior mappings. Next we consider mappings which are approximately interior in the sense that the image of the  $\varepsilon$ -neighborhood of any point contains the  $\delta$ -neighborhood of the image of that point and uniformly approximately interior sequences in which this condition is satisfied for any given  $\varepsilon > 0$  with  $\delta$  dependent only on  $\varepsilon$  provided we go far enough along in the sequence. It will be shown that this latter condition is satisfied in case of a sequence of interior mappings on a locally connected continuum converging uniformly to a light mapping. Since by our first theorem, uniform approximate interiority implies that the limit mapping is interior, we thus verify independently and extend the known result that the limit mapping of a uniformly convergent sequence of interior mappings on a locally connected continuum is interior provided it is light.

We shall consider continuous mappings  $f(x)$  of a separable metric space  $A$  onto *open subsets* of a separable metric

---

<sup>1)</sup> See the author's paper: *Topological analog of the Weierstrass double series theorem* in the Bull. Amer. Math. Soc., vol. 50, (1944), pp. 242—245.

space  $B$ . Such a mapping  $f(A) = B_0$  is *interior* provided the image of every open set in  $A$  is open in  $B_0$  (or, equivalently, open in  $B$ ), and is *light* provided that  $f^{-1}(y)$  is totally disconnected for each  $y \in B_0$ . For any subset  $B_1$  of  $B$ , by  $f^{-1}(B_1)$  we mean the set of all  $x \in A$  such that  $f(x) \in B_1$ , so that  $f^{-1}(B_1)$  is the same as the usual  $f^{-1}(B_0 \cdot B_1)$ . For any  $r > 0$ ,  $V_r(x)$  denotes the set of all  $y$  such that  $\varrho(x, y) < r$ , where  $\varrho$  is the distance function in the appropriate space. We shall say that  $f$  is interior on a subset  $A_0$  of  $A$  provided that for each  $x \in A_0$   $f(x)$  is interior (rel.  $B$ ) to the  $f$  image of every neighborhood of  $x$  in  $A$ . A *region* in a given space is a connected open subset of that space.

2. *Theorem.* Given a sequence of mappings  $f_n(A) = B_n \subset B$  where  $A$  is locally compact, converging uniformly on an open subset  $U$  of  $A$  to the mapping  $f(x)$ . In order that  $f$  be interior on a compact subset  $A_0$  of  $U$  it is necessary and sufficient that for any  $\varepsilon > 0$  a  $\delta > 0$  and an  $N$  exist such that for  $n > N$

$$V_{\sigma_n} \{ f_n[V_\varepsilon(x)] \} \supset V_\delta[f(x)],$$

for all  $x \in A_0$ , where  $\sigma_n \rightarrow 0$  with  $1/n$ .

PROOF. To prove the sufficiency, clearly it suffices to show that  $f[\overline{V_\varepsilon(x)}] \supset V_\delta[f(x)]$ , where we suppose  $\varepsilon$  small enough that  $\overline{V_\varepsilon(x)}$  is compact and contained in  $U$ . To this end let  $q \in V_\delta[f(x)]$ . By hypothesis for each  $k$  we can find an integer  $n_k$  and points  $p_k \in V_\varepsilon(x)$ ,  $q_k \in V_{1/k}(q)$  with  $q_k = f_{n_k}(p_k)$ . Without loss of generality we can suppose the points  $p_k$  chosen so that  $p_k \rightarrow p \in \overline{V_\varepsilon(x)}$ . By uniform convergence this gives  $f_{n_k}(p_k) \rightarrow f(p)$ ; and since  $f_{n_k}(p_k) = q_k$  and  $q_k \rightarrow q$ , we have

$$f(p) = q.$$

Accordingly  $f[\overline{V_\varepsilon(x)}] \supset V_\delta[f(x)]$ .

For the necessity proof, let  $\varepsilon > 0$  be given (again so that  $\overline{V_\varepsilon(x)}$  is compact and contained in  $U$ ) and let  $x \in A_0$ .

Then since  $f$  is interior at  $x$  there exists a  $\delta_x > 0$  such that

$$(I) \quad f[V_{\varepsilon/2}(x)] \supset V_{3\delta_x}[f(x)].$$



Since by uniform convergence

$$(II) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n[V_{\varepsilon/2}(x)] = \overline{f[V_{\varepsilon/2}(x)]},$$

it follows that if  $\sigma > 0$  is given there exists an integer  $N_x$  such that if  $n > N_x$

$$(III) V_o\{f_n[V_{\varepsilon/2}(x)]\} \supset V_{3\delta_x}[f(x)] \supset V_{2\delta_x}[f_n(x)].$$

By equicontinuity of the sequence  $f_n$  on  $U$ , there exists an integer  $I_x$  and an  $r, 0 < r < \varepsilon/3$ , such that if  $n > I_x$  and  $p \in V_r(x)$ ,

$$(IV) f_n(p) \in V_{\delta_x}[f_n(x)].$$

Accordingly, by (III), if  $n > P_x = N_x + I_x$  and  $p \in V_r(x)$ ,

$$(V) V_o\{f_n[V_\varepsilon(p)]\} \supset V_o\{f_n[V_{\varepsilon/2}(x)]\} \supset V_{2\delta_x}[f_n(x)] \supset V_{\delta_x}[f_n(p)].$$

Now let us cover  $A_0$  by a finite sum  $V_{r_1}(x_1) + \dots + V_{r_m}(x_m)$  of the neighborhoods  $V_r(x)$ . Let  $N = \sum_1^m P_{x_i}$ .  $\delta = \min[\delta_{x_i}]_{i=1}^m$ . Then if  $p$  is any point of  $A_0$ , we have  $p \in V_{r_k}(x_k)$  for some  $k$ . Whence by (V), if  $n > N$ ,

$$V_o\{f_n[V_\varepsilon(p)]\} \supset V_{\delta_{x_k}}[f_n(p)] \supset V_\delta[f_n(p)],$$

since  $\delta \leq \delta_{x_k}$ .

*Corollary.* Suppose  $A$  is locally compact and that the sequence of mappings  $f_n(x)$  on  $A$  into  $B$  converges to the mapping  $f(x)$  on  $A$ , the convergence being uniform on each compact subset of  $A$ . Then in order that  $f$  be interior it is necessary and sufficient that for any compact subset  $A_0$  of  $A$  and any  $\varepsilon > 0$ , a  $\delta > 0$  and an  $N$  exist such that for  $n > N$

$$V_{\sigma_n}\{f_n[V_\varepsilon(x)]\} \supset V_\delta[f_n(x)],$$

for all  $x \in A_0$ , where  $\sigma_n \rightarrow 0$  with  $1/n$ .

**3. Theorem.** Let  $f(A) = B_0 \subset B$  be an interior mapping, where  $A$  and  $B$  are separable and metric,  $B_0$  is open in  $B$ , and  $A$  is locally connected. Then if  $R$  is any region in  $B$ ,

any conditionally compact<sup>1)</sup> component  $Q$  of  $f^{-1}(R)$  maps onto  $R$  under  $f$ .

PROOF. Suppose not. Then since, by local connectedness,  $Q$  is open in  $A$  so that  $f(Q)$  is open in  $B$ , there is a point  $y \in R - f(Q)$  which is a limit point of  $f(Q)$ . Then if  $y_1, y_2, \dots$  is a sequence in  $f(Q)$  converging to  $y$  and  $x_n \in Q \cdot f^{-1}(y_n)$ , a subsequence  $(x_{n_i})$  of  $(x_n)$  converges to a point  $x \in A$ . By continuity of  $f$ ,  $f(x) = y$ . But this gives  $x \in f^{-1}(R)$  so that  $x \in Q$ . This is impossible since then  $f(x) = y \in f(Q)$ .

4. *Approximately interior sequences.* A sequence of mappings  $f_n(A) \subset B$  will be said to be *uniformly approximately interior* on a subset  $A_0$  of  $A$  provided that for any  $\varepsilon > 0$  there exists a  $\delta > 0$  and an  $N$  such that for any  $n > N$  and any  $x \in A_0$

$$f_n[V_\varepsilon(x)] \supset V_\delta[f_n(x)].$$

We show first that when  $A_0$  is compact, uniform approximate interiority on  $A_0$  is equivalent to a corresponding point property on  $A_0$ .

*Theorem.* Let the sequence of mappings  $f_n(A) = B_n \subset B$  converge uniformly on an open set  $U \subset A$  and let  $A_0$  be a compact subset of  $U$ . If for each  $x \in A_0$  there exists a  $\delta_x > 0$  and an integer  $N_x$  such that for  $n > N_x$ ,  $f_n[V_{\delta_x}(x)] \supset V_{\delta_x}[f_n(x)]$ , then this sequence is uniformly approximately interior on  $A_0$ .

PROOF. We have to show that for  $\varepsilon > 0$  there exists a  $\delta > 0$  and an  $N$  such that for each  $n > N$

$$(I) f_n[V_\varepsilon(p)] \supset V_\delta[f_n(p)], \quad p \in A_0.$$

To this end for each  $x \in A_0$  let  $\delta_x$  and  $N_x$  be so chosen that

$$(II) f_n[V_{\delta_x/2}(x)] \supset V_{\delta_x/2}[f_n(x)], \quad n > N_x.$$

By equicontinuity of the sequence  $f_n$  (which results from uniform convergence) there exists a  $\sigma > 0$ ,  $\sigma < \frac{\varepsilon}{2}$ , and an integer  $I_x$  such that for  $n > I_x$

<sup>1)</sup> A set  $Q$  is conditionally compact provided every infinite subset of  $Q$  has a limit point in the space containing  $Q$ .

$$(III) f_n[V_\epsilon(x)] \subset V_{\delta_x}[f_n(x)].$$

Then if  $p \in V_\epsilon(x)$  and  $n > N_x + I_x$ ,

$$(IV) f_n[V_\epsilon(p)] \supset f_n[V_{\epsilon/2}(x)] \supset V_{2\delta_x}[f_n(x)] \supset V_{\delta_x}[f_n(p)]$$

since  $f_n(p) \subset V_{\delta_x}[f_n(x)]$  by (III).

Thus for each  $x \in A$  we have determined a  $\delta_x > 0$ , an integer  $P_x = N_x + I_x$  and a neighborhood  $V_\epsilon(x)$  of  $x$  such that for any  $p \in V_\epsilon(x)$  and any  $n > P_x$ ,

$$(V) f_n[V_\epsilon(p)] \supset V_{\delta_x}[f_n(p)].$$

By the Borel Theorem, a finite collection of the neighborhoods  $V_\epsilon(x)$  covers  $A_0$  say

$$\sum_1^k V_\epsilon(x_i) \supset A_0.$$

Define  $N = \sum_1^k P_{x_i}$ ,  $\delta = \min[\delta_{x_i}]_1^k$ .

Then for any  $p \in A$ , we have  $p \in V_\epsilon(x_m)$  for some  $m$ . Accordingly, if  $n > N$  we have  $n > P_{x_m}$  and thus by (V)

$$f_n[V_\epsilon(p)] \supset V_{\delta_{x_m}}[f_n(p)] \supset V_\delta[f_n(p)],$$

because  $\delta_{x_m} \geq \delta$ ; and this is (i) which was to be proven.

*Theorem.* Let the sequence of interior mappings  $f_n(A) = B_n \subset B$  converge uniformly to the limit mapping  $f(x)$  on an open subset  $W_1$  of  $A$  where  $A$  and  $B$  are locally compact and locally connected. Then the sequence is uniformly approximately interior on any compact subset  $A_0$  of  $W_1$ .

*Proof.* Let  $x \in A_0$  and  $\epsilon > 0$ . Let  $U$  be a conditionally compact region in  $A$  about  $x$  such that  $U \subset V_\epsilon(x) \subset \underline{W}$  and  $\rho\{f[F(\bar{U})], f(x)\} = 2d > 0$ . Let  $\delta$  be so chosen that  $V_{2\delta}(y) \subset R$ , where  $R$  is the component of  $V_d(y)$  containing  $y = f(x)$ . There exists an integer  $N$  such that if  $n > N$   $f_n[F(U)] \cdot R \subset f_n[F(U) \cdot V_d(y)] = 0$  and  $f_n(x) \in V_\delta(y)$ . Then if  $Q_n$  is the component of  $B - f_n[F(U)]$  containing  $f_n(x)$  and  $U_n$  is the component of  $f^{-1}(Q_n)$  containing  $x$ , we have

$$Q_n \supset R \supset V_{2\delta}(y) \supset V_\delta[f_n(x)] \text{ and } U_n \subset U \subset V_\epsilon(x).$$

Since  $f_n$  is interior, by § 3,  $f_n(U_n) = Q_n$ . Whence

$$f_n[V_\varepsilon(x)] \supset f_n(U_n) = Q_n \supset V_\delta[f_n(x)] \text{ for all } n > N.$$

Accordingly, by the preceding theorem,  $(f_n)$  is uniformly approximately interior on  $A_0$ .

5. Since uniform approximate interiority of the sequence on  $A_0$  clearly implies the condition employed in the theorem of § 2, we have the

*Theorem.* Suppose  $A$  and  $B$  are locally compact and locally connected and that the sequence of interior mappings  $f_n(x)$  on  $A$  into  $B$  converges to the limit mapping  $f(x)$  on  $A$ , the convergence being uniform in each compact subset of  $A$ . Then the sequence  $f_n(x)$  is uniformly approximately interior on each compact subset of  $A$  and  $f$  is interior on  $A$ .





# ON THE COMPACTIFICATION OF TOPOLOGICAL SPACES

by

M. H. STONE (Chicago).

In 1937 the writer published a detailed discussion of the problem of compactifying a topological space<sup>1</sup>). Later, but independently, ČECH discussed the same problem with the aid of very much simpler methods<sup>2</sup>). Continued investigation of the problem has since shown that further simplification is possible, at least on the expository level. In this note we offer modified proofs which we have developed and used in connection with our lectures during 1942 and subsequently. The modifications result primarily from emphasizing the geometrical features of Čech's methods.

To compactify a topological space is to imbed it in a compact Hausdorff space as an everywhere dense part of the latter. Since any part of a compact Hausdorff space is completely regular, only completely regular spaces can be compactified. Our goal is to show that any completely regular space does have a compactification—indeed, that there exists a distinguished compactification  $\beta(X)$  which has some curious characteristic properties. In reaching this goal we shall obtain some incidental results concerning the connections between general topological spaces and completely regular spaces.

---

<sup>1</sup>) M. H. Stone, Transactions of the American Mathematical Society, 41 (1937), pp. 375-481.

<sup>2</sup>) E. Čech, Annals of Mathematics, 38 (1937), pp. 823-844. Čech's methods, which we also developed independently, would not have served our purposes in the cited Transactions paper, since we were concerned there with the completely general problem of adjoining limit points to a topological space.

We shall follow ČECH in making systematic use of the cartesian product, but we shall insist more than he does upon its geometrical aspects. As is well known, the cartesian product  $\mathcal{P}_{\alpha \in A} X_\alpha$  of the topological spaces  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , is formed by imposing a standard topology upon the totality of selections  $\{x_\alpha\}$  consisting of one point  $x_\alpha$  from each factor  $X_\alpha$ . Here  $x_\alpha$  is called the  $\alpha$  coördinate of the point  $\{x_\alpha\}$ . We shall not repeat the detailed description of the standard topology, not the elementary propositions concerning cartesian products in general. It will be useful, however, to recall a few facts concerning projections. If  $B$  is any non-void part of  $A$ , the operation  $P_B^A$  of suppressing from the selection  $\{x_\alpha\}$  all those coördinates corresponding to indices outside  $B$  yields a point of the cartesian product  $\mathcal{P}_{\alpha \in B} X_\alpha$ . Thus  $P_B^A$  maps the full cartesian product onto the latter partial product. This mapping is easily seen to be continuous and open. We call  $P_B^A$  the projection of  $\mathcal{P}_{\alpha \in A} X_\alpha$  on  $\mathcal{P}_{\alpha \in B} X_\alpha$ . When there is no danger of confusion, we may write  $P_B$  in place of  $P_B^A$ . In case  $B = A$ , the projection  $P_B^A$  is the identical mapping. At the other extreme, when  $B$  consists of a single element  $\beta$ , we see that the projection  $P_B^A$  carries  $\{x_\alpha\}$  into its  $\beta$ -coördinate,  $x_\beta$ ; under these circumstances we may write  $P_\beta^A$  or  $P_\beta$  in place of  $P_B^A$ .

The totality of bounded continuous real functions on a topological space  $X$  will be denoted by  $C(X)$ . Choosing a suitable class  $A$  of indices  $\alpha$ , we shall index the members of  $C(X)$  as  $f_\alpha$ . The smallest closed interval  $X_\alpha$  containing the range of  $f_\alpha$  is bounded and hence compact for each  $\alpha$  in  $A$ . Corresponding to any non-void part  $B$  of  $A$ , there is a mapping  $F_B$  which carries the point  $x$  of  $X$  into the point  $\{f_\alpha(x)\}$ ,  $\alpha \in B$ , of the cartesian product  $\mathcal{P}_{\alpha \in B} X_\alpha$ . As is well-known, the latter product is a compact Hausdorff space. Our first observation is then as follows.

*Theorem 1.* *The mapping  $F_B$  of  $X$  into the compact Hausdorff space  $\mathcal{P}_{\alpha \in B} X_\alpha$  is continuous. It is one-to-one if and only if the functions  $f_\alpha$ ,  $\alpha \in B$ , in  $C(X)$  constitute a sepa-*

rating family for  $X$  (in the usual sense that whenever  $x_1$  and  $x_2$  are distinct points of  $X$  there is some  $\alpha$  in  $B$  such that  $f_\alpha(x_1) \neq f_\alpha(x_2)$ ). It is a homeomorphism if and only if  $X$  is a  $T_0$ -space in which the open sets  $(x; s < f_\beta(x) < t)$ ,  $\beta \in B$ , constitute a sub-base for the open sets.

*Proof.* In the cartesian product  $\prod_{\alpha \in B} X_\alpha$  the sets  $(\{x_\alpha\}; s < x_\beta < t, \alpha \in B)$ ,  $\beta \in B$ , constitute a sub-base for the open sets. They are carried by the inverse  $F_B^{-1}$  into the sets  $(x; s < f_\beta(x) < t)$ ,  $\beta \in B$ . Consequently every open set in the cartesian product is carried by  $F_B^{-1}$  into an open set in  $X$ ; and  $F_B$  is continuous. The conditions for  $F_B$  to be a one-to-one mapping or a homeomorphism are then evident.

The results of Theorem 1 immediately yield two corollaries.

*Corollary 1.1.* *If  $X$  is a completely regular space, then the mapping  $F = F_A$  is a homeomorphism.*

*Proof.* We merely observe that a completely regular space  $X$  is a Hausdorff space in which the open sets  $(x; -t < f_\alpha(x) < t)$ ,  $\alpha \in A$ , constitute a base for the open sets.

*Corollary 1.2.* *If  $X$  is a compact Hausdorff space  $F(X)$  is compact.*

*Proof.* Since  $X$  is necessarily completely regular, Corollary 1.1 shows that  $F$  is a homeomorphism. Therefore  $F(X)$  is compact too.

As a preliminary to our further results, we now note a simple lemma. We use the symbol  $\times$  to indicate the composition of two functions or operations: if  $\Phi$  and  $\Psi$  are two functions, then  $\Phi \times \Psi$  is the function  $\chi$  defined by putting  $\chi(\xi) = \Phi[\Psi(\xi)]$  whenever the latter expression has meaning.

*Lemma.* *If  $A \supset B \supset \Gamma$ , then  $F_\Gamma = P_\Gamma^B \times F_B$ ; in particular,  $f_\beta = P_\beta^B \times F_B$  for every  $\beta$  in  $B$ .*

*Proof.* The point  $x$  in  $X$  is carried by  $F_B$  into the point  $\{f_\alpha(x)\}$ ,  $\alpha \in B$ , in the cartesian product  $\prod_{\alpha \in B} X_\alpha$ ; and the latter point is carried by  $P_\Gamma^B$  into the point  $\{f_\alpha(x)\}$ ,  $\alpha \in \Gamma$ , in the

partial product  $\prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ . On the other hand,  $x$  is carried by  $F_F$  directly into this last point. When  $\Gamma$  consists of the single element  $\beta$ , the general relation assumes the particular form indicated above since  $F_F$  reduces to  $f_\beta$ .

We shall now show that, so far as the continuous mappings of a topological space  $X$  onto completely regular spaces are concerned, we may replace  $X$  by its image  $F(X) = F_A(X)$ .

*Theorem 2.* Let  $H$  be a continuous mapping of a topological space  $X$  onto a completely regular space  $Y$ . Then there exists a continuous mapping  $G$  of  $F(X)$  onto  $Y$  such that  $H = G \times F$ . Indeed, if  $Z$  is any compactification of  $Y$ , the mapping  $G$  may be extended to a continuous mapping of the closure of  $F(X)$  onto  $Z$ .

*Proof.* There is no loss of generality in supposing that  $Y$  has a compactification  $Z$ —or even that  $Y$  is an everywhere dense part of a compact Hausdorff space  $Z$ . Indeed, Corollary 1.1 shows that  $Y$  has a homeomorphic image in a compact Hausdorff space; and this image is everywhere dense in its closure, which, being compact, is a compactification of both  $Y$  and its image. Taking  $Z$  as indicated, we note that the formula  $g \times H$ ,  $g \in C(Z)$ , defines a function  $f_\alpha \in C(X)$ . We may therefore attach the resulting index  $\alpha$  to the function  $g$ , so that  $f_\alpha = g_\alpha \times H$ ; and we may denote by  $B$  the totality of indices so employed. If  $H(x) = y$ , then  $F_B(x) = \{g_\alpha(y)\}$ ,  $\alpha \in B$ . Thus the mapping  $G_B$  which carries  $z \in Z$  into  $\{g_\alpha(z)\}$ ,  $\alpha \in B$ , has the property that  $F_B = G_B \times H$ . By Corollary 1.1 above,  $G_B$  is a homeomorphism. From the Lemma we now see that  $H = G \times F$  where  $G = G_B^{-1} \times P_B^A$  is a continuous mapping of some part of the cartesian product  $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  onto  $Z$ . Clearly  $G_B^{-1}(Z)$  contains  $F(X)$  and is compact. It follows that the closure  $F(X)^-$  is carried by  $G$  onto a compact set  $W_1$  such that  $Y \subset W_1 \subset Z$ . Since  $Z = Y^- \subset W_1^- = W_1 \subset Z$ , we have  $G[F(X)^-] = Z$ , as we wished to prove.



We have already remarked in the proof of Theorem 2 that Corollary 1.1 provides for every completely regular space a corresponding compactification. We now discuss the compactification problem in greater detail.

*Theorem 3.* *If  $X$  is a completely regular space, then the closure of  $F(X)$  in the cartesian product  $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  is a compactification of  $X$ . Every bounded continuous real function on  $X$  can be continuously extended over this compactification<sup>3)</sup>.*

*Proof.*  $X$  is homeomorphic to  $F(X)$ , for which the closure  $F(X)^-$  is a compactification. To imbed  $X$  in  $F(X)^-$ , we simply replace the point  $F(x)$  in  $F(X)$  by the point  $x$ . The resulting space  $\beta(X)$  can also be thought of as being constructed by adjoining to  $X$  all the points of  $F(X)^- - F(X)$ . The relation  $f_\alpha = P_\alpha^A \times F$  was established in the Lemma. It shows immediately that  $f_\alpha$  can be continuously extended from  $X$  over all of  $\beta(X)$ ; the desired extension coincides on  $F(X)^- - F(X)$  with  $P_\alpha^A$ , since this projection carries  $F(X)^-$  continuously into  $X_\alpha$ .

*Definition.* *The space  $\beta(X)$  constructed above will be called the distinguished compactification of  $X$ .*

Two very interesting properties of the space  $\beta(X)$  are discussed in the theorems presented next.

*Theorem 4.* *If  $H$  is a continuous mapping of a completely regular space  $X$  onto an everywhere dense part  $Y$  of a compact Hausdorff space  $Z$ , then  $H$  can be extended to a continuous mapping of  $\beta(X)$  onto  $Z$ <sup>4)</sup>.*

*Proof.* This theorem is the immediate result of specializing Theorem 2 to the case in hand: since  $H = G \times F$  and  $G$  carries  $F(X)^-$  continuously onto  $Z$ , the desired extension of  $H$  from  $X$  to  $\beta(X)$  coincides on  $F(X)^- - F(X)$  with  $G$ .

<sup>3)</sup> Stone, loc. cit., Theorem 79; Čech, loc. cit., pp. 831—832.

<sup>4)</sup> Stone, loc. cit., Theorem 88.

*Theorem 5.* If  $Z$  is a compact Hausdorff space containing  $X$  as an everywhere dense part and if every bounded continuous real function on  $X$  has a continuous extension to  $Z$ , then  $Z$  is homeomorphic to  $\beta(X)$  by a mapping which leaves the points of  $X$  fixed<sup>5)</sup>.

*Proof.* Let  $H$  be the identical mapping of  $X$  onto  $X \subset Z$ . Referring to the proof of Theorem 2, we note that the assumption concerning  $Z$  leads to the identity  $B = A$ . Hence the function  $G$  constructed there reduces to  $G = G_A^{-1}$ , and carries  $F(X)^-$  homeomorphically onto  $Z$ . From the proof of Theorem 4 we now see that there is a homeomorphic mapping which takes  $\beta(X)$  onto  $Z \supset X$  and leaves the points of  $X$  fixed.

With a view to treating the case of a normal Hausdorff space  $X$ , we now make the following observation, in which two sets are described as strongly disjoint if and only if their closures are disjoint.

*Theorem 6.* If  $Z$  is a compactification of the completely regular space  $X$  such that sets strongly disjoint in  $X$  remain so in  $Z$ , then every bounded continuous real function on  $X$  has a continuous extension to  $Z$ ; and  $Z$  is homeomorphic to  $\beta(X)$ .

*Proof.* For any open set  $V \subset Z$ , let  $X_\alpha(V)$  be the bounded closed set of real numbers  $f_\alpha(V)^- \subset X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ . If the open sets  $V_1, \dots, V_n$  have a common point, then  $X_\alpha(V_1) \cap \dots \cap X_\alpha(V_n) \supset X_\alpha(V_1 \cap \dots \cap V_n) \neq \emptyset$ . Since  $Z$  is compact the set  $Z_\alpha(z) = \bigcap_{z \in V} X_\alpha(V)$  must therefore be non-void. Let us suppose that  $s$  and  $t$  are two numbers in  $Z_\alpha(z)$  such that  $s < t$ . If  $e$  is any positive real number such that  $s + e < t - e$ , the two sets  $(x; f_\alpha(x) \leq s + e)$ ,  $(x; f_\alpha(x) \geq t - e)$  are closed and disjoint in  $X$ —and hence strongly disjoint in  $Z$ . On the other hand any open set  $V$  which contains  $z$  must contain points  $z_1$  and  $z_2$  such that  $|f_\alpha(z_1) - s| < e$ ,  $|f_\alpha(z_2) - t| < e$ ; and  $z$  is therefore a point common to the closures of the

<sup>5)</sup> Čech, loc. cit., pp. 831—832.

two sets indicated above. This contradiction shows that  $Z_\alpha(z)$  consists of a single real number,  $g_\alpha(z)$ . The function  $g_\alpha$  thus defined is an extension of  $f_\alpha$ : for, if  $x$  is any point in  $X$  and  $V$  any open set in  $Z$  which contains  $x$ , we have  $f_\alpha(x) \in X_\alpha(V)$  and hence  $g_\alpha(x) = f_\alpha(x)$ . The function  $g_\alpha$  is also continuous. If  $e$  is any positive real number and  $z_0$  any fixed point of  $Z$ , there must exist an open set  $V_0$  such that  $z_0 \in V_0$  and  $X_\alpha(V_0) \subset [g_\alpha(z_0) - e, g_\alpha(z_0) + e]$ : for otherwise every set  $X_\alpha(V)$ ,  $z_0 \in V$ , and hence also the set  $Z_\alpha(z_0)$ , would contain a point outside the indicated open interval about  $g_\alpha(z_0)$ . If  $z$  is any point of  $V_0$  we now have  $g_\alpha(z) \in X_\alpha(V_0)$  and hence  $|g_\alpha(z) - g_\alpha(z_0)| < e$ , as we wished to prove.

*Theorem 7.* If  $X_0$  is any closed subset of a normal Hausdorff space  $X$  and if  $Z_0$  is the closure of  $X_0$  in  $\beta(X)$ , then  $\beta(X_0)$  is homeomorphic to  $Z_0$  by a mapping which leaves the points of  $X_0$  invariant<sup>6)</sup>.

*Proof.* Let  $X_1$  and  $X_2$  be strongly disjoint subsets of  $X_0$ : we prove them to be strongly disjoint in  $\beta(X)$  also and hence in  $Z_0$ , so that Theorem 6 is applicable here. Since  $X_1$  and  $X_2$  have disjoint closures in  $X_0$ , which is a closed subset of  $X$ , they also have disjoint closures in  $X$ . The fact that  $X$  is normal therefore implies the existence of a function  $f \in C(X)$  which assumes the value 0 everywhere in  $X_1$  and the value 1 everywhere in  $X_2$ . There is a continuous extension  $g$  of  $f$  to  $\beta(X)$ . The closed subsets of  $\beta(X)$  where  $g$  assumes the values 0 and 1 respectively are disjoint and contain the sets  $X_1$  and  $X_2$  respectively, Hence  $X_1$  and  $X_2$  are strongly disjoint in  $\beta(X)$ .

By combining Theorem 7 with results which we have recently submitted for publication elsewhere we can now obtain the Lebesgue-Urysohn Extension Theorem.

*Theorem 8.* If  $X_0$  is any closed subset of a normal Hausdorff space  $X$  and if  $f_0$  is any bounded continuous real function on  $X_0$ , then  $f_0$  has a continuous extension  $f$  on  $X$ .

<sup>6)</sup> Čech, loc. cit., p. 834.

*Proof.* By the preceding theorem  $f_0$  has a continuous extension  $g_0$  on  $Z_0$ , the closure of  $X_0$  in  $\beta(X)$ . It then follows that  $g_0$  has a continuous extension on  $\beta(X)$ : indeed, we have shown in a forthcoming paper that any continuous real function defined on a compact part of a topological space can be continuously extended to the whole space, provided only that the bounded continuous functions on the whole space constitute a separating family for the given part<sup>7)</sup>.



---

<sup>7)</sup> Stone, „The Generalized Weierstrass Approximation Theorem“, to appear in the March-April, 1948, number of the Mathematics Magazine.



# INTORNO ALLA TEORIA DI UNA CLASSICA EQUAZIONE A DERIVATE PARZIALI DELLA FISICA-MATEMATICA.\*)

Nota di

MAURO PICONE (Roma).

Siano  $D$  un dominio limitato e regolare del piano  $(x, y)$  e  $P_1, P_2, \dots, P_\mu$ , un numero  $\mu$  di punti situati sulla frontiera  $FD^1$  di  $D$ ; è classico e riceve importanti applicazioni il teorema seguente:

I. *Se la funzione  $u(x, y)$  è armonica e limitata nel campo  $A \equiv D - FD$ , essa risulta identicamente nulla in  $D$  se lo è su*

$$FD - \sum_{i=1}^{\mu} P_i.$$

Non mi risulta che a questo teorema siano state date notevoli estensioni, nè ai seguiti procedimenti dimostrativi una semplicità ed un rigore analitico che ad essi conferiscano un assetto da potersi ritenere definitivo.

Mi propongo, con questa Nota, di indicare talune estensioni del teorema enunciato, considerando le soluzioni dell'equazione, in  $n$  variabili reali  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n > 2$ ),

$$(1_0) \quad \Delta u + cu \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + c(x_1, x_2, \dots, x_n) u = 0,$$

essa pure classica nella Fisica-matematica, estensioni che mi lusingo di aver qui conseguito con procedimenti dotati di quel tipo di semplicità nel quale è calebrato artefice il mio amico Wacław Sierpiński, a cui oso dedicare il presente scritto.

\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

1) Mi sia permesso di adottare locuzioni e notazioni che, da tempo, uso nei miei trattati d'Analisi.

1. **Un teorema generale.** Sia  $A$  un campo (cioè un insieme aperto di punti) dello spazio euclideo  $S_{(n)}$  a  $n$  ( $n \geq 2$ ) dimensioni, del cui punto generico  $P$  indicherò con  $x_1, x_2, \dots, x_n$  le coordinate cartesiane ortogonali e  $v(P)$  una funzione<sup>2)</sup> di  $P$  definita in  $A$ . Dirò che  $v(P)$  assume in un punto  $P_0$  di  $FA$  il valore  $f_0$ , se riesce

$$\lim_{P \rightarrow P_0} v(P) \text{ (su } A) = f_0.$$

Sia  $f(P)$  una funzione di  $P$  definita su  $FA$ , scrivendo  $v(P)$  (su  $FA$ ) =  $f(P)$ ,

intendo significare che in ogni punto  $P$  di  $FA$ , la  $v(P)$  vi assume il valore  $f(P)$ . Dirò che  $v(P)$  è *infinitesima* o *nulla* su  $FA$ , se essa assume in ogni punto di  $FA$  il valore zero.

Siano  $c(P)$  e  $g(P)$  due funzioni di  $P$  definite in un insieme di punti  $B$  contenuto in  $A + FA$  e contenente  $A$ , dirò che una funzione  $v(P)$  è, nell'insieme  $B$ , soluzione dell'equazione

$$(1) \quad \Delta v + c(P)v = g(P),$$

se essa è continua in  $B$  e vi è dotata delle derivate parziali seconde che compaiono in  $\Delta v$ , in tutti i punti di  $B$  in cui si possa parlare di tali derivate (e quindi in tutti i punti di  $A$ ), verificandosi in tali punti l'equazione (1). Ciò posto, dimostrerò il teorema:

II. *Supposto il campo  $A$  limitato, di diametro  $\delta$ , fissati su  $FA$ ,  $\mu$  punti  $P_1, P_2, \dots, P_\mu$ , e, corrispondentemente,  $\mu$  numeri positivi  $a_1, a_2, \dots, a_\mu$ , di somma  $\alpha$ , una soluzione  $u(P)$ , in  $A$ , dell'equazione omogenea (1<sub>0</sub>) è ivi identicamente nulla, se, per  $n > 2$ , si ha*

$$(2') \quad u(P) \prod_{i=1}^{\mu} \overline{P_i P}^{a_i} \text{ (su } FA) = 0^s),$$

$$(3') \quad \alpha < n - 2, \quad c(P) \text{ (in } A) < \frac{\alpha(n-2-\alpha)}{\delta^2},$$

e, per  $n = 2$ ,

2) Supporrò sempre, tacitamente, *reali* le funzioni che considererò.

3) Designo con  $\overline{PQ}$  la mutua distanza fra due punti  $P$  e  $Q$  di  $S_{(n)}$ .

$$(2'') \quad u(P) \prod_{i=1}^{\mu} \left( \log \frac{e\delta}{P_i P} \right)^{-\alpha_i} (\text{su } FA) = 0,$$

$$(3'') \quad a < 1, \quad c(P) (\text{in } A) < \frac{a(1-a)}{\delta^2},$$

ove  $e$  designa il numero di Nepero.

Dimostrazione. Si ponga

$$r_i = \overline{P_i P}, \quad (i = 1, 2, \dots, \mu),$$

e, dette  $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$  le coordinate di  $P_i$ ,

$$\xi_{ik} = x_k - x_k^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, \mu; k = 1, 2, \dots, n),$$

ed inoltre

$$\omega_i(P) \begin{cases} = r_i^{-\alpha_i}, & \text{per } n > 2, \\ = [\log(e\delta/r_i)]^{\alpha_i}, & \text{per } n = 2, \end{cases}$$

$$\omega(P) = \prod_{i=1}^{\mu} \omega_i(P),$$

$$U(P) = u(P)/\omega(P).$$

La funzione  $U(P)$  riesce continua nel dominio  $A + FA$  e identicamente nulla su  $FA$ . Avrò dimostrato il teorema se dimostrerò che la  $U(P)$  è identicamente nulla in  $A$ .  $U(P)$  verifica, in  $A$ , l'equazione

$$(4) \quad \omega \Delta U + 2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_k} + (\Delta \omega + c \omega) U = 0,$$

avendosi, ivi,

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^{\mu} \frac{1}{\omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \right)^2 + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{\omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \right),$$

e quindi

$$(5) \quad \frac{\Delta \omega}{\omega} \begin{cases} = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\alpha_i \xi_{ik}}{r_i^2} \right)^2 - (n-2) \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\alpha_i}{r_i^2}, & \text{per } n > 2, \\ = \sum_{k=1}^2 \left( \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\alpha_i \xi_{ik}}{r_i^2 \log \frac{e\delta}{r_i}} \right)^2 - \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\alpha_i}{\left( r_i \log \frac{e\delta}{r_i} \right)^2}, & \text{per } n = 2. \end{cases}$$

Ma

$$\left( \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\alpha_i \xi_{ik}}{r_i} \right)^2 = \left( \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\sqrt{\alpha_i} \sqrt{\alpha_i} \xi_{ik}}{r_i} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\alpha_i}{r_i^2} \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i \frac{\xi_{ik}^2}{r_i},$$

$$\left( \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\alpha_i \xi_{ik}}{r_i^2 \log \frac{e\delta}{r_i}} \right)^2 = \left( \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\sqrt{\alpha_i}}{r_i \log \frac{e\delta}{r_i}} \cdot \frac{\sqrt{\alpha_i} \xi_{ik}}{r_i} \right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\alpha_i}{\left( r_i \log \frac{e\delta}{r_i} \right)^2} \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i \frac{\xi_{ik}^2}{r_{ik}},$$

e pertanto si trae dalle (5)

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} \begin{cases} \leq (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\mu} - n + 2) \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\alpha_i}{r_i^2}, & \text{per } n > 2, \\ \leq (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\mu} - 1) \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\alpha_i}{\left( r_i \log \frac{e\delta}{r_i} \right)^2}, & \text{per } n = 2. \end{cases}$$

Si ha dunque sempre in  $A$ , per le ipotesi del teorema

$$(6) \quad \Delta \omega + c \omega < 0.$$

Se  $U$  non fosse identicamente nulla in  $A + FA$ , vi sarebbe dotata di minimo assoluto negativo o di massimo assoluto positivo che dovrebbero essere assunti in punti di  $A$ . Ora, in ogni tale punto, risulta, in virtù della (6), nel primo caso

$$\Delta U \geq 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0, \quad (\Delta \omega + c \omega) U > 0,$$

e nel secondo

$$\Delta U \leq 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0, \quad (\Delta \omega + c \omega) U < 0,$$

il che contraddice alla (4).

Il teorema dimostrato costituisce ovviamente una cospicua estensione del teor. I e ciò si può dire anche del seguente suo caso particolare.



III. Sia  $A$  limitato, di diametro  $\delta$ , e

$$c(P) \text{ (in } A) \begin{cases} < (n-2)^2/4\delta^2, & \text{per } n > 2, \\ < 1/4\delta^2, & \text{per } n = 2; \end{cases}$$

detti  $P_1, P_2, \dots, P_\mu$  punti di  $FA$ , una soluzione, in  $A$ , della  $(1_0)$ , ivi limitata, è identicamente nulla in  $A$  se lo è su

$$FA - \sum_{i=1}^{\mu} P_i.$$

**Dimostrazione.** Sono verificate le ipotesi del teor. II, quando si ponga,

$$a_1 = a_2 = \dots = a_\mu \begin{cases} = (n-2)/2\mu, & \text{per } n > 2, \\ = 1/2\mu, & \text{per } n = 2. \end{cases}$$

2. **Alcuni corollari del teorema generale.** — Un punto  $P_0$  di  $FA$  si dirà *ordinario rispetto all'equazione  $(1_0)$*  se: 1<sup>o</sup>) si può determinare un intorno  $H$  di  $P_0$  (cioè un campo  $H$  contenente  $P_0$ ) tale che  $c(P)$  sia superiormente limitata in  $HA$ , 2<sup>o</sup>) comunque si prescriva un numero positivo  $\sigma$ , si può costruire un particolare intorno  $I$  di  $P_0$ , di diametro minore di  $\sigma$  e tale che, per il campo  $IA$  sia sempre risolubile il *problema ordinario* di Dirichlet relativo all'equazione  $(1_0)$ , cioè, assegnata arbitrariamente una funzione  $f(P)$ , continua su  $F(IA)$ , esiste sempre una funzione continua in  $IA + F(IA)$ , con quella coincidente su  $F(IA)$ , soluzione, in  $IA$ , della  $(1_0)$ .

Se, per esempio,  $P_0$  è un punto isolato di  $FA$ , ed essendo  $c(P)$  definita in  $P_0$ , esiste un intorno  $H_0$  di  $P_0$  tale che  $c(P)$  sia hölderiana in  $H_0A$ , il punto  $P_0$  è ordinario rispetto all'equazione  $(1_0)$ . Infatti, fissato, comunque, un intorno  $H$  di  $P_0$ , tale che  $H + FH$  sia contenuto in  $H_0A$ , la  $c(P)$  risulterà hölderiana nel dominio limitato  $H + FH$  e quindi ivi dotata di massimo valore, che indicherò con  $M$ . Fissato un numero positivo  $d$  minore della distanza di  $P_0$  da  $FH$ , tale da aversi

$$(7) \quad M \begin{cases} < (n-2)^2/4d^2, & \text{per } n > 2, \\ < 1/4d^2, & \text{per } n = 2, \end{cases}$$

per ogni intorno circolare  $I$  di  $P_0$ , di centro in  $P_0$  e di diametro minore di  $d$ , è risolubile, in virtù del teor. III, il problema ordinario di Dirichlet per la  $(1_0)$ , ed anzi esso ha una soluzione che possiede in  $I$ , tutte le derivate parziali dei primi due ordini *continue*.

Se, come secondo esempio,  $A$  è un campo rettangolare di punti estremi inferiore  $P'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  e superiore  $P''(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$ , è cioè la totalità dei punti di  $S_{(n)}$  le cui coordinate verificano le limitazioni

$$x'_k < x_k < x''_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

e  $c(P)$  è definita in  $A + FA$  e vi è h\"olderiana, ogni punto di  $FA$  è ordinario rispetto all'equazione  $(1_0)$ . Detto, infatti,  $M$  il massimo valore di  $c(P)$  in  $A + FA$ , fissato un numero positivo  $d$  verificante la (7), comunque si consideri un intorno rettangolare  $I$  di  $P_0$ , di diametro minore di  $d$ , il problema ordinario di Dirichlet per la  $(1_0)$  e per il campo  $IA$  è risolubile, in forza del teor. III,<sup>4)</sup> ed ha una soluzione che possiede, in  $IA$ , tutte le derivate parziali dei due primi ordini *continue*.

Ciò posto, andiamo a dimostrare il teorema:

IV. Sia  $P_0$  un punto di  $FA$  ordinario rispetto all'equazione  $(1_0)$  e, per una soluzione  $u(P)$ , in  $A$ , della  $(1_0)$ , esistano un intorno  $J$  di  $P_0$  ed un numero positivo  $\alpha (< n-2$ , per  $n > 2$ ,  $< 1$ , per  $n = 2$ ) tali che la  $u(P)$  assuma su  $J \cdot FA - P_0$  i valori di una funzione  $f(P)$ , continua su  $J \cdot FA$ , e si abbia

$$(8) \quad \begin{cases} \lim_{P \rightarrow P_0} \left[ u(P) \cdot \overline{P_0 P}^\alpha \right] (\text{su } A) = 0, & \text{per } n > 2, \\ \lim_{P \rightarrow P_0} \left[ u(P) \cdot \left( \log \frac{e \delta}{P_0 P} \right)^{-\alpha} \right] (\text{su } A) = 0, & \text{per } n = 2. \end{cases}$$

allora la  $u(P)$  assume in  $P_0$  il valore  $f(P_0)$ .

<sup>4)</sup> La funzione di Green  $G(P, Q)$ , relativa al campo  $IA$  e alle equazioni  $\Delta u = 0$  (in  $IA$ ),  $u = 0$  [su  $F(IA)$ ], possiede invero quelle proprietà con le quali è applicabile il teorema di Fredholm per le equazioni integrali di seconda specie di nucleo  $G(P, Q)c(Q)$  e di campo  $IA$  d'integrazione. Cfr. M. Picone, *Alcuni teoremi di convergenza nella sommazione per rettangoli delle serie multiple e applicazione al problema di Dirichlet* [Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari, Pavia (1936)].

**Dimostrazione.** Detta  $\sigma$  la minore fra le distanze di  $P_0$  da  $FJ$  e da  $FH$ , detto  $M$  l'estremo superiore di  $c(P)$  in  $HA$ , consideriamo un intorno  $I$  di  $P_0$  di diametro  $d$  minore di  $\sigma$  per il quale si abbia

$$M \begin{cases} < \frac{\alpha(n-2-\alpha)}{d^2}, & \text{per } n > 2, \\ < \frac{\alpha(1-\alpha)}{d^2}, & \text{per } n = 2, \end{cases}$$

tale che per il campo  $IA$  sia risolubile il problema di Dirichlet relativo all'equazione  $(1_0)$ . Un punto di  $F(IA)$  appartiene o a  $I \cdot FA$  o ad  $A$ . Sia  $f^*(P)$  quella funzione di  $P$  così definita su  $F(IA)$ :

$$f^*(P) \begin{cases} = f(P), & \text{se } P \text{ appartiene a } J \cdot FA, \\ = u(P), & \text{se } P \text{ appartiene ad } A. \end{cases}$$

Tale funzione riesce continua su  $F(IA)$ . Sia  $u^*(P)$  la soluzione, in  $IA$ , della  $(1_0)$  che assume su  $F(IA)$  i valori di  $f^*(P)$ . Si avrà, in virtù delle (8) e della continuità della  $u^*$  in  $IA + F(IA)$ ,

$$\left[ u(P) - u^*(P) \right] \cdot \overline{P_0 P}^\alpha \left[ \text{su } F(IA) \right] = 0, \quad \text{per } n > 2,$$

$$\left[ u(P) - u^*(P) \right] \cdot \left( \log \frac{ed}{P_0 P} \right)^{-\alpha} \left[ \text{su } F(IA) \right] = 0, \quad \text{per } n = 2,$$

donde, per il teor. II,  $u(P)$  coincidente con  $u^*(P)$  in  $IA$ , e pertanto

$$\lim_{P \rightarrow P_0} u(P) \text{ (su } A) = \lim_{P \rightarrow P_0} u^*(P) \text{ (su } A) = f(P_0).$$

Osserviamo che la dimostrazione esposta fornisce quelle dei seguenti teoremi:

V. Sia  $P_0$  un punto isolato di  $FA$ , ordinario rispetto all'equazione  $(1_0)$ . Se, per una soluzione  $u(P)$ , in  $A$ , della  $(1_0)$  esiste un numero positivo  $\alpha$  ( $< n - 2$ , per  $n > 2$ ;  $< 1$ , per  $n = 2$ ) per cui risultano verificate le (8), essa è soluzione della  $(1_0)$  anche in  $A + P_0$ .

VI. Una soluzione, in  $A$ , della  $(1_0)$  è dotata di tutte le derivate parziali dei due primi ordini continue, in ogni campo di  $A$ , in cui  $c(P)$  è hölderiana.

3. Un perfezionamento al teorema generale. — I risultati del n° prec. consentono di dimostrare il seguente teorema nel quale si perfeziona il teor. II:

VII. Supposto il campo  $A$  limitato, di diametro  $\delta$ , fissati su  $FA$  i  $\nu$  punti distinti  $Q_1, Q_2, \dots, Q_\nu$ , ordinari rispetto all'equazione  $(1_0)$ , e corrispondentemente  $\nu$  numeri positivi  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$ ,  $\mu$  punti arbitrari  $P_1, P_2, \dots, P_\mu$ , distinti dai precedenti, e corrispondentemente  $\mu$  numeri positivi  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$  di somma  $\alpha$ , una soluzione  $u(P)$ , in  $A$ , della  $(1_0)$  è ivi identicamente nulla se, per  $n > 2$ , si ha

$$(9') \quad u(P) \prod_{j=1}^{\nu} Q_j P^{\beta_j} \prod_{i=1}^{\mu} P_i P^{\alpha_i} \text{ (su } FA) = 0, \quad \beta_j < n-2, \alpha < n-2,$$

$$c(P) < \alpha(n-2-\alpha)/\delta^2,$$

e per  $n=2$ ,

$$(9'') \quad u(P) \prod_{j=1}^{\nu} \left( \log \frac{e\delta}{Q_j P} \right)^{-\beta_j} \prod_{i=1}^{\mu} \left( \log \frac{e\delta}{P_i P} \right)^{-\alpha_i} \text{ (su } FA) = 0,$$

$$\beta_j < 1, \alpha < 1,$$

$$c(P) < \alpha(1-\alpha)/\delta^2.$$

Dimostrazione. — In virtù del teor. IV, le  $(9')$  e  $(9'')$  equivalgono, rispettivamente, alle  $2')$  e  $(2'')$ .

4. Teoremi di unicità per un problema di Dirichlet generalizzato.

VIII. Supposto il campo  $A$  limitato, di diametro  $\delta$ , siano date due funzione  $f(P)$  e  $g(P)$  del punto  $P$ , definite, rispettivamente, su  $FA$  e in  $A$ , una funzione  $\varphi(Q, P)$ , dei due punti  $Q$  e  $P$ , definita per  $Q$  in  $A$  e per  $P$  su  $FA$ ; siano pure dati  $\nu$  punti distinti  $Q_1, Q_2, \dots, Q_\nu$ , di  $FA$ , ordinari rispetto all'equazione  $(1_0)$ , e, corrispondentemente,  $\nu$  numeri positivi  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$ , ciascuno minore di  $n-2$ , per  $n > 2$ , minore di 1, per  $n=2$ ,  $\mu$  punti arbitrari  $P_1, P_2, \dots, P_\mu$ , di  $FA$ ,



distinti dai precedenti, e, corrispondentemente,  $\mu$  numeri positivi  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$ , la cui somma  $a$  sia minore di  $n-2$ , per  $n > 2$ , minore di 1, per  $n = 2$ . Se

$$c(P) \begin{cases} < a(n-2-a)/\delta^2, & \text{per } n > 2, \\ < a(1-a)/\delta^2 & \text{per } n = 2, \end{cases}$$

non può esistere più di una soluzione  $v(P)$ , in  $A$ , della (1), verificante le seguenti equazioni in ogni punto  $P$  di  $FA$ ,

$$(10') \lim_{Q \rightarrow P} \left\{ \left[ v(Q) - \varphi(Q, P) \right] \prod_{j=1}^{\nu} \overline{Q_j Q}^{\beta_j} \prod_{i=1}^{\mu} \overline{P_i Q}^{\alpha_i} \right\} (\text{su } A) = f(P),$$

per  $n > 2$ ,

$$(10'') \lim_{Q \rightarrow P} \left\{ \left[ v(Q) - \varphi(Q, P) \right] \prod_{j=1}^{\nu} \left( \log \frac{e\delta}{\overline{Q_j Q}} \right)^{-\beta_j} \prod_{i=1}^{\mu} \left( \log \frac{e\delta}{\overline{P_i Q}} \right)^{-\alpha_i} \right\}$$

(su  $A$ ) =  $f(P)$ , per  $n = 2$ .

*Dimostrazione.* — La differenza  $u = v' - v''$  di due soluzioni, in  $A$ ,  $v'$  e  $v''$ , della (1) verificanti, su  $FA$ , le equazioni (10') o (10'') è una soluzione, in  $A$ , della (1<sub>0</sub>) verificante le (9') o (9'').

**IX.** *Con le notazioni del teor. prec., non può esistere più di una soluzione  $v(P)$ , in  $A$ , della (1), verificante le seguenti equazioni in ogni punto  $P$  di  $FA$*

$$\lim_{Q \rightarrow P} \left\{ \left[ v(Q) - \varphi(Q, P) \right] \prod_{j=1}^{\nu} \overline{Q_j Q}^{\beta_j} \right\} (\text{su } A) = f(P), \quad \text{per } n > 2,$$

$$\lim_{Q \rightarrow P} \left\{ \left[ v(Q) - \varphi(Q, P) \right] \prod_{j=1}^{\nu} \left( \log \frac{e\delta}{\overline{Q_j Q}} \right)^{-\beta_j} \right\} (\text{su } A) = f(P),$$

per  $n = 2$ ,

se sussiste il teorema d'unicità per il problema ordinario di Dirichlet, relativo all'equazione (1<sub>0</sub>) e al campo ottenuto da  $A$  aggregandogli quelli fra i punti  $Q_j$  di  $FA$  che sono isolati.

# REMARQUES SUR LE TRAVAIL PRÉCÉDENT DE M. MAURO PICONE

par

F. LEJA (Kraków).

Le théorème II du travail précédent<sup>1)</sup> est très remarquable. Observons que l'équation différentielle

$$(1) \quad \Delta u + c \cdot u \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + c \cdot u = 0,$$

où la fonction  $c = c(x_1, \dots, x_n) = c(P)$ , définie dans un domaine borné  $A$  de frontière  $FA$ <sup>2)</sup>, n'est pas assujettie à la condition  $c(P) \leq 0$  dans  $A$ , peut admettre dans  $A$  plusieurs solutions continues dans  $A + FA$  s'annulant sur  $FA$  — et que le théorème II assure l'unicité de ces solutions sans qu'on suppose qu'elles soient bornées ni que  $c(P) \leq 0$ .

Je me permets de remarquer que ce beau résultat de M. Picone peut encore être généralisé comme il suit:

1° Dans le cas  $n=2$  le théorème reste vrai lorsqu'on remplace dans son énoncé le nombre  $\delta$  par  $\delta/e$ , où  $\delta$  désigne maintenant le diamètre du domaine  $A$  augmenté par un nombre positif arbitrairement petit. Alors les hypothèses (2'') et (3'') du théorème II seront remplacées par les suivantes:

$$(2) \quad u(P) \cdot \prod_{i=1}^{\mu} \left( \log \frac{\delta}{r_i} \right)^{-\alpha_i} = 0 \text{ sur } FA^3), \text{ où } r_i = \overline{PP_i},$$

$$(3) \quad c(P) < \frac{\alpha(1-\alpha)}{\delta^2} e^2 \text{ dans } A, \alpha < 1,$$

<sup>1)</sup> M. Picone, *Intorno alla teoria di una classica equazione a derivate parziali della Fisica-matematica* [Annales de la Soc. Polon. de Mathématique, t. 21 (1948), p. 161].

<sup>2)</sup> Je me sers des notations de M. Picone,

<sup>3)</sup> C'est-à-dire, le membre gauche de l'équation (2) tend vers zero lorsque le point  $P$ , variable dans  $A$ , tend vers un point quelconque de  $FA$ .

dont la première est équivalente à (2'') et la seconde est plus faible que (3''). La thèse du théorème II dans le cas  $n=2$  peut être déduite des hypothèses (2) et (3) sans changer la démonstration de M. Picone.

2° Les hypothèses (2') dans le cas  $n > 2$  et (2'') dans le cas  $n=2$  peuvent être remplacées par d'autres, plus faibles, sans changer la thèse. Désignons par  $\bar{\omega}(P)$  la fonction

$$\bar{\omega}(P) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\mu} \left( \frac{1}{r_i} \right)^{\alpha} & \text{lorsque } n > 2, \\ \sum_{i=1}^{\mu} \left( \log \frac{\delta}{r_i} \right)^{\alpha} & \text{lorsque } n = 2, \end{cases}$$

où  $r_i = \overline{PP_i}$  et  $\alpha$  est un nombre positif; désignons encore par  $\bar{c}$  la quantité suivante dépendant de  $\alpha$

$$\bar{c} = \begin{cases} \frac{\alpha(n-2-\alpha)}{\delta^2} & \text{lorsque } n > 2, \\ \frac{\alpha(1-\alpha)}{\delta^2} e^2 & \text{lorsque } n = 2 \end{cases}$$

et supposons que

$$\begin{array}{ll} 0 < \alpha < n - 2 & \text{dans le cas } n > 2, \\ 0 < \alpha < 1 & \text{dans le cas } n = 2. \end{array}$$

La quantité  $\bar{c}$  est donc positive. Je dis que:

Si  $u(P)$  est une intégrale de l'équation différentielle (1) dans le domaine  $A$  et si

$$(2) \quad \frac{u(P)}{\bar{\omega}(P)} = 0 \quad \text{sur } FA$$

et

$$(3) \quad c(P) < \bar{c} \quad \text{dans } A,$$

alors  $u(P)$  est identiquement nulle dans  $A$ .

Pour prouver cette proposition il suffit d'appliquer le raisonnement de M. Picone dans la démonstration de son théorème II. La fonction  $v(P) = u(P) : \bar{\omega}(P)$  est continue dans le domaine fermé  $A + FA$ , s'annule sur  $FA$  et satisfait dans  $A$  à l'équation

$$\Delta v + \frac{2}{\bar{\omega}} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \left( \frac{\Delta \bar{\omega}}{\bar{\omega}} + c \right) v = 0;$$

il suffit de prouver qu'on a

$$(4) \quad \frac{\Delta \bar{\omega}}{\bar{\omega}} + c(P) < 0 \quad \text{dans } A.$$

Or, si  $n = 2$  on a

$$\Delta \bar{\omega} + a(1-a) \sum_{i=1}^{\mu} \omega_i^a \frac{1}{\left( r_i \log \frac{\delta}{r_i} \right)^2} = 0, \quad \text{où } \omega_i = \log \frac{\delta}{r_i}$$

donc étant dans le domaine  $A$   $0 < r_i < \delta$  on a

$$0 < r_i \log \frac{\delta}{r_i} \leq \frac{\delta}{e}$$

et par suite dans  $A$

$$\Delta \bar{\omega} + \frac{a(1-a)}{\delta^2} e^2 \cdot \sum_{i=1}^{\mu} \omega_i^a = \Delta \bar{\omega} + \bar{c} \cdot \bar{\omega} \leq 0,$$

d'où l'on déduit l'inégalité (4) en vertu de l'hypothèse (3).

Pareillement, si  $n > 2$  on a

$$\Delta \bar{\omega} + a(n-2-a) \cdot \sum_{i=1}^{\mu} \omega_i^a \cdot \frac{1}{r_i^2} = 0, \quad \text{où } \omega_i = \frac{1}{r_i},$$

et comme  $r_i < \delta$  dans le domaine  $A$  on a dans  $A$

$$\Delta \bar{\omega} + \frac{a(n-2-a)}{\delta^2} \cdot \sum_{i=1}^{\mu} \omega_i^a = \Delta \bar{\omega} + \bar{c} \cdot \bar{\omega} \leq 0$$

d'où l'on déduit, comme plus haut, (4) en vertu de (3).

Observons que l'hypothèse (2) donnée plus haut est plus faible que l'hypothèse (2') respectivement (2'') de M. Picone car si  $a = \alpha_1 + \dots + \alpha_{\mu}$  on a  $a > \alpha_i$ .



# STIELTJES INTEGRALS CONSIDERED AS LENGTHS

by

KARL MENGER (Chicago).

The Stieltjes integral

$$\int_a^b f(x) dg(x) \quad \text{or briefly,} \quad \int_a^b f dg$$

is defined as follows: We divide the interval  $[a, b]$  into a finite number of intervals

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

We call  $\max. (x_{i+1} - x_i)$  the *norm* of the division. Moreover we select a number  $x_i^*$  in each interval  $[x_i, x_{i+1}]$  and call

$$\sum f(x_i^*) [g(x_{i+1}) - g(x_i)]$$

the *Stieltjes sum* associated with the above division and the above selection of points  $x_i^*$ . If there exists a number from which the above Stieltjes sums differ arbitrarily little provided that the norm of the division is sufficiently small, but regardless of the selection of the  $x_i^*$  in  $[x_i, x_{i+1}]$ , then we call this number the *Stieltjes integral*

$$\int_a^b f dg.$$

If in each interval  $[x_i, x_{i+1}]$  we select the initial point, i. e., set  $x_i^* = x_i$ , then we obtain what we may call the *left-side Stieltjes sum*

$$\sum f(x_i) [g(x_{i+1}) - g(x_i)]$$

associated with the division of the interval  $[a, b]$ . If there exists a number from which these left-side Stieltjes sums

differ arbitrarily little for every division of sufficiently small norm, then we call this number the *left-side Stieltjes integral*.

In a paper „*What curves have length?*“<sup>1)</sup> we subsumed this left-side Stieltjes integral under a general concept of length. In fact, the above integral is the length of the interval  $[a, b]$  derived from the distance

$$(*) \quad \delta(x, y) = f(x) [g(y) - g(x)]$$

for every two numbers  $x, y$  of  $[a, b]$ . The question arises under what conditions a given distance yields a left-side Stieltjes integral as length. The answer is contained in the following remark.

*In order that the length of the interval  $[a, b]$  derived from the distance  $\delta(x, y)$  be a left-side Stieltjes integral with whose integrands the distance is connected by formula (\*), it is necessary and sufficient that*

1)  $\delta(x, y) \cdot \delta(y, z) + \delta(y, x) \cdot \delta(x, z) = \delta(x, y) \cdot \delta(y, x)$   
for every three numbers  $x, y, z$  of  $[a, b]$ , and

2) if  $\delta(x, y) = 0$  and  $\delta(x, z) \neq 0$  then  
 $\delta(x, z) \cdot \delta(y, w) = \delta(y, z) \cdot \delta(x, w)$

for every four numbers  $x, y, z, w$  of  $[a, b]$ .

The necessity of the conditions 1) and 2) is an obvious consequence of formula (\*). In order to prove that the conditions are sufficient, let  $\delta(x, y)$  be a distance satisfying the conditions 1) and 2). If  $\delta(x, y) = 0$  for every two elements  $x, y$  of  $[a, b]$ , then the metric is associated with the integral  $\int_a^b 0 dg$  for any function  $g$ . If  $\delta(x, y) = 0$  does not hold for every  $x$  and  $y$ , then let  $x_0$  and  $v_0$  be two numbers for which  $\delta(x_0, v_0) \neq 0$ . For each  $u$  we define

$$g(u) = \delta(x_0, u),$$

$$f(u) = \begin{cases} -\delta(u, x_0)/\delta(x_0, u) & \text{if } \delta(x_0, u) \neq 0, \\ \delta(u, v_0)/\delta(x_0, v_0) & \text{if } \delta(x_0, u) = 0. \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Fundamenta Mathematicae, t. 35 (in print).

Now let  $y$  and  $z$  be any two elements. We claim that

$$\delta(y, z) = f(y) \cdot [g(z) - g(y)]$$

where  $f$  and  $g$  are two functions just defined.

If  $\delta(x_0, y) \neq 0$ , then

$$f(y) \cdot [g(z) - g(y)] = -\frac{\delta(y, x_0)}{\delta(x_0, y)} \cdot [\delta(x_0, z) - \delta(x_0, y)].$$

The expression on the right side is  $\delta(y, z)$  by condition 1).

If  $\delta(x_0, y) = 0$ , then

$$f(y) \cdot [g(z) - g(y)] = \frac{\delta(y, v_0)}{\delta(x_0, v_0)} \cdot [\delta(x_0, z) - 0].$$

The expression on the right side is  $\delta(y, z)$  by condition 2).

---

# THE HOMOTOPY TYPE OF A SPECIAL KIND OF POLYHEDRON

by

J. H. C. WHITEHEAD

1. *Introduction.* It is explained in [1] how the homotopy type of a (finite) simply connected, 4-dimensional polyhedron can be described in terms of co-homology. Such a polyhedron may be regarded as a special case of a connected polyhedron,  $K$ , of at most  $n+2$  dimensions ( $n \geq 2$ ), such that  $\pi_r(K) = 0$  for  $r = 1, \dots, n-1$ . We shall describe such a polyhedron as an  $A_n^2$ -polyhedron. The object of this note is to show how the results in [1] may be extended from  $A_2^2$ -polyhedra to  $A_n^2$ -polyhedra for any  $n > 2$ . Actually the situation is much simpler when  $n > 2$  than when  $n = 2$ . The only modular co-homology groups which we need are the groups  $H^r(K, 2)$ , for  $r = n, n+2$ . The products and „Pontrjagin Squares“ in the co-homology ring are replaced by the<sup>1)</sup> „Steenrod Squares“

$$(1.1) \quad \gamma^* x = x \cup_{n-2} x \in H^{n+2}(K, 2),$$

where  $x \in H^n(K, 2)$ . We proceed to explain this in greater detail.

2.  *$A_n^2$ -co-homology systems.* We replace the co-homology rings defined in [1] by simpler systems, which we call  $A_n^2$ -co-homology systems. Let  $H^0, H^n, H^{n+1}, H^{n+2}$  be additive Abelian groups. We shall confine ourselves to finite complexes and therefore assume that each of these groups has a finite number of generators,  $H^0$  being cyclic infinite. It will be convenient to define  $H^r = 0$  for all values of

---

<sup>1)</sup> See [4], § 6.



$r \neq 0, n, n+1, n+2$ . We introduce another group<sup>2)</sup>,  $\Delta^*({}_2H^{n+1})$ , which is the image of  ${}_2H^{n+1}$  in an isomorphism,  $\Delta^*$ , and define  $H^n(2)$  as the direct sum

$$H^n(2) = H_2^n + \Delta^*({}_2H^{n+1}).$$

We do not regard  $\Delta^*$  as uniquely determined by the system, but we do postulate a uniquely determined homomorphism

$$\Delta: H^n(2) \rightarrow H^{n+1},$$

such that  $\Delta^{-1}(0) = H_2^n$  and  $\Delta\Delta^* = 1$ . We also define

$$\mu: H^n \rightarrow H^n(2)$$

as the natural homomorphism onto the summand  $H_2^n \subset H^n(2)$ . Finally we postulate a uniquely determined homomorphism,

$$\gamma^*: H^n(2) \rightarrow H^{n+2}(2) = H_2^{n+2},$$

which may be arbitrary. By an  $A_n^2$ -co-homology system,  $H$ , we mean a set of groups,  $H^r, H^n(2)$  ( $r=0, 1, \dots$ ) together with homomorphisms,  $\Delta, \mu, \gamma^*$ , of the kind just described.

Let  $H, \bar{H}$  be two  $A_n^2$ -co-homology systems. By a *proper* homomorphism,  $f: H \rightarrow \bar{H}$ , we mean a map such that  $f|H^r$   $f|H^n(2)$  are homomorphisms into the corresponding groups,  $\bar{H}^r, \bar{H}^n(2)$ , and

$$f\Delta = \Delta f, f\mu = \mu f, f\gamma^* = \gamma^*f,$$

where  $\Delta, \mu, \gamma^*$  mean the same in  $\bar{H}$  as in  $H$ . If  $f: H \rightarrow \bar{H}$  satisfies all these conditions, except possibly  $f\gamma^* = \gamma^*f$ , we shall call it a  $(\Delta, \mu)$ -homomorphism. If  $f: H \rightarrow \bar{H}$  is a proper homomorphism such that  $f|H^r$  is an isomorphism<sup>3)</sup> onto  $\bar{H}^r$  for each  $r$ , then  $f$  will be called a *proper isomorphism* of  $H$  onto  $\bar{H}$  and  $H$  *properly isomorphic* to  $\bar{H}$ .

The groups in an  $A_n^2$ -co-homology system,  $H$ , will often be defined in terms of co-chain groups,  $C^r$  ( $r=0, 1, \dots; C^r=0$

<sup>2)</sup> If  $A$  is any additive Abelian group, then  ${}_m A$  is the sub-group consisting of all elements  $a \in A$  such that  $ma = 0$  and  $A_m$  is the residue group  $A - mA$  ( $m > 0$ ).

<sup>3)</sup> In this case  $f|H^n(2)$  is also an isomorphism onto (Cf. Lemma 2 in [1] and Lemma 1 below).

if  $r > n+2$ ). These are free Abelian groups of finite rank, which are related by a co-boundary operator,  $\delta: C^r \rightarrow C^{r+1}$ , such that  $\delta\delta=0$ . In this case  $H^r$  is the residue group

$$H^r = Z^r - \delta C^{r-1} \quad (r \geq 0, \delta C^{-1} = 0),$$

where  $Z^r = \delta^{-1}(0)$  and  $Z^r = \delta C^{r-1}$  if  $1 \leq r < n$ . Also  $H^0$  is cyclic infinite. The group  $H^n(2)$  is the group of  $n$ -dimensional co-homology classes mod. 2. Let  $x \in H^n(2)$ ,  $x' \in x$  and let  $\delta x' = 2y$ , where  $y' \in Z^{n+1}$ . Then  $\Delta x = y$ , where  $y \in H^{n+1}$  is the co-homology class containing  $y'$ . If  $z \in H^n$ ,  $z' \in z$ , then  $z'$  is an absolute co-cycle and  $\mu z$  is the mod. 2 co-homology class containing  $z'$ .

Let  $C^r = C^r(K)$  be the group of  $r$ -dimensional co-chains in a simplicial  $A_n^2$ -complex  $K$ . Then  $\gamma^*$  is defined by (1.1). In this case the  $A_n^2$ -co-homology system,  $H = H(K)$ , will be called the *co-homology system* of  $K$ . Let  $K, L$  be two  $A_n^2$ -complexes. Then any map,  $f: K \rightarrow L$ , induces a proper homomorphism,  $f^*: H(L) \rightarrow H(K)$ . We shall also say that  $f$  is a *geometrical realization* of  $f^*$ .

Our main theorems are:

*Theorem 1.* Any  $A_n^2$ -co-homology system is properly isomorphic to the co-homology system of some  $A_n^2$ -complex.

*Theorem 2.* Two  $A_n^2$ -complexes are of the same homotopy type if, and only if, their co-homology systems are properly isomorphic.

*Theorem 3.* If  $K, L$  are  $A_n^2$ -complexes, then any proper homomorphism,  $f^*: H(L) \rightarrow H(K)$ , has a geometrical realization,  $f: K \rightarrow L$ .

It follows from Theorem 4 in § 6 of [1] that Theorem 3 implies Theorem 2. In the following sections we indicate how Theorems 1 and 3 follow from arguments used in [1], with certain modifications.

3. *A lemma on realisability.* Let  $H, \bar{H}$  be  $A_n^2$ -co-homology systems, which are defined in terms of systems of co-chain groups,  $C = \{C^r\}$ ,  $\bar{C} = \{\bar{C}^r\}$ . A co-chain mapping,  $g: C \rightarrow \bar{C}$  (i. e. a family of homomorphisms,  $g: C^r \rightarrow \bar{C}^r$ , such

that  $g\delta = \delta g$ ), obviously induces a  $(\Delta, \mu)$ -homomorphism,  $f: H \rightarrow \bar{H}$ . We shall also say that  $f$  is realized by  $g$ .

*Lemma 1.* Any  $(\Delta, \mu)$ -homomorphism,  $f: H \rightarrow \bar{H}$ , can be realized by a co-chain mapping,  $g: C \rightarrow \bar{C}$ .

The proof is similar to, but simpler than the proof of Lemma 4 in § 2 of [1].

4. *Reduced complexes.* We shall deal with (cell) complexes, as defined in [1], which have simplicial sub-divisions. By a reduced  $A_n^2$ -complex,  $K$ , we shall mean one which satisfies the following conditions, in which  $K^r$  stands for the  $r$ -section of  $K$ .

a)  $K^0$  consists of a single 0-cell,  $e^0$ , and  $K^r = K^0$  if  $r < n$ .

b)  $K^n = e^0 + e_1^n + \dots + e_m^n$ , where  $\bar{e}_i^n = e^0 + e_i^n = S_i^n$  is an  $n$ -sphere,

c)  $K^{n+1} = K^n + e_1^{n+1} + \dots + e_{t+i}^{n+1}$ , where  $e_i^{n+1}$  ( $1 \leq i \leq t \leq m$ )

is attached to  $S_i^n$  by a map,  $\dot{E}_i^{n+1} \rightarrow S_i^n$ , of degree  $\sigma_i$ , where  $\sigma_1, \dots, \sigma_t$  are the coefficients of  $n$ -dimensional torsion (i. e.  $\sigma_1 > 1$ ,  $\sigma_i | \sigma_{i+1}$ ,  $\sigma_t \neq 0$ ), and  $\bar{e}_{t+i}^{n+1} = e^0 + e_{t+i}^{n+1} = S_i^{n+1}$  is an  $(n+1)$ -sphere. Thus  $e_i^{n+1}$  ( $i \leq t$ ) is bounded by  $S_i^n$  taken  $\sigma_i$  times and  $e_{t+1}^n, \dots, e_m^n$  are principal cells (i. e. cells which are open sub-sets) of  $K^{n+1}$ .

d) Each  $(n+2)$ -cell is attached to  $K^{n+1}$  by a map of the form  $\dot{E}^{n+2} \rightarrow K^n + S_1^{n+1} + \dots + S_t^{n+1}$ . Thus  $e_i^{n+1}$  ( $i \leq t$ ) are principal cells of  $K$ .

In the above definition we may have  $m=0$ ,  $t=0$  or  $l=0$  in which case the  $n$ -cells, the bounded  $(n+1)$ -cells,  $e_i^{n+1}$  ( $i \leq t$ ), or the  $(n+1)$ -spheres,  $S_i^{n+1}$ , are absent from  $K$ . An argument similar to the one in § 15 of [1] shows that any  $A_n^1$ -complex is of the same homotopy type as some reduced complex.

5. *The group  $\pi_{n+1}(K^{n+1})$ .* Let  $u \in \pi_r(S^n, q_0)$  ( $r \geq n > 1$ ) be represented by a map  $\lambda: (S^r, p_0) \rightarrow (S^n, q_0)$  and  $a \in \pi_n(X, x_0)$  by a map  $\mu: (S^n, q_0) \rightarrow (X, x_0)$ , where  $X$  is any space and

$p_0, q_0, x_0$  are base points. Let  $u \cdot a \in \pi_r(X, x_0)$  be the element represented by the map<sup>4)</sup>  $\mu \lambda: S^r \rightarrow X$ . Obviously

$$(5.1) \quad (u+v) \cdot a = u \cdot a + v \cdot a \quad [u, v \subset \pi_r(S^n, q_0)].$$

If  $r < 2n-1$  then<sup>5)</sup>

$$(5.2) \quad u \cdot (a+b) = u \cdot a + u \cdot b \quad [a, b \subset \pi_n(X, x_0)].$$

Let  $r = n+1 > 3$ . Then  $r < 2n-1$  and  $2u = 0$ . Therefore it follows from (5.1) and (5.2) that  $u \cdot 2a = 0$ . Let  $G$  be the residue group  $\pi_n(X, x_0) - 2\pi_n(X, x_0)$  and let  $\bar{a} \in G$  be the residue class containing a given element  $a \in \pi_n(X, x_0)$ . Since  $u \cdot 2a = 0$  a homomorphism,  $u: G \rightarrow \pi_{n+1}(X, x_0)$ , is defined by

$$(5.3) \quad u \bar{a} = u \cdot a.$$

Let  $f_k: \pi_k(X, x_0) \rightarrow \pi_k(Y, y_0)$  be the homomorphism, which is induced by a given map  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ . Then  $f_n a$  and  $f_r(u \cdot a)$  are represented by  $f\mu: S^n \rightarrow Y$  and  $f(\mu\lambda) = (f\mu)\lambda: S^r \rightarrow Y$ . Therefore

$$(5.4) \quad f_r(u \cdot a) = u \cdot f_n a.$$

Let  $H = \pi_n(Y, y_0) - 2\pi_n(Y, y_0)$  and let  $u: H \rightarrow \pi_{n+1}(Y, y_0)$  be defined in the same way as  $u: G \rightarrow \pi_{n+1}(X, x_0)$ . Let  $\bar{f}_n: G \rightarrow H$  be the homomorphism induced by  $f_n$ . Then it follows from (5.3) and (5.4) that

$$(5.5) \quad f_{n+1}(u\bar{a}) = u \bar{f}_n \bar{a}.$$

Now let  $X = K^n$  ( $n > 2$ ), where  $K$  is a reduced complex. First assume that  $t = 0$ , i.e. that

$$K^{n+1} = K^n + S_1^{n+1} + \dots + S_i^{n+1}.$$

Let  $b_i$  be a generator of  $\pi_{n+1}(S_i^{n+1})$ . Then  $\pi_{n+1}(K^{n+1})$  is the direct sum<sup>6)</sup>

4) Cf. [5], p. 303. N. B. our  $u \cdot a$  is Freudenthal's  $au$ .

5) See [3], Theorem 9, p. 268.

6) In dealing with spaces  $X$  and  $Y \subset X$  such that the injection homomorphism,  $i\pi_r(Y) \rightarrow \pi_r(X)$ , is an isomorphism into, we shall often refer to  $i\pi_r(Y)$  as  $\pi_r(Y)$ .



$$\pi_{n+1}(K^{n+1}) = \pi_{n+1}(K^n) + (b_1, \dots, b_l),$$

where  $(b_1, \dots, b_l)$  is freely generated by  $b_1, \dots, b_l$ .

Also

$$K^n = S_1^n + \dots + S_m^n$$

and  $\pi_n(K^n)$  is freely generated by  $a_1, \dots, a_m$ , where  $a_i$  generates  $\pi_n(S_i^n)$ . Let  $u$  be the non-zero element of  $\pi_{n+1}(S^n)$  and let  $v_i = u \cdot a_i$ . Since  $n > 2$  it follows from (8.1) below and induction on  $m$  that  $\pi_{n+1}(K_n)$  is the direct sum of the cyclic groups, of order 2, which are generated by  $v_1, \dots, v_m$ . Thus we have

$$\pi_{n+1}(K^{n+1}) = V + B,$$

where  $V$  is the module, which is freely generated, mod. 2, by  $v_1, \dots, v_m$  and  $B = (b_1, \dots, b_l)$ . Moreover  $V = u \cdot \pi_n(K^n)$ . Obviously  $G = \pi_n(K^n) - 2\pi_n(K^n)$  is a free „mod. 2 module“, which is freely generated, mod. 2, by  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ . Therefore  $u: G \rightarrow V$  is an isomorphism onto. Let us make the natural identifications<sup>7)</sup> of  $\pi_n(K^{n+1})$  with  $H_n = H_n(K^{n+1})$  and of  $B \subset \pi_{n+1}(K^{n+1})$  with  $H_{n+1} = H_{n+1}(K^{n+1})$ . Then  $G$  becomes  $H_n(2) = H_n - 2H_n$  and  $\pi_{n+1}(K^{n+1})$  is the direct sum

$$(5.6) \quad \pi_{n+1}(K^{n+1}) = uH_n(2) + H_{n+1}.$$

Now consider the general case, in which

$$K^{n+1} = K_0^{n+1} + e_1^{n+1} + \dots + e_t^{n+1},$$

where

$$K_0^{n+1} = K^n + S_1^{n+1} + \dots + S_l^{n+1}$$

and  $\partial e_i^{n+1} = \sigma_i a_i$ . Then  $\pi_{n+1}(K^{n+1})$  is generated by  $v_1, \dots, v_m, b_1, \dots, b_l$ , subject to the (complete) set of relations<sup>8)</sup>

$$2v_i = 0, \sigma_j v_j = u \cdot (\sigma_j a_j) = 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, t),$$

<sup>7)</sup> By the *natural homomorphism*,  $h: \pi_r(X) \rightarrow H_r(X)$  we mean the one in which corresponding elements are represented by the same map,  $S^r \rightarrow X$ , when the standard  $r$ -sphere,  $S^r$ , has been given an orientation. In case  $h$  is an isomorphism (into), the natural identification will mean the identification of each  $a \in \pi_r(X)$  with  $ha \in H_r(X)$ .

<sup>8)</sup> See [2], Theorem 3, p. 420.

where  $\nu_i, b_j$ , are defined, as above, in terms of  $K_0^{n+1}$ . Also

$$K^{n+1} = K_1^{n+1} + S_1^{n+1} + \dots + S_t^{n+1},$$

where

$$K_1^{n+1} = K^n + e_1^{n+1} + \dots + e_t^{n+1},$$

and

$$\pi_{n+1}(K^{n+1}) = \pi_{n+1}(K_1^{n+1}) + B,$$

where  $B = (b_1, \dots, b_t)$  means the same as before. Moreover  $\pi_{n+1}(K_1^{n+1})$  is generated by  $\nu_1, \dots, \nu_m$ , subject to the above relations. As before, let  $H_n(K^{n+1}) = \pi_n(K^{n+1})$ . Then  $H_n(2) = H_n(K^{n+1}) - 2H_n(K^{n+1})$ , since there is no  $(n-1)$ -dimensional torsion, and  $H_n(2)$  is generated by  $a_1, \dots, a_m$  subject to the (complete) set of relations

$$2a_i = 0, \quad \sigma_j a_j = 0 \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, t).$$

Also  $u: H_n(2) \rightarrow \pi_{n+1}(K^{n+1})$  is given by  $ua_i = \nu_i$ . Therefore  $u$  is an isomorphism onto  $\pi_{n+1}(K_1^{n+1})$  and (5.6) holds in the general case.

We now state these results in a form which is invariant with respect to the homotopy type. Let  $P$  be an  $A_n^2$ -complex, which is not necessarily reduced. Then  $P^{n+1}$  is of the same homotopy type as some reduced complex of at most  $n+1$  dimensions. Let  $H_r = H_r(P^{n+1})$  ( $r=n, n+1$ ) and let

$$h_r: \pi_r(P^{n+1}) \rightarrow H_r$$

be the natural homomorphism. Then  $h_n$  is an isomorphism onto and  $h_{n+1}$  has a right inverse,  $k: H_{n+1} \rightarrow \pi_{n+1}(P^{n+1})$  (i. e.  $h_{n+1}k=1$ ). Thus  $h_{n+1}$  is onto and  $k$  is an isomorphism into. Let  $H_n(2) = H_n(P^{n+1}, 2) = H_n - 2H_n$ . Then  $h_n$  determines an isomorphism (onto)

$$\bar{h}_n: G \rightarrow H_n(2),$$

where  $G = \pi_n(P^{n+1}) - 2\pi_n(P^{n+1})$ . We define

$$w = u\bar{h}_n^{-1}: H_n(2) \rightarrow \pi_{n+1}(P^{n+1}),$$

where  $u: G \rightarrow \pi_{n+1}(P^{n+1})$  is given by (5.3). Then  $w$  is an isomorphism into and  $\pi_{n+1}(P^{n+1})$  is the direct sum

$$\pi_{n+1}(P^{n+1}) = W + B,$$

where  $W = w H_n(2)$  and  $B = k H_{n+1}$ .

As in [1] we define  $H_r$  in terms of the chain groups  $C_r = \pi_r(P^r, P^{r-1})$  and the homology boundary operator  $\partial = j\beta$ , where  $\beta: C_{r+1} \rightarrow \pi_r(P^r)$  is the homotopy boundary operator and  $j$  is the natural homomorphism  $j: \pi_r(P^r) \rightarrow C_r$ . Let  $c \in C^{n+2}$  and let  $\beta c = w\theta c + b$ , where  $\theta c \in H_n(2)$ ,  $b \in k H_{n+1}$ . Clearly the map defined by  $c \rightarrow \theta c$  is a homomorphism,  $\theta: C_{n+2} \rightarrow H_n(2)$ . Since  $2H_n(2) = 0$ , whence  $\theta(2C_{n+2}) = 0$ , and since each homology class in  $H_{n+2}(2) = H_{n+2}(P, 2)$  contains but a single cycle, mod. 2, it follows that  $\theta$  determines a homomorphism

$$(5.7) \quad \gamma: H_{n+2}(2) \rightarrow H_n(2).$$

The group  $H_r(2)$  is the character group of the co-homology group  $H^r(2) = H^r(P, 2)$  ( $r = n, n+2$ ) and we have:

*Theorem 4.* The homomorphism  $\gamma^*: H^n(2) \rightarrow H^{n+2}(2)$ , given by (1.1), is the dual of  $\gamma$ . That is to say if  $x \in H^n(2)$ ,  $z \in H_{n+2}(2)$ , then  $x(\gamma z) = (\gamma^* x) z$ .

This is a simplified version of Theorem 5 in [1]. The proof, including a modified version of § 8 in [1], is the same, with the complex  $L$  in Theorem 5 of [1] replaced by the complex  $M^{n+2}$ , which is defined on p. 311 of [4].

6. *Proof of Theorems 1, 3.* Theorems 1 and 3 now follow from simplified versions of the proofs of Theorems 1 and 3 in [1]. In particular the final stage in the proof of Theorem 3 can be simplified as follows. Let  $K, L$  be reduced  $A_n^2$ -complexes and let  $f^*: H(L) \rightarrow H(K)$  be a proper homomorphism of the co-homology system of  $L$  into the co-homology system of  $K$ . According to Lemma 1,  $f^*$  can be realized by a co-chain mapping,  $g^*: C^r(L) \rightarrow C^r(K)$ , and the problem is to realize the dual chain mapping,  $g: C_r(K) \rightarrow C_r(L)$ , by a map  $f: K \rightarrow L$ . Let  $f_*$  denote the family of

homomorphisms,  $f_* : H_r(K) \rightarrow H_r(L)$ ,  $f_* : H_s(K, 2) \rightarrow H_s(L, 2)$ , ( $r=0, \dots, n+2$ ;  $s=n, n+2$ ) which are induced by  $g$ . The final stage in the proof of Theorem 3 in [1] is the proof that, with the notation used in [1],  $f\gamma - \gamma g \sim 0$ . In the notation used here this is equivalent to  $f_*\gamma - \gamma f_* = 0$ . But this is the dual of the given relation  $f^*\gamma^* - \gamma^*f^* = 0$ .

7. *The case  $\pi_{n+1}(K) = 0$ .* Let  $K$  be an  $A_n^2$ -complex such that  $\pi_{n+1}(K) = 0$ . We shall show that the homotopy type of  $K$  is determined by its Betti numbers and torsions and shall show how to construct a normal form for complexes of the same homotopy type as  $K$ .

Since  $\pi_r(K) = 0$  for  $r = 1, \dots, n-1$  the natural homomorphism  $\pi_{n+1}(K) \rightarrow H_{n+1}$  is onto<sup>9</sup>). Since  $\pi_{n+1}(K) = 0$  it follows that  $H_{n+1} = 0$ . Therefore there is no  $(n+1)$ -dimensional torsion and it follows that  $H^{n+2}$  is a free Abelian group. It also follows that  $\beta C_{n+2} = \pi_{n+1}(K^{n+1})$ , whence  $\gamma$  in (5.7), is onto. Therefore its dual,  $\gamma^*$ , is an isomorphism into. Let  $[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_p]$  be a basis for  $H^n(2)$  and let  $\bar{c}_i = \gamma^* \bar{a}_i \in H^{n+2}(2)$ . Since  $\gamma^*$  is an isomorphism the elements  $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_p$  are linearly independent, mod. 2. Since  $H_2^{n+2}$  is a free mod. 2 module there are elements,  $\bar{c}_{p+1}, \dots, \bar{c}_q \in H_2^{n+2} = H^{n+2}(2)$ , such that  $[\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_q]$  is a basis for  $H_2^{n+2}$ . I say that there is a basis,  $[c_1, \dots, c_q]$ , for  $H^{n+2}$ , such that  $c_i$  is in the residue class  $\bar{c}_i$  ( $i = 1, \dots, q$ ). For let  $s \geq 0$  and if  $s > 0$  assume that there is a basis,  $[c_1, \dots, c_s, e_1, \dots, e_{q-s}]$ , for  $H^{n+2}$ , such that  $c_i \in \bar{c}_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ). If  $s < q$  let  $c'_{s+1} \in \bar{c}_{s+1}$  and let  $c'_{s+1} = c + e$ , where <sup>10</sup>)  $c \in (c_1, \dots, c_s)$ ,  $e \in (e_1, \dots, e_{q-s})$ . Let  $e = ke'_1$ , where  $e'_1 \in (e_1, \dots, e_{q-s})$  is a primitive element, i. e.  $e'_1$  is not of the form  $le''$  for any  $e'' \in (e_1, \dots, e_{q-s})$  and  $l > 1$ . Then  $e'_1$  is an element in a basis,  $[e'_1, \dots, e'_{q-s}]$ , for  $(e_1, \dots, e_{q-s})$ . If  $k$  is even, then  $\bar{c}'_{s+1} = \bar{c}$ , contrary to the hypothesis that  $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_q$  are linearly independent, mod. 2. Therefore  $k \equiv 1 \pmod{2}$  and  $c_{s+1} = c + e'_1 \in \bar{c}_{s+1}$ . Then

<sup>9</sup>) See [6], p. 314 or § 5 above. In this section  $H_r = H_r(K)$ ,  $H^r = H^r(K)$ .

<sup>10</sup>)  $(x_1, \dots, x_k)$  denotes the sub-group generated by  $x_1, \dots, x_k \subset H^{n+2}$ .



$[c_1, \dots, c_s, c_{s+1}, e'_2, \dots, e'_{q-s}]$  is a basis for  $H^{n+2}$  and the assertion follows by induction on  $s$ .

Since  $H_{n+1} = 0$  one sees from the normal form of the incidence matrices that  $H^{n+1}$  is the direct sum of cyclic groups, generated by elements,  $b_1, \dots, b_t$ , whose orders are the coefficients of  $n$ -dimensional torsion,  $\sigma_1, \dots, \sigma_t$ . Let  $\sigma_h$  be odd,  $\sigma_i = 2\varrho_i$  if  $i > h$  and let  $[a_{t+1}, \dots, a_m]$  be a basis for the free Abelian group  $H^n$ . Then  $[\bar{a}_{h+1}, \dots, \bar{a}_m]$  is a basis for  $H^n(2)$ , where  $\Delta a_i = \varrho_i b_i$  ( $i = h+1, \dots, t$ ) and  $\bar{a}_j = \mu a_j \varepsilon H_2^n$  ( $j = t+1, \dots, m$ ). By the preceding paragraph there is a basis,  $[c_1, \dots, c_q]$  ( $q > m - h$ ), for  $H^{n+2}$ , such that  $\gamma^* a_{h+i} = c_i$ . The numbers  $m - t$  and  $q$  are the  $n^{\text{th}}$  and  $(n+2)^{\text{nd}}$  Betti numbers of  $K$ . Therefore the structure of the co-homology system and hence the homotopy type of  $K$  are determined by the coefficients of torsion and the Betti numbers. Moreover we have defined a normal form for the co-homology system of  $K$ . A geometrical model of this, constructed as in the proof of Theorem 1, in [1], is a normal form for complexes of the same homotopy type as  $K$ .

8. *Note on homotopy groups.* Let  $A, B$  be sub-groups of an additive Abelian group,  $G$ , and let  $\lambda: G \rightarrow A, \mu: G \rightarrow B$  be homomorphisms such that  $\lambda|_A = 1, \lambda|_B = 0, \mu|_B = 1$ . Let  $C = \lambda^{-1}(0) \cap \mu^{-1}(0)$ .

*Lemma 2.* The group  $G$  is the direct sum  $G = A + B + C$ .

Since  $\lambda\lambda = \lambda$  we have  $\lambda(g - \lambda g) = 0$  for any  $g \in G$ . Therefore  $g = \lambda g + g' = a + g'$ , where  $a \in A, g' \in \lambda^{-1}(0)$ . Similarly  $g' = b + c$ , where  $b \in B, c \in \mu^{-1}(0)$ . Since  $\lambda g' = \lambda b = 0$  it follows that  $c \in \lambda^{-1}(0)$ , whence  $c \in C$ . Therefore  $g = a + b + c$ , where  $a \in A, b \in B, c \in C$ . If  $a + b + c = 0$ , then  $a = \lambda(a + b + c) = 0, b = \mu(b + c) = 0$ , whence  $G = A + B + C$  and the lemma is proved.

Let  $P = X \cup Y$  be a topological space, which is the union of arcwise connected, closed sub-sets,  $X, Y$ , with a single common point  $p_0$ . Let  $G = \pi_r(P), A = i \pi_r(X), B = j \pi_r(Y)$ , where  $i: \pi_r(X) \rightarrow \pi_r(P), j: \pi_r(Y) \rightarrow \pi_r(P)$  are the injection homomorphisms and  $p_0$  is the base point for  $\pi_r(P)$  etc. Let

$\lambda': G \rightarrow \pi_r(X)$ ,  $\mu': G \rightarrow \pi_r(Y)$  be the homomorphisms induced by the maps  $f: P \rightarrow X$ ,  $g: P \rightarrow Y$ , such that  $fY = p_0$ ,  $f|X = 1$ ,  $gX = p_0$ ,  $g|Y = 1$ . Then  $\lambda = i\lambda': G \rightarrow A$  and  $\mu = j\mu'$  obviously satisfy the conditions of Lemma 2. Also  $\lambda'i = 1$  and  $\mu'j = 1$ , whence  $i, j$  are isomorphisms into.

Let  $Y$  be an  $n$ -sphere,  $S^n$ , let  $r < 2n - 1$  and let  $\pi_s(X, p_0) = 1$  if  $1 \leq s \leq r - n + 1$ . Then it follows from Theorem 8(a), on p. 265 of [3], that any element,  $g \in G$ , is expressible in the form  $g = a + b$  ( $a \in A$ ,  $b \in B$ ) Therefore

$$(8 \cdot 1) \quad \pi_r(P) = i\pi_r(X) + j\pi_r(S^n).$$

Let  $X, Y$  be arbitrary and let  $P$  be identified with the sub set  $(X \times p_0) \cup (p_0 \times Y) \subset X \times Y$  by identifying each point  $x \in X$  with  $(x, p_0)$  and each  $y \in Y$  with  $(p_0, y)$ . Then it may be verified that<sup>11)</sup>

$$(8 \cdot 2) \quad C \approx \pi_{r+1}(X \times Y, P).$$

#### References

1. J. H. C. Whitehead, *Comm. Math. Helvetici*, 22 (1949).
2. " " *Annals of Math.*, 42, (1941), 409-28.
3. " " *Proc. L.M.S.*, 48 (1944), 243-91.
4. N. E. Steenrod. *Annals of Math.*, 48 (1947), 290-320.
5. H. Freudenthal, *Comp. Math.*, 5 (1937), 299-314.
6. H. Hopf, *Comm. Math. Helvetici*, 17 (1945), 307-26.
7. G. W. Whitehead, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 32 (1946), 188-90.

<sup>11)</sup> Cf. [7].

# QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ENSEMBLES RANGÉS

par

ARNAUD DENJOY (Paris).

Dans la première partie, encore seule parue, de mon livre *l'Énumération transfinitie*<sup>1)</sup>, j'ai donné une place importante à la notion de rang d'un élément  $a$  d'un ensemble ordonné  $E$ . Si  $C(a, E)$  est la section commençante<sup>2)</sup> de  $E$  admettant  $a$  pour dernier élément,

1° le rang de  $a$  dans  $E$ , si ce rang propre à  $a$  existe, est identiquement défini par le type d'ordination de  $C(a, E)$ , indépendamment du mode d'ordination des éléments de  $E$  ultérieurs à  $a$ ; l'application conforme de  $E$  sur un ensemble semblable conservera le rang de  $a$ .

[L'ensemble des nombres  $n/(n+1)$ ,  $n$  prenant toutes les valeurs entières positives, suivis de 1 et des nombres supérieurs à 1, le tout étant ordonné dans le sens des grandeurs croissantes, est un ensemble possédant un premier, un second, un  $n^{\text{e}}$ , un  $\omega^{\text{e}}$  élément, mais non pas un  $(\omega+1)^{\text{e}}$  élément].

---

1) *L'Énumération transfinitie* Livre I. *La notion de rang* (Gauthier-Villars, Paris, 1946). Dans cet article, la simple référence „*Énumération*“ désignera cet ouvrage.

2) J'appelle *sections commençante, finissante, moyenne* d'un ensemble ordonné  $E$ , des parties ordonnées selon la loi de  $E$ , savoir  $C, D, I$ , telles que:

1° si  $a$  est dans  $C$  et si  $a'$ , appartenant à  $E$ , vérifie  $a' < a$ ,  $a'$  est dans  $C$ ;

2° si  $b$  est dans  $D$  et si  $b'$ , appartenant à  $E$ , vérifie  $b' > b$ ,  $b'$  est dans  $D$ ;

3° si  $c$  et  $d$  sont dans  $I$  ( $c < d$ ) et si,  $h$  étant dans  $E$ , vérifie  $c < h < d$   $h$  est dans  $I$ .

Il n'est pas exclu que  $C$  et  $D$  soient identiques à  $E$ , mais par convention, il ne saurait en être ainsi de  $I$ , qui ne doit être ni commençante ni finissante.

Je réserve le nom de *segment* aux sections commençantes  $C$  formées des éléments antérieurs à un élément  $a$  de  $E$ , et j'écris  $C = S(a, E)$ .

2° Pour que ce rang ait une existence déterminée, il faut et il suffit que  $C(a, E)$  soit dissemblable à toutes ses sections commençantes.

Si cette dernière condition est satisfaite quel que soit  $a$ , je dis que l'ensemble  $E$  est rangé (*Enumération*, p. 120 — 134).

Les ensembles bien ordonnés sont rangés. Mais on définit aisément bien d'autres espèces d'ensembles rangés.

Par exemple (*Enumération*, p. 122 — 123),  $P$  étant un ensemble parfait linéaire totalement discontinu,  $u_1, u_2, \dots$  ses intervalles contigus énumérés, si sur le segment  $\bar{u}_n$  on place  $n$  points, l'ensemble total  $R_1$  ordonné dans le sens des abscisses croissantes est rangé.

Il est visible que deux sections de  $R_1$  ne sont pas applicables l'une sur l'autre à moins d'être identiques et appliquées identiquement.

On obtient comme il suit un second exemple d'ensemble rangé, mais non bien ordonné (*Enumération*, p. 122 — 133). ( $O$ ) désignant l'ensemble des nombres ordinaux de Cantor, ordonnés dans le sens de la croissance, soit  $\delta_{-n}$  un nombre transfini croissant avec la valeur absolue de son indice négatif entier ( $-n$ ),  $B_{-n}$  un ensemble bien ordonné semblable au segment  $S(\omega^{\delta_{-n}}, O)$  de  $\omega^{\delta_{-n}}$  dans ( $O$ ), et  $R_2$  l'ensemble  $\sum B_{-n}$ , la sommation étant ordonnée dans le sens des indices négatifs ( $-n$ ) croissants.  $R_2$  est rangé et non bien ordonné. Il reste rangé si on le fait précéder d'un nombre fini d'éléments ou même d'un ensemble semblable à la suite des entiers positifs. Il serait toujours non bien ordonné.

Enfin, M. Sierpiński a montré que tout ensemble ordonné peut être regardé comme un sous-ensemble d'un ensemble rangé.

Si un ensemble est rangé, toutes ses sections, commençantes, finissantes, moyennes sont elles aussi rangées. En conséquence, il n'est pas possible qu'un ensemble rangé  $E$  possède une section  $S$  composée de la réunion d'ensembles  $H_{-n}$  semblables entre eux et se succédant semblablement aux entiers négatifs croissants. Car  $S = \sum H_{-n}$  ( $n \geq 1$ ) est



semblable à sa propre section  $S_p = \sum H_{-n}$  ( $n \geq p$ );  $S$  n'est pas rangé.  $E$  ne l'est donc pas non plus.

Sans qu'un ensemble  $E$  soit rangé, certains de ses éléments pourraient être regardés comme ayant un rang déterminé dans l'ensemble. Il suffirait pour cela que la section  $C(a, E)$  ne fût semblable à aucune de ses sections commençantes.

Par exemple, sur l'intervalle  $i_n$  ( $1/(n+1), 1/n$ ) plaçons un ensemble  $R_1^n$  semblable géométriquement à  $R_1$ , ayant pour dérivé un ensemble  $P^n$  intérieur à  $i_n$  ( $n \geq 1$ ). Ajoutons le point 1 à  $\sum R_1^n$ . Pour l'ensemble  $E$  obtenu (ordonné dans le sens des abscisses croissantes), la seule section commençante  $C(a, E)$  dissemblable de toutes les autres correspond à  $a=1$ . En particulier  $S(1, E) = \sum R_1^n$  est non rangé. L'élément 1 de  $E$  peut être regardé comme ayant un rang déterminé dans  $E$ , et c'est le seul dans ce cas.

Certaines propriétés des ensembles bien ordonnés appartiennent à tous les ensembles rangés. Il est intéressant de les rechercher.

*Un ensemble rangé est dissemblable à toutes ses sections commençantes, mais il peut être semblable à certaines de ses sections finissantes.*

Un ensemble bien ordonné infini possède cette dernière propriété. Si l'on en retranche une section commençante finie quelconque, la section finissante restante est semblable à l'ensemble total.

Si l'ensemble est semblable à  $S(\omega^\alpha, O)$ ,  $\omega^\alpha$  est indécomposable quel que soit  $\alpha$  ordinal et toutes les sections finissantes de l'ensemble lui sont semblables.

Généralement,  $\iota$  étant un ordinal transfini, si  $\varrho$  est le plus grand et premier reste de  $\iota$ ,  $S(\iota, O)$  est un  $S(\omega^\alpha, O)$  suivi de  $\omega^\alpha, \omega^\alpha + 1, \dots$ , suite semblable à  $\varrho$ . Si nous désignons par  $D(a, E)$  la section finissante de l'ensemble  $E$ , section débutant par l'élément  $a$ , et si  $E$  est identique à  $S(\iota, O)$ ,  $D(\beta, E)$  sera ou non semblable à  $E$  selon que  $\beta < \omega^\alpha$  ou au contraire  $\beta \geq \omega^\alpha$ .

$\omega^\alpha$  est le plus grand nombre indécomposable inclus dans  $\lambda$ . Donc pour un ensemble bien ordonné infini, toutes ses sections finissantes (y compris l'ensemble lui-même) antérieures à l'une d'elles sont semblables à l'ensemble.

Au contraire un ensemble simplement rangé peut être dissemblable à toutes ses sections finissantes. C'est le cas de l'ensemble  $R_1$ .

*Théorème I.* — Un ensemble rangé est dissemblable à toutes ses sections non finissantes.

Il s'agit de démontrer le théorème pour les sections moyennes, puisque par définition un ensemble rangé est dissemblable à toutes ses sections commençantes.

Une section moyenne  $I$  est précédée par une section commençante  $C$  et suivie par une section finissante  $D$ .

Si l'ensemble rangé  $E$  était semblable à sa section moyenne  $I$ , l'application conforme  $A$  (conservant le sens des inégalités ordinales entre les éléments correspondants) de  $E$  sur  $I$  appliquerait  $D$  sur une section finissante  $D_1$  de  $I$ , et la section commençante  $C+I$  de  $E$ , complémentaire de  $D$ , sur une section commençante  $I_1$  de  $I$ ,  $I_1$  étant complémentaire de  $D_1$  par rapport à  $I$ ;  $D_1$  section finissante de  $C+I$ , s'appliquerait par  $A$  sur une section finissante  $D_2$  de  $I_1$ . En répétant le raisonnement, on mettrait en évidence dans  $I$  une section finissante formée d'une suite d'ensembles semblables à  $D$  et se succédant dans un ordre semblable à celui des entiers négatifs décroissants.

Donc,  $E$  présenterait une section moyenne non rangée.  $D$  ne serait pas rangé.

*Corollaire.* — Un ensemble rangé ne peut être décomposé en deux sections complémentaires semblables (l'une commençante, l'autre finissante) que d'une seule manière au plus.

Supposons au contraire que  $E$  rangé soit  $C_1+D_1$  et  $C_2+D_2$ ,  $C_1$  et  $C_2$  étant deux sections commençantes,  $D_1=E-C_1$  et  $D_2=E-C_2$  étant finissantes. Si  $C_1$  et  $C_2$  ne sont pas identiques, soit par exemple  $C_1 < C_2$ ;  $C_2-C_1=D_1-D_2$

$(D_1 \succ D_2)$  est une section moyenne  $J$  de  $E$ . Celui-ci est  $C_1 + J + D_2$ . Soit  $A_2$  l'application conforme de  $C_2$  sur  $D_2$ ;  $A_2$  applique  $C_1$  section commençante de  $C_2$ , sur  $K$  section commençante de  $D_2$ , et  $J$  section finissante de  $C_2$  sur  $H$ , section finissante de  $D_2$ ;  $D_2$  étant une section finissante de  $D_1$ ,  $K$  est une section moyenne de  $D_1 = J + K + H$ . Donc  $K$  n'est pas semblable à  $D_1$ , qui est rangé si  $E$  l'est. Donc  $D_1$  n'est pas semblable à  $C_1$ , contrairement à l'hypothèse.

Une somme bien ordonnée d'ensembles bien ordonnés est un ensemble bien ordonné. Examinons si *une somme rangée d'ensembles rangés est elle-même rangée?*

Le sens de la question posée est celui-ci: Soit  $\Phi$  un ensemble rangé, et  $a$  un élément variable de  $\Phi$ . Remplaçons  $a$  par un ensemble rangé  $E_a$ , et ordonnons  $E = \sum E_a$  alphabétiquement, c'est-à-dire dans l'ordre présenté dans  $\Phi$  par les deux indices  $a$  et  $b$  si les éléments comparés  $\gamma, \delta$  de  $E$  appartiennent  $\gamma$  à  $E_a$ ,  $\delta$  à  $E_b$ , dans l'ordre présenté par  $\gamma$  et  $\delta$  dans  $E_a$  si  $\gamma$  et  $\delta$  appartiennent tous deux à ce même ensemble  $E_a$ .

La proposition énoncée en toute généralité serait inexacte.

Tout d'abord *une famille rangée d'ensembles bien ordonnés n'est pas nécessairement rangée.*

En effet, soit  $\Phi$  identique (ou semblable) à  $R_1$ . Pour un point  $a$  de l'intervalle  $u_n$  contigu à l'ensemble parfait  $P$ , si  $a$  est l'un des  $(n-1)$  premiers éléments de  $R_1$  situés sur  $u_n$ , soit  $E_a$  fini et ordonné; si  $a$  est le  $n^e$  élément, soit  $E_a$  semblable à la suite des entiers positifs croissants.  $E$  est semblable à celle-ci sur tout segment  $u_n$ ;  $E$  n'est pas rangé.

*Si les  $E_a$  sont finis, l'énoncé devient-il exact? Nullement et en voici un exemple.*

Considérons l'ensemble  $G$  ainsi formé. Sur l'axe des  $x$ , soit  $P$  un ensemble parfait totalement discontinu d'extrémités  $a, b$ , d'intervalles contigus énumérés  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ . Sur l'intervalle  $\sigma$  ( $0 < \theta < 1$ ) de l'axe des  $\theta$ , soit  $e$  l'en-



semble des points  $\Theta_k^r = \frac{2r-1}{2^k}$  ( $r=1, 2, \dots, 2^{k-1}$ ). Établissons entre les points de  $e$  et les segments contigus  $u_n$  une correspondance conservant l'ordre géométrique. Les points de seconde espèce  $x$  de  $P$  correspondront aux points  $\Theta$  de  $\sigma - e$ <sup>3)</sup>.

Soit  $u_k^r$  le segment correspondant à  $\Theta_k^r$ . Sur  $u_k^r$  plaçons  $r$  points et soit  $G$  l'ensemble total obtenu.  $x$  étant un point de seconde espèce de  $P$ , soit  $C_x(G)$  la section commençante de  $G$  formée des éléments de  $G$  d'abscisse inférieure à  $x$ ;  $m$  étant un entier positif quelconque, soit  $\Theta' = \Theta/2^m$  et  $x'$  correspondant à  $\Theta'$  sur  $P$ ;  $C_{x'}(G)$  est semblable à  $C_x(G)$ . Car à deux points  $\Theta, \Theta/2$  de  $e$  correspondent deux contigus portant le même nombre  $r$  de points de  $G$ .  $G$  n'est pas rangé.

Réciproquement,  $x$  et  $x'$  étant deux points de seconde espèce de  $P$  ( $x > x'$ ) correspondant à deux points  $\Theta, \Theta'$  de  $\sigma - e$ , si les ensembles  $C_x(G), C_{x'}(G)$  sont semblables, je dis que  $\Theta = \Theta' \cdot 2^m$ ,  $m$  étant un entier positif.

Nous pouvons en effet distinguer dans  $C_x(G)$  une suite de groupes de  $r_p$  points portés par des segments  $u'_p$  contigus à  $P$  et cela par la règle suivante: les  $u_p$  étant tous à la gauche de  $x$ ,  $u'_1$  est le dernier contigu portant  $r_1 = 1$  point de  $G$ ;  $u'_2$  est entre  $u'_1$  et  $x$  le segment contigu portant le nombre minimum  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ) de points de  $G$ . Généralement  $u'_{p+1}$  est, entre  $u'_p$  et  $x$ , le segment contigu (évidemment unique) portant le nombre minimum  $r_{p+1}$  de points de  $G$ . La suite des entiers  $r_p$  est croissante.

Si  $u'_k$  correspond au point  $\Theta'_p$  de  $e$ , si  $\Theta'_p = (2r-1)/2^{k'_p}$ ,  $k'_p$  est le plus petit nombre  $k$  tel que le point  $\Theta_k^r = (2r-1)/2^k$  soit entre  $\Theta'_{p-1}$ , et  $\Theta$ , car  $r_p$  et  $k'_p$  varient dans le même sens.

<sup>3)</sup> Voir par exemple mes *Leçons sur le Calcul des coefficients des séries trigonométriques*, 2<sup>e</sup> partie, p. 94 (Gauthier-Villars, Paris, 1941).



Il est évident que la suite  $r_p$  doit être la même pour deux points  $x, x'$  donnant deux sections commençantes  $C_x(G), C_{x'}(G)$  semblables.

Soit

$$\Theta = 2^{-n_1} + 2^{-n_2} + \dots + 2^{-n_r} + \dots$$

On a évidemment  $k'_p = n_p$  et  $2r_p - 1 = 2^{n_p - n_1} + 2^{n_p - n_2} + \dots + 2^{n_p - n_{p-1}} + 1$ .

En conséquence les deux suites  $r_p$  et  $n_p - n_1$  se déterminent l'une l'autre. Pour que  $C_x(G)$  et  $C_{x'}(G)$  soient semblables, il est nécessaire que les suites  $n_p - n_1$ , et  $n'_p - n'_1$  correspondant respectivement à  $\Theta$  et à  $\Theta'$  soient identiques. Donc  $\Theta = \Theta' \cdot 2^{n_1 - n'_1}$

Cela posé, modifions  $G$  en  $G'$  de la façon suivante. Soit  $s$  une suite de points  $\Theta''_i$  de  $e$ , telle que  $\Theta''_i / \Theta''_{i+1}$  croisse indéfiniment. Deux suites infinies quelconques  $s', s''$  incluses dans  $s$  sont non homothétiques.

Soit  $u''_i$  la suite de contigus à  $P$  correspondant. à  $\Theta''_i$ . Sur tous les  $u_n$  nous ajoutons un point à  $G$  (ce qui ne change pas la condition de similitude des sections  $C_x, C_{x'}$ ) sauf sur les  $u''_i$  où nous réduisons uniformément  $G$  à un seul point. Je dis que l'ensemble obtenu  $G'$  est rangé.

Si  $G'$  n'est pas rangé, s'il existe une section commençante  $C(G')$  semblable à une de ses propres sections commençantes  $C'$ , tout nombre  $x$  de seconde espèce sur  $P$  et dépassé par au moins un point de  $C$ , définira une section  $C_x(G')$  semblable à une section  $C_{x'}(G')$  avec  $x' < x$ .

Les nombres  $2^{-m}$  ne sont pas tous dans  $s$ . Si  $2^{-n_1}$  est étranger à  $s$ , soit  $\Theta''_i$  le premier point de  $s$  supérieur à  $2^{-n_1}$ . On peut supposer le point de  $G'$  situé sur  $u''_i$  inclus dans  $C(G')$ . Soit  $\Theta$  un point de  $\sigma - e$  situé dans l'intervalle  $2^{-n_1}$  à  $\Theta''_i$ . Si  $\Theta$  a l'expression écrite plus haut, la partie de  $C_x(G')$  située entre l'intervalle  $u''_1$  et  $x$  est caractérisée par les mêmes suites  $r_1, r_2, \dots$ , ou  $n_p - n_1$ , que ci-dessus. Si

$C_{x'}(G')$  est semblable à  $C_x(G')$ ,  $x/x'$  sera donc une puissance de 2. Mais les intervalles  $u_j''$  devraient se correspondre dans les deux sections. Les points correspondants  $\theta_j''$  formeraient deux suites incluses dans  $s$  et homothétiques avec un rapport  $2^m$ . Cela est impossible. Donc  $G'$  est rangé.

Si maintenant on identifie l'ensemble  $\Phi$  avec  $G'$ , et si,  $a$  étant un élément de  $u_n \equiv u_k'$ , on prend  $E_a \equiv a$  si  $u_n$  est différent des  $u_j''$  et  $E_a$  formé de  $r + 1$  éléments quand  $\underline{a}$  est l'unique élément de  $G'$  situé sur  $u_n \equiv u_j''$ , on reconstitue l'ensemble  $G$  accru d'un élément et d'un seul dans chacun de ses segments contigus. L'ensemble  $E = \sum E_a$  est non rangé tandis que l'ensemble  $\Phi \equiv G'$  est rangé.

Ainsi, *une somme rangée d'ensembles finis n'est pas nécessairement rangée.*

Cette conclusion négative peut donner de l'intérêt à la proposition suivante.

*Théorème II. — En doublant chaque élément d'un ensemble rangé, on obtient encore un ensemble rangé.*

Doubler les éléments de l'ensemble ordonné  $E$  signifie pour nous: adjoindre à tout élément  $a$  de  $E$  un élément  $a + i$ , la somme  $E'$  de tous ces éléments étant ainsi ordonnée:  $1^0 a + i$  est le conséquent de  $a$  dans  $E'$ ;  $2^0$  si  $a < b$  dans  $E$   $a + i < b$  dans  $E'$ .

Montrons que, si  $E$  est rangé,  $E'$  l'est.

Sinon une section commençante  $S'_1$  de  $E'$  serait semblable à une autre section commençante  $S'_2$  de  $E'$ . Soit  $A'$  l'application conforme de  $S'_1$  et de  $S'_2$ . Je dis que tout élément  $c + i$  de  $S'_1$  s'applique sur un élément  $d + i$  de  $S'_2$ . En effet, si  $c$  a un précédent dans  $E$ , et si l'on considère le précédent de celui-ci, et ainsi de suite, la chaîne s'arrête à un élément  $c_1$  ou bien initial pour  $E$  ou bien limite du côté antérieur (de  $c_1$ ). Si  $c = c_k$ ,  $c + i$  est le  $(2k)^e$  terme de  $E'$  en commençant par  $c_1$ . Si  $A'$  applique  $c_1$  de  $S'_1$  sur  $d_1$  de  $S'_2$ ,  $A'$  applique  $c + i$  sur le  $(2k)^e$  terme de  $S'_2$ , à partir de  $d_1$ , savoir  $d_k + i$ .

Finalement, si  $S_1$  et  $S_2$  sont respectivement  $S'_1$  et  $S'_2$  débarrassés des éléments  $a + i$ ,  $A'$  applique  $S_1$  sur  $S_2$ . Donc  $S_1 \equiv S_2$  et par suite  $S'_1 \equiv S'_2$ ;  $E'$  est rangé.

Les raisonnements seraient les mêmes pour établir que l'on peut remplacer tout élément d'un ensemble rangé par un nombre fixe  $p$  d'éléments ordonnés; on obtient encore un ensemble rangé. On aurait la même conclusion en effectuant ces opérations seulement sur les éléments de  $E$  doués d'un précédent, ou seulement sur les éléments doués d'un conséquent, ou seulement sur les éléments limites d'un côté déterminé, ou seulement limites bilatéralement.

*Si les  $E_a$  étaient non seulement finis, mais bornés, serait-on assuré que l'ensemble  $E = \sum E_a$  serait rangé en même temps que l'ensemble  $\Phi$  des  $a$ ?*

Cela n'est pas vraisemblable. Reprenons les notations adoptées pour la définition de l'ensemble  $G$ . Si  $u_n$  correspond à  $\Theta_r = 2^{-n_1} + \dots + 2^{-n_p}$ , et si  $2^{2^k} \leq n < 2^{2^k+1}$ , plaçons sur  $u_n$  un élément ou deux selon que  $k + n_1 + \dots + n_p$  est impair ou pair. Il semble que l'ensemble obtenu soit rangé. Mais en ajoutant, soit un, soit deux éléments à ceux qui sont ou à celui qui est, sur  $u_n$ , le nouvel ensemble obtenu a trois éléments sur chacun des  $u_n$ . Il n'est donc pas rangé.

*Quand, les ensembles  $E_a$  étant tous rangés, l'ensemble  $\Phi$  est bien ordonné, ou quand  $\Phi$  étant rangé, tous les  $E_a$  sont semblables entre eux, (ce qui généralise le théorème II), alors, l'ensemble  $\sum E_a$  est lui aussi rangé.*

# THÉORIE D'IMMERSION D'UNE $W_m$ DANS $W_n$ <sup>1)</sup>

par

V. HLAVATÝ (Bloomington Ind.).

1) On sait bien que la connexion de M. WEYL est constituée par les coefficients <sup>2)</sup>

$$(1) \quad \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2}(\delta_{\lambda}^{\nu} Q_{\mu} + \delta_{\mu}^{\nu} Q_{\lambda} - Q_{\alpha} g^{\nu\alpha} g_{\lambda\mu}),$$

les symboles de Christoffel  $\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}$  se rattachant au tenseur  $g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$  du rang  $n$ , connu aux transformations

$$(2) \quad \bar{g}_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} f, \quad (f > 0 \text{ fonction arb. de position})$$

près, tandis que le vecteur  $Q_{\mu}$  subit la transformation

$$(3) \quad \bar{Q}_{\mu} = Q_{\mu} - \frac{\partial}{\partial \xi^{\mu}} \log f,$$

où, bien entendu,  $\xi^{\mu}$  désignent les coordonnées curvilignes de l'espace  $X_n$  en question. Cet espace, doué de la connexion (1) sera désigné par  $W_n$ .

Nous disons qu'un tenseur ( $T$ ) est du caractère  $k$  si, pendant la transformation (2), il change d'après

$$(\bar{T}) = (T) f^k.$$

Sa dérivée covariante  $\nabla_{\mu}(T)$  n'est pas en général du caractère  $k$ , mais la dérivée généralisée

$$(4) \quad \nabla_{\mu}^*(T) = \nabla_{\mu}(T) + k Q_{\mu}$$

est de nouveau un tenseur du caractère  $k$ . Ainsi, par exemple,  $g_{\lambda\mu}$  est un tenseur du caractère 1 et sa dérivée covariante généralisée

$$(5) \quad \nabla_{\mu}^* g_{\lambda\nu} = 0$$

l'est à son tour.

<sup>1)</sup> Compte rendu des conférences tenues à la Sorbonne pendant le semestre d'été en 1948. L'étude plus détaillée sera publiée plus tard.

<sup>2)</sup> Les indices grecs parcourent les  $n$  symboles I, II, III, ...

<sup>3)</sup> Les indices latins  $a, b, c, d, e, f$  prennent des valeurs 1, 2, ...,  $m$ .



2) Supposons  $n \geq 3$  et imaginons donné, dans  $W_n$ , un espace  $X_m$  à  $m$  dimensions, moyennant des équations paramétriques

$$(6) \quad \xi^v = \xi^v(\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^m), 1 \leq m \leq n-1.$$

Les vecteurs <sup>3)</sup>

$$(7) \quad T_a^v = \frac{\partial \xi^v}{\partial \eta^a}, T_{s \dots a}^v = \nabla_s T_{s-1 \dots a}^v \quad (\nabla_a = T_a^\lambda \nabla_\lambda)$$

(dont seulement  $T_a^v$  ne dépendent pas du choix des paramètres) définissent un espace linéaire — l'espace osculateur — adjoint au point  $P$  considéré et désigné par  $E_{m_s}$ , où  $s \leq N$  et  $N$  est le plus petit nombre entier qui jouit de la propriété suivante: Chaque vecteur  $T_{a \dots a}^v$  pour  $w > N$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $T_{a \dots a}^v$  ( $y = 1, \dots, N$ ). Bien entendu  $E_{m_s}$  et sa dimensionalité  $m_s$  sont des notions intrinsèques. Dans ce qui suit nous supposerons que  $E_{m_N}$  soit identique à l'espace linéaire tangent de  $W_n$  au point considéré  $P$ . Cela posé, nous pouvons trouver dans  $E_{m_x}$  ( $x = 2, 3, \dots, N$ ) l'ensemble de  $m_x - m_{x-1}$  vecteurs unité  $M_{a_x}^v$  <sup>4)</sup> qui sont mutuellement orthogonaux, du caractère  $-\frac{1}{2}$  et de plus normaux aux espaces  $E_{m_y}$  ( $y = 1, 2, \dots, N, x > y, E_{m_1}$  étant l'espace linéaire tangent de  $X_m$ ). L'espace linéaire  $N_{n_{x-1}}^{x-1}$ , contenu dans  $E_{m_x}$  et défini au moyen des vecteurs  $M_{a_x}^v$ , sera dit le  $(x-1)$ -ième espace normal de  $X_m$ . Cet espace ainsi que sa dimensionalité  $n_{x-1}$ , sont des notions intrinsèques. Pour simplifier la notation, nous écrirons souvent  $M_{a_1}^v$  au lieu de  $T_a^v$ .

4) Les indices  $a_x, b_x, c_x, d_x, e_x, f_x$  parcourent des valeurs  $m_{x-1} + 1, m_{x-1} + 2, \dots, m_x$ . (Ne pas confondre avec les indices  $a, b, \dots$  qui parcourent toujours des valeurs  $1, \dots, m$ ).

3) Désignons par  $A, B, C, D, E$ , les indices qui prennent les valeurs  $1, 2, 3, \dots, n$ . L'ensemble des fonctions

$$(8) \quad \Gamma_{Bc}^A = g^{AD} g_{\lambda\mu} M_D^\mu \nabla_c^* M_B^\lambda \quad (5)$$

constitue une connexion (par rapport aux transformations des paramètres  $\eta^a$  et par rapport aux transformations des vecteurs  $M_{a_x}^\nu$ ,  $x = 2, 3, \dots, N$ ). Cette connexion sera dite connexion de Frenet, ou  $F$ -connexion. Elle peut être décomposée en  $N$  connexions  $\Gamma_{b_y c}^{a_x}$  ( $y = 1, \dots, N$ ). En particulier l'ensemble des fonctions  $\Gamma_{b_1 c}^{a_1}$  constitue une connexion de M. Weyl dans  $X_m$ . C'est par cette raison que nous désignons notre  $X_m$  par  $W_m$ . Si l'on introduit le symbole  $F_c$  de la dérivée covariante par rapport aux connexions (1) et (8) et le symbole correspondant  $F_c^*$  (voir l'équation (4)) on trouve

$$(9) \quad F_c^* M_A^\nu = 0$$

et

$$(10) \quad F_c^* g_{AB} = 0.$$

Parmi les fonctions (8) il y en a qui sont des composantes tensorielles, à savoir  $\Gamma_{b_x c}^{a_{x+1}}$  et  $\Gamma_{b_{x+1} c}^{a_x}$ . Nous poserons

$$(11) \quad K_{b_x c}^{a_{x+1}} = \Gamma_{b_x c}^{a_{x+1}}, \quad K_{b_{x+1} c}^{a_x} = \Gamma_{b_{x+1} c}^{a_x}, \quad (x = 1, \dots, N-1)$$

de sorte que

$$(12) \quad K_{b_x c}^{a_{x+1}} = -K_{a_{x+1} c}^{b_x}, \quad (x = 1, 2, \dots, N-1).$$

Si  $(T)$  est un tenseur (aux indices grecs et latins),  $F_c^*(T)$  sa dérivée covariante, nous désignerons par  $D_c^*(T)$  le tenseur que l'on obtient en supprimant dans  $F_c^*(T)$  toutes les fonctions (11). Cela posé, nous obtenons de (9)

$$(13) \quad \boxed{F_c^* M_{a_x}^\nu = D_c^* M_{a_x}^\nu - K_{a_x c}^{b_{x+1}} M_{b_{x+1}}^\nu - K_{a_x c}^{b_{x-1}} M_{b_{x-1}}^\nu = 0}$$

$$x = 1, \dots, N, \quad K_{a_N c}^{b_{N+1}} = K_{a_c}^{b_0} = 0.$$

5)  $g^{AD}$  sont des composantes contrevariantes du tenseur  $g_{BC} = g_{\lambda\mu} M_B^\lambda M_C^\mu$ .

On a en particulier  $g_{a_x b_y} = g^{a_x b_y} = \delta_{a_x b_y}$  pour  $y, x = 1, 2, 3, \dots, N$ ;  $x+y \geq 3$ .

Ce sont les formules de Frenet pour une  $W_m$  dans  $W_n$ . Les tenseurs (12) qui y interviennent, sont dits les tenseurs des courbures de Frenet de la  $W_m$  en question. En particulier  $K_{a_x b}^{c_{x+1}}$  est dit le tenseur de la  $x$ -ième courbure de Frenet de  $W_m$ . On voit immédiatement que  $K_{ab}^{c_2} = K_{a_1 b}^{c_2}$  (resp.  $K_{a_x b}^{c_{x+1}}$ ,  $x=2, \dots, N-1$ ) est du caractère  $\frac{1}{2}$  (resp. du caractère 0)

$$(14) \quad \bar{K}_{ab}^{c_2} = K_{ab}^{c_2} f^{1/2}, \quad \bar{K}_{a_x b}^{c_{x+1}} = K_{a_x b}^{c_{x+1}} \\ x=2, \dots, N.$$

4) Si  $m=1$ ,  $W_1$  est forcément un espace linéaire et par conséquent on peut trouver un tel paramètre  $s$  pour lequel<sup>)</sup>

$$(15) \quad \Gamma_{11}^1 = 0,$$

à savoir

$$(16) \quad s = \int e^{\frac{1}{2} \int Q_\mu d\xi^\mu} \sqrt{g_{\omega\lambda} d\xi^\omega d\xi^\lambda}.$$

Ce paramètre, dit l'arc de  $W_1$ , est défini aux transformations

$$(17) \quad 's = c_1 s + c_2 \quad (c_1, c_2 \text{ constantes, } c_1 \neq 0)$$

près. En posant

$$(18) \quad K_{x1}^{x+1} = K_x, \quad \frac{\delta^*}{ds} = \frac{d\xi^\lambda}{ds} \nabla_\lambda^*$$

on obtient de (13)

$$(19) \quad \frac{\delta^*}{ds} M_x^\nu = -K_{x-1} M_{x-1}^\nu + K_x M_{x+1}^\nu \\ x=1, \dots, N, K_0 = K_N = 0.$$

Ce sont les formules de Frenet pour une courbe dans  $W_n$ .

5) Imaginons maintenant deux espaces  $W_m$  et  $'W_m$ , donnés moyennant des équations paramétriques

$$(20) \quad \xi^\nu = \varphi^\nu(\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^m), \quad \xi^\nu = \psi^\nu(\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^m)$$

et supposons qu'ils aient un point  $P$  en commun. Construisons une correspondance biunivoque entre  $W_m$  et  $'W_m$

$$(21) \quad \eta^a = Y^a(\eta), \quad \eta^a = 'Y^a(\eta)$$

et posons  $\psi^\nu('Y) = \varphi^\nu(\eta)$ . Si

<sup>)</sup> Si  $m=1$ , on a  $m_{x+1} = m_x + 1$  avec  $m = m_1$  et  $x=1, \dots, N-1$ .

$$(22) \quad \frac{\partial^s \varphi^y}{\partial \eta_1^a \dots \partial \eta_s^a} = \frac{\partial^s \varphi^y}{\partial \eta_1^a \dots \partial \eta_s^a} \text{ en } P, \quad (s=1, \dots, r),$$

nous disons que  $\mathcal{W}_m$  et  $'\mathcal{W}_m$  ont en  $P$  le contact *intérieur* d'ordre  $r$  (cette notion étant intrinsèque). Si  $\mathcal{W}_m$  et  $'\mathcal{W}_m$  ont en  $P$  le contact intérieur d'ordre  $r$  on a aussi

$$(23) \quad D_s \dots D_2 \frac{\partial \varphi^y}{\partial \eta_1^a} = 'D_s \dots 'D_2 \frac{\partial \varphi^y}{\partial \eta_1^a} \text{ en } P$$

$$s = 1, 2, \dots, r.$$

Si  $N = 'N$ , on déduit de (23) que la supposition

$$(24) \quad M_{a_i}^y = 'M_{a_i}^y \text{ ) en } P$$

ne restreint pas la généralité du problème. Cela étant on trouve en partant de (23) et (24)

$$(25) \quad \begin{aligned} & \text{a) } K_{a_{i-1}b}^{c_i} = 'K_{a_{i-1}b}^{c_i} \text{ en } P \\ & \text{b) } D_s^* \dots D_{i+1}^* K_{a_{i-1}b}^{s_i} = 'D_s^* \dots 'D_{i+1}^* 'K_{a_{i-1}b}^{c_i} \text{ en } P \\ & \quad s = 3, \dots, r; s \geq i + 1. \end{aligned}$$

Dans le cas métrique, ce résultat est bien connu pour  $m = 1$ .

6) Désignons par  $R_{\omega\mu\lambda}^y$ , resp.  $Q_{cbA}^D$ , resp.  $W_{cba_x}^{d_x}$  le tenseur de courbure de la connexion (1), resp. (8), resp.  $\Gamma_{b_x c}^{a_x}$ . En introduisant les tenseurs

$$(26) \quad \begin{aligned} K_{a_x b}^{d_y} &= \\ &= K_{a_x b}^{e_{x-1}} K_{e_{x-1} c}^{d_{x-2}} \delta_{x-2}^y + D_c^* K_{a_x b}^{d_{x-1}} \delta_{x-1}^y + \\ &+ (K_{a_x b}^{e_{x-1}} K_{e_{x-1} c}^{d_x} + K_{a_x b}^{e_{x+1}} K_{e_{x+1} c}^{d_x}) \delta_x^y \\ &+ D_c^* K_{a_x b}^{d_{x+1}} \delta_{x+1}^y + K_{a_x b}^{e_{x+1}} K_{e_{x+1} c}^{d_{x+2}} \delta_{x+2}^y \\ & \quad (x, y = 1, \dots, N) \end{aligned}$$

nous avons tout d'abord

$$(27) \quad Q_{cba_x}^{d_y} = \delta_x^y W_{cba_x}^{d_x} + 2 K_{a_x [cb]}^{d_y}, \quad (x, y = 1, \dots, N).$$

D'autre part on déduit sans difficulté les conditions d'inté-

7) Si  $r \leq N$ ,  $i$  parcourt des valeurs  $1, 2, \dots, r$ . Si  $r > N$ ,  $i$  parcourt des valeurs  $1, 2, \dots, N$ . La même remarque est valable pour les équations (25).



grabilité des équations (13) sous la forme

$$(28) \quad T_c^\omega T_b^\mu M_{a_x}^\lambda P_{\omega\mu\lambda}^\nu = \sum_1^N y Q_{cba_x}^{d_y} M_{d_y}^\nu, \quad x = 1, \dots, N,$$

où

$$(29) \quad P_{\omega\mu\lambda}^\nu = R_{\omega\mu\lambda}^\nu + (1 - \delta_{x1}) \nabla_{[\omega} Q_{\mu]} \delta_\lambda^\nu.$$

7) Les équations (26) — (28) ont beaucoup d'applications. On peut s'en servir par exemple en étudiant la possibilité d'immersion d'une  $W_m$  dans  $W_n$ . Nous nous contenterons de citer au titre d'exemple un résultat au moins: Choisissons un ensemble des vecteurs  $X_a^v$  linéairement indépendants, un autre ensemble des vecteurs  $X_u^v$  ( $u = m + 1, m + 2, \dots, m^*$ ) mutuellement orthogonaux et normaux aux vecteurs  $X_a^v$  et désignons par  $Z^v$  un vecteur qui jouit de la propriété suivante: Si  $m^* < n$ , le vecteur  $Z^v$  est normal aux vecteurs  $X_a^v, X_u^v$ ; si  $m^* = n$ , le vecteur  $Z^v$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $X_u^v$ . Cela posé, nous disons qu'un domaine  $D$  de  $W_n$  est général d'ordre ( $m^2, m^*, m^*$ ) si pour chaque choix des vecteurs  $X_a^v, X_u^v$  on peut trouver au moins un vecteur  $Z^v$  tel que

$$(30) \quad R_{\omega\mu\lambda\nu} X_a^\omega X_b^\mu X_u^\lambda Z^\nu \neq 0 \text{ en } D.$$

Cela étant, on peut se servir des équations (26) — (28) pour démontrer le théorème suivant: Si  $m^*$  est la dimension de l'espace osculateur  $\overset{p}{E}_{m_p}$  ( $p = 3, 4, \dots$ ) et si le domaine  $D$  de  $W_n$  qui contient notre  $W_m$  en question est général d'ordre ( $m^2, m^*, m^*$ ), la condition nécessaire et suffisante pour que soit  $N > p$  est: Il y a au moins un vecteur  $V_A$  ( $A = 1, \dots, n$ ) tel que

$$(31) \quad \sum_y K_{a_q [cb]}^{d_y} V_{d_y} \neq 0$$

où  $q$  prend une valeur au moins de  $p - 1$ ,  $p$ . Si au contraire  $N = p^8$ , on a nécessairement  $m^* = n$ .

8) Une autre application des conditions d'intégrabilité est livrée par l'étude des invariants du contact *extérieur*

<sup>8)</sup> Nous n'excluons pas ici à priori le cas où l'espace  $\overset{N}{E}_{m_N}$  n'est pas identique à l'espace tangent linéaire de  $W_n$ , ( $m_N < n$ ).

de deux  $W_m$ : Nous disons que deux espaces  $W_m$  et  $'W_m$  ont un contact *extérieur* d'ordre  $r$  au point commun  $P$  si en  $P$

$$(32) \quad \overset{P}{E} = 'E, \quad p = 1, 2, \dots, r, \quad N \leq r \leq 'N.$$

Dans ce cas on peut poser, sans restreindre la généralité

$$(33) \quad M_{ap}^v = 'M_{ap}^v \quad \text{en } P, \quad p = 1, 2, \dots, r.$$

Cela étant, introduisons des tenseurs  $Q$  en partant du tenseur  $Q_{cba_x}^{d_y}$ :

$$(34) \quad \begin{aligned} \text{a) } Q_{cba_x}^0{}^{d_y} &= Q_{cba_x}^{d_y}, \quad Q_{c_z b_t a_x}^0{}^{d_y} = M_{c_z}^w M_{b_t}^\mu M_{a_x}^\lambda M_y^{d_y} P_x^{\omega \mu \lambda}{}^v \\ \text{b) } Q_{s e_u \dots e_v c_z b_t a_x}^s{}^{d_y} &= M_{s e_u}^s \dots M_{a_x}^\lambda M_y^{d_y} \nabla_s^\varphi \dots \nabla_1^\varphi P_x^{\omega \mu \lambda}{}^v, \\ & \quad s = 1, 2, \dots; \quad u, \dots, v, z, t, x, y = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

On a en particulier

$$(35) \quad Q_{s e_u \dots e_v c_z b_t a_x}^s{}^{d_y} = F_e^* Q_{s-1 e_u \dots e_v c_z b_t a_x}^{s-1}{}^{d_y}, \quad Q_{e c b a_x}^1{}^{d_y} = F_e^* Q_{c b a_x}^0{}^{d_y} \\ s = 2, 3, \dots$$

Les formules (34) a) et (35) montrent clairement la dépendance des tenseurs  $Q$ ,  $s = 0, 1, \dots$  et du tenseur  $Q_{c b a_x}^{d_y}$ . Ces tenseurs interviennent au théorème suivant: Si  $W_m$  et  $'W_m$  ont en  $P$  le contact extérieur d'ordre  $r$  et si l'on pose (33) on a

$$(36) \quad \begin{aligned} \text{a) } Q_{c_z b_t a_x}^0{}^{d_y} &= 'Q_{c_z b_t a_x}^{d_y} \quad \text{en } P \\ \text{b) } Q_{s e_u \dots e_v c_z b_t a_x}^s{}^{d_y} &= 'Q_{s e_u \dots e_v c_z b_t a_x}^s{}^{d_y} \\ & \quad s = 1, 2, \dots; \quad u, \dots, v, x, y, z, t = 1, 2, \dots, r \end{aligned}$$

et en particulier

$$(37) \quad \begin{aligned} \text{a) } Q_{c b a_x}^0{}^{d_y} &= 'Q_{c b a_x}^{d_y} \quad \text{en } P \\ \text{b) } F_e^* Q_{s e_u \dots e_v c b a_x}^{s-1}{}^{d_y} &= 'F_e^* 'Q_{s e_u \dots e_v c b a_x}^{s-1}{}^{d_y} \\ & \quad s = 1, 2, \dots; \quad x, y = 1, 2, \dots, r. \end{aligned}$$

Par conséquent, les tenseurs  $\overset{s}{Q}$  peuvent être envisagés comme „invariants du contact extérieur“. Bien entendu, si l'espace ambiant est sans courbure, les tenseurs  $\overset{s}{Q}$  sont tous égaux à zéro. D'autre part, l'équation (37, a) est intimement liée aux équations fondamentales de Gauss, Coddazi et Kuehne.

9) Manifestement, les conditions d'intégrabilité (28) mènent aussi aux théorèmes d'existence. Nous n'en citerons qu'un seul: Les tenseurs  $K_{a_x b}^{c_{x+1}}$  satisfaisants aux équations (28) (et leurs dérivées) et les tenseurs  $g_{ab}$ ,  $Q_a$  définissent univoquement (à moins des conditions initiales) une  $W_m$  analytique dans  $W_n$ .

\*

10) Une  $W_m$  dans  $W_m$  peut être donnée moyennant des équations paramétriques

$$(38) \quad \eta^a = \eta^a(\zeta^1, \zeta^2, \dots, \zeta^m),$$

En substituant de (38) dans (6), on obtient les équations paramétriques de la  $W_m$  en jeu dans  $W_n$

$$(39) \quad \xi^y = \Phi^y(\zeta).$$

La théorie d'une  $W_m$  dans  $W_n$  est la même que celle d'une  $W_m$  dans  $W_n$ . C'est par cette raison que nous désignerons des éléments de cette théorie par des lettres allemandes, correspondantes aux lettres latines de la théorie d'une  $W_m$  dans  $W_n$ . Ainsi par exemple  $\mathfrak{R}_{a_x b}^{c_{x+1}^9}$  désigne le tenseur de la première courbure de Frenet de la  $W_m$  dans  $W_n$ ,

$\mathfrak{W}_{a_x}^y$  est un des vecteurs unité de son espace osculateur  $\mathfrak{E}_{m_z}^z$  etc. — La théorie d'une  $W_m$  dans  $W_m$  est analogue à celle d'une  $W_m$  dans  $W_n$ . Pour s'en servir, nous employons des

<sup>9)</sup> Les indices allemands  $a, b, c, d, e, f$  parcourent les symboles  $1, 2, \dots, m$ .

Nous nous servirons aussi des indices allemands  $a_z, b_z, c_z, d_z, e_z, f_z$  qui parcourent les symboles  $m_{z-1} + 1, m_{z-1} + 2, \dots, m_z$ , où  $m_z$  est la dimension de l'espace osculateur  $\mathfrak{E}_{m_z}^z$  de la  $W_m$  dans  $W_n$ . En particulier nous poserons aussi  $a_1 = a, b_1 = b$  et ainsi de suite.

lettres allemands *soulignées*: Ainsi par exemple  $\mathfrak{R}_{\underline{a}_x b}^{\varepsilon_{x+1}}$ <sup>10)</sup> désigne le tenseur de la première courbure de Frenet de la  $W_m$  dans  $W_m$ ,  $\underline{M}_{\underline{a}_z}^\nu$  est un des vecteurs de son espace osculateur  $\underline{E}_{m_z}$  et ainsi de suite. Remarquons encore que l'on a manifestement

$$(40) \quad \mathfrak{R}_a^\nu = \frac{\partial \Phi^\nu}{\partial \zeta^a}, \quad \mathfrak{R}_a^a = \underline{\mathfrak{R}}_a^a = \frac{\partial \eta^a}{\partial \zeta^a}, \quad \underline{\mathfrak{R}}_a^\nu = \mathfrak{R}_a^a T_a^\nu = \underline{\mathfrak{R}}_a^\nu, \quad \underline{M}_{\underline{a}_z}^\nu = \underline{M}_{\underline{a}_z}^a T_a^\nu.$$

11) Une des équations fondamentales de la théorie d'une  $W_m$  dans  $W_m$  et dans  $W_n$  est

$$(41) \quad \mathfrak{R}_{ab}^{\varepsilon_2} M_{c_2}^\nu = \underline{\mathfrak{R}}_{ab}^{\varepsilon_2} \underline{M}_{c_2}^\nu + \mathfrak{R}_a^a \mathfrak{R}_b^b K_{ab}^{\varepsilon_2} M_{c_2}^\nu.$$

Il s'ensuit immédiatement: Si  $\mathfrak{R} = 1$  on a

$$\mathfrak{R}_{ab}^{\varepsilon_2} M_{c_2}^\nu = \mathfrak{R}_a^a \mathfrak{R}_b^b K_{ab}^{\varepsilon_2} M_{c_2}^\nu,$$

et de plus, si  $\mathfrak{R} = 1$ , on a aussi  $\underline{\mathfrak{R}} = 1$ . En tenant compte de (41) et des équations qui en résultent par dérivation covariante, on peut étudier avant tout le contact de deux  $W_m$  dans  $W_m$  et  $W_n$ : Imaginons donnée une  $W_m$  et une  $'W_m$  dans  $W_m$  qui ont un point  $P$  en commun et pour lesquelles  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'$ ,  $\underline{\mathfrak{R}} = \underline{\mathfrak{R}}'$ . Si  $W_m$  et  $'W_m$  ont en  $P$  le  $r$ -ième espace osculateur en commun

$$(42) \quad \mathfrak{E}_{m_r}^r = \mathfrak{E}_{m_r}^r, \quad r < \mathfrak{R},$$

et si l'intersection de  $\mathfrak{E}$  et  $\underline{E}$  ne se réduit en  $P$  qu'à l'espace tangent commun:  $\mathfrak{E} = \underline{E}$  de  $W_m$  et  $'W_m$ , les deux variétés

a) ont en  $P$  le contact extérieur d'ordre  $r$  dans  $W_n$  de sorte que l'on peut introduire — sans restreindre la généralité — les relations analogues à (33). Cela étant on obtient

<sup>10)</sup> Nous écrirons simplement  $a, b, \dots$  au lieu de  $\underline{a}, \underline{b}, \dots$ . D'autre part les indices  $\underline{a}_z, \underline{b}_z, \underline{c}_z, \underline{d}_z, \underline{e}_z, \underline{f}_z$  parcourent les symboles  $\underline{m}_{z-1} + 1, \underline{m}_{z-1} + 2, \dots, \underline{m}_z$ , où  $\underline{m}_z$  est la dimension de l'espace osculateur  $\underline{E}_{m_z}$  de la  $W_m$  dans  $W_m$ .



$$(43) \quad \begin{aligned} & a) \mathfrak{R}_{a_{x-1}b}^{c_x} = \mathfrak{R}_{a_{x-1}b}^{c_x} \quad \text{en } P \\ & b) \mathfrak{D}_a^s \dots \mathfrak{D}_a^{x+1} \mathfrak{R}_{a_{x-1}b}^{c_x} = \mathfrak{D}_a^s \dots \mathfrak{D}_a^{x+1} \mathfrak{R}_{a_{x-1}b}^{c_x} \\ & \quad x = 2, 3, \dots, r; \quad s = 3, 4, \dots, r, \quad s \geq x + 1. \end{aligned}$$

b) D'autre part les deux variétés ont en  $P$  le contact extérieur d'ordre  $r$  (resp.  $\mathfrak{N}$ ) dans  $W_m$ , si  $r \leq \mathfrak{N}$  (resp.  $r > \mathfrak{N}$ ) et de plus on a

$$(44) \quad \begin{aligned} & a) \mathfrak{R}_{a_{i-1}b}^{c_i} = \mathfrak{R}_{a_{i-1}b}^{c_i} \quad \text{en } P \quad 11) \\ & b) \mathfrak{D}_a^s \dots \mathfrak{D}_a^{i+1} \mathfrak{R}_{a_{i-1}b}^{c_i} = \mathfrak{D}_a^s \dots \mathfrak{D}_a^{i+1} \mathfrak{R}_{a_{i-1}b}^{c_i} \\ & \quad s = 3, 4, \dots, r. \end{aligned}$$

12) Si  $m = n - 1$ , nous écrivons simplement  $M^v$ ,  $H_{ab}$  au lieu de  $M_n^v$  et  $K_{ab}^n$  et de plus, si  $m = m - 1$ , nous pouvons introduire les abréviations correspondantes en écrivant simplement  $\mathfrak{M}^a$ ,  $\mathfrak{M}^v$  et  $\mathfrak{S}_{ab}$  pour  $\mathfrak{M}_m^a$ ,  $\mathfrak{M}_m^a T_a^v$  et  $\mathfrak{R}_{ab}^m$ . D'autre part, toujours pour  $m = m - 1$ , nous poserons

$$\mathfrak{M}_2^v \equiv \mathfrak{M}_{m+1}^v, \quad \mathfrak{M}_3^v \equiv \mathfrak{M}_{m+2}^v, \quad \mathfrak{R}_{ab}^1 \equiv \mathfrak{R}_{ab}^{m+1}, \quad \mathfrak{R}_b^2 \equiv \mathfrak{R}_{m+1b}^{m+2}.$$

En suivant l'analogie d'une courbe sur une surface, nous introduirons le vecteur de la torsion géodésique

$$(45) \quad \mathfrak{L}_a = H_{ab} \mathfrak{L}_a^a \mathfrak{M}^b$$

qui satisfait à l'équation

$$(46) \quad \mathfrak{L}_a = \mathfrak{R}_a^2 + \omega_a,$$

où  $\omega$  est l'angle de  $M^v$  et  $\mathfrak{M}_2^v$  et  $\omega_a = \frac{\partial \omega}{\partial \xi^a}$ . D'autre part, on trouve

$$(47) \quad W_{ba} - Q_{ba} + H \mathfrak{R}_{ba}^1 \cos \omega = \mathfrak{L}_a \mathfrak{L}_b + \mathfrak{R}_a^1 \mathfrak{R}_{cb}^1 \cos^2 \omega,$$

où

$$W_{ba} = \mathfrak{L}_b^b \mathfrak{L}_a^a W_{cba}^c, \quad Q_{ba} = \mathfrak{L}_b^b \mathfrak{L}_a^a Q_{cba}^c, \quad H = H_a^a.$$

L'équation (47) généralise l'équation bien connue d'Enneper.

11) Si  $r \leq \mathfrak{N}$ ,  $i$  parcourt des valeurs  $1, 2, \dots, r$ . Si  $r > \mathfrak{N}$ ,  $i$  parcourt des valeurs  $2, 3, \dots, \mathfrak{N}, s \geq i + 1$ .

En effet, si  $W_m$  est asymptotique dans  $W_m$  (c'est-à-dire si  $\omega = \frac{\pi}{2}$  le long de la  $W_m$  en question), (47) se réduit à

$$(48) \quad W_{ba} - Q_{ba} = \mathfrak{L}_b \mathfrak{L}_a = \mathfrak{R}_b^2 \mathfrak{R}_a^2$$

et cette équation mène immédiatement (pour  $m=2$ ,  $m=1$ ,  $n=3$ ) au résultat bien connue d'Enneper. Quant au tenseur  $\mathfrak{R}_{ab}^1$  de la première courbure de Frenet d'une asymptotique  $W_{n-2}$  sur  $W_{n-1}$  dans  $W_n$ , il satisfait à l'équation suivante

$$(49) \quad 3 \mathfrak{R}_{ab}^1 = 2 \mathfrak{R}_{ab}.$$

Ici  $\mathfrak{R}_{ab}^1$  est le tenseur de la première courbure de la  $W_{n-2}$  qui est l'intersection de l'espace  $\mathbb{C}_{n-1}^2$  géodésiquement prolongé, avec  $W_{n-1}$ . L'équation (49) généralise le résultat bien connu de Beltrami sur la première courbure d'une asymptotique sur une surface.

# SUR L'ESTIMATION STATISTIQUE

par

MAURICE FRÉCHET (Paris)

Dans notre rapport sur „L'estimation statistique des paramètres“ en cours d'impression dans les Comptes Rendus de la Session de l'Institut International de Statistique (tenue à Washington en Septembre 1947) nous avons mis en évidence les divergences qui séparent partisans et adversaires de l'emploi (contesté) de la formule (incontestable) de Bayes-Laplace.\*)

Quand on peut employer celle-ci, on peut après l'observation d'un échantillon, former un intervalle où doit se trouver le paramètre, avec une probabilité déterminée, pour l'ensemble des observations ayant donné le même échantillon.

Dans l'interprétation des intervalles de confiance telle qu'elle est donnée par Neyman, le coefficient de confiance ne prend la signification d'une probabilité que quand il s'agit de toutes les observations qu'elles aient ou non donné un même échantillon.

Les deux probabilités ont un sens tout à fait différent et ne répondent pas au même problème — bien que comme l'a fait observé M. H. Cramer, on puisse répondre aussi au second problème au moyen de la formule de Bayes-Laplace, mais au prix d'une réduction de la précision obtenue, car on ne peut, partant du second problème répondre au premier.

Les adversaires de l'emploi de la formule de Bayes-Laplace objectent que la formule est illusoire, parce que la

---

\*) Nous répétons ici que, contrairement à Bayes, Laplace a donné, et en plusieurs endroits, la formule générale où figurent les probabilités a priori *non* supposées égales. Il a *ensuite* montré le parti qu'on pourrait en tirer quand elles sont égales.

loi de probabilité a priori est inconnue. A cela, les partisans de cet emploi répondent que, même lorsque cette loi n'est pas complètement connue, on a quelque renseignement sur elle, qui donne, à son tour, par l'emploi de la formule Bayes-Laplace, quelque renseignement sur la loi de probabilité a posteriori. Par exemple, plusieurs auteurs ont démontré que si la loi de probabilité a priori satisfait à quelques conditions assez simples, la loi de probabilité a posteriori relative à  $n$  observations devient à peu près indépendante de la loi a priori *quand ce nombre d'observations est assez grand*.

### Résumé.

Nous allons montrer qu'on peut obtenir un résultat de cette nature *sans supposer* que le nombre d'observations est grand. Nous nous limiterons, — pour être plus clair sur le principe, — au cas où le paramètre à déterminer est la probabilité inconnue  $P$  d'un événement aléatoire  $E$ . Il s'agira de déterminer un intervalle  $I$  où se trouve  $P$  avec une probabilité au moins égale à un nombre positif donné  $1-\varepsilon$ , cette probabilité de  $P$  étant calculée pour l'ensemble des échantillons de  $n$  épreuves où le nombre  $R$  de répétitions de  $E$  est égal à un nombre donné  $r$ . L'application directe de la formule donne un intervalle bien déterminé, si l'on suppose par exemple qu'il se limite à droite à 1, quand on connaît la loi de probabilité a priori  $P$ . Mais cet intervalle *dépend de cette loi*. Nous voulons montrer que si, à l'avance, on a des raisons de penser que  $P$  n'est ni voisine de zéro ni voisine de l'unité,\*) alors on peut former un intervalle  $I$  (encore relatif à  $1-\varepsilon$ ) qui est *indépendant de la loi de probabilité a priori* de  $P$  (pourvu que  $\varepsilon$  soit inférieur à un certain nombre  $\vartheta$  également indépendant de cette loi a priori). Et ceci étant vrai, même si  $n$  n'est pas grand, nous simplifierons l'exposé en commençant par le cas de  $n=1$ .

*Cas d'une épreuve.* — Considérons le cas où, dans une épreuve future, il y a une probabilité a priori  $F(p)$  pour

---

\*) Nous donnons ici une interprétation intuitive d'une condition plus précise qui sera donnée plus loin, dans le texte.



que, dans cette épreuve, la probabilité aléatoire  $P$  d'un évènement  $E$  soit inférieure à  $p$ . Alors, d'après la formule de Bayes-Laplace, la probabilité pour que  $P > \omega$  dans la catégorie des seules épreuves où  $E$  s'est produit est égale à

$$\frac{\int_{\omega}^1 p dF(p)}{\int_0^1 p dF(p)}.$$

Appelons „intervalle de sécurité“ pour  $P$  relatif à la „probabilité de sécurité“  $1-\varepsilon$ , un intervalle  $(\omega(\varepsilon), 1)$  tel que l'on ait  $\{ \text{Prob}[\omega(\varepsilon) \leq P \leq 1 \text{ quand } E \text{ s'est réalisé}] \} > 1-\varepsilon$  c'est à dire

$$\int_{\omega(\varepsilon)}^1 p dF(p) > (1-\varepsilon) \int_0^1 p dF(p)$$

ou

$$\varepsilon \int_0^1 p dF(p) > \int_0^{\omega(\varepsilon)} p dF(p).$$

Comme le second membre est toujours au plus égal à  $\omega(\varepsilon) \cdot F(\omega[\varepsilon])$ , on voit qu'on peut prendre  $\omega(\varepsilon) \leq \varepsilon$  si l'on a

$$(1) \quad \int_0^1 p dF(p) > F(\varepsilon).$$

En excluant le cas où il y a une probabilité a priori positive que  $P$  soit nul, c'est à dire en supposant que  $F(\varepsilon)$  tende vers zéro avec  $\varepsilon$ , on voit qu'il y a toujours une valeur  $\varepsilon_F$  telle que (1) soit vérifié pour  $\varepsilon \leq \varepsilon_F$ . On aurait donc un intervalle de sécurité  $(\varepsilon, 1)$  indépendant de  $F$ . Seulement cette valeur  $\varepsilon_F$  dépend de la probabilité a priori  $F(p)$  de  $P$ . De sorte que, l'on saura bien qu'il existe des valeurs de  $\varepsilon > 0$  pour lesquelles on peut prendre  $(\varepsilon, 1)$  comme intervalle de sécurité correspondant à la probabilité de sécurité  $1-\varepsilon$ , mais, si l'on ne sait rien sur  $F(p)$ , on ne

saura pas pour quelle valeur de  $\varepsilon$ , il en est ainsi. On peut tourner la difficulté de la façon suivante.

Supposons que pour au moins un nombre  $\vartheta > 0$  et une fonction de répartition  $F(p)$ , on puisse prendre pour intervalle de sécurité correspondant à la probabilité de sécurité  $1-\varepsilon$ , l'intervalle  $(\varepsilon, 1)$ , quelle que soit la valeur positive  $\varepsilon < \vartheta$ . Appelons maintenant  $\mathcal{F}_\vartheta$  la famille de telles fonctions  $F(p)$ . Alors, si sans connaître exactement la loi de probabilité a priori de  $P$ , on sait assez pour affirmer qu'elle appartient à  $\mathcal{F}_\vartheta$ , on peut aussi affirmer qu'il existe un nombre  $\vartheta$  indépendant de  $F(p)$  dans  $\mathcal{F}_\vartheta$  pour lequel l'intervalle  $\varepsilon \leq P \leq 1$  est un intervalle de sécurité relatif à la probabilité de sécurité  $1-\varepsilon$ , c'est à dire qu'on a pour  $\varepsilon \leq \vartheta$

(2)  $1-\varepsilon \leq \text{Prob}[\varepsilon \leq P \leq 1 \text{ quand } E \text{ s'est réalisé}]$ ,

ce qui se traduit par

$$(3) \quad \varepsilon \int_0^1 p dF(p) > \int_0^\varepsilon p dF(p), \text{ pour } \varepsilon \leq \vartheta.$$

Mais cette condition, que  $F$  appartienne à  $\mathcal{F}_\vartheta$ , n'a pas un sens intuitif simple. Nous allons donc, au prix d'une réduction éventuelle du champ de validité, chercher à préciser son sens intuitif.

Considérons un nombre  $\alpha$  entre 0 et 1 et une fonction de répartition  $G(p)$ , continue à l'origine. Nous appellerons famille  $\mathcal{G}$ , la famille des fonctions de répartition  $F(p)$  telles que  $F(p) \leq G(p)$  pour  $p \leq \alpha$ .

Je dis que la famille  $\mathcal{G}$  appartient à  $\mathcal{F}_\vartheta$  pour  $\vartheta$  convenablement choisi. En effet, on a, pour  $\varepsilon \leq \alpha$

$$\text{d'une part: } \int_0^\varepsilon p dF \leq \varepsilon F(\varepsilon) \leq \varepsilon G(\varepsilon),$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \int_0^1 p dF &> \int_\alpha^1 p d(F-1) = [p(F-1)]_\alpha^1 + \int_\alpha^1 (1-F) dp > \\ &> \alpha[1-F(\alpha)] > \alpha[1-G(\alpha)]. \end{aligned}$$

Donc (3) sera vérifié si l'on a

$$(4) \quad \alpha[1-G(\alpha)] > G(\varepsilon) \text{ avec } \alpha > \varepsilon.$$

$G(\varepsilon)$  tendant vers zéro avec  $\varepsilon$ , il existe un nombre positif  $\vartheta$  indépendant de  $F$  dans  $\mathcal{G}$  tel que les deux inégalités (4) soient vérifiées pour  $\varepsilon \leq \vartheta$ .

Or la condition  $F(p) \leq G(p)$  (où  $G(p) > 0$  avec  $p$ ) pour  $p \leq \alpha$ , réalisée par la famille  $\mathcal{G}$ , a un sens intuitif évident: la probabilité a priori pour que  $P$  soit petit doit être uniformément petite pour les lois de probabilité de la famille  $\mathcal{G}$ .

En résumé et pour dire les choses en gros, *toutes les fois que, sans connaître la loi de probabilité a priori de  $P$ , on est assuré qu'il est peu probable que  $P$  soit petit, on pourra prendre  $(\varepsilon, 1)$  pour l'intervalle de sécurité correspondant à la probabilité de sécurité  $1-\varepsilon$ .*

En appliquant ce résultat au cas où l'on remplace  $E$  par l'événement contraire, on voit que l'on pourra écrire

$$(5) \quad 1-\varepsilon \leq \text{Prob} [0 \leq P \leq 1-\varepsilon \text{ quand } E \text{ n'a pas lieu}]$$

toutes les fois que l'on peut affirmer qu'il est peu probable que  $P$  soit voisin de 1. Ou, plus précisément, soit  $H(p)$  une fonction de répartition continue pour  $p=1$  et  $\beta$  un nombre  $>0$  et  $<1$ , alors si  $\mathcal{H}$  est la famille des fonctions  $F(p)$  telles que  $F(p) > H(p)$  pour  $p > \beta$ , il existe un nombre  $\omega$ , indépendant de  $F$  dans  $\mathcal{H}$ , tel que l'on ait l'inégalité (5) pour  $\varepsilon < \omega$ , toutes les fois que la loi de probabilité de  $P$  appartient à  $\mathcal{H}$ .

*Cas de  $n$  épreuves.* On pourrait traiter directement de manière analogue le cas de  $n$  épreuves. On peut aussi le ramener au cas précédent en remplaçant  $P$  par la probabilité  $P_r = C_n^r P^r (1-P)^{n-r}$  qu'a un événement  $E$  de probabilité  $P$  (constante dans  $n$  épreuves) de se réaliser  $r$  fois dans  $n$  épreuves.  $P_r$  est donc la probabilité que se réalise l'événement  $E_r$ , exprimé par l'égalité  $R=r$  où  $R$  est le nombre de répétitions de  $E$  dans  $n$  épreuves. On a alors comme précédemment

$$(6) \quad 1-\varepsilon \leq \text{Prob} [\varepsilon \leq P_r \leq 1 \text{ quand } R=r]$$

pour  $\varepsilon < \vartheta_r$  ( $\vartheta_r$  étant un nombre indépendant de  $F$  dans  $\mathcal{G}_r$ ) lorsque la fonction de répartition  $F_r(x)$  de  $P_r$  ne sort pas de la famille  $\mathcal{G}_r$ , c'est à dire reste pour  $x \leq \alpha_r$ , au plus égale

à une fonction de répartition  $G_r(x)$  continue pour  $x=0$ ,  $\alpha_r$ , et  $G_r$  étant indépendant de  $F$  dans  $G_r$ .

Mais il vaut mieux interpréter cette condition au moyen de la fonction de répartition  $F(p)$  de  $P$ .

Observons d'abord que la fonction de  $p$ :  $C_n^r p^r (1-p)^{n-r}$  croit d'abord, atteint son maximum pour  $x=f=\frac{r}{n}$  décroît ensuite. Dès lors l'égalité

$$x = C_n^r p^r (1-p)^{n-r}$$

est impossible pour  $x > T_r$ , où

$$T_r = C_n^r f^r (1-f)^{n-r}$$

et pour  $x < T_r$ , a deux solutions en  $p$ :

$$p'_r(x), p''_r(x), \text{ avec } 0 \leq p'_r(x) < f < p''_r(x) \leq 1.$$

De sorte que

$$(7) \quad F_r(x) = \text{Prob}[P_r < x] = F(p'_r(x)) + 1 - F(p''_r(x)) *$$

et d'autre part l'inégalité

$$\varepsilon \leq P_r,$$

(qui est impossible si l'on prend  $\varepsilon > T_r$ ) est équivalente pour  $\varepsilon < T_r$  à:

$$p'_r(\varepsilon) \leq P \leq p''_r(\varepsilon).$$

De sorte que (6) est équivalent à

$$1 - \varepsilon \leq \text{Prob}[p'_r(\varepsilon) \leq P \leq p''_r(\varepsilon) \text{ quand } R=r] \text{ (pour } \varepsilon < \vartheta_r < T_r).$$

D'autre part, d'après (7), l'inégalité

$$F_r(x) \leq G_r(x) \text{ pour } x \leq \alpha_r$$

a pour conséquence

$$F(p'_r(x)) \leq G_r(x) \text{ et}$$

$$1 - F(p''_r(x)) \leq G_r(x) \text{ pour } x \leq \alpha_r$$

ou

$$F(p) \leq G_r(C_n^r p^r q^{n-r}) = g_r(p) \text{ pour } p \leq f$$

$$1 - F(p) \leq G_r(C_n^r p^r q^{n-r}) = 1 - h_r(p) \text{ pour } p > f$$

avec  $p \leq p'_r(\alpha_r) < f$  dans le premier cas

$p > p''_r(\alpha_r) > f$  dans le second cas

---

\*) Plus précisément, il faudrait ici remplacer  $F(p''_r(x))$  par  $F(p''_r(x)+0)$ .



d'où :

$$F(p) \leq g_r(p) \text{ pour } p \leq p'_r(\alpha_r) = \beta'_r < f \text{ et}$$

$$F(p) > h_r(p) \text{ pour } p > p''_r(\alpha_r) = \beta''_r > f$$

et les fonctions  $g_r(p)$ ,  $h_r(p)$  sont  $> 0$ , non décroissantes,  $\leq 1$  et tendent respectivement vers zéro et 1 quand  $p \rightarrow 0$  ou  $p \rightarrow 1$  (en supposant  $0 < r < n$ ).

En résumé, soient deux nombres  $> 0$ ,  $\beta'_r < f$ ,  $\beta''_r > f$  et  $g_r(p)$ ,  $h_r(p)$  deux fonctions de répartition, continues respectivement pour  $p=0$  et  $p=1$  et  $\mathcal{G}_r$  la famille des fonctions  $F(p)$  telles que

$$(8) \quad \begin{cases} F(p) \leq g_r(p) \text{ pour } p < \beta'_r < f \\ F(p) > h_r(p) \text{ pour } p > \beta''_r > f. \end{cases}$$

Si sans connaître exactement  $F(p)$ , on sait que  $F(p)$  appartient à  $\mathcal{G}_r$ , alors il existe un nombre  $\vartheta_r$  indépendant de  $F$  dans  $\mathcal{G}_r$  tel que

$$(9) \quad 1-\varepsilon \leq \text{Prob}[p'_r(\varepsilon) \leq P \leq p''_r(\varepsilon)] \text{ quand } R=r \text{ pour } \varepsilon < \vartheta_r.$$

On a bien un intervalle de sécurité  $p'_r(\varepsilon)$ ,  $p''_r(\varepsilon)$  qui est indépendant de la loi de probabilité a priori de  $F(p)$  dans  $\mathcal{G}_r$ .

Par exemple pour  $n=2$ ,  $r=1$ ,  $p'_1(x)$  et  $p''_1(x)$  sont les racines de

$$x = C_2^1 p q = 2p(1-p) \text{ ou } 2p^2 - 2p + x = 0$$

$$p'_1(x) = \frac{1 - \sqrt{1-2x}}{2} < f = \frac{1}{2} < \frac{1 + \sqrt{1-2x}}{2} = p''_1(x).$$

On a dans la famille  $\mathcal{G}_1$

$$1-\varepsilon \leq \text{Prob} \left[ \frac{1 - \sqrt{1-2\varepsilon}}{2} \leq P \leq \frac{1 + \sqrt{1-2\varepsilon}}{2} \text{ quand } R=1, n=2 \right]$$

pour  $\varepsilon < \vartheta_r$ .

Ces conditions (8) se traduisent encore intuitivement par l'hypothèse que, sans connaître exactement la loi de probabilité a priori  $F(p)$  de  $P$ , on sait assez sur cette loi pour affirmer que la probabilité a priori que  $P$  soit voisin de 0 ou 1 est uniformément petite pour toutes les lois de probabilité de  $P$  qu'on peut admettre comme possibles dans le cas considéré.

# SUR LA SYMÉTRIE DES NOMBRES DÉRIVÉS APPROXIMATIFS <sup>1)</sup>

par

VOJTĚCH JARNÍK (Praha).

Tous les ensembles dans cette Note sont des ensembles de nombres réels;  $\mu A$  signifie la mesure lebesgienne extérieure de  $A$ . Dans la suite,  $M$  va désigner un ensemble mesurable et  $f(x)$  une fonction réelle et finie, définie et mesurable sur  $M$ . Nous posons  $g(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  et nous désignons par  $E_x[V(x)]$  l'ensemble de tous les  $x$  jouissant de la propriété  $V(x)$ .

**Théorème 1.** *Soit*

$$N_+ = E_{x_0}(x_0 \in M, \lim_{x \rightarrow x_0+} \text{ap} |g(x, x_0)| = +\infty),$$

$$N_- = E_{x_0}(x_0 \in M, \lim_{x \rightarrow x_0-} \text{ap} |g(x, x_0)| = +\infty).$$

$$\text{Alors on a } \mu(N_+ - N_-) = \mu(N_- - N_+) = 0.$$

Ici, l'équation  $\lim_{x \rightarrow x_0+} \text{ap} |g(x, x_0)| = +\infty$  a la signification suivante: Il existe un ensemble  $A$  tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0+} h^{-1} \mu[E_x(x_0 < x < x_0 + h, x \text{ non } \in A)] = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0+ \\ x \in A}} |g(x, x_0)| = +\infty.$$

On a une définition analogue pour  $\lim_{x \rightarrow x_0-} \text{ap} |g(x, x_0)| = +\infty$ .

Le théorème 1 n'est pas „vide“, car on sait qu'il existe même des fonctions  $f$  continues pour lesquelles  $\mu N_+ > 0$ <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Cette petite Note a été rédigée pour les Fundamenta Math. et envoyée à S. Saks en été 1939, mais le manuscrit n'est pas probablement arrivé au lieu de destination, la guerre ayant éclaté immédiatement après.

<sup>2)</sup> Voir V. Jarník, *Sur les nombres dérivés approximatifs*, Fundam. Math. t. 22 (1934), 4 — 16.

$A$  étant un ensemble et  $x_0$  un nombre, posons

$$\Delta_+(A; x_0) = \limsup_{h \rightarrow 0+} h^{-1} \mu[E_x(x_0 < x < x_0 + h, x \in A)],$$

$$\Delta_-(A; x_0) = \limsup_{h \rightarrow 0+} h^{-1} \mu[E_x(x_0 - h < x < x_0, x \in A)].$$

Introduisons encore la notation suivante: Pour  $x_0 \in M$ ,  $-\infty \leq c \leq +\infty$  soit  $V_+(c; x_0, f)$  la borne inférieure de tous les  $\alpha \geq 0$  auxquels il n'existe aucun ensemble  $B \subset M$  tel que  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0+ \\ x \in B}} g(x, x_0) = c$ ,  $\Delta_+(B; x_0) > \alpha$ . On définit

$V_-(c; x_0, f)$  d'une manière symétrique en remplaçant  $\Delta_+, x_0 +$  par  $\Delta_-, x_0 -$ . On peut regarder  $V_+(c; x_0, f)$  comme un „poids“ du nombre  $c$  considéré comme un nombre dérivé de  $f$  au point  $x_0$  du côté droit;  $V_-$  a une signification analogue pour le côté gauche. Les nombres  $V_+, V_-$  sont  $\geq 0$  et  $\leq 1$ .

**Théorème 2.** *Il existe un ensemble  $P \subset M$  tel que  $\mu P = 0$  et que  $x_0 \in M - P$ ,  $-\infty \leq c \leq +\infty$  entraîne*  

$$V_+(c; x_0, f) = V_-(c; x_0, f).$$

Pour démontrer ces théorèmes on a besoin du lemme suivant:

**Lemme.** *Soient donnés sept nombres  $n, a, \beta, r, s, R, S$ , où  $n > 0$ ,  $R < r < s < S$ ,  $0 < \beta < a < 1$ . Soit*

$$(1) \quad Q = Q(n, a, \beta, r, s, R, S)$$

*l'ensemble de tous les points  $x_0 \in M$  jouissant des propriétés suivantes:*

$$(2) \quad \limsup_{h \rightarrow 0+} h^{-1} \mu[E_x(x_0 < x < x_0 + h, x \in M, r < g(x, x_0) < s)] > a,$$

$$(3) \quad h^{-1} \mu[E_x(x_0 - h < x < x_0, x \in M, R < g(x, x_0) < S)] < \beta \quad \text{pour } 0 < h < n^{-1}.$$

*Soit enfin*

$$(4) \quad T = \max\left(\frac{s-r}{S-r}, \frac{s-r}{s-R}\right) < a - \beta.$$

*Alors  $\mu Q = 0$ .*

Démonstration. Supposons que  $\mu Q > 0$  de sorte qu'il existe un point  $x_0 \in Q$  tel que

$$(5) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^{-1} \mu [E_x(x_0 < x < x_0 + \lambda, x \in Q)] = 1.$$

Choisissons un tel point  $x_0$  qui sera fixe dans la suite. Désignons par  $\varphi$  le premier membre de (2) et posons

$$(6) \quad \tau = \frac{1}{2}(\varphi - \alpha), \quad \varepsilon = \frac{1}{4}\varphi\tau,$$

de sorte que

$$(7) \quad \alpha < \varphi \leq 1, \quad 0 < \varepsilon < \tau, \quad \varphi - \varepsilon - \tau > \varphi - 2\tau = \alpha.$$

Selon (5) et selon la définition de  $\varphi$  il existe un  $\delta_1$  tel que  $0 < \delta_1 < n^{-1}$  et que  $0 < h < \delta_1$  entraîne

$$(8) \quad \mu [E_x(x_0 < x < x_0 + h, x \in M, r < g(x, x_0) < s)] < h(\varphi + \varepsilon),$$

$$(9) \quad \mu [E_x(x_0 < x < x_0 + h, x \in Q)] > h(1 - \varepsilon).$$

Selon la définition de  $\varphi$  il existe un nombre  $h_1$  ( $0 < h_1 < \delta_1$ ) tel que

$$(10) \quad \mu [E_x(x_0 < x < x_0 + h_1, x \in M, r < g(x, x_0) < s)] > h_1(\varphi - \varepsilon).$$

Selon (10), (8), (7) on a

$$(11) \quad \begin{aligned} & \mu [E_x(x_0 + h_1(1 - \tau) < x < x_0 + h_1, x \in M, r < g(x, x_0) < s)] > \\ & > h_1(\varphi - \varepsilon) - h_1(1 - \tau)(\varphi + \varepsilon) > h_1(\tau\varphi - 2\varepsilon) = 2\varepsilon h_1. \end{aligned}$$

L'ensemble  $Z$  de tous les points  $x$  de l'intervalle  $x_0 + h_1(1 - \tau) < x < x_0 + h_1$  qui n'appartiennent pas à l'ensemble  $E_x(x \in M, r < g(x, x_0) < s)$  est mesurable; (11) donne donc

$$(12) \quad \mu Z < (\tau - 2\varepsilon) h_1.$$

(9) donne

$$(13) \quad \begin{aligned} & \mu [E_x(x_0 + (1 - \tau)h_1 < x < x_0 + h_1, x \in Q)] > \\ & > h_1(1 - \varepsilon) - h_1(1 - \tau) = h_1(\tau - \varepsilon). \end{aligned}$$

Vu la définition de  $Z$ , (12) et (13) montrent qu'il existe un point  $x_1$  tel que

$$(14) \quad x_0 + (1 - \tau)h_1 < x_1 < x_0 + h_1, \quad x_1 \in Q, \quad r < g(x_1, x_0) < s.$$

Il s'ensuit (voir (14), (10), (7), (6))



$$(15) \left\{ \begin{array}{l} x_0 < x_1 < x_0 + n^{-1}, \\ \mu [E_x(x_0 < x < x_1, x \in M, r < g(x, x_0) < s)] \geq \\ \geq \mu [E_x(x_0 < x < x_0 + h_1, x \in M, r < g(x, x_0) < s)] - \tau h_1 > \\ > h_1(\varphi - \varepsilon) - h_1 \tau > h_1 a > a(x_1 - x_0). \end{array} \right.$$

On en déduit une contradiction comme il suit: Soit (voir (4))

$$(16) \quad x_0 < x < x_1 - T(x_1 - x_0), x \in M, r < g(x, x_0) < s.$$

Alors on a (voir (16), (14), (4))

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x) &= f(x_1) - f(x_0) - [f(x) - f(x_0)] < \\ < s(x_1 - x_0) - r(x - x_0) &= r(x_1 - x) + (s - r)(x_1 - x_0) < \\ < r(x_1 - x) + (s - r) \cdot T^{-1} \cdot (x_1 - x) &\leq S(x_1 - x), \\ f(x_1) - f(x) &> r(x_1 - x_0) - s(x - x_0) = \\ &= s(x_1 - x) - (s - r)(x_1 - x_0) > \\ &> s(x_1 - x) - (s - r) \cdot T^{-1}(x_1 - x) \geq R(x_1 - x). \end{aligned}$$

Chaque point  $x$ , satisfaisant à (16), est situé dans l'ensemble

$$E_x(x_1 - (x_1 - x_0) < x < x_1, x \in M, R < g(x, x_1) < S).$$

Mais  $x_1 \in Q$  d'après (14) et, d'autre part,  $0 < x_1 - x_0 < n^{-1}$ ; donc, d'après (3) (où l'on écrit  $x_1$  au lieu de  $x_0$ ) et (4),

$$\begin{aligned} \mu [E_x(x_0 < x < x_1, x \in M, r < g(x, x_0) < s)] &\leq \\ \leq \mu [E_x(x_1 - (x_1 - x_0) < x < x_1, x \in M, R < g(x, x_1) < S)] &+ \\ + \mu [E_x(x_1 - T(x_1 - x_0) \leq x < x_1)] &< \\ < \beta(x_1 - x_0) + T(x_1 - x_0) &< a(x_1 - x_0); \end{aligned}$$

mais ceci est en contradiction avec (15).

Démonstration du théorème 1. Soit  $x_0 \in N_- - N_+$ ; alors il existe un nombre rationnel  $s > 0$  tel que

$$\lambda = \limsup_{h \rightarrow 0+} h^{-1} \mu [E_x(x_0 < x < x_0 + h, x \in M, |g(x, x_0)| < s)] > 0.$$

Choisissons trois nombres rationnels  $\alpha, \beta, S$  de sorte que

$$0 < \beta < \alpha < \lambda \leq 1, S > s, \frac{2s}{S+s} < \alpha - \beta.$$

On a  $x_0 \in N_-$ , donc

$$\lim_{h \rightarrow 0+} h^{-1} \mu [E_x(x_0 - h < x < x_0, x \in M, |g(x, x_0)| < S)] = 0.$$

Donc, si  $n$  est un nombre naturel assez grand, on a

$$h^{-1} \mu [E_x(x_0 - h < x < x_0, x \in M, |g(x, x_0)| < S)] < \beta$$

pour  $0 < h < n^{-1}$ .

On a donc (voir (2), (3))  $x_0 \in Q(n, a, \beta, -s, s, -S, S)$ , et les conditions du lemme sont satisfaites si l'on pose  $r = -s$ ,  $R = -S$ . Donc, l'ensemble  $N_- - N_+$  est contenu dans la somme d'un système dénombrable d'ensembles de mesure zéro, donc  $\mu(N_- - N_+) = 0$  et, par raison de symétrie, aussi  $\mu(N_+ - N_-) = 0$ .

Démonstration du théorème 2. On sait que l'on a, pour presque tous les  $x \in M$ ,

$$(17) \quad V_+(+\infty; x, f) = V_- (+\infty; x, f) = \\ = V_+(-\infty; x, f) = V_-(-\infty; x, f),$$

la valeur commune étant 0 ou 1<sup>3)</sup>. Vu ce fait et par raison de symétrie il suffit de démontrer l'assertion suivante:

Soit  $M_1$  l'ensemble de tous les points  $x \in M$  auxquels il existe un nombre fini  $c$  de sorte que  $V_+(c; x, f) > V_-(c; x, f)$ ; alors  $\mu M_1 = 0$ .

Soit  $x_0 \in M_1$ ; alors il existe un nombre fini  $c$  et deux nombres rationnels  $a, \beta$  de sorte que

$$(18) \quad V_+(c; x_0, f) > a > \beta > V_-(c; x_0, f).$$

On a donc  $0 < \beta < a < 1$ . Il existe ensuite deux nombres rationnels  $R, S$ , où  $R < c < S$ , tels que

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} h^{-1} \mu [E_x(x_0 - h < x < x_0, x \in M, R < g(x, x_0) < S)] < \beta;$$

il existe donc un nombre naturel  $n$  tel que (3) est satisfait.

On peut choisir ensuite deux nombres rationnels  $r, s$  de sorte que  $R < r < c < s < S$  et que (4) soit satisfait. On tire de (18) que (2) soit satisfait, d'où  $x_0 \in Q(n, a, \beta, r, s, R, S)$ . L'ensemble  $M_1$  est donc contenu dans la somme d'un système dénombrable d'ensembles de mesure zéro, d'où  $\mu M_1 = 0$ .

<sup>3)</sup> En effet, soit  $P$  l'ensemble de tous les points  $x \in M$  pour lesquels au moins parmi les nombres (17) est  $< 1$ . Alors la dérivée approximative de  $f$  existe et est finie presque partout dans  $P$ . Voir A. Denjoy, *Mémoire sur la totalisation...*, Annales Ec. Norm. (3) 33 (1916), 127—222; voir surtout pp. 208—209.

# SUR LA NOTION DE LIMITE TOPOLOGIQUE D'ENSEMBLES

par

CASIMIR KURATOWSKI (Warszawa).

Etant donné un espace pourvu de la notion de limite d'une suite de points, on définit la convergence et la limite topologique d'une suite d'ensembles  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  de la façon suivante:

On définit d'abord les notions de *limite inférieure* ( $\text{Li } A_n$ ) et de *limite supérieure* ( $\text{Ls } A_n$ )<sup>1)</sup> en convenant que  $p \in \text{Li } A_n$  lorsqu'il existe une suite de points  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  telle que

$$(1) \quad p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \text{ et } p_n \in A_n \text{ (pour } n \text{ suffisamment grand),}$$

et que  $p \in \text{Ls } A_n$  lorsqu'il existe une suite d'entiers  $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$  et une suite de points  $p_{k_1}, p_{k_2}, \dots, p_{k_n}, \dots$  telles que

$$(2) \quad k_1 < k_2 < \dots, \quad p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{k_n} \text{ et } p_{k_n} \in A_{k_n}.$$

Lorsque les limites inférieures et supérieures sont identiques, la suite est dite *convergente* et la valeur commune de ces limites est nommée *limite topologique* de la suite  $\{A_n\}$ ; en symbole:

<sup>1)</sup> Les notions de limites inférieures et supérieures sont entendues dans cette note au sens *topologique*. Il ne faut pas les confondre avec les mêmes notions entendues au sens de la *théorie des ensembles*, que l'on définit par les formules

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{\infty} A_{n+k} \quad \text{et} \quad \prod_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{n+k}$$

respectivement.

Pour des renseignements bibliographiques concernant les limites topologiques, voir par exemple mon livre *Topologie I*, p. 152, Monogr. Matem. 3 (1933).

$$(3) \quad \lim_{n=\infty} A_n = \text{Li } A_n = \text{Ls } A_n.$$

La notion de limite topologique d'ensembles étant ainsi définie, la famille de tous les sous-ensembles fermés d'un espace donné  $X$  — famille que je désignerai  $(2^X)_L$  — peut être conçue comme *un espace pourvu de la notion de limite*<sup>2)</sup>.

Dans le cas particulier où  $X$  est un espace métrique compact, l'espace  $(2^X)_L$  peut être métrisé par la distance de Hausdorff et il devient alors compact<sup>3)</sup>. Son étude est ainsi un chapitre de la théorie des espaces compacts. C'est d'ailleurs le seul cas où l'espace  $(2^X)_L$  a été étudié d'une façon détaillée. Cependant, comme la définition de la limite topologique se laisse exprimer en termes de la limite de points (et sans avoir recours aux notions métriques), il paraît intéressant d'étudier les propriétés de la limite topologique et de l'espace  $(2^X)_L$  pour les espaces  $X$  ayant la limite pour terme primitif. Tels sont les espaces que j'appelle *espaces  $L^*$  topologiques* et qui — comme je me propose de montrer dans cette note — se prêtent surtout à l'étude de l'espace  $(2^X)_L$ .

1. *Espaces  $L^*$  topologiques.* Rappelons d'abord qu'un ensemble  $X$  est dit un *espace  $L^*$*  lorsqu'on a fait correspondre à certaines suites  $\{p_n\}$  de ses éléments un élément  $p = \lim_{n=\infty} p_n$  de façon que les conditions suivantes soient réalisées:<sup>4)</sup>

$$1^\circ \text{ si } \lim_{n=\infty} p_n = p \text{ et } k_1 < k_2 < \dots, \text{ on a } \lim_{n=\infty} p_{k_n} = p,$$

$$2^\circ \text{ si, pour tout } n, p_n = p, \text{ on a } \lim_{n=\infty} p_n = p,$$

$$3^\circ \text{ si toute suite partielle de la suite } \{p_n\} \text{ contient une suite partielle qui converge vers } p, \text{ on a } \lim_{n=\infty} p_n = p.$$

<sup>2)</sup> J'ajoute l'indice  $L$  pour distinguer le symbole  $(2^X)_L$  du symbole  $2^X$  employé pour désigner l'espace de tous les sous-ensembles fermés, bornés et non vides d'un espace métrique, métrisé par la distance de Hausdorff.

Voir F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, Chap. VIII, § 6, et mon livre cité, p. 89.

<sup>3)</sup> Voir F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin 1927, p. 150. Cf. T. Ważewski, *Fund. Math.* 4 (1923), p. 229.

<sup>4)</sup> Voir *Topologie I*, p. 76.



Désignons, comme d'habitude, par  $\bar{A}$  la fermeture de l'ensemble  $A$ , c.-à-d. l'ensemble composé de tous les points  $a$  de la forme  $a = \lim_{n=\infty} p_n$ , où  $p_n \in A$ . On constate facilement que

$$\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}, \quad \overline{(p)} = (p), \quad \bar{0} = 0.$$

Cependant, la condition

$$4^\circ \quad \overline{\bar{A}} = \bar{A},$$

que l'on postule dans les espaces nommés *topologiques*,<sup>5)</sup> n'est pas nécessairement vérifiée dans les espaces  $L^*$ . Tel est par exemple l'espace de toutes les fonctions réelles de variable réelle, la limite étant entendue dans le sens habituel du môt;  $A$  désignant l'ensemble des fonctions continues, on a  $\overline{\bar{A}} \neq \bar{A}$ . (Un autre exemple sera envisagé au N° 2).

Nous appellerons *espace  $L^*$  topologique* tout espace  $L^*$  satisfaisant à la condition 4°. Un grand nombre de propriétés des opérations Li, Ls et Lim, établies jusqu'ici pour les espaces métriques, restent valables pour les espaces  $L^*$  topologiques.<sup>6)</sup> Citons en celles qui interviendront dans la suite:<sup>7)</sup>

1.  $\overline{\text{Lim}_{n=\infty} A_n} = \text{Lim}_{n=\infty} \bar{A}_n$ .
2. Si  $A_n \equiv A$ , on a  $\text{Lim}_{n=\infty} A_n = \bar{A}$ .
3. Si  $k_1 < k_2 < \dots$ , on a  $\text{Li}_{n=\infty} A_n \subset \text{Li}_{n=\infty} A_{k_n}$  et  $\text{Ls}_{n=\infty} A_{k_n} \subset \text{Ls}_{n=\infty} A_n$ .
4.  $\text{Li}_{n=\infty} A_n = \prod_{n=\infty} \text{Ls}_{n=\infty} A_{k_n} \subset \sum_{n=\infty} \text{Li}_{n=\infty} A_{k_n} = \text{Ls}_{n=\infty} A_n$ ,

<sup>5)</sup> Voir p. ex. Alexandroff-Hopf, *Topologie I*, Berlin, Springer, 1935, p. 37.

<sup>6)</sup> Voir *Topologie I*, § 25 ou Hahn, *Reelle Funktionen I*, § 17 Leipzig 1932.

<sup>7)</sup> Toute propriété des opérateurs Li, Ls et Lim, établie pour les espaces  $L^*$  topologiques, appartient à ces opérateurs entendus au sens de la théorie des ensembles. Car tout ensemble (d'éléments arbitraires) peut être conçu comme espace  $L^*$  topologique, en considérant comme convergentes seules les suites dont tous les termes sont identiques à partir d'un indice suffisamment grand; les limites topologiques (inférieure et supérieure) coïncident alors avec les limites de la théorie des ensembles.

les opérateurs  $\Pi$  et  $\Sigma$  s'étendant sur toutes les suites  $\{k_n\}$  croissantes.

$$5. \text{Li } A_n \subset \text{Ls } A_n.$$

$$6. \text{Ls } (A_n + B_n) = \text{Ls } A_n + \text{Ls } B_n.$$

$$7. \text{Li } A_n + \text{Li } B_n \subset \text{Li } (A_n + B_n).$$

Les formules 6 et 7 impliquent aussitôt la suivante:

$$8. \text{Lim } (A_n + B_n) = \text{Lim } A_n + \text{Lim } B_n,$$

les suites  $\{A_n\}$  et  $\{B_n\}$  étant supposées convergentes.

$$9. \text{Si } A_n \subset B_n, \text{ on a } \text{Li } A_n \subset \text{Li } B_n \text{ et } \text{Ls } A_n \subset \text{Ls } B_n.$$

2. Espace  $(2^X)_L$ . Théorème 1.  $X$  étant un espace  $L^*$  topologique, la notion de limite topologique d'ensembles confère à l'espace  $(2^X)_L$  le caractère d'un espace  $L^*$ .

La limite topologique étant un ensemble fermé d'après 1, elle fait correspondre à toute suite convergente d'éléments de l'espace  $(2^X)_L$  un élément de cet espace.

La condition 1<sup>o</sup> est une conséquence directe de 3,5 et (3). La proposition 2 entraîne 2<sup>o</sup>.

Reste à établir 3<sup>o</sup>. Dans ce but, admettons qu'à toute suite d'indices  $k_1 < k_2 < \dots$  corresponde une suite  $m_1 < m_2 < \dots$  telle que

$$(4) \quad \text{Lim}_{n=\infty} A_{k_{m_n}} = A.$$

Il s'agit de montrer que  $A = \text{Lim}_{n=\infty} A_n$ , c.-à-d. que (cf. 5):

$$(5) \quad \text{Ls}_{n=\infty} A_n \subset A \subset \text{Li}_{n=\infty} A_n.$$

Soit  $p \in \text{Ls}_{n=\infty} A_n$ . Il existe donc, d'après 4, une suite  $k_1 < k_2 < \dots$  telle que  $p \in \text{Li}_{n=\infty} A_{k_n}$ . Soit  $m_1 < m_2 < \dots$  une suite satisfaisant

à la condition (4). Il vient donc en vertu de 3:

$$\text{Li}_{n=\infty} A_{k_n} \subset \text{Li}_{n=\infty} A_{k_{m_n}} = A$$

et par conséquent  $p \in A$ . Cela prouve que  $\text{Ls}_{n=\infty} A_n \subset A$ .

Soit, d'autre part,  $p \in A$ . Soient  $k_1 < k_2 < \dots$  une suite arbitraire croissante et  $m_1 < m_2 < \dots$  une suite correspondante assujettie à la condition (4). Il vient d'après (4), (3) et 3:

$$A = \lim_{n=\infty} A_{k_{m_n}} = \text{Ls } A_{k_{m_n}} \subset \text{Ls } A_{k_n}$$

et par conséquent  $p \in \text{Ls } A_{k_n}$ . Cela implique que  $p \in \text{Li } A_n$ , d'après 4.

La deuxième partie de la formule (5) se trouve ainsi établie, c. q. f. d.

*Remarques.* 1) Dans les espaces  $L^*$  non topologiques, c.-à-d. qui ne satisfont pas à la condition  $4^\circ$ , la limite topologique d'une suite convergente d'ensembles fermés n'est pas nécessairement un ensemble fermé.

Considérons, en effet, comme espace  $L^*$  l'ensemble des nombres ordinaux  $\xi \leq \omega^2$ , la limite  $\lim_{n=\infty} \xi_n$  étant définie comme suit:

Nous admettons comme condition nécessaire pour la convergence de la suite  $\{\xi_n\}$  sa convergence dans le sens de la théorie des nombres ordinaux; cette condition est aussi suffisante si la limite est inférieure à  $\omega^2$ . Cependant, nous n'admettons l'égalité  $\lim_{n=\infty} \xi_n = \omega^2$  que dans le cas où les termes de la suite  $\{\xi_n\}$  appartiennent pour  $n$  suffisamment grand à l'ensemble:  $(\omega, \omega \cdot 2, \dots, \omega \cdot m, \dots, \omega^2)$ .

Posons  $A_n = (n, \omega + n, \omega \cdot 2 + n, \dots)$ . Les ensembles  $A_n$  sont fermés (pour  $n > 1$ ) et constituent une suite convergente:

$\lim_{n=\infty} A_n = (\omega, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \dots)$ , tandis que  $\omega^2 \in \overline{\lim_{n=\infty} A_n}$ , ce qui prouve que l'ensemble  $\lim_{n=\infty} A_n$  n'est pas fermé.

2) Dans l'espace  $(2^X)_L$  la condition  $4^\circ$  peut être en défaut.

Tel est, en effet, le cas où  $X$  désigne l'espace des nombres rationnels<sup>8)</sup>.

*Théorème 2.*  $E$  étant un espace  $L^*$  topologique et  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles fermés et disjoints de cet espace, on a l'homéomorphie

<sup>8)</sup> Voir *Topologie I*, p. 157, remarque.

$$(6) \quad (2^{A+B})_L \underset{\text{top}}{=} (2^A)_L \times (2^B)_L,$$

la multiplication étant entendue dans le sens cartésien<sup>9)</sup>.

Nous établirons au préalable la formule suivante:

$$(7) \quad \text{Li}_{n=\infty} (A_n + B_n) \subset \text{Li}_{n=\infty} A_n + \text{Li}_{n=\infty} B_n + \text{Ls}_{n=\infty} A_n \cdot \text{Ls}_{n=\infty} B_n.$$

Soit  $p \in [\text{Li}_{n=\infty} (A_n + B_n) - \text{Ls}_{n=\infty} A_n \cdot \text{Ls}_{n=\infty} B_n]$ . Il s'agit de montrer que

$$(8) \quad p \in (\text{Li}_{n=\infty} A_n + \text{Li}_{n=\infty} B_n).$$

On peut admettre, par raison de symétrie, que  $p \text{ non-} \in \text{Ls}_{n=\infty} B_n$ . En posant  $p = \lim_{n=\infty} p_n$  et  $p_n \in (A_n + B_n)$ , on a donc  $p_n \text{ non-} \in B_n$  pour  $n$  suffisamment grand; par conséquent  $p_n \in A_n$  et finalement  $p \in \text{Li}_{n=\infty} A_n$  [cf. (1)].

La formule (8) et partant (7) se trouvent ainsi vérifiées.

Afin d'établir la formule (6), faisons correspondre à tout couple d'ensembles fermés  $X \subset A$  et  $Y \subset B$  leur somme  $F(X, Y) = X + Y$ .

$X + Y$  étant un sous-ensemble fermé de l'ensemble  $A + B$  et tout sous-ensemble fermé  $Z$  de  $A + B$  étant de la forme:  $Z = X + Y$  où  $X = ZA$  et  $Y = ZB$ , la fonction  $F$  établit une correspondance biunivoque entre les espaces  $(2^A)_L \times (2^B)_L$  et  $(2^{A+B})_L$ .

La continuité de la fonction  $F$  étant une conséquence directe de la formule 8, reste à démontrer que la fonction  $F$  est bicontinue, c.-à-d. que la formule

$$(9) \quad \text{Lim}_{n=\infty} (X_n + Y_n) = X + Y, \text{ où } X_n, X \subset A \text{ et } Y_n, Y \subset B,$$

entraîne

<sup>9)</sup> Le produit cartésien  $X \times Y$  se compose de tous les points  $z = (x, y)$  où  $x \in X$  et  $y \in Y$ , la notion de limite étant définie par l'équivalence:

$$(z = \lim_{n=\infty} z_n) \equiv (x = \lim_{n=\infty} x_n \text{ et } y = \lim_{n=\infty} y_n).$$

Il est à remarquer qu'une formule analogue à (6) est vérifiée aussi par l'espace fonctionnel  $Y^X$ . Cf. ma note *Sur la topologie des espaces fonctionnels*, Ann. Soc. Pol. Mat. 20 (1948), p. 315.



$$(10) \quad \lim_{n=\infty} X_n = X \text{ et } \lim_{n=\infty} Y_n = Y,$$

ou encore: que

$$(11) \quad \text{Ls}_{n=\infty} X_n \subset X \subset \text{Li}_{n=\infty} X_n \text{ et } \text{Ls}_{n=\infty} Y_n \subset Y \subset \text{Li}_{n=\infty} Y_n.$$

Il vient d'après 6, (3) et (9):

$$\text{Ls}_{n=\infty} X_n + \text{Ls}_{n=\infty} Y_n = \text{Ls}_{n=\infty} (X_n + Y_n) = \lim_{n=\infty} (X_n + Y_n) = X + Y,$$

d'où

$$(12) \quad \text{Ls}_{n=\infty} X_n \subset X + Y = XA + YB.$$

Comme  $X_n \subset A$ , on a  $\text{Ls}_{n=\infty} X_n \subset A$  (cf. 9) et comme  $AB=0$  (par hypothèse), la formule (12) entraîne  $\text{Ls}_{n=\infty} X_n \subset XA \subset X$ . De façon analogue,  $\text{Ls}_{n=\infty} Y_n \subset Y$ .

Les premières parties des doubles inclusions (11) se trouvent ainsi établies. Elles impliquent que

$$(13) \quad \text{Ls}_{n=\infty} X_n \cdot \text{Ls}_{n=\infty} Y_n = 0,$$

puisque  $X \subset A$ ,  $Y \subset B$  et  $AB=0$ .

Rapprochée de 7 et (7), la formule (13) donne l'égalité

$$\text{Li}_{n=\infty} X_n + \text{Li}_{n=\infty} Y_n = \text{Li}_{n=\infty} (X_n + Y_n)$$

et celle-ci implique d'après (3) et (9):

$$\text{Li}_{n=\infty} X_n + \text{Li}_{n=\infty} Y_n = X + Y, \text{ d'où } X \subset A \cdot \text{Li}_{n=\infty} X_n + B \cdot \text{Li}_{n=\infty} Y_n$$

et finalement  $X \subset \text{Li}_{n=\infty} X_n$ , puisque  $XB=0$ . De façon analogue,  $Y \subset \text{Li}_{n=\infty} Y_n$ .

Les formules (11) se trouvent ainsi démontrées complètement.

# ESPACE POURVU D'UNE MÉTRIQUE DÉFINIE AU MOYEN DE L'ÉCART TRIANGULAIRE ET LES ESPACES MÉTRIQUES GÉNÉRALISÉS

par

ST. GOŁĄB (Kraków)

Le problème de l'existence des arcs géodésiques dans les espaces métriques (au sens de M. Fréchet<sup>1)</sup>) et les espaces plus généraux (p. ex. au sens de Cohn-Vossen<sup>2)</sup> ou „presque métriques” au sens de M. Menger<sup>3)</sup>) a pu être abordé grâce au fait que dans ces espaces la fonction-écart  $\varrho(p, q)$  de deux points  $p, q$  satisfait à la condition:

$$\varrho(p, q) = 0 \equiv p = q. \quad (1)$$

Cette propriété de la distance de deux points permet d'introduire la notion d'arc simple et la notion de la norme<sup>4)</sup> d'un polygone orienté. Il en résulte, par conséquent, la notion de la longueur d'un arc.

Par contre, pour les espaces généraux, dans lesquels la distance  $\varrho(p, q)$  ne remplit pas la condition (1), il est a priori impossible d'introduire une notion rationnelle de voisinage d'un point et de rendre l'espace topologique. Il faut souligner que les espaces dans lesquels la condition (1) n'est pas satisfaite, interviennent dans diverses applications. L'existence des espaces possédant les courbes isotropes est la raison pour laquelle nous considérons les espaces ne remplissant pas la condition (1). D'autre part le calcul classique des

---

<sup>1)</sup> M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel. Rend. d. Circ. Matem. di Palermo 22 (1906), 1—74.

<sup>2)</sup> S. Cohn-Vossen, Existenz kürzester Wege. C. R. Acad. Sc. URSS 3 (1935), 339—342.

<sup>3)</sup> K. Menger, Metrische Geometrie und Variationsrechnung. Fund. Math. 25 (1935), 441—458.

<sup>4)</sup> Quant à la définition de la „norme” voir le travail de M. Menger cité plus haut.

variations a fourni une série de problèmes (p. ex. le problème de Newton de la surface de revolution réalisant la plus petite resistance dans le mouvement rectiligne dans le sens de l'axe de revolution ou bien le problème de Bonnet de la détermination par deux points d'une courbe ayant le plus petit moment d'inertie par rapport à un troisième point donné) qui conduisent à une fonction qui a des singularités sous le signe d'intégrale ce qui conduit aux espaces métriques ne remplissant pas la condition (1). Il s'ensuit qu'il est tout naturel de s'occuper de espaces de cette sorte.

Il arrive souvent, que la métrique d'un espace, qui ne satisfait pas à la condition (1), est une métrique „distordue“ c'est à dire possédant par sa nature même un „support“ qui est un espace topologique. Dans ce cas on peut considérer dans ces espaces les arcs, définir la longueur des ces arcs (au sens de la métrique distordue) et traiter les problèmes relatifs à l'existence des arcs géodésiques.

Le sujet de ma note se rapporte à un exemple de l'espace à deux dimensions, dans lequel la métrique est définie à l'aide de l'écart triangulaire introduit par M. F. Leja<sup>5)</sup>. En liaison avec ce problème je démontre un théorème sur l'existence des arcs géodésiques isotropes sous conditions assez générales.

§ 1. Un espace est appelé espace métrique si à tout couple de points  $p, q$  correspond d'une façon univoque une fonction  $\varrho(p, q)$  (dite „écart“ ou „distance“) satisfaisant aux conditions suivantes;

$$\left. \begin{array}{l}
 1) \quad \varrho(p, q) > 0 \quad \text{si } p \neq q \\
 2) \quad \varrho(p, q) = 0 \quad \text{si } p = q \\
 3) \quad \varrho(p, q) = \varrho(q, p) \quad \text{pour tous les } p, q \\
 4) \quad \varrho(p, q) + \varrho(q, r) \geq \varrho(p, r) \quad \text{pour tous les } p, q, r
 \end{array} \right\} \quad (2)$$

<sup>5)</sup> F. Leja, Sur une constante liée à chaque ensemble plan fermé et sur son application. C. R. Ac. Sc. Paris 197 (1933), 21—22. La notion d'écart d'un ensemble introduite dans ce travail à l'aide de la „distance triangulaire“ joue un rôle important dans la recherche du domaine de convergence absolue des séries à deux variables.

Dans le cas où nous rejetons le postulat (4) (dit *postulat de triangle*), l'espace est dit *semimétrique*<sup>6)</sup>.

La notion du point „intermédiaire“ entre deux points qui figure dans des nombreuses géométries comme notion primitive, a été défini par M. Menger<sup>7)</sup> pour les espaces métriques au moyen de la condition:

$$\left. \begin{array}{l} q \text{ est intermédiaire entre } p \text{ et } r \text{ signifie:} \\ \varrho(p, q) + \varrho(q, r) = \varrho(p, r). \end{array} \right\} (3)$$

On en profite, en particulier, pour définir les arcs géodésiques.

L'espace est dite convexe, si pour chaque couple de points  $p, r$  il existe un point  $q$ , différent de  $p$  et de  $r$ , intermédiaire entre  $p$  et  $r$ .

M. Menger a introduit<sup>8)</sup> une généralisation des espaces métriques auxquels il a donné le nom d'espaces *presque métriques*. Pour ces espaces la fonction non négative  $\varrho(p, q)$  remplit les conditions suivantes:

- 1)  $\varrho(p, p) = 0$  pour tous les  $p$
- 2) A chaque nombre  $\varepsilon > 0$  correspond un  $\delta > 0$  tel que  $\varrho(p, q) < \delta$  implique  $\varrho(q, p) < \varepsilon$  pour tous les  $p, q$ .
- 3) Il existe une fonction  $\Delta(x)$  définie et continue pour les  $x > 0$  ayant les propriétés suivantes:
 
$$\Delta(0) = 0 \quad , \quad \Delta(x) > 0$$

$$\varrho(p, r) \leq \varrho(p, q) + \varrho(q, r) + \text{Min} [\varrho(p, q), \varrho(q, r)].$$

$$\Delta \{ \text{Max} [\varrho(p, q), \varrho(q, r)] \}$$
 pour tous les  $p, q, r$ .

Il est vrai que M. Menger ne suppose pas explicitement l'inégalité:

$$\varrho(p, q) > 0 \quad \text{pour } p \neq q, \quad (5)$$

il résulte cependant de ses raisonnements ultérieurs qu'il fait cette hypothèse implicitement, puisque sans elle il lui

<sup>6)</sup> W. A. Wilson, On semimetric spaces. Amer Journ. of Mathem. 53 (1931), 361—373.

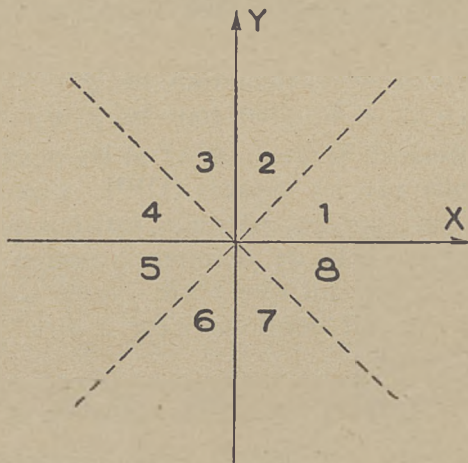
<sup>7)</sup> K. Menger, Untersuchungen über allgemeine Metrik. Mathem. Ann. 100 (1928), 75 — 163.

<sup>8)</sup> l. c.<sup>3)</sup>.



serait impossible de définir la norme d'une suite de points ainsi que la longueur d'un arc simple. L'inégalité (5) n'est pas la conséquence des postulats (4); on peut donner l'exemple d'un espace remplissant les postulats 2), 3), 4) de M. Fréchet et qui ne satisfait pas au postulat 1). Nous donnons plus bas un exemple très simple d'un tel espace à une dimension.

§ 2. Exemple. Envisageons tout d'abord un système de repère cartésien sur une droite et soit  $x$  la coordonnée d'un point mobile. A côté de la métrique primitive euclidienne  $\varrho(x,y) = |x-y|$ , nous introduirons une métrique nouvelle distordue  $\varrho^*(x,y)$ , définie comme suit. Envisageons le plan euclidien auxiliaire rapporté à un système cartésien d'axes  $(x,y)$  et traçons les bissectrices des angles entre les axes des coordonnées. Les axes et les bissectrices divisent le plan en 8 régions numérotées comme le montre la figure suivante:



Nous posons ensuite

$$\varrho^*(x,y) = \varepsilon x + \eta y \tag{6}$$

où  $\varepsilon^2 = \eta^2 = 1$  et où les signes  $\varepsilon, \eta$  sont définis comme suit

$$\varepsilon = \left\{ \begin{array}{ll} + 1 & \text{dans les regions } 1, 3, 6, 8 \\ - 1 & \text{,, ,, ,, } 2, 4, 5, 7 \end{array} \right. \tag{7}$$

$$\eta = \left\{ \begin{array}{ll} + 1 & \text{,, ,, ,, } 2, 3, 5, 8 \\ - 1 & \text{,, ,, ,, } 1, 4, 6, 7 \end{array} \right.$$

Nous omettons le calcul facile qui montre que l'on a

$$\varrho^*(x, -x) = \varrho^*(-x, x) = 0 \quad \text{pour tous les } x \quad (8)$$

et que la métrique ainsi définie satisfait à tous les postulats de M. Fréchet à l'exception du postulat 1). Il est intéressant de noter qu'en appliquant à la métrique  $\varrho^*$  le procédé intégrale de Burkill pour trouver la longueur de l'intervalle (on peut prendre pour norme la distance définie au moyen de la métrique primitive) nous obtenons pour la longueur de l'intervalle la longueur euclidienne, c'est à dire  $|x-y|$ . En utilisant, par contre, la norme basée sur la métrique  $\varrho^*$ , on obtient pour certains segments ( $x, y < 0$ ) la longueur-inférieure différente de la longueur-supérieure<sup>9)</sup>.

§ 3. Soit un espace rendu topologique au moyen d'une métrique remplissant les postulats de Fréchet ou de Cohn-Vossen. Soit une autre métrique  $\varrho$ , définie dans cet espace et ne remplissant pour le moment que les deux conditions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho(p, p) = 0 \quad \text{pour tous les } p \\ \varrho(p, q) > 0 \quad \text{pour tous les } p, q. \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho(p, p) = 0 \quad \text{pour tous les } p \\ \varrho(p, q) > 0 \quad \text{pour tous les } p, q. \end{array} \right. \quad (10)$$

Nous n'admettons ni le postulat 1) ni les postulats 3) et 4) qui sont remplis par les espaces (D)<sup>10)</sup>. Comme notre espace possède un support métrique satisfaisant à la condition (5), il est possible de définir la notion d'arc simple.

Supposons maintenant que notre espace soit convexe et que la métrique  $\varrho$  soit continue, c'est à dire qu'il subsiste la relation suivante:

$$p_n \rightarrow p \text{ et } q_n \rightarrow q \supset \varrho(p_n, q_n) \rightarrow \varrho(p, q), \quad (11)$$

où la relation  $p_n \rightarrow p$  est définie, bien entendu, au moyen de la métrique primitive.

<sup>9)</sup> Pour la définition de la longueur-supérieure et de la longueur-inférieure d'une courbe voir le travail de M. Menger, *Über die  $\Phi$ -Metrik und  $\Phi$ -Bogenlänge*. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums (Wien), Heft 7 (1936), 13—14 ou bien l'ouvrage de M. L. M. Blumenthal, *Distance Geometries*. The University of Missouri Studies. Vol 13 (1938), p. 90.

<sup>10)</sup> Les espaces métriques de Fréchet désignés auparavant par (E) ont été désignés plus tard par la lettre (D).

Nous allons introduire maintenant la notion  $I(p, q)$ :  
 $I(p, q)$  = l'ensemble de tous les points  $x$  jouissant de la propriété;

$$\varrho(p, x) + \varrho(x, q) \leq \varrho(p, q). \quad (12)$$

Dans le cas où la métrique remplit le postulat de triangle, l'ensemble  $I(p, q)$  est identique à l'ensemble de tous les points intermédiaires entre  $p$  et  $q$  complété par les points  $p, q$ . L'ensemble  $I(p, q)$  est en général plus vaste.

L'ensemble  $I(p, q)$  n'est pas vide, puisqu'il contient les points  $p$  et  $q$ . Dans le cas  $q = p$  l'ensemble  $I(p, p)$  n'est pas nécessairement identique à  $p$  car la propriété (5) n'est pas supposée.

*Théorème.* Si l'ensemble

$$\prod_{(p, q)} I(p, q) \quad (13)$$

n'est pas vide, tous les couples des points différents  $p$  et  $q$  peuvent être joints par un arc géodésique isotrope.

*Démonstration.* Soit  $a$  un des points qui appartiennent à l'ensemble (13). Nous avons donc

$$\varrho(p, a) + \varrho(a, q) \leq \varrho(p, q) \quad \text{pour tous les } p, q. \quad (14)$$

Je dis que l'on a

$$\varrho(p, a) = \varrho(a, p) = 0 \quad \text{pour tous les } p. \quad (15)$$

En effet, il suffit de poser dans (14)  $q = p$  et de profiter des hypothèses (9) et (10) pour obtenir la proposition (15).

Nous allons montrer que chaque point  $p \neq a$  peut être joint par une géodésique isotrope avec le point  $a$ .

La marche du raisonnement est analogue à celle appliquée par M. Menger<sup>11)</sup> dans la démonstration de l'existence des arcs géodésiques dans les espaces métriques complets joignant deux points quelconques d'un sous-espace fermé et convexe. Une différence essentielle consiste dans ce que dans notre cas l'ensemble des points  $x$  remplissant la condition

$$\varrho(p, x) + \varrho(x, q) = \varrho(p, q) \quad (16)$$

peut ne pas être borné. Dans ce cas, pour effectuer le

<sup>11)</sup> l. c. 7).

choix du „point milieu” entre deux points, il faut se servir de la métrique primitive satisfaisant au postulat (5).

Ainsi chaque point  $p \neq a$  sera joint avec le point  $a$  par un arc simple de longueur  $\varrho(p, a)$ , c'est à dire par un arc géodésique isotrope.

Considérons maintenant la somme des arcs géodésiques  $G_1 \cup G_2$ , où  $G_1$  est l'arc géodésique isotrope joignant  $p$  avec  $a$ ,  $G_2$  est l'arc géodésique isotrope joignant  $a$  avec  $q$ . Si  $G_1 \cap G_2 = a$ , la somme  $G_1 \cup G_2$  représente l'arc géodésique isotrope cherché joignant  $p$  avec  $q$ .

Supposons maintenant que  $G_1 \cap G_2$  renferme plus que le point  $a$ . Comme l'ensemble  $G_1 \cap G_2$  est fermé et  $p \neq q$ , on aura un point  $b \in G_1 \cap G_2$ , bien déterminé, qui sera le plus éloigné du point  $a$ . Désignons par  $G_1^*$  resp. par  $G_2^*$  les parties des arcs  $G_1$  resp.  $G_2$  ayant les extrémités  $p, b$  resp.  $b, q$ . Alors  $G_1^* \cup G_2^*$  sera un arc simple joignant  $p$  avec  $q$ . Sa longueur est égale à zéro, puisque la longueur de chaque  $G_i^*$  est nulle et que les longueurs des sous-arcs passent la propriété d'additivité. La somme  $G_1^* \cup G_2^*$  est donc un arc isotrope cherché et notre théorème est ainsi démontré.

§ 4. A titre d'application, considérons l'espace à deux dimensions dans lequel la métrique distordue est définie au moyen de l'écart triangulaire. En désignant par  $(x_1, x_2)$  les coordonnées cartésiennes d'un point du plan euclidien réel, nous posons (avec M. Leja)

$$\varrho(p, q) = \text{mod} \begin{vmatrix} p_1 p_2 \\ q_1 q_2 \end{vmatrix} = |p_1 q_2 - q_1 p_2|. \quad (17)$$

Cette distance peut être appelée „distance triangulaire” entre les points  $p, q$ . Elle est égale au double de l'aire du triangle  $(opq)$ , où  $o$  est l'origine du système des coordonnées cartésiennes. La métrique ainsi définie ne remplit pas les postulats de Fréchet ni même les postulats de Menger ni enfin ceux de Cohn-Vossen; elle remplit cependant les hypothèses (9) et (10) ainsi que les conditions de continuité et de convexité.

Remarquons que la distance  $\varrho$  ainsi définie est invariante par rapport aux transformations centro-affines et unimodu-



lares, c'est à dire par rapport aux transformations de la forme:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \bar{x}_2 = \gamma x_1 + \delta x_2 \end{cases} \quad D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1. \quad (18)$$

L'espace rendu métrique au moyen de la formule (17) est un cas spécial de l'espace finslerien  $F_2$ . En effet, il existe une triple infinité ( $\infty^3$ ) des courbes jouissant de cette propriété que les trois points arbitraires  $p_1, p_2, p_3$  d'une courbe de la famille peuvent être rangés de façon que

$$\varrho(p_1, p_2) + \varrho(p_2, p_3) = \varrho(p_1, p_3). \quad (19)$$

Les équations des courbes de la famille envisagée sont les suivantes:

$$\begin{cases} x_1 = \hat{x}_1 + \lambda t \\ x_2 = \hat{x}_2 + \mu t \end{cases} \quad (20)$$

La distance d'un point arbitraire  $p$  de l'origine  $o$  (0,0) étant égale à zéro, le point  $o$  est un point singulier de notre espace  $F_2$  dans ce sens, qu'il ne possède pas d'indicatrice. Tous les autres points possèdent ses indicatrices, qui ne sont pas d'ailleurs difficiles à déterminer; il suffit de tracer le faisceau des rayons issus de  $p$  et de marquer sur chaque rayon le point  $q$ , tel que l'on ait  $\varrho(p, q) = 1$ . Le lieu géométrique de tous les points  $q$  ainsi obtenus, formera l'indicatrice du point  $p$ . Dans le système cartésien les équations paramétriques de l'indicatrice du point  $p(p_1, p_2)$  seront:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + \frac{\cos \Theta}{|p_1 \sin \Theta - p_2 \cos \Theta|} \\ x_2 = p_2 + \frac{\sin \Theta}{|p_1 \sin \Theta - p_2 \cos \Theta|} \end{cases}, \quad (21)$$

où  $\Theta$  est la mesure euclidienne de l'angle entre le rayon-vecteur et l'axe des  $x_1$ . Les équations (21) représentent, comme il est facile de le voir, le système de deux droites parallèles à la droite  $op$ . Nous aurons

$$F = |x_1 \lambda_2 - x_2 \lambda_1| \quad (22)$$

en désignant par

$$F(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2)$$

la fonction fondamentale de la géométrie  $F_2$ .

Notre espace finslerien est localement une géométrie de Minkowski d'une nature très simple. On peut démontrer que si l'indicatrice d'une géométrie de Minkowski se compose de deux droites parallèles, alors pour un couple donné des points  $p, q$  tel que le vecteur  $\overrightarrow{pq}$  n'est pas parallèle aux droites de l'indicatrice, il existe une infinité des arcs géodésiques joignant  $q$  avec  $p$ . La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe  $C$  soit une géodésique consiste en ce que pour tout point arbitraire  $m$  de la courbe  $C$  chaque rayon du contingent de Bouligand (contingent unilatéral orienté dans le sens de parcours  $p \rightarrow q$ ) au point  $m$ , transporté parallèlement au point  $o$  comme origine ( $o$  désigne l'origine de l'indicatrice) rencontre cette droite de l'indicatrice qui est coupée par le rayon issu de  $o$  et parallèle au vecteur  $\overrightarrow{pq}$ .<sup>12)</sup>

Bien que dans chaque plan local de Minkowski les relations (quant il s'agit de la question des géodésiques) sont simples le problème analogue dans l'espace finslerien prend un aspect tout à fait différent. Au point de vue analytique notre cas est complètement dégénéré parce que la fonction de Bolza  $F_1$  (nous la désignons par  $G$ ) s'annule identiquement

$$G = - \frac{1}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2} \begin{vmatrix} F''_{\lambda_1 \lambda_1} & F''_{\lambda_1 \lambda_2} & \lambda_1 \\ F''_{\lambda_1 \lambda_2} & F''_{\lambda_2 \lambda_2} & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0 \quad (23)$$

à cause de l'identité

$$F''_{\lambda_i \lambda_k} \equiv 0. \quad (24)$$

Les équations d'Euler-Lagrange n'étant pas dans ce cas de deuxième ordre le problème ne possède pas des extrémales. Comme la longueur d'une courbe donnée par l'intermédiaire des équations paramétriques

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t) \quad (25)$$

<sup>12)</sup> La démonstration de ce théorème n'a pas été publiée.

est définie au moyen de l'intégrale (lebesguienne)

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \left| x_1(t) \frac{dx_2}{dt} - x_2(t) \frac{dx_1}{dt} \right| dt, \quad (26)$$

il est évident, que pour chaque courbe à tangente (sans points angulaires) cette longueur est positive dans le cas où les points  $p, q$  ne sont pas situés sur le même rayon issu de  $o$ . D'autre part la métrique de notre espace remplit les conditions du théorème du § 3. On constate sans peine que,  $p, q$  étant deux points arbitraires, l'ensemble  $I(p, q)$  se confond avec le parallélogramme (fermé)  $pqp'q'$ , où  $p'$  désigne le point symétrique au point  $p$  par rapport à  $o$ . Le point  $o$  appartient donc à chaque  $I(p, q)$ . En appliquant le théorème du § 3 nous en concluons que les points  $p, q$  peuvent être joints par une géodésique isotrope. Cette géodésique se compose de deux segments  $po, oq$ , dont les équations dans le système cartésien sont linéaires. On peut aussi trouver les lignes à tangente joignant  $p$  avec  $q$  dont la longueur est plus petite que le nombre positif  $\varepsilon$  donné à l'avance. Ces lignes doivent nécessairement parcourir à travers de voisinage du point  $o$ .

---

# L-S-HOMOTOPY CLASSES OF LOCALLY SIMPLE CURVES

by

MARSTON MORSE (Princeton)

§ 1. *Introduction.* It is perhaps appropriate in this place to respectfully salute Wacław Sierpiński as a mathematician to whom the Polish School and the world of mathematics owes much, and to offer the results of this paper in his honour.

The topological notion of a locally-simple, sensed, closed curve (written *L-S-curve*) in the plane of a complex variable  $z$ , and the concept of the *L-S-deformation* class of such a curve have proved useful in the study of interior transformations  $F$  of a region  $G$  in the  $z$ -plane into a  $w$ -sphere, and in particular in obtaining new relations between the zeros, poles and branch point antecedents of  $F$  and the classical order  $q$  and angular order  $p$  of an *L-S-image*  $g$  of the boundary of  $G$ . See Morse p. 91. The angular order  $p$  of  $g$  has an extension in the notion of the *difference order* of an arc with fixed end points, useful in the characterization of deformation classes of interior transformations  $F$  with prescribed domain  $G$  and prescribed zeros, poles and branch point antecedents. See Morse and Heins, p. 56. Sequences of meromorphic models  $F$  from different deformation classes lead to non-normal families of Montel, and exhibit covering phenomena related to Picard's theorem.

There remains the as yet undisclosed generalization to the case where  $F$  maps a region on an arbitrary Riemann surface into the  $w$ -sphere. The theorems of the present paper have an intrinsic geometric interest, and in addition prepare for deeper function-theoretic studies. *L-S-homotopy* classes of *L-S-curves* on an orientable surface  $S$  of arbitrary



finite genus will be determined. Models of the classes will be given together with topological invariants numerically characteristic of these classes.

The reader is referred to the Princeton monograph of the author for references to Kiang, Kuratowski, Stoilow, Whitney and G. T. Whyburn, and further references to Morse and Heins.

§ 2. *L-S-curves and homotopy classes.* The surface  $S$  shall be a 2-dimensional orientable manifold, without boundaries, and of arbitrary finite genus. Our closed curves will be classes of mappings into  $S$  of a circle  $C$ :  $x + iy = e^{i\theta}$ . Let  $f$  be a continuous mapping of  $C$  into  $S$  in which the point  $e^{i\theta}$  in  $C$  has the image  $f(\theta)$  in  $S$ . It is sufficient to suppose  $f(\theta)$  given for  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , with  $f(0) = f(2\pi)$ . Then  $f$  can be extended in definition so that  $f(\theta + 2\pi) \equiv f(\theta)$ .

Any sense-preserving top. (topological) mapping of  $C$  onto  $C$  is represented by a mapping  $\varphi$  of the  $\theta$ -axis onto itself with  $\varphi(\theta + 2\pi) \equiv \varphi(\theta) + 2\pi$ , and  $\varphi$  continuous and increasing. For such a  $\varphi$  the mapping  $f\varphi$  of  $C$  into  $S$  will be said to be *equivalent* to  $f$ . A *closed sensed curve*  $g$  is the class of all mappings of  $C$  into  $S$  equivalent to one such mapping  $f$ . We write  $f \in g$ .

An *arc* on  $S$  is similarly defined as a class of equivalent mappings of an interval  $0 \leq \theta \leq 1$  into  $S$ . To define an *open arc* on  $S$  one uses an open interval for  $\theta$ . These definitions are understood made on open as well as closed surfaces.

A sensed, closed curve  $g$  in  $S$  will be termed locally simple (L.S.) if for some  $f$  in  $g$  there is a positive constant  $e$  so small that the image under  $f$  of any subarc  $k$  of  $C$  with length  $s < e$  is simple (i. e. the top. image of  $k$  under  $f$ ). There then exists a constant  $e_1 > 0$  so small that any subarc of  $g$  of diameter on  $S$  at most  $e_1$  is simple. Such a constant  $e_1$  will be called a *norm of local simplicity* of  $g$ . Cf. M., § 18.

The *homotopy class* ( $g$ ) and *L-S-homotopy class* [ $g$ ]. Let  $J$  be the interval  $0 \leq t \leq 1$ ,  $t$  the „time“. A deforma-

tion of  $g$  on  $S$  is defined by a continuous mapping  $D$  of  $C \times J$  into  $S$  in which the image of a point  $(e^{i\theta}, t)$  in  $C \times J$  is a point  $D(\theta, t)$  in  $S$  such that for some  $f$  in  $g$

$$(2,1) \quad D(\theta, t) \equiv D(\theta + 2\pi, t) \quad D(\theta, 0) \equiv f(\theta).$$

We also refer to  $D$  as a deformation of  $f$ . For fixed  $t$  in  $J$ , the mapping  $D(\theta, t)$  of  $C$  into  $S$  determines a curve  $g^t$ , termed the *deform* of  $g$  at the time  $t$ . The ordinary homotopy class of  $g$  on  $S$  will be denoted by  $(g)$ . In defining the  $L$ - $S$ -homotopy class  $[g]$  we *admit* only those deformations of  $g$  for which the deforms  $g^t$  possess a norm  $e_t$  of local simplicity independent of  $t$  in  $J$ . If  $g$  is *null-homotop* we write  $(g) = 0$ . Models for the  $L$ - $S$ -homotopy classes  $[g]$  will be determined together with a numerical top. invariant of  $[g]$  characteristic of  $[g]$  and termed the  $S$ -order  $p$  of  $g$ .

§ 3. *The case of the  $z$ -plane  $E$ .* Let  $g$  be a  $L$ - $S$ -curve (always sensed and closed) in a  $z$ -plane  $E$ . The angular order  $p(g)$  in  $E$  has been defined as follows. Let  $f$  in  $g$  be a mapping of the circle  $C$  into  $E$ . Then  $p(g)$  is the number of revolutions of a complex vector  $f(\varrho + e) - f(\varrho)$  as  $\varrho$  increases from 0 to  $2\pi$ , with  $e > 0$  so small that the subarcs of  $g$  for which  $\varrho \leq \theta \leq \theta + e$  are simple. It will presently appear that the generalization of  $p(g)$  for  $g$  on a surface  $S$  of arbitrary genus will depend in its definition upon the genus of  $S$ . For this reason we term the angular order  $p(g)$  the  $E$ -order of  $g$ , and the generalization on  $S$  of the  $E$ -order the  $S$ -order of  $g$ . The  $E$ -order  $p$  is to be carefully distinguished from the classical order  $q(c)$  of  $g$  with respect to a point  $z = c$  ( $c$  not on  $g$ ).

Let  $m$  be a non-null integer, and  $C^m$  a curve obtained by tracing  $C$  ( $m$ ) times in  $C$ 's positive or negative sense, according as  $m > 0$  or  $m < 0$ . Let  $C^0$  represent a figure eight. With this understood we state a theorem of Morse and Heins, cf. M, p. 120.

*Theorem 3,1.* *Let  $g$  be a  $L$ - $S$ -curve in a  $z$ -plane  $E$  with  $E$ -order  $p$ . Then  $[g] = [C^m]$  if and only if  $p = m$ .*

Use will be made of another definition in the plane, cf. M, § 33. An *0-deformation* of a *L-S-curve*  $g$  which does not intersect  $z=0$ , is an admissible deformation of  $g$  in which  $g^t$  never intersects the point  $z=0$ .

We also need the notion of the *product* of two sensed regular curves  $h$  and  $k$ . Cf. M, § 30. Suppose that  $h$  and  $k$  are positively tangent at a point  $P$ . Then  $hk$  shall symbolize a sensed closed curve obtained by tracing  $h$  in its positive sense from  $P$  to  $P$ , then  $k$  in its positive sense from  $P$  to  $P$ . If  $h$  and  $k$  are positively tangent at several points, several such products are thus defined. In the application this is the case, but the choice of the particular point of contact is immaterial. In tracing  $hk$  we suppose that a parameter  $\theta$  increases from 0 to  $2\pi$ , so that  $hk$  may be regarded as given by a class of equivalent mappings of  $C$  into  $E$ .

*Theorem 3.2.* Let  $g$  be a *L-S-curve* in the  $z$ -plane  $E$ , with  $z=0$  not on  $g$ . Let  $p$  be the  $E$ -order of  $g$ , and  $q$  its classical order with respect to  $z=0$ . When  $p=q$ ,  $g$  can be *0-deformed* into  $C^q$ . When  $p \neq q$ ,  $g$  can be *0-deformed* into a product  $C^q C_1^{p-q}$  in which  $C_1$  is a positively sensed circle of radius less than 1, internally or externally tangent to  $C$  according as  $q$  and  $p-q$  do or do not have the same sign. For proof see M, § 33.

With  $C_1$  tangent to  $C$  the condition in the theorem that  $C_1$  be interior to  $C$  is superfluous if one takes account of the condition on a product  $hk$  that  $h$  and  $k$  be tangent in the same sense at  $P$ . By convention  $C_1$  is sensed counter-clockwise, so that when  $p-q < 0$ ,  $C_1^{p-q}$  has a clockwise sense. If  $q > 0$ ,  $C^q$  has a counter-clockwise sense so that  $C_1^{p-q}$  must be externally tangent to  $C$  in order that  $C^q$  and  $C_1^{p-q}$  have a tangent with a common sense. Similarly, when  $q(p-q) > 0$ ,  $C_1^{p-q}$  must be internally tangent to  $C$ .

§ 4. *S a top. sphere* Let  $P$  be an arbitrary point of  $S$ . Let  $F$  be a top. mapping of  $S-P$  onto a complex  $z$ -plane  $E$ .



The region  $S-P$  of  $S$  with its points represented by their images  $z$  in  $E$  will be called a coordinate system  $[P, F]$ . Let  $g$  be a  $L$ - $S$ -curve on  $S$ . Corresponding to a mapping  $f \in g$  of  $C$  into  $S$  there will exist a transformed mapping  $Ff$  of  $C$  into the  $z$ -plane. For  $f \in g$  the class of mappings  $Ff$  are equivalent and will be termed the *transform*  $F(g)$  of  $g$  in the system  $[P, F]$ . The  $E$ -order of  $F(g)$  in the  $z$ -plane will be denoted by  $p(P, F, g)$ .

*Lemma 4.1.* Taken mod. 2 the order  $p[P, F, g]$  is independent of the choice of  $P$  not on  $g$ , and of the top. mapping  $F$  of  $S-P$  onto the coordinate  $z$ -plane.

We begin by proving (a).

(a) Taken mod. 2 with  $P$  fixed,  $p(P, F, g)$  is independent of  $F$ .

Let  $F_1$  be a second top. mapping of  $S-P$  onto the  $z$ -plane  $E$ . There then exists a top. mapping  $T$  of  $E$  onto  $E$  such that  $F_1 = TF$ . If  $T$  is sense-preserving it is deformable into the identity through a continuous family  $T^t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) of top. mappings of  $E$  onto  $E$ . It is clear in this case that

$$(4.1) \quad p(P, T^t F, g) = p(P, F, g) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

so that (a) is true when  $T$  preserves sense. If  $T$  inverts sense, let  $R$  be the transformation  $x' = -x$ ,  $y' = y$  of  $E$  onto  $E$ . Then

$$(4.2) \quad p(P, F, g) = -p(P, RF, g) = -p(P, F_1, G)$$

so that (a) is also true when  $T$  inverts sense.

It follows from (a) that no generality is lost in the proof if we suppose  $S$  a 2-sphere in a euclidean 3-space. Let  $P$  and  $P_1$  be distinct points in  $S$  not on  $g$ . Let  $F$  and  $F_1$  be stereographic projections of  $S$  from  $P$  and  $P_1$  respectively onto a complex  $z$  and  $z_1$ -plane. Thus  $P$  is representable by  $z = \infty$  in the complex  $z$ -sphere, and  $P_1$  by  $z_1 = \infty$  in the complex  $z_1$ -sphere. In the  $z$ -plane suppose that  $P$  is represented by  $z = c$ . There exists a 1-1 directly conformal transformation  $\varphi: z_1 = \varphi(z)$  of the  $z$ -sphere onto the  $z_1$ -sphere in which points  $z$  and  $z_1$  correspond which represent the same point of  $S$ . In particular  $\varphi(c) = \infty$ .



Let  $q(c)$  be the classical order of  $g$  relative to the point  $z=c$  in the  $z$ -plane. By virtue of a Corollary in M, p. 78

$$(4.3) \quad p(P, F, g) - p(P_1, F_1, g) = 2q(c).$$

Thus the two orders on the left of (4.3) are equal mod. 2. The lemma follows from (4.3) and (a).

*Definition.* When  $S$  is a top. sphere the  $S$ -order  $p(g)$  of any  $L$ - $S$ -curve  $g$  on  $S$  is taken as the value of  $p(P, F, g)$  mod. 2 in any coordinate system  $[P, F]$  in which  $g$  lies.

*Theorem 4.1.* When  $S$  is a top. sphere the  $S$ -order of  $g$  is invariant under any admissible deformation  $D$  of  $g$ .

Suppose that under  $D$ ,  $g$  is replaced by  $g^t$  at the time  $t$ . It is clear that the interval  $[0, 1]$  for  $t$  is the union of a sequence  $I_1, \dots, I_n$  of non-overlapping closed intervals so small in length that for  $t$  in  $I_k$  ( $k=1, \dots, n$ )  $g^t$  lies in a single coordinate system  $[P_k, F_k]$ . But in a single coordinate system the  $E$ -order  $p(g^t)$  is independent of  $t$ . Moreover as one changes from one coordinate system containing  $g^t$  to another the  $S$ -order of  $g^t$  is unchanged according to Lemma 4.1. Theorem 4.1 follows.

*Theorem 4.2.* Let  $S$  be a top. sphere and  $g$  a  $L$ - $S$ -curve on  $S$  with  $S$ -order  $p$ . Let  $\Gamma$  be an arbitrarily sensed simple closed curve on  $S$ . Then  $[g] = [\Gamma]$  or  $[\Gamma^2]$  according as  $p \equiv 1$  or  $2$ , mod. 2. Moreover  $[\Gamma] \neq [\Gamma^2]$ .

Suppose that  $g$  has a transform  $g_1 = F(g)$  in the  $z$ -plane of a coordinate system  $[P, F]$ . If  $m$  is the  $E$ -order of  $g_1$  in this  $z$ -plane, it follows from Theorem 2.1 that  $[g_1] = [C^m]$  on  $E$ . On the complex  $z$ -sphere  $C$  can be admissibly deformed into a great circle  $C_0$ , and  $C_0$  can be admissibly deformed into  $C_0^{-1}$  by a rotation about a diameter. Hence  $[C^m] = [C^{|m|}]$ .

Set  $|m| = n$ . If  $n=0$ ,  $C^n = C^0$  is a figure eight, and can be modeled by a product  $CC_1^{-1}$ , where  $C_1$  is a positively sensed circle on  $E$  externally tangent to  $C$  at some point  $P$ . It is clear that on the  $z$ -sphere one can deform  $C_1^{-1}$  through a family of circles all tangent to  $C$  at  $P$ , into  $C$  as a final image. Hence  $[C^0] = [C^2]$  on  $S$ .

If  $n=1$  or  $2$ ,  $C^n$  is our final model of  $[g]$  on  $S$ . If  $n>2$ , write  $C^n=C^{n-2}C^2$ . [Holding fast a suitable point  $P$  of  $C$  and a tangent common to  $C^{n-2}$  and  $C^2$ ,  $C^n$  can be admissibly deformed, as in the preceding paragraph, into  $CC_1^{-1}$  so that

$$(4.4) \quad [C^{n-2}C^2]=[C^{n-2}CC_1^{-1}] \quad [\text{on } S].$$

But the  $E$ -order in the  $z$ -plane of  $C^{n-2}CC_1^{-1}$  is  $n-2$  so that by Theorem 2.1

$$[C^{n-2}C^2]=[C^{n-2}] \quad [\text{on } S].$$

By additional reductions of this sort if  $n-2>1$ , it is seen that  $[C^n]=[C]$  or  $[C^2]$ , according as  $n \equiv 1$  or  $2, \text{ mod. } 2$ .

The reduction to  $\Gamma$  or  $\Gamma^2$  follows from the fact that any simple closed curve  $\Gamma$  on  $S$  can be admissibly deformed into any other such curve. That  $\Gamma$  cannot be admissibly deformed into  $\Gamma^2$  is a consequence of the invariance of  $S$ -order under admissible deformations. Cf. Theorem 4.1.

It may be noted that the sense of orientation of  $S$  plays no role in the above, and that any  $L$ - $S$ -curve is in the same  $L$ - $S$ -homotopy class on a top. sphere as the oppositely sensed  $L$ - $S$ -curve.

§ 5.  $S$  a top. torus. To obtain a model for the universal covering surface of  $S$  use will be made of the complex  $z$ -plane  $E$  and a group  $G$  of translations of  $E$

$$(5.1) \quad w = z + n + im \quad [n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots].$$

Images of  $z$  under a translation  $R$  in  $G$  will be termed *congruent* to  $z$  under  $G$ . If congruent points of  $E$  are identified and appropriate neighborhoods assigned to the resultant point classes,  $E$  will reduce to a surface  $M_1$  of genus 1, so that  $M_1$  can serve as a model for  $S$ . The universal covering surface of  $M_1$  is  $E$ .

A top. mapping of  $M_1$  onto  $S$  can be represented by a locally top. mapping  $A$  of  $E$  onto  $S$  in which a point  $z$  in  $E$  has an image  $A(z)$  in  $S$  such that  $A(z')=A(z)$  if and only if  $z$  and  $z'$  are congruent under  $G$ .

Let  $g$  be a  $L$ - $S$ -curve on  $S$ , and  $f \in g$  a top. mapping of the circle  $C$  into  $S$ . Let  $(z_0)$  be the class of congruent  $A$ -antecedents of  $f(0)$ . For any point  $a$  in  $(z_0)$  there exists a unique continuous mapping  $\varphi_a$  of the  $\Theta$ -axis into  $M$  such that

$$(5.2) \quad \varphi_a(0) = a \quad A\varphi_a(\Theta) \equiv f(\Theta).$$

There exist integers  $n_g$  and  $m_g$  independent of  $a$  in  $(z_0)$  such that for every  $\Theta$

$$\varphi_a(\Theta + 2\pi) = \varphi_a(\Theta) + n_g + i m_g.$$

That is, there exists an element  $R^g$  in  $G$  such that

$$\varphi_a(\Theta + 2\pi) \equiv R^g \varphi_a(\Theta).$$

It is clear that  $\varphi_a$  and  $R^g$  both depend upon  $A$  and would in general be different if  $A$  were admissibly changed.

If  $R^g$  is the identity  $I$ , the mapping  $\varphi_a$  defines an arc that is both closed and L.S. in  $E$ , and in this case  $g$  belongs to the null-homotopy class  $(g) = 0$ . If  $R^g \neq I$  the line segment joining  $a$  to  $R^g(a)$ , parameterized by  $\Theta$  running from 0 to  $2\pi$ , has an  $A$ -transform  $h_a^g$  on  $S$  which is an  $L$ - $S$ -curve for which  $(h_a^g) = (g)$ .

*Definition.* Let  $S$  be a top. torus and  $g$  a  $L$ - $S$ -curve on  $S$ . The  $S$ -order  $p(g)$  of  $g$  is the number of revolutions of the complex vector  $\varphi_a(\varrho + e) - \varphi_a(\varrho)$  as  $\varrho$  increases from 0 to  $2\pi$  with  $e > 0$  so small a positive constant that each arc defined by  $\varphi_a$  for  $\varrho \leq \Theta \leq \varrho + e$  is simple.

That  $p(g)$  is independent of  $a$  in  $(z_0)$  is immediately clear. That  $p(g)$  does not depend upon the mapping  $A$  of  $E$  into  $S$  or upon the choice of  $g$  in  $[g]$  is affirmed in the following theorem.

*Theorem 5.1.* The  $S$ -order of an  $L$ - $S$ -curve on  $S$  is independent of the top. mapping  $A$  of  $E$  onto  $S$  used to define the  $A$ -antecedents  $\varphi_a$  of the mapping  $f \in g$ , and of the choice of  $g$  in its  $L$ - $S$ -homotopy class.

The proof of this theorem and of the following theorem can be easily inferred from proofs to be given when the genus of  $S$  exceeds 1, and so will be omitted here.

In § 2 the product  $hk$  of two regular, sensed, closed curves has been defined. We shall here need the notion of the *product*  $HK$  of a sensed line segment  $H$  and a regular closed curve  $K$  which is positively tangent to  $H$  at some inner point  $P$  of  $H$ . This product is obtained by tracing  $H$  from its initial point to  $P$ , then tracing  $K$  from  $P$  to  $P$ , and finally tracing  $H$  from  $P$  to the terminal point of  $H$ . As  $HK$  is traced we suppose a parameter  $\Theta$  increases from 0 to  $2\pi$ .

In the following theorem the  $L$ - $S$ -homotopy class  $[g]$  will be said to be *modeled* on  $E$  by any  $L$ - $S$ -arc or curve  $\gamma$  on  $E$  for which  $[A(\gamma)] = [g]$ . Similarly  $(g)$  will be said to be *modeled* by  $\gamma$  if  $(A(\gamma)) = (g)$ . It should be understood that  $\gamma$  here stands for a class of mappings  $\varphi$ , and  $A(\gamma)$  for the class of mappings  $A\varphi$ . The mapping  $\varphi$  should be defined for  $0 \leq \Theta \leq 2\pi$  and  $A[\varphi(0)] = A[\varphi(2\pi)]$ .

*Theorem 5.2.* Let  $S$  be a top. torus and  $g$  a  $L$ - $S$ -curve on  $S$  with  $S$ -order  $p$ . If  $(g) = 0$  then  $C^p$  on  $E$  models  $[g]$ . If  $(g) \neq 0$  and  $p = 0$ , any line segment  $h_g$  of minimum length among segments modeling  $(g)$  will model  $[g]$ . If  $(g) \neq 0$  and  $p \neq 0$ ,  $[g]$  will be modeled by a product  $h_g C_1^p$  where  $C_1$  is a positively sensed circle on  $E$  contacting  $h_g$  at an inner point. No two of these models are models of the same  $L$ - $S$ -homotopy class on  $S$ .

As in Theorem 3.2 it follows from the definition of a product  $HK$  that  $C_1^p$  lies on the right or left of  $h_g$  according as  $p < 0$  or  $p > 0$ .

§ 6.  $S$  of genus  $\sigma > 1$ . The universal covering surface of  $S$  will be modeled by an  $H$ -plane ( $H$  = hyperbolic). This  $H$ -plane will be represented as by Poincaré by the region  $M_1[|z| < 1]$  in a  $z$ -plane. Arcs of circles orthogonal to the "principal" circle  $|z| = 1$  represent  $H$ -lines.  $H$ -lengths along rectifiable arcs are given by the integral

$$\int_k \frac{ds}{1-x^2-y^2} \quad (z = x + iy)$$



where  $ds$  is the differential of euclidean arc length along  $k$ . There exists a circle  $b$  orthogonal to the principal circle and of such a radius that the successive images  $b_n$ ,  $n=0,1, \dots, 4\sigma$ , of  $b$  under the rotations

$$(6.1) \quad z' = z e^{\frac{-n\pi}{2\sigma} i} \quad (n=0,1,\dots,4\sigma)$$

intersect with exterior angles of  $\pi/2\sigma$ . Let  $k_n$  be that arc of the circle  $b_n$  between the intersection of  $b_n$  and  $b_{n-1}$  which is nearest  $z=0$  ( $n=1,\dots,4\sigma$ ). The arcs  $k_1, \dots, k_{4\sigma}$  taken in circular order bound an  $H$ -polygon  $\Pi$  on  $M$  which is symmetric with respect to  $w=0$  and invariant under the rotations (6.1). We shall include in  $\Pi$  only those pairs of arcs  $k_n, k_{n+1}$  for which  $n \equiv 1 \pmod{4}$ , and only one of the  $4\sigma$  vertices of  $\Pi$ .

There exists a discontinuous group  $G$  of directly conformal transformations  $R$  of  $M$  onto  $M$  where, apart from the identity  $I$ ,  $R$  is a fractional linear hyperbolic transformation of  $M$  onto  $M$  with two fixed points on the principal circle  $|z|=1$ , and such that the images  $R(\Pi)$  cover  $M$  without exception, and when  $R_1 \neq R_2$ ,  $R_1(\Pi)$  and  $R_2(\Pi)$  do not intersect. Images of  $z$  in  $M$  under any  $R$  in  $G$  will be termed *congruent* to  $z$  under  $G$ . If points of  $M$  which are congruent under  $G$  are identified and appropriate neighborhoods assigned to the resultant classes of points,  $M$  will reduce to an orientable surface  $M_p$  of genus  $p$  which can be taken as a top. model for  $S$ . The universal covering surface of  $M_p$  is  $M$ . Cf. J. Nielsen.

Given an arbitrary  $R$  in  $G$  there are two points  $F_1(R)$  and  $F_2(R)$  on the principal circle  $|z|=1$  such that for any  $z$  in  $M$ , the  $n$ th iterate  $R^n(z)$  tends to  $F_2(R)$  as  $n \rightarrow \infty$ , and  $R^{-n}(z)$  tends to  $F_1(R)$ . The points  $F_1(R)$  and  $F_2(R)$  are the *fixed points* of  $R$ . The sensed  $H$ -line on  $M$  with limiting end points  $F_1(R)$  and  $F_2(R)$  is called *the axis* of  $R$ . If  $z=b$  is a point on this axis,  $R(b)$  is also a point on the axis, and the segment of the axis from  $b$  to  $R(b)$  is called a *kernel* of  $R$ . We suppose such a kernel parameterized by a va-

riable  $\Theta$  which increases from 0 to  $2\pi$ . The family of sensed circular arcs leading from  $F_1(R)$  to  $F_0(R)$  on  $M$  will form a *field* of circular arcs to be denoted by  $F(R)$ .

For arbitrary  $U$  in  $G$  set  $V=URU^{-1}$ . Then the fixed points, axis, field and kernels of  $V$  are the  $U$ -images of the respective fixed points, axis, field and kernels of  $R$ .

A top. mapping (1—1 and continuous) of  $M_p$  onto  $S$  can be represented by a *locally top. mapping*  $A$  of  $M$  onto  $S$  in which a point  $z$  in  $M$  has an image  $A(z)$  in  $S$  such that  $A(z')=A(z)$  if and only if  $z$  and  $z'$  are congruent under  $G$ . We shall refer to  $z$  as an  $A$ -coordinate of the point  $P=A(z)$  in  $S$ .

*The mapping  $\varphi_a$  of the  $\Theta$ -axis into  $M$ .* Let  $g$  be a  $L$ - $S$ -curve on  $S$  and  $f \in g$  a mapping of a unit circle into  $S$ . Let  $(z_0)$  be the class of congruent  $A$ -antecedents in  $M$  of  $f(0)$  in  $S$ . For any complex point  $a$  in  $(z_0)$  there exists a uniquely determined continuous mapping  $\varphi_a$  of the  $\Theta$ -axis into  $M$  such that

$$(6.2) \quad \varphi_a(0) = a \quad A\varphi_a(\Theta) \equiv f(\Theta).$$

There exists an element  $R_a^g$  in  $G$  such that for every  $\Theta$

$$R_a^g \varphi_a(\Theta) = \varphi_a(\Theta + 2\pi)$$

since  $f(\Theta + 2\pi) \equiv f(\Theta)$ . The mapping  $\varphi_a$  depends upon the choice of  $a$  in  $(z_0)$ , upon  $g$ , and upon the mapping  $A$  of  $M$  onto  $S$ . We shall presently vary  $a$ ,  $g$ , and  $A$ .

*Lemma 6.1.* *If  $R_a^g \neq I$  each kernel of  $R_a^g$ , properly parameterized, has an  $A$ -transform in  $(g)$ .*

One can continuously deform  $\varphi_a$  on  $M$  into a mapping of the  $\Theta$ -axis onto the axis  $X$  of  $R_a^g$  by letting each point  $\varphi_a(\Theta)$  move along the  $H$ -line through  $\varphi_a(\Theta)$  orthogonal to  $X$  at an  $H$ -speed equal to the  $H$ -distance to be traversed to reach  $X$ . If  $\varphi_a(\Theta)$  is thereby replaced by  $\varphi_a^t(\Theta)$  at the time  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) it is clear that for each such  $t$

$$R_a^g \varphi_a^t(\Theta) = \varphi_a^t(\Theta + 2\pi)$$

so that  $A\varphi_a^t$  continues to define a closed curve  $g^t$  as  $t$  in-

creases from 0 to 1, and a deformation  $D$  of  $f \in g$ . Cf. § 2. The deform  $g^t$  is however not necessarily L.S.

*Lemma 6.2.* *A necessary and sufficient condition that  $R_a^g = I$  is that  $(g) = 0$ .*

The proof of this well known lemma is left to the reader.

The definition of the  $S$ -order of  $g$  requires a definition of a preliminary order  $m(a, A, g)$  of  $g$ , and a proof of the independence of this order of admissible choices of  $a$  and  $A$ . To define  $m(a, A, g)$  use will be made of the field  $F(R)$  of the circular arcs on  $M$  leading from the fixed point  $F_1(R)$  to  $F_2(R)$ . With  $z_0$  and  $z_1$  in  $M$  the vector  $z_1 - z_0$  will be assigned a *field angle* at  $z_0$  measured from the positive tangent at  $z_0$  of the field circle through  $z_0$ , to the positive tangent at  $z_0$  of the sensed  $H$ -line joining  $z_0$  to  $z_1$ . Rotations of  $z_1 - z_0$  relative to  $F(R)$  will be measured in terms of this field angle.

*Definition.* *Given the L-S-curve  $g$  on  $S$ , the mapping  $A$  of  $M$  onto  $S$  and the  $A$ -antecedent  $\varphi_a$  of  $f \in g$ , the order  $m = m(a, A, g)$  of  $g$  is defined as follows. If  $(g) = 0$ ,  $m$  shall be the  $E$ -order of the closed curve defined by  $\varphi_a$  in the  $z$ -plane. If  $(g) \neq 0$ ,  $m$  shall be the number of revolutions relative to the field  $F(R_a^g)$  of the complex vector  $\varphi_a(\varrho + e) - \varphi_a(\varrho)$  as  $\varrho$  increases from 0 to  $2\pi$  with the constant  $e > 0$  so small that each arc on  $M$  defined by for  $\varrho \leq \Theta \leq \varrho + e$  is simple.*

§ 7. *Models of  $(g)$  when the genus of  $S$  exceeds 1.* Corresponding to any  $R$  in  $G$  for which  $R \neq I$  an identification of points of  $M$  which are congruent under  $R$  and an appropriate assignement of neighbourhoods to the resultant classes of points gives rise to a top. cylinder  $K(R)$ . A particular representation of  $K(R)$  in terms of coordinates  $(s, t)$  can be obtained as follows. Let the axis  $X(R)$  of  $R$  be parameterized by a coordinate  $t$  proportional to the  $H$ -distance along  $X(R)$ , and such that  $t$  increases by  $2\pi$  as each kernel of  $X(R)$  is traversed in its positive sense. The range

of  $t$  is thus  $(-\infty, \infty)$ . Let  $L(t)$  be the  $H$ -line orthogonal to  $X(R)$  at the point  $t$  of  $X(R)$ . Let a point  $z$  on  $L(t)$  be assigned the coordinates  $(s, t)$  where  $|s|$  gives the  $H$ -distance of  $z$  from  $X(R)$ , with  $s > 0$  or  $s < 0$  according as  $z$  is to the right or left of  $X(R)$  on  $M$ . The  $H$ -plane  $M$  is thereby mapped onto the  $(s, t)$ -plane. This mapping is top. and sense preserving if the  $z$ -plane and  $(s, t)$ -plane are oriented in the usual way. We set  $\alpha = s + it$  and represent the image  $z$  of  $\alpha$  by  $Z_R(\alpha)$ . Observe that

$$(7.1) \quad RZ_R(\alpha) = Z_R(\alpha + 2\pi i) \quad Z_R^{-1}R(z) = Z^{-1}(z) + 2\pi i.$$

We shall refer to  $\alpha = s + it$  as an  $A$ - $R$ -coordinate of the point  $AZ_R(\alpha)$  in  $S$ .

The top. cylinder  $K(R)$  is formed from  $M$  by taking the points  $z$  in  $M \bmod. R$ , or in terms of the  $(s, t)$ -coordinates by taking the points  $\alpha = s + it \bmod. 2\pi i$ . So represented  $K(R)$  is mapped top. onto the  $w$ -plane (with  $w=0$  excluded) by setting

$$(7.2) \quad w = \text{Exp}[s + it] = \text{Exp}[\alpha]. \quad [\text{Exp}[\alpha] = e^\alpha].$$

A mapping of the  $w$ -plane onto  $S$  is thereby induced in which  $w$  has the image  $P$  in  $S$  given by

$$(7.3) \quad P = AZ_R[\log w] \quad [w \neq 0].$$

This mapping is single-valued on account of (7.1) and the relation  $AR = A$ , and is locally sense preserving and top. When (7.3) holds we shall refer to  $w$  as an  $A$ - $R$ -log-coordinate of  $P$ .

We set  $R = R_a^g$  in (7.3) and seek a transform of  $g$  in the  $w$ -plane under the resulting mapping. That is, we seek a solution  $w_a(\theta)$  of

$$(7.4) \quad f(\theta) = AZ_R[\log w]. \quad [R = R_a^g].$$

We are assuming  $R_a^g \neq I$ , for  $I$  has no axis and no associated coordinates  $(s, t)$ .

*Lemma 7.0.* When  $R_a^g \neq I$  there is a single-valued, continuous solution  $w_a(\theta)$  of (7.4) with period  $2\pi$ .



A solution of (7.4) may be formally written

$$w_a(\theta) = \text{Exp}[Z_R^{-1} A^{-1} f(\theta)]. \quad [R = R_a^g].$$

We begin by taking  $A^{-1}f$  as  $\varphi_a$ , recalling that  $\varphi_a(\theta + 2\pi) = R[\varphi_a(\theta)]$ . It follows from (7.1) that the mapping

$$Z_R^{-1} \varphi_a = h_a$$

of  $C$  into the  $\alpha$ -plane is such that  $h_a(\theta + 2\pi) = h_a(\theta) + 2\pi i$ . Hence the solution

$$(7.5) \quad w_a(\theta) = \text{Exp}[h_a(\theta) i]$$

has the properties affirmed in the lemma.

*Lemma 7.1.* *If  $R_a^g \neq I$  the mapping  $w_a$  of  $C$  into the  $w$ -plane defines a closed curve  $g_1$  in the  $w$ -plane for which  $q(0) = 1$ , (cf. Theorem 3.2), and whose  $E$ -order  $p$  in the  $w$ -plane is  $m(a, A, g) + 1$ .*

From (7.5) it is seen that any continuous branch of arc  $w_a(\theta)$  increases by  $-i[h_a(\theta + 2\pi) - h_a(\theta)] = 2\pi$  so that  $q(0) = 1$ .

Recall that  $m(a, A, g)$  is the number of revolutions of a vector  $\varphi_a(\varrho + e) - \varphi_a(\varrho)$  relative to the field of arcs of  $F(R_a^g)$  as  $\varrho$  increases from 0 to  $2\pi$ . The arcs of the field  $F(R_a^g)$  are the arcs  $s = \text{const}$  on  $M$ , and their transforms in the  $w$ -plane under (7.2) are the circles  $|w| = \text{const}$ . Since the transformation (7.2) is directly conformal we conclude that the  $E$ -order of  $g_1$  is  $m(a, A, g) + 1$ . [As a check suppose that  $\varphi_a$  represents the axis of  $R^g$ . On this axis  $s = 0$ , and by virtue of (7.2),  $g_1$  is the circle  $|w| = 1$ . Here  $m(a, A, g) = 0$  while the  $E$ -order  $p$  of  $g_1$  in the  $w$ -plane is 1.]

Models for  $[g_1]$  in the  $w$ -plane for our purposes should be models under 0-deformations, since  $w = 0$  is excluded in the mapping (7.3) of the  $w$ -plane onto  $S$ . One can apply Theorem 3.2 to  $g_1$  in the  $w$ -plane. Let  $p$  be the  $E$ -order of  $g_1$  in the  $w$ -plane, and  $q$  the classical order relative to  $w = 0$ . The condition  $p = q$  of Theorem 3.2 reduces here to the condition  $p = 1$ , since  $q = q(0) = 1$  by Lemma 7.1.

The condition  $p=1$  implies that  $m(a, A, g) = 0$  by Lemma 7.1. Hence Theorem 3.2 implies that  $g_1$  can be 0-deformed in the  $w$ -plane into  $CC_1^m$  when  $m = m(a, A, g) \neq 0$ , and into  $C^q = C$  when  $m = 0$ . On transforming these deformations and models back to  $M$  by means of (7.2) one obtains the following lemma.

*Lemma 7.2.* Set  $m = m(a, A, g)$  and suppose  $R_a^g \neq I$ . Then  $[g]$  is modeled on  $M$  by any kernel  $k$  of  $R_a^g$  when  $m = 0$ , and by a product  $kC_0^m$  when  $m \neq 0$ , where  $C_0$  is a positively sensed circle in  $M$  contacting  $k$  at an inner point of  $k$ .

When  $R_a^g = I$ , the curve on  $M$  defined by the mapping  $\varphi_a$  is closed, since  $\varphi_a(\theta + 2\pi) \equiv \varphi_a(\theta)$  so that the  $L$ - $S$ -models of  $g$  on  $M$  are like those in a euclidean plane of coordinates  $(s, t)$ . Hence the lemma.

*Lemma 7.3.* Set  $m = m(a, A, g)$ . When  $R_a^g = I$ ,  $[g]$  is modeled on  $M$  by  $C_0^m$  where  $C_0$  is an arbitrary positively sensed circle on  $M$ .

§ 8. *The  $S$ -order of  $g$  when the genus of  $S$  exceeds 1.* In § 2 an admissible deformation  $D$  of a mapping  $f \in g$  has been defined. Given  $D$  and an  $A$ -antecedent  $\varphi_a$  of  $f$  we shall specify the essential characteristics of a deformation  $d$  of  $\varphi_a$  to be regarded as an  $A$ -antecedent of the deformation  $D$  of  $f$ . The deformation  $d$  shall continuously map  $C \times J$  into  $M$  and satisfy the relations

$$(8.1) \quad Ad(\theta, t) = D(\theta, t) \quad d(\theta, 0) = \varphi_a(\theta)$$

for each  $\theta$ . To satisfy (8.1) it is necessary that

$$(8.2) \quad R_a^g d(\theta, t) \equiv d(\theta + 2\pi, t) \quad d(\theta, 0) \equiv \varphi_a(\theta)$$

since  $D(\theta + 2\pi, t) \equiv D(\theta, t)$ , and since more particularly

$$(8.3) \quad R_a^g d(\theta, 0) \equiv R_a^g \varphi_a(\theta) \equiv \varphi_a(\theta + 2\pi) \equiv d(\theta + 2\pi, 0).$$

Conversely a continuous mapping  $d$  of  $C \times J$  into  $M$  which satisfies (8.2) will serve to define a deformation  $D$  of  $f$  in (8.1), and  $D$  will be admissible provided the deforms  $g^t$  of  $g$  have a common norm of local simplicity.

The  $S$ -order  $p(g)$  of  $g$  will be defined by  $m(a, A, g)$  once it has been shown that  $m(a, A, g)$  is independent of admissible choices of  $a$  and  $A$ . To this end several lemmas are needed.

*Lemma 8.1.* *Let  $D$  be an admissible deformation of  $f \in g$ , and  $d$  the deformation of  $\varphi_a$  antecedent to the deformation  $D$  of  $f$ . Let  $g^t$  be the deform on  $S$  of  $g$  at the time  $t$ , and set  $d(0, t) = a^t$ . Then for fixed  $A$  the order  $m(a^t, A, g^t) = m(t)$  is independent of  $t$ .*

If  $R_a^g \neq I$ ,  $m(t)$  is the number of revolutions of the vector  $d(\varrho + e, t) - d(\varrho, t)$  relative to the field  $F(R_a^g)$  as  $\varrho$  increases from 0 to  $2\pi$  with  $e > 0$  so small that the subarcs defined by  $d(\Theta, t)$  on  $M$  for fixed  $t$  in  $J$  and  $\varrho \leq \Theta \leq \varrho + e$  are simple. It should be noted that the definition of  $m(t)$  calls for a use of  $F(R_{a^t}^g)$ , but with  $a^t$  continuous one sees that  $R_{a^t}^g = R_a^g$  for each  $t$ . Thus  $m(t)$  varies continuously with  $t$ , and since its values are integers, it is constant. If  $R_a^g = I$ , then for fixed  $t$ ,  $d$  defines a closed curve  $\gamma^t$  on  $M$ , and for variable  $t$ , an admissible deformation of these curves on  $M$ . The value of  $m(t)$  in this case is the  $E$ -order of  $\gamma^t$  in the  $z$ -plane, and so is independent of  $t$ .

*Lemma 8.2.* *For fixed  $g$  and mapping  $A$  of  $M$  onto  $S$ , and arbitrary  $U$  in  $G$ ,*

$$(8.4) \quad m(a, A, g) = m[U(a), A, g].$$

Instead of the  $A$ -antecedent  $\varphi_a$  of  $f \in g$  in terms of which  $m(a, A, g)$  is defined, one can set  $a' = U(a)$  and use the  $A$ -antecedent  $\varphi_{a'}$  of  $f$ . It is clear that  $\varphi_{a'} = U\varphi_a$ . Moreover  $R_{a'}^g = UR_a^g$ . Finally, the circular arcs of  $F(R_{a'}^g)$  which with  $\varphi_{a'}$  are used in defining  $m[U(a), A, g]$  are the  $U$ -images of the circular arcs of  $F(R_a^g)$ . It follows from the definition of the orders in (8.4) in terms of field angles relative to  $F(R_a^g)$  and  $F(R_{a'}^g)$  respectively, that (8.4) holds.

*Variation of the mapping  $A$ .* The mapping  $\Phi$  of  $M$  onto  $M$ . Let  $A$  and  $A'$  be admissible mappings of  $M$

onto  $S$ . The mappings  $A$  and  $A'$  induce a unique top. mapping  $\Phi$  of  $M$  onto  $M$  such that

- (1) *A point  $z$  in  $M$  corresponds to a point  $\Phi(z)$  in  $M$  only if  $A(z) = A'\Phi(z)$ .*  
 (2) *The point  $\Phi(0)$  is in the polygon  $\Pi$ .*

For arbitrary  $R$  in  $G$ ,  $AR = A$  so that by (1)  $A'\Phi R = A'\Phi$ . It follows that  $\Phi R(z)$  and  $\Phi(z)$  must be congruent under  $G$ , so that for some transformation  $R_\phi$  in  $G$ :

$$(8.5) \quad \Phi R = R_\phi \Phi.$$

Hence

$$(8.6) \quad R_\phi = \Phi R \Phi^{-1} \quad R = \Phi^{-1} R_\phi \Phi.$$

The mapping  $R$  into  $R_\phi$  thus defines an automorphism of  $G$ .

Given the mapping  $A$ , and  $R$  in  $G$ , we have introduced three types of coordinates of a point  $P$  in  $S$ : an  $A$ -coordinate  $z$  whenever  $A(z) = P$ , an  $A$ - $R$ -coordinate  $\alpha = s + it$  whenever  $P = AZ_R(\alpha)$ , and an  $A$ - $R$ -log-coordinate  $w$  whenever  $P = AZ_R \log w$ . These are coordinates of  $P$  at the first, second and third level, as we shall say. Given a second mapping  $A'$  of  $M$  onto  $S$  we shall set  $R_\phi = R'$ . As coordinates of  $P$  we then have  $A'$ -coordinates  $z'$ ,  $A'$ - $R'$ -coordinates  $\alpha' = s' + it'$ , and  $A'$ - $R'$ -log-coordinates  $w'$ .

*At each level we shall make coordinates correspond which represent the same point  $P$  in  $S$ .*

Thus  $z$  shall correspond to  $z'$ ,  $\alpha$  to  $\alpha'$ ,  $w$  to  $w'$ , when the same point  $P$  is represented. These correspondences are not 1-1, but it is possible to make a selection from the correspondents  $z'$ ,  $\alpha'$ ,  $w'$  of  $z$ ,  $\alpha$ ,  $w$ , respectively, so that the selected correspondences

$$(8.7) \quad z' = \Phi(z) \quad \alpha' = T(\alpha) \quad w' = \text{Exp}[T(\log w)]$$

respectively define sense-preserving top. mappings of  $M$  onto  $M$ , of the  $\alpha$ -plane onto the  $\alpha'$ -plane, and the  $w$ -plane (excluding  $w=0$ ) onto the  $w'$ -plane (excluding  $w'=0$ ).

The mapping  $\Phi$  has already been defined, and has the properties desired in (8.7). Set

$$(8.8) \quad T = Z_R^{-1} \Phi Z_R.$$



So defined  $T$  is clearly sense preserving and top. In order that  $\alpha$  and  $T(\alpha)$  be corresponding  $A$ - $R$ - and  $A'$ - $R'$ -coordinates respectively, it is sufficient that

$$(8.9) \quad AZ_R = A'Z_{R_\phi} T.$$

With  $T$  defined by (8.8), (8.9) is satisfied, since  $A = A' \Phi$ .

The relation

$$(8.10) \quad T(\alpha + 2\pi i) = T(\alpha) + 2\pi i$$

is verified with the aid of (8.5) and the relations (7.1), applied for  $R$  and for  $R_\phi$ . Finally the mapping

$$(8.11) \quad w' = \text{Exp}(T[\log w])$$

is sense preserving and top., taking account of (8.10). In order that  $w$  and its image  $w'$  in (8.11) represent the same point  $P$  in  $S$ , it is sufficient that

$$(8.12) \quad AZ_R[\log w] = A'Z_{R_\phi} T[\log w],$$

and (8.12) follows from (8.9).

The point on the axis of  $R$  at which  $t=0$  has been left undetermined. To be definite we determine this point by requiring that the  $t$  coordinate of  $z=0$  be  $t=0$ . With this understood we can state the following:

*The mappings (8.7) as defined are uniquely determined by  $A, A', R$ .*

*Lemma 8.3. For fixed  $g$  the order  $m(a, A, g)$  is independent of admissible choices of  $a$  and  $A$ .*

*Case I,  $(g) \neq 0$ .* That  $m(a, A, g)$  is independent of admissible  $a$  for fixed  $A$  and  $g$  has been seen in Lemma 8.2. Suppose then that  $A$  and  $A'$  are two admissible mappings of  $M$  onto  $S$ . With  $g$  and  $A$  there has been associated the transformation  $R_a^g$  in  $G$  in § 6. According to Lemma 6.2,  $R_a^g \neq I$ , since  $(g) \neq 0$ . Introduce the mapping

$$(8.13) \quad w' = \text{Exp}[T(\log w)]$$

of (8.7) as defined by  $A, A'$  and  $R_a^g$ . Under (7.3) with  $R = R_a^g$ ,  $g$  has a transform  $\gamma$  in the  $w$ -plane, which is clo-

sed by Lemma 7.0, and is L.S. because the mapping (7.3) is locally top. Under the mapping

$$(8.14) \quad P = A'Z_R[\log w'] \quad [R = R_a^g]$$

$g$  has a similar transform  $\gamma'$  in the  $w$ -plane. An essential property of (8.13) is that a  $w$  and  $w'$  which satisfy (8.13) determine the same point  $P \in S$  by (7.3) and (8.14) respectively. Hence  $\gamma'$  can be taken as the transform of  $\gamma$  under (8.13).

The transformation (8.13) is sense preserving and top. and can be completed by making  $w=0$  correspond to  $w'=0$ . It follows that the completed transformation can be deformed into the identity holding the points  $w=w'=0$  fast. Hence the  $E$ -orders  $p$  and  $p'$  of  $\gamma$  and  $\gamma'$  in the  $w$  and  $w'$ -planes are respectively equal. It has been seen in Lemma 7.1 that

$$m(a, A, g) + 1 = p \quad m(a', A', g) + 1 = p'.$$

The lemma follows in Case I from the equality  $p = p'$ .

Case II,  $(g) = 0$ . In this case an  $A$ -antecedent  $\varphi_a$  of  $f \in g$  defines a closed curve  $\gamma$  on  $M$ , and  $m(a, A, g)$  is the  $E$ -order of  $\gamma$  in the  $z$ -plane of  $M$ . Similarly an  $A'$ -antecedent  $\varphi_{a'}$  of  $f \in g$  defines a closed curve  $\gamma'$  on  $M$ . Observe that  $\gamma'$  is the transform of  $\gamma$  under  $\Phi$  provided one takes  $a' = \Phi(a)$ , as is possible. Since  $\Phi$  can be deformed into the identity among top. mappings of  $M$  onto  $M$  it is clear that

$$m(a, A, g) = m(a', A', g),$$

and the proof of the lemma is complete.

*Definition.* When the genus of  $S$  exceeds 1 the  $S$ -order  $p$  of a L-S-curve  $g$  on  $S$  is taken as the value of  $m(a, A, g)$  shown above to be independent of the choice of admissible  $a$  and  $A$ .

*Theorem 8.1.* The  $S$ -order  $p$  of a L-S-curve  $g$  on an orientable surface  $S$  of genus  $> 1$  is independent of admissible deformations of  $g$ .

The theorem follows from Lemma 8.1, and the independence of  $m(a, A, g)$  of admissible choices of  $a$  and  $A$ .

With  $A$  and  $g$  given we have determined an element  $R_a^g$  in  $G$ , and in stating Lemma 7.2 have made use of a kernel of  $R_a^g$ . Such a kernel is a straight  $H$ -segment of minimum  $H$ -length among  $H$ -segments modeling  $(g)$  on  $M$ . Any such minimizing  $H$ -segment is the kernel of some  $R_a^g$  belonging to  $g$ . With this understood, Lemmas 7.3 and 7.2 can be stated as follows:

*Theorem 8.2.* *Let  $g$  be a locally, simple, sensed closed curve of  $S$ -order  $p$  on an orientable surface  $S$  of genus  $> 1$ . Let  $A$  be an admissible mapping of the  $H$ -plane  $M$  onto  $S$ . When the homotopy class  $(g) \neq 0$  let  $k$  be an  $H$ -segment on  $M$  modeling  $(g)$  under  $A$ , and of minimum  $H$ -length among such segments on  $M$ . Then the  $L$ - $S$ -homotopy-class  $[g]$  is modeled by  $k$  on  $M$  when  $p=0$ , and by a product  $kC_0^p$  when  $p \neq 0$ , where  $C_0^p$  is a positively sensed circle on  $M$ . When  $(g)=0$ ,  $[g]$  is modeled on  $M$  by  $C_0^p$ .*

*No two of the above models are in the same  $L$ - $S$ -homotopy class.*

§ 9. *Non-orientable surfaces.* The case of non-orientable surfaces  $S$  has also been treated by the author. Let  $S'$  be a two-sheeted orientable surface covering  $S$ . Let  $g$  be a  $L$ - $S$ -curve on  $S$ . A point  $P'$  of  $S'$  covering a point  $P$  of  $S$  will be said to *project* into  $P$ .  $L$ - $S$ -curves  $g$  on  $S$  are of two types: Type I preserving a local orientation indicatrix as  $g$  is traced once, Type II inverting such an indicatrix as  $g$  is traced once. Curves of Type I on  $S$  are the continuous projections of  $L$ - $S$ -closed curves on  $S'$ . For curves of Type I,  $[g]$  can be modeled on  $S'$  exactly as in the preceding sections.

To consider curves  $g$  of Type II on  $S$  it is convenient to suppose  $G$  top. modeled by a regular surface  $S^*$ . On  $S^*$  let  $k$  be any fixed regular  $L$ - $S$ -curve of Type II. Let  $C_1$  be a regular curve on  $S^*$  which is a top. circle, which bounds a 2-cell on  $S^*$ , and which is positively tangent to  $k$  at some point of  $k$ . When  $g$  is an arbitrary curve of Type II,  $[g]$  is modeled by  $k$  or a product  $kC_1$ .

For example when  $S$  is a projective plane  $[g]$  is modeled by  $C_1$  or  $C_1^2$  if  $g$  is of Type I, or by  $k$  or  $kC_1$  if  $g$  is of Type II. One can take  $k$  as a straight line in the projective plane. *It follows that one can take  $k, k^2, k^3, k^4$  as models of the L-S-homotopy classes in the projective plane.* No two of these models are in the same L-S-homotopy class.

A proof of these results will be given elsewhere.

### References.

- Morse. *Topological methods in the theory of functions of a complex variable.* Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press (1947). Reference to this monograph will be by letter M.
- Morse and Heins. *Deformation classes of meromorphic functions and their extensions to interior transformations.* Acta Mathematica 79 (1947), pp. 51-103.
- Nielsen, J. *Surface transformation classes of algebraically finite type.* Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Matematisk-fysiske Meddelelser Bind XXI, Nr. 2 (1944), Kobenhavn.

An explicit construction of our polygon  $\Pi$  may be found in the following reference:

- Morse. *A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one.* Transactions of the American Mathematical Society 26 (1924), pp. 25-60.
-



# ON TOPOLOGICAL APPROXIMATION OF POLYTOPES

by

KAROL BORSUK (Warszawa)

1. **Polytopes.** By *polytopes* we shall understand here finite sums of geometric simplexes<sup>1)</sup>. Their topological images will be called *curvilinear polytopes*.

Though the curvilinear polytopes are the most investigated class of spaces studied in the topology, their topological nature remains still mysterious. Their definition is based onto elementar geometrical notions and all efforts to obtain their intrinsic characterization (not tautological) of purely topological nature seem rather hopeless.

In this situation it seems to be not deprived of interest to investigate some classes of spaces with the topological structure approaching this of polytopes, but more general than the class of polytopes.

2. **Transitive classes of mappings.** All spaces considered here are supposed metrizable and separable. Since each such space is homeomorphic to a subset of the Hilbert space<sup>2)</sup>, one can assume that all spaces investigated here are subsets of the Hilbert space. We shall also assume

---

<sup>1)</sup> *Geometric k-dimensional simplex* is a minimal convex subset of the cartesian  $n$ -dimensional space  $C_n$  spans by  $k+1$  linearly independent points (vertices) of  $C_n$ .

<sup>2)</sup> *Hilbert space* is the space consisting of all sequences of real numbers  $\{x_n\}$  with  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$  convergent as points and with the metric

$$\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}.$$

By the celebrated imbedding theorem of L. Urysohn every space is homeomorphic to a subset of the Hilbert space. See, for instance, W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton 1941, p. 64.

that the range as well the set of values of every considered mapping are both contained in the Hilbert space.

There are two different ways to define some classes of spaces more general than the class of polytopes. The first consists on the explicit postulating of some topological properties holding for polytopes, the second — on the investigation, instead of all homeomorphic images of the polytopes, the class of all images of the polytopes by the mappings belonging to some family of mappings more general than the family of all homeomorphisms. This second way corresponds to the ideas of the known „Erlanger Programm“ of Felix Klein<sup>3)</sup> to classify all geometrical properties as invariants of some groups of transformations. But in our investigations we have to do not with the one-one transformations but in general with not univalent<sup>4)</sup> mappings having different sets of values and ranges. Therefore instead of groups of transformations we shall consider the more general *transitive classes* of mappings, that is the classes  $\mathfrak{R}$  of mappings such that if  $\varphi, \psi \in \mathfrak{R}$  and the set of values of  $\varphi$  is identical with the range of  $\psi$  then the mapping  $\psi\varphi$  (considered in the range of  $\varphi$ ) belongs to  $\mathfrak{R}$ . Evidently the intersection of every family of transitive classes of mappings is also a transitive class of mappings.

For instance the class  $\mathfrak{R}_1$  of all continuous mappings is transitive. An other example of a transitive class is a class  $\mathfrak{R}_\infty$  of all homeomorphisms. We shall consider here only transitive classes  $\mathfrak{R}$  satisfying the inclusion

$$(1) \quad \mathfrak{R}_\infty \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}_1.$$

**3. Approximations of the class of polytopes.** Let  $\pi$  denotes the class of all polytopes and  $\mathfrak{R}$  a transitive class of mappings. Let us denote by  $\mathfrak{R}(\pi)$  the class of all spaces of the form  $\varphi(P)$ , where  $P$  runs through all polytopes and  $\varphi$  through all mappings belonging to  $\mathfrak{R}$  and having  $P$  as the range. The inclusion (1) implies that  $\mathfrak{R}(\pi)$  contains all curvilinear poly-

<sup>3)</sup> F. Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Math. Ann. 43 (1893).

<sup>4)</sup> A mapping  $f$  is said *univalent* whenever  $x \neq x'$  implies  $f(x) \neq f(x')$ .

topes. It will be called an *approximation of the class of polytopes*.

If  $\mathfrak{R}$  and  $\mathfrak{R}'$  are two transitive classes of mappings such that

$$\mathfrak{R}(\pi) \subsetneq \mathfrak{R}'(\pi)$$

we shall say that the approximation  $\mathfrak{R}(\pi)$  of the class of polytopes is *better* than the approximation  $\mathfrak{R}'(\pi)$ .

#### 4. Topological approximations of the class of polytopes.

The approximation  $\mathfrak{R}(\pi)$  will be called *topological* if both the class of mappings as well as the class of spaces  $\mathfrak{R}(\pi)$  are intrinsically characterized by means of general topology. The notion of topological approximation has a subjective character. A given approximation  $\mathfrak{R}(\pi)$  becomes topological for this one who is able to characterize intrinsically both the class of mappings  $\mathfrak{R}$  as well as the class of spaces  $\mathfrak{R}(\pi)$ . Following two examples will explain the sense of this notion:

1. The class  $\mathfrak{R}_\infty(\pi)$ , that is the class of all curvilinear polytopes is an approximation (the best one) of the class of polytopes. But this approximation is not topological because (by actual state of science) not any intrinsic characterization of the class  $\mathfrak{R}_\infty(\pi)$  is known.

2. The class  $\mathfrak{R}_1(\pi)$ , that is the class of all continuous images of polytopes is an approximation (the worst one) of the class of polytopes. This approximation is topological, because continuous images of polytopes are the same as locally connected compacta<sup>5)</sup> and the notion of the continuous mapping is topological.

5. The class  $\mathfrak{R}_1(\pi)$  and the polytopes. As we have already remarked, the spaces belonging to  $\mathfrak{R}_1(\pi)$  are the same as locally connected compacta. They were the object of many investigations<sup>6)</sup>. Noteworthy properties of these spaces are:

<sup>5)</sup> By known theorem of Mazurkiewicz-Hahn every locally connected compactum is a sum of a finite number of disjoint locally connected continua.

<sup>6)</sup> A modern treatment of their theory is contained in the book of G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, New-York 1942, American Math. Soc. Colloquium Publications XXVIII.



1° *The finity of the 0-dimensional Betti number.*

2° *The arc-wise connectedness of every component.*

Moreover let us notice that the sum and the cartesian product<sup>7)</sup> of two sets belonging to  $\mathfrak{R}_1(\pi)$  belongs also to  $\mathfrak{R}_1(\pi)$ .

Among the sets belonging to  $\mathfrak{R}_1(\pi)$  there exist spaces with the topological properties entirely different from the properties of polytopes.

Thus for instance:

a) There exist spaces belonging to  $\mathfrak{R}_1(\pi)$  with infinite dimension and also with infinite Betti numbers.

b) There exist in the cartesian 3-dimensional space  $C_3$  a set belonging to  $\mathfrak{R}_1(\pi)$  with vanishing all Betti numbers and a topological mapping of it into itself which has no fixed points<sup>8)</sup>.

c) There exists in the cartesian 4-dimensional space  $C_4$  a 2-dimensional set  $A \in \mathfrak{R}_1(\pi)$  such that the dimension of cartesian product  $A \times A$  is equal to 3<sup>9)</sup>.

We can observe that the fact of the apparition in the class  $\mathfrak{R}_1(\pi)$  of various „pathological“ sets was *a priori* expected, because each compact space may be completed to one belonging to  $\mathfrak{R}_1(\pi)$  by addition of some sequence of segments<sup>10)</sup>.

6. The class  $\mathfrak{R}_2$ . A continuous mapping  $f$  of a space  $X$  onto a space  $Y$  will be said to be *r-continuous*, if there exists a continuous mapping  $\bar{f}$  of  $Y$  into  $X$  satisfying the condition

$$f \bar{f}(y) = y \text{ for every } y \in Y;$$

<sup>7)</sup> Cartesian product of two spaces  $A$  and  $B$  is the space  $A \times B$  whose points are the ordered pairs  $(x, y)$  with  $x \in A$  and  $y \in B$ . The metric in  $A \times B$  is given by the formula  $\varrho[(x, y), (x', y')] = \sqrt{\varrho(x, x')^2 + \varrho(y, y')^2}$ .

<sup>8)</sup> See K. Borsuk, *Sur un continu acyclique qui se laisse transformer topologiquement en lui même sans points invariants*, Fund. Math. 24 (1935), p. 51.

<sup>9)</sup> See L. Pontrjagin, *Sur une hypothèse fondamentale de la théorie de la dimension*, Comptes Rendus de l'Ac. des Sc. 190 (1930), p. 1105-1107.

<sup>10)</sup> M. Wojdysławski, *Sur la contractilité des hyperspaces de continus localement connexes*, Fund. Math. 30 (1938), p. 250, lemme 2.



$r$ -continuous mappings are the same<sup>11)</sup> as the mappings of the form  $hr(x)$  where  $r$  denotes a retraction<sup>12)</sup> and  $h$  a homeomorphism.

The class of all  $r$ -continuous mappings will be denoted by  $\mathfrak{R}_2$ . The class  $\mathfrak{R}_2$  is transitive<sup>11)</sup> and satisfies the inclusion

$$(2) \quad \mathfrak{R}_\infty \subsetneq \mathfrak{R}_2 \subsetneq \mathfrak{R}_1.$$

The list of topological properties invariant under mappings belonging to  $\mathfrak{R}_2$  is much longer than the list of properties invariant under all continuous mappings. In particular to such properties belong<sup>13)</sup>:

1. *dimension*  $\leq n$
2. *local contractibility*.

It follows that all elements of class  $\mathfrak{R}_2(\pi)$  are compact and locally contractible spaces of finite dimension. Conversely, it is known<sup>14)</sup> that all such spaces belong to  $\mathfrak{R}_2(\pi)$ . Thus we can formulate the following

**Theorem.** *The class  $\mathfrak{R}_2(\pi)$  is a topological approximation of the class of polytopes, characterized by compactness, finite dimension and local contractibility.*

Noteworthy properties of the spaces belonging to  $\mathfrak{R}_2(\pi)$  are:  
 $3^\circ$  *The discrete homology groups of every space belonging to  $\mathfrak{R}_2(\pi)$  are subgroups of those of a certain polytope. The same holds also for the fundamental group<sup>15)</sup>.*

<sup>11)</sup> K. Borsuk, *On the Topology of Retracts*, Annals of Math. 48 (1947) p. 1085.

<sup>12)</sup> By *retraction* we understand a continuous mapping  $r(x)$  of a space  $A$  onto  $B \subset A$  satisfying the condition  $r(x) = x$  for every  $x \in B$ . If a retraction of  $A$  onto  $B$  exists then  $B$  is called a *retract* of  $A$ .

<sup>13)</sup> l. c. p. 1085 and 1086.

<sup>14)</sup> K. Borsuk, *Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen*, Fund. Math. 19 (1932), p. 240.

<sup>15)</sup> See S. Lefschetz, *Topics in Topology*, Princeton 1942, Annals of Math. Studies 10, p. 108. Also S. Lefschetz, *On locally connected sets*, Annals of Math. 35 (1934),\* p. 128 and K. Borsuk, *Zur kombinatorischen Eigenschaften der Retrakte*, Fund. Math. 21 (1933), p. 91 and 92.

4° If  $E$  belongs to  $\mathfrak{R}_2(\pi)$  and  $f$  is a continuous mapping of  $E$  into itself with the „number of Lefschetz“  $\Lambda_f \neq 0$ <sup>16)</sup>, then  $f$  has a fixed point<sup>17)</sup>.

It follows from 3° and 4° that the singularities a) and b) mentioned in the Nr. 5 are impossible for spaces belonging to the class  $\mathfrak{R}_2(\pi)$ . The question if the class  $\mathfrak{R}_2(\pi)$  contains spaces with the singularity c) remains open.

7. The property  $\Delta$ . There exist however important topological properties of polytopes which cease hold for all spaces belonging to the class  $\mathfrak{R}_2(\pi)$ . One of such properties is the so called

**Property  $\Delta$ .** A space  $E$  has the property  $\Delta$  whenever for every point  $a \in E$  every neighborhood  $U$  of  $a$  contains another neighborhood  $V$  of  $a$  such that every compact set  $E \subset V$  is homotopic to a point over a compact set  $F \subset U$  such that  $\dim F \leq \dim E + 1$ .

It is clear that the property  $\Delta$  includes the local contractibility. It is known further that

1. For the subsets of the 3-dimensional cartesian space  $C_3$  the property  $\Delta$  is equivalent to the local contractibility<sup>18)</sup>.

2. Every polytope has the property  $\Delta$ <sup>19)</sup>.

3. For the compact spaces having the property  $\Delta$  all so

<sup>16)</sup> The mapping  $f$  induces, for each  $k=0, 1, \dots$ , a homomorphism  $\varphi_k$  of the  $k$ -dimensional rational homology groups  $H_k(E)$  into itself. Since  $E \in \mathfrak{R}_2(\pi)$ , the groups  $H_k(E)$  have finite bases and for  $k > \dim E$  are zero. Hence the trace of  $\varphi_k$  is well defined for  $k=0, 1, \dots$  and it vanishes for  $k > \dim E$ . The „number of Lefschetz“  $\Lambda_f$  is well defined by the formula

$$\Lambda_f = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \text{trace } \varphi_k.$$

<sup>17)</sup> S. Lefschetz, *On the fixed point formula*, Annals of Math. 38 (1937), p. 819-822.

<sup>18)</sup> K. Borsuk, *Ensembles dont les dimensions modulaires de Alexandroff coincident avec la dimension de Menger-Urysohn*, Fund. Math. 27 (1936), p. 79.

<sup>19)</sup> l. c. p. 83-87.

called modular dimensions are the same as the dimension in the usual sense<sup>20</sup>).

4. There exist in  $\mathfrak{R}_2(\pi)$  spaces without the property  $\Delta$ <sup>21</sup>).

Since the dimension modulo 2 of the cartesian product of two compact spaces is equal to the sum of their dimensions modulo 2, we infer that the singularity c) mentioned in the Nr. 5 is impossible for spaces with the property  $\Delta$ .

8. The class  $\mathfrak{R}_{2\Delta}$ . Let us denote by  $\mathfrak{R}_{2\Delta}$  the class of all such transformations  $f \in \mathfrak{R}_2$  that for every compact subset  $E$  of the set  $A$  of arguments and for every  $\varepsilon > 0$  there exists a continuous mapping  $f_\varepsilon$  of  $E$  into  $f(A)$  satisfying the both conditions:

$$(3) \quad \dim f_\varepsilon(E) \leq \dim E,$$

$$(4) \quad \varrho[f(x), f_\varepsilon(x)] < \varepsilon \text{ for every } x \in E.$$

It is evident that

$$\mathfrak{R}_\infty \subset \mathfrak{R}_{2\Delta} \subset \mathfrak{R}_2 \subset \mathfrak{R}_1.$$

**Theorem.** *The class  $\mathfrak{R}_{2\Delta}$  is transitive.*

*Proof.* Let  $f$  and  $g$  be two mappings belonging to  $\mathfrak{R}_2$ , and let  $A$  be the range of  $f$  and  $B = f(A)$  the range of  $g$ . Let  $E$  be a compact subset of  $A$ . For every  $\varepsilon > 0$  there exists a continuous mapping  $f_\varepsilon$  of  $E$  into  $B$  satisfying the conditions (3) and (4). Since the set  $f_\varepsilon(E)$  is compact and  $g \in \mathfrak{R}_{2\Delta}$  there exists a continuous mapping  $g_\varepsilon$  of  $f_\varepsilon(E)$  into  $g(B)$  such that

$$(5) \quad \dim g_\varepsilon f_\varepsilon(E) \leq \dim f_\varepsilon(E)$$

$$(6) \quad \varrho[g_\varepsilon(y), g(y)] < \varepsilon \text{ for every } y \in g_\varepsilon(E).$$

The mapping  $g_\varepsilon f_\varepsilon$  is continuous and it maps  $E$  into  $g(B)$ . By (3) and (5) we have

$$\dim g_\varepsilon f_\varepsilon(E) \leq \dim E$$

and by (4) and (6)

$$\varrho[g_\varepsilon f_\varepsilon(x), g f(x)] \leq \varrho[g_\varepsilon f_\varepsilon(x), g f_\varepsilon(x)] + \varrho[g f_\varepsilon(x), g f(x)]$$

for every  $x \in E$ .

<sup>20</sup>) l. c. p. 90. It is to notice that the question remains open if all modular dimensions are identical with the dimension in usual sense also for all sets belonging to the class  $\mathfrak{R}_2(\pi)$ .

<sup>21</sup>) l. c. p. 78 et K. Borsuk, *Quelques rétractes singuliers*, *Fund Math.* 24 (1935), p. 256.

By (6) the first term of the right hand side is  $< \varepsilon$  and the second term by  $\varepsilon \rightarrow 0$ , converge uniformly to 0, since  $g$  is continuous,  $B$  is compact and  $\varrho[f_\varepsilon(x), f(x)] < \varepsilon$ . It follows that for sufficiently small  $\varepsilon$  the distance  $\varrho[g_\varepsilon f_\varepsilon(x), gf(x)]$  is arbitrarily small. Hence  $gf \in \mathfrak{R}_{2\Delta}$ .

9. Invariance of the property  $\Delta$  under mappings belonging to  $\mathfrak{R}_{2\Delta}$ . We shall now prove the following

**Theorem.** *Let the range  $A$  of mapping  $f \in \mathfrak{R}_{2\Delta}$  be a compact set of finite dimension with the property  $\Delta$ . Then the set of values  $B = f(A)$  has also the property  $\Delta$ .*

*Proof.* Since  $f \in \mathfrak{R}_{2\Delta} \subset \mathfrak{R}_2$  there exists a continuous mapping  $f^*$  of  $B$  into  $A$  such that  $ff^*(y) = y$  for every  $y \in B$ . The mapping  $f^*f$  is a retraction of  $A$  to  $A_0 = f^*(B)$  and, by theorem of Nr. 8, it belongs to  $\mathfrak{R}_{2\Delta}$ , since  $f \in \mathfrak{R}_{2\Delta}$  and  $f^*$  is a homeomorphism. It follows that it suffice to prove the theorem in the case when  $f \in \mathfrak{R}_{2\Delta}$  is a retraction of  $A$  to  $B \subset A$ .

Let  $a \in B$ . By the property  $\Delta$ , for every  $\varepsilon > 0$  there exists<sup>18)</sup> a  $\eta > 0$  such that every compact set  $E \subset A$  such that

$$\varrho(x, a) < \eta \quad \text{for every } x \in E$$

is homotopic to a point over a compact set  $F \subset A$  satisfying the conditions:

$$\begin{aligned} \varrho(x, a) < \varepsilon & \quad \text{for every } x \in F \\ \dim F \leq \dim E + 1. \end{aligned}$$

This means that there exists a continuous function  $\varphi(x, t)$  with the range

$$E \times \langle 0, 1 \rangle$$

and with values belonging to  $F$  such that

$$\varphi(x, 0) = x \quad \text{and} \quad \varphi(x, 1) = \text{const. for every } x \in E.$$

Consider now an arbitrary continuous mapping  $g$  of  $A$  into  $B$  such that

$$(7) \quad g(x) = x \quad \text{for every } x \in E.$$

It is clear that the function  $g\varphi(x, t)$  deforms homotopically the set  $E$  to a point over the set  $g(F) \subset B$ . Consequently



to prove the theorem it suffices to find the mapping  $g$  in such a manner that

$$(8) \quad \varrho [g(x), f(x)] < \varepsilon \text{ for every } x \in E$$

and

$$\dim g(F) \leq \dim F.$$

By (7) the last condition is a consequence of the condition

$$(9) \quad \dim g(F - E) \leq \dim (F - E).$$

In order to find a mapping  $g$  satisfying (7), (8) and (9) let us decompose  $F - E$  into a sum  $\sum_{k=1}^{\infty} F_k$  of compact sets  $F_k$ . By the known sum theorem<sup>22)</sup> of the dimension theory we have

$$(10) \quad \dim g(F - E) = \sup_k \dim g(F_k).$$

Consequently it remains to show that there exist continuous mappings  $g$  of  $F$  into  $B$  satisfying besides the conditions (7) and (8) the inequality

$$(11) \quad \dim g(F_k) \leq \dim F_k \text{ for every } k = 1, 2, \dots$$

Let  $B^F(E)$  denotes the set of all continuous mappings  $g$  of  $F$  into  $B$  satisfying the condition (7), metrized by the formula

$$\varrho(g, g') = \sup_{x \in F} \varrho[g(x), g'(x)] \text{ for every } g, g' \in B^F(E).$$

Since  $B$  is compact,  $B^F(E)$  is a complete space<sup>23)</sup>. Let us denote by  $N_k$ , for every  $k = 1, 2, \dots$ , the subset of  $B^F(E)$  composed by all mappings  $g$  such that

$$(12) \quad \dim g(F_k) > \dim F_k.$$

Furthermore let us denote by  $n_k$  the dimension of  $F_k$  and by  $N_{k,l}$ , for every  $l = 1, 2, \dots$ , the subset of  $B^F(E)$  composed by all mappings  $g$  such that the  $(n_k + 1)$ -th Urysohn's

<sup>22)</sup> See for instance W. Hurewicz and H. Wallman *Dimension Theory*, Princeton 1941, p. 30.

<sup>23)</sup> A metric space  $M$  is said to be *complete* provided every sequence  $\{p_n\}$  of its points such that  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \varrho(p_n, p_{n+k}) = 0$  converges to a point belonging to  $M$ .

constante<sup>24)</sup> of the set  $g(F_k)$  is  $< \frac{1}{l}$ . It is easy to see<sup>25)</sup> that the sets  $N_{k,l}$  are open in  $B^F(E)$  and that

$$(13) \quad N_k = B^F(E) - \prod_{l=1}^{\infty} N_{k,l}$$

Let us prove now that every of the sets  $N_k$  is dense in  $B^F(E)$ . It is to show that for every mapping  $g \in B^F(E)$  and every  $\eta > 0$  there exists a mapping  $g' \in N_{k,l}$  such that

$$(14) \quad \varrho[g(x), g'(x)] < \eta \text{ for every } x \in F.$$

Let  $\varkappa$  denotes a positive number arbitrarily small. There exists a positive number

$$(15) \quad \lambda < \frac{1}{2} \varkappa$$

such that

$$(16) \quad \varrho[f(x), f(y)] < \frac{1}{2} \varkappa \text{ if } x, y \in A \text{ and } \varrho(x, y) < \lambda.$$

By virtue of the property  $\Delta$  for the space  $A$ , there exists<sup>26)</sup> a continuous mapping  $g_\lambda$  of  $F$  into  $A$  such that

$$(17) \quad \begin{cases} g_\lambda(x) = x & \text{for every } x \in E, \\ \varrho[g_\lambda(x), g(x)] < \lambda & \text{for every } x \in F, \\ \dim g_\lambda(F_k) \leq n_k. \end{cases}$$

Since  $f \in \mathfrak{R}_{2\Delta}$  there exists a continuous mapping  $f'$  of  $g_\lambda(F_k)$  into  $B$  such that for every  $x \in g_\lambda(F_k)$  it is

$$(18) \quad \varrho[f'(x), f(x)] < \lambda,$$

$$(19) \quad \dim f' g_\lambda(F_k) \leq n_k.$$

If we put

$$(20) \quad g^*(x) = f' g_\lambda(x) \text{ for every } x \in F_k,$$

$$(21) \quad g^*(x) = x \quad \text{for every } x \in E,$$

<sup>24)</sup> called also the „coefficient d'applatissement de dimension  $n$ “. See P. Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes II*, Fund. Math. 8 (1926), p. 353. Compacta of dimension  $\geq n$  are the same sets as compacta with the  $n$ -th Urysohn constante positive.

<sup>25)</sup> See K. Borsuk, *Sur les transformations continues n'augmentant pas la dimension*, Fund. Math. 28 (1936), p. 92.

<sup>26)</sup> l. c. p. 97.

then we obtain a continuous mapping  $g^*$  of the compact subset  $E + F_k$  of  $F$  into  $B$ . By virtue of (17), (18), (16) and (15) we have for every  $x \in F_k$ .

$$\begin{aligned} \varrho [g^*(x), g(x)] &= \varrho [f' g_\lambda(x), f g(x)] \leq \varrho [f' g_\lambda(x), f g_\lambda(x)] \\ &\quad + \varrho [f g_\lambda(x), f g(x)] < \lambda + \frac{1}{2} \kappa < \kappa. \end{aligned}$$

By (21) we infer that

$$(22) \quad \varrho [g^*(x), g(x)] < \kappa \text{ for every } x \in E + F_k.$$

Since the compact space  $B$ , as a retract of  $A$ , is locally contractible and has the finite dimension, we infer from (22) that, provided that  $\kappa$  is sufficiently small, the mapping  $g^*$  may be prolonged<sup>27)</sup> to a continuous mapping  $g'$  of the whole set  $F$  into  $B$  satisfying the condition (14). Furthermore by (19) and (20) we have

$$\dim g'(F_k) = \dim f' g_\lambda(F_k) \leq n_k.$$

Consequently the mapping  $g'$  belongs to  $N_{k,l}$  for every  $l=1,2,\dots$ . Thus the open set  $N_{k,l}$  is dense in the space  $B^F(E)$ . It follows by (13) that the set  $N_k$  is of the first category in the space  $B^F(E)$ . With regard to the known theorem of R. Baire<sup>28)</sup> we conclude that the set  $B^F(E) - \sum_{k=1}^{\infty} N_k$  is dense in  $B^F(E)$ . Hence there exists a mapping  $g \in B^F(E) - \sum_{k=1}^{\infty} N_k$  satisfying the conditions (7) and (8). By the definition of  $N_k$  the mapping  $g$  satisfies also the condition (11). This completes the proof.

## 10. The class $\mathfrak{R}_{2\Delta}(\pi)$ .

**Lemma.** *If  $A$  is a compactum having the property  $\Delta$ , then every  $r$ -continuous mapping  $f$  of any space  $M$  onto  $A$  belongs to  $\mathfrak{R}_{2\Delta}$ .*

<sup>27)</sup> l. c. p. 95.

<sup>28)</sup> By which if  $A$  is a subset of first category of a complete space  $M$ , then  $M - A$  is dense in  $M$ . See for instance C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa - Lwów 1933, Monografie Matematyczne III, p. 204.

*Proof.* Let  $E$  be a compact subset of  $M$ . The set consisting of all continuous mappings  $\varphi$  of  $M$  onto  $A$  satisfying the condition

$$\dim \varphi(E) > \dim E$$

is of the first category in the complete space  $A^M$  of all continuous mappings of  $M$  into  $A^{26}$ ). Consequently, for every  $\varepsilon > 0$ , there exists a continuous mapping  $f_\varepsilon$  of  $M$  into  $A$  such that  $\dim f_\varepsilon(E) \leq \dim E$  and

$$\rho[f_\varepsilon(x), f(x)] < \varepsilon \text{ for every } x \in E.$$

Thus  $f \in \mathfrak{R}_{2\Delta}(\pi)$ .

**Theorem.** *The class  $\mathfrak{R}_{2\Delta}(\pi)$  is a topological approximation of the class of polytopes characterized by compactness, finite dimension and the property  $\Delta$ .*

*Proof.* Let  $A \in \mathfrak{R}_{2\Delta}(\pi)$ . There exists a polytope  $P$  and a mapping  $f \in \mathfrak{R}_{2\Delta}$  of  $P$  onto  $A$ . But  $P$  is a compactum of finite dimension possessing the property  $\Delta^{19}$ ). Hence, by the condition 1 of Nr 6 and the theorem of Nr 9 we infer that  $A$  is a compactum of finite dimension having the property  $\Delta$ .

Conversely let  $A$  be a compactum of finite dimension having the property  $\Delta$ . Then  $A$  is locally contractible and consequently<sup>14</sup>) it is a  $r$ -continuous image of a polytope  $P$ . Applying the precedent lemma we infer that the  $r$ -continuous mapping  $f$  of  $P$  onto  $A$  belongs to  $\mathfrak{R}_{2\Delta}$  and consequently  $A \in \mathfrak{R}_{2\Delta}(\pi)$ . This completes the proof.

Referring to the known theorem<sup>19</sup>) concerning the sum and the cartesian product of two compacta possessing the property  $\Delta$ , we obtain the two following corollaries:

**Corollary 1.** *Let the common part of two compact sets  $A$  and  $B$  belong to  $\mathfrak{R}_{2\Delta}(\pi)$ . Then the sum  $A + B$  belongs to  $\mathfrak{R}_{2\Delta}(\pi)$  if and only if both sets  $A$  and  $B$  belong to  $\mathfrak{R}_{2\Delta}(\pi)$ .*

**Corollary 2.** *The cartesian product of two sets belonging to  $\mathfrak{R}_{2\Delta}(\pi)$  belongs also to  $\mathfrak{R}_{2\Delta}(\pi)$ .*

**11. The class  $\mathfrak{R}_{2\Delta}(\pi)$  and the polytopes.** It was already mentioned (in the Nr. 7) that there exist in  $\mathfrak{R}_2(\pi)$  sets for which the property  $\Delta$  does not hold. On the other hand



there exist in  $\mathfrak{R}_{2\Delta}(\pi)$  sets not being polytopes; for instance the set

$$E_1 = \sum_{n=1}^{\infty} L_n$$

where  $L_n$  denotes the segment joining the points  $(0,0)$  and  $(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$  of the cartesian plane  $C_2$ . Furthermore there exist sets belonging to  $\mathfrak{R}_1(\pi) - \mathfrak{R}_2(\pi)$ . For instance the set

$$E_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n,$$

where  $\Omega_n$  denotes the circle definite in the cartesian plane  $C_2$  by the equation  $(x - \frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}$ . Thus we have

$$\mathfrak{R}_{\infty}(\pi) \subsetneq \mathfrak{R}_{2\Delta}(\pi) \subsetneq \mathfrak{R}_2(\pi) \subsetneq \mathfrak{R}_1(\pi).$$

The sets belonging to  $\mathfrak{R}_{2\Delta}(\pi)$  have all properties own to the sets belonging to  $\mathfrak{R}_2(\pi)$ , in particular the properties 1° and 2° of Nr. 5 as well as the properties 3° and 4° of Nr. 6. Furthermore the property  $\Delta$  implies that

5° *For the sets belonging to the class  $\mathfrak{R}_{2\Delta}(\pi)$  all modular dimensions<sup>29)</sup> are identical with the dimension in the usual sense<sup>30)</sup>.*

As it was already mentioned, it follows from 5°:

6° *If  $A, B \in \mathfrak{R}_{2\Delta}(\pi)$ , then  $\dim(A \times B) = \dim A + \dim B$ .*

**15. Topological singularities in the class  $\mathfrak{R}_{2\Delta}(\pi)$ .** We have shown that many important topological properties of polytopes hold also for all sets belonging to the class  $\mathfrak{R}_{2\Delta}(\pi)$ . Let us now indicate some topological property of polytopes which ceases to hold in the domain of all sets belonging to  $\mathfrak{R}_{2\Delta}(\pi)$ .

It is known<sup>31)</sup> that there exists in the cartesian 3-dimensional space  $C_3$  a locally contractible compactum  $A$  which

<sup>29)</sup> In the sense of P. Alexandroff, *Dimensionstheorie*, Math. Ann. 106 (1932), p. 161-238.

<sup>30)</sup> See K. Borsuk, *Ensembles dont les dimensions modulaires de Alexandroff coïncident avec la dimension de Menger-Urysohn*, Fund. Math. 27 (1936), p. 90.

<sup>31)</sup> S. Mazurkiewicz and K. Borsuk, *Sur les rétractes absolus indécomposables*, Comptes Rendus de l'Ac. des Sc. 199 (1934), p. 110

is not decomposable into finite sum of absolute retracts<sup>32)</sup> By 1 of Nr. 7 and the theorem of Nr. 10 the set  $A$  belongs to  $\mathfrak{R}_{2A}$ . Thus we see that not every set belonging to  $\mathfrak{R}_{2A}$  is decomposable into a finite sum of absolute retracts. On the other hand, every polytope is by definition sum of simplexes, being evidently absolute retracts.

The existence of decompositions into absolute retracts constitutes an important property of polytopes, on which is based their finite combinatorial theory. The absence of such decompositions for arbitrary sets belonging to the class  $\mathfrak{R}_{2A}(\pi)$  renders the deepening of their topological structure more difficult.

16. The property  $A$ . An important part of the combinatorial contents of the simplicial decomposition is contained in the following notion:

A finite collection  $\Sigma$  of subsets  $E_1, E_2, \dots, E_k$  of a space  $X$  will be called a *net*, if for each sub-collection  $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_m}$  of  $\Sigma$  the set  $\prod_{v=1}^m E_{i_v}$  is either empty or it is a contractible and locally contractible compactum.

The sets  $E_1, E_2, \dots, E_k$  will be called *elements* of the net  $\Sigma$ . It follows from our hypothesis that they are contractible compacta. In particular if the dimension of  $X$  is finite, the elements of a net in  $X$  are absolute retracts<sup>32)</sup>.

A net  $\Sigma$  in  $X$  will be called  $\varepsilon$ -*net* whenever the largest of the diameters of its elements is  $< \varepsilon$ .

Evidently each sub-collection of a net (resp. of a  $\varepsilon$ -net) is a net (resp. a  $\varepsilon$ -net).

---

<sup>32)</sup> The space  $B$  is said to be an *absolute retract* whenever it is a retract of every space  $A \supset B$ . Whenever for every space  $A \supset B$  there exists a neighborhood  $U$  of  $B$  in  $A$  such that  $B$  is a retract of  $U$  then  $B$  is said to be an *absolute neighborhood retract*. Every locally contractible compactum of finite dimension is an absolute neighborhood retract. Absolute retracts are the same as contractible neighborhood retracts. See K. Borsuk, *Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen*, Fund. Math. 19 (1932), p. 229 and 242.

A net  $\Sigma$  in the space  $X$  will be called a *covering of  $X$*  if each point  $x \in X$  lies in the interior of at least one of the elements of  $\Sigma$ .

**Property  $\Lambda$ .** We shall say that a space  $X$  has the property  $\Lambda$  if for every  $\varepsilon > 0$  there exists a  $\varepsilon$ -net in  $X$  being a covering of  $X$ .

**Example.** Let  $X$  denotes a polytope given in a simplicial decomposition  $\mathcal{C}$  and let  $\mathcal{C}'$  denotes its barycentric subdivision. If we denote, for every  $x \in X$ , by  $S(x)$  the sum of all simplexes of  $\mathcal{C}'$  containing  $x$ , we obtain a net being a covering of  $X$ .

In particular if the given simplicial decomposition  $\mathcal{C}$  of  $X$  has sufficiently small simplexes then we obtain in this manner a  $\varepsilon$ -net with  $\varepsilon$  arbitrarily small. Consequently every polytope has the property  $\Lambda$ .

It is known that if  $A, B$  and  $A \cdot B$  are absolute neighborhood retracts<sup>32)</sup>, the sum  $A+B$  is also one. It follows by recurrence that the sum of elements of a net in a space of finite dimension is always an absolute neighborhood retract. In particular, every space of finite dimension having the property  $\Lambda$  is an absolute neighborhood retract.

It is easy to see that for sets lying in the cartesian plane  $C_2$  the opposite statement is also true: every absolute neighborhood retract has the property  $\Lambda$ . We have already mentioned (in the Nr 15) that the least statement cease be true for sets lying in the cartesian 3-dimensional space  $C_3$ .

The question if there exist spaces having the property  $\Lambda$  but deprived of the property  $\Delta$  remains open.

**Theorem.** The cartesian product of two spaces having the property  $\Lambda$  has also this property.

*Proof.* Let  $A$  and  $B$  be two spaces having the property  $\Lambda$

There exists, for given  $\varepsilon > 0$ , a  $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ -net  $\sum_A = (E_1, E_2, \dots, E_k)$  in  $A$  being a covering of  $A$  and a  $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ -net  $\sum_B = (F_1, F_2, \dots, F_l)$  in  $B$  being a covering of  $B$ . The sets  $E_i \times F_j$ , as cartesian products of two contractible and locally contractible com-

pacta are contractible and locally contractible compacta and their diameters are  $< \varepsilon$ . Since the intersection of sets  $E_{i_1} \times F_{j_1}, E_{i_2} \times F_{j_2}, \dots, E_{i_m} \times F_{j_m}$  is evidently identical with the set  $(E_{i_1} \cdot E_{i_2} \cdot \dots \cdot E_{i_m}) \times (F_{j_1} \cdot F_{j_2} \cdot \dots \cdot F_{j_m})$ , we infer that it is either empty or contractible and locally contractible compactum. Consequently the sets  $E_i \times F_j$  constitute a  $\varepsilon$ -net in  $A \times B$ . Finally, if a point  $a \in A$  lies in the interior of  $E_i$  and a point  $b \in B$  in the interior of  $F_j$ , then the point  $(a, b) \in A \times B$  lies evidently in the interior of  $E_i \times F_j$ . Thus we see that the net constituted by the sets  $E_i \times F_j$  is a covering of  $A \times B$ . This proves the theorem.

**Problems:** 1. Let  $A \times B$  be a set having the property  $\Lambda$ . Is it true that both sets  $A$  and  $B$  have the property  $\Lambda$ ?

2. Let  $A, B$  and  $A \cdot B$  are sets with the property  $\Lambda$ . Is it true that  $A + B$  has also the property  $\Lambda$ ?

**17. The class  $\mathfrak{R}_{2A}$ .** Let us denote by  $\mathfrak{R}_{2A}$  the class of all  $r$ -continuous mappings  $f$  such that for every  $\varepsilon > 0$  there exists a  $\eta > 0$  such that for every  $\eta$ -net

$$\Sigma = (E_1, E_2, \dots, E_k)$$

lying in the space  $X$  of arguments there exists a  $r$ -continuous mapping  $f'$  of  $X$  onto  $Y = f(X)$  satisfying following both conditions:

1)  $\varrho[f(x), f'(x)] < \varepsilon$  for every  $x \in X$ ,

2) The sets  $f'(E_1), f'(E_2), \dots, f'(E_k)$  constitute a net in  $Y$ . It is evident that

$$\mathfrak{R}_\infty \subset \mathfrak{R}_{2A} \subset \mathfrak{R}_2 \subset \mathfrak{R}_1.$$

**Theorem.** The class  $\mathfrak{R}_{2A}$  is transitive.

*Proof.* Let  $f$  and  $g$  be two mappings belonging to  $\mathfrak{R}_{2A}$  and let  $A$  denotes the range of  $f$  and  $B = f(A)$  be the range of  $g$ . For every  $\varepsilon > 0$  there exists a  $\eta > 0$  such that for every  $\eta$ -net  $\Sigma_B = (F_1, F_2, \dots, F_k)$  lying in  $B$  there exists a  $r$ -continuous mapping  $g'$  of  $B$  onto  $C = g(B)$  such that

$$\varrho[g(y), g'(y)] < \frac{\varepsilon}{2} \text{ for every } y \in B$$

and that the sets  $g'(F_1), g'(F_2), \dots, g'(F_k)$  constitute a  $\frac{\varepsilon}{2}$ -net in  $C$ .



Furthermore we can suppose that the number  $\eta$  is so small that

$$\varrho [g(y), g(y')] < \frac{\varepsilon}{2} \text{ provided that } y, y' \in B \text{ and } \varrho(y, y') < \eta.$$

For this  $\eta$  there exists a  $\lambda > 0$  such that for every  $\lambda$ -net  $\Sigma_A = (E_1, E_2, \dots, E_k)$  lying in  $A$  there exists a  $r$ -continuous mapping  $f'$  of  $A$  onto  $B$  such that

$$\varrho [f(x), f'(x)] < \eta \text{ for every } x \in A$$

and that the sets  $f'(E_1), f'(E_2), \dots, f'(E_k)$  constitute a  $\eta$ -net in  $B$ . If for given  $\lambda$ -net  $\Sigma_A = (E_1, E_2, \dots, E_k)$  in  $A$  we put

$$F_i = f'(E_i) \text{ for } i = 1, 2, \dots, k,$$

then we infer from Nr. 6 that  $g'f'$  is a  $r$ -continuous mapping of  $A$  onto  $C$  and that the sets  $g'f'(E_i), i = 1, 2, \dots, k$ , constitute a  $\varepsilon$ -net in  $A$ . Furthermore we have for every  $x \in A$ :

$$\begin{aligned} \varrho [gf(x), g'f'(x)] &\leq \varrho [gf(x), gf'(x)] + \varrho [gf'(x), g'f'(x)] \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hence  $gf$  belongs to  $\mathfrak{R}_{2A}$  and the theorem is proved.

**18. Invariance of the property  $\Lambda$  under mappings belonging to the class  $\mathfrak{R}_{2A}$ .** We shall now prove the following

**Theorem.** *Let the range  $A$  of  $f \in \mathfrak{R}_{2A}$  be a compactum having the property  $\Lambda$ . Then the set of values  $B = f(A)$  has also the property  $\Lambda$ .*

*Proof.* For arbitrarily given  $\varepsilon > 0$  there exists a  $\eta > 0$  such that for every  $\eta$ -net  $\Sigma = (E_1, E_2, \dots, E_k)$  lying in  $A$  there exists a  $r$ -continuous mapping  $f'$  of  $A$  onto  $B$  such that the sets  $f'(E_1), f'(E_2), \dots, f'(E_k)$  constitute a  $\varepsilon$ -net  $\Sigma'$  in  $B$  and that  $\varrho [f(x), f'(x)] < \varepsilon$  for every  $x \in A$ . In particular let us assume that the net  $\Sigma$  is a covering of  $A$  and let  $\bar{f}$  denotes a continuous mapping of  $B$  onto  $A$  satisfying the condition

$$f' \bar{f}(y) = y \text{ for every } y \in B.$$

Then  $f'$  maps the set  $\bar{f}(B) \subset A$  on  $B$  topologically. Since  $\Sigma$  is a covering of  $A$ , there exists for every point  $a \in \bar{f}(B)$  an element  $E_i$  of  $\Sigma$  such, that  $a$  lies in the interior of  $E_i$ . Then  $f'(a)$  lies in the interior of  $f'(E_i)$  (in the space  $B$ ).

Hence the  $\varepsilon$ -net  $\Sigma'$  constitutes a covering of  $B$ , that is  $B$  has the property  $\mathcal{A}$ .

19. The class  $\mathfrak{R}_{2,\mathcal{A}}(\pi)$ . We shall prove the following

**Theorem.** *The class  $\mathfrak{R}_{2,\mathcal{A}}(\pi)$  is a topological approximation of the class of polytopes. The sets belonging to  $\mathfrak{R}_{2,\mathcal{A}}(\pi)$  are the same as finite-dimensional compacta having the property  $\mathcal{A}$ .*

*Proof.* Since all polytopes are finite-dimensional sets having the property  $\mathcal{A}$ , we infer from the theorem of the Nr. 18 that every set belonging to  $\mathfrak{R}_{2,\mathcal{A}}(\pi)$  is finite-dimensional and has the property  $\mathcal{A}$ .

Conversely, let  $B$  be a finite-dimensional compactum having the property  $\mathcal{A}$ . We can assume that  $B$  lies in the  $k$ -dimensional cartesian space  $C_k$ <sup>33)</sup> and that  $k > \dim B$ . By the property  $\mathcal{A}$  the set  $B$  is an absolute neighborhood retract and consequently there exists a homogeneously  $k$ -dimensional polytope  $P \subset C_k$  being a neighborhood of  $B$  (in the space  $C_k$ ) and a retraction  $f$  mapping  $P$  onto  $B$ . We shall prove that  $f \in \mathfrak{R}_{2,\mathcal{A}}$ .

Let  $\varepsilon$  denotes a positive number arbitrarily given and let  $F_1, F_2, \dots, F_m$  be absolute retracts constituting a  $\varepsilon$ -net in  $B$  being a covering of  $B$ . There exists a positive number  $\varepsilon'$  such that every subset of  $B$  having the diameter  $< \varepsilon'$  lies in at least one of the sets  $F_1, F_2, \dots, F_m$ . Furthermore there exists a positive number  $\eta$  such that every subset of  $P$  having the diameter  $< \eta$  is mapped by  $f$  onto a set having the diameter  $< \varepsilon'$ .

Let  $E_1, E_2, \dots, E_l$  denotes a  $\eta$ -net in  $P$  being a covering of  $P$  and such that every set  $E_i$  contains interior points. Consequently  $\dim E_i = k > \dim B$  and there exists a point  $a_i \in E_i - B$ . We can assume that  $a_i \neq a_j$  for  $i \neq j$ . It follows that there exists a positive number  $\alpha$  such that if  $K_i$  denotes the open spherical neighborhood of  $a_i$  in  $C_k$  with the radius  $\alpha$ , then

$$\begin{aligned} K_i &\subset E_i - B && \text{for } i = 1, 2, \dots, l, \\ K_i \cdot K_j &= 0 && \text{for } i \neq j. \end{aligned}$$

<sup>33)</sup> By the known „imbedding theorem“ of Menger-Nöbeling. See for instance W. Hurewicz and H. Wallman, l. c. p. 56.

Let us denote by  $K_i^*$  the closed spherical neighborhood of  $a_i$  with the radius  $\frac{a}{2}$ . By virtue of the definition of the number  $\eta$  there exists for every  $\nu=1, 2, \dots, l$  an index  $j_\nu$  such, that

$$f(E_\nu) \subset F_{j_\nu}.$$

Let us put

$$f'(x) = f(x) \quad \text{for } x \in P - \sum_{\nu=1}^l K_\nu.$$

In the set  $K_\nu^*$  let us define the mapping  $f'$  in such a manner that it maps the set  $K_\nu^*$  continuously onto the absolute retract  $F_{j_\nu}$ . The mapping  $f'$  can be prolonged continuously onto disjoint sets  $K_\nu - K_\nu^*$  in such a manner, that the values of  $f'$  in the set  $K_\nu - K_\nu^*$  belong to  $F_{j_\nu}$ . This is possible because all values of  $f'$  for the arguments lying in the boundary of the set  $K_\nu - K_\nu^*$  belong to  $F_{j_\nu}$  and this last set is an absolute retract. Thus we obtain a continuous mapping  $f'$  of  $P$  into  $B$ . Since for every  $x \in B$  it is  $f'(x) = x$  this mapping  $f'$  is a retraction of  $P$  onto  $B$ .

For  $x \in K_\nu$  we have  $f(x) \in f(E_\nu) \subset F_{j_\nu}$  and  $f'(x) \in f'(E_\nu) = F_{j_\nu}$ . But the diameter of  $F_{j_\nu}$  is  $< \varepsilon$ . Hence  $\rho[f(x), f'(x)] < \varepsilon$  for every  $x \in P$ . Consequently  $f \in \mathfrak{R}_{2A}$  and  $B \in \mathfrak{R}_{2A}(\pi)$ .

20. The class  $\mathfrak{R}_3$ . If we put

$$\mathfrak{R}_3 = \mathfrak{R}_{2A} \cdot \mathfrak{R}_{2A}$$

we obtain (by the theorems of the Nr. 8 and 17) a transitive class of mappings satisfying the inclusions:

$$\mathfrak{R}_\infty \subset \mathfrak{R}_3 \subset \mathfrak{R}_{2A},$$

$$\mathfrak{R}_\infty \subset \mathfrak{R}_3 \subset \mathfrak{R}_{2A}.$$

Accordingly to the theorems of the Nr. 9 and 18 both properties  $\Delta$  and  $\Lambda$  are invariant under mappings belonging to  $\mathfrak{R}_3$ . It follows that the sets belonging to  $\mathfrak{R}_3(\pi)$  are finite-dimensional compacta possessing both properties  $\Delta$  and  $\Lambda$ .

Conversely, let  $B$  be a finite-dimensional compactum having both properties  $\Delta$  and  $\Lambda$ . By the theorem of the Nr. 19 there exists a transformation  $f \in \mathfrak{R}_{2,\Delta}$  mapping a polytope  $P$  on  $Y$ . Furthermore by the lemma of the Nr. 10 we have  $f \in \mathfrak{R}_{2,\Delta}$ . Consequently  $f \in \mathfrak{R}_3$  and we can formulate the following

**Theorem.** *The class  $\mathfrak{R}_3(\pi)$  is a topological approximation of the class of polytopes. The sets belonging to  $\mathfrak{R}_3(\pi)$  are the same as finite-dimensional compacta having both properties  $\Delta$  and  $\Lambda$ .*

---



# SUR LES INTÉGRALES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES TANGENTES AUX HYPERPLANS CARACTÉRISTIQUES ISSUS DU POINT SINGULIER<sup>1)</sup>

par

TADEUSZ WAŻEWSKI (Kraków).

310-149.  
Considérons un système d'équations différentielles

$$\frac{du_i}{dt} = \varphi^i(u_1, \dots, u_n), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (0,1)$$

et supposons que l'origine des coordonnées  $\Theta = (0, \dots, 0)$  en soit un point singulier, c. - à - d. que  $\varphi^i(0, \dots, 0) = 0$ , ( $i = 1, \dots, n$ ). Supposons que les  $\varphi^i$  soient continues au voisinage de  $\Theta$  et qu'elles possèdent la différentielle de Stolz au point  $\Theta$ , sans être forcément différentiables autrement. Pour illustrer notre théorème principal (Théorème 2 du § 8) sur un exemple particulier, supposons que les racines caractéristiques de la matrice

$$M = \| a_{ij} \| = \| \varphi_{u_j}^i(\Theta) \|^2$$

soient réelles et différentes entre elles

$$s_1 < s_2 < s_3 < \dots < s_i < s_{i+1} < \dots < s_n.$$

Désignons par  $d_1, d_2, \dots, d_n$  les droites caractéristiques correspondant consécutivement à ces racines. Si pour un certain  $i$  on a  $s_i < 0$  alors la totalité des intégrales, qui pour  $t = +\infty$  sont au point  $\Theta$  tangentes à  $d_i$ , se projette sur le plan passant par les droites  $d_1, \dots, d_{i-1}, d_i$  comme un ensemble à  $i$  dimensions.

Dans le Théorème 2 le rôle de la droite  $d_i$  est joué par une variété caractéristique (c. - à - d. un hyperplan caractéristique pouvant, en particulier, se réduire à une droite)

---

<sup>1)</sup> Présenté le 9. XII, 1947 à la Soc. Pol. de Math. (Section de Cracovie)  
cf. ces Annales T. XX. p. 390.

qui jouit d'une certaine propriété (est „cohérente“ et „négative“, — cf. les définitions du § 7).

Ce théorème paraît être nouveau même dans le cas des  $\varphi^i$  analytiques. Il paraît être intéressant qu'il est juste aussi dans le cas où l'on ne suppose pas l'unicité des intégrales du système (0,1) (cf. Remarque 6, § 9). La démonstration est basée sur un principe topologique que nous avons indiqué précédemment.<sup>2)</sup>

Les Lemmes 1 et 1 bis (§ 6) sont susceptibles d'applications aussi aux autres problèmes asymptotiques. La longueur de la démonstration de la Remarque 2 (§ 6) provient de ce que nous avons développé les détails de l'idée directrice conduisant aux équations et inégalités différentielles qui permettent de déterminer d'une façon naturelle les fonctions  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Nous avons ainsi évité l'artifice conduisant à une démonstration beaucoup plus rapide et consistant à définir ces fonctions par les formules (6,45), (6,47), (6,48) et (6,49) sans expliquer les raisons de telles définitions.

### § 1. Définitions et notations. Soit

$$\frac{d\vartheta^i}{dt} = \varphi^i(t, \vartheta^1, \dots, \vartheta^n), \quad (i=1, \dots, n) \quad (1,1)$$

un système d'équations différentielles que nous écrirons aussi *sous la forme vectorielle*

$$\frac{d\Theta}{dt} = \Phi(t, \Theta) \quad (1,1)$$

où  $\Theta = (\vartheta^1, \dots, \vartheta^n)$  désigne le vecteur ayant les coordonnées  $\vartheta^1, \dots, \vartheta^n$  et  $\Phi$  a une signification analogue. — Nous supposons que  $\Phi$  soit définie dans un ensemble ouvert  $\Omega$  (et là seulement) qu'elle y soit continue et que par chaque point  $P \in \Omega$  passe une intégrale unique de (1,1) qui sera désignée par

$$I(t, P) \quad (1,2)$$

<sup>2)</sup> T. Ważewski. *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires.* Ann de la Soc. Polon. d. Math. T. XX p. 279—313. Ce travail sera cité dans la suite sous l'abréviation „Principe top.“ Une note sur ce sujet a paru dans les Rendiconti dei Lincei (Série VIII, t. III, 1947. p. 210).

et qui est, par hypothèse, prolongée à droite et à gauche jusqu' à la frontière de  $\Omega$ . Si  $\Omega$  n'est pas borné le „point à l'infini“ est considéré comme un point frontière au sens large de  $\Omega$ . La classe de points qui contient le point  $P$  et tous les points de  $I(t,P)$  situés à droite de  $P$  sera dite *demi-intégrale droite saturée* issue de  $P$  et sera désignée par

$$Demi_{(+)}I(P). \quad (1,3)$$

Soit  $\omega$  un sousensemble ouvert de  $\Omega$

$$\omega \subset \Omega. \quad (1,4)$$

Dans le cas où

$$Demi_{(+)}I(P) \subset \omega \quad (1,5)$$

cette demi-intégrale sera dite *demi-intégrale asymptotique relativement à  $\omega$  et  $\Omega$* .

§ 2. Voici maintenant l'hypothèse servant comme pré-misse d'un théorème concernant l'existence des demi-intégrales asymptotiques.

**Hypothèse H.** 1°) Les fonctions  $\varphi^i$  intervenant dans le système (1,1) sont continues dans un ensemble ouvert  $\Omega$ . (Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer (et nous le supposons) qu'elles ne soient pas définies en dehors de  $\Omega$ ).

2°) Par tout point  $P$  de  $\Omega$  passe une intégrale unique de (1,1) (*unicité*).

3°) Les fonctions

$$l^\alpha(t, \vartheta^1, \dots, \vartheta^n), m^\beta(t, \vartheta^1, \dots, \vartheta^n), (\alpha = 1, \dots, p; \beta = 1, \dots, q) \quad (2,1)$$

possèdent les dérivées partielles du premier ordre continues dans  $\Omega$ .

4°) L'ensemble  $\omega$  (dit *polyfacial régulier*) et les ensembles  $L^\gamma$  et  $M^\delta$  ( $\gamma = 1, \dots, p; \delta = 1, \dots, q$ ) (dits *faces de  $\omega$  relatives à  $\Omega$* ) sont composés des points vérifiant les relations

$$l^\alpha(P) < 0, m^\beta(P) < 0 \quad (\text{ensemble } \omega) \quad (2,1 \text{ bis})$$

$$P \in \Omega, l^\gamma(P) = 0 \quad \left. \vphantom{P \in \Omega} \right\} (2,2)$$

$$l^\alpha(P) \leq 0 \quad (\alpha = 1, \dots, p), m^\beta(P) \leq 0 \quad (\beta = 1, \dots, q) \quad \left. \vphantom{l^\alpha(P)} \right\} (\text{face } L^\gamma)$$

$$P \in \Omega, m^\delta(P) = 0 \quad \left. \vphantom{P \in \Omega} \right\} (2,3)$$

$$l^\alpha(P) \leq 0 \quad (\alpha = 1, \dots, p), m^\beta(P) \leq 0 \quad (\beta = 1, \dots, q) \quad \left. \vphantom{l^\alpha(P)} \right\} (\text{face } M^\delta)$$

5°) En définissant, pour une fonction  $g(P) = g(t, \vartheta^1, \dots, \vartheta^n)$  la pente de  $g$  relative au système (1,1) par la formule

$$\text{pente}(g, P) = \text{pente } g = g_t(P) + \sum_{i=1}^n g_{\vartheta^i}(P) \varphi^i(P) \quad (2,4)$$

on a

$$\text{pente } l^r(P) > 0 \text{ lorsque } P \in L^r, \quad (2,5)$$

$$\text{pente } m^s(P) < 0 \text{ lorsque } P \in M^s \quad (2,6)$$

**Remarque 1.** *Rétracte.* Soit  $A \subset B$ , et soit  $P$  un point variable dans  $B$ . On dit qu'une transformation  $Q = T(P)$  effectue une rétraction de  $B$  en  $A$  lorsqu'elle est continue dans  $B$ , lorsque  $T(P) \in A$  pour  $P \in B$  et  $T(P) = P$  pour  $P \in A$ . Si une telle transformation existe,  $A$  est appelé, d'après M. BORSUK, un rétracte de  $B$ .

On sait que la frontière d'une sphère fermée n'est pas un rétracte de cette sphère (sphère fermée = l'ensemble des points intérieurs et frontières d'une sphère à plusieurs dimensions).

**Théorème 1.** Admettons l'Hypothèse  $H$  relativement au système (1,1) et posons

$$S = \sum_{r=1}^p L^r - \sum_{s=1}^q M^s.$$

Supposons qu'un ensemble  $E$  possède les propriétés suivantes: 1°)  $E \subset \omega + S$ , 2°)  $ES$  est un rétracte de  $S$ , 3°)  $ES$  n'est pas un rétracte de  $E$ .

Cela posé il existe un point  $P_0 = (t_0, \vartheta_0^1, \dots, \vartheta_0^n)$ , tel que  $P_0 \in E - S$ , (c'est à dire  $P_0 \in E\omega$ )

$$\text{Demi}_+ I(P_0) \subset \omega.$$

(Cette inclusion exprime que cette demi-intégrale est asymptotique relativement à  $\omega$  et  $\Omega$  [cf § 1]).

Si, en plus, la frontière de  $\omega$  touche la frontière  $\Omega$  exclusivement sur le plan  $t = +\infty$ ,<sup>3)</sup> alors cette demi-intégrale existe dans un intervalle qui n'est pas borné supérieurement.

<sup>3)</sup> Ceci veut dire ce qui suit: Si  $P_\nu = (t_\nu, \vartheta_\nu^1, \dots, \vartheta_\nu^n)$ ,  $P_\nu \in \omega$  et aucune suite partielle de  $\{P_\nu\}$  ne tend vers un point (fini) de  $\Omega$  alors  $t_\nu \rightarrow +\infty$ . Cette partie du théorème résulte du Théorème 3 du *Principe top.* (loc. cit. p. 304).



Ce théorème constitue une conséquence immédiate des Théorèmes 5 et 2 du *Princ. top.* (loc. cit. p. 310 et 303).

§ 3. Détails relatifs à la notation vectorielle. Nous regarderons, dans la suite, comme identiques le point  $\Theta = (\vartheta^1, \dots, \vartheta^n)$  et le vecteur  $\Theta$  issu de l'origine et ayant les mêmes coordonnées  $(\vartheta^1, \dots, \vartheta^n)$ . Nous désignerons par

$$|\Theta| = \sqrt{\sum (\vartheta^i)^2}$$

le module du vecteur  $\Theta$ . Si  $\Gamma$  est un autre vecteur, la distance des points  $\Theta$  et  $\Gamma$  est donnée par la formule

$$\text{distance}(\Theta, \Gamma) = |\Gamma - \Theta|.$$

Posons  $X = (x^1, \dots, x^p)$ ,  $Y = (y^1, \dots, y^q)$ ,  $Z = (z^1, \dots, z^r)$ .

Nous posons par définition

$$(X, Y, Z) = (x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q, z^1, \dots, z^r).$$

Ce sera un point (ou un vecteur) situé dans l'espace à  $p + q + r$  dimensions.  $(t, X, Y, Z)$  désigne un point dans l'espace à  $p + q + r + 1$  dimensions. Dans l'espace des points  $(X, Y, Z)$  l'équation  $|Z| = 0$  (équivalente au système  $z^1 = 0, \dots, z^r = 0$ ) représente un hyperplan à  $p + q$  dimensions qui sera dit *plan*  $X, Y$ . Le système d'équations  $|X| = 0$ ,  $|Z| = 0$  représente le *plan*  $Y$  (à  $q$  dimensions).

Le *produit scalaire* des vecteurs  $\Theta$  et  $\Gamma$  sera désigné par  $\Theta\Gamma = \sum \vartheta^i \gamma^i$ . On a  $\Theta^2 = \Theta \cdot \Theta$ . En posant  $M = (X, Y, Z)$ ,  $M_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$  on aura  $MM_1 = XX_1 + YY_1 + ZZ_1$ ,  $|M| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ ,  $M^2 = |M|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ .

§ 4. Une ligne (donnée paramétriquement) tangente en un point à un hyperplan pour  $t = +\infty$ . Soit

$$\Theta = \Psi(t) \tag{4,1}$$

l'équation paramétrique d'une ligne  $L$  située dans l'espace à  $n$  dimensions. Supposons que  $\Psi(t)$  soit définie et continue dans un intervalle  $\tau \leq t < +\infty$ , que  $\Psi(t) \neq (0, \dots, 0)$  et que  $\Psi(t) \rightarrow (0, \dots, 0)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Soit  $\Pi$  un hyperplan à  $k$  dimensions passant par l'origine  $(0, \dots, 0)$  et soit  $\varrho(t)$  la distance du point  $\Psi(t)$  au plan  $\Pi$ . Si

$$\frac{\varrho(t)}{|\Psi(t)|} \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty \tag{4,2}$$

alors la ligne  $L$  sera dite tangente en point  $(0, \dots, 0)$  (au sens du contingent de M. BOULIGAND) au plan  $\Pi$  pour  $t = +\infty$ .

§ 5. L'idée directrice de la démonstration du Lemme 1 (cf. § 6). Soit

$$X = X(t), \quad Y = Y(t), \quad Z = Z(t) \quad (5,1)$$

l'équation paramétrique d'une ligne  $L$  située dans l'espace à  $n = p + q + r$  dimensions et définie pour  $\tau \leq t < +\infty$ . Nous indiquerons les conditions suffisantes pour que  $L$  soit à l'origine des coordonnées tangente au plan  $Y$  pour  $t = +\infty$ . Supposons que les fonctions  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$ ,  $\delta(t)$  soient positives et continues dans l'intervalle  $\tau \leq t < +\infty$  et qu'elles tendent vers zéro avec  $t \rightarrow +\infty$ . Considérons l'ensemble polyfacial  $\omega$  défini par les inégalités

$$T < t, \quad 0 < \alpha(t) < |Y| < \beta(t), \quad |X| < \gamma(t) |Y|, \quad |Z| < \delta(t) |Y| \quad (5,2)$$

ou, ce qui revient au même, par les inégalités (cf. les notations du § 2)

$$\left. \begin{aligned} m^1(P) = T - t < 0, \quad m^2(P) = [\alpha(t)]^2 - Y^2 < 0, \\ m^3(P) = Y^2 - [\beta(t)]^2 < 0, \quad m^4(P) = X^2 - [\gamma(t)]^2 Y^2 < 0 \\ l^1(P) = Z^2 - [\delta(t)]^2 Y^2 < 0, \end{aligned} \right\} \quad (5,3)$$

où  $P = (t, X, Y, Z)$ .

Or une condition suffisante pour que la ligne (5,1) soit au point  $(0, \dots, 0)$  tangente au plan  $Y$  pour  $t = +\infty$ , consiste en ce qu'elle soit entièrement située dans  $\omega$ , ou, ce qui revient au même, qu'elle satisfasse aux inégalités (5,2) ou (5,3). On aura, en effet (cf. § 4)

$$\varrho(t) = \sqrt{[X(t)]^2 + [Z(t)]^2} \leq \sqrt{[\gamma(t)]^2 + [\delta(t)]^2} |Y|,$$

$$|\Psi(t)| = \sqrt{[X(t)]^2 + Y(t)^2 + [Z(t)]^2} \geq |Y(t)| > 0$$

et, par suite,

$$\frac{\varrho(t)}{|\Psi(t)|} \leq \frac{\varrho(t)}{|Y(t)|} \leq \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \rightarrow 0 \quad \text{avec } t \rightarrow +\infty.$$

Dans le Lemme 1 (§ 6) nous envisagerons un système de  $p + q + r$  équations différentielles de la forme

$X'(t) = f(t, X, Y, Z), Y'(t) = g(t, X, Y, Z), Z'(t) = h(t, X, Y, Z)$  dont les deuxièmes membres sont nuls lorsque  $|X|=|Y|=|Z|=0$ . Il s'agira de savoir si ce système admet des intégrales de la forme (5,1) qui au point  $(0, \dots, 0)$  sont tangentes au plan  $Y$  pour  $t = +\infty$ . Or nous répondrons à cette question en appliquant le Théorème 1 (§ 2). Il suffira, à cet effet, de déterminer les fonctions,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  d'une telle façon que les inégalités (2,5) et (2,6) soient vérifiées. Les  $Demi_+(P)$  asymptotiques relativement à  $\omega$  et  $\Omega$  (c. - à - d. situées dans  $\omega$ ) seront forcément au point  $(0, \dots, 0)$  tangentes au plan  $Y$  pour  $t = +\infty$ . Le Théorème 1 permettra d'évaluer, en un certain sens, le „nombre“ de telles intégrales.

La détermination des fonctions  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sera ramenée à la solution de certaines inégalités différentielles.

§ 6. Lemme 1. En tenant compte des notations précédentes considérons le système de  $p+q+r$  équations différentielles, système écrit sous la forme vectorielle

$$\left. \begin{aligned} X'(t) &= F(t, X, Y, Z) + R \cdot U(t, X, Y, Z) \\ Y'(t) &= G(t, X, Y, Z) + R \cdot V(t, X, Y, Z) \\ Z'(t) &= H(t, X, Y, Z) + R \cdot W(t, X, Y, Z) \end{aligned} \right\} \quad (6,1)$$

$$\text{où } X = (x^1, \dots, x^p), Y = (y^1, \dots, y^q), Z = (z^1, \dots, z^r) \quad (6,2)$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (6,3)$$

Relativement à ce système nous admettons les hypothèses suivantes:

I. Les fonctions<sup>4)</sup>  $F, G, H, U, V, W$ , sont continues dans l'ensemble ouvert  $\Omega$  défini par les relations

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 < r_0^2, \quad t_0 < t < +\infty \quad (\text{ensemble } \Omega) \quad (6,4)$$

où  $r_0$  et  $t_0$  sont fixes, finis et  $r_0 > 0$ .

II. Par tout point  $P = (t^*, X^*, Y^*, Z^*) \in \Omega$  passe une intégrale unique  $I(t, P)$  du système (6,1)

$$\text{III. } U^2 + V^2 + W^2 \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty \text{ et } X^2 + Y^2 + Z^2 \rightarrow 0 \quad (6,5)$$

IV. Il existe quatre nombres fixes  $A, A_1, B, B_1$ .

<sup>4)</sup>  $F(t, X, Y, Z)$  est un vecteur à  $p+q+r$  coordonnées qui correspond au vecteur  $(t, X, Y, Z)$  à  $p+q+r+1$  coordonnées. Il en est de même de  $G, \dots, W$ .

$$-\infty < A < A_1 < B < B_1 < 0 \quad (6.6)$$

tels que les inégalités

$$\frac{XF}{X^2} < A < A_1 < \frac{YG}{Y^2} < B < B_1 < \frac{ZH}{Z^2} \quad (6.7)$$

subsistent pour tous les points de  $\Omega$  pour lesquels les dénominateurs ne sont pas nuls<sup>5)</sup>.

Soit  $C$  la classe des points  $(X, Y, Z)$  situés sur ces intégrales<sup>6)</sup> du système (6,1) qui sont à l'origine des coordonnées<sup>7)</sup> tangentes au plan  $Y$  pour  $t = +\infty$ .

Ceci étant admis, nous affirmons que la projection orthogonale  $D$  de  $C$  sur le plan  $X, Y$  constitue un ensemble à  $p+q$  dimensions<sup>8)</sup>.

En vertu des considérations insérées au § 5 notre lemme se trouvera démontré lorsque l'on aura prouvé que la remarque suivante est juste.

**Remarque 2.** Dans les hypothèses du Lemme 1 il existe un nombre fixe fini  $T$  ( $T > t_0$ ) et quatre fonctions

$$\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \delta(t) \quad (6.8)$$

jouissant des propriétés suivantes:

$Q_1$ ) Dans l'intervalle

$$T \leq t < +\infty \quad (6.9)$$

les fonctions  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  possèdent les dérivées continues du premier ordre et satisfont aux inégalités

$$0 < \alpha(t) < \beta(t) < r_0, \quad 0 < \gamma(t) \leq 1, \quad 0 < \delta(t) \leq 1. \quad (6.10)$$

$$Q_2) |\alpha(t)| + |\beta(t)| + |\gamma(t)| + |\delta(t)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty \quad (6.11)$$

$Q_3$ ) En posant

$$P = (t, X, Y, Z), \quad (6.12)$$

$$\left. \begin{aligned} m^1(P) &= T - t, & m^2(P) &= [\alpha(t)]^2 - Y^2, \\ m^3(P) &= Y^2 - [\beta(t)]^2, & m^4(P) &= X^2 - [\gamma(t)]^2 Y^2, \\ l^1(P) &= Z^2 - [\delta(t)]^2 Y^2, \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

<sup>5)</sup> En raison de la continuité on a dans  $\Omega$ :  $XF \leq AX^2$ ,  $A_1 Y^2 \leq YG \leq BY^2$ ,  $B_1 Z^2 \leq ZH$  même dans le cas où  $|X|=0$ , ou  $|Y|=0$ , ou  $|Z|=0$ .

<sup>6)</sup> On entend ici par intégrales les lignes situées dans l'espace des points  $(X, Y, Z)$ , ces lignes étant données sous forme paramétrique ( $t =$  paramètre).

<sup>7)</sup> Il s'agit ici de l'origine des coordonnées de l'espace à  $p=q=r$  dimensions composé des points  $(X, Y, Z)$  et non pas des points  $(t, X, Y, Z)$ .

<sup>8)</sup> Plus précisément: chaque voisinage de l'origine renferme des points intérieurs (relativement au plan  $X, Y$ ) de l'ensemble  $D$ .



en désignant par  $\omega$  l'ensemble polyfacial des points  $P$  pour lesquels

$$m^i(P) < 0, \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad l^1(P) < 0 \quad (\text{ensemble } \omega) \quad (6,14)$$

et en désignant par  $M^j$  et  $L^1$  les ensembles (constituant les faces de  $\omega$ ) définis par les relations

$$P \in \Omega, \quad m^j(P) = 0, \quad m^i(P) \leq 0, \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad l^1(P) \leq 0 \quad (6,15) \\ (\text{ensemble } M^j)$$

$$P \in \Omega, \quad l^1(P) = 0, \quad m^i(P) \leq 0, \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad (\text{ensemble } L^1) \quad (6,16)$$

on a

$$\bar{\omega} = [\omega + \text{frontière de } \omega] \subset \Omega \quad (6,17)$$

$$\text{pente}(m^j, P) = \text{pente } m^j < 0 \quad \text{lorsque } P \in M^j \quad (6,18)$$

$$\text{pente}(l^1, P) = \text{pente } l^1 > 0 \quad \text{lorsque } P \in L^1. \quad (6,19)$$

Q<sub>4</sub>) La frontière de  $\omega$  touche la frontière de  $\Omega$  exclusivement sur le plan  $t = +\infty$ <sup>9)</sup>

Q<sub>5</sub>) Si

$$S(\tau), \quad (\tau \text{ fixe}, \tau > T) \quad (6,20)$$

désigne la section de  $\omega$  par le plan  $t = \tau$ ;

$$A(\tau) \quad (6,21)$$

désigne la classe des points  $P \in S(\tau)$ , tels que  $\text{Demi}_+ I(P)$  est asymptotique relativement à  $\omega$  et  $\Omega$  {c. - à - d.  $\text{Demi}_+ I(P) \subset \omega$  et cette demi-intégrale est définie dans un intervalle non borné supérieurement}<sup>10)</sup> alors l'ensemble  $\Gamma(\tau)$  des points  $(X, Y)$  pour lesquels on a

$$\alpha(\tau) < |Y| < \beta(\tau), \quad |X| < \gamma(\tau), \quad [\text{ensemble } \Gamma(\tau)] \quad (6,22)$$

coïncide avec la projection de  $A(\tau)$  sur le plan  $X, Y$ , c. - à - d. on a

$$\Gamma(\tau) = \text{proj}_{X, Y} A(\tau). \quad (6,23)$$

Q<sub>6</sub>) Le nombre de dimensions de l'ensemble  $\Gamma(\tau)$  est égal à  $p + q$ ;  $\Gamma(\tau)$  est un ensemble ouvert (relativement au plan  $X, Y$ ) et non vide; un voisinage arbitraire de l'origine des coordonnées contient  $\Gamma(\tau)$  lorsque  $\tau$  est suffisamment grand.

<sup>9)</sup> Cf. Théorème 1, la note <sup>3)</sup> en bas de la page 280.

<sup>10)</sup> Cf. la propriété Q<sub>4</sub> et le Théorème 1.

**Démonstration.** Afin de déterminer les fonctions  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  nous procéderons par une voie heuristique en supposant que ces fonctions existent et qu'elles jouissent des propriétés  $Q_1, Q_2, Q_3$ . Dans cette hypothèse nous chercherons à majorer la pente de la fonction  $m^i$  sur la face  $M^i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) par une expression dépendant des fonctions  $\alpha, \beta, \gamma$  et de leurs dérivées du premier ordre. En écrivant que ces expressions sont plus petites que zéro nous obtiendrons certaines inégalités différentielles en  $\alpha, \beta, \gamma$  dont les solutions fourniront les fonctions pour lesquelles subsistent les inégalités (6,18) (pente  $m^i < 0$  pour  $P \in M^i$ ). D'une façon analogue, un procédé de minoration, appliqué à la pente de  $l^1$  sur la face  $L^1$ , fournira une fonction  $\delta$  pour laquelle subsiste l'inégalité (6,19).

Supposons donc que les fonctions  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  jouissant des propriétés  $Q_1, Q_2$  et  $Q_3$  existent. Les inégalités (6,14) définissant l'ensemble  $\omega$ , peuvent être écrites sous la forme

$$T < t, \alpha(t) < |Y| < \beta(t), |X| < \gamma(t) |Y|, |Z| < \delta(t) |Y| \quad (\text{ensemble } \omega) \quad (6,24)$$

On a [cf. (6,13), (6,15), (6,16), (6,10), (6,17), (6,14)]

$$\left. \begin{array}{l} t = T \text{ pour } P \in M^1; |Y| = \alpha(t) > 0 \text{ pour } P \in M^2; \\ |Y| = \beta(t) > 0 \text{ pour } P \in M^3; |X| = \gamma(t) |Y| > 0 \text{ pour } P \in M^4; \\ |Z| = \delta(t) |Y| > 0 \text{ pour } P \in L^1 \end{array} \right\} (6,25)$$

$$|X| \leq |Y|, |Z| \leq |Y| \text{ pour } P \in \bar{\omega}. \quad (6,26)$$

En vue d'effectuer la majoration mentionnée il faut évaluer les modules des fonctions „perturbatrices“  $U, V, W$  (cf. 6,1) dans l'ensemble  $\bar{\omega}$  (cf. 6,17). Mais dans la définition de  $\omega$  interviennent quatre fonctions  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Il est donc naturel de chercher à se faciliter la tâche en effectuant les évaluations susdites dans un ensemble plus large, mais défini, en revanche, au moyen d'une seule de ces fonctions. Or comme un tel ensemble on peut choisir l'ensemble  $\bar{\Theta}$  défini par les relations

$$t_0 < t, |Y| \leq \beta(t), |X| \leq |Y|, |Z| \leq |Y| \text{ (ensemble } \bar{\Theta}), \quad (6,27)$$

car, en vertu de (6,24) et (6,26) on a

$$\bar{\omega} \subset \bar{\Theta}. \quad (6,28)$$

Considérons la partie  $\bar{\Theta}(\tau)$  de cet ensemble  $\bar{\Theta}$  située à droite du plan  $t = \tau$ , c.-à-d. l'ensemble défini par les relations  $\tau \leq t, |Y| \leq \beta(t), |X| \leq |Y|, |Z| \leq |Y|$  [ensemble  $\bar{\Theta}(\tau)$ ]. (6,29)

Or  $\beta(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  (cf. 6,11). Si donc pour un point  $P = (t, X, Y, Z)$  variable dans  $\bar{\Theta}(\tau)$  on a  $t \rightarrow +\infty$  alors (cf. 6,29)  $X^2 + Y^2 + Z^2 \rightarrow 0$  et, par suite (cf. 6,5)  $U^2 + V^2 + W^2 \rightarrow 0$ .

La fonction continue  $\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$  est donc bornée dans  $\bar{\Theta}(\tau)$  et y possède une borne supérieure finie  $\mu(\tau)$

$$\mu(\tau) = \left\{ \text{borne sup. de } \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} \text{ dans } \bar{\Theta}(\tau) \right\} < +\infty \quad (6,30)$$

La fonction  $\mu(\tau)$  est continue, décroissante au sens large et

$$\mu(\tau) \rightarrow 0 \text{ lorsque } \tau \rightarrow +\infty \quad (6,31)$$

Mais cette fonction peut être non différentiable pour certains  $\tau$ , ce qui serait gênant car la dérivée de  $\mu(\tau)$  devrait exister pour que  $\mu(\tau)$  puisse représenter une solution d'une inégalité différentielle. On peut supprimer cette difficulté en choisissant une nouvelle fonction  $\nu(t)$  d'une telle façon que l'on ait, pour tous les  $t$  suffisamment grands.

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \mu(t) < \nu(t), \quad \nu(t) > 0, \quad \nu'(t) < 0, \\ \nu(t) \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty \end{aligned} \right\} \quad (6,32)$$

Il est facile de prouver qu'une telle fonction  $\nu(t)$  existe. Des relations (6,27), (6,29), (6,30), et (6,32) il résulte que

$$\sqrt{U^2 + V^2 + W^2} R < 2\nu(t)|Y| \text{ lorsque } P \in \bar{\Theta} \text{ et } |Y| > 0.$$

On aura, à plus forte raison, les inégalités:

$$|UR| < 2\nu(t)|Y|, \quad |VR| < 2\nu(t)|Y|, \quad |WR| < 2\nu(t)|Y| \quad (6,33)$$

lorsque  $P \in \bar{\Theta}$  et  $|Y| > 0$ .

On a évidemment (cf. 2,4 et 6,13)

$$\text{pente } m_1 = -1 < 0 \text{ sur la face } M^1. \quad (6,34)$$

Procédons maintenant à la majoration de la pente  $m^2$  sur la face  $M^2$ . On a sur  $M^2$  l'égalité  $|Y| = \alpha(t) > 0$  (cf. 6,25)

et, en vertu de (2,4), (6,13), (6,7), (6,3), (6,33) on a pour  $P \in M^2$

$$\text{pente } m^2 = 2[\alpha \alpha' - Y(G + VR)] < 2[\alpha \alpha' - A_1 Y^2 + 2\nu(t) Y^2] = 2\alpha[\alpha' + \alpha\{-A_1 + 2\nu(t)\}].$$

Comme  $-A_1 < -A$  (cf. 6,7) et  $\nu(t) \rightarrow 0$  avec  $t \rightarrow +\infty$ , on aura pour les points  $P \in M^2$  pour lesquels  $t$  est suffisamment grand

$$\text{pente } m^2 < 2\alpha[\alpha - A\alpha]. \quad (6,35)$$

Un raisonnement analogue montre que pour les points  $P \in M^3$ , pour lesquels  $t$  est suffisamment grand on a

$$\text{pente } m^3 < 2\beta(t)[B_1\beta(t) - \beta'(t)]. \quad (6,36)$$

Relativement à la face  $M^4$  (pour laquelle  $|X| = \gamma(t) |Y| > 0$ ) on obtient dans une voie analogue

$$\text{pente } m^4 < 2Y^2\gamma[\gamma\{A - A_1 + 2\nu(t)\} + 2\nu(t) - \gamma'].$$

Comme  $A < A_1$  (cf. 6,7) on peut choisir un  $k < 0$ , tel que

$$A - A_1 < k < 0. \quad (6,37)$$

Pour les points  $P \in M^4$  pour lesquels  $t$  est suffisamment grand on aura

$$\text{pente } m^4 < 2Y^2\gamma[k\gamma + 2\nu(t) - \gamma'] \quad (6,38)$$

Nous allons maintenant minorer la pente  $l^1$  sur la face  $L^1$  (sur laquelle on a  $|Z| = \delta(t) |Y| > 0$ ). Un calcul analogue au précédent donne, pour  $P \in L^1$ , l'inégalité

$$\text{pente } l^1 > Y^2\delta[\delta\{B_1 - B - 2\nu(t)\} - 2\nu(t) - \delta'],$$

Comme  $B_1 > B$  (cf. 6,7) on peut choisir un nombre fixe  $K$ , tel que

$$B_1 - B > K > 0. \quad (6,39)$$

On aura donc pour les  $P \in L^1$  pour lesquels  $t$  est suffisamment grand

$$\text{pente } l^1 > 2Y^2\delta[K\delta - 2\nu(t) - \delta'] \quad (6,40)$$

Les inégalités (6,34), (6,35), (6,36), (6,38) et (6,40) suggèrent l'idée qu'en choisissant les fonctions  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  de façon que

$$\alpha' - A\alpha = 0 \quad (6,41)$$

$$B_1\beta - \beta' = 0 \quad (6,42)$$

$$k\gamma + 2\nu(t) - \gamma' = 0 \quad (6,43)$$

$$K\delta - 2\nu(t) - \delta' > 0 \quad (6,44)$$

on pourra réaliser les inégalités (6,18) et (6,19).

La partie heuristique étant ainsi finie nous procéderons à la construction des fonctions  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ . Or dans le rai-



sonnement précèdent la définition de l'ensemble  $\bar{\Theta}(\tau)$  (cf. 6,29) et aussi celle des fonctions  $\mu(t)$  et  $\nu(t)$  dépendait de  $\beta(t)$ . Pour obtenir les relations (6,41)—(6,44) il fallait tenir compte des propriétés de la fonction  $\nu(t)$ . Il faudra donc commencer par définir d'abord  $\beta(t)$ .

On définira ensuite la fonction  $\nu(t)$  et enfin  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$ . En résolvant (6,42) nous pouvons poser

$$\beta(t) = e^{B_1 t} \quad (6,45)$$

Comme  $B_1 < 0$ , on a  $\beta(t) \rightarrow 0$  avec  $t \rightarrow +\infty$ . En définissant  $\bar{\Theta}(\tau)$  par (6,29) on aura  $\bar{\Theta}(\tau) \subset \Omega$  pour  $\tau$  assez grand. Nous définissons ensuite  $\mu(t)$  au moyen de (6,30) et choisissons  $\nu(t)$  conformément aux conditions (6,32). Nous choisissons ensuite comme  $\alpha$  et  $\gamma$  les solutions positives de (6,41) et (6,43), telles que l'on ait

$$\alpha(t) \rightarrow 0, \quad \gamma(t) \rightarrow 0 \quad \text{avec } t \rightarrow \infty. \quad (6,46)$$

Il suffit, à cet effet, de poser

$$\alpha(t) = e^{At} \quad (6,47)$$

$$\gamma(t) = 2e^{kt} \int_0^t \nu(s) e^{-ks} ds \quad (6,48)$$

Comme  $A < 0$  et  $k < 0$  les relations (6,46) auront lieu (la dernière d'elles est facile à vérifier au moyen de la règle de L'Hôpital). En posant enfin

$$\delta(t) = \frac{2\nu(t)}{K} \quad (6,49)$$

on aura  $\delta(t) > 0$ ,  $\delta(t) \rightarrow 0$  avec  $t \rightarrow +\infty$  et l'inégalité (6,44) se trouvera vérifiée car  $\nu'(t) < 0$  (cf. 6,32).

Les fonctions  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  étant ainsi définies on vérifie, en répétant le raisonnement de la partie heuristique, que les propriétés  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  ont lieu lorsque l'on choisit comme  $T$  un nombre suffisamment grand.

La propriété  $Q_4$  est évidente (cf. Théorème 1, la note<sup>3)</sup> en bas de la page 280).

Afin d'établir la propriété  $Q_5$  supposons qu'un point  $(X_0, Y_0)$  appartienne à l'ensemble  $\Gamma(\tau)$  (cf. 6,22). On aura

$$\alpha(\tau) < |Y_0| < \beta(\tau), \quad |X_0| < \gamma(\tau)$$

où  $\tau$  est fixe et  $\tau > T$ . Désignons par  $E$  l'ensemble des points  $P = (t, X, Y, Z)$ , tels que

$$t = \tau, X = X_0, Y = Y_0, |Z| \leq \delta(\tau) |Y_0| \quad (\text{ensemble } E)$$

et posons

$$S = L^1 - \sum_{i/1}^4 M^i$$

L'ensemble  $ES$  coïncide avec l'ensemble des points pour lesquels

$$t = \tau, X = X_0, Y = Y_0, |Z| = \delta(\tau) |Y_0|,$$

L'ensemble  $E$  constitue donc une sphère fermée à  $r$  dimensions et l'ensemble  $ES$  représente la frontière de cette sphère. L'ensemble  $ES$  n'est donc pas un rétracte de  $E$ . Nous construirons maintenant une transformation  $Q = \Phi(P)$  effectuant une rétraction de  $S$  en  $ES$ . Soit  $\hat{P} = (\hat{t}, \hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$  un point variable de  $S$ . On aura pour ce point

$$|\hat{Z}| = \delta(\hat{t}) |\hat{Y}|, m^i(\hat{P}) < 0 \quad , \quad (i = 1' 2, 3, 4).$$

En désignant les coordonnées de  $Q$  par  $(t^*, X^*, Y^*, Z^*)$  nous définissons la transformation  $Q = \Phi(\hat{P})$  par les formules

$$t^* = \tau, X^* = X_0, Y^* = Y_0, Z^* = \frac{\delta(\tau) |Y_0|}{\delta(\hat{t}) |\hat{Y}|} \hat{Z}.$$

Cette transformation effectue une rétraction de  $S$  en  $ES$ , car elle est continue sur  $S$ , on a  $\Phi(\hat{P}) \in ES$  lorsque  $\hat{P} \in S$  et enfin  $\Phi(\hat{P}) = \hat{P}$  lorsque  $\hat{P} \in ES$ . L'ensemble  $ES$  est donc un rétracte de  $S$ . En vertu du Théorème 1 il existe un point  $P_0 \in E - S$ , c. - à - d. un point  $P_0 = (\tau, X_0, Y_0, Z_1)$ , tel que la  $Demi_+ I(P_0)$  est asymptotique relativement à  $\omega$  et  $\Omega$ . Le point  $P_0$  appartient donc à l'ensemble  $\Lambda(\tau)$  (cf. 6,21). Un point arbitraire  $(X_0, Y_0) \in \Gamma(\tau)$  constitue donc la projection sur le plan  $X, Y$  d'un point  $P_0 \in \Lambda(\tau)$ . Ceci veut dire que  $\Gamma(\tau) \subset proj_{XY} \Lambda(\tau)$ . — L'inclusion  $proj_{XY} \Lambda(\tau) \subset \Gamma(\tau)$  étant évidente (cf. 6,21; 6,22; 6,24) la propriété  $Q_5$  se trouve démontrée.

Afin de prouver la propriété  $Q_6$  remarquons que  $\Gamma(\tau)$  est un ensemble ouvert et non vide, car les fonctions  $\alpha, \beta, \gamma$  sont continues et on a  $0 < \alpha(t) < \beta(t), \gamma(t) > 0$  (cf. (6,10)).

Un voisinage arbitraire de l'origine des coordonnées contient  $T(\tau)$  lorsque  $\tau$  est suffisamment grand car  $|\beta(t)| + |\gamma(t)| \rightarrow 0$  avec  $t \rightarrow +\infty$  (cf. (6,22) et (6,10)). — La démonstration de la Remarque 2 et, par conséquent, aussi celle du Lemme 1 se trouve ainsi terminée.

**Lemme 1 bis.** Dans le Lemme 1 et dans la Remarque 2 intervenait le point variable  $P = (t, X, Y, Z)$ , où  $X, Y$  et  $Z$  possédaient respectivement  $p, q$  et  $r$  coordonnées ( $p > 0, q > 0, r > 0$ ).

Or un résultat analogue subsiste aussi dans les cas particuliers suivants: 1°)  $p = 0, q > 0, r > 0$ ; 2°)  $p > 0, q > 0, r = 0$ ; 3°)  $p = 0, q > 0, r = 0$ .

Dans ces cas le point  $P$  a respectivement les formes  $P = (t, Y, Z)$ ;  $P = (t, X, Y)$ ;  $P = (t, Y)$ , et le système (6,1), écrit sous une forme non vectorielle, contient respectivement  $q + r$ ;  $p + q$  et  $q$  équations différentielles.

Voici les détails relatifs à chacun de ces trois cas:

**Cas I.** ( $p = 0, q > 0, r > 0$ ). Nous gardons les hypothèses du Lemme 1 avec les modifications suivantes: Dans le système (6,1) on supprime la première équation et dans la suite on supprime partout la variable  $X$ , les termes contenant  $X, F, U$  et  $\gamma(t)$  ainsi que les inégalités, les égalités et les parties du texte qui perdent le sens en raison de cette suppression. La fonction  $m^4$  (cf. 6,13) et la face  $M^4$  sont à supprimer. Les thèses du Lemme 1 subsisteront à condition que l'on y fasse des modifications du même genre.

La démonstration reste, au fond, la même. Elle sera plus courte à cause des suppressions indiquées tout à l'heure.

**Cas II.** ( $p > 0, q > 0, r = 0$ ). Le Lemme 1 reste vrai lorsque l'on supprime la troisième équation (6,1), les variables et fonctions  $Z, H, W, \delta(t)$  ainsi que les parties du texte qui perdent le sens à cause de cette suppression. — La démonstration reste la même à quelques simplifications près.

**Cas III** ( $p = 0, q > 0, r = 0$ ). Le Lemme 1 reste vrai lorsque l'on supprime la première et la troisième équation (6,1), les variables et les fonctions  $X, Z, F, U, H, W, \gamma, \delta$  ainsi que les parties du texte perdant leur sens à cause de cette



suppression. — La démonstration est encore plus courte que dans les cas précédents.

**Remarque 3.** La Remarque 2 reste vraie dans les cas I, II, III indiqués tout à l'heure à condition d'y faire des suppressions analogues.

§ 7. **Quelques définitions relatives aux plans caractéristiques d'une matrice.** Supposons que les racines caractéristiques

$$s_1, s_2, \dots, s_n \quad (7,1)$$

d'une matrice réelle

$$M \quad (7,2)$$

à  $n$  lignes et  $n$  colonnes soient ordonnées suivant la grandeur de leurs parties réelles  $R(s_i)$

$$R(s_1) \leq R(s_2) \leq \dots \leq R(s_n) \quad (7,3)$$

Supposons ensuite que

$$n = p + q + r \quad (p \geq 0, q > 0, r \geq 0) \quad (7,4)$$

Divisons la suite (7,1) en trois suites partielles

$$s_1, \dots, s_p \quad (7,5)$$

$$s_{p+1}, \dots, s_{p+q} \quad (7,6)$$

$$s_{p+q+1}, \dots, s_{p+q+r} \quad (7,7)$$

une des suites (7,5) et (7,7) ou toutes les deux pouvant être vides. Cela posé, nous dirons que la suite (7,6) est cohérente lorsque

$$\left. \begin{array}{l} R(s_{p+q}) < R(s_{p+q+1}) \quad (\text{ou bien } r = 0) \\ R(s_p) < R(s_{p+1}) \quad (\text{ou bien } p = 0) \end{array} \right\} \quad (7,8)$$

La suite (7,6) sera dite négative lorsque

$$R(s_{p+q}) < 0 \quad (7,9)$$

Les suites (7,5) et (7,7) seront dites respectivement suite précédente et suite suivante de la suite (7,6).

Les nombres  $p$  et  $r$  seront dits respectivement index inférieur et index supérieur de la suite (7,6).

Soient

$$p^*, q^*, r^* \quad (7,10)$$

les plans caractéristiques (passant par l'origine des coordonnées) de la matrice  $M$  qui correspondent respectivement



aux suites (7,5), (7,6) et (7,7) de racines caractéristiques de  $M$ . Leurs nombres des dimensions sont respectivement égaux à  $p$ ,  $q$  et  $r$  ( $p^*$  et  $r^*$  seront regardés comme ensembles vidés lorsque  $p=0$  ou  $r=0$ ).

Les plans  $p^*$  et  $r^*$  seront dits respectivement plan précédent et plan suivant du plan  $q^*$ . Le plan  $q^*$  sera dit cohérent et négatif lorsque la suite (7,6) est cohérente et négative.

Nous désignerons par

$$p^* + q^* \quad (7,11)$$

le plan à  $p + q$  dimensions qui contient les plans  $p^*$  et  $q^*$ .

§ 8. **Théorème 2.** En tenant compte des définitions et des notations du paragraphe précédent admettons relativement au système

$$\frac{du_i}{dt} = \varphi^i(u_1, \dots, u_n), \quad (i=1, \dots, n) \quad (8,1)$$

les hypothèses suivantes

1°) les fonctions  $\varphi^i(U) = \varphi^i(u_1, \dots, u_n)$  sont continues dans un voisinage  $V$  de l'origine des coordonnées  $\Theta = (0, \dots, 0)$ ,  
 2°) par chaque point  $(\tau^*, U^*)$  ( $\tau^*$  arbitraire,  $U^* \in V$ ) passe une intégrale unique du système (8,1),

3°) l'origine  $\Theta$  est un point singulier du système (8,1) c. -à-d.

$$\varphi^i(\Theta) = 0, \quad (i=1, \dots, n) \quad (8,2)$$

4°) la fonction  $\varphi^i$  possède la différentielle (au sens de Stolz) au point  $\Theta$ ,

5°)  $q^*$  est un plan caractéristique cohérent et négatif relativement à la matrice

$$M = \| a_{ik} \|, \quad \text{où } a_{ik} = \varphi_{u_k}^i(\Theta); \quad (8,3)$$

$p^*$  et  $r^*$  désignent respectivement le plan caractéristique précédent et suivant du plan  $q^*$ . Les nombres des dimensions de  $p^*$ ,  $q^*$ ,  $r^*$  sont respectivement égaux à  $p$ ,  $q$ ,  $r$  ( $p \geq 0$ ,  $q > 0$ ,  $r \geq 0$ ).

6°)  $F$  désigne la famille des intégrales du système (8,1) qui au point  $\Theta$  sont tangentes au plan  $q^*$  pour  $t = +\infty$ ;  $A$  désigne l'ensemble des points  $(u_1, \dots, u_n)$  situés sur les intégrales

de la famille  $F$ ;  $\Pi$  désigne la projection (parallèle au plan  $p^*$ ) de  $\Lambda$  sur le plan  $p^* + q^*$ .<sup>11)</sup>

Cela posé l'ensemble  $\Pi$  possède des points intérieurs (relativement au plan  $p^* + q^*$ ) dans chaque voisinage du point singulier  $\Theta$ . La partie commune de l'ensemble  $\Pi$  avec un voisinage arbitrairement petit du point singulier  $\Theta$  constitue donc un ensemble à  $p + q$  dimensions.

**Démonstration.** Les fonctions  $\varphi^i$  possédant la différentielle (au sens de Stolz) au point  $\Theta$ , le système (8,1) peut être écrit sous la forme

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}^i(\Theta) u_j + \eta^i(u_1, \dots, u_n) \varrho \quad (8,4)$$

où  $\varrho = \sqrt{\sum_k u_k^2}$  et les fonctions  $\eta_i$  sont continues au voisinage  $V$  et

$$\eta^i(\Theta) = 0. \quad (8,5)$$

En identifiant la matrice (8,3) avec la matrice  $M$  du § 7 nous voyons, en vertu des inégalités (7,8) qu'il existe quatre nombres négatifs  $A, A_1, B, B_1$ , tels que  $B_1 < 0$  et  $R(s_p) < A < A_1 < R(s_{p+1}) \leq R(s_{p+q}) < B < B_1 < R(s_{p+q+r})$  (8,6)

En appliquant au système (8,1) une transformation linéaire convenable de la forme

$$u_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} v_j, \quad (i=1, \dots, n) \quad (8,7)$$

( $c_{ij}$  fixes,  $\text{Dét}(c_{ij}) \neq 0$ ) on pourra (cf. la Remarque 3 insérée plus bas) transformer le système (8,4) en un système de la forme

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = \sum_{\beta=1}^p \lambda_{\alpha\beta} x^\beta + k_\alpha(x^1, \dots, z^r) R, \quad (\alpha=1, \dots, p)$$

$$\frac{dy^\gamma}{dt} = \sum_{\delta=1}^q \mu_{\gamma\delta} y^\delta + l_\gamma(x^1, \dots, z^r) R, \quad (\gamma=1, \dots, q)$$

$$\frac{dz^\varepsilon}{dt} = \sum_{\eta=1}^r \nu_{\varepsilon\eta} z^\eta + m_\varepsilon(x^1, \dots, z^r) R, \quad (\varepsilon=1, \dots, r)$$

<sup>11)</sup> Dans le cas  $r=0$  on a, par définition,  $\Lambda = \Pi$ .

où les coefficients  $\lambda_{\alpha\beta}$ ,  $\mu_{\gamma\delta}$ ,  $\nu_{\varepsilon\eta}$  sont constants  $R^2 = \sum (x^\beta)^2 + \sum (y^\delta)^2 + \sum (z^\eta)^2$  et le point variable  $(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q, z^1, \dots, z^r)$  est identique avec le point  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ .

En se servant de la notation vectorielle on pourra écrire le système précédent sous la formè suivante

$$\begin{aligned} X' &= F(X) + U(X, Y, Z) R, \\ Y' &= G(Y) + V(X, Y, Z) R, \\ Z' &= H(Z) + W(X, Y, Z) R \end{aligned}$$

qui est analogue à celle du système (6,1).

Or en vertu des inégalités (8,6) et de la Remarque 3 (voir plus bas) on pourra choisir la transformation (8,7) de façon que les inégalités (6,7) intervenant dans la Lemme 1 (§ 6) soient vérifiées.

En s'appuyant sur (8,5) on prouvera facilement que toutes les autres prémisses de ce lemme sont vérifiées.

Il est ainsi clair que notre théorème est vrai en vertu du Lemme 1 (cas  $p > 0, q > 0, r > 0$ ) ou du Lemme 1 bis (cas où  $p = 0$  ou bien  $q = 0$ ).

**Remarque 3.** Les deuxièmes membres  $\varphi^i$  du système (8,1), pour lequel le point  $\Theta$  est singulier et pour lequel la différentielle de Stolz des fonctions  $\varphi^i$  existe au point  $\Theta$ , peuvent être représentés comme sommes des fonctions linéaires (et homogènes) et d'une partie „perturbatrice“ qui est infiniment petite d'ordre supérieur à 1 (cf. 8,4 et 8,5).

Soient  $M, C$  et  $N$  respectivement la matrice des coefficients des parties linéaires de (8,1), celle de la transformation (8,7) et celle de la partie linéaire du système transformé. On a

$$N = C^{-1} M C. \quad (8,8)$$

On sait que les matrices  $M$  et  $N$ , pour lesquelles il existe une matrice  $C$  satisfaisant à (8,8), sont dites semblables. Or, commè on le sait bien, à chaque matrice  $M$  correspond une matrice semblable  $N$  qui possède la forme canonique de Jordan





§ 9. *Remarque 4. Extension des résultats précédents aux demi-intégrales gauches.* Introduisons, dans les lemmes et les théorèmes précédents le changement de la variable indépendante

$$s = -t.$$

Si  $t \rightarrow +\infty$  alors  $s \rightarrow -\infty$ . On obtiendra ainsi des lemmes et des théorèmes analogues mais relatifs aux demi-intégrales gauches. — Les calculs étant immédiats nous nous dispensons de donner les énoncés des lemmes et des théorèmes obtenus dans cette voie.

*Remarque 5. Le nombre de paramètres essentiels dont dépend la famille des intégrales asymptotiques.* L'énoncé des résultats précédents suggère la supposition que, dans les Lemmes 1 et 1 bis et dans la Remarque 2, le nombre des paramètres essentiels dont dépend la famille des intégrales asymptotiques relatives à  $\omega$  et  $\Omega$  est au moins égale à  $p+q$ . M. KURATOWSKI a indiqué une démonstration prouvant que cette supposition est juste.

Le nombre de paramètres essentiels dont dépend la famille des courbes intégrales qui au point  $\omega$  sont tangentes au plan  $q^*$  pour  $t = +\infty$  (cf. le Théorème 2) est au moins égal à  $p+q-1$  (et non pas à  $p+q$ ). Ceci tient à ce que  $I(t, P)$  étant une solution du système (8,1) (dont les deuxièmes membres ne dépendent pas de  $t$ ), les solutions  $I(t+k, P)$  dépendant d'un seul paramètre  $k$ , représentent la même courbe intégrale de ce système.

*Remarque 6. Suppression de l'hypothèse de l'unicité des intégrales.* Les Lemmes 1 et 1 bis, la Remarque 2 et le Théorème 2 restent vrais lorsqu' en conservant leurs énoncés, on supprime l'hypothèse sur l'unicité des intégrales des systèmes envisagés (cf. *Principe top. loc. cit.* p. 313, § 18).

# UNE MODIFICATION DES DÉFINITIONS FONDAMENTALES DE LA GÉOMÉTRIE DES CORPS DE M. A. TARSKI

par

S. JAŚKOWSKI (Toruń).

1. C'étaient les raisons philosophiques qui ont contribué au développement de la géométrie des corps: le but principal était réduire les termes abstraits, idéaux de la géométrie au langage des observations empiriques. Il s'agissait en particulier de définir le point à l'aide des termes primitifs qui désignent certains corps (ou „volumes“ — comme dit Nicod) et qui trouvent des modèles dans les formes des objets matériels. Une idée de la solution du problème était donnée par A. N. Whitehead au moyen de la méthode des „classes abstractives“<sup>1)</sup>: J. Nicod a examiné le même sujet dans son livre: *La géométrie dans le monde sensible*, en corrigeant<sup>2)</sup> une inexactitude commise par Whitehead.

S. Leśniewski a donné la forme d'un système déductif, appelé *meréologie*, à la théorie de l'inclusion spaciale des objets<sup>3)</sup>. Une théorie analogue était examinée récemment par MM. H. S. Leonard et N. Goodman<sup>4)</sup>. Leśniewski a posé le problème de fonder un système de la géométrie des corps, en ajoutant certains termes primitifs et certains axiomes à ceux de la meréologie. Ce

---

1) *An enquiry concerning the principles of natural knowledge*, Cambridge 1919. *The concept of nature*, Cambridge 1920.

2) Paris 1924, p. 36.

3) *O podstawach matematyki* (*Sur les fondements de Mathématique*, en polonais), *Przegląd Filozoficzny* (*Revue Philosophique*) 1927—1931: vol. 30 pp. 164—206, vol. 31 pp. 261—291, vol. 32 pp. 60—101, vol. 33 pp. 77—105, vol. 34 pp. 142—170.

4) *The calculus of individuals and its uses*, *Journ. of Symb. Log.* vol. 5 pp. 45—55.

problème fut résolu par M. Tarski dans sa conférence: *Les fondements de la géométrie des corps* au Premier Congrès Polonais de Mathématique en 1927<sup>5)</sup>. Je me propose de simplifier le système des définitions fondamentales de Tarski.

2. Dans un travail postérieur, M. Tarski a remarqué une analogie profonde entre la meréologie de Leśniewski et l'algèbre de Boole complètement additive<sup>6)</sup>. Cette analogie nous permet de se baser sur l'algèbre de Boole au lieu de la meréologie. Nous postulons donc que les corps sont des objets qui satisfont aux axiomes de l'algèbre de Boole complètement additive. La relation  $A < B$  doit être comprise comme inclusion spaciale des corps: „ $A$  est une partie de  $B$  (proprement dite ou égale à  $B$ )”. Les autres notions bien connues de l'algèbre Boole'ienne possèdent alors un sens défini, ce sont:  $A'$  — le corps complémentaire de  $A$ ,  $A + B$  et  $\sum_{X \in M} X$  — la somme de deux corps, respectivement la somme d'une classe  $M$  de corps,  $A \cdot B$  — le produit de deux corps etc.  $0$  — désigne le corps vide.

Pour fonder la géométrie des corps, M. Tarski ajoute une seule notion primitive géométrique: *la sphère*, et il définit la relation: *La sphère  $A$  est concentrique avec la sphère  $B$* . C'est cette définition que je vais modifier.

**Définition 1.** Je dirai que la sphère  $A$  est une *sous-sphère saturée du corps  $B$* , lorsque: 1<sup>o</sup>  $A < B$ , 2<sup>o</sup>  $A$  est une sphère et 3<sup>o</sup>  $X$  étant une sphère arbitraire,  $A < X < B$  entraîne  $A = X$ .

**Définition 2,** Je dirai que la sphère  $A$  est une *sous-sphère concentrique de la sphère  $B$* , lorsque: 1<sup>o</sup>  $A < B$ ,

5) Księga pamiątkowa Pierwszego Polskiego Zjazdu Matematycznego (Mémoires du Premier Congrès Polonais de Mathématique), Supplément aux Annales de la Soc. Polonaise de Mathématique, Kraków 1929 pp. 29—33.

6) A. Tarski. *Zur Grundlegung der Booleschen Algebra I*, Fund. Math. vol. 24, 1935, pp. 177—198. Le renvoi 5, page 190 contient les remarques sur les rapports entre l'algèbre de Boole et la meréologie. J'emploi ici le nom de l'algèbre de Boole complètement additive pour désigner ce que Tarski appelle „erweitertes System“.

2°  $A, B$  sont des sphères et 3°  $X, Y$  étant des sphères arbitraires,  $Z$  étant une sous-sphère saturée de  $A \cdot Y'$ , le système d'inclusions

$$A < X < Z' \qquad Z < B < Y'$$

entraîne  $X \cdot Y = 0$ .

La définition 2 peut être contrôlée au point de vue de la géométrie élémentaire ordinaire. Les formules de l'algèbre de Boole décrivent certaines relations entre les figures géométriques, en particulier  $A, B, C$  étant des sphères,

$A < B$  signifie „la sphère  $A$  est intérieure à  $B$  ou égale à  $B$ “,

$A < B'$  — „la sphère  $A$  est extérieure à  $B$ “,

$A < B' \cdot C'$  — „la sphère  $A$  est extérieure à  $B$  et à  $C$ “.

Tenant compte de la définition 1, il n'est pas difficile de démontrer deux lemmes de la géométrie élémentaire.

**Lemme 1.**  *$A, B$  étant deux sphères extérieures, il est suffisant et nécessaire que  $C$  soit une sous-sphère saturée de  $A' \cdot B'$ , pour que la sphère  $C$  soit extérieurement tangente aux sphères  $A$  et  $B$ .*

**Lemme 2.**  *$A$  étant une sphère extérieurement tangente à la sphère  $B$  qui est une partie propre de la sphère  $C$  extérieure à  $A$  (c'est à dire  $C \neq B < C < A'$ ), la sphère  $C$  est tangente aux sphères  $A$  et  $B$  extérieurement resp. intérieurement et tous les points de tangence coïncident.*

En vertu de ces lemmes on démontre que le système des conditions 1°, 2°, 3° de la définition 2 est nécessaire et suffisant pour que la sphère  $A$  soit une sous-sphère concentrique de la sphère  $B$ .

3. Il n'est pas difficile de formuler les définitions fondamentales de la géométrie des corps de M. Tarski en profitant de notre définition 2 au lieu de la définition 5 des sphères concentriques de M. Tarski.

**Définition 3.** Je dirai que la classe  $P$  de sphères est le centre de la sphère  $A$ , lorsque la classe  $P$  est composée de toutes les sous-sphères concentriques de  $A$  et de toutes les sphères qui contiennent  $A$  comme sous-sphère concentrique.



**Définition 4.** Une classe  $P$  de sphères sera appelée un point lorsque  $P$  est le centre d'une sphère.

**Définition 5.** Je dirai que le point  $P$  est *situé sur la surface de la sphère*  $A$ , lorsque pour chaque élément  $X$  de  $P$ :  $A \cdot X \neq 0$  et  $A' \cdot X \neq 0$  (c'est à dire que  $X$  n'est ni extérieur ni intérieur par rapport à la sphère  $A$ ).

Les notions du point, de la sphère, et les relations: „le point  $P$  est le centre de la sphère  $A$ “, „le point  $P$  est situé sur la surface de la sphère  $A$ “ — sont suffisantes pour énoncer les axiomes de la géométrie élémentaire, p. ex. les axiomes de Pieri<sup>7)</sup> de la géométrie fondée sur les notions primitives du point et de la sphère. En postulant ces axiomes, nous suivons l'exemple de M. Tarski (voir axiome 1 dans son travail précité: *Les fondements de la géométrie des corps*).

---

<sup>7)</sup> M. Pieri *La geometria elementare istuita sulle nozione di „punto“ e di „sfera“*, 1908.

CORRECTION À MON TRAVAIL  
„SUR LA COURBURE TOTALE DES COURBES  
FERMÉES“<sup>1)</sup>

par

KAROL BORSUK (Warszawa).

M. S. Jaśkowski a bien voulu attirer mon attention sur le fait que pour la validité de la formule

$$|L| = \int_a^b \sqrt{x_1'^2(t) + x_2'^2(t) + \dots + x_n'^2(t)} dt$$

pour la longueur d'une courbe  $L$  dont le parcours est

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

l'hypothèse faite par moi (p. 252) que les fonctions  $x_i(t)$  soient continues et presque partout différentiables n'est pas suffisante mais qu'il faut supposer que ces fonctions soient absolument continues.

Dans mon travail la formule en question est appliquée (p. 253 et 262-264) à une courbe  $L'$  avec le parcours

$$x'(s) = (x_1'(s), x_2'(s), \dots, x_n'(s)),$$

où l'on suppose que les fonctions  $x_i(s)$  soient différentiables d'une manière continue et que les secondes dérivées  $x_i''(s)$  existent presque partout. Or ces hypothèses ne sont pas en général suffisantes pour qu'on puisse appliquer la formule en question afin de calculer la longueur de  $L'$ . Il suffit cependant de supposer que les deuxièmes dérivées  $x_i''(s)$  existent et soient continues partout, car alors la continuité absolue des fonctions  $x_i'(s)$  sera assurée.

---

<sup>1)</sup> Annales de la Soc. Polon. de Mathém. t. XX (1948), p. 251—265.

# COVERING THEOREMS FOR GROUPS

by

OLGA TAUSKY and JOHN TODD (London)

## 1. Introduction.

The formulation of the following problems about finite abelian groups was suggested by the consideration of certain industrial problems.

Let  $G$  be an abelian group with  $n$  base elements  $g_1, g_2, \dots, g_n$ , each of order  $p$  (not necessarily a prime). Let  $S$  denote the set of the  $\nu = n(p-1) + 1$  distinct powers of the base elements. Let  $AB$ , where  $A$  and  $B$  are two subsets of  $G$ , denote the set of all products  $ab$  where  $a \in A, b \in B$ .

*Problem 1.* Determine the minimal integer  $\sigma = \sigma(n, p)$  for which there exists at least one set  $H$ , consisting of  $\sigma$  elements of  $G$ , such that  $G = HS$ .

*Problem 2.* Determine the cases when  $H$  can be a sub-group of  $G$ .

Specially interesting cases appear to be those in which the set  $HS$  contains all the elements of  $G$  exactly once. A necessary condition for this is clearly that  $\nu$  is a factor of  $n^p$ , the order of the group. We shall first discuss in detail two of these cases:

$$\begin{aligned}n &= 4, p = 3, \nu = 9, \\n &= 7, p = 2, \nu = 8\end{aligned}$$

and then give a few remarks on the general problem.

## 2. The case $n = 4, p = 3$ .

It will be shown that  $\sigma = 9$  and that  $H$  can be chosen in a unique way (apart from isomorphisms) as a sub-group whose cosets are generated by the elements  $g_1^{\pm 1}, g_2^{\pm 1}, g_3^{\pm 1}, g_4^{\pm 1}$ .

Assume that a sub-group  $H$  with the properties in question exists. It has necessarily the following properties:

(2.1) *Every element in  $H$ , different from the unit element, must contain at least three different factors  $g_i$ .*

For if  $g_1^{x_1} g_2^{x_2} \in H$ , where  $x_1 \neq 0$ ,  $x_2 \neq 0$ , then the coset determined by  $g_2^{-x_2}$  would contain both  $g_1^{x_1}$  and  $g_2^{x_2}$ . This is impossible for, according to our hypothesis, these two elements determine different cosets.

(2.2) *No element in  $H$  contains four different factors  $g_i$ .*

There is no loss to assume that such an element, if it exists, is of the form  $g = g_1 g_2 g_3 g_4$ . In this case  $H$  must contain yet another such element (in addition to  $g^{-1}$ ). Suppose such an element is  $g^* = g_1^{x_1} g_2^{x_2} g_3^{x_3} g_4^{x_4}$  ( $x_i \neq 0$ ). Since each  $x_i$  is  $+1$  or  $-1$  there must be at least two equal indices, say  $x_1 = x_2$ . Then

$$g_3^{x_3-x_1} g_4^{x_4-x_1} = g^* g^{-x_1}$$

must belong to  $H$ , which is in contradiction with (2.1).

Enumerate the elements of  $G$  in such a way that  $g = g_1 g_2 g_3 \in H$ . Then  $g^{-1} = g_1^{-1} g_2^{-1} g_3^{-1} \in H$ . Any other element in  $H$  must involve  $g_4$  for otherwise its product with  $g$  or  $g^{-1}$  would contain at most two factors, which is in contradiction with (2.1). Further, such an element must involve two of the generators  $g_1, g_2, g_3$ , but raised to different powers. Let it be  $g_1 g_2^{-1} g_4$ . The two elements  $g_1 g_2 g_3$  and  $g_1 g_2^{-1} g_4$  generate a sub-group of order 9:

$$1, g_1 g_2 g_3, g_1^{-1} g_2^{-1} g_3^{-1}, g_2^{-1} g_3 g_4^{-1}, g_1^{-1} g_3 g_4, \\ g_1 g_2^{-1} g_4, g_1^{-1} g_2 g_4^{-1}, g_2 g_3^{-1} g_4, g_1 g_3^{-1} g_4^{-1}.$$

It is easy to verify that this sub-group satisfies all the required conditions and is essentially unique. Thus  $\sigma(4,3)=9$ . Moreover, by a more elaborate argument, it can be shown that this sub-group is essentially the only set which, when multiplied by  $S$ , covers  $G$ ,

3. The case  $n = 7, p = 2$ .

It will be shown that  $\sigma = 16$ .



As in 2, it follows that a subgroup of order 16 with the required properties must contain only elements which involve at least three of the generators. The following group can be shown to fulfill the requirements:

$$\begin{aligned}
 1, & \ g_1 \ g_2 \ g_3, \ g_1 \ g_4 \ g_7, \ g_1 \ g_5 \ g_6, \ g_2 \ g_4 \ g_5, \\
 & \ g_2 \ g_6 \ g_7, \ g_3 \ g_4 \ g_6, \ g_3 \ g_5 \ g_7, \\
 & \ g_1 \ g_2 \ g_4 \ g_6, \ g_1 \ g_2 \ g_5 \ g_7, \ g_1 \ g_3 \ g_4 \ g_5, \ g_1 \ g_3 \ g_6 \ g_7, \\
 & \ g_2 \ g_3 \ g_4 \ g_7, \ g_2 \ g_3 \ g_5 \ g_6, \ g_4 \ g_5 \ g_6 \ g_7, \\
 & \ g_1 \ g_2 \ g_3 \ g_4 \ g_5 \ g_6 \ g_7.
 \end{aligned}$$

4. The general case seems very difficult to handle and it is not true, as might be suggested by the results mentioned in 2 and 3, that when the condition „ $\nu$  divides  $n^p$ “ is satisfied we have

$$\sigma = n^p / \nu.$$

Indeed in the simplest case, it can easily be verified that

$$\sigma(3, 2) = 3 > 2 = n^p / \nu.$$

A few rough inequalities for  $\sigma$  can be readily obtained, for instance

$$(4.1) \quad n^p > \sigma > n^p / \nu$$

$$(4.2) \quad \sigma(n+1, p) \leq p\sigma(n, p).$$

Using such results and patience, the following results may be obtained:

$$\begin{aligned}
 \sigma(n, 2) &= 2, 3, 4, 7, 16, \\
 \text{for } n &= 2, 3, 4, 5, 7, \\
 \text{and } \sigma(n, 3) &= 3, 5, 9, \\
 \text{for } n &= 2, 3, 4.
 \end{aligned}$$

# SUR LA CLASSE DE BAIRE DES DÉRIVÉES APPROXIMATIVES D'UNE FONCTION QUELCONQUE.

par

Z. ZAHORSKI (KRAKÓW).

1. Introduction et histoire du problème. Au cours des premières années du développement de la théorie des fonctions d'une variable réelle les représentants des branches classiques de mathématique craignaient que les considérations trop générales n'obscurcissent les idées fondamentales d'Analyse. (S. Saks, introduction à la „*Théorie de l'intégrale*“ Warszawa, (1933), Monografie Matematyczne, t. II, p. X+292). En effet, on pourrait s'attendre à ce que l'examen des fonctions non-analytiques, au sujet desquelles on fait très peu de suppositions, ne puisse pas aboutir à des conclusions suffisamment fortes sur la structure de ces fonctions. Il est arrivé, malgré cela, que la théorie de ces fonctions a donné bien de résultats qui ne sont pas banals avec des conclusions beaucoup plus fortes que les suppositions admises. Ainsi par exemple, on sait maintenant que l'ensemble de points de continuité d'une fonction réelle quelconque de variable réelle n'est pas quelconque mais du type  $G_\delta$ . J'ai démontré en 1943 une proposition analogue, concernant l'ensemble de points de dérivabilité d'une fonction quelconque. La même proposition fût démontrée, sans que j'en aie pris connaissance, en 1941 par M. A. Brudno.

Le but de la note présente est une proposition analogue sur l'ensemble de points de dérivabilité approximative d'une fonction quelconque ainsi que l'évaluation de la classe de Baire de la dérivée approximative (finie ou infinie) en supposant qu'elle existe partout (ou à l'exception, au plus,

d'un ensemble dénombrable  $E$  de points). Je laisse de côté le problème non résolu, si l'ensemble considéré est de classe inférieure de M. Borel.

Il résulte facilement de la proposition de Young sur la symétrie que la fonction possédant partout une dérivée ordinaire  $a$ , tout au plus, un ensemble dénombrable de points de discontinuité; elle est donc de classe  $\leq 1$ . Il s'ensuit que sa dérivée est de classe  $\leq 2$ . M. A. Khintchine a montré qu'elle est de classe  $\leq 1$ . J'ai obtenu ce résultat indépendamment en 1943. Le fait que la dérivée est une fonction de Baire est banal quoiqu'on ne suppose rien sur  $f(x)$ .

Dans le cas d'une dérivée approximative le problème est moins banal puisqu'il n'est que relativement facile de déduire que  $f(x)$  est mesurable (L). On pourrait donc espérer que si  $f(x)$  n'est pas une fonction de Baire il en sera de même de  $f'_{ap}(x)$  et que si  $f(x)$  est une fonction de classe  $\alpha$  de Baire,  $f'_{ap}(x)$  doit être de classe  $\alpha+1$ , ou tout au plus égale à  $\alpha$ . Je montrerai cependant que  $f'_{ap}(x)$  est toujours de classe  $\leq 3$ . M. G. Tôlstoff a démontré que si  $f(x)$  est approximativement continue,  $f'_{ap}(x)$  est de classe  $\leq 1$ . La supposition qui s'impose que  $f'_{ap}(x)$  est toujours de classe  $\leq 1$  (comme  $f'(x)$ ) n'est cependant pas juste. Je donnerai notamment un exemple de  $f'_{ap}(x)$  de classe  $> 2$  et ceci pour une fonction  $f(x)$  de classe 1 passant par des valeurs intermédiaires et approximativement continue partout sauf en un ensemble dénombrable de points. Je laisse comme non résolue la question d'existence d'une dérivée approximative de classe 3 exactement<sup>1)</sup>. Cette question aurait une réponse négative si l'ensemble de points de discontinuité approximative était au plus dénombrable; dans ce cas, du reste,  $f(x)$  serait aussi de classe  $\leq 2$ . Cette conclusion, très facile pour la dérivée ordinaire, est pour le moins douteuse pour la dérivée approxi-

1) Pendant l'impression j'ai résolu cette question *négativement* (ne résolvant pas le problème \* posé plus bas): si la fonction  $f(x)$  a partout (excepté un ensemble au plus dénombrable) la dérivée approximative  $f'_{ap}(x)$ , alors  $f'_{ap}(x)$  est de classe  $\leq 2$  ( $f(x)$  est aussi de classe  $\leq 2$ , — regarde la fin de ce travail).

mative. Je ne suis pas arrivé à la démontrer, ni d'en donner un contre-exemple. Je pose à ce sujet le problème suivant:

(\*) *Existe-t-il une fonction  $f(x)$  possédant partout la dérivée approximative et ayant un ensemble de points de discontinuité approximative de puissance du continu?*

Indépendamment de la question si  $f'_{ap}(x)$  est de classe  $\leq 2$  ou 3, on peut poser, en relation avec le travail de M. Tolstoff, la question si  $f'_{ap}(x)$  est de classe  $\leq 1$  relativement à l'ensemble de points dans lesquelles elle existe et dans lesquelles  $f(x)$  est approximativement continue. Dans le cas considéré cet ensemble a un complémentaire de mesure 0 et de I cathégorique.

**2. Remarques préliminaires.** Je détermine la classe de Baire de la fonction  $f'_{ap}(x)$  en considérant les ensembles  $\{f'_{ap}(x) > a\}$ ,  $\{f'_{ap}(x) < a\}$ . Je décompose chacun d'eux en deux parties: une comprise dans l'ensemble de points de continuité approximative de la fonction  $f(x)$  et l'autre dans l'ensemble  $K$  des points de discontinuité approximative. Dans le cas envisagé l'ensemble de points de discontinuité approximative est de mesure nulle; cela résulte facilement des théorèmes connus mais ici n'est pas suffisant puisqu'il faut connaître sa classe de Borel. Je trouve la classe de Borel de la partie considérée de l'ensemble  $K$  en tenant compte de la relation entre la densité et la fonction continue de sa mesure  $\mu(x) = |[0, x]. M|$  pour  $x \geq 0$ ,  $\mu(x) = -|[0, x]. M|$  pour  $x < 0$ . De cette manière l'ensemble  $K$  se laisse exprimer par les dérivées de Dini de la fonction continue, c'est-à-dire les fonctions de Baire. De cette relation résulte l'estimation de la classe de Borel de l'ensemble  $K$ .

Quant à la classe de Borel de la partie restante de l'ensemble  $\{f'_{ap}(x) > a\}$  je la trouve en présentant au commencement cet ensemble d'une manière résultant de la définition de  $f'_{ap}(x)$  et de la définition de l'ensemble  $\{f'_{ap}(x) > a\}$  comme une certaine combinaison des ensembles dont la mesurabilité (B) n'est pas connue. J'obtiens ainsi deux représentations analogues p. ex.  $\Sigma\Sigma\Sigma\Pi B_{nkm} = \Sigma\Sigma\Sigma\Pi B'_{nkm}$ , où  $B_{nkm} \subset B'_{nkm}$ . Il s'ensuit que l'ensemble envisagé doit se



laisser présenter comme  $\Sigma\Sigma\Sigma\Pi B_{nkm}^*$ , où  $B_{nkm} \subset B_{nkm}^* \subset B_{nkm}$ , et le problème se réduit à la recherche de l'ensemble  $B_{nkm}^*$  mesurable (B). J'y arrive en trouvant la fonction  $\varphi^*(x)$  de Baire remplissant les inégalités  $\varphi(x) \leq \varphi^*(x) \leq \varphi'(x)$ , où  $\varphi(x)$  et  $\varphi'(x)$  sont données. Je trouve la fonction  $\varphi^*(x)$  remplissant ces conditions en utilisant la propriété des dérivées de Dini de l'intégrale de Lebesgue des fonctions approximativement semi-continues.

**Désignations.** Je désigne par  $|M|$  la mesure extérieure de Lebesgue de l'ensemble  $M$ , par  $\|M\|$  la mesure intérieure et aussi par  $|M|$  la mesure de l'ensemble mesurable; je désigne par  $(a, b)$  l'intervalle ouvert  $a < x < b$  et par  $[a, b]$  l'intervalle fermé  $a \leq x \leq b$ ; par  $\{W(x)\}$  l'ensemble de tous les  $x$  remplissant la condition  $W(x)$  et par  $E\{W(x, y, z, \dots)\}$  l'ensemble de tous les  $x$  remplissant la condition  $W(x, y, z, \dots)$  pour les valeurs fixées  $y, z, \dots$  qui peuvent changer plus tard au cours du raisonnement après la construction de l'ensemble; ainsi  $y, z, \dots$  sont les paramètres de l'ensemble.

3. Au sujet de la fonction  $f(x)$ , je suppose qu'elle soit une fonction réelle arbitraire (pas même mesurable (L) ou au sens d'une autre théorie de mesure), finie, déterminée pour chaque  $x$  réel et fini. Les dérivées approximatives de Dini peuvent, par contre, prendre aussi les valeurs infinies  $+\infty$  et  $-\infty$ . Dans le cas où la fonction n'est pas mesurable, je définis la limite approximative supérieure de droite au point  $x_0$  comme borne inférieure des nombres  $l$  tels que

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|\{f(x) > l\}(x_0, x_0 + h)|}{h} = 0.$$

Les autres limites approximatives sont définies pareillement. J'appelle dérivée approximative  $f'_{ap}(x)$  la valeur commune, si elle existe, des 4 dérivées approximatives de Dini, cette valeur pouvant être finie ou infinie.

**Théorème I.** Si  $f'_{ap}(x)$  existe dans chaque point du complémentaire de l'ensemble  $E$ , au plus dénombrable, la dérivée

$f'_{ap}(x)$  est de classe  $\leq 3$  de Baire relativement à l'ensemble dans lequel elle existe.

Démonstration. Je vais évaluer la classe de Borel des ensembles  $\{f'_{ap}(x) > a\}$  pour  $a$  arbitraire. Le cas de  $a = +\infty$  est banal, le cas de  $a = -\infty$  se ramène aux  $a$  finis puisque  $\{f'_{ap}(x) > -\infty\} = \sum_{n=1}^{\infty} \{f'_{ap}(x) > -n\}$ ; les  $a$  restants se ramènent au  $a = 0$  en considérant éventuellement la fonction  $f(x) - ax$  au lieu de  $f(x)$ .

Puisque je vais considérer  $f(x)$  séparément aux points de continuité approximative et aux points restants, je déterminerai la classe de Borel de l'ensemble de tous les points de discontinuité approximative  $K$  et même de certaines de ses parties. Evidemment,  $f(x)$  est approximativement continue au points où  $f'_{ap}(x)$  est finie. En désignant donc  $K_1 = \{f'_{ap}(x) = -\infty\}K$ ,  $K_2 = \{f'_{ap}(x) = +\infty\}K$ ,  $K_3 = EK$  on aura  $K = K_1 + K_2 + K_3$ ; les ensembles  $K_i$  sont par couples disjoints et  $K_3$  est au plus dénombrable. Je considère l'ensemble  $K_2$ ; le résultat pour  $K_1$  est analogue. Si  $x_0 \in K_2$ , nous avons

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0+} \text{apr } f(x) > \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0+} \text{apr } f(x) > f(x_0) > \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0-} \text{apr } f(x) > \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0-} \text{apr } f(x)$$

et une au moins des inégalités

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0+} \text{apr } f(x) > f(x_0), \quad \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0-} \text{apr } f(x) < f(x_0)$$

doit avoir lieu. Il existe donc pour tout  $x_0$  deux nombres rationnels  $\frac{m}{n}$ ,  $\frac{p}{q}$  tels que

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0+} \text{apr } f(x) > \frac{m}{n} > \frac{p}{q} > \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0-} \text{apr } f(x) \text{ ou}$$

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0-} \text{apr } f(x) < \frac{p}{q} < \frac{m}{n} < \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0+} \text{apr } f(x).$$

D'après la définition des limites approximatives, les ensembles

$$\left\{ f(x) > \frac{m}{n} \right\}, \left\{ f(x) > \frac{p}{q} \right\}$$

ont au point  $x_0$  la densité extérieure de gauche égale à 0 et celle (supérieure) de droite  $> 0$ , ou les ensembles

$$\left\{ f(x) < \frac{m}{n} \right\}, \left\{ f(x) < \frac{p}{q} \right\}$$

ont au point  $x_0$  la densité extérieure de droite  $= 0$  et celle (supérieure) de gauche  $> 0$ . Ces densités sont les dérivées de Dini des fonctions

$$\varphi_{1mn}(\xi) = \text{sign } \xi \cdot \left| \left\{ f(x) > \frac{m}{n} \right\} (0, \xi) \right|,$$

$$\varphi_{1pq}(\xi) = \text{sign } \xi \cdot \left| \left\{ f(x) > \frac{p}{q} \right\} (0, \xi) \right|,$$

$$\varphi_{2mn}(\xi) = \text{sign } \xi \cdot \left| \left\{ f(x) < \frac{m}{n} \right\} (0, \xi) \right|,$$

$$\varphi_{2pq}(\xi) = \text{sign } \xi \cdot \left| \left\{ f(x) < \frac{p}{q} \right\} (0, \xi) \right|,$$

pour  $\xi = x_0$ , on a donc soit

$$(1) \quad \varphi_{1mn}^-(x_0) = \varphi_{1pq}^-(x_0) = 0, \quad \overline{\varphi_{1pq}^+}(x_0) \geq \overline{\varphi_{1mn}^+}(x_0) > 0$$

ou

$$(2) \quad \overline{\varphi_{2mn}^-}(x_0) \geq \overline{\varphi_{2pq}^-}(x_0) > 0, \quad \varphi_{2mn}^+(x_0) = \varphi_{2pq}^+(x_0) = 0.$$

Réciproquement, si l'une au moins des relations (1), (2) a lieu et  $x_0 \in R - E$ , nous obtenons d'après la définition des limites approximatives

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0^-} \text{apr } f(x) \leq \frac{p}{q} < \frac{m}{n} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0^+} \text{apr } f(x)$$

ou

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0^-} \text{apr } f(x) \leq \frac{p}{q} < \frac{m}{n} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0^+} \text{apr } f(x)$$

c'est-à-dire que  $x_0$  est le point de discontinuité approximative et même celui pour lequel  $f'_{ap}(x_0) = +\infty$  c'est-à-dire  $x_0 \in K_2$ . En formant les sous-ensembles des  $\bar{x} \in K_2$  avec les mêmes valeurs  $m, n, p, q$  on a donc

$$(3) \quad K_2 = \sum_{m, n, p, q} \left\{ \varphi_{1mn}^-(x) = 0 \right\} \left\{ \varphi_{1pq}^-(\bar{x}) = 0 \right\} \left\{ \overline{\varphi_{1mn}^+}(x) > 0 \right\}$$

$$\left\{ \bar{\varphi}_{1pq}^+(x) > 0 \right\} (R - E) + \sum_{m, n, p, q} \left\{ \varphi_{2mn}^+(x) = 0 \right\} \left\{ \varphi_{2pq}^+(x) = 0 \right\} \\ \left\{ \bar{\varphi}_{2mp}^-(x) > 0 \right\} \left\{ \bar{\varphi}_{2pq}^-(x) > 0 \right\} (R - E).$$

Les fonctions  $\varphi_{imn}(x)$ ,  $\varphi_{lpq}(x)$  sont non décroissantes et remplissent la condition de Lipschitz, la formule (3) permet donc de déterminer la classe de Borel de l'ensemble  $K_2$ . Son application directe donnerait, cependant, la classe trop haute. Nous avons:

$$\left\{ \varphi_{1mn}^-(x) = 0 \right\} \left\{ \varphi_{1pq}^-(x) = 0 \right\} \left\{ \bar{\varphi}_{1mn}^+(x) > 0 \right\} \left\{ \bar{\varphi}_{1pq}^+(x) > 0 \right\} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varphi_{1mn}^-(x) = 0 \right\} \left\{ \varphi_{1pq}^-(x) = 0 \right\} \left\{ \bar{\varphi}_{1mn}^+(x) > \frac{1}{k} \right\} \left\{ \bar{\varphi}_{1pq}^+(x) > \frac{1}{k} \right\}$$

et une formule analogue pour le second terme de (3). J'introduis les ensembles ( $k=1, 2, 3, \dots$ )

$$M_{mnpqk} = \left\{ \bar{\varphi}_{1mn}^-(x) < \frac{1}{2k} \right\} \left\{ \bar{\varphi}_{1pq}^-(x) < \frac{1}{2k} \right\} \left\{ \bar{\varphi}_{1mn}^+(x) > \frac{1}{k} \right\} \left\{ \bar{\varphi}_{1pq}^+(x) > \frac{1}{k} \right\} \\ J_{mnpqk} = \left\{ \bar{\varphi}_{2mn}^+(x) < \frac{1}{2k} \right\} \left\{ \bar{\varphi}_{2pq}^+(x) < \frac{1}{2k} \right\} \left\{ \bar{\varphi}_{2mn}^-(x) > \frac{1}{k} \right\} \left\{ \bar{\varphi}_{2pq}^-(x) > \frac{1}{k} \right\}$$

Dans ce cas

$$\left\{ \varphi_{1mn}^-(x) = 0 \right\} \left\{ \varphi_{1pq}^-(x) = 0 \right\} \left\{ \bar{\varphi}_{1mn}^+(x) > \frac{1}{k} \right\} \left\{ \bar{\varphi}_{1pq}^+(x) > \frac{1}{k} \right\} \subset M_{mnpqk}$$

et l'on a

$$(4) \quad K_2 \subset \sum_{mnpqk} (M_{mnpqk} + J_{mnpqk}) (R - E).$$

D'autre part, quand  $x_0 \in \overline{M_{mnpqk}}(R - E)$ , nous avons  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \text{apr } f(x)$

$$> \frac{m}{n}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \text{apr } f(x) \leq \frac{p}{q}, \quad \text{car dans le cas de } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \text{apr } f(x) > \frac{p}{q}$$

l'ensemble  $\left\{ f(x) \leq \frac{p}{q} \right\}$  aurait au point  $x_0$  la densité extérieure

de gauche égale à 0 et par suite  $\left\{ f(x) > \frac{p}{q} \right\}$  la densité inté-



rière (et a fortiori extérieure) de gauche 1, c'est-à-dire  $\varphi_{1pq}^-(x_0) = 1$ , contrairement à ce que  $\overline{\varphi_{1pq}^-}(x_0) < \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2}$ . Il en résulte que  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0+} \text{apr } f(x) > \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0-} \text{apr } f(x)$  et  $x_0$  est le point de discontinuité approximative et  $f'_{ap}(x_0) = +\infty$ , c'est-à-dire que  $x_0 \in K_2$ . J'obtiens pareillement que  $J_{mnpqk}(R-E) \subset K_2$ . De là et de (4) il s'ensuit que

$$K_2 = \sum_{mnpqk} (M_{mnpqk} + J_{mnpqk})(R-E).$$

Mais les ensembles  $\left\{ \overline{\varphi_{1mn}^-}(x) < \frac{1}{2k} \right\}$ ,  $\left\{ \overline{\varphi_{1mn}^+}(x) > \frac{1}{k} \right\}$  etc. pour les

dérivées de Dini des fonctions continues  $\varphi_{imn}(x)$  sont d'une classe connue de Borel;  $K_2$  est donc un ensemble de Borel, notamment  $J_{mnpqk}$ ,  $M_{mnpqk}$  sont du type  $F_\sigma \cdot G_\delta$ , d'où  $K_2$  est du type  $G_{\delta\sigma}$ . D'autre part, il résulte de (3) que  $K_2$  est contenu dans l'ensemble de points de non-dérivabilité d'une suite des fonctions remplissant la condition de Lipschitz  $\varphi_{imn}(x)$  et  $\varphi_{ipq}(x)$ ;  $K_2$  est de mesure 0. Il s'ensuit que la fonction  $f(x)$  est presque partout approximativement continue et mesurable (L) d'après le théorème de M. E. Kamke (Fund. Math. t. X. p. 431-433).

Ce théorème n'est pas formulée aussi fortement comme il serait possible de le faire. Notamment: Théorème 1: *Toute fonction peu semi-continue en haut (ev. en bas) dans (a, b) est mesurable.* Sans changer la démonstration, on peut prouver cette proposition en supposant cette „peu semi-continuité“ comme ayant lieu *presque partout* dans (a, b) (comme dans le théorème 2). La „peu semi-continuité“ est une propriété plus faible que la semi-continuité approximative comme cela résulte immédiatement de la définition de M. Kamke.

La démonstration facile de ce que  $K_1$  et  $K_2$  sont de I-re catégorie est superflue dans ce travail. Je la laisse au lecteur.

Prenons en considération l'ensemble  $\{f'_{ap}(x) > 0\}$ . On a

$$(5) \quad \{f'_{ap}(x) > 0\} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ f'_{ap}(x) > \frac{1}{n} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ f'_{ap}(x) > \frac{1}{n} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n,$$

où  $D_n$  est un ensemble arbitraire remplissant la condition:

$$\left\{ f'_{ap}(x) > \frac{1}{n} \right\} \subset D_n \subset \left\{ f'_{ap}(x) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Dans tout point  $x$  de l'ensemble  $\left\{ f'_{ap}(x) > \frac{1}{n} \right\}$  la densité de l'ensemble des valeurs de  $h$  telles que  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} < \frac{1}{n}$  et telles que ce quotient  $\leq \frac{1}{n}$ , est nulle au point  $h=0$ , donc la densité supérieure  $< \frac{1}{2}$ . Réciproquement, si dans un certain

point  $x \in R - E$  la densité supérieure est  $< \frac{1}{2}$ , on aura  $f'_{ap}(x) > \frac{1}{n}$  car si l'on avait  $f'_{ap}(x) < \frac{1}{n}$ , la densité envisagée serait  $1 > \frac{1}{2}$ .

Il s'ensuit que nous pouvons poser

$$(6) \quad D_n = (R - E) \left\{ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\left| E_h \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < \frac{1}{n} \right\} [-\Delta < h < \Delta] \right|}{2\Delta} < \frac{1}{2} \right\}$$

Remarquons que tous les raisonnements faits pour le signe  $< \frac{1}{n}$  peuvent être faits pour  $\leq \frac{1}{n}$ . Les ensembles correspondants seront désignés par les mêmes lettres avec un point ( $\cdot$ ) au dessus, p. ex.  $D_n^{\cdot}$ .

Pour obtenir la somme et le produit d'un nombre dénombrable des ensembles, comme l'exige la classification de Borel, je me borne à la suite des valeurs  $\Delta$ ,  $\Delta_m = \frac{1}{m}$ . D'autre part, en désignant par  $D_{nk}$  l'ensemble obtenu de (6) par la substitution  $\frac{1}{2} - \frac{1}{k}$  en place de  $\frac{1}{2}$ , on aura

$$D_n = \sum_{k=1}^{\infty} D_{nk}.$$

Si  $x \in D_{nk}$ , on a à partir d'un certain  $m = M$  ( $M$  dépend de  $x$ ), pour chaque  $m > M$

$$(7) \quad \frac{m}{2} \left| E_h \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < \frac{1}{n} \right\} \left[ -\frac{1}{m} < h < \frac{1}{m} \right] \right| < \frac{1}{2} - \frac{1}{k}.$$

En désignant par  $B_{nkm}$  le produit de l'ensemble de tous les  $x$  remplissant cette condition et de l'ensemble  $R - E$  on aura

$$(8) \quad D_{nk} \subset \sum_{M=1}^{\infty} \prod_{m=M}^{\infty} B_{nkm}, \quad D_n \subset \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{M=1}^{\infty} \prod_{m=M}^{\infty} B_{nkm}.$$

D'autre part, si  $x \in \prod_{m=M}^{\infty} B_{nkm}$ , nous pouvons évaluer la densité moyenne de l'ensemble  $E \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < \frac{1}{n} \right\}$  sur le segment arbitraire  $[-\Delta, \Delta]$  tel que  $\frac{1}{m+1} \leq \Delta \leq \frac{1}{m}$ ,  $m > M$ . Nous avons, notamment, en désignant, pour simplifier l'écriture, par  $\mu(\Delta)$  la mesure sur le segment  $[-\Delta, \Delta]$ :

$$\frac{\mu(\Delta)}{2\Delta} \leq \frac{\mu(\frac{1}{m})}{2} \cdot (m+1) = \frac{\mu(\frac{1}{m})}{2} m \cdot \frac{m+1}{m} < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right) \left(1 + \frac{1}{m}\right),$$

donc pour  $m > M^* = \max(M, k-2)$  (c'est-à-dire pour chaque  $\Delta \leq \frac{1}{M^*}$ ):

$$\frac{\mu(\Delta)}{2\Delta} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2k},$$

$$\overline{\lim}_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \left| E \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < \frac{1}{n} \right\} [-\Delta \leq h \leq \Delta] \right| < \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3k}$$

et  $x \in D_{n,3k}$  donc

$$\sum_{M=1}^{\infty} \prod_{m=M}^{\infty} B_{nkm} \subset D_{n,3k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{M=1}^{\infty} \prod_{m=M}^{\infty} B_{nkm} \subset \sum_{k=1}^{\infty} D_{n,3k} \subset \sum_{k=1}^{\infty} D_{nk} = D_n$$

d'après (6). De cela et de (8) il résulte que

$$(9) \quad D_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{M=1}^{\infty} \prod_{m=M}^{\infty} B_{nkm}.$$

Il reste à envisager l'ensemble  $B_{nkm}$ . Prenons en considération la fonction

$$F_{nm}(x) = m \left| E \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < \frac{1}{n} \right\} \left[ -\frac{1}{m} \leq h \leq \frac{1}{m} \right] \right| \frac{1}{2}$$

dans l'ensemble  $R - E$ . On a d'après (7)

$$B_{nkm} = (R - E) \left\{ F_{nm}(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{k} \right\}$$

Pareillement

$$B_{nkm}^* = (R - E) \left\{ F_{nm}^*(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{k} \right\}, \text{ où}$$

$$F_{nm}^*(x) = m \left| E_h \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < \frac{1}{n} \right\} \left[ -\frac{1}{m} < h < \frac{1}{m} \right] \right| \cdot \frac{1}{2}$$

On a

$$(10) \quad 0 \leq F_{nm}(x) \leq F_{nm}^*(x) \leq 1.$$

Déjà  $B_{nkm}^* \subset B_{nkm}$ . Désignant par  $\psi_{nm}(x)$  une fonction quelconque remplissant la condition

$$(11) \quad F_{nm}(x) \leq \psi_{nm}(x) \leq F_{nm}^*(x) \quad \text{pour tout } x \in H$$

et par

$$(12) \quad B_{nkm}^* = (R - E) \left\{ \psi_{nm}(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{k} \right\},$$

nous aurons

$$HB_{nkm}^* \subset HB_{nkm} \subset HB_{nkm}.$$

Des formules (9), (5) et des formules analogues pour  $B_{nkm}^*$ ,  $D_{nk}^*$ ,  $D_n^*$  il résulte

$$(13) \quad H \{ f'_{ap}(x) > 0 \} = H \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{M=1}^{\infty} \prod_{m=M}^{\infty} B_{nkm}^* = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{M=1}^{\infty} \prod_{m=M}^{\infty} HB_{nkm}^*.$$

Posons en particulier  $H = R - (K_1 + K_2 + E)$ . Je déterminerai la classe de Borel de l'ensemble  $H \{ f'_{ap}(x) > 0 \}$  en choisissant  $\psi_{nm}(x)$  de manière que  $B_{nkm}^*$  soient des ensembles de Borel. Il suffit pour cela que  $\psi_{nm}(x)$  soit une fonction de Baire (relativement sur l'ensemble borelien  $H$ ). Je choisirai dans ce but pour  $\psi_{nm}(x)$  une dérivée convenable de Dini de l'intégrale indéfinie de Lebesgue de la fonction  $F_{nm}(x)$  ou  $F_{nm}^*(x)$ . A cause de (10) il me faut et il me suffit de montrer que ces fonctions sont mesurables (L). Pour la démonstration des inégalités (11) je prouverai que  $F_{nm}(x)$  est approximativement semi-continue inférieurement,  $F_{nm}^*(x)$  est



approximativement semi-continue supérieurement dans tout point  $x \in H$ . Puisque

$$F_{nm}^*(x) = 1 - \Phi_{nm}(x),$$

$$\Phi_{nm}(x) = \frac{m}{2} \left| E_h \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > \frac{1}{n} \right\} \left[ -\frac{1}{m} \leq h \leq \frac{1}{m} \right] \right|$$

il suffit de montrer que  $\Phi_{nm}(x)$  et  $F_{nm}^*(x)$  sont approximativement semi-continues inférieurement et mesurables. En considérant éventuellement au lieu de  $f(x)$  la fonction

$$\Theta(x) = f(x) - \frac{1}{n}x \text{ ou } -f(x) + \frac{1}{n}x \text{ je ramène le deux cas}$$

à la discussion de la fonction

$$\Phi_m(x) = \frac{m}{2} \left| E_h \left\{ \frac{\Theta(x+h) - \Theta(x)}{h} > 0 \right\} \left[ -\frac{1}{m} \leq h \leq \frac{1}{m} \right] \right|$$

ou  $\Theta(x)$  est une fonction mesurable (L) et approximativement continue dans tous les points de l'ensemble  $H$ .

**Lemme.** *La fonction  $\Phi_m(x)$  est mesurable (L) et approximativement semi-continue inférieurement dans chaque point  $x \in H$ .*

Puisque l'ensemble  $R - H$  est de mesure 0, il suffit (à cause de la proposition citée de M. Kamke) de montrer que  $\Phi_m(x)$  est approximativement semi-continue inférieurement dans tout point  $x_0 \in H$ . On peut même se limiter à un voisinage  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  fixé quelconque du point  $x_0$ . Je désigne par  $\varepsilon$  un nombre positif arbitraire et je pose

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \min \left( \frac{\varepsilon}{8m}, \frac{1}{4m} \right).$$

Je considère les intervalles

$$L_1 = \left[ x_0 - \frac{1}{m} + \delta, x_0 - 2\delta \right], L_2 = (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta),$$

$$L_3 = \left[ x_0 + 2\delta, x_0 + \frac{1}{m} - \delta \right].$$

Le premier et le troisième de ces intervalles sont communs pour  $\left[ x_0 - \frac{1}{m}, x_0 + \frac{1}{m} \right]$  et  $\left[ x - \frac{1}{m}, x + \frac{1}{m} \right]$ , si  $|x - x_0| < \delta$  et c'est uniquement dans ces intervalles que je considère les valeurs  $\bar{x}_0 + h = x + h' = \xi$ . On a évidemment

$$\begin{aligned} & \left| E \left\{ \frac{\Theta(x+h) - \Theta(x)}{h} > 0 \right\} [a \leq h \leq b] \right| = \\ & = \left| E \left\{ \frac{\Theta(\xi) - \Theta(x)}{\xi - x} > 0 \right\} [a+x \leq \xi \leq b+x] \right|. \end{aligned}$$

La différence des mesures des ensembles  $E_{\xi} \left\{ \frac{\Theta(\xi) - \Theta(x_0)}{\xi - x_0} > 0 \right\}$  et  $E_{\xi} \left\{ \frac{\Theta(\xi) - \Theta(x)}{\xi - x} > 0 \right\}$  dans les intervalles non envisagés d'une longueur totale  $8\delta$  est donc  $\leq 8\delta$ , tandis que la différence de densité moyenne rapportée à l'intervalle de longueur  $\frac{2}{m}$  qui provient de ce que l'on n'envisage pas ces intervalles (les parties des segments  $[x_0 - \frac{1}{m}, x_0 + \frac{1}{m}]$ ,  $[x - \frac{1}{m}, x + \frac{1}{m}]$  situés en dehors de  $L_1$  et  $L_3$ ) est  $\leq 8\delta \cdot \frac{m}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , il en résulte que

$$(14) \quad \left| \Phi_m(x) - \Phi_m(x_0) - \frac{m}{2} \left( \left| E_{\xi} \left\{ \frac{\Theta(\xi) - \Theta(x)}{\xi - x} > 0 \right\} (L_1 + L_3) \right| - \left| E_{\xi} \left\{ \frac{\Theta(\xi) - \Theta(x_0)}{\xi - x_0} > 0 \right\} (L_1 + L_3) \right| \right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . De la formule

$$E_{\xi} \left\{ \frac{\Theta(\xi) - \Theta(x_0)}{\xi - x_0} > 0 \right\} (L_1 + L_3) = \sum_{p=1}^{\infty} E_{\xi} \left\{ \frac{\Theta(\xi) - \Theta(x_0)}{\xi - x_0} > \frac{1}{p} \right\} (L_1 + L_3)$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned} & \left| E_{\xi} \left\{ \frac{\Theta(\xi) - \Theta(x_0)}{\xi - x_0} > 0 \right\} (L_1 + L_3) \right| = \\ & = \lim_{p \rightarrow \infty} \left| E_{\xi} \left\{ \frac{\Theta(\xi) - \Theta(x_0)}{\xi - x_0} > \frac{1}{p} \right\} (L_1 + L_3) \right| \end{aligned}$$

il existe donc un nombre  $P = P(\varepsilon)$  tel que

$$(15) \quad \left| E_{\xi} \left\{ \frac{\Theta(\xi) - \Theta(x_0)}{\xi - x_0} > 0 \right\} (L_1 + L_3) \right| - \frac{\varepsilon}{m} < \left| E_{\xi} \left\{ \frac{\Theta(\xi) - \Theta(x_0)}{\xi - x_0} > \frac{1}{P} \right\} (L_1 + L_3) \right|.$$

Les points  $\xi$  de l'ensemble  $S = E_{\xi} \left\{ \frac{\Theta(\xi) - \Theta(x_0)}{\xi - x_0} > \frac{1}{P} \right\} (L_1 + L_3)$

correspondent aux points  $[\xi; \Theta(\xi)]$  du diagramme situés en dehors du domaine angulaire formé par les droites

$p_1, p_2: \eta - \Theta(x_0) = \pm \frac{1}{P} (\xi - x_0)$  et renfermant la droite pa-

rallèle à l'axe  $\xi$ , en particulier en dehors de deux trapèzes isocèles dont les côtés non parallèles sont situés sur les droites  $p_1, p_2$  et les côtés restants, perpendiculaires à l'axe  $\xi$  se trouvent sur les droites passant par les extrémités des segments  $L_1$  et  $L_3$ . Les hauteurs des trapèzes en question sont donc égales aux longueurs des segments  $L_1, L_3$  c'est

-à-dire à  $\frac{1}{m} - 3\delta$ . La moitié de la longueur des bases plus

courtes de ces trapèzes est égale au minimum de  $\left| \pm \frac{1}{P} (\xi - x_0) \right|$

dans  $L_1 + L_3$ , c'est-à-dire à  $\frac{2\delta}{P} = \frac{2\delta(\varepsilon)}{P(\varepsilon)}$ . Les points  $[\xi; \Theta(\xi)]$

du diagramme pour  $\xi \in SL_1$  se trouvent donc au dessous de la

droite  $y = \Theta(x_0) - \frac{2\delta}{P}$ , et pour  $\xi \in SL_3$  — au dessus de la

droite  $y = \Theta(x_0) + \frac{2\delta}{P}$ . Il s'ensuit qu'en formant le quotient

des différences pour les  $\xi - x_0$  et  $\xi - x$  quand  $\xi \in S$

$$(16) \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad |\Theta(x) - \Theta(x_0)| < \frac{2\delta(\varepsilon)}{P(\varepsilon)}$$

nous obtiendrons les signes positifs, c'est à dire

$$\frac{\Theta(\xi) - \Theta(x_0)}{\xi - x_0} > 0, \quad \frac{\Theta(\xi) - \Theta(x)}{\xi - x} > 0.$$

Il en résulte cependant que

$$S \subset E_{\xi} \left\{ \frac{\Theta(\xi) - \Theta(x)}{\xi - x} > 0 \right\} (L_1 + L_3)$$

$$\text{pour } |\Theta(x) - \Theta(x_0)| < \frac{2\delta}{P}, \quad |x - x_0| < \delta,$$

donc, d'après (15)

$$\left| E_{\xi} \left\{ \frac{\Theta(\xi) - \Theta(x)}{\xi - x} > 0 \right\} (L_1 + L_3) \right| > \\ > \left| E_{\xi} \left\{ \frac{\Theta(\xi) - \Theta(x_0)}{\xi - x_0} > 0 \right\} (L_1 + L_3) \right| - \frac{\varepsilon}{m},$$

pour  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $|\Theta(x) - \Theta(x_0)| < \frac{2\delta}{P}$  et de là ainsi que de (14) il s'ensuit que pour chaque  $x$  remplissant les conditions (16)

$$(17) \quad \Phi_m(x) - \Phi_m(x_0) > -\varepsilon.$$

Puisque  $x_0 \in H$ , ce point sera, d'après la définition, le point de densité de l'ensemble de points  $x$  remplissant (16) et par suite des  $x$  remplissant (17), c'est-à-dire que  $\Phi_m(x)$  est approximativement semi-continue inférieurement au point  $x_0$ , ce que nous voulions montrer.

Les dérivées de Dini de la fonction  $\Omega(x) = \int_a^x \omega(t) dt$  où  $\omega(x)$  est approximativement semi-continue inférieurement en  $x_0$ , remplissent l'inégalité

$$(18) \quad \bar{\Omega}(x_0) > \underline{\Omega}(x_0) > \omega(x_0)$$

où  $\bar{\Omega}(x) = \max(\bar{\Omega}^+(x), \bar{\Omega}^-(x))$ ,  $\underline{\Omega}(x) = \min(\underline{\Omega}^+(x), \underline{\Omega}^-(x))$ , dont la démonstration est facile. Une inégalité analogue peut être écrite pour la fonction approximativement semi-continue supérieurement. En particulier en posant

$$\Omega_1(x) = \int_0^x F_{nm}(t) dt, \quad \Omega_2(x) = \int_0^x F_{nm}^*(t) dt$$

on aura suivant (10) pour chaque  $x$  et  $h$

$$\frac{\Omega_2(x+h) - \Omega_2(x)}{h} > \frac{\Omega_1(x+h) - \Omega_1(x)}{h}$$

De là  $\bar{\Omega}_2(x) > \bar{\Omega}_1(x)$ ,  $\underline{\Omega}_2(x) > \underline{\Omega}_1(x)$  pour tous les  $x$ . On a donc en vertu du lemme et (18) pour tout  $x \in H$ :

$$F_{nm}(x) \leq \underline{\Omega}_1(x) \leq \bar{\Omega}_2(x) \leq F_{nm}^*(x).$$

En posant dans (12)  $\psi_{nm}(x) = \underline{\Omega}_1(x)$  j'obtiens pour  $B_{nk_m}^*$  les ensembles du type  $G_\delta$ ; de (13) il s'ensuit donc que



$$(19) \quad H\{f'_{ap}(x) > 0\} = HT = (R - K_1 - K_2 - E)T$$

où  $T = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{M=1}^{\infty} \prod_{m=M}^{\infty} B_{nkm}^*$  est du type  $G_{\delta\sigma}$ . Puisque

$$(20) \quad \{f'_{ap}(x) > 0\} = H\{f'_{ap}(x) > 0\} + K_1\{f'_{ap}(x) > 0\} + K_2\{f'_{ap}(x) > 0\}$$

et  $K_1\{f'_{ap}(x) > 0\} = 0, K_2\{f'_{ap}(x) > 0\} = K_2$ , on a donc d'après

(19) et (20)

$$\{f'_{ap}(x) > 0\} = T - TK_1 - TK_2 - TE + K_2,$$

c'est-à-dire

$$\{f'_{ap}(x) > 0\} = T - TK_1 - TE + K_2 = T + K_2 - TE - K_1,$$

Puisque  $T, K_2$  et  $K_1$  sont du type  $G_{\delta\sigma}$  et  $TE$  est au plus dénombrable, nous avons que

$$\{f'_{ap}(x) > 0\} \text{ est du type } G_{\delta\sigma} \cdot F_{\delta\delta}$$

et par suite du type  $G_{\delta\delta\delta}$  et  $F_{\delta\delta\delta}$  simultanément. De la formule

$$\{f'_{ap}(x) > -\infty\} = H\{f'_{ap}(x) > -\infty\} + K_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \{f'_{ap}(x) > -n\} H + K_2$$

il s'ensuit que  $\{f'_{ap}(x) > -\infty\} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n H + K_2 = T' H + K_2$ , où  $T'$

est du type  $G_{\delta\sigma}$ . De cela, comme plus haut, il résulte que

$\{f'_{ap}(x) > -\infty\}$  est également du type  $G_{\delta\sigma} \cdot F_{\delta\delta}$ . On voit donc

que les ensembles  $\{f'_{ap}(x) > a\}$ ,  $\{f'_{ap}(x) < a\}$  sont du type  $G_{\delta\sigma} \cdot F_{\delta\delta}$  pour tous les  $a$ ,  $\{f'_{ap}(x) > a\}$ ,  $\{f'_{ap}(x) \leq a\}$  du type

$G_{\delta\sigma} + F_{\delta\delta}$  et par suite également du type  $G_{\delta\delta\delta}$  et  $F_{\delta\delta\delta}$  simulta-

nément. De même l'ensemble  $\{f'_{ap}(x) = a\}$  est du type

$(G_{\delta\sigma} + F_{\delta\delta}) (G_{\delta\sigma} + F_{\delta\delta})$  et du type  $G_{\delta\sigma\delta}$  et  $F_{\delta\sigma\delta}$  simultanément. La

fonction  $f'_{ap}(x)$  doit donc être de classe  $\leq 3$  dans  $R - E$  (et

aussi dans  $R$  pour une détermination arbitraire de  $f'_{ap}(x)$

dans  $E$ ). Il s'ensuit en outre de (19) que  $f'_{ap}(x)$  est de classe

$\leq 2$  dans  $H$ . On voit en même temps à cause du caractère

spécial des ensembles  $F_{\delta\sigma\delta}$  que  $f'_{ap}(x)$  ne peut pas

être une fonction arbitraire de classe 3; il est donc probable

qu'elle est de classe  $\leq 2$  (et  $\leq 1$  dans  $H$ ). (Il est évident que

la solution de cette question peut être indépendante de la

solution du problème \*).

Considérons une fonction  $f(x)$  périodique de période 1

égale à 0 aux extrémités gauches des segments composants

du complémentaire de l'ensemble de Cantor; égale à 1 au

points restants de cet ensemble et sur les segments  $(a_i, b_i)$  de longueur  $b_i - a_i = \frac{1}{3^n}$  de complémentaire de l'ensemble de Cantor déterminée de manière suivante:

$$1 \text{ pour } a_i + 2 \cdot 3^{-2n} \leq x < b_i$$

$$f^*(x) = (x - a_i - 3^{-2n}) \cdot 2 \cdot 3^{2n} - 1 \text{ pour } a_i + 3^{-2n} < x < a_i + 2 \cdot 3^{-2n} \\ - 1 \text{ pour } a < x \leq a_i + 3^{-2n}$$

J'obtiens le diagramme dessin de  $f(x)$  sur le segment  $[a_i, b_i]$  en partant de celui de  $f^*(x)$  en y remplaçant les points aux points  $a_i + 3^{-2n}$ ,  $a_i + 2 \cdot 3^{-2n}$  par les arcs des circonférences de rayons  $3^{-2n}$  tangents aux segments rectilignes du diagramme dessin de la fonction  $f^*(x)$ . La fonction  $f(x)$  ainsi déterminée est de classe 2 de Baire ce qui permettra probablement de déterminer exactement la classe de Baire des fonctions ayant partout la dérivée approximative.

(J'espère notamment que le résultat obtenu dans ce travail qu'une telle fonction est mesurable (L) peut être renforcé par la démonstration qu'elle est de classe  $\leq 2$  de Baire. A titre d'argument remarquons, comme il est facile de prouver, qu'à l'exception d'un ensemble au plus dénombrable on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} \text{apr } f(x) = f(x_0) = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0-} \text{apr } f(x) \text{ ou} \\ \lim_{x \rightarrow x_0-} \text{apr } f(x) = f(x_0) = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0+} \text{apr } f(x).$$

Ainsi donc la valeur  $f(x_0)$  est en général déterminée par celle de la fonction dans le voisinage de  $x_0$  et ne peut pas être trop arbitraire).

Je laisse au lecteur la démonstration facile de ce que  $f'_{ap}(x)$  existe partout (aux extrémités gauches des segments du complémentaire de l'ensemble de Cantor  $f'_{ap}(x) = -\infty$ ; aux points restants de cet ensemble  $f'_{ap}(x) = 0$  et dans son complémentaire  $f'_{ap}(x) = f'(x) > 0$ ).

On sait qu'il existe une fonction  $\varphi(x)$  (même absolument continue) ayant partout la dérivée ordinaire,  $\varphi'(x) = -\infty$  dans chaque point de l'ensemble de Cantor et  $\varphi'(x) \leq 0$  pour chaque  $\bar{x}$ . Il s'ensuit que l'exemple cité montre en

même temps que la proposition connue de M. A. Khintchine, que de  $f'_{ap}(x) \geq \varphi'(x)$  pour chaque  $x$  il résulte que  $f'_{ap}(x) = f'(x)$  pour tout  $x$ , n'est pas juste sans réserves. En effet, de la démonstration de M. Khintchine (Fund. Math., t. 9, p. 212-279) résulte il qu'il n'envisage que la  $f'_{ap}(x)$  finie partout (ou en tout cas  $\neq -\infty$  pour les évaluations d'en bas). La fonction  $f'_{ap}(x)$  est ici de classe  $\geq 2$ . Dans le cas contraire l'ensemble  $\{f'_{ap}(x) = -\infty\}$  serait du type  $G_\delta$  et, étant dense dans l'ensemble de Cantor, aurait la puissance du continu. On n'a pas donc partout  $f'_{ap}(x) = f'(x)$  puisqu'une  $f'(x)$  existant partout est de classe  $\leq 1$ .

En posant  $F(x) = 1 - 3^{-n}$  dans  $x = a_i$  où  $(a_i, b_i)$  est le segment du complémentaire de l'ensemble de Cantor de longueur  $b_i - a_i = 3^{-n}$  et  $F(x) = 1$  aux points restants de l'ensemble de Cantor et encore

$$F(x) = Af^2(x) + Bf(x) + C - \sqrt{x - a_i}(x - b_i)^2 \text{ pour tout } x \in (a_i, b_i)$$

$$\text{où } A = 1 - 2 \cdot 2^{-2} 3^{-n+1} + \sqrt{1 - 2 \cdot 1 3^{-n+1} + 2 \cdot 1 3^{-2n}},$$

$$B = 2 \cdot 1 3^{-n}, \quad C = 1 - 2 \cdot 1 3^{-n} - A$$

j'arrive à une fonction ayant les propriétés semblables et en plus de classe 1 de Baire. Cette fonction passe par des valeurs intermédiaires dans chaque segment et est approximativement continue partout excepté un ensemble dénombrable de valeurs  $a_i$ . La dérivée  $F'_{ap}(x)$  existe partout et est de classe  $> 2$ . Je laisse au lecteur la démonstration facile.

Après avoir écrit ce travail je suis arrivé à démontrer (et même facilement) la proposition suivante qui est une généralisation du fait connu que la fonction ayant partout la dérivée ordinaire finie est continue. En effet: *une fonction ayant partout une dérivée approximative (éventuellement infinie) est de classe  $\leq 2$  de Baire et excepté un ensemble (au plus) dénombrable  $A$  de points — de classe  $\leq 1$ . Cet ensemble  $A$  est contenu dans l'ensemble de points de discontinuité approximative.*

La démonstration de cette proposition ainsi que la II partie des problèmes traités en ce lieu sera publiée plus tard.

## SUR LES OVALES

par

A. MARCHAUD (Bordeaux).

1. Cette Note a pour objet de signaler quelques propriétés que ne peut posséder un ovale sans être une ellipse. Un ovale  $\Gamma$  sera par définition la frontière d'un domaine plan borné, fermé et convexe, non réduit à un segment de droite. Il reviendrait au même de considérer  $\Gamma$  comme une courbe simple fermée d'ordre deux au sens élargi, c'est-à-dire rencontrée en deux points au plus par toute sécante ne contenant aucun segment entièrement situé sur elle.  $\Gamma$  est une courbe simple fermée douée des propriétés suivantes:

a)  $\Gamma$  admet en tout point  $m$  une demi-tangente unique pour chaque côté et l'ensemble des points où ces deux demi-tangentes ne sont pas opposées est au plus dénombrable.  $\Gamma$  est toute entière d'un même côté par rapport au support d'une quelconque de ses demi-tangentes.

b) Si  $m$  tend vers  $m_0$  en restant d'un même côté, la demi-tangente en  $m$  du côté de  $m_0$  tend vers la demi-droite opposée à la demi-tangente en  $m_0$  du côté de  $m$ . Il en résulte que si  $\Gamma$  a une tangente partout celle-ci varie d'une manière continue.

c) Par tout point extérieur à  $\Gamma$  (c'est-à-dire extérieur au domaine convexe qui le définit) on peut mener à celui-ci deux droites d'appui. On appelle ainsi toute droite contenant un point au moins de  $\Gamma$  et le laissant d'un même côté.

2. Soit alors  $A$  une droite *extérieure* à  $\Gamma$ , les traces sur  $A$  des supports des segments rectilignes qui peuvent se trouver sur  $\Gamma$  forment un ensemble  $E(A)$ , vide ou dénombrable. Les droites d'appui d'un point  $P$  pris sur  $A$  en dehors de  $E(A)$  touchent chacune  $\Gamma$  en un point unique et définissent une corde de contact bien déterminée. Je dirai que  $A$  admet un pôle par rapport à  $\Gamma$  si le support de cette



corde de contact passe par un point fixe  $a$  quand  $P$  varie. On va voir que dans ce cas  $A$  est la *polaire* de  $a$  au sens de la théorie des coniques. En faisant au besoin une transformation homographique convenable, on peut supposer que  $A$  est la droite de l'infini. Il suffira d'établir que dans ce cas  $a$  est un centre pour  $\Gamma$ .

Montrons d'abord que  $a$  est intérieur à  $\Gamma$ . Pour cela prenons sur  $A$  un point étranger à  $E(A)$ , les droites d'appui issues de ce point sont deux parallèles,  $T$  et  $T_1$ , qui touchent  $\Gamma$  la première en un seul point  $m$ , la seconde en un seul point  $m_1$ ; le support de  $mm_1$  contient  $a$ . L'ovale  $\Gamma$  est compris entre  $T$  et  $T_1$  et possède nécessairement des points de part et d'autre de  $mm_1$ . Supposons le contraire et soit  $n$  un point de  $\Gamma$ , menons par  $m$  une droite  $L$  coupant le segment  $m_1n$  à son intérieur et dont le point à l'infini  $p$  soit étranger à  $E(A)$ . La parallèle à  $L$  menée par  $m_1$  est une droite d'appui issue de  $p$ . La seconde droite d'appui ne peut être  $L$  (qui pénètre à l'intérieur de  $\Gamma$ ) elle ne peut donc toucher  $\Gamma$  qu'en un point extérieur au segment  $mm_1$ . Il en résulte que  $a$  est nécessairement en  $m_1$ . En intervertissant les rôles de  $m$  et de  $m_1$  on verrait que  $a$  doit être aussi en  $m$ .  $\Gamma$  possède donc des points de part et d'autre de  $mm_1$ . Soit alors  $n_1$  un point de  $\Gamma$  situé par rapport à  $mm_1$  du côté opposé à  $n$ . L'arc  $mnm_1$  de  $\Gamma$  complété par le segment  $mm_1$  constitue un ovale  $\Gamma_1$ . Le raisonnement précédent montre que les droites d'appui de  $\Gamma_1$  parallèles à  $L$  le touchent en  $m_1$  et en un point unique  $r$  situé hors des droites  $T$ ,  $T_1$  et  $mm_1$ ,  $r$  est le point de contact d'une des droites d'appui à  $\Gamma$ , issues de  $p$ . En choisissant  $L$  de manière qu'en plus des conditions imposées sa parallèle menée par  $m_1$  coupe le segment  $mn_1$  à son intérieur on obtiendra de même pour  $\Gamma$  une seconde droite d'appui le touchant en un point unique  $r_1$ , situé par rapport à  $mm_1$  du côté opposé à  $r$  et situé hors de  $T$  et de  $T_1$ . Le support de  $rr_1$  coupe nécessairement le segment  $mm_1$  à son intérieur. Le point  $a$  est donc bien intérieur à  $\Gamma$ .

3. Considérons maintenant un point variable  $m$  sur  $\Gamma$ . La droite  $am$  rencontre l'ovale en un second point  $m_1$  situé

du côté opposé à  $m$  par rapport à  $a$ . Je vais établir que les demi-tangentes à droite (à gauche) en  $m$  et  $m_1$  sont inversement parallèles. Supposons d'abord que  $m$  par exemple soit une pointe et désignons par  $mt$  et  $mt'$  les demi-tangentes à droite et à gauche. Menons par  $m$  une droite  $L$  extérieure à l'angle  $tmt'$  et dont le point à l'infini soit étranger à  $E(A)$ .  $L$  est une droite d'appui, la droite d'appui parallèle touche  $\Gamma$  au seul point  $m_1$ . En prenant  $L$  voisine du support de  $mt$  ou de  $mt'$  l'on voit que  $\Gamma$  est tout entier dans l'angle  $t_1m_1t'_1$  homothétique de  $tmt'$  par rapport à  $a$ . Si la demi-tangente à droite en  $m_1$  était distincte de  $m_1t_1$  elle serait dans l'angle  $am_1t_1$ , mais alors le même raisonnement montre que  $mt$  ne pourrait être demi-tangente. On en déduit que  $m_1t_1$  et  $m_1t'_1$  sont respectivement les demi-tangentes à droite et à gauche. Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse où les demi-tangentes en  $m$  sont opposées, il en sera de même en  $m_1$  car l'un de ces points ne peut être une pointe sans que l'autre en soit une. Soient toujours  $mt$  et  $mt'$  les demi-tangentes à droite et à gauche en  $m$ ,  $m_1t_1$  et  $m_1t'_1$  leurs homothétiques par rapport à  $a$ . Si les demi-tangentes en  $m_1$  ne sont pas portées par  $t_1m_1t'_1$  l'une d'elles, la demi-tangente à gauche  $m_1\theta'_1$  par exemple, sera extérieure à la bande  $tt', t'_1t_1$ . Soit alors  $m\theta$  la demi-droite directement parallèle issue de  $m$ ,  $m\theta$  est intérieure à l'angle  $tma$ . Menons par  $m$  une droite  $L$  pénétrant à l'intérieur de l'angle  $tm\theta$  et dont le point à l'infini soit étranger à  $E(A)$ , et par  $m_1$  la parallèle  $L_1$  à  $L$ . Ces droites  $L$  et  $L_1$  coupent  $\Gamma$  respectivement en des points  $n$  et  $n_1$ , distincts de  $m$  et de  $m_1$  et situés par rapport à  $mm_1$  du côté de  $m\theta$ . Soient  $mn$  et  $m_1n_1$  les arcs de  $\Gamma$  situés à l'extérieur de la bande limitée par les parallèles  $L$  et  $L_1$ . Ces arcs sont d'un même côté par rapport à  $mm_1$  ils admettent chacun une droite d'appui parallèle à  $L$  touchant en un point unique. La corde de contact du point à l'infini de  $L$  est donc bien définie par deux points  $r$  et  $r_1$  situés d'un même côté de  $mm_1$  et extérieurs à la bande définie par  $L$  et  $L_1$ . La droite  $rr_1$  ne peut couper  $mm_1$  entre  $m$  et  $m_1$ . Il n'est donc pas possible de supposer  $m_1\theta'_1$  distinct de  $m_1t'_1$ . Autrement dit: dans

tous les cas les demi-tangentes à droite (à gauche) en  $m$  et  $m_1$  sont homothétiques par rapport à  $a$ .

4. Il va être facile de montrer maintenant que  $a$  est un centre pour  $\Gamma$ . Soit une demi-droite issue de  $a$  et d'angle polaire  $\varphi$  par rapport à une direction fixe  $ax$ . Cette demi-droite rencontre  $\Gamma$  en un point  $m$  et la demi-droite opposée le rencontre en  $m_1$ . Le rapport positif  $am : am_1 = \varrho$  est une fonction continue de  $\varphi$ . Si nous établissons que sa dérivée est nulle la démonstration sera achevée car la valeur constante de  $\varrho$  ne peut être que l'unité, la substitution  $\varphi | \varphi + \pi$  changeant  $\varrho$  en  $\frac{1}{\varrho}$ . Donnons à  $\varphi$  un accroissement positif  $\varepsilon$  et désignons par  $m'$  et  $m'_1$  les intersections avec  $\Gamma$  des demi-droites issues de  $a$  d'angles polaires respectifs  $\varphi + \varepsilon$  et  $\varphi + \pi + \varepsilon$ . Désignons par  $\mu$  et  $\mu_1$  les angles  $m'ma$  et  $m'_1m_1a$ ; lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro ces angles ont une limite commune  $\mu_0$  et cette limite est différente de 0 et de  $\pi$ . En désignant par  $\varrho'$  la valeur de  $\varrho$  correspondante à  $\varphi + \varepsilon$ , on obtient immédiatement par un calcul élémentaire:

$$\varrho' - \varrho = \varrho \cdot \frac{\sin(\mu - \mu_1) \cdot \sin \varepsilon}{\sin \mu_1 \cdot \sin(\mu + \varepsilon)}.$$

On en déduit que la dérivée à droite de  $\varrho$  est nulle. Le même raisonnement prouve que la dérivée à gauche est aussi nulle. La démonstration est achevée.

5. En résumé nous avons établi la proposition suivante. *Soit  $A$  une droite extérieure à un ovale  $\Gamma$ , si pour tous les points de  $A$  non situés sur les supports des segments rectilignes de  $\Gamma$  s'il y en a, la corde de contact passe par un point fixe  $a$ ,  $A$  est la polaire de  $a$  par rapport à  $\Gamma$  au sens de la théorie des coniques, ou, si l'on préfère,  $\Gamma$  est invariante par l'homologie de centre  $a$ , d'axe  $A$  et de rapport  $-1$ . Il revient au même de dire que l'homologie est involutive.*

Je vais examiner le cas où l'hypothèse du théorème précédent est vérifiée pour deux droites  $A$  et  $A_1$ . Il est immédiat que les points  $a$  et  $a_1$  sont distincts. Appelons  $\alpha$  et  $\alpha_1$  les homologies correspondantes à  $A$  et  $A_1$ . Soient  $u$  et  $v$  les



intersections de la droite  $aa_1$  avec  $\Gamma$ . Considérons une demi-tangente en  $u$  à  $\Gamma$ , à droite par exemple, soient  $t$  et  $t_1$  les points où elles coupent  $A$  et  $A_1$ . Le support de la demi-tangente à droite en  $v$  passe par  $t$  et  $t_1$ , ces deux points sont donc réunis à l'intersection  $\omega$  de  $A$  et de  $A_1$ . On en déduit qu'en  $u$  comme en  $v$  les demi-tangentes sont opposées et portées respectivement par  $\omega u$  et  $\omega v$ . Soit  $m_0$  un point de  $\Gamma$  situé hors de  $\omega u$  et de  $\omega v$ ; il existe nécessairement de tels points. Si l'on suppose  $\omega$  à l'infini, ce qui est possible,  $m_0$  est entre les parallèles  $\omega u$  et  $\omega v$ . La conique passant par  $m_0$  et tangente en  $u$  et  $v$  à ces deux parallèles est nécessairement une vraie ellipse  $C_0$  (car  $m_0$  ne peut être sur  $uv$ ). Cette ellipse est elle aussi invariante par les homologies  $\alpha$  et  $\alpha_1$ . Le transformé d'un point  $m$  de  $\Gamma$  par  $\alpha$  s'obtient en prenant le second point d'intersection de  $ma$  avec  $\Gamma$ , le transformé par  $\alpha_1$  s'obtient de la même manière en remplaçant  $a$  par  $a_1$ . Soient  $m$  et  $m_1$  les transformés de  $m_0$  par  $\alpha$  et  $\alpha_1$ . Désignons par  $l$  celui des arcs  $mm_1$  ne contenant ni  $u$  ni  $v$ . Je dis que  $\Gamma$  est entièrement déterminé par l'arc  $l$  et les transformations  $\alpha$  et  $\alpha_1$ . Supposons  $\alpha_1$  entre  $a$  et  $v$  et choisissons comme sens positif sur  $\Gamma$  celui de  $m$  à  $m_1$  sur  $l$ . Considérons alors les transformés de  $l$  par  $\alpha, \alpha\alpha_1\alpha, (\alpha\alpha_1)^2\alpha, \dots, (\alpha\alpha_1)^n\alpha, \dots$ . Il suffit de faire la figure pour constater qu'ils se placent bout à bout à partir de  $m_0$  dans le sens positif et s'accumulent sur  $u$ . De même les arcs transformés de  $l$  par  $\alpha_1, (\alpha_1\alpha)\alpha_1, (\alpha_1\alpha)^2\alpha_1, \dots, (\alpha_1\alpha)^n\alpha_1, \dots$  se placent bout à bout à partir de  $m_0$  dans le sens négatif et s'accumulent sur  $v$ . Avec les premiers ils définissent l'arc  $um_0v$ . Il suffit de transformer cet arc par  $\alpha$  par exemple pour obtenir tout  $\Gamma$ . Ou observera que les extrémités des arcs obtenus sont tous sur  $C_0$ , par suite  $\Gamma$  possède sur  $C_0$  quatre suites de points qui s'accumulent en  $u$  et en  $v$  en restant d'un même côté. Il en résulte que les tangentes à  $\Gamma$  en  $u$  et en  $v$  touchent chacune en un seul point. Supposons maintenant que  $\Gamma$  possède un point non situé sur  $C_0$ , on en déduira une seconde ellipse, bitangente à  $C_0$  en  $u$  et  $v$ , sur laquelle se trouvent quatre suites de points de  $\Gamma$  analogues aux précédentes. On en déduit immédiatement que si  $\Gamma$  possède en l'un des points



*u* ou *v* et pour un certain côté une courbure bien déterminée, l'ovale ne peut être qu'une ellipse.

6. On montre aisément par un exemple que  $\Gamma$  n'est pas forcément une ellipse si l'hypothèse relative à la courbure n'est pas satisfaite. Donnons-nous une ellipse  $C_1$  et deux points intérieur  $a$  et  $a_1$ , désignons encore par  $u$  et  $v$  les intersections de  $aa_1$  avec  $C_1$ ,  $a_1$  étant compris entre  $a$  et  $v$ . Appelons toujours  $a$  et  $a_1$  les homologies involutives de centres  $a$  et  $a_1$  laissant  $C_1$  invariante. Prenons sur  $C_1$  un point  $m_0$  et désignons par  $m$  et  $m_1$  les transformés de  $m_0$  par  $a$  et  $a_1$ . En transformant le segment  $mm_1$  de la manière dont on a transformé plus haut l'arc  $l$  on définit un ovale polygonal  $\Gamma_1$  invariant par  $a$  et  $a_1$ . On pourrait remplacer le segment  $mm_1$  par un arc convexe compris entre ce segment et celui des arcs de  $C_1$  soustendus par lui ne contenant pas  $u$  et  $v$ .

Remarquons que  $aa_1a$  est la transformée de  $a_1$  par  $a$ , car  $a^2=1$ .  $\Gamma_1$  est donc invariant par  $aa_1a$ . D'une manière générale  $\Gamma_1$  est invariant par  $\beta_n = (aa_1)^{2n-1}a$ . En effet, la transformée de  $a_1$  par  $\beta_n$  est

$$(aa_1)^{2n-1}aa_1(aa_1)^{2n-1}a = (aa_1)^{2n+1}a,$$

ce qui montre la propriété par récurrence. Le centre d'homologie de  $\beta_n$  est à l'intersection de  $uv$  par la corde joignant  $m$  à son transformé par  $\beta_n$ , or ce transformé tend vers  $u$  quand  $n$  augmente indéfiniment. On voit donc que  $u$  et  $v$  sont des points d'accumulation de centres d'homologies involutives laissant  $\Gamma_1$  invariant. Il y a évidemment d'autres centres (d'homologies involutives laissant  $\Gamma_1$  invariant, obtenues à partir de  $a$  et  $a_1$ ). Leur détermination est théoriquement facile. Je me conterai d'affirmer qu'ils ne peuvent avoir d'autres points d'accumulation que  $u$  et  $v$ . Cela résultera immédiatement des conclusions du numéro suivant.

7. Il serait intéressant d'étudier le cas où  $\Gamma$  est invariante par plus de deux homologies involutives de centres alignés ou non, mais cela nous entrainerait trop loin. Je me bornerai au cas suivant. Supposons qu'il existe pour  $\Gamma$  une infinité

de droites telles que  $A$ , c'est-à-dire pour lesquelles l'hypothèse du numéro 2 est satisfaite. A chaque droite  $A$  correspond un point  $a$  tel que  $\Gamma$  soit invariant par l'homologie involutive de centre  $a$  et d'axe  $A$ . Je vais montrer que si l'on peut extraire de l'ensemble des points  $a$  une suite ayant un point d'accumulation  $a_0$  intérieur à  $\Gamma$ , celui-ci est forcément une ellipse. L'ovale  $\Gamma_1$  défini au numéro précédent montre l'hypothèse:  $a_0$  intérieur à  $\Gamma$  est indispensable, si elle n'est pas vérifiée  $\Gamma$  peut ne pas être une ellipse.

Soit alors une suite  $a_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) de centres d'homologies involutives d'axes  $A_n$ . Il est presque évident par raison de continuité que  $A_n$  a pour limite une droite bien déterminée  $A_0$ , polaire de  $a_0$  par rapport à  $\Gamma$ . Le lecteur le démontrera sans peine. De la suite  $a_n$  on peut extraire une suite partielle dans laquelle la demi-droite  $a_0 a_n$  admet une limite bien déterminée  $a_0 x$ . On peut supposer que la suite  $a_n$  se réduit à celle-ci. Soit  $\omega$  le point commun à  $A_0$  et  $A_n$ ,  $u_n$  et  $v_n$  les points d'intersection de  $a_0 a_n$  avec  $\Gamma$ ;  $u_n$  et  $v_n$  tendent respectivement vers les intersections de l'ovale avec le support de  $a_0 x$ . On sait que  $\Gamma$  admet une tangente unique en  $u_n$  et en  $v_n$ . En réduisant encore au besoin la suite  $a_n$  à une suite partielle on peut supposer que  $u_n$  tend vers  $u_0$  en restant d'un même côté. La tangente en  $u_n$  tend vers le support de la demi-tangente en  $u_0$  du côté de  $u_n$  ( $n^\circ 1$ ); elle a donc une limite bien déterminée quand  $a$  tend vers  $a_0$ , de même la tangente en  $v_n$  a une limite bien déterminée<sup>1</sup>). Ceci posé prenons sur  $\Gamma$  un point fixe  $m$  distinct de  $u_0$  et de  $v_0$ ; soient  $m_0$  et  $m_n$  les intersections (distinctes de  $m$ ) des droites  $ma_0$  et  $ma_n$  avec  $\Gamma$ . On a vu ( $n^\circ 6$ ) que  $\Gamma$  est entièrement déterminé par l'arc  $m_0 m_n$  et les homologies de centres  $a_0$  et  $a_n$ ; autrement dit: tout point de  $\Gamma$  est sur une ellipse bitangente à  $\Gamma$  en  $u_n$  et  $v_n$  passant par un point de  $m_0 m_n$ . Remarquons que  $m_0$  est fixe et que  $m_n$  tend vers  $m_0$  en restant d'un même côté, car la demi-droite  $a_0 a_n$  tend vers  $a_0 x$ . La demi-tangente en  $m_n$  du côté de  $m_0$  tend vers la demi-droite

<sup>1</sup> Si l'on réduit encore au besoin la suite  $a_n$  à une suite partielle convenable.

opposée à la demi-tangente en  $m_0$  du côté de  $m_n$ . Il en résulte que si les demi-tangentes, en  $m_0$  du côté de  $m_n$ , en  $m_n$  du côté de  $m_0$  n'ont pas même support elles se rencontrent en point  $t$ , qui tend vers  $m_0$ . L'arc  $m_0m_n$  est donc compris dans un triangle  $m_0m_n t$ , pouvant se réduire à un segment, mais qui dans tous les cas tend vers le point  $m_0$ . Il résulte de tout ce qui précède que l'ellipse bitangente à  $\Gamma$  en  $u_n$  et  $v_n$  et passant par un point donné de l'arc  $m_0m_n$  a une limite unique quand  $a_n$  tend vers  $a_0$ , à savoir: l'ellipse  $C$  bitangente en  $u_0$  et  $v_0$  aux limites bien déterminées des tangentes à  $\Gamma$  en  $u_n$  et  $v_n$  et passant par  $m_0$ . L'ovale  $\Gamma$  se réduit donc à  $C$ .

8. La notion d'ovale s'étend sans peine au plan projectif. Les résultats précédents restent valables à condition de remplacer le mot: *ellipse* par celui de *conique*.

---

# A THEOREM ON EXTENSION OF HOMOMORPHISMS

by

ROMAN SIKORSKI (Warszawa)

In this paper I shall prove the following theorem on extension of homomorphisms:<sup>1)</sup>

*Let  $A_0$  be a subalgebra of a Boolean algebra  $A$ . Every homomorphism of  $A_0$  in a complete Boolean algebra  $B$  can be extended to a homomorphism of  $A$  in  $B$ .*

Stone's theorem on the existence of prime ideals is an immediate consequence of this theorem.

*Terminology and notation.* A Boolean algebra is a non-empty set  $A$  with the operations of addition  $A_1 + A_2$ , multiplication  $A_1 A_2$ , and complementation  $A_1'$  defined for all  $A_1, A_2 \in A$ . These operations behave formally like the analogous operations on sets in the general theory of sets. If  $A_1 + A_2 = A_2$ , we write  $A_1 \subset A_2$ . A non-empty subset  $A_0 \subset A$  is called a *subalgebra* of  $A$  if  $A_1 + A_2 \in A_0$  and  $A_1' \in A_0$  for every  $A_1, A_2 \in A_0$ . Each subalgebra is also a Boolean algebra.

A mapping  $B = f(A)$  of a Boolean algebra  $A$  in a Boolean algebra  $B$  is called a *homomorphism* if  $f(A_1 + A_2) = f(A_1) + f(A_2)$  and  $f(A_1') = [f(A_1)]$  for every  $A_1, A_2 \in A$ .

Let  $A_1$  and  $A_2$  be two subalgebras of a Boolean algebra  $A$ ,  $A_1 \subset A_2$ . A homomorphism  $f_2$  of  $A_2$  in a Boolean algebra  $B$  is called an *extension* (over  $A_2$ ) of a homomorphism  $f_1$  of  $A_1$  in  $B$  if  $f_1(A) = f_2(A)$  for every  $A \in A_1$ .

A Boolean algebra  $B$  is called *complete* if for every non-empty subset  $B_0 \subset B$  there exists an element  $B_s$  such that

- (i)  $B \subset B_s$  for every  $B \in B_0$ ;
- (ii) if  $B \subset B_0$  for every  $B \in B_0$ , then  $B_s \subset B_0$ .

$B_s$  is called the *sum* of all  $B \in B_0$ .

---

<sup>1)</sup> This theorem was announced by me during the Polish Mathematical Congress in Kraków in May 1947. The proof is similar to that of a theorem on the extension of measures presented by Professor E. Marczewski during a session of the Polish Mathematical Society in Warsaw in 21. IX. 1945.



If  $B$  is complete, then for every non-empty set  $B_0 \subset B$  there exists also an element  $B_p$  (the product of all  $B \in B_0$ ) such that

- (i)  $B_p \subset B$  for every  $B \in B_0$ ;
- (ii) if  $B_0 \subset B$  for every  $B \in B_0$ , then  $B_0 \subset B_p$ .

**1. A fundamental lemma.** Let  $C$  be a subalgebra of a Boolean algebra  $A$ . The least subalgebra of  $A$  containing  $C$  and a given element  $A \in A$  will be denoted by  $C(A)$ . Obviously  $C(A)$  is the set of all elements  $E \in A$  which can be represented in the form  $E = C_1A + C_2A'$  where  $C_1, C_2 \in C$ .

If  $C$  is a subalgebra of a Boolean algebra  $A$ ,  $A \in A$  and if  $f$  is a homomorphism of  $C$  in a complete Boolean algebra  $B$ , then there exists a homomorphism  $g$  of  $C(A)$  in  $B$  which is an extension of  $f$  over  $C(A)$ .

Let  $B_s$  denote the sum of all elements  $f(C) \in B$  where  $C \subset A$  and  $C \in C$ , and analogously let  $B_p$  denote the product of all elements  $f(C) \in B$  where  $A \subset C$  and  $C \in C$ . Obviously  $B_s \subset B_p$ .

Let  $B$  be an arbitrary element of  $B$  such that

$$(i) \quad B_s \subset B \subset B_p.$$

If  $E \in C(A)$ , then

$$(ii) \quad E = C_1A + C_2A'$$

where  $C_i \in C$ ,  $i = 1, 2$ . Let

$$(iii) \quad g(E) = f(C_1)B + f(C_2)B'.$$

The element  $g(E)$  is independent of the representation of  $E$  in the form (ii). In fact, if  $E = C_1A + C_2A' = C_3A + C_4A'$  (where  $C_i \in C$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ), then

$$(iv) \quad C_1C'_3 + C'_1C_3 \subset A'$$

$$(v) \quad C_2C'_4 + C'_2C_4 \subset A$$

We obtain from (iv):  $A \subset (C_1C'_3 + C'_1C_3) \in C$ , and hence from (i):

$$B \subset f[(C_1C'_3 + C'_1C_3)] = [f(C_1C'_3 + C'_1C_3)]',$$

so that

$$f(C_1C'_3 + C'_1C_3) \subset B'.$$

From (v) and (i) it follows that

$$f(C_2C'_4 + C'_2C_4) \subset B$$

Hence:

$$\begin{aligned} & [f(C_1)B + f(C_2)B'] [f(C_3)B + f(C_4)B']' + \\ & + [f(C_1)B + f(C_2)B']' [f(C_3)B + f(C_4)B'] = \\ & = f(C_1 C_3' + C_1' C_3)B + f(C_2 C_4' + C_2' C_4)B' = 0 \end{aligned}$$

and consequently

$$f(C_1)B + f(C_2)B' = f(C_3)B + f(C_4)B'.$$

Thus  $g(E)$  is a mapping of  $C(A)$  in  $B$ . It is a homomorphism since (for  $E_1 = C_3 A + C_4 A'$ ,  $C_i \in C$ ,  $i = 3, 4$ ):

$$\begin{aligned} g(E) + g(E_1) &= [f(C_1) + f(C_3)]B + [f(C_2) + f(C_4)]B' = \\ &= f(C_1 + C_3)B + f(C_2 + C_4)B' = g(E + E_1) \end{aligned}$$

and

$$[g(E)]' = [f(C_1)]'B + [f(C_2)]'B' = f(C_1')B + f(C_2')B' = g(E')$$

Since for  $C \in C$ :  $C = CA + CA'$  and  $g(C) = f(C)B + f(C)B' = f(C)$ , the homomorphism  $g$  is an extension of  $f$  over  $C(A)$ . The lemma is proved.

## 2. Proof of the theorem on extension of homomorphisms.

Let  $f_0$  be a given homomorphism of  $A_0$  in  $B$  and let  $\{A_\alpha\}$  (where  $0 \leq \alpha \leq \gamma$ ) be a transfinite sequence containing all elements of  $A$ . We define by induction (for  $0 \leq \alpha \leq \gamma$ ) an ascending sequence  $\{A_\alpha\}$  of subalgebras of  $A$  and a sequence  $\{f_\alpha\}$  of homomorphisms of  $A_\alpha$  in  $B$  in the following way:

$$A_{\alpha+1} = A_\alpha(A_\alpha);$$

$f_{\alpha+1}$  is an extension of  $f_\alpha$  over  $A_{\alpha+1}$ ;

if  $\lambda$  is a limit number, then  $A_\lambda = \sum_{0 \leq \alpha < \lambda} A_\alpha$  and  $f_\lambda$  is a common extension of all  $f_\alpha$  ( $0 \leq \alpha < \lambda$ ) over  $A_\lambda$  (since  $A_\alpha \subset A_\beta$  for  $\alpha < \beta < \lambda$  and  $f_\beta$  is an extension of  $f_\alpha$ , the homomorphism  $f_\lambda$  exists always).

Obviously the homomorphism  $f = f_\gamma$  is an extension of  $f_0$  over  $A = A_\gamma$ .

**3. Stone's theorem on the existence of prime ideals.** The following well known theorem of Stone<sup>2)</sup> is an immediate

<sup>2)</sup> Stone. *The theory of representations for Boolean algebras*. Trans. Am. Math. Soc. 40 (1936), pp. 100—105.

consequence of the theorem of the extension of homomorphisms:

For every ideal<sup>3)</sup>  $I_0$  of a Boolean algebra  $A$  ( $I \neq A$ ) there exists a prime ideal  $I$  of  $A$  such that  $I_0 \subset I$ .

Let  $A_0$  denote the set of all elements  $A$  of  $A$  such that either  $A \in I_0$  or  $A' \in I_0$ .  $A_0$  is a subalgebra of  $A$ .

Let  $B$  be a Boolean algebra of all subsets of a one-element set  $(x)$ , where  $x$  is an arbitrary element.  $B$  contains only two elements: the empty set  $O$  and the set  $(x)$ . The following formulas

$$\begin{aligned} f_0(A) &= O & \text{if } A \in I_0 \\ f_0(A) &= (x) & \text{if } A' \in I_0 \end{aligned}$$

define a homomorphism  $f_0$  of  $A_0$  in  $B$ .  $B$  being complete there exists an extension  $f$  of  $f_0$  over  $A$ . The set of all elements  $A \in A$  such that  $f(A) = O$  is a prime ideal  $I$  containing  $I_0$ .

Obviously there are also other applications of the theorem on the extension of homomorphisms to the theory of Boolean algebras. For instance the following theorems can be proved easily with the help of the theorem on the extension of homomorphisms:

(i) In order that a complete Boolean algebra  $B$  be a minimal extension<sup>4)</sup> of a Boolean algebra  $A$ , it is necessary and sufficient that  $B$  contain a subalgebra  $B_0$ , isomorphic to  $A$ , with the property:

for every  $B \in B$  ( $B \neq O$ ) there exists an element  $B_0 \in B_0$  such that  $O \neq B_0 \subset B$ .

(ii) All minimal extensions of a Boolean algebra  $A$  are isomorphic.

<sup>3)</sup> A non empty class  $I$  of elements of a Boolean algebra  $A$  is called an ideal if the conditions:  $A_1, A_2 \in I$  and  $A \subset A_1$  imply  $A_1 + A_2 \in I$  and  $A \in I$ . An ideal  $I$  is called prime if  $I \neq A$  and for every  $A \in A$  either  $A \in I$  or  $A' \in I$ .

<sup>4)</sup> In the sense defined by Mac Neille. See Mac Neille *Partially ordered sets*. Trans. Am. Math. Soc. 42 (1937), p. 437.

# SUR L'ISOMORPHIE DES RELATIONS ET L'HOMÉOMORPHIE DES ESPACES

par

EDWARD MARCZEWSKI (Wrocław)

La Note présente<sup>1)</sup>, bien qu'elle soit de caractère purement mathématique, a pris naissance en marge de l'article de S. Kulczyński *Sur les hypothèses qui sont à la base de la morphologie comparée*<sup>2)</sup>.

L'auteur y traite l'*organisme* comme ensemble fini de certains éléments, *organes*, entre lesquels une relation, celle de *voisinage* d'organes, est établie. Deux organismes  $X$  et  $Y$  étant donnés, M. Kulczyński appelle *continue* toute fonction transformant  $X$  en  $Y$  de façon que les éléments voisins dans  $X$  se trouvent transformés en éléments voisins dans  $Y$ . Conformément à cette définition, l'auteur appelle *homéomorphie* toute fonction qui transforme  $X$  en  $Y$  de manière biunivoque et bicontinue<sup>3)</sup>.

La définition qui précède suggère quelques remarques.

D'une part, on pourrait objecter que la continuité et l'homéomorphie n'y sont pas entendues au sens qu'on adopte d'ordinaire en mathématique. En effet, on ne peut pas définir rigoureusement la continuité des fonctions de variable réelle, par exemple, à l'aide de la relation de „voisinage“, pour la simple raison que les nombres réels „voisins“ n'existent pas.

---

<sup>1)</sup> Présentée à la séance de la Société Polonaise de Mathématique (section de Varsovie), le 21 septembre 1945.

<sup>2)</sup> S. Kulczyński. *O założeniach jakie leżą u podstaw morfologii porównawczej*. Rocznik Polskiej Akademii Umiejętności 1939 - 1945, str. 119 - 133 (en polonais).

<sup>3)</sup> Une „topologisation“ liée à la notion de relation a été introduite et étudiée par B. Z. Linfoeld. Cf. M. Fréchet, *Les espaces abstraits* Paris 1928, p. 180.



L'homéomorphie définie plus haut coïncide, en fait, avec l'isomorphie des relations de voisinage dans  $X$  et  $Y$  (voir plus loin, n° 1).

La divergence entre une telle notion de continuité et celle qui est d'usage courant saute aux yeux d'autant plus nettement que M. Kulczyński considère les organismes comme des ensembles *finis* d'organes et que, dans les ensembles à un nombre fini d'éléments, envisagés par les mathématiciens, toute fonction est d'habitude (voir plus loin, n° 2) une fonction continue.

D'autre part cependant, il est intéressant que la définition de la continuité, employée par M. Kulczyński, coïncide textuellement avec la définition „intuitive“ de la continuité d'une fonction, qu'on rencontre parfois dans des manuels<sup>4</sup>).

Or, les rapports entre *relations* et *espaces*, formulés dans la Note présente, montrent que les intuitions qui ont suggéré à M. Kulczyński l'emploi des termes „continuité“ et „homéomorphie“ sont justes. A toute relation vient correspondre un espace (voir plus loin n° 3): en appelant la relation donnée „voisinage“, l'espace en question s'obtient en définissant la fermeture  $\bar{E}$  de tout ensemble  $E$  comme l'ensemble des points „voisins“ à ceux de  $E$ . L'étude de l'isomorphie et de l'homomorphie des relations se révèle équivalente à celle de l'homéomorphie et des transformations continues des espaces correspondants (qui sont, il est vrai, assez bizarres, cf. les théorèmes 3.4 et 3.5).

Le lecteur remarquera aisément qu'en y omettant le chaînon intermédiaire de „relations généralisées“, on pourrait bien faire correspondre directement les espaces aux relations. Il semble toutefois que c'est seulement après avoir intercalé ledit chaînon qu'on parvienne à une simplicité et une netteté définitives en ce qui concerne les rapports entre les deux notions en question. On verra en particulier qu'en appelant „voisinage“ précisément la relation généralisée („point  $p$  avoisine ensemble  $E$ “), la sauvegarde du „voisinage“ ainsi conçu par la fonction équivaut à la continuité de cette fonction (cf. le théorème 2.1).

<sup>4</sup>) Cf. par exemple le livre précité de Fréchet, p. 16 et 62.

1. Soit  $X$  un ensemble arbitraire. Nous allons considérer dans lui des *relations entre éléments* (dites *relations tout court*):

$$p \varrho q \quad \text{où} \quad p \in X \text{ et } q \in X$$

et des *relations entre éléments et ensembles* (dites *relations généralisées*):

$$p \varrho E \quad \text{où} \quad p \in X \text{ et } E \subset X.$$

Considérons une relation  $\varrho$  dans  $X$  et une relation  $\sigma$  dans  $Y$ . Une fonction  $f$  qui fait correspondre à tout  $x \in X$  un élément  $f(x) \in Y$  sera dite (par analogie à la théorie des groupes) *transformation homomorphe* de  $\varrho$  en  $\sigma$  lorsque

$$(1) \quad p \varrho q \text{ entraîne } f(p) \sigma f(q).$$

Pareillement, si  $\varrho$  et  $\sigma$  sont des relations généralisées,  $f$  s'appellera *transformation homomorphe* de  $\varrho$  en  $\sigma$  lorsque

$$(2) \quad p \varrho E \text{ entraîne } f(p) \sigma f(E).$$

Une transformation biunivoque de  $X$  en  $Y$  sera dite *isomorphie* de  $\varrho$  et  $\sigma$  lorsqu'elle est une transformation homomorphe de  $\varrho$  en  $\sigma$  en même temps que la transformation inverse est une transformation homomorphe de  $\sigma$  en  $\varrho$ .

A toute relation  $\varrho$  dans  $X$ , nous ferons maintenant correspondre une relation généralisée  $\varrho^*$  dans  $X$ , dite *déterminée* par  $\varrho$ , et qui est définie comme suit:

$$(3) \quad p \varrho^* E \text{ équivaut à l'existence d'un } q \in E \text{ tel que } p \varrho q.$$

Il résulte aussitôt de cette définition que

$$(4) \quad p \varrho^*(q) \text{ équivaut à } p \varrho q.$$

La définition (3) et l'équivalence (4) entraînent aussitôt les théorèmes suivants:

**Théorème 1.1.** *Pour qu'une fonction  $f$  soit une transformation homomorphe ou isomorphe respectivement de la relation  $\varrho$  en relation  $\sigma$ , il faut et il suffit qu'elle transforme par homomorphie ou par isomorphie respectivement la relation généralisée  $\varrho^*$  en relation généralisée  $\sigma^*$ .*

**Théorème 1.2.** *La correspondance entre toute relation  $\varrho$  dans  $X$  et la relation généralisée  $\varrho^*$ , déterminée par  $\varrho$  dans  $X$ , est une correspondance biunivoque entre la*

classe de toutes les relations dans  $X$  et une certaine classe de relations généralisées dans  $X$ .

Le théorème suivant caractérise la classe de relations généralisées dont il est question dans l'énoncé du théorème 1.2.

**Théorème 1.3.** *Pour qu'une relation généralisée  $\gamma$  admette une relation qui la détermine, il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite:*

(5)  $p\gamma E$  équivaut à l'existence d'un  $q \in E$  tel que  $p\gamma(q)$ .

**Démonstration.** En admettant l'existence d'une relation  $\varrho$  telle que  $\gamma = \varrho^*$ , la condition (5) résulte directement de (3) et (4).

Admettons, réciproquement, la condition (5) et définissons la relation  $\varrho^*$  par la condition:

$$p\varrho q \text{ équivaut à } p\gamma(q).$$

La condition (5) peut alors être écrite dans la forme:

$$p\gamma E \text{ équivaut à l'existence d'un } q \in E \text{ tel que } p\varrho q.$$

En vertu de la définition (3), on a donc  $\gamma = \varrho^*$ , c'est-à-dire que la relation généralisée  $\gamma$  est déterminée par la relation  $\varrho$ , c. q. f. d.

Voici deux exemples des relations généralisées qui — comme on conclut facilement du théorème 1.3 — ne sont déterminées par aucune relation:

I.  $p$  n'appartient pas à l'ensemble  $E$ ,

II.  $p$  est un point d'accumulation de l'ensemble  $E$  (sur la droite, par exemple).

En effet, aucun des deux exemples ne satisfait à la condition (5).

2. Nous allons montrer à présent que l'étude des relations généralisées équivaut à celle des opérations qui font correspondre ensemble à l'ensemble, ou — autrement dit — à celle des espaces topologiques généraux au sens d'Alexandroff et Hopf. Selon ces auteurs,  $T$  est un *espace topologique général* lorsqu'une opération  $\gamma$  est définie qui fait correspondre à tout sous-ensemble  $E$  de  $T$  un sous-

ensemble de  $T$  dit la *fermeture* de  $E$ ; on le désigne par  $\overline{E}$ . Suivant diverses conditions auxquelles on assujettit l'opération de fermeture, l'espace est dit *topologique* tout court, espace  $(T_0)$ , espace  $(T_1)$  etc<sup>5</sup>).

Pour nos considérations, c'est la circonstance suivante qui importe: les notions de continuité et d'homéomorphie, qu'on applique d'ordinaire aux espaces topologiques, sont définies d'une façon identique pour tous les espaces topologiques généraux  $X$  et  $Y$ . C'est ainsi qu'une fonction  $f$  faisant correspondre à tout point de l'espace  $X$  un point de l'espace  $Y$  est dite *continue* si l'on a

$$(6) \quad f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$$

pour tout ensemble  $E \subset X$ . On appelle *homéomorphie* toute fonction transformant  $X$  en  $Y$  d'une façon biunivoque et bicontinue.

Bien entendu, certaines propriétés des fonctions continues dans des espaces plus particuliers ne subsistent pas dans les espaces topologiques généraux. Ainsi par exemple, dans les espaces métriques — et plus généralement dans les espaces  $(T_1)$  — lorsqu'ils sont finis, toute fonction est continue, ce qui n'est pas vrai pour les espaces topologiques généraux et même pour les espaces  $(T_0)$ .

Soit maintenant  $\gamma$  une relation généralisée arbitraire dans l'espace  $X$ . Désignons pour tout ensemble  $E \subset X$  par  $\overline{E}$  l'ensemble de tous les  $p \in X$  tels que  $p\gamma E$ . L'espace  $X$  devient ainsi espace topologique général que nous désignerons par  $T(\gamma)$  et appellerons *espace déterminé par  $\gamma$* .

**Théorème 2.1.** *Pour qu'une fonction soit une transformation homomorphe ou isomorphe respectivement de la relation généralisée  $\varrho$  en une relation généralisée  $\sigma$ , il faut et il suffit qu'elle transforme l'espace  $T(\varrho)$  en espace  $T(\sigma)$  d'une manière continue ou homéomorphe respectivement.*

**Démonstration.** La définition (6) de la continuité peut être écrite dans la forme:  $p \in \overline{E}$  entraîne  $f(p) \in \overline{f(E)}$ , c'est-

<sup>5</sup>) P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie*, Erster Band, Berlin 1935, p. 25, 37 et 58. Cf. aussi n° 3 de cette Note.



à-dire précisément dans la forme (2), qui est la définition de l'homomorphie.

Le passage de la continuité et homomorphie à l'homéomorphie et isomorphie est immédiat.

Le théorème suivant est une conséquence facile de la définition de l'espace déterminé par une relation généralisée :

*Théorème 2.2. En faisant correspondre à toute relation généralisée l'espace topologique général qu'elle détermine, on a une correspondance biunivoque entre toutes les relations généralisées et tous les espaces topologiques généraux.*

3. Une relation arbitraire  $\varrho$  étant donnée, on peut considérer d'abord la relation généralisée  $\varrho^*$  qu'elle détermine, et puis l'espace topologique général  $T(\varrho^*)$  déterminé par  $\varrho^*$ . Rien n'empêche donc d'appeler  $T(\varrho^*)$  *espace déterminé par  $\varrho$*  et de le désigner par  $T(\varrho)$ .

Les théorèmes 1.1 et 2.1 donnent alors le

*Théorème 3.1. Pour qu'une fonction soit une transformation homomorphe ou isomorphe respectivement de la relation  $\varrho$  en une relation  $\sigma$ , il faut et il suffit qu'elle transforme l'espace  $T(\varrho)$  en espace  $T(\sigma)$  d'une manière continue ou homéomorphe respectivement.*

De même, les théorèmes 1.2 et 2.2 donnent ce

*Théorème 3.2. En faisant correspondre à toute relation  $\varrho$  dans  $X$  l'espace topologique général qu'elle détermine, on a une correspondance biunivoque entre la classe de toutes les relations dans  $X$  et une certaine classe d'espaces topologiques généraux.*

Enfin, le théorème 1.3 devient en faisant intervenir la définition de l'espace déterminé par une relation généralisée

*Théorème 3.3. Pour qu'un espace topologique général soit déterminé par une relation dans  $X$ , il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite :*

(7)  $p \in \overline{E}$  équivaut à l'existence d'un  $q \in E$  tel que  $p \in \overline{(q)}$ .

Or, remarquons que

1<sup>o</sup> quelle que soit la relation  $\varrho$ , l'espace  $T(\varrho)$  satisfait à deux axiomes suivants:

$$\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}, \quad \overline{0} = 0$$

2<sup>o</sup> l'axiome  $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$  équivaut à la reflexivité de la relation  $\varrho$ ;

3<sup>o</sup> l'axiome  $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ <sup>6)</sup> équivaut à la transitivité de la relation  $\varrho$ .

Par conséquent:

*Théorème 3.4. Pour que l'espace déterminé par une relation soit un espace topologique, il faut et il suffit que cette relation soit reflexive et transitive.*

Ajoutons que l'existence de deux éléments  $p$  et  $q$  tels que  $p\varrho q$  suffit pour mettre en défaut l'axiome:  $(p) = \overline{(p)}$ . Or, cet axiome caractérise les espaces  $(T_1)$  parmi les espaces topologiques<sup>7)</sup>. Il en résulte facilement ce

*Théorème 3.5. Pour que l'espace déterminé par une relation soit un espace  $(T_1)$ , il faut et il suffit que cette relation soit l'identité.*

L'opération de fermeture l'est alors également:  $E = \overline{E}$  pour tout  $E \subset X$ .

Ainsi — comme le montrent les théorèmes 3.4 et 3.5 — les espaces déterminés par les relations sont ou bien banals, ou bien fort singuliers.

<sup>6)</sup> Tous ces axiomes entrent dans le système d'axiomes de Kuratowski. Tout espace topologique général satisfaisant à ce système d'axiomes est appelé par Alexandroff et Hopf (op. cit. p. 37) *espace topologique*. Cf. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne 20, Seconde édition, Warszawa—Wrocław 1948, p. 20 avec le renvoi.

<sup>7)</sup> Alexandroff et Hopf, op. cit., p. 59.

# COMPTES-RENDUS DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

1 Février 1948 — 30 Juin 1948.

## ÉTAT DE LA SOCIÉTÉ

L'état du Bureau Central de la Société ainsi que les états des Bureaux des Sections de Cracovie, Lublin, Łódź, Poznań et Varsovie étant les mêmes que dans la période précédente (voir Annales de la Société Pol. de Math. XIX, 1946, p. 206-208 et XX, 1947, p. 373-374), nous nous bornons à donner l'état actuel de la Section de Wrocław.

## SECTION DE WROCLAW

*Président de la Section:* Prof. Dr Władysław Ślebodziński.

*Vice-Président de la Section:* Prof. Dr Edward Marczewski.

*Secrétaire de la Section:* Mgr Maria Nosarzewska.

*Trésorier de la Section:* Mgr Mieczysław Warmus.

*Membre du Bureau de la Section:* Prof. Dr Bronisław Knaster.

*Commission de Contrôle:* Prof. Dr Hugo Steinhaus, Prof. Dr Jerzy Słupecki, Dr Witold Wolibner.

*Délégués à l'Assemblée Générale de la Société:* Prof. Dr Bronisław Knaster, Prof. Dr Edward Marczewski.

*Suppléant du Délégué:* Prof. Dr Jerzy Słupecki.

## LISTE DES MEMBRES NOUVEAUX DE LA SOCIÉTÉ

- (C) Cieślewski Romuald, *Chorzów*, Pl. Matejki 3/2.
- (C) Dziula Anna, *Katowice*, Jordana 9.
- (C) Frylik Alfred, *Katowice*, Rybnicka 12/6.
- (Wr) Helson Henry, *Cambridge* 40, Mass. U. S. A. 21 Bates Str.
- (C) Kosicki Jan, *Katowice*, Królowej Jadwigi 8/5.
- (C) Kujawa Leon, *Chorzów*, 3 Maja 3/5.
- (C) Lesikiewicz Józef, Mgr, *Katowice*, Mickiewicza 11.
- (C) Matulewicz Konstanty, *Góra Śląska*, Al. Armii Polskiej 9/2.
- (C) Migoniowa Helena, *Katowice*, 27 Stycznia 23.

- (Lu) Olekiewicz Mikołaj, Prof. Dr, *Lublin*, Krakowskie Przedmieście 41/5.  
 (C) Panczakiewicz Marian, Mgr, *Katowice-Ligota*, Poleska 11.  
 (C) Rabsztyn Józef, Mgr, *Katowice*, Poniatowskiego 17/9.  
 (C) Tarnawski Zygmunt, *Mysłowice*, Krakowska 3/3.  
 (Ł) Wiśniewski Feliks, Prof. Dr, *Łódź*, Al. Kościuszki 52/2.

## CHANGEMENT D'ADRESSES

- (P) Ajdukiewicz Kazimierz, Prof. Dr, *Poznań*, Mazowiecka 15.  
 (P) Czekanowski Jan, Prof. Dr, *Poznań*, Marcelesińska 36a.  
 (Wr) Drobot Stefan, Dr, *Wrocław*, Kosynierska 2a/4.  
 (V) Grużewski Aleksander, Prof. Dr, *Warszawa*, Rakowiecka 6/35.  
 (Lu) Pidekówna Halina, *Kraków*, Zacisze 10/9.  
 (Ł) Roliński Ignacy, *Łódź*, Więckowskiego 57/11.  
 (P) Smosarski Władysław, Prof. Dr, *Poznań*, Mazowiecka 15.  
 (P) Witkowski Józef, Prof. Dr, *Poznań*, Słoneczna 36, Obserwatorium Astronomiczne.  
 (V) Wundheiler Aleksander, Dr, *Chicago Ill. U. S. A.*, Institute of Technology.  
 (P) Znamierowski Czesław, Prof. Dr, *Poznań*, Grottgera 16.

## LISTE DES MEMBRES DÉCÉDÉS

- (P) Cwojdzinski Kazimierz, Dr.

## COMPTES RENDUS DES SÉANCES DES SECTIONS

## SECTION DE CRACOVIE

3. II. 1948. Krzyżański M. *Sur le problème de Dirichlet pour le demi-espace.*

L'auteur expose des conditions qui assurent l'unicité et l'existence d'une fonction  $u(x, y, z)$  harmonique pour  $z > 0$  et se réduisant à une fonction donnée  $\varphi(x, y)$  pour  $z = 0$ .

A savoir, la solution est unique dans la classe de fonctions  $u$  satisfaisant à la condition suivante: il existe deux nombres positifs  $M$  et  $\alpha < 1$  tels que:

$$|u| < M \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Cette fonction existe, lorsque  $\varphi$  appartient à la même classe.

2. III. 1948. Ważewski T. *Sur les cycles frontières des équations différentielles.*



16. III. 1948. Romanowski M. *Remarques sur l'examen des mathématiques pour les étudiants de pédagogie.*
20. IV. 1948. Krzyżański M. *Sur le problème de Dirichlet au cas des conditions aux limites discontinues (à paraître dans les *Studia Mathematica*).*
27. IV. 1948. Krygowska Z. *Sur la question de rigueur dans l'enseignement de géométrie élémentaire (Conférence populaire).*
4. V. 1948. Leja F. *Sur les polynômes d'interpolation de Lagrange.* (Annales de la Soc. Pol. de Math. 21 (1948 p. 80—89).
4. V. 1948. Zahorski Z. *Sur le nombre des racines des certaines équations (à paraître dans les Comptes Rendus de la Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie).*
11. V. 1948. Zahorski Z. *Sur la classe de Baire des dérivées approximatives* (Annales de la Soc. Pol. de Math. 21 (1948), fasc. 2).

25. V. 1948. Ważewski T. *Sur les intégrales asymptotiques des équations différentielles linéaires.*

25. V. 1948. Zahorski Z. *Sur la classe de Baire des fonctions possédant la dérivée approximative.*

L'auteur démontre qu'une fonction  $f(x)$  possédant la dérivée approximative (finie ou infinie) partout, à l'exception d'un ensemble au plus dénombrable, est de classe  $\leq 2$ . Le nombre 2 ne peut pas être remplacé par un nombre inférieur.

8. VI. 1948. Leja F. *Remarques sur un travail de M. Mauro Picone.*

Dans son travail inséré dans le volume présent des Annales de la Soc. Pol. de Math. 21 (1948), p. M. Mauro Picone a démontré un intéressant théorème (théorème II) sur l'unicité des solutions (bornées ou non) de l'équation différentielle

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + c \cdot u = 0,$$

où  $c$  est une fonction des variables  $x_1, x_2, \dots, x_n, n \geq 2$ .

Dans le rapport sur ce travail M. F. Leja communique que les prémisses du théorème II de M. Picone peuvent être affaiblies sans changer sa thèse.

8. VI. 1948. Ważewski T. *Sur une propriété des arcs plans.*

15. VI. 1948, Zahorski Z. *Sur la mesurabilité des dérivées approximatives extrêmes.*

22. VI. 1948. Gołąb S. *Sur les équations différentielles linéaires de second ordre.*

L'auteur considère l'équation de la forme

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + a(t) \cdot x = b(t),$$

où  $a(t)$  est une fonction continue dans l'intervalle fermé  $(\alpha, \beta)$ , tandis que  $b(t)$  possède des points de discontinuité. En supposant que

$$(2) \quad \lim_{\lambda/0} c(t, \lambda) = b(t)$$

et que  $c(t, \lambda)$  soient des fonctions continues dans  $(\alpha, \beta)$ , l'auteur cherche les conditions sous lesquelles la solution  $x(t, \lambda)$  de l'équation

$$(3) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + a(t) \cdot x = c(t, \lambda)$$

tend vers cette solution  $x(t)$  de l'équation (1) qui est pourvue de la dérivée première  $\frac{dx}{dt}$  dans l'intervalle  $(\alpha, \beta)$  tout entier.

22. VI. 1948. Ważewski T. *Une généralisation du théorème de l'Hospital.*

#### SECTION DE LUBLIN

12. III. 1948. Mikusiński J. G. *Sur quelques équations fonctionnelles.*

En adoptant certaines hypothèses naturelles, les solutions des équations fonctionnelles

$\varphi[x, \varphi(y, z)] = \varphi[\varphi(x, y), z]$  et  $\varphi[x, \varphi(y, z)] = \varphi[\varphi(x, y), \varphi(z, x)]$  ont la forme  $\varphi(x, y) = \omega^{-1}[\omega(x) + \omega(y)]$  et  $\varphi(x, y) = \omega^{-1}\left[\frac{\omega(x) + \omega(y)}{2}\right]$  respectivement.

30. IV. Mikusiński J. G. *Sur un type de convergence dans l'anneau algébrique.*

Soit  $A$  un anneau algébrique et  $A^*$  un sous-ensemble de  $A$  assujetti aux axiomes suivants:

1\*.  $0 \in A^*$ ,

2\*. Si  $a \in A^*$  et  $b \in A^*$ , alors  $a + b \in A^*$  et  $ab \in A^*$ ;

3\*. Si  $a \in A^*$  et  $b - qa \in A^*$ , quel que soit  $q$  naturel, alors  $a = 0$ .

On pose par définition  $a \leq b$  lorsque  $b - a \in A^*$ . On introduit une opération de module qui fait correspondre à tout élément  $a \in A$  un élément  $|a| \in A^*$  de manière que

- 1°  $|a| = a$  pour tout  $a \in A^+$ ,  
 2°  $|a| = 0$  entraîne  $a = 0$ ,  
 3°  $|-a| = |a|$ ,  
 4°  $|a + b| \leq |a| + |b|$ ,  
 5°  $|ab| \leq |a| \cdot |b|$ .

On introduit la notion de convergence, en posant  $\lim a_n = a$  lorsqu'il existe un élément  $c \in A$  tel que, quel que soit  $q$  naturel, on a

$$q |a_n - a| \leq c$$

pour  $n$  suffisamment grand. Cette convergence est du type  $\gamma$  de Vulich et comme l'a montré A. Bielecki elle ne satisfait pas à l'axiome  $\bar{A} = \bar{A}$  de Kuratowski.

4. VI. 1948. Bielecki A. *Sur les espaces abstraits de Mikusiński.*

12. VI. 1948. Sierpiński W. *Sur les translations des ensembles sur une droite.*

12. VI. 1948. Sierpiński W. *Sur les groupes abéliens universels d'une puissance arbitraire infinie.*

25. VI. 1948. Mikusiński J. G. *Quelques remarques didactiques sur la notion d'intégrale.*

2. VII. 1948. Biernacki M. *Sur une inégalité.*

Soit  $a_i < x < b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , un système d'intervalles tel que chaque point  $x$  appartient aux  $p$  intervalles au plus. Si  $\varphi(x)$  est une fonction continue, croissante et convexe pour  $x \geq 0$  et si  $\varphi(0) = 0$  on a l'inégalité:

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \leq K(\varphi, p) \cdot \varphi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^n [\varphi(b_i) - \varphi(a_i)] \right\}$$

où  $\varphi^{-1}$  désigne la fonction inverse de  $\varphi$  et où l'on a:

$$K(\varphi, p) = \sup_{x > 0} \frac{px}{\varphi^{-1}[p\varphi(x)]}$$

(On a toujours  $K(\varphi, p) \leq p$ ).

#### SECTION DE ŁÓDŹ

15. III. 1948. Mazur S. *Sur les transformations conservant la distance.*

On sait que toute transformation  $y = U(x)$  d'un espace  $n$ -dimensionnel de Minkowski  $E$  conservant la distance est une affinité. L'auteur montre: Si l'indicatrice de l'espace  $E$  n'est pas un parallélépipède, alors toute transformation  $y = U(x)$  de  $E$  en lui-même conservant la distance égale à 1 est une affinité.

19. IV. 1948. Janowski W. *Sur la meilleure évaluation du troisième coefficient d'une fonction univalente bornée.*

Soit  $f$  une fonction holomorphe, univalente

$$f(x) = z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots,$$

définie dans le cercle  $|z| < 1$  et bornée  $|f(z)| < M$ . MM. A. C. Schaeffer et D. C. Spencer ont annoncé que si  $M \geq e$ , alors

$$|A_3| \leq 2\lambda^2 + 1 - 4\frac{\lambda}{M} + \frac{1}{M^2} \quad \text{pour } \lambda \cdot 1n\lambda = -\frac{1}{M}$$

et si  $M \leq e$ , alors

$$|A_3| \leq 1 - \frac{1}{M^2}. \quad ^1)$$

Nous avons démontré le même théorème d'une manière différente, en nous appuyant sur les résultats de M. Z. Charzyński, concernant les propriétés des fonctions extrémales dans les familles des fonctions univalentes bornées<sup>2)</sup>.

7. VI. 1948. Charzyński Z. et Janikowski J. *Sur une généralisation d'une inégalité de Koebe concernant les fonctions univalentes.*

#### SECTION DE POZNAŃ

18. II. 1948. Biernacki M, *Sur les fonctions analytiques en moyenne  $p$ -valantes.*

25. II. 1948. Banachiewicz T. *Nouvelles applications des Cracoviens.*

13. III. 1948. Ślebodziński W. *Sur la géométrie des textiles.*

9. VI. 1948. Butlewski Z. *Sur les intégrales oscillantes de certaines équations différentielles de seconde ordre.*

#### SECTION DE VARSOVIE

27. II. 1948. Sierpiński W. *Sur les ensembles congruents et sur les ensembles semblables.*

12. III. 1948. Ważewski T. *Sur les parcours des intégrales des équations différentielles dans l'entourage d'un*

<sup>1)</sup> A. C. Schaeffer and D. C. Spencer, *The coefficients of schlicht functions*. Duke Math. Journal, vol. 12 (1945), pp. 107—125.

<sup>2)</sup> Z. Charzyński, *Colloquium Mathematicum*, à paraître.



*point singulier* (à paraître dans les Comptes Rendus des Séances de la Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie, Classe III).

12. III. 1948. Kalicki J. (présenté par Mostowski A.) *Sur la méthode des matrices due à M. Tarski* (à paraître dans les Comptes Rendus de Séances de la Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie, Classe III).

30. IV. 1948. Borsuk K. *Sur la notion cinématique d'une courbe* (à paraître dans les Comptes Rendus des Séances de la Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie, Classe III).

14. V. 1948. Sikorski R. *Sur la séparabilité des espaces topologiques* (à paraître dans le Colloquium Mathematicum sous le titre *On the separability of topological spaces*).

21. V. 1948. Jaśkowski S. *Sur certains axiomes de la géométrie élémentaire*.

Il est possible de fonder la géométrie des corps<sup>1)</sup> sur des termes primitifs nouveaux. Les corps constituent une algèbre de Boole complètement additive. Aux notions connues de cette algèbre on adjoint deux termes primitifs: „ $x$  est un demi-espace“ et  $C$ —le symbole d'un cube constant. Le corps vide  $0$  et le corps-espace  $1$  sont appelés demi-espaces impropres. On définit les objets géométriques propres et impropres: 1) le plan — comme couple des demi-espaces mutuellement complémentaires  $a, a'$ ; 2) la droite déterminée par les demi-espaces  $a, b$  — comme faisceau des demi-espaces  $x$  qui satisfont à l'égalité

$$(1) \quad abx + a'b'x' = 0$$

ou bien à une autre obtenue de (1) à l'aide d'un remplacement de certains corps  $a, b, x$  par leurs corps complémentaires; 3) le point déterminé par trois demi-espaces  $a, b, c$  — comme gerbe des demi-espaces  $x$  qui satisfont à l'égalité

$$(2) \quad abcx + a'b'c'x' = 0$$

ou bien à une autre obtenue de (2) par un remplacement analogue à celui de (1),

En qualité d'axiomes d'existence, il suffit de postuler I—III:

Axiome I.  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , étant des corps non-vides, il existe un demi-espace  $x$  tel que  $a_1 x + a_2 x + a_3 x + a_4 x' = 0$  ou bien tous les  $a_i x$  et  $a_i x'$  sont non vides.

---

<sup>1)</sup> A. Tarski, *Les fondements de la géométrie des corps*. Księga Pamiątkowa Pierwszego Polskiego Zjazdu Matematycznego, Kraków 1929.

Axiome II.  $a$  étant un corps non-vidé, il existe les demi-espaces  $x_1, x_2, x_3, x_4$  tels que  $x_1 x_2 x_3 x_4 \neq 0$  et  $x_1 x_2 x_3 x_4 < a$ .

Axiome III. Le cube constant  $C$  est un produit des demi-espaces  $x_1, x_2, \dots, x_6$  qui satisfont à  $x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6 = 0$ .

28. V. 1948. Marczewski E et Helson H. *Sur la différence symétrique des ensembles* (à paraître dans les Comptes Rendus des Séances de la Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie, Classe III).

28. V, 1948. Banach S. (Note posthume présentée par Marczewski E.) *Sur les fonctions indépendantes* (à paraître dans les Comptes Rendus des Séances de la Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie, Classe III).

28. V. 1948. Zahorski Z. *Sur le nombre des points dans lesquels la courbe de Weierstrass est coupée par une courbe analytique* (à paraître dans les Comptes Rendus des Séances de la Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie, Classe III).

11. VI. 1948. Mikusiński J. G. *Sur un type de la convergence dans les espaces abstraits.*

11. VI. 1948. Sikorski R. *Sur l'induction des isomorphismes par des fonctions* (à paraître dans les Fundamenta Mathematicae 35).

#### SECTION DE WROCLAW <sup>1)</sup>

6. II. 1948. Zarankiewicz K. *Sur les nombres triangulaires.*

6. II. 1948. Marczewski E. *Remarques sur les fonctions additives discontinues.*

13. II. 1948. Ślebodziński W. *Sur la réduction d'une forme quadratique extérieure à sa forme canonique.*

13. II. 1948. Nosarzewska M. *Sur un problème combinatoire de S. Banach.*

20. II. 1948. Perkal J. *Sur certaines méthodes du mesurage des troncs de bois.*

---

<sup>1)</sup> Les résumés et les notices bibliographiques concernant les communications présentées pendant les séances de la Section de Wrocław vont paraître dans le Colloquium Mathematicum I<sub>3</sub>.

20. II. 1948. Perkal J. *Dendromètre—instrument pour le cubage des troncs de bois.*
5. III. 1948. Moroń Z. *Estimation des restes des séries de Taylor des fonctions de plusieurs variables dans les ordinations rectangulaires et autres,*
12. III. 1948. Marczewski E. *Sur un théorème de Banach et ses conséquences.*
19. III. 1948- Mostowski A. *Sur la définissabilité et les ensembles projectifs.*
16. IV. 1948. Marczewski E. et Helson H. *Sur la différence symétrique des ensembles.*
16. IV. 1948. Fast H. (présenté par Hartman S.) *Un théorème sur les fonctions périodiques.*
23. IV. 1948. Łoś J. *Sur les matrices logiques.*
2. V. 1948. Charzyński Z. *Sur les transformations isométriques du plan.*
2. V. 1948. Janowski W. (présenté par Charzyński Z.) *Sur la meilleure approximation du troisième coefficient d'une fonction univalente bornée.*
7. V. 1948. Bielecki A. *Sur certains espaces abstraits.*
14. V. 1948. Drobot S. *Sur un problème de la théorie de corps convexes.*
14. V. 1948. Hartman S. *Sur une généralisation de la notion de l'indépendance stochastique.*
21. V. 1948. Helson H. *Une remarque sur les mesures dans les corps presque indépendants.*
21. V. 1948. Stark M. *Sur une équation fonctionnelle.*
28. V. 1948. Wolibner W. *Sur une relation entre les singularités des fonctions analytiques.*
28. V. 1948. Warmus M. *Sur l'évaluation des corrections dans les calculs des champs des domaines plans triangulés.*
4. VI. 1948. Warmus M. *Sur certaines algorythmes nouveaux.*
18. VI. 1948. Borsuk K. *Sur l'approximation des polytopes.*

25. VI. 1948. Móron Z. *Sur la décomposition des polynômes en termes primitifs.*

25. VI. 1948. Intrator I. *Sur le nombre des décompositions d'un nombre naturel en somme des  $n$  nombres naturels.*

## CHRONIQUE ET PUBLICATIONS

### LES CHANGEMENTS PERSONNELS AUX CHAIRES DES MATHÉMATIQUES DANS LES ÉCOLES SUPÉRIEURES POLONAISES

Dr Stanisław Mazur professeur de mathématiques à l'Université de Łódź a été nommé professeur des mathématiques à l'Université de Varsovie.

Dr Jan G. Mikusiński professeur des mathématiques à l'Université de Lublin a été nommé professeur des mathématiques à l'Université et à l'École Polytechnique de Wrocław.

Dr Jerzy Poprużenko a été nommé professeur des mathématiques à l'Université de Łódź.

Dr Zygmunt Zahorski a été nommé professeur des mathématiques à l'Université de Łódź.

### HABILITATIONS

*L'Université de Cracovie.* Dr Mirosław Krzyżański. Dissertation: *Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales.* Ann. de la Soc. Pol. de Math. 18 (1945), p. 145 - 156 et 20 (1947), p. 7 - 9.

*L'Université de Poznań.* Dr Andrzej Alexiewicz. Dissertation: *On Denjoy integrals of abstract functions* (à paraître dans les Comptes Rendus des Séances de la Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie, Classe III).

### MATHÉMATIENS POLONAIS À L'ÉTRANGER

Prof. Dr Waśław Sierpiński a été invité en avril 1948 par la Faculté des Sciences de l'Université Charles IV à Prague, où il a donné deux conférences: „*Sur les translations des ensembles de points*“ et „*Sur l'équivalence des ensembles de points par décomposition en deux parties*“ (Voir Fund. Math. 35 (1948), p. 159 et 151).



En juillet du 1948 les professeurs Waclaw Sierpiński et Kazimierz Kuratowski, invités par l'Université de Genève et par l'Association Française pour l'Avancement des Sciences ont participé au Congrès de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences qui a eu lieu à Genève depuis le 12 jusqu'au 16 juillet. M. Kuratowski a donné une conférence intitulée „*La notion d'homotopie dans la théorie de variable complexe*“.

La Faculté des Sciences de l'Université de Lucknow (Indes) a invité M. Sierpiński de donner une série des conférences en janvier du 1949.

#### PRIX ET DISTINCTIONS SCIENTIFIQUES

Le 8 avril 1948 l'Université Charles IV à Prague a conféré à M. Waclaw Sierpiński le grade du docteur ès sciences naturels *honoris causa*.

Le 28 juin 1948 M. W. Sierpiński a été élu correspondant de l'Académie des Sciences de l'Institut de France. Il est actuellement l'unique polonais faisant partie de cette Académie.

Les prix scientifiques annuels, fondés grâce à une subvention accordée par le Ministère de l'Instruction Publique, pour les meilleurs travaux mathématiques publiés par les membres de la Société ont été accordés pour la troisième fois, en avril 1948, à MM. E. Marczewski (le prix de Mazurkiewicz, pour le travail „*Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques*“, Fund. Math. 34 (1947) p. 127—143), W. Orlicz (le prix de Banach, pour les travaux „*Sur les fonctions continues non dérivables*“, Fund. Math. 34 (1946), p. 45—60 et „*Une généralisation d'un théorème de MM. Banach et Mazur*“, Annales de la Soc. Pol. de Math. 19 (1947), p. 61—65) et T. Ważewski (le prix de Zaremba, pour les travaux: „*Théorie des multiplicités régulières d'éléments de contact unis. Application aux transformations canoniques*“, Annales de la Soc. Pol. de Math. 18 (1945), p. 55—112, „*Sur l'évaluation du domaine des fonctions implicites réelles ou complexes*“, Annales de la Soc. Pol. de Math. 20 (1947), p. 81—120, „*Systèmes des*

*équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*“ (à paraître), „*Une méthode de l'examen du phénomène asymptotique relativement aux équations différentielles ordinaires*“, *Rendiconti dei Lincei*, série VIII, 3 (1947), p. 210—215).

#### LIVRES ET PÉRIODIQUES PARUS

*Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, vol. XX (Kraków 1948, Instytut Matematyczny U. J., ul. Św. Jana 22, p. II + 421). Ce volume consacré à la mémoire de Stanisław Zarembo, contient 22 notes de 17 auteurs et le portrait de Stanisław Zarembo.

*Colloquium Mathematicum*, vol. I, fasc. 2 (Wrocław 1947, Gmach Politechniki, p. 65—192). Ce fascicule est consacré à la mémoire de Stefan Banach. Il contient une courte biographie et la photographie de Stefan Banach, la liste de ses publications, son souvenir écrit par H. Steinhaus, deux analyses de l'oeuvre scientifique de S. Banach écrites par E. Marczewski et W. Orlicz et deux notes posthumes de S. Banach. Le fascicule contient en outre 4 notes de 3 auteurs, une liste contenant 15 problèmes, les réponses à 5 problèmes posés dans le fascicule 1, comptes rendus du IV Congrès Polonais de Mathématique (Wrocław 12—14 décembre 1946), comptes rendus des séances de la Section de Wrocław de la Soc. Pol. de Math. et une Chronique.

*Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, vol. 39, 1946, (classe III), p. 42, Warszawa 1947, Imprimeur-Éditeur Towarzystwo Naukowe Warszawskie. Parmi les 4 articles constituant le contenu du volume, deux sont consacrés aux mathématiques.

*Matematyka*, l'année 1, Nr. 1 (Warszawa 1948, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, p. 64, en polonais). Ce nouvel périodique mathématique polonais, destiné aux professeurs des écoles secondaires, est édité par la Société Polonaise de Math. sur la commission du Ministère de l'Instruction Publique. Le Comité de Rédaction se compose de MM. S. Gołąb, J. Leśniak, E. Marczewski,

A. M. Rusiecki, S. Straszewicz, T. Ważewski et K. Zarankiewicz. M. B. Iwaszkiewicz est rédacteur en chef. Le Nr. 1 contient deux fragments des allocutions du Ministre de l'Instruction Publique Dr S. Skrzyszewski, une part scientifique contenant 3 articles, une part historique, une part didactique, chronique, analyses et bibliographie et une riche collection de problèmes.

Bartel K. *Geometria Wykreślna*, p. 427. Édition III, préparée à imprimer par A. Plamitzer. Warszawa 1948, Spółdzielnia Wydawnicza „Czytelnik”.

Charzyński Z. *Wykład Wstępu do Matematyki Wyższej*, p. 189 (litographié). „Książka Ekonomiczna”, Warszawa 1948.

Czechowski T. *Przypadek a Liczba*, p. 39. Wiedza Powszechna. Z cyklu „Matematyka dla każdego”. Fasc. 8. Warszawa 1947.

Gołąb S. *Zarys Matematyki Wyższej dla Początkujących i Samouków*, p. 318. Warszawa 1948, Spółdzielnia Wydawnicza „Czytelnik”. Z cyklu „Proste książki o zawiłych sprawach”.

Kuratowski K. *Wykłady Rachunku Różniczkowego i Całkowego*, vol. I, p. 240. Monografie Matematyczne vol. XV. Spółdzielnia Wydawnicza „Czytelnik”, Warszawa 1948 (imprimé en Suède dans les cadres du don du Gouvernement Suédois pour la reconstruction culturelle de la Pologne).

Kuratowski K. *Topologie I* (Espaces métrisables, espaces complets), p. XI + 450. Édition II revue et augmentée. Monografie Matematyczne vol. XX. Warszawa-Wrocław 1948.

Mostowski A. *Logika Matematyczna* cours universitaire, p. VIII + 388. Monografie Matematyczne vol. XVIII. Warszawa-Wrocław 1948.

Pogorzelski W. *Analiza Matematyczna* vol. II p. VIII + 326 et vol. III p. VI + 193. Édition II revue. Warszawa 1947, Spółdzielnia Wydawnicza „Czytelnik”. Z cyklu „Biblioteka Podręczników Akademickich”.

Saks S. et Zygmund A. *Funkcje Analityczne* wykłady uniwersyteckie p. XI + 431. Édition II réimprimée d'après l'édition I. Monografie Matematyczne vol. X. Spółdzielnia Wydawnicza „Czytelnik” 1948 (imprimé en Suède dans les

cadres du don du Gouvernement Suédois pour la reconstruction culturelle de la Pologne).

Sierpiński W. *Działania Nieskończone*, p. XII+504. Édition III réimprimée d'après l'édition II. Monografie Matematyczne vol. XIII. Spółdzielnia Wydawnicza „Czytelnik” 1948 (imprimé en Suède dans les cadres du don du Gouvernement Suédois pour la reconstruction culturelle de la Pologne).

Straszewicz S. *Repetytorium Elementów Matematyki*. Definicje twierdzenia, wzory, tablice, p. 88. Warszawa 1948, Trzaska, Evert i Michalski.





## ERRATA TO THE PAPER

„ON A THEOREM OF HADAMARD“ by A. ZYGMUND<sup>1</sup>

(A star \* denotes a line counted from the bottom)

Page	Line	For	Read
53	18	$n_k + 1$	$n_{k+1}$
55	4	$ E ^{-1}$	$ E $
55	16	$h$	$h_m$
56	12*	$\leq 1$	$< 1$
56	3*	$n_k^2$	$n_k^{2\nu}$
57	10	$0 < h >$	$0 < h <$
57	11	$e^{ink^x}$	$e^{ink^x}$
57	12	function	function $K(x) =$
57	1*	$n'_k + 1$	$n'_{k+1}$
58	6	$c'_k$	$c''_k$
60	10	$1, 2, \dots, k$	$1, 2, \dots, k - 1$
60	12*	$ c_s^h ^2$	$\sum_s  c_s^h ^2$
60	1*	$C_s^h$	$c_s^h$
61	5	$= 1$	$\rightarrow 1$
61	9*	$n_k(j)$	$n_k^{(j)}$
62	10	where $\lambda$	where $\delta$
62	7*	and $n_k^{(j)}$	and $n_l^{(j)}$
63	6	$(\sum_l  c_l^{(j)} ^2)$	$(\sum_l  c_l^{(j)} ^2)^{\frac{1}{2}}$

<sup>1</sup>) Pages 52—69 of this volume, fasc. I.

Page	Line	For	Read
63	10*	$\delta/(m-1)$	$\delta/2(m-1)$
63	8*	$\frac{1}{2}\delta G $	$\frac{1}{2}\delta$
63	5*	$\int \exp i(n_k^{(h)} - n_l^{(j)}) dx$	$\int_E \exp i(n_k^{(h)} - n_l^{(j)}) x dx$
64	12	$q_1^{-\frac{1}{2}}$ and $q_1^{\frac{1}{2}}$	$q^{-\frac{1}{2}}$ and $q^{\frac{1}{2}}$
64	17	$0 \leq t - s < m$	$0 < t - s \leq m$
64	9*	(25)	(23)
64	7*	$c_l^{(j')} \bar{c}_k^{(h')}$	$c_{l'}^{(j')} \bar{c}_{k'}^{(h')}$
64	2*	$k_m$	$k_r$
65	1	$-h_{k_t}^{(h_t)}$	$-n_{k_t}^{(h_t)}$
65	7	does not exceed	is not less than
65	9*	$q_1^{-1}$	$q_1^{-1}$
65	3*	$n'_l$	$n'_{l'}$
65	3*	$q_1^{-1}$	$q_1^{-1}$
66	3	united	initial
66	13	$C^n$	$C_n$
66	4*	$\lim \alpha_{pn} = 0 (p = 0, 1, \dots)$	$\lim_p \alpha_{pn} = 0 (n = 0, 1, \dots)$
68	13	condition (T)	conditions (28)
68	6*	$o(\Gamma_p)$	$o(\Gamma_p)$
68	4*	$= A\Gamma_p^2$	$\geq A\Gamma_p^2$
68	4*	$= B\Gamma_p^4$	$\leq B\Gamma_p^4$
69	8	$\sigma_p^+ = o(\Gamma_p), \sigma_p^- = o(\Gamma_p)$	$\sigma_p^+ = o(\Gamma_p), \sigma_p^- = o(\Gamma_p)$

## Table des matières

du tome XXI (fascicules I et II)

	Page
F. Leja. Sur une propriété des suites de polynomes .....	1
J. Szarski. Sur certains systèmes d'inégalités différentielles aux dérivées partielles du premier ordre .....	7
M. Biernacki. Sur les zéros des intégrales de l'équation .....	26
W. Orlicz. Une généralisation d'un théorème de Cantor-Lebesgue .....	38
J. G.-Mikusiński. Sur les fonctions $k_n(x)$ .....	46
A. Zygmund. On a theorem of Hadamard .....	52
J. Górski. Sur l'équivalence de deux constructions de la fonction de Green généralisée d'un domaine plan quelconque .....	70
E. Borel. Sur les développements unitaires normaux .....	74
F. Leja. Sur les polynomes d'interpolation de Lagrange .....	80
S. Straszewicz. Un théorème sur la largeur des ensembles convexes .....	90
F. Vera. Les mathématiques à l'École des Traducteurs de Tolède .....	94
P. Montel. Sur un système d'équations fonctionnelles .....	90
G. García. Sur une formule exacte, cardinale et canonique des tensions internes et sur l'équation cardinale, canonique du mouvement des fluides visqueux .....	107
A. Mostowski. On a set of integers not definable by means of one-quantifier predicates .....	114
M. Katětov. Remarque sur les espaces topologiques dénombrables .....	120
J. Novák. Remark on $\mathfrak{M}$ — completeness .....	123
S. Eilenberg. Extensions of general algebras .....	125
S. Piccard. Deux propositions de la théorie des groupes de substitutions .....	135
G. T. Whyburn. Sequence approximations to interior mappings ..	147
M. H. Stone. On the compactification of topological spaces .....	153
M. Picone. Intorno alla teoria di una classica equazione a derivate parziali della Fisica-Matematica .....	161
F. Leja. Remarques sur le travail précédent .....	170
K. Menger. Stieltjes integrals considered as lengths .....	173
J. H. C. Whitehead. The homotopy type of a special kind of polyhedron .....	176
A. Denjoy. Quelques propriétés des ensembles rangés .....	187
A. Hlavaty. Théorie d'immersion d'une $W_m$ dans $W_n$ .....	196
M. Fréchet. Sur l'estimation statistique .....	207
V. Jarník. Sur la symétrie des nombres dérivés approximatifs .....	214
C. Kuratowski. Sur la notion de limite topologique d'ensembles .....	219
S. Gołąb. Espace pourvu d'une métrique définie au moyen de l'écart triangulaire et les espaces métriques généralisés .....	226

	Page
M. Morse. L-S-homotopy classes of locally simple curves .....	236
K. Borsuk. On topological approximation of polytopes .....	257
T. Ważewski. Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles tangentes aux hyperplans caractéristiques issues du point singulier .....	277
S. Jaśkowski. Une modification des définitions fondamentales de la géométrie des corps de M. A. Tarski .....	298
K. Borsuk. Correction à mon travail „Sur la courbure totale des courbes fermées“ .....	302
O. Taussky and J. Todd. Covering theorems for groups .....	303
Z. Zahorski. Sur la classe de Baire des dérivées approximatives d'une fonction quelconque .....	306
A. Marchaud. Sur les ovales .....	324
R. Sikorski. A theorem on extension of homomorphisms .....	332
E. Marczewski. Sur l'isomorphie des relations et l'homéomorphie des espaces .....	336
Comptes Rendus de la Société Polonaise de Mathématique 1. II. 1948 — 30. VI. 1948 .....	343
Errata to the paper: On a theorem of Hadamard (pages 52-69, fasc. I of this volume) .....	357

---



## MIĘDZYNARODOWY KONGRES MATEMATYCZNY

W czasie od dnia 30. VIII. do 6. IX. 1950 r. odbędzie się pod protektoratem Amerykańskiego Towarzystwa Matematycznego Międzynarodowy Kongres Matematyków w Cambridge (Mass).

Amerykańskie Towarzystwo Matematyczne żywi nadzieję, że zjazd w roku 1950 będzie miał charakter naprawdę międzynarodowy i że będą na nim reprezentowane wszystkie kraje.

**Czas i miejsce.** Ustalono termin Kongresu na 30. VIII. — 6. IX. 1950 r. Rolę głównego gospodarza pełnić będzie Uniwersytet w Harvard.

**Charakter Kongresu.** Kongres roku 1950 obejmować będzie Konferencje poświęcone poszczególnym działom. Posiedzenia sekcji, na których będą przedstawiane prace nie objęte programami konferencji, będą zawierać następujące działy: I Algebra i Teoria Liczb; II Analiza; III Geometria i Topologia; IV Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka, Matematyka Aktuaryjna i Ekonomiczna; V Fizyka Matematyczna i Matematyka Stosowana; VI Logika i Filozofia; VII Historia i Nauczanie.

Oficjalnymi językami Kongresu z roku 1950 będą (w porządku alfabetycznym): angielski, francuski, niemiecki, rosyjski i włoski.

**Organizacja.** Komitet Organizacyjny Kongresu wybrany został przez Radę Amerykańskiego Towarzystwa Matematycznego w lutym 1948 r. w następującym składzie: Przewodniczący prof. Garrett Birkhoff z Uniwersytetu Harvard, Vice-Przewodniczący prof. W. T. Martin z Instytutu Technologicznego w Massachusetts, Sekretarz prof. J. R. Kline z Uniwersytetu Pensylwanii. Komitet Organizacyjny ma nadzieję zapewnić uczestnikom Kongresu z poza Ameryki Północnej bezpłatne kwatery i utrzymanie. Opłaty członkowskie będą podane do wiadomości przed otwarciem Kongresu. Czynione są starania, by umożliwić zagranicznym uczestnikom odbywanie podróży na terenie Stanów Zjednoczonych po cenach przystępnych.

**Informacje.** Dokładne informacje będą przesłane w odpowiednim czasie towarzystwom matematycznym i akademiom dla przekazania ich członkom. Osoby życzące sobie otrzymać informacje powinny przesłać swe nazwiska do Amerykańskiego Towarzystwa Matematycznego. Komunikaty powinny być przesyłane pod adresem Amerykańskiego Towarzystwa Matematycznego 531 West 116th Street, New York City 27 U. S. A.

Komitet Organizacyjny.

## INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS

An International Congress of Mathematicians will be held in Cambridge, Massachusetts, from August 30 to September 6, 1950, under the auspices of the American Mathematical Society.

It is the sincere hope of the American Mathematical Society that the gathering in 1950 will be a truly international one, with all countries well represented.

**Time and Place.** The dates for the Congress have been fixed as August 30 — September 6, 1950. Harvard University will be the principal host institution.

**Type of Congress.** The 1950 Congress will include Conferences in several fields. Sectional meetings for the presentation of contributed papers not included in Conference programs will be held in the following fields: I Algebra and Theory of Numbers; II Analysis; III Geometry and Topology; IV Probability and Statistics, Actuarial Science, Economics; V Mathematical Physics and Applied Mathematics; VI Logic and Philosophy; VII History and Education.

The official languages of the 1950 Congress will be English, French, German, Italian and Russian.

**Organization.** An Organizing Committee was elected by the Council of the American Mathematical Society in February, 1948. The Chairman is Professor Garrett Birkhoff of Harvard University and the Vice Chairman is Professor W. T. Martin of Massachusetts Institute of Technology. Professor J. R. Kline of the University of Pennsylvania has been named Secretary of the Congress.

**Entertainment.** The Organizing Committee hopes that it will be possible to furnish board and room without charge to all mathematicians from outside the North American continent who are members of the Congress. Congress membership fees will be announced well in advance of the opening of the Congress. Every effort will be made to facilitate the travel at reasonable cost of foreign participants while in the United States.

**Information.** Detailed information will be sent in due course to mathematical societies and academies for communication to their membership. Individuals interested in receiving information may file their names in the office of the American Mathematical Society. Communications should be addressed to the American Mathematical Society, 531 West 116th Street, New York City 27, U. S. A.



The Organizing Committee.

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

101760

# ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

FONDÉES EN 1921 par STANISŁAW ZAREMBA

Rédacteur FRANCISZEK LEJA

Membres de la Rédaction

STANISŁAW GOŁĄB

TADEUSZ WAŻEWSKI

## TOME XXI

ANNÉE 1948, FASCICULE I

Dédié à

**M. WACŁAW SIERPIŃSKI**

à l'occasion de son Jubilé

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA OŚWIATY

KRAKÓW 1948

INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO  
UL. ŚW. JANA 22



## Avis

Les tomes des Annales de la Société Polonaise de Mathématique paraissent en un ou en deux fascicules par an. Les manuscrits doivent être envoyés à l'une des adresses:

F. Leja, Kraków (Pologne), ul. Łobzowska 61.

T. Ważewski, Kraków (Pologne), ul. Starowiślna 77.

S. Gołąb, Kraków (Pologne), ul. Łobzowska 61.

Les auteurs ont le droit à 50 tirages à part gratuitement.

Pour ce qui concerne l'achat et l'échange de ces Annales s'adresser à:

**Administration des Annales de la Société Polonaise de Mathématique**  
**Kraków (Pologne), ul. św. Jana 22.**

Les membres de la Société Polonaise de Mathématique ont le droit d'abonner le périodique américain »*Mathematical Reviews*« à un pris modéré de \$ 6,50 par an.

## Table des matières

	Page
F. Leja. Sur une propriété des suites de polynomes . . . . .	1
J. Szarski. Sur certains systèmes d'inégalités différentielles aux dérivées partielles du premier ordre . . . . .	7
M. Biernacki. Sur les zéros des intégrales de l'équation $x^{(5)}(t) + A(t) \cdot x(t) = 0$ . . . . .	26
W. Orlicz. Une généralisation d'un théorème de Cantor-Lebesgue	38
J. G. Mikusiński. Sur les fonctions $k_n(x)$ . . . . .	46
A. Zygmund. On a theorem of Hadamard . . . . .	52
J. Górski. Sur l'équivalence de deux constructions de la fonction de Green généralisée . . . . .	70
E. Borel. Sur les développements unitaires normaux . . . . .	74
F. Leja. Sur les polynomes d'interpolation de Lagrange . . . . .	80
S. Straszewicz. Un théorème sur la largeur des ensembles convexes	90
F. Vera. Les mathématiques à l'École des Traducteurs de Tolède . . . . .	94
P. Montel. Sur un système d'équations fonctionnelles . . . . .	99
G. Garcia. Sur une formule des tensions internes et sur l'équation du mouvement des fluides visqueux . . . . .	107
A. Mostowski. On a set of integers not definable by means of one-quantifier predicates . . . . .	114
M. Katětov. Remarque sur les espaces topologiques dénombrables	120
J. Novák. Remark on $\mathfrak{M}$ — completeness . . . . .	123
S. Eilenberg. Extensions of general algebras . . . . .	125
S. Piccard. Deux propositions de la théorie des groupes de substitutions . . . . .	135
G. T. Whyburn. Sequence approximations to interior mappings . . . . .	147
M. H. Stone. On the compactification of topological spaces . . . . .	153