

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

**ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE
DE MATHÉMATIQUE**

FONDÉES EN 1921 par STANISŁAW ZAREMBA

Rédacteur FRANCISZEK LEJA

Membres de la Rédaction

STANISŁAW GOŁĄB

TADEUSZ WAŻEWSKI

TOME XXIV

ANNÉE 1951, FASCICULE I

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA SZKOLNICTWA WYŻSZEGO

KRAKÓW 1952
INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIwersytetu JAGIELLOŃSKIEGO
UL. ŚW. JANA 22

Avis

Les tomes des Annales de la Société Polonaise de Mathématique paraissent en un ou en deux fascicules par an. Les manuscrits doivent être envoyés à l'une des adresses:

F. Leja, Kraków (Pologne), ul. Łobzowska 61.

T. Ważewski, Kraków (Pologne), ul. Bohaterów Stalingradu 77.

S. Gołąb, Kraków (Pologne), ul. Łobzowska 61.

Les auteurs ont droit à 50 tirages à part gratuitement.

En ce qui concerne l'échange de ces Annales prière d'écrire à l'adresse:

Administration des Annales de la Société Polonaise de Mathématique

Kraków (Pologne), ul. św. Jana 22.

Table des matières

	Page
T. Ważewski. Certaines propositions de caractère «épidermique» relatives aux inégalités différentielles	1
W. Sierpiński. Sur les opérations dans l'ensemble à 3 éléments	13
F. Leja. Remarques sur les séries entières doubles	19
S. Gołąb et T. Wróbel. Courbure et torsion géodésique pour les courbes situées sur les hypersurfaces à $n-1$ dimensions plongées dans l'espace à n dimensions	25
T. Wróbel. L'interprétation géométrique de la courbure et de la torsion géodésique à l'aide de la représentation hypersphérique de la courbe	52
W. Pogorzelski. Sur la solution de l'équation intégrale dans le problème de Fourier	56
W. Pogorzelski. Sur l'équation intégral-différentielle non linéaire à singularité polaire	75
S. Łojasiewicz. Solution générale de l'équation fonctionnelle $f(f(\dots f(x)\dots)) = g(x)$	88
S. Łojasiewicz. Sur une propriété caractéristique de la spirale logarithmique	92
Z. Butlewski. Un théorème de l'oscillation	95
T. Ważewski. Sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue soit monotone	111

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

FONDÉES EN 1921 par STANISŁAW ZAREMBA

Rédacteur FRANCISZEK LEJA

Membres de la Rédaction

STANISŁAW GOŁĄB

TADEUSZ WAŻEWSKI

TOME XXIV
ANNÉE 1951, FASCICULE I

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA SZKOLNICTWA WYŻSZEGO

Biblioteka Jagiellońska



1003047103

KRAKÓW 1952
INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
UL. ŚW. JANA 22

403653

II



24(1951)

POLSKIE TOWARZYSTWO MATEMATYCZNE

Nakład 1000 egz.

Papier drukowy sat. kl. III 70×100 cm, 100 gr

ark. druku 7 $\frac{1}{2}$

Krak. Drukarnia Naukowa, Kraków, Czapskich 4

Zam. 404 — 9, VIII. 51

Druk ukończono w czerwcu 1952

CzEO 1952 nr. 827

CERTAINES PROPOSITIONS DE CARACTÈRE »ÉPIDERMIQUE« RELATIVES AUX INÉGALITÉS DIFFÉRENTIELLES

Par T. WAŻEWSKI (Kraków)

Les fonctions, telles que $|z|$, $u(z_1, \dots, z_n) = \sqrt{\sum z_i^2}$ interviennent comme fonctions auxiliaires dans divers théorèmes sur l'unicité et sur l'évaluation des intégrales de systèmes d'équations différentielles ainsi que dans certains théorèmes relatifs à l'évaluation de la faute que l'on commet dans la solution approchée des systèmes d'équations différentielles.

Un rôle auxiliaire analogue est joué par la fonction $v(z_1, \dots, z_n) = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij} z_i z_j}$, la forme quadratique $\sum a_{ij} z_i z_j$ étant positivement définie. Or ces fonctions ont le désavantage consistant en ce qu'elles ne possèdent pas de dérivée unique en un point isolé. Ainsi la dérivée bilatérale de $|z|$ n'existe pas pour $z=0$, et les dérivées partielles des fonctions $u(z_1, \dots, z_n)$, $v(z_1, \dots, z_n)$ n'existent pas au point $z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0$.

Les démonstrations courantes des théorèmes relatifs à l'unicité ou à l'évaluation des intégrales se basent sur certains théorèmes relatifs aux inégalités différentielles que vérifient les fonctions composées, telles que

$$\psi(x) = |\varphi(x)|, \quad \sigma(x) = u(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)), \quad \varrho(x) = v(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$$

où les fonctions $\varphi(x)$ et $\varphi_i(x)$ sont différentiables.

Or, la dérivée de $\psi(x)$, $\sigma(x)$ et $\varrho(x)$ n'existe pas toujours aux points x vérifiant les relations $\varphi(x)=0$ ou bien $\varphi_1(x) = \dots = \varphi_n(x) = 0$. L'ensemble de tels points sera désigné par Z .

On peut éviter la difficulté provenant de la non-existence des dérivées $\psi'(x)$, $\sigma'(x)$, $\varrho'(x)$, en introduisant les dérivées

droites et gauches $\psi'_+(x)$ et $\psi'_-(x)$ ¹⁾ ou bien en introduisant les nombres dérivés inférieur ou supérieur à gauche ou à droite²⁾

$$\underline{D}_{(+)}\sigma(x), \quad \overline{D}_{(+)}\sigma(x), \quad \underline{D}_{(-)}\sigma(x), \quad \overline{D}_{(-)}\sigma(x).$$

Cependant l'introduction des nombres dérivés de ψ , σ , ϱ et la démonstration de certaines propriétés de ces nombres dérivés (p. ex. celle de l'inégalité $|\varphi(x)|'_+ \leq |\varphi'(x)|$) sont embarrassantes pour la raison que le cas où x appartient à l'ensemble Z exige toujours une considération à part.

Le but du présent article est d'éliminer la nécessité de s'occuper des points $x \in Z$. Nous pouvons l'atteindre grâce à la remarque que certains théorèmes sur les inégalités différentielles ont un caractère „épidermique”.

C'est en remaniant l'énoncé des théorèmes connus de façon à mettre au jour leur caractère „épidermique” que nous parvenons à rendre superflues les considérations relatives aux points x appartenant à l'ensemble Z (c. f. les Propositions II du § 3 et III du § 8).

Dans le § 12 nous indiquons une modification (ayant un caractère „épidermique”) d'un théorème sur les accroissements finis.

§ 1. *Hypothèse II.* La fonction $f(x, y)$ est définie et continue dans un ensemble ouvert Ω .

$$(1.1) \quad y = \tau(x)$$

désigne l'intégrale supérieure de l'équation

$$(1.2) \quad y' = f(x, y)$$

issue du point (a, c)

$$c = \tau(a).$$

Cette intégrale est déterminée dans un intervalle

$$\Delta = [a, b), \quad (a \leq x < b).$$

Voici d'abord une proposition bien connue.

¹⁾ E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, p. 92.

²⁾ T. Ważewski, *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Polon. Math. volume XXIII, p. 124, Théorème 2.

Proposition 1. Admettons l'Hypothèse H relativement à $f(x, y)$ et à $\tau(x)$. La fonction $\varphi(x)$ étant continue dans $a \leq x < b$, dérivable dans $a < x < b$, telle que

$$(1.3) \quad \varphi(a) \leq \tau(a) = c$$

$$(1.4) \quad \varphi'(x) \leq f(x, \varphi(x)) \quad \text{pour } a < x < b$$

et telle que le diagramme de $y = \varphi(x)$, ($a \leq x < b$), fait partie de Ω , alors on a

$$(1.5) \quad \varphi(x) \leq \tau(x) \quad \text{dans } a \leq x < b.$$

§ 2. **Epiderme supérieur** de $y = \tau(x)$. Soit $\varepsilon(x) > 0$ une fonction continue dans l'intervalle $a < x < b$. L'ensemble E^ε composé des points (x, y) pour lesquels

$$(2.1) \quad (x, y) \in \Omega, \quad a < x < b, \quad \tau(x) < y < \tau(x) + \varepsilon(x)$$

sera dit *épiderme supérieur* (d'épaisseur $\varepsilon(x)$) de l'intégrale supérieure $y = \tau(x)$.

Remarque 1. Notons que l'épiderme E^ε se compose exclusivement des points situés au dessus de l'intégrale $y = \tau(x)$, et ne contient aucun point de celle-ci. De même aucun point de la ligne $x = a$ n'appartient à E^ε . Ceci provient de ce que, dans les relations (2.1) intervient le signe $<$ et non pas \leq .

Voici maintenant une proposition faisant apparaître le caractère épidermique de la Proposition I.

§ 3. **Proposition II.** Admettons l'Hypothèse H (cf. § 1) relativement à l'équation (1.2) et à son intégrale supérieure $\tau(x)$. Supposons que la fonction $\varphi(x)$ soit continue dans l'intervalle $a \leq x < b$ sans supposer qu'elle y soit dérivable en tout point et que le diagramme de la fonction $\varphi(x)$ appartienne à l'ensemble Ω (dans lequel le deuxième membre de l'équation différentielle (1.2) est déterminé).

Supposons que

$$(3.1) \quad \varphi(a) \leq \tau(a) = c$$

et que la dérivée $\varphi'(x)$ existe pour tous les points x pour lesquels

$$(3.2) \quad (x, \varphi(x)) \in \Omega, \quad a < x < b, \quad \tau(x) < \varphi(x) < \tau(x) + \varepsilon(x)$$

et qu'elle satisfasse, pour ces points, à la condition

$$(3.3) \quad \varphi'(x) \leq f(x, \varphi(x)).$$

Cela posé l'on a

$$(3.4) \quad \varphi(x) \leq \tau(x) \quad \text{pour} \quad a \leq x < b.$$

Remarque 2. La prémissse liée aux relations (3.2) exprime que l'inégalité différentielle (3.3) a lieu lorsque le point $(x, \varphi(x))$ appartient à Ω et à l'épiderme E^e (cf. § 2)

$$(x, \varphi(x)) \in \Omega E^e.$$

C'est donc dans cette prémissse que réside le caractère „épidermique” de la Proposition II.

Démonstration. Supposons, pour la démonstration par impossible, que l'on ait pour un certain ξ

$$(3.5) \quad a \leq \xi < b, \quad \varphi(\xi) > \tau(\xi).$$

En vertu de (3.5) et de (3.1) l'égalité $\xi = a$ est impossible. On a donc

$$a < \xi < b.$$

Comme $\varphi(a) \leq \tau(a)$, $\varphi(\xi) > \tau(\xi)$ et les fonctions $\varphi(x)$ et $\tau(x)$ sont continues, il existe un nombre ζ , tel que

$$a \leq \zeta < \xi, \quad \varphi(\zeta) = \tau(\zeta).$$

Désignons par a_1 la borne supérieure de tels ζ . On a

$$(3.6) \quad a \leq a_1 < \xi, \quad \varphi(a_1) = \tau(a_1)^3$$

$$(3.7) \quad \varphi(x) > \tau(x) \quad \text{pour} \quad a_1 < x < \xi.$$

Le point $(a_1, \tau(a_1))$ appartient à l'ensemble Ω car il est situé sur l'intégrale $y = \tau(x)$ dont le diagramme appartient à Ω .

L'ensemble Ω étant ouvert et $\varepsilon(x) > 0$ continue, on aura, en vertu de la continuité de $\varphi(x)$ et en raison de (3.7)

$$(3.8) \quad (x, \varphi(x)) \in \Omega \quad \text{pour} \quad a_1 \leq x < b_1 < \xi$$

$$(3.9) \quad \tau(x) < \varphi(x) < \tau(x) + \varepsilon(x) \quad \text{pour} \quad a_1 < x < b_1$$

pourvu que le nombre b_1 (où $b_1 > a_1$) soit situé suffisamment près de a_1 . L'inégalité (3.3) aura donc lieu pour $a_1 < x < b_1$.

³⁾ L'égalité $a_1 = \xi$ n'est pas possible car $\varphi(a_1) \leq \tau(a_1)$ et $\varphi(\xi) > \tau(\xi)$, (cf. 3.5).

Remplaçons, dans la Proposition I (§ 1), l'intervalle $a \leq x < b$ par l'intervalle $a_1 \leq x < b_1$. Les prémisses de la Proposition I subsisteront en raison de (3.3), (3.6), (3.8) et (3.9). La thèse (1.5) de la Proposition I

$$\varphi(x) \leq \tau(x) \quad \text{pour} \quad a_1 \leq x < b_1 < \xi$$

aura donc lieu, ce qui est incompatible avec l'inégalité (3.9). La Proposition II se trouve ainsi démontrée.

§ 4. La proposition II peut être appliquée au problème de l'unicité et de la limitation des intégrales des équations différentielles (cf. § 5). Avant de passer aux exemples d'une telle application de la Proposition II nous noterons quelques inégalités déduites du fait que la dérivée (au sens ordinaire) de $|u|$ existe lorsque $u \neq 0$ et les dérivées partielles de $\sqrt{\sum_i u_i^2}$ existent lorsque $\sum_i u_i^2 > 0$. On a évidemment

$$(4.1) \quad \frac{d|u|}{du} = 1 \quad \text{lorsque} \quad u > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d|u|}{du} = -1 \quad \text{lorsque} \quad u < 0,$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial}{\partial u_j} \sqrt{\sum_i u_i^2} = \frac{u_j}{\sqrt{\sum_i u_i^2}} \quad \text{lorsque} \quad \sum_i u_i^2 > 0.$$

Supposons que les dérivées $\psi'(x)$ et $\psi'_1(x), \dots, \psi'_n(x)$ existent pour un certain x . Il vient, d'après (4.1)

$$\frac{d|\psi(x)|}{dx} = \frac{d\psi(x)}{dx} \quad \text{lorsque} \quad \psi(x) > 0$$

$$\frac{d|\psi(x)|}{dx} = -\frac{d\psi(x)}{dx} \quad \text{lorsque} \quad \psi(x) < 0$$

d'où

$$(4.3) \quad \frac{d|\psi(x)|}{dx} \leq \left| \frac{d\psi(x)}{dx} \right| \quad \text{lorsque} \quad \psi(x) \neq 0.$$

Il vient aussi, d'après (4.2),

$$\frac{d}{dx} \sqrt{\sum_i [\psi_i(x)]^2} = \sum_j \frac{\psi_j(x)}{\sqrt{\sum_i [\psi_i(x)]^2}} \cdot \frac{d\psi_j}{dx} \quad \text{lorsque} \quad \sum_i [\psi_i(x)]^2 > 0.$$

Posons

$$a_j = \frac{\psi_j}{\sqrt{\sum_i [\psi_i]^2}}, \quad b_j = \frac{d\psi_j}{dx}.$$

On a $\sum_j a_j^2 = 1$ et, d'après l'inégalité de Lagrange,

$$\sum_j a_j b_j \leq \sqrt{\sum_j a_j^2} \sqrt{\sum_j b_j^2} = \sqrt{\sum_j b_j^2}.$$

De là il résulte que

$$(4.4) \quad \frac{d}{dx} (\sqrt{\sum_i [\psi_i(x)]^2}) \leq \sqrt{\sum_j [\psi_j'(x)]^2} \text{ lorsque } \sum_j [\psi_j(x)]^2 > 0.$$

§ 5. *Exemple 1.* Voici un lemme bien connu servant de base à la démonstration de l'unicité des intégrales de l'équation $y' = g(x, y)$ dont le deuxième membre vérifie la condition de Lipschitz $|g(x, \bar{y}) - g(x, \bar{y}')| \leq N |\bar{y} - \bar{y}'|$.

Lemme. Supposons que l'on ait

$$(5.1) \quad |\psi'(x)| \leq N |\psi(x)| \text{ pour } a \leq x < b, \quad \psi(a) = 0.$$

Alors

$$(5.2) \quad \psi(x) \equiv 0 \text{ pour } a \leq x < b.$$

Nous ferons voir comment la Proposition II permettra de prouver ce lemme sans faire intervenir les considérations relatives à l'existence de la dérivée $|\psi(x)|'$ aux points où $\psi(x) = 0$. Posons, à cet effet, $f(x, y) = Ny$, dans l'équation (1.1). Elle prendra la forme

$$y' = Ny.$$

L'intégrale supérieure $\tau(x)$ de cette équation issue du point $(a, 0)$ est $\tau(x) \equiv 0$. Posons $\varphi(x) = |\psi(x)|$. Afin d'appliquer la Proposition II, nous vérifierons si la fonction $\varphi(x)$ remplit les prémisses de cette proposition. Si

$$\tau(x) < \varphi(x) = |\varphi(x)| < \tau(x) + \varepsilon$$

c'est-à-dire si

$$0 < \varphi(x) = |\psi(x)| < \varepsilon$$

on aura, en vertu de (4.3) et (5.1),

$$\varphi'(x) = |\psi(x)|' \leq |\psi'(x)| \leq N |\psi(x)| = N \varphi(x), \quad \varphi(a) \leq 0.$$

En appliquant la Proposition II on en déduira la conséquence:

$$|\psi(x)| = \varphi(x) \leq \tau(x) \equiv 0 \text{ pour } a \leq x < b, \text{ d'où résulte (5.2).}$$

La Proposition II fournit donc une certaine simplification de la démonstration du lemme classique en question et, par suite, de la démonstration de l'unicité des intégrales sous la condition de Lipschitz.

Exemple 2. Soit $p \geq 0$, $q \geq 0$ deux nombres fixes. Supposons que

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \sqrt{\sum_i [\psi_i'(x)]^2} &\leq p \sqrt{\sum_i [\psi_i(x)]^2} + q \quad \text{pour } a \leq x < b \\ \sqrt{\sum_i [\psi_i(a)]^2} &\leq k, \quad (k \geq 0). \end{aligned}$$

Désignons par $\tau(x)$ l'intégrale supérieure de l'équation

$$y' = py + q$$

issue du point (a, k) . Elle a, comme on le sait bien, la forme

$$\tau(x) = k + \left(k + \frac{p}{q}\right) (e^{p(x-a)} - 1) \geq 0 \quad \text{pour } x \geq a$$

dans le cas où $p > 0$ et la forme

$$\tau(x) = q(x - a) + k \geq 0 \quad \text{pour } x \geq a$$

dans le cas où $p = 0$. Nous soutenons que

$$(5.4) \quad \sqrt{\sum_i [\psi_i'(x)]^2} \leq \tau(x) \quad \text{pour } a \leq x < b.$$

Posons $\varphi(x) = \sqrt{\sum_i [\psi_i(x)]^2}$. Si $\tau(x) < \varphi(x) < \tau(x) + \varepsilon$, alors

$$\sqrt{\sum_i [\psi_i'(x)]^2} = \varphi(x) > \tau(x) \geq 0,$$

d'où $\sqrt{\sum_i (\psi_i')^2} > 0$. On aura donc en vertu de (4.4) et (5.3) $\varphi'(x) \leq p\varphi(x) + q$. En appliquant la Proposition II on obtiendra la conséquence $\sqrt{\sum_i [\psi_i']^2} = \varphi(x) \leq \tau(x)$ pour $a \leq x < b$.

Ce résultat, bien connu, peut donc être obtenu, grâce à la Proposition II, en se passant des considérations supplémentaires relatives à la dérivée de $\sqrt{\sum_i [\psi_i(x)]^2}$ aux points x pour lesquels $\sqrt{\sum_i [\psi_i(x)]^2} = 0$.

§ 6. Épiderme inférieur de $y = \eta(x)$. Soient $\eta(x)$ et $\varepsilon(x) > 0$ deux fonctions déterminées et continues dans l'inter-

valle $a \leq x < b$. L'ensemble E_ε composé des points (x, y) pour lesquels

$$(x, y) \in \Omega, \quad a < x < b, \quad \eta(x) - \varepsilon(x) < y < \eta(x)$$

sera dit épiderme inférieur de la fonction $\eta(x)$.

L'épiderme inférieure E_ε est donc composé exclusivement des points situés au dessous du diagramme de la fonction $y = \eta(x)$, et ne contient aucun point de celui-ci.

§ 7. Hypothèse K. La fonction $f(x, y)$ est définie et continue dans un ensemble ouvert Ω . L'intégrale inférieure de l'équation (1.2)

$$(7.1) \quad y = \eta(x)$$

passé par le point (a, c) et est déterminée dans l'intervalle $a \leq x < b$.

§ 8. Proposition III. Admettons l'Hypothèse K relativement à l'équation (1.2) et à son intégrale inférieure $y = \eta(x)$. Supposons que la fonction $\varphi(x)$ soit continue dans l'intervalle $a \leq x < b$ sans supposer qu'elle y soit dérivable en tout point et que le diagramme de $\eta(x)$ appartienne à l'ensemble ouvert Ω (dans lequel le deuxième membre de l'équation (1.2) est déterminé). Supposons enfin que

$$(8.1) \quad \varphi(a) \geq \eta(a) = c,$$

et que la dérivée $\varphi'(x)$ existe pour tous les points x pour lesquels

$$(8.2) \quad (x, \varphi(x)) \in \Omega, \quad a < x < b, \quad \eta(x) - \varepsilon(x) < y < \eta(x)$$

et satisfasse, pour ces points, à la condition

$$(8.3) \quad \varphi'(x) \geq f(x, \varphi(x)).$$

Cela posé on a

$$\varphi(x) \geq \eta(x) \quad \text{pour} \quad a \leq x < b.$$

Démonstration. La présente proposition résulte de la Proposition II lorsque l'on applique la transformation $y = -Y$, $x = X$ à l'équation (1.2).

Remarque 3. La prémisses de la Proposition III liée aux relations (8.2) et (8.3) exprime que l'inégalité différentielle (8.3) a lieu lorsque le point $(x, \varphi(x))$ appartient à l'épiderme inférieur E_e . C'est donc dans cette prémisses que réside le caractère épidermique de la Proposition III.

§ 9. En gardant les notations précédentes appliquons la transformation

$$y = Y, \quad x = -X$$

à l'équation (1.2). Les fonctions $\tau(x), \eta(x), \varphi(x)$ se changeront alors en fonctions $\tau_1(X), \eta_1(X), \varphi_1(X)$ et l'intervalle $a \leq x < b$ passera en l'intervalle $-b < X \leq -a$. Les inégalités (3.1) et (8.1) ne changeront pas d'orientation (c'est-à-dire le symbole d'inégalité „ \leq ” passera en „ \leq ”). L'orientation des inégalités différentielles (3.3) et (8.3) devienra opposée („ \leq ” passera en „ \geq ”).

En partant des Propositions II et III on obtiendra, dans cette voie, des propositions analogues mais relatives à un intervalle $k < x \leq a$ situé à gauche de a . Nous nous dispensons de donner un énoncé détaillé de ces propositions.

§ 10. **Remarque 4.** La Proposition I reste vraie lorsque l'on y remplace l'inégalité (1.3) par la suivante

$$(10.1) \quad \underline{D}_{(+)}\varphi(x) \leq f(x, \varphi(x)) \quad \text{pour} \quad a < x < b$$

ou bien

$$(10.2) \quad \underline{D}_{(-)}\varphi(x) \leq f(x, \varphi(x)) \quad \text{pour} \quad a < x < b$$

où $\underline{D}_{(+)}\varphi$ et $\underline{D}_{(-)}\varphi$ désignent les nombres dérivés inférieurs droits et gauches⁴⁾.

Les propositions ainsi obtenues ont aussi un caractère épidermique, c'est-à-dire elles restent vraies lorsque l'on admet que les inégalités (10.1) ou (10.2) aient lieu pour les points x , tels que

$$(x, \varphi(x)) \in \Omega, \quad a < x < b, \quad \tau(x) < \varphi(x) < \tau(x) + \varepsilon(x).$$

⁴⁾ Cf. T. Ważewski, le travail cité plus haut.

La démonstration est tout à fait analogue à celle de la Proposition II. La Proposition III et celles mentionnées au § 9 sont douées d'une généralisation dans le même sens.

§ 11. *Remarque 5 relative au rapport mutuel des Propositions I et II.* Si une fonction $\varphi(x)$ satisfait aux prémisses de la Proposition II alors elle satisfait à l'inégalité $\varphi(x) \leq \tau(x)$ pour $a \leq x \leq b$ (cf. (3.4)), et, par suite les relations (3.2) intervenant dans la prémisse de cette proposition ne peuvent avoir lieu pour aucun x .

Or chaque théorème ayant la forme d'une inclusion

$$(11.1) \quad W(x) \supset V(x)$$

(où $W(x)$ et $V(x)$ sont deux propriétés c'est-à-dire fonctions propositionnelles⁵⁾), peut être mis, comme on le sait bien, sous la forme équivalente

$$(11.2) \quad [\sim V(x) \cdot W(x)] \supset V(x)$$

qui exprime que de la propriété $W(x)$ et de la négation de la propriété $V(x)$ résulte la propriété $V(x)$.

De deux implications équivalentes (11.1) et (11.2) la première suggère une démonstration directe, tandis que la seconde se rattache à la démonstration par „*reductio ad absurdum*“.

Si l'implication (11.1) est vraie, la prémisse $\sim W(x) \cdot V(x)$ de l'implication (11.2) ne peut l'être pour aucun x . L'analogie du rapport mutuel des Propositions I et II d'une part et des implications (11.1) et (11.2) d'autre part est donc frappante.

Il pourrait donc paraître, à première vue, que le passage, purement logique de (11.1) à (11.2) relie les Propositions I et II du présent travail. S'il en était ainsi, la Proposition II serait *banalement équivalente* (au point de vue mathématique) à la Proposition II.

Or, on voit facilement que cela n'a pas lieu. Nous entendons par là que le passage de la Proposition I à la Proposition II, si simple qu'il soit, s'appuie sur certains lemmes *mathématiques*, tandis que le passage de (11.1) à (11.2) a un caractère *purent logique*. Les Propositions I et II, tout en étant équivalentes, ne sont pas du tout banalement équivalentes au sens mathématique. Ce fait devient, peut-être, plus clair lorsque l'on remarque que des deux Propositions I et II, la seconde est plus *pratique* pour les applications (cf. les Exemples 1 et 2).

§ 12. *Caractère épidermique d'un théorème sur les accroissements finis.* Supposons que la dérivée d'une

⁵⁾ $W(x)$ peut désigner, par exemple, la fonction propositionnelle: „le nombre entier x est divisible par 6“ et $V(x)$ la fonction propositionnelle: „le nombre entier x est divisible par 3“.

fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle fermé Δ ($a \leq x \leq b$) satisfasse à l'inégalité

$$(12.1) \quad f'(x) \leq k \quad \text{pour} \quad a < x < b.$$

On a alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq k \quad \text{pour} \quad a < x \leq b.$$

Cette propriété P constitue une des plus importantes conséquences du théorème sur les accroissements finis, d'après lequel il existe un ξ , tel que $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$, où $a < \xi < b$.

C'est pour cette raison qu'elle mérite aussi d'être appelée théorème sur les accroissements finis (dans un sens particulier).

Or elle possède aussi un caractère épidermique qui apparaît dans l'énoncé suivant:

Proposition IV. *Supposons que 1° $f(x)$ soit continue dans l'intervalle $a \leq x < b$, 2° il existe un nombre $\varepsilon > 0$ (ou plus généralement une fonction $\varepsilon(x) > 0$ continue pour $a < x < b$), tel que, pour tout x pour lequel*

$$a < x < b, \quad k < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < k + \varepsilon,$$

la dérivée $f'(x)$ existe et

$$(12.2) \quad f'(x) \leq k.$$

Cela posé l'on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq k \quad \text{pour} \quad a < x < b.$$

On peut démontrer cette proposition directement, ou la ramener à la Proposition II du § 3 en y posant

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - k(x - a), \quad \tau(x) \equiv 0, \quad f(x, y) \equiv 0.$$

§ 13. **Remarque 6.** Les Propositions I, II, III, IV et la Remarque 4 restent vraies lorsque l'on suppose que les inégalités dans lesquelles interviennent les dérivées ou les nombres

dérivés (c'est-à-dire les inégalités (1.4),¹ (3.3), (8.3), (10.1), (10.2), (12.1) et (12.2)) aient lieu pour les points x de l'intervalle $a < x < b$ correspondant à l'épiderme en question à l'exception d'un ensemble *dénombrable* de ceux-ci.

On le démontre facilement en s'appuyant sur un lemme de M. A. Zygmund ⁶⁾ qui fournit une condition suffisante pour qu'une fonction continue soit monotone au sens large.

⁶⁾ Cf. p. ex. S. Saks, *Théorie de l'intégrale* (Warszawa 1933), p. 137. Ce lemme a été appliqué, dans un cas particulier, à l'évaluation des intégrales des équations différentielles par M. Sansone (*Equazioni differenziali nel campo reale*, Bologna 1949, t. II, p. 106). Un théorème bien général sur ce sujet sera publié dans ces Annales par M. J. Szarski.

SUR LES OPÉRATIONS DANS L'ENSEMBLE À 3 ÉLÉMENTS

Par W. SIERPIŃSKI (Warszawa) ¹⁾

Soit E un ensemble donné. On dit qu'on a défini une opération \circ dans l'ensemble E si l'on a fait correspondre à tout système ordonné a, b de deux éléments (distincts ou non) de E un élément c de E . On écrit alors $a \circ b = c$.

Si l'ensemble E est fini, formé de n éléments a_1, a_2, \dots, a_n , on peut, pour chaque opération \circ définie dans E , former une *table* de cette opération contenant n lignes et n colonnes, en écrivant en tête de chaque ligne (colonne) les éléments a_1, a_2, \dots, a_n , et en écrivant à l'intersection de la k -ième ligne et l -ième colonne l'élément $a_k \circ a_l$.

Deux opérations \circ et \odot définies dans un ensemble E sont dites distinctes s'il existe des éléments a et b (distincts ou non) de E , tels que $a \circ b \neq a \odot b$.

On voit sans peine que dans un ensemble E formé de trois éléments a, b, c on a $3^9 = 19683$ opérations distinctes.

On dit qu'une opération \circ définie dans un ensemble E admet dans E une *opération inverse antérieure* $a \cup b$ (respectivement *postérieure* $a \cap b$) s'il existe pour tout système a, b d'éléments (distincts ou non) de E un et un seul élément x de E tel que $x \circ b = a$ (respectivement tel que $b \circ x = a$).

On démontre sans peine que pour qu'il existe pour une opération donnée \circ définie dans un ensemble $E = \{a_1, a_2, \dots\}$ une opération inverse antérieure (postérieure), il faut et il suffit que chaque colonne (ligne) de la table de cette opération contient chaque élément de E une et une seule fois, autrement dit, que chaque colonne (ligne) de la table d'opération soit une permutation de la suite a_1, a_2, \dots . On en déduit tout de

¹⁾ Présenté à la séance de la Société Polonaise de Mathématique, Section de Varsovie, le 13 août 1950.

suite qu'il existe dans un ensemble fini E à n éléments $(n!)^n$ opérations distinctes dont chacune admet une opération inverse antérieure, et le même est pour l'opération inverse postérieure.

Il existe donc $3!^3 = 216$ opérations distinctes dans l'ensemble à 3 éléments dont chacune admet une opération inverse antérieure, et 216 opérations distinctes dont chacune admet une opération inverse postérieure.

Nous déterminerons maintenant combien il y a dans un ensemble à 3 éléments d'opérations distinctes dont chacune admet toutes les deux opérations inverses (antérieure et postérieure).

Soit donc \circ une opération dans l'ensemble à 3 éléments, $E = \{a, b, c\}$, qui admet toutes les deux opérations inverses. Chaque ligne et chaque colonne de la table de cette opération est donc une permutation d'éléments a, b, c . Soit p, q, r la première ligne de notre table: p, q, r est donc une permutation d'éléments a, b, c . La première colonne de notre table est une permutation d'éléments p, q, r , et, comme p est le premier élément de cette colonne, le second peut être seulement q ou r . Distinguons deux cas.

1) Dans la deuxième ligne et la première colonne se trouve l'élément q , et

2) Dans la deuxième ligne et la première colonne se trouve l'élément r .

Dans le cas 1) l'élément qui se trouve dans la deuxième ligne et la deuxième colonne ne peut pas être q , vu que q se trouve déjà dans cette ligne. Il ne peut pas être non plus p , puisque dans ce cas l'élément de la deuxième ligne et de la troisième colonne devrait être r , ce qui est impossible, r figurant déjà dans la troisième colonne et première ligne. Donc, dans la deuxième ligne et la deuxième colonne se trouve l'élément r . On en déduit sans peine que la table de notre opération est

	a	b	c
a	p	q	r
b	q	r	p
c	r	p	q

Table I.

Dans le cas 2) dans la deuxième ligne et la deuxième colonne ne peut pas être autre élément que p , puisque l'élément q figure déjà dans la deuxième colonne et l'élément r dans la deuxième ligne. On en trouve sans peine que la table de notre opération est

	a	b	c
a	p	q	r
b	r	p	q
c	q	r	p

Table II.

Dans chaque de ces deux tables on peut prendre comme p, q, r une permutation quelconque d'éléments a, b, c . On obtient ainsi en tout 12 opérations distinctes.

Donc, *il existe seulement 12 opérations distinctes dans l'ensemble à 3 éléments dont chacune admet toutes les deux opérations inverses.*

Une opération \circ dans un ensemble E est dite *commutative* si l'on a pour tous les éléments a et b de E :

$$a \circ b = b \circ a.$$

Comme on voit sans peine, si une opération commutative dans un ensemble E possède dans cet ensemble une au moins des opérations inverses, elle les possède alors toutes les deux qui sont alors égales (mais pas nécessairement commutatives).

La table I étant symétrique par rapport à la diagonale principale, les 6 opérations dans l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ qui en dérivent, sont commutatives. Donc il n'y a que 6 opérations distinctes dans l'ensemble à 3 éléments qui admettent toutes les deux opérations inverses, telles que l'opération inverse antérieure est distincte de l'opération inverse postérieure. Ces 6 opérations dérivent de la table II lorsqu'on y remplace les éléments p, q, r par une permutation quelconque des éléments a, b, c . Leurs tables sont donc respectivement

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>c</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>

Table 1.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>

Table 2.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>
<i>b</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>

Table 3.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i>

Table 4.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>

Table 5.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>

Table 6.

Il résulte sans peine de ces tables que les opérations 1, 4 et 5 sont isomorphes (Pour déduire la table 4 de la table 1 il suffit d'échanger les éléments *a* et *b*, ou bien de remplacer les éléments *a*, *b*, *c* respectivement par *b*, *c*, *a*, et pour déduire la table 5 de la table 1, il suffit d'échanger les éléments *a* et *c* ou bien de remplacer les éléments *a*, *b*, *c* respectivement par *c*, *a*, *b*). D'autre part, les opérations 2, 3 et 6 sont isomorphes (Pour déduire la table 3 de la table 2 il suffit d'échanger *a* et *b*, ou bien de remplacer *a*, *b*, *c* respectivement par *b*, *c*, *a* et pour déduire la table 6 de la table 2, il suffit d'échanger *a* et *c* ou bien de remplacer *a*, *b*, *c* respectivement par *c*, *a*, *b*). Or, les opérations 1 et 2 ne sont pas isomorphes, vu qu'on a $a1x=x$ pour tout élément *x* de *E*, et qu'il n'existe aucun élément *p* de *E* tel qu'on ait $p2x=x$ pour tout élément *x* de *E*.

Il résulte sans peine des tables 1 et 2 que les opérations inverses, antérieure et postérieure, pour les opérations 1 et 2 sont respectivement

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>c</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>

inverse antérieure de 1,

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i>

inverse postérieure de 1

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

inverse antérieure de 2

	a	b	c
a	a	b	c
b	c	a	b
c	b	c	a

inverse postérieure de 2.

(Donc l'opération inverse antérieure de l'opération 1 coïncide avec l'opération inverse postérieure de l'opération 2 et l'opération inverse postérieure de l'opération 1 coïncide avec l'opération inverse antérieure de l'opération 2).

Donc: Parmi les 6 opérations non commutatives dans un ensemble à 3 éléments qui admettent toutes les deux opérations inverses: 1^o il n'y a que deux qui ne sont pas isomorphes et 2^o toujours une des opérations inverses est commutative.

Or, il n'y a que deux opérations distinctes dans l'ensemble à 2 éléments qui admettent toutes les deux opérations inverses. Ces opérations sont commutatives et isomorphes et chacune d'elles coïncide avec son opération inverse. Ce sont les opérations définies respectivement par les tables

	a	b
a	a	b
b	b	a

et

	a	b
a	b	a
b	a	b

Or, il existe dans l'ensemble à 4 éléments, $E = \{a, b, c, d\}$, des opérations qui admettent deux opérations inverses distinctes dont aucune n'est pas commutative. Telle est par exemple l'opération dont la table est

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	a	b
c	b	c	d	a
d	d	a	b	c

Donc: *Le plus petit nombre d'éléments d'un ensemble dans lequel on peut définir une opération qui admet toutes les deux opérations inverses distinctes et non commutatives est 4.*

Quant aux 3^o opérations qu'on peut définir dans l'ensemble à 3 éléments, il est à remarquer qu'il résulte d'un théorème de M. Webb²⁾, déduit d'un résultat de M. Post³⁾ qu'il existe (au moins) une opération \odot dans $E = \{a, b, c\}$, telle que toute opération \ominus dans E s'exprime à l'aide de l'opération \odot .

²⁾ Donald Webb, Amer. Journ. of Math., 58 (1936), p. 193—194; cf. W. Sierpiński, Fund. Math. 33 (1945), p. 172.

³⁾ E. L. Post, Amer. Journ. of Math. 43 (1921), p. 180—181.

REMARQUES SUR LES SÉRIES ENTIÈRES DOUBLES

Par F. LEJA (Kraków)

1. Désignons par R l'espace de deux variables complexes x et y . La distance de deux points x_1, y_1 et x_2, y_2 de R est définie par la formule $\sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$. Nous appelons *distance triangulaire* de ces points la valeur absolue de l'expression

$$\frac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Considérons une série entière double

$$(1) \quad \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu}$$

à coefficients complexes quelconques et appelons *série diagonale* de la série (1) la série simple

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, y) \text{ où } P_n(x, y) = a_{n,0} x^n + a_{n-1,1} x^{n-1} y + \dots + a_{0,n} y^n.$$

Désignons par Δ l'ensemble de points de la convergence absolue de la série (1) et par D celui de la série diagonale (2).

Il est clair que $D \supset \Delta$. On sait que, si l'ensemble D contient un domaine dans l'espace R , l'ensemble Δ en contient un aussi qui est compris dans le précédent.

Soit donnée, dans l'espace R , une courbe C

$$(C) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

qui ne passe pas par l'origine des coordonnées et qui contient au moins deux points de distance triangulaire positive. J'ai dé-

montré ailleurs¹⁾ que, si la série (2) converge (absolument ou non) sur C , ou que la suite $\{P_n(x, y)\}$ est bornée sur C , la série (2) a un domaine de convergence à 4 dimensions qui contient toujours l'origine des coordonnées et, par suite, la série double (1) a aussi un domaine de convergence²⁾.

Désignons par D_C le plus grand domaine de l'espace R dans lequel chaque série (2) converge si elle converge sur la courbe C . D'autre part, désignons par Δ_C le plus grand domaine de convergence de chaque série double dont la série diagonale converge sur C . Cherchons ces domaines dans les cas les plus simples. Il est facile de prouver que:

Si la courbe C est une circonférence définie par les équations

$$(3) \quad x = x_0 + ae^{it}, \quad y = y_0 + be^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

où x_0, y_0, a et b sont des nombres complexes quelconques satisfaisant à la condition

$$d = bx_0 - ay_0 \neq 0,$$

le domaine D_C est défini par les inégalités

$$(4) \quad |bx - ay| < |d|, \quad |y_0x - x_0y| < |d|,$$

et le domaine Δ_C par les suivantes

$$(5) \quad |bx| + |ay| < |d|, \quad |y_0x| + |x_0y| < |d|.$$

En effet, supposons que les termes de la série diagonale (2) satisfassent, sur la circonférence (3), aux inégalités $|P_n(x, y)| \leq M$, $n = 0, 1, \dots$, où M est un nombre fixe³⁾. La transformation

$$x' = bx - ay, \quad y' = y_0x - x_0y$$

change la courbe (3) en la circonférence

$$(6) \quad x' = bx_0 - ay_0 = d, \quad y' = -de^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

¹⁾ Rendic. di Palermo t. 56 (1932), p. 1—27, ou Ann. Soc. Polon. de Math. t. 22 (1949), p. 245—268.

²⁾ Remarquons que, si une série double converge dans le voisinage d'un point x_0, y_0 , elle converge absolument au point x_0, y_0 .

³⁾ Il suffirait de supposer que la suite $\{P_n(x, y)\}$ soit bornée en chaque point de la circonférence (3) mais la démonstration serait alors beaucoup plus longue (cf. premier travail cité dans la remarque 1).

et le polynome $P_n(x, y)$ en un polynome

$$Q_n(x', y') = b_{n,0} x'^n + b_{n-1,1} x'^{n-1} y' + \dots + b_{0,n} y'^n;$$

on a donc $|Q_n(x', y')| \leq M$ sur la circonférence (6) et, par suite, $|Q_n(d, y')| \leq M$ pour $|y'| = |d|$. Il en résulte, d'après les inégalités de Cauchy, que

$$|b_{\mu\nu} d^\mu| \leq \frac{M}{|d|^\nu} \quad \text{pour } \mu + \nu = n = 0, 1, \dots$$

donc, dans le domaine $\{|x'| \leq \theta|d|, |y'| \leq \theta|d|\}$, on a $|b_{\mu\nu} x'^\mu y'^\nu| \leq M\theta^n$ et $|Q_n(x', y')| \leq (n+1)M \cdot \theta^n$ où $\theta > 0$ est quelconque. Par suite, les polynomes $P_n(x, y)$ satisfont, dans le domaine

$$|bx - ay| \leq \theta|d|, \quad |y_0 x - x_0 y| \leq \theta|d|,$$

aux inégalités $|P_n(x, y)| \leq (n+1)M \cdot \theta^n$, $n=0, 1, \dots$, ce qui prouve que la série (2) converge dans le domaine (4).

D'autre part, le domaine (4) ne peut être augmenté car la série diagonale

$$(7) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2\nu-1)^2} \cdot \left(\frac{bx-ay}{d} \right)^{2\nu-1} + \frac{1}{(2\nu)^2} \cdot \left(\frac{y_0 x - x_0 y}{d} \right)^{2\nu} \right\}$$

converge sur la circonférence (3) et diverge en dehors du domaine (4).

Remarquons maintenant que si une série diagonale converge dans le domaine $\{|x| < |x_1|, |y| < |y_1|\}$ — dit *domaine bicerculé* correspondant au point x_1, y_1 — alors la série double correspondante converge aussi dans ce domaine. Or, le domaine (5) est somme des domaines bicerculés correspondants aux points du domaine (4). Par suite le domaine Δ_C est au moins égal au domaine (5). Il n'est pas plus grand, car la série double, correspondant à la série diagonale (7), diverge en dehors du domaine (5).

2. Remarquons que la circonférence (3) est située dans le *plan analytique* défini par l'équation $bx - ay = bx_0 - ay_0$, et que ce plan ne passe pas par l'origine des coordonnées O . Dans le cas, où le plan de la circonférence (3) passe par O , les do-

maines D_C et Δ_C se réduisent aux ensembles vides. Supposons maintenant que la courbe C soit la demi-circonférence

$$(8) \quad x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad 0 \leq t < \pi, \quad r > 0,$$

située dans le *plan réel* de l'espace R qui passe par l'origine des coordonnées. Nous allons prouver que:

Si la série diagonale (2) converge, ou si elle est bornée sur la demi-circonférence (8), le domaine D_C est défini par les inégalités

$$(9) \quad |x + iy| < r, \quad |x - iy| < r$$

et le domaine Δ_C par la seule inégalité

$$(10) \quad |x| + |y| < r.$$

Démonstration. Soit n un nombre entier positif fixe. Considérons, sur la courbe (8), les $n + 1$ points suivants

$$x_k = r \cos t_k, \quad y_k = r \sin t_k, \quad \text{où } t_k = \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

et formons les $n + 1$ polynomes homogènes de degré n que voici,

$$(11) \quad L_n^{(j)}(x, y) = \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^n \frac{y_k x - x_k y}{y_k x_j - x_k y_j}, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Posons

$$e_k = e^{2k\pi i/(n+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Puisque

$$\begin{aligned} y_k x - x_k y &= x r \frac{e^{it_k} - e^{-it_k}}{2i} - y r \frac{e^{it_k} + e^{-it_k}}{2} = \\ &= \frac{r}{2i} [(x - iy) e^{it_k} - (x + iy) e^{-it_k}] \end{aligned}$$

et que

$$y_k x_j - x_k y_j = r^2 \sin(t_k - t_j) = \frac{r^2}{2i} [e^{i(t_k - t_j)} - e^{-i(t_k - t_j)}]$$

il vient

$$|y_k x - x_k y| = \frac{r}{2} |(x + iy) - (x - iy) e_k|$$

et

$$|y_k x_j - x_k y_j| = \frac{r^2}{2} |e_k - e_j|;$$

en désignant par X et Y les expressions

$$X = \frac{x + iy}{r}, \quad Y = \frac{x - iy}{r}$$

on aura donc

$$(12) \quad |L_n^{(j)}(x, y)| = \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^n \left| \frac{X - Y e_k}{e_j - e_k} \right|.$$

Les points e_0, e_1, \dots, e_n sont les sommets du polygone régulier, inscrit dans la circonférence $|z|=1$. Puisque $e_0=1$ et que $z^{n+1}-1=(z-1)(z-e_1)\dots(z-e_n)$, il en résulte

$$(13) \quad \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^n |e_j - e_k| = \prod_{k=1}^n |1 - e_k| = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = n + 1.$$

D'autre part, de l'identité

$$\prod_{k=0}^n (X - Y e_k) = X^{n+1} - Y^{n+1}$$

il suit

$$\prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^n (X - Y e_k) = \sum_{k=0}^n X^{n-k} Y^k e_j^k;$$

donc, dans le domaine défini par les inégalités

$$(14) \quad |x + iy| \leq \theta r, \quad |x - iy| \leq \theta r, \quad \text{où } 0 < \theta < 1,$$

on a

$$\prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^n |X - Y e_k| \leq (n+1) \theta^n$$

et, par suite, les polynômes (11) satisfont, dans le domaine (14), aux inégalités

$$(15) \quad |L_n^{(j)}(x, y)| \leq \theta^n, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Supposons maintenant que les termes de la série diagonale (2) satisfassent, sur la demi-circonférence (8), aux inégalités $|P_n(x, y)| \leq M$, $n=0, 1, \dots$, où M est nombre fixe⁴⁾, et notons qu'on a identiquement

$$P_n(x, y) = \sum_{k=0}^n P_n(x_k, y_k) \cdot L_n^{(k)}(x, y).$$

Il en résulte, d'après (15), que les polynômes $P_n(x, y)$ satisfont, dans le domaine (14), aux inégalités $|P_n(x, y)| \leq (n+1)M \cdot \theta^n$, $n=0, 1, \dots$, donc que la série (2) converge dans le domaine (9). Le domaine D_C , correspondant à la demi-circonférence (8), est ainsi au moins égal au domaine (9). Il n'est pas plus grand car la série diagonale

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2\nu-1)^2} \left(\frac{x+iy}{r} \right)^{2\nu-1} + \frac{1}{(2\nu)^2} \left(\frac{x-iy}{r} \right)^{2\nu} \right\}$$

converge sur la demi-circonférence (8) et diverge en dehors du domaine (9).

Pour prouver que le domaine Δ_C , correspondant à la demi-circonférence (8), est égal au domaine (10) il suffit de répéter le raisonnement de la fin du paragraphe précédent.

⁴⁾ Cf. la remarque ³⁾.

COURBURE ET TORSION GÉODÉSIQUE POUR LES COURBES SITUÉES SUR LES HYPERSURFACES À $n-1$ DIMENSIONS PLONGÉES DANS L'ESPACE À n DIMENSIONS

Par ST. GOŁĄB (Kraków) et T. H. WRÓBEL (Warszawa)

Introduction

Les notions classiques de courbure géodésique, de courbure normale et de torsion géodésique n'ont pas été généralisées jusqu'à présent pour les courbes situées sur les hypersurfaces à plus de deux dimensions. S. Gołab introduisit une méthode qui permit de résoudre ce problème. C'est celle „des n -ièdres distingués" liés à tout point d'une courbe située sur l'hypersurface à $n-1$ dimensions plongée dans l'espace à n dimensions de Riemann V_n .

Dans ce travail nous donnons cette généralisation dans le cas, où l'espace ambiant est euclidien ($V_n = R_n$).

Nous introduisons $(2n-3)$ scalaires, liés à chaque point de la courbe et au champ des n -ièdres „distingués", desquels nous pouvons obtenir, d'une manière simple, certains invariants qui ne dépendent que de la courbe et de l'hypersurface et non du choix des systèmes „distingués".

Nous parvenons ainsi, par la voie analytique, à généraliser les notions de courbure géodésique, de courbure normale et de torsion géodésique.

Le second but du présent travail est la généralisation de quelques interprétations géométriques connues de ces notions.

Des préliminaires analytiques, servant à les déduire, sont réunis et présentés sans démonstrations au § 2. Ces démon-

strations se trouveront dans un travail de T. Wróbel qui paraîtra sous peu et sera consacré aux recherches systématiques des significations des notions géométriques en question. Il contiendra principalement les nouvelles significations géométriques qui ne sont pas une généralisation des notions employées jusqu'à présent.

Les résultats de ce travail ont été présentés brièvement au Congrès des Mathématiciens Polonais et Tchéques à Prague en septembre 1949.

1. Définition analytique de courbure et de torsion géodésique

Soit, dans un espace euclidien à n dimensions R_n , une hypersurface régulière à $(n-1)$ dimensions V_{n-1} , dont la métrique induite en fait un espace riemannien. Considérons une courbe régulière C , située sur l'hypersurface V_{n-1} .

Attachons à chaque point de C un n -ièdre composé de vecteurs-unités mutuellement perpendiculaires (nous dirons „orthonormaux”)

$$(1) \quad \underset{1}{t}, \dots, \underset{n}{t}.$$

Nous conviendrons de prendre pour t_1 le vecteur tangent à C et t_n perpendiculairement à V_{n-1} (conventionnellement orienté); les vecteurs restants:

$$(2) \quad \underset{2}{t}, \dots, \underset{n-1}{t}$$

seront pris arbitrairement, pour le moment, dans l'hyperplan R_{n-1} tangent à V_{n-1} .

En désignant par D le symbole de différentiation par rapport à l'arc s de la courbe C , nous pouvons écrire (en raison de l'indépendance linéaire des vecteurs (1)) les équations:

$$(3) \quad D \underset{i}{t} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \underset{k}{t}.$$

¹⁾ Les indices latins parcourent les valeurs $1, \dots, n$; les indices grecs les valeurs $2, \dots, n-1$.

Les coefficients a_{ik} seront dans ce cas les fonctions (scalaires) d'arc s et vérifieront les relations de symétrie gauche:

$$(4) \quad a_{ik} + a_{ki} = 0 \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Dans le travail $E \cdot B - K$ ²⁾ il a été démontré que l'on peut toujours trouver les systèmes dits „distingués” (2), c'est-à-dire les systèmes pour lesquels ont lieu les relations suivantes

$$(5) \quad a_{\lambda\mu} = 0 \quad \lambda, \mu = 2, \dots, n-1.$$

Le système de vecteurs (2) étant fixé arbitrairement en un point de la courbe C , la condition (5) le détermine univoquement le long de la courbe entière C .

Supposons que le système (1) soit un système distingué et posons, pour abrégé,

$$(6) \quad \begin{cases} a_\lambda = a_{1\lambda} \\ \beta_\lambda = a_{\lambda n} \\ \gamma = a_{1n} \end{cases}$$

Les équations (3), en tenant compte de ces abreviations, peuvent être réécrites sous la forme:

$$(7) \quad \begin{cases} D\mathbf{t}_1 = \sum_\lambda a_\lambda \mathbf{t}_\lambda + \gamma \mathbf{t}_n \\ D\mathbf{t}_\mu = -a_\mu \mathbf{t}_1 + \beta_\mu \mathbf{t}_n \\ D\mathbf{t}_n = -\gamma \mathbf{t}_1 - \sum_\lambda \beta_\lambda \mathbf{t}_\lambda \end{cases} \quad \mu = 2, \dots, n-1.$$

Les scalaires (6) peuvent être appelés „courbures hyper-superficielles” de la courbe C . Ces courbures ne sont pas, cependant, des invariants absolus puisqu'il y a une infinité de systèmes distingués.

Il a été démontré dans le travail $E \cdot B - K$ que, si l'on passe d'un système distingué à un autre, seul le scalaire γ reste un invariant absolu. Par contre, a_λ et β_λ se transforment comme les composantes des vecteurs contravariants de l'espace $(n-2)$ -dimensionnel pour un groupe de transformations orthogonales.

²⁾ Nous désignons par cette abréviation le travail de S. Gołab, *Généralisation des équations de Bonnet-Kowalewski dans l'espace à un nombre arbitraire des dimensions*, ces Annales XXII (1949), p. 97—156.

Il en résulte en particulier que les grandeurs

$$(8) \quad \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\sum_{\lambda} a_{\lambda}^2} \\ \beta &= \sqrt{\sum_{\lambda} \beta_{\lambda}^2} \end{aligned}$$

sont des invariants absolus. Par raison d'analogie avec le cas, le plus simple, de $n=3$, on peut introduire les dénominations suivantes:

$$(9) \quad \begin{aligned} \alpha &\text{ — courbure géodésique }^3) \\ \gamma &\text{ — courbure normale} \\ \beta &\text{ — torsion géodésique.} \end{aligned}$$

Puisque le vecteur-derivée du vecteur-unité tangent à la courbe C , est *vecteur de courbure*, l'égalité

$$(10) \quad D\mathbf{t} = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} \mathbf{t}_{\lambda} + \gamma \mathbf{t}_n$$

donne la décomposition du vecteur de courbure en une composante $\gamma \mathbf{t}$ le long de la normale à l'hypersurface et une composante $\sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} \mathbf{t}_{\lambda}$ située dans l'hyperplan tangent R_{n-1} . Le scalaire γ (qui peut être positif ou négatif) détermine, par conséquent, la mesure du vecteur de courbure le long de la normale, tandis que le scalaire α représente la longueur de la projection de ce vecteur sur l'hyperplan tangent à l'hypersurface.

A l'aide des invariants scalaires α, β, γ nous pouvons caractériser d'une manière simple certaines courbes situées sur l'hypersurface. Notamment $\alpha=0$ caractérise les *courbes géodésiques*; $\beta=0$ les *lignes de courbure*, et $\gamma=0$ les *lignes asymptotiques* de deuxième ordre.

2. Préliminaires analytiques

La méthode vectorielle appliquée plus bas pour la démonstration des propositions exigeait l'emploi des développements des vecteurs avec le reste de Cauchy-Peano jusqu'au troisième ordre inclusivement.

³⁾ Pour $n=3$ ces dénominations ne concordent pas entièrement avec ceux dans $E \cdot B - K$, où tous les trois scalaires α, β, γ peuvent être négatifs tandis que, d'après (8), $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$.

Soit une courbe régulière C dans l'espace euclidien à n dimensions R_n . Supposons qu'un système orthonormal de vecteurs suffisamment régulier, \mathbf{t}_j ($j=1, \dots, n$) soit déterminé le long de cette courbe. De plus, supposons que, dans ce système, soit déterminé le long de la courbe C un champ vectoriel \mathbf{t} qui posséderait, dans le voisinage d'un point M sur la courbe, les $(m-1)$ dérivées successives. Quant à la dérivée d'ordre m , nous supposons qu'elle existe au point M . Dans ce cas, le champ vectoriel \mathbf{t} peut être représenté, dans le voisinage mentionné par la formule

$$(11) \quad \mathbf{t} = \mathbf{t} + s D\mathbf{t} + \frac{s^2}{2!} D^2\mathbf{t} + \dots + \frac{s^m}{m!} [D^m\mathbf{t} + \mathbf{R}(s)], \text{ où}$$

\mathbf{t} — est le vecteur \mathbf{t} au point M ,

s — désigne l'arc de la courbe, compté à partir du point M , le long duquel nous calculons les dérivées.

$D^k\mathbf{t}$ — désigne la k -ième dérivée du vecteur \mathbf{t} par rapport à l'arc s au point M pour $k=1, 2, \dots, m$.

$\mathbf{R}(s)$ — est un vecteur que nous pouvons, représenter sous la forme

$$(12) \quad \mathbf{R}(s) = \sum_{j=1}^n \omega_j(s) \cdot \mathbf{t}_j$$

Remarquons que $\mathbf{R}(s) \rightarrow \mathbf{R}(0) = \theta$ si $s \rightarrow 0$ ou, ce qui revient au même,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \omega_j(s) = \omega_j(0) = 0 \text{ pour } j=1, \dots, n.$$

I. Développements

1. La formule (11) permet d'obtenir facilement le développement suivant (jusqu'à l'ordre $m=2$)

$$(13) \quad \mathbf{t} = \sigma_1 \cdot \mathbf{t}_1 + \sum_{\lambda} \sigma_{\lambda} \mathbf{t}_{\lambda} + \sigma_n \cdot \mathbf{t}_n,$$

où l'on a posé:

$$(13 \text{ a}) \quad \begin{cases} \sigma_1 = s \{ -\gamma + s [\frac{1}{2} \sum \alpha_{\lambda} \beta_{\lambda} - \frac{1}{2} \gamma' + \zeta_1] \} \\ \sigma_{\lambda} = s \{ -\beta_{\lambda} + s [-\frac{1}{2} \gamma \alpha_{\lambda} - \frac{1}{2} \beta'_{\lambda} + \zeta_{\lambda}] \} \\ \sigma_n = 1 + s^2 [-\frac{1}{2} \gamma^2 - \frac{1}{2} \sum \beta_{\lambda}^2 + \zeta_n], \end{cases}$$

avec $\zeta_i \rightarrow 0$ si $s \rightarrow 0$ pour $i=1, 2, \dots, n$.

2. En désignant par \mathbf{r} le rayon-vecteur de la courbe C , c'est-à-dire le vecteur dont l'origine se trouve à l'origine du système, et l'extrémité au point courant de la courbe ($\overset{\circ}{\mathbf{r}}$ designe $\mathbf{r}(0)$, c'est-à-dire le vecteur \mathbf{r} correspondant à la valeur $s=0$ d'arc de la courbe C) et en le développant jusqu'à l'ordre $m=3$, nous obtenons:

$$(14) \quad \mathbf{r} - \overset{\circ}{\mathbf{r}} = \Delta_1 \cdot \overset{\circ}{\mathbf{t}}_1 + \sum_{\lambda} \Delta_{\lambda} \overset{\circ}{\mathbf{t}}_{\lambda} + \Delta_n \cdot \overset{\circ}{\mathbf{t}}_n$$

pour

$$(14 a) \quad \begin{cases} \Delta_1 = s\{1 + s^2[-\frac{1}{6}\sum \alpha_{\lambda}^2 - \frac{1}{6}\gamma^2 + \eta_1]\} \\ \Delta_{\lambda} = s^2\{\frac{1}{2}\alpha_{\lambda} + s[-\frac{1}{6}\gamma \cdot \beta_{\lambda} + \frac{1}{6}\alpha'_{\lambda} + \eta_{\lambda}]\} \\ \Delta_n = s^2\{\frac{1}{2}\gamma + s[\frac{1}{6}\sum \alpha_{\lambda} \beta_{\lambda} + \frac{1}{6}\gamma' + \eta_n]\}, \end{cases}$$

où $\eta_i \rightarrow 0$ si $s \rightarrow 0$ pour $i=1, 2, \dots, n$.

Le module du vecteur $|\mathbf{r} - \overset{\circ}{\mathbf{r}}|$ est égal

$$(15) \quad |\mathbf{r} - \overset{\circ}{\mathbf{r}}| = |s\{1 - s^2[\frac{1}{24}\sum \alpha_{\lambda}^2 + \frac{1}{24}\gamma^2 + \tau]\}, \quad (\tau \rightarrow 0 \text{ si } s \rightarrow 0).$$

Pour le carré du module, on a la formule

$$(16) \quad |\mathbf{r} - \overset{\circ}{\mathbf{r}}|^2 = s^2\{1 - s^2[\frac{1}{12}\sum \alpha_{\lambda}^2 + \frac{1}{12}\gamma^2 + \tau^*]\}.$$

3. En définissant le vecteur \mathbf{t} comme le verseur du vecteur $\mathbf{r} - \overset{\circ}{\mathbf{r}}$

$$(17) \quad \mathbf{t} \doteq \frac{\mathbf{r} - \overset{\circ}{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} - \overset{\circ}{\mathbf{r}}|}$$

nous obtenons le développement

$$(18) \quad \mathbf{t} = \delta_1 \cdot \overset{\circ}{\mathbf{t}}_1 + \sum_{\lambda} \delta_{\lambda} \overset{\circ}{\mathbf{t}}_{\lambda} + \delta_n \cdot \overset{\circ}{\mathbf{t}}_n,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(18 a) \quad \begin{cases} \delta_1 = 1 + s^2[-\frac{1}{6}\sum \alpha_{\lambda}^2 - \frac{1}{6}\gamma^2 + \theta_1] \\ \delta_{\lambda} = s[\frac{1}{2}\alpha_{\lambda} + \theta_{\lambda}] \\ \delta_n = s[\frac{1}{2}\gamma + \theta_n]. \end{cases} \quad \lambda=2, \dots, n-1$$

Remarquons que $\theta_i \rightarrow 0$ si $s \rightarrow 0$ pour $i=1, 2, \dots, n$. Nous laissons de côté les démonstrations faciles de ces formules. Elles résultent de la formule (7) et le lecteur les trouvera dans le travail de T. Wróbel mentionné dans l'introduction.

II. Lemmes

Pour simplifier les démonstrations, nous reproduisons ici quatre lemmes dont les preuves (sauf celle du lemme 4) seront données dans le travail de T. Wróbel.

Lemmes 1 et 2

- Si
1. $\varepsilon(s) \rightarrow 0$ lorsque $s \rightarrow 0$,
 2. K est une constante arbitraire,
 3. $K^2 + \varepsilon(s) > 0$ pour les s assez proches de zéro,
 4. $|s| < \frac{1}{\sqrt{K^2 + \varepsilon(s)}}$,

alors ont lieu les égalités:

$$(19) \quad \begin{cases} 1. \sqrt{1 - s^2[K^2 + \varepsilon(s)]} = 1 - \frac{1}{2}s^2[K^2 + \Phi(s)] \\ 2. \frac{1}{1 + s^2[K^2 + \varepsilon(s)]} = 1 - s^2[K^2 + \Psi(s)], \end{cases}$$

les fonctions $\Phi(s)$ et $\Psi(s)$ ayant la propriété

$$\Phi(s) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \Psi(s) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad s \rightarrow 0.$$

Lemme 3

Si l'angle $\varphi \in [0, \pi/2)$ est déterminé par l'équation

$$\cos \varphi = 1 - \frac{1}{2}s^2[K^2 + \Theta(s)]$$

et

- 1) $\Theta(s) \rightarrow 0$ lorsque $s \rightarrow 0$,
- 2) K est une constante arbitraire,
- 3) $K^2 + \Theta(s) > 0$,
- 4) $0 < s < \frac{2}{\sqrt{K^2 + \Theta(s)}}$,

on a

$$(20) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{s} = |K|.$$

Projection d'un vecteur sur un hyperplan; angle entre ce vecteur et sa projection

Afin de trouver l'angle que forme un vecteur avec un hyperplan, introduisons les deux définitions suivantes

Définition 1. Nous appellerons projection d'un vecteur V de l'espace R_n sur un hyperplan à m dimensions $\Pi_m (1 \leq m \leq n-1)$ la somme des vecteurs composants du vecteur V , qui sont situés sur l'hyperplan Π_m et que l'on obtient en décomposant le vecteur V , dans un système orthogonal arbitraire, en n vecteurs dont m vecteurs de ce système soient dans l'hyperplan Π_m .

On peut démontrer que cette projection ne dépend pas du choix du système et de la décomposition des vecteurs dans l'hyperplan Π_m .

On peut définir cette projection de la manière équivalente suivante: déplaçons parallèlement le vecteur V de manière que son origine se trouve sur l'hyperplan Π_m . Désignons par B l'extrémité de ce vecteur ainsi déplacé et soit M le point courant de l'hyperplan Π_m . On cherche le minimum de la distance BM . On démontre que ce minimum est atteint pour une seule position M_0 . Le vecteur dont l'extrémité est M_0 et l'origine se confond avec celle du vecteur déplacé est dit projection de V sur l'hyperplan Π_m .

Définition 2. Soit un espace euclidien à n dimensions ($n \geq 3$). On appelle angle entre un vecteur v et un hyperplan à m dimensions $\Pi_m (2 \leq m \leq n-1)$ le seul angle aigu $\varphi (0 \leq \varphi < \pi/2)$ compris entre ce vecteur et sa projection T sur cet hyperplan.

Lemme 4

Dans l'espace euclidien à n -dimensions l'angle φ entre un vecteur unitaire V et un hyperplan à $k+1$ dimensions (où $1 \leq k \leq n-2$), parallèle à k vecteurs orthonormaux $t_i (i=1, 2, \dots, k)$ et à un vecteur unitaire H linéairement indépendant des vecteurs t_i s'exprime par la formule

$$(21) \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{\vartheta}}{\omega},$$

où l'on a posé

$$(22) \quad \begin{cases} \sigma_0 = V \cdot H, & \sigma_i = V \cdot t_i, & \varrho_i = H \cdot t_i, \\ \omega = 1 - \sum \varrho_i^2, & \omega_0 = \sigma_0 - \sum \varrho_i \sigma_i, \\ \omega_i = (\sigma_i - \sigma_0 \varrho_i) + (\varrho_i \sum \sigma_j \varrho_j - \sigma_i \sum \varrho_j^2), \\ \vartheta = \omega_0^2 + 2\omega_0 \sum \omega_i \varrho_i + \sum \omega_i^2. \end{cases}$$

Démonstration. Soient donnés, dans l'espace euclidien à n -dimensions, un vecteur unitaire V , k vecteurs orthonormaux $t(i=1, \dots, k)$, où $1 \leq k \leq n-2$, est un vecteur unitaire H linéairement indépendant des vecteurs t .

Nous cherchons l'angle φ (d'après la définition 2) entre le vecteur V et l'hyperplan à $k+1$ dimensions, formé par les vecteurs H et t .

Désignons l'hyperplan mentionné par $\pi(H, t)$ et introduisons un système arbitraire de l vecteurs N_j ($j=k+1, \dots, n$), où $1 \leq l \leq n-2$ et $l+k=n-1$, jouissant des propriétés suivantes

les vecteurs N_j font un système orthonormal et les vecteurs N_j sont orthogonaux à l'hyperplan π .

Dans le système local des coordonnées H, t, N_j ($i=1, \dots, k, j=k+1, \dots, n$) représentons le vecteur V comme suit

$$(22.1) \quad V = \Omega_0 \cdot H + \sum \Omega_i t + \sum \Omega_j N_j.$$

Ce système étant orthogonal, il s'ensuit que

$$(22.2) \quad V \cdot H = \Omega_0 + \sum \Omega_i (t \cdot H),$$

$$(22.3) \quad V \cdot t = \Omega_0 (H \cdot t) + \Omega_i \quad (i=1, 2, \dots, k).$$

C'est un système de $k+1$ équations linéaires ayant pour inconnues:

$$\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_k.$$

En adoptant les notations

$$(22.4) \quad \varrho_i = H \cdot t, \quad \sigma_0 = V \cdot H, \quad \sigma_i = V \cdot t,$$

nous représentons le système (22.2), (22.3) sous la forme

$$(22.5) \quad \Omega_0 + \sum_1^k \Omega_p \cdot \varrho_p = \sigma_0,$$

$$(22.6) \quad \Omega_0 \cdot \varrho_i + \Omega_i = \sigma_i, \quad (i=1, \dots, k).$$

De (22.6) on obtient

$$(22.7) \quad \Omega_i = \sigma_i - \Omega_0 \varrho_i.$$

Les formules (22.5) et (22.7) nous donnent

$$\Omega_0 + \sum_{p=1}^k (\sigma_p \varrho_p - \Omega_0 \varrho_p^2) = \sigma_0,$$

ou

$$\Omega_0 + \sum \sigma_p \varrho_p - \Omega_0 \sum \varrho_p^2 = \sigma_0.$$

Il s'ensuit que

$$(22.8) \quad \Omega_0 = \frac{\sigma_0 - \sum \sigma_i \varrho_i}{1 - \sum \varrho_i^2} = \frac{\omega_0}{\omega}.$$

Remarque. ϱ_i ($i=1, \dots, k$) sont les coordonnées du vecteur \mathbf{H} qui n'est pas situé dans l'hyperplan $\pi(\mathbf{t})$. Il est évident que $\sum \varrho_i^2$ est inférieur à la longueur du vecteur \mathbf{H} , égale à 1; il en résulte que $\omega = 1 - \sum \varrho_i^2$ est supérieur à zéro.

De (22.7) et (22.8), on déduit

$$(22.9) \quad \Omega_i = \sigma_i - \frac{\sigma_0 - \sum \sigma_p \varrho_p}{1 - \sum \varrho_p^2} \cdot \varrho_i,$$

où l'indice d'addition p parcourt les mêmes valeurs que i . C'est ainsi que

$$(22.10) \quad \Omega_i = \frac{(\sigma_i - \sigma_0 \varrho_i) + (\varrho_i \sum \sigma_p \varrho_p - \sigma_i \sum \varrho_p^2)}{1 - \sum \varrho_p^2} = \frac{\omega_i}{\omega}.$$

La projection du vecteur \mathbf{V} sur l'hyperplan π est le vecteur \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \Omega_0 \cdot \mathbf{H} + \sum \Omega_i \mathbf{t}_i.$$

En vertu de la définition 2, on a

$$\cos \varphi = |\mathbf{T}|.$$

En outre

$$\mathbf{T}^2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = \Omega_0^2 + 2\Omega_0 \sum \Omega_i (\mathbf{H} \cdot \mathbf{t}_i) + \sum \Omega_i^2.$$

D'après les notations (22.8) et (22.10) cette formule prend la forme

$$T^2 = \frac{\omega_0^2 + 2\omega_0 \sum \varrho_i \omega_i + \sum \omega_i^2}{\omega^2} = \frac{\vartheta}{\omega^2}.$$

Il en résulte, en égard à $\omega > 0$, que

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{\vartheta}}{\omega} \quad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. Le lemme 4 se simplifie lorsque le vecteur H est orthogonal à \mathbf{t}_i ($i=1, \dots, k$) et les coefficients du vecteur V sont connus. Nous avons alors immédiatement:

$$\cos \varphi = \sqrt{D_0^2 + \sum D_i^2}.$$

3. Courbure géodésique d'une courbe, courbure de sa projection sur un hyperplan tangent à l'hypersurface

Lemme. Soit une courbe régulière C dans l'espace euclidien à n dimensions et M un de ses points.

Désignons par Π l'hyperplan à $(n-1)$ dimensions passant par le point M et le vecteur tangent à C en ce point. Désignons par \mathbf{p} le vecteur non nul et non parallèle à Π . Désignons encore 1° — par C' la projection, le long de la direction \mathbf{p} , de la courbe C sur l'hyperplan Π , 2° — par \mathbf{v} le vecteur de courbure de la courbe C au point M et par \mathbf{v}^* le vecteur de courbure de la courbe C' au point M , 3° — par \mathbf{v}' la projection du vecteur \mathbf{v} (le long de la direction \mathbf{p}) sur l'hyperplan Π .

Ainsi donc, la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}'$ est que le vecteur \mathbf{v} soit situé dans Π (cas banal) ou que le vecteur \mathbf{p} soit perpendiculaire à la courbe C .

Démonstration. Nous pouvons supposer sans restreindre la généralité du raisonnement que M soit à l'origine du système. Dans ce cas, l'équation de l'hyperplan Π sera

$$(23) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{X} = 0,$$

où \mathbf{a} désigne un vecteur perpendiculaire à Π .

Soit

$$(24) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

l'équation vectorielle de la courbe C , où s désigne l'arc de la courbe C , le point M correspondant à la valeur $s=0$.

Introduisons les notations

$$(25) \quad \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds},$$

et

$$(26) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}.$$

\mathbf{t} est donc le vecteur-unité tangent à C et \mathbf{v} — le vecteur de courbure. Posons pour abrégé

$$(27) \quad \mathring{\mathbf{t}} = \mathbf{t}(0), \quad \mathring{\mathbf{v}} = \mathbf{v}(0), \dots \text{ etc.}$$

Nous avons supposé que Π passe par le vecteur tangent à C au point M . Il s'ensuit que

$$(28) \quad \mathbf{a} \cdot \mathring{\mathbf{t}} = 0.$$

Puisque le vecteur \mathbf{p} n'est pas situé dans Π , on aura l'inégalité

$$(29) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} \neq 0.$$

Si \mathbf{u} est un vecteur arbitraire de l'espace R_n , sa projection \mathbf{u}' sur Π le long de la direction \mathbf{p} est déterminée par l'équation

$$(30) \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}} \cdot \mathbf{p}.$$

Il en résulte, en particulier, que

$$(31) \quad \mathring{\mathbf{v}}' = \mathring{\mathbf{v}} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathring{\mathbf{v}}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}} \cdot \mathbf{p},$$

et que l'équation de la courbe C' sera

$$(32) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}^*(s),$$

où

$$(33) \quad \mathbf{r}^*(s) = \mathbf{r}(s) - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}(s)}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}} \cdot \mathbf{p}.$$

Notons que le paramètre s ne sera plus, en général, un arc pour la courbe C' .

Il faut calculer maintenant $\dot{\mathbf{v}}^*$. Pour cela, nous sera utile la valeur de \mathbf{v}^* . On a

$$(34) \quad \mathbf{v}^* = \frac{d^2 \mathbf{r}^*}{ds^{*2}} = \left(\frac{ds}{ds^*} \right)^2 \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}^*}{ds^2} + \frac{ds}{ds^*} \cdot \frac{d^2 s}{ds^{*2}} \cdot \frac{d\mathbf{r}^*}{ds}.$$

Calculons d'abord

$$(35) \quad \frac{d\mathbf{r}^*}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} - \frac{\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{t} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{t}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}} \cdot \mathbf{p}.$$

De même

$$(36) \quad \frac{d^2 \mathbf{r}^*}{ds^2} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} - \frac{\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}} \cdot \mathbf{p}.$$

Il vient de là, en particulier, en tenant compte de (28) et (31),

$$(37) \quad \left(\frac{d\mathbf{r}^*}{ds} \right)_0 = \dot{\mathbf{t}},$$

$$(38) \quad \left(\frac{d^2 \mathbf{r}^*}{ds^2} \right)_0 = \dot{\mathbf{v}} - \frac{\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}} \cdot \mathbf{p} = \dot{\mathbf{v}}'.$$

Il faut calculer maintenant $\left(\frac{ds^*}{ds} \right)_0$ et $\left(\frac{d^2 s^*}{ds^{*2}} \right)_0$. Or

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}^*}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{r}^*}{ds}}, \quad \text{donc} \quad \left(\frac{ds^*}{ds} \right)_0 = \sqrt{\dot{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{t}}} = 1,$$

puisque \mathbf{t} est vecteur-unité. Il en résulte

$$(39) \quad \left(\frac{ds}{ds^*} \right)_0 = \frac{1}{\left(\frac{ds^*}{ds} \right)_0} = 1.$$

On aura dans la suite

$$(40) \quad \frac{d^2 s^*}{ds^2} = \frac{d}{ds} \sqrt{\frac{d\mathbf{r}^*}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{r}^*}{ds}} = \frac{\frac{d\mathbf{r}^*}{ds} \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}^*}{ds^2}}{\sqrt{\frac{d\mathbf{r}^*}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{r}^*}{ds}}}.$$

De là, en particulier (vu (37) et (38)),

$$(41) \quad \left(\frac{d^2 s^*}{ds^2} \right)_0 = \dot{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{v}}'.$$

Puisque

$$\frac{d^2 s}{ds^{*2}} = - \frac{\frac{d^2 s^*}{ds^2}}{\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^3}, \quad \text{on a}$$

$$(42) \quad \left(\frac{d^2 s}{ds^{*2}} \right)_0 = - \dot{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{v}}'.$$

En substituant (39), (38), (42), (37) dans (31), nous obtenons

$$(43) \quad \dot{\mathbf{v}}^* = \dot{\mathbf{v}}' - (\dot{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{v}}') \cdot \dot{\mathbf{t}}.$$

En raison de (31), nous pouvons écrire

$$(44) \quad (\dot{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{v}}') = \dot{\mathbf{t}} \cdot \left(\dot{\mathbf{v}} - \frac{\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}} \cdot \mathbf{p} \right) = - \frac{\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}} \cdot (\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{p})$$

parce que $\dot{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{v}} = 0$.

Le vecteur $\dot{\mathbf{t}}$ n'étant pas égal à zéro, il résulte, de (43) et (44) que la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$(45) \quad \dot{\mathbf{v}}^* = \dot{\mathbf{v}}'$$

est que

$$(46) \quad (\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \cdot (\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{p}) = 0.$$

Cela donne soit

$$(47) \quad \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{v}} = 0 \quad \text{ou} \quad \dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{p} = 0.$$

La première des éventualités (47) dit que le vecteur de courbure $\dot{\mathbf{v}}$ est situé dans l'hyperplan Π (si $\dot{\mathbf{v}} = 0$, nous pouvons dire aussi que $\dot{\mathbf{v}}$ est dans Π). La seconde exprime que la direction \mathbf{p} doit être perpendiculaire à C . Le lemme est ainsi démontré.

Il en résulte, d'une manière simple la généralisation d'une interprétation classique de courbure géodésique (cf. article de R. von Lilienthal, *Die auf einer Fläche gezo-*

genen Kurven, l'Encyclop. d. mathem. Wissensch. III₃, page 134, § 12,3).

Soit V_{n-1} l'hypersurface régulière à $(n-1)$ dimensions plongée dans R_n , sur laquelle se trouve une courbe régulière donnée C .

Envisageons sur C un point arbitraire M et soit Π l'hyperplan passant par ce point et tangent à V_{n-1} . Désignons par C' la projection orthogonale de C sur le plan Π .

Théorème. *La courbure de la courbe C' au point M est égale à la courbure géodésique de la courbe C en ce point.*

En effet, la première équation des formules généralisées de Bonnet-Kowalewski donne

$$v = \frac{dt}{ds} = \sum a_\mu t + \gamma t_n$$

Les suppositions du lemme sont satisfaites puisque le vecteur t est situé dans Π et la direction de la projection t_n est perpendiculaire à C .

En outre,
$$v' = \sum a_\mu t.$$

Donc
$$|v'| = \sqrt{\sum a_\mu^2} = \alpha.$$

$|v'|$ est, en vertu du lemme, la courbure de la courbe C' au point M . Par cela même la proposition est démontrée.

4. Rayon de courbure géodésique

Pour arriver à la généralisation d'une autre interprétation classique de courbure géodésique (voir l'article de R. von Lilienthal) nous généraliserons auparavant la notion de „figure polaire” pour les courbes situées dans l'espace R_n .

Figure polaire. Soit $\overset{\circ}{M}$ un point fixe sur la courbe régulière C située dans R_n et M un point courant de C dans le voisinage de $\overset{\circ}{M}$. Désignons par Π_{n-1} et $\overset{\circ}{\Pi}_{n-1}$ les hyperplans à $(n-1)$ dimensions passant par M et $\overset{\circ}{M}$ et perpendiculaires à $\underset{1}{t}$ et $\overset{\circ}{\underset{1}{t}}$ respectivement. Ces hyperplans se couperont, en

général, le long d'une figure linéaire Π_{n-2} à $(n-2)$ dimensions, située sur $\overset{\circ}{\Pi}_{n-1}$.

S'il existe la position limite (dans un domaine fini) de cette figure (désignons la par $\overset{\circ}{\Pi}_{n-2}$), nous l'appellerons *figure polaire* de la courbe C au point $\overset{\circ}{M}$.

Conditions d'existence d'une figure polaire et son expression analytique

Les équations des hyperplans Π_{n-1} et $\overset{\circ}{\Pi}_{n-1}$ sont respectivement:

$$(48) \quad \begin{cases} (\mathbf{x} - \overset{\circ}{\mathbf{r}}_1) \overset{\circ}{\mathbf{t}}_1 = 0, \\ (\mathbf{x} - \overset{\circ}{\mathbf{r}}_1) \overset{\circ}{\mathbf{t}}_2 = 0. \end{cases}$$

Pour que le système (48) possède comme solution une figure linéaire à $n-2$ dimensions, il suffit, si M est assez proche de $\overset{\circ}{M}$, que les vecteurs $\overset{\circ}{\mathbf{t}}_1$ et $\overset{\circ}{\mathbf{t}}_2$ soient linéairement indépendants entre eux.

La condition suffisante pour cela est que

$$(49) \quad \left(\frac{d\overset{\circ}{\mathbf{t}}}{ds} \right)_0 \neq \mathbf{0}.$$

Si cette condition est satisfaite, nous pouvons écrire (pour le point $\overset{\circ}{M}$ et les points M assez proches de $\overset{\circ}{M}$)

$$(50) \quad \left(\frac{d\overset{\circ}{\mathbf{t}}}{ds} \right) = \kappa_1 \cdot \overset{\circ}{\mathbf{i}}_2, \quad \kappa_1 > 0.$$

Dans ce cas, non seulement le système (48) a une solution en \mathbf{x} , mais en outre, il y aura une position limite $\overset{\circ}{\Pi}_{n-2}$ de l'ensemble des points communs des hyperplans.

Cette position limite, c'est à dire *figure polaire*, est donc l'ensemble des solutions du système

$$(51) \quad \begin{cases} (\mathbf{x} - \overset{\circ}{\mathbf{r}}_1) \overset{\circ}{\mathbf{t}}_1 = 0, \\ (\mathbf{x} - \overset{\circ}{\mathbf{r}}_1) \overset{\circ}{\mathbf{t}}_2 = 0. \end{cases}$$

⁴⁾ $\overset{\circ}{\mathbf{i}}_2$ est le vecteur normal principal, κ_1 la courbure au point M .

Cela résulte d'ailleurs d'une théorie générale que l'on trouve dans une recherche de R. von Lilienthal dans le cas particulier de $n=3$, et qui peut être facilement généralisée pour un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions.

Rayon de courbure géodésique de la courbe C au point M

Si l'on désigne par $\overset{\circ}{E}_{n-1}$ l'hyperplan tangent à V_{n-1} au point $\overset{\circ}{M}$ de la courbe C située sur V_{n-1} et par $\overset{\circ}{I}_{n-2}$ la figure polaire de la courbe C au point $\overset{\circ}{M}$, alors $\overset{\circ}{I}_{n-2}$ et $\overset{\circ}{E}_{n-1}$ se couperont, en général, suivant une figure à $(n-3)$ dimensions $\overset{\circ}{H}_{n-3}$. Désignons par δ la distance du point $\overset{\circ}{M}$ à $\overset{\circ}{H}_{n-3}$. Nous pouvons appeler le nombre δ *rayon de courbure géodésique de la courbe C au point M*. Cette détermination est justifiée par la proposition suivante:

Proposition. Si $\alpha = \sqrt{\sum \alpha_i^2} > 0$, le nombre δ est égal à $\frac{1}{\alpha}$.

Démonstration. L'équation de la figure polaire est écrite sous (51). L'équation de l'hyperplan $\overset{\circ}{E}_{n-1}$ a la forme

$$(52) \quad (x - \overset{\circ}{r}) \cdot \overset{\circ}{t} = 0.$$

Joignant l'équation (52) aux équations (51), nous obtenons l'équation de l'hyperplan $\overset{\circ}{H}_{n-3}$:

$$(53) \quad \begin{cases} (x - \overset{\circ}{r}) \cdot \overset{\circ}{t} = 0, \\ (x - \overset{\circ}{r}) \cdot \overset{\circ}{i}_1 = 0, \\ (x - \overset{\circ}{r}) \cdot \overset{\circ}{i}_2 = 0, \\ (x - \overset{\circ}{r}) \cdot \overset{\circ}{t} = 0. \end{cases}$$

Puisque $\alpha > 0$ $\overset{\circ}{i}_2$ est linéairement indépendant de $\overset{\circ}{t}$ et puisque $\overset{\circ}{t} \cdot \overset{\circ}{t} = 0$, $\overset{\circ}{i}_1 \cdot \overset{\circ}{t} = 0$, les vecteurs $\overset{\circ}{t}$, $\overset{\circ}{i}_1$, $\overset{\circ}{i}_2$ sont linéairement indépendants entre eux. Il en résulte que le système d'équations (52) représente en effet un objet linéaire à $(n-3)$ — dimensions.

Transformons le système (53) en un système équivalent, en remplaçant la deuxième des équations (53) par une autre. Notamment (puisque $\kappa_1 \neq 0$) l'équation

$$(54) \quad (\mathbf{x} - \mathring{\mathbf{r}}) \cdot \mathring{\mathbf{t}}_2 = 0$$

est équivalente à la suivante

$$(\mathbf{x} - \mathring{\mathbf{r}}) \cdot \frac{d\mathring{\mathbf{t}}}{ds} = 0,$$

c'est-à-dire à l'équation

$$(55) \quad (\mathbf{x} - \mathring{\mathbf{r}}) \left\{ \sum_{\lambda} \mathring{\alpha}_{\lambda} \mathring{\mathbf{t}}_{\lambda} + \mathring{\gamma} \mathring{\mathbf{t}}_n \right\} = 0.$$

Le système composé de la première et de la troisième des équations (53) et de l'équation (55) sera équivalent au système obtenu en remplaçant l'équation (55) par l'équation (56) que l'on obtient en soustrayant membre par membre, de (55), la troisième équation (53) multipliée par $\mathring{\gamma}$

$$(56) \quad (\mathbf{x} - \mathring{\mathbf{r}}) \cdot \sum_{\lambda} \mathring{\alpha}_{\lambda} \mathring{\mathbf{t}}_{\lambda} = 0.$$

Ainsi donc l'équation de la figure \mathring{H}_{n-3} est

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{x} - \mathring{\mathbf{r}}) \cdot \mathring{\mathbf{t}}_1 = 0, \\ \sum_{\lambda} \mathring{\alpha}_{\lambda} (\mathbf{x} - \mathring{\mathbf{r}}) \cdot \mathring{\mathbf{t}}_{\lambda} = 0, \\ (\mathbf{x} - \mathring{\mathbf{r}}) \cdot \mathring{\mathbf{t}}_n = 0. \end{array} \right.$$

Nous allons maintenant trouver la distance du point \mathring{M} à la figure (57) que nous définirons comme le minimum de la distance de \mathring{M} au point courant P situé dans \mathring{H}_{n-3} .

Le vecteur $\mathbf{y} = \overrightarrow{\mathring{M}P} = \mathbf{x} - \mathring{\mathbf{r}}$ vérifie le système d'équations:

$$(58) \quad \mathbf{y} \cdot \mathring{\mathbf{t}}_1 = 0, \quad \sum_{\lambda} \mathbf{y} \cdot \mathring{\alpha}_{\lambda} \mathring{\mathbf{t}}_{\lambda} = 0, \quad \mathbf{y} \cdot \mathring{\mathbf{t}}_n = 0.$$

Pour simplifier les calculs, prenons un système cartésien local en plaçant son origine au point \mathring{M} et en dirigeant

ses axes dans le même sens que celles du système $B-K$ généralisé.

Dans ce cas le vecteur \mathbf{y} , satisfaisant au système (58) aura les composantes

$$(59) \quad \mathbf{y}(0, x_2, \dots, x_{n-1}, 0).$$

Celles-ci seront liées, en raison de la deuxième des équations (58), par la relation:

$$(60) \quad \sum_{\lambda} \overset{\circ}{a}_{\lambda} \cdot x_{\lambda} = 0.$$

La relation (60) établit une liaison effective entre les coordonnées x_{λ} , vu la supposition $\overset{\circ}{a}^2 = \sum_{\lambda} \overset{\circ}{a}_{\lambda}^2 > 0$.

La distance \overline{MP} , c'est-à-dire la longueur du vecteur \mathbf{y} s'exprimera donc par la formule:

$$(61) \quad |\mathbf{y}| = \sqrt{\sum a_{\lambda}^2},$$

d'où

$$(62) \quad |\mathbf{y}|^2 = \sum a_{\lambda}^2.$$

Au lieu de chercher le minimum de $|\mathbf{y}|$, il suffit de chercher le minimum de $|\mathbf{y}|^2$. En appliquant la méthode du facteur indéterminé de Lagrange, nous obtenons facilement

$$\text{Min } |\mathbf{y}|^2 = \frac{1}{\sum \overset{\circ}{a}_{\lambda}^2},$$

d'où

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\sum \overset{\circ}{a}_{\lambda}^2}} = \frac{1}{\overset{\circ}{a}},$$

ce qui démontre la proposition.

5. Généralisation du théorème de Bertrand

Partant de l'interprétation géométrique de torsion géodésique, donnée par J. Bertrand (voir l'article cité de von Lilienthal p. 166), pour les courbes situées sur les surfaces V_2 plongées dans l'espace euclidien à trois dimensions R_3 , désignons par ψ l'angle entre le vecteur \mathbf{t} (normal à la surface au

point M de la courbe) et le plan à deux dimensions Π passant par le vecteur \mathbf{t} (c'est-à-dire le verseur du vecteur $\vec{M\overset{\circ}{M}}$ attaché au point $\overset{\circ}{M}$ de la courbe) et le vecteur $\mathbf{\overset{\circ}{t}}$ (normal à la surface au point $\overset{\circ}{M}$). Soit s — la longueur d'arc entre $\overset{\circ}{M}$ et M .

Théorème généralisé de J. Bertrand

La torsion géodésique de la courbe au point $\overset{\circ}{M}$ est égale à

$$\beta = \sqrt{\sum \beta_n^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi}{s}.$$

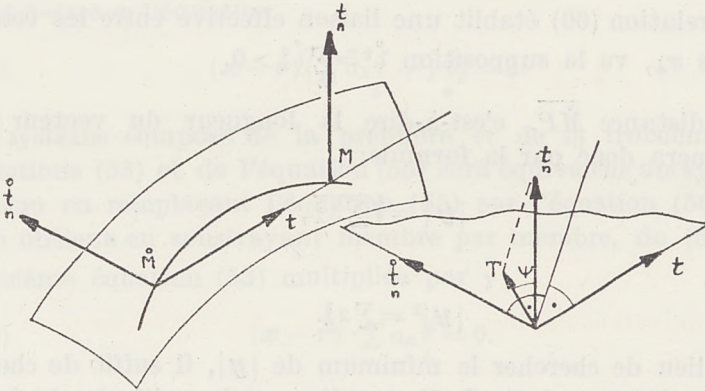


Fig. 1.

Démonstration.

En faisant usage de la notation (17)

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r} - \overset{\circ}{r}}{|\mathbf{r} - \overset{\circ}{r}|}, \text{ où } \mathbf{r} - \overset{\circ}{r} = \vec{M\overset{\circ}{M}},$$

nous pouvons écrire la définition de l'angle ψ sous la forme $\psi = \sphericalangle [\mathbf{t}, \pi(\mathbf{t}, \mathbf{\overset{\circ}{t}})]$, où $\pi(\mathbf{t}, \mathbf{\overset{\circ}{t}})$ désigne le plan à deux dimensions, déterminé par les vecteurs \mathbf{t} et $\mathbf{\overset{\circ}{t}}$.

En appliquant la formule (22) du lemme 4, nous pouvons calculer le cosinus de l'angle ψ . On utilisera pour cela le développement des vecteurs \mathbf{t} (formule (13)) et $\mathbf{\overset{\circ}{t}}$ (formule (18)) en posant, comme dans le lemme

$$\mathbf{V} = \mathbf{t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{\overset{\circ}{t}} \quad \text{et} \quad \mathbf{t} = \mathbf{\overset{\circ}{t}} \quad (k=1).$$

Les coefficients qui figurent dans la formule (22) s'exprimeront comme suit:

$$\begin{cases} \varrho_n = s[\frac{1}{2}\gamma + \dots], \\ \sigma_0 = s[-\frac{1}{2}\gamma + \dots], \\ \sigma_n = 1 + s^2[-\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\sum \beta_\lambda^2 + \dots], \end{cases}$$

où les points remplacent les fonctions d'arc s tendant vers zéro avec s .

De là, on obtient dans la suite

$$\begin{cases} \alpha_0 = s[-\gamma + \dots], \\ \omega = 1 + s^2[-\frac{1}{4}\gamma^2 + \dots], \\ \omega_n = 1 + s^2[-\frac{1}{4}\gamma^2 - \frac{1}{2}\sum \beta_\lambda^2 + \dots]. \end{cases}$$

La longueur de la projection \mathbf{T} du vecteur \mathbf{t} sur le plan Π sera donc

$$(63) \quad |\mathbf{T}| = \frac{\sqrt{1 + s^2[-\frac{1}{2}\gamma^2 - \sum \beta_\lambda^2 + \dots]}}{1 + s^2[-\frac{1}{4}\gamma^2 + \dots]}.$$

L'application du lemme 1 (formule 19₁) au numérateur de (63) donne:

$$(64) \quad 1 + s^2[-\frac{1}{4}\gamma^2 - \frac{1}{2}\sum \beta_\lambda^2 + \dots].$$

L'application du lemme 2 (formule 19₂) à l'inverse du dénominateur conduit à l'expression:

$$(65) \quad 1 + s^2[\frac{1}{4}\gamma^2 + \dots].$$

De là, le produit qui est égal, d'après (21), au cosinus de l'angle cherché, aura la valeur

$$(66) \quad \cos \psi = 1 - \frac{1}{2}s^2[\sum \beta_\lambda^2 + \dots].$$

En appliquant le lemme 3 (formule (20)), on arrive à ce que

$$(67) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi}{s} = \sqrt{\sum \beta_\lambda^2}.$$

Le théorème est ainsi démontré.

6. Généralisation du théorème de Demartres

En utilisant l'idée directrice de l'interprétation géométrique de torsion géodésique donnée par G. Demartres (voir l'article cité de von Lilienthal, p. 167) pour les courbes situées sur V_2 , plongées dans R_3 , envisageons aux points $\overset{\circ}{M}$ et M les hypersphères tangentes aux hypersurfaces et passant par les cercles osculateurs de ces points. Il résultera de notre démonstration que ces hypersphères, existeront si, comme nous le supposons, la courbure normale au point $\overset{\circ}{M}$ sera différente de zéro.

Soit ψ l'angle (d'après la définition (82)) entre ces deux hypersphères.

Ces dernières se couperont certainement si la distance $\overline{\overset{\circ}{M}M}$ sera suffisamment petite. Désignons, comme habituellement, par s la longueur d'arc $\overline{\overset{\circ}{M}M}$. Partant de ces notations, nous pouvons énoncer

Le théorème généralisé de Demartres

La torsion géodésique de la courbe au point $\overset{\circ}{M}$ est égale à

$$\beta = \sqrt{\sum \beta_\lambda^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi}{s}.$$

Démonstration. Désignons par ρ le rayon de l'hypersphère tangente à l'hypersurface au point M et passant par le cercle osculateur au point M de la courbe. Désignons par U et Q les centres respectifs de l'hypersphère et du cercle de courbure. Soit φ l'angle entre la normale à l'hypersurface et le plan osculateur (dans lequel se trouve le cercle de courbure).

Nous constatons que le triangle MUQ est rectangle (Fig. 2).

On obtient alors la relation

$$(68) \quad \rho = \frac{1}{\kappa_1 \cos \varphi},$$

en supposant que $\kappa_1 \neq 0$ (on sait, de la définition de courbure, que $\kappa_1 \geq 0$). Donc $\kappa_1 > 0$ et $\cos \varphi > 0$, c'est-à-dire que

$$(69) \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

La non-disparition du coefficient γ est condition suffisante pour que la première courbure κ_1 de la courbe soit différente de zéro au point M . Il s'ensuit, notamment, des formules généralisées de Frenet et de Bonnet-Kowalewski (voir le travail cité de St. Gołab, formules (60) et (85) p. 112 et 118)

$$(70) \quad D\mathbf{t} = \sum_1 a_\lambda \mathbf{t}_\lambda + \gamma \mathbf{t} \kappa =_1 \mathbf{i}_2,$$

d'où

$$(71) \quad \kappa_1 = \sqrt{\sum a_\lambda^2 + \gamma^2}.$$

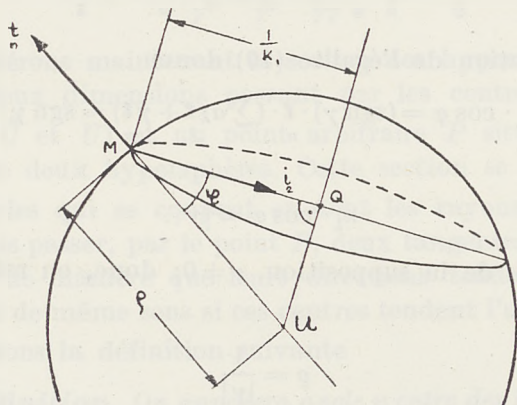


Fig. 2.

L'angle φ est formé par les vecteurs \overrightarrow{MQ} et \overrightarrow{MU} . Le vecteur \overrightarrow{MQ} est égal à $\frac{1}{\kappa_1} \cdot \mathbf{i}_2$; \overrightarrow{MU} dépend de l'orientation du vecteur \mathbf{t}_n et est égal à

$$(72) \quad \overrightarrow{MU} = \varepsilon \rho \cdot \mathbf{t}_n, \quad \text{où } \varepsilon^2 = 1.$$

On déterminera le signe de ε de la condition (69); donc

$$(73) \quad \cos \varphi = \varepsilon \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{i}_2 > 0.$$

En multipliant (73) par $\kappa_1 > 0$, on obtient

$$(74) \quad \varepsilon \cdot \mathbf{t}_n \cdot \kappa_1 \mathbf{i}_2 > 0$$

ce qui donne, à cause de (71),

$$(75) \quad \varepsilon \cdot \mathbf{t} \left(\sum_n a_{2\lambda} \mathbf{t} + \gamma \mathbf{t} \right) > 0,$$

donc

$$(76) \quad \varepsilon = \text{gsn } \gamma.$$

Revenant à la formule (73), calculons l'inverse du rayon de la sphère ϱ exprimé par la formule (68)

$$(77) \quad \frac{1}{\varrho} = \varkappa_1 \cdot \cos \varphi = (\text{sgn } \gamma) \cdot \mathbf{t} \cdot \left(\varkappa_1 \cdot \mathbf{i} \right).$$

L'application de l'égalité (70) donne

$$\varkappa_1 \cdot \cos \varphi = (\text{sgn } \gamma) \cdot \mathbf{t} \cdot \left(\sum_n a_{2\lambda} \mathbf{t} + \gamma \mathbf{t} \right) = \text{sgn } \gamma \cdot \gamma,$$

donc

$$(78) \quad \varkappa_1 \cdot \cos \varphi = |\gamma|.$$

En vertu de la supposition, $\gamma \neq 0$; donc, en raison de (68) on a

$$(79) \quad \varrho = \frac{1}{|\gamma|}.$$

On a dit que $\overset{\circ}{U}$ et U désignent les centres des hypersphères déterminées plus haut (on peut admettre que $s = \widehat{\overset{\circ}{M}M}$ est assez petit pour que γ soit différent de zéro aux points $\overset{\circ}{M}$ et M).

Si l'on désigne par $\overset{\circ}{\gamma}$ et γ les courbures normales aux points $\overset{\circ}{M}$ et M respectivement, le rayon-vecteur des centres des sphères s'exprimera par la formule

$$\overrightarrow{OU} = \mathbf{r} + \overrightarrow{MU} = \mathbf{r} + (\text{sgn } \gamma) \cdot \frac{1}{|\gamma|} \cdot \mathbf{t},$$

donc

$$(80) \quad \begin{cases} \overrightarrow{OU} = \mathbf{r} + \frac{1}{\gamma} \cdot \mathbf{t}, \\ \overrightarrow{OU} = \overset{\circ}{\mathbf{r}} + \frac{1}{\overset{\circ}{\gamma}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{t}}. \end{cases}$$

Dans ce cas, le vecteur $\vec{d} = \vec{U}U$ joignant les centres de deux hypersphères s'exprimera par

$$\vec{d} = (\mathbf{r} - \mathring{\mathbf{r}}) + \left(\frac{1}{\gamma} \cdot \mathbf{t} - \frac{1}{\gamma} \cdot \mathring{\mathbf{t}} \right)$$

et son carré sera égal à

$$(81) \quad \begin{aligned} d^2 = \vec{d} \cdot \vec{d} = (\mathbf{r} - \mathring{\mathbf{r}})^2 + \frac{2}{\gamma\gamma} (\mathbf{r} - \mathring{\mathbf{r}}) \cdot (\gamma \mathbf{t} - \gamma \mathring{\mathbf{t}}) + \\ + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^2} - \frac{2}{\gamma\gamma} (\mathbf{t} \cdot \mathring{\mathbf{t}}). \end{aligned}$$

Considérons maintenant la section des hypersphères par le plan à deux dimensions passant par les centres des hypersphères (\mathring{U} et U) et un point arbitraire P situé sur l'intersection de deux hypersphères. Cette section se composera de deux cercles qui se coupent et dont les rayons sont $\mathring{\rho}$ et ρ .

Faisons passer, par le point P , deux tangentes à ces cercles, orientées de manière que leurs directions tendent à être parallèles et de même sens si ces centres tendent l'un vers l'autre.

Adoptons la définition suivante

(82) *Définition.* On appellera angle ψ entre des hypersphères — l'angle entre les tangentes aux cercles dont il a été question plus haut et que l'on obtient en coupant les sphères par un hyperplan arbitraire à deux dimensions passant par leurs centres.

Il est évident que l'angle ψ est égal à l'angle δ entre les rayons de deux sphères, issus des centres des sphères jusqu'au point commun P de deux cercles (Fig. 3).

L'angle δ qui est opposé au côté d est formé par deux côtés restants ρ et $\mathring{\rho}$. Il en résulte que cet angle est indépendant du choix du point P , et, par suite, l'angle ψ ne dépend pas du choix du plan de la section. La définition donnée plus haut est ainsi justifiée.

En appliquant le théorème de Carnot au triangle $\mathring{U}UP$, on aura

$$(83) \quad \cos \psi = \frac{\rho^2 + \mathring{\rho}^2 - d^2}{2\rho \mathring{\rho}}.$$

Si l'on fait usage des formules (79), (81), (83), on obtient

$$(84) \quad \cos \psi = \frac{\overset{\circ}{\mathbf{t}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{t}}}{n \ n} - \frac{1}{2} \gamma \overset{\circ}{\gamma} (\overset{\circ}{\mathbf{r}} - \overset{\circ}{\mathbf{r}})^2 - (\overset{\circ}{\mathbf{r}} - \overset{\circ}{\mathbf{r}}) \left(\overset{\circ}{\gamma} \overset{\circ}{\mathbf{t}} - \gamma \overset{\circ}{\mathbf{t}} \right).$$

Calculons maintenant le membre droit de la formule (84). Le développement (13) donne

$$\frac{\overset{\circ}{\mathbf{t}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{t}}}{n \ n} = \sigma_n = 1 + s^2 \left[-\frac{1}{2} \overset{\circ}{\gamma}^2 - \frac{1}{2} \sum \overset{\circ}{\beta}_\lambda^2 + \zeta_n \right].$$

En développant γ au moyen du reste de Cauchy-Peano, nous avons

$$(85) \quad \gamma = \overset{\circ}{\gamma} + \omega \quad \text{où} \quad \omega \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad s \rightarrow 0.$$

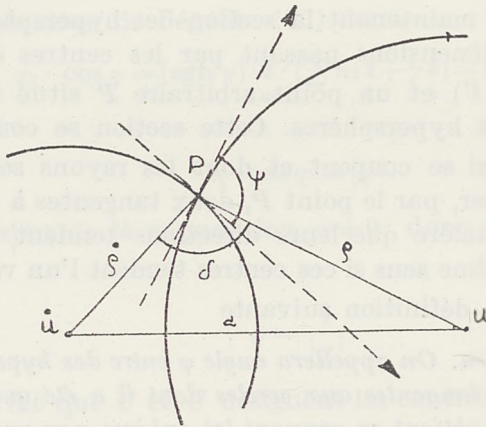


Fig. 3.

En tenant compte du développement (16), on aura

$$\frac{1}{2} \gamma \overset{\circ}{\gamma} (\overset{\circ}{\mathbf{r}} - \overset{\circ}{\mathbf{r}})^2 = s^2 \left[\frac{1}{2} \overset{\circ}{\gamma}^2 + \omega_1 \right] \quad \text{où} \quad \omega_1 \rightarrow 0 \quad \text{avec} \quad s \rightarrow 0.$$

L'application des développements (13) et (85) donne

$$\overset{\circ}{\gamma} \overset{\circ}{\mathbf{t}} - \gamma \overset{\circ}{\mathbf{t}} = s \left[-\overset{\circ}{\gamma}^2 + \mu_1 \right] \cdot \overset{\circ}{\mathbf{t}} + s \sum_{\lambda} \left(-\overset{\circ}{\gamma} \overset{\circ}{\beta}_\lambda + \mu_\lambda \right) \cdot \overset{\circ}{\mathbf{t}} + \left[\overset{\circ}{\gamma} - \gamma + \mu_n \right] \cdot \overset{\circ}{\mathbf{t}},$$

où $\mu_i \rightarrow 0$ si $s \rightarrow 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

En multipliant scalairement la différence $\overset{\circ}{\gamma} \overset{\circ}{\mathbf{t}} - \gamma \overset{\circ}{\mathbf{t}}$ par $(\overset{\circ}{\mathbf{r}} - \overset{\circ}{\mathbf{r}})$, nous obtenons à cause du développement (14)

$$(\overset{\circ}{\mathbf{r}} - \overset{\circ}{\mathbf{r}}) \left(\overset{\circ}{\gamma} \overset{\circ}{\mathbf{t}} - \gamma \overset{\circ}{\mathbf{t}} \right) = s^2 (-\overset{\circ}{\gamma}^2 + \nu), \quad \text{où} \quad \nu \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad s \rightarrow 0.$$

En substituant les résultats obtenus dans la formule (84), on aura finalement

$$(85) \quad \cos \psi = 1 + s^2 \left[-\frac{1}{2} \sum \dot{\beta}_i^2 + \nu_1 \right] \quad \text{où } \nu_1 \rightarrow 0 \text{ lorsque } s \rightarrow 0.$$

L'application du lemme 3 à (85) donne

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi}{s} = \sqrt{\sum \dot{\beta}_i^2} = \dot{\beta}.$$

Le théorème est ainsi démontré.

Państwowy Instytut Matematyczny.

L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA COURBURE ET DE LA TORSION GÉODÉSIQUE À L'AIDE DE LA REPRÉSENTATION HYPERSPHÉRIQUE DE LA COURBE

Par T. H. WRÓBEL (Warszawa)

Le but de cette note est de généraliser le théorème connu de Knoiblauch qui donne une signification géométrique de la torsion géodésique dans l'espace à n -dimensions et de démontrer un théorème analogue concernant l'interprétation géométrique de la courbure géodésique.

Nous nous appuyons dans cette note sur les résultats obtenus par l'auteur et S. Gołąb dans le travail: „Courbure et torsion géodésique pour les courbes situées sur les hypersurfaces à $(n-1)$ -dimensions plongées dans l'espace à n -dimensions” (Ann. Soc. Pol. Math. 24 (1951)) et nous appliquons les notions et les notations du travail cité.

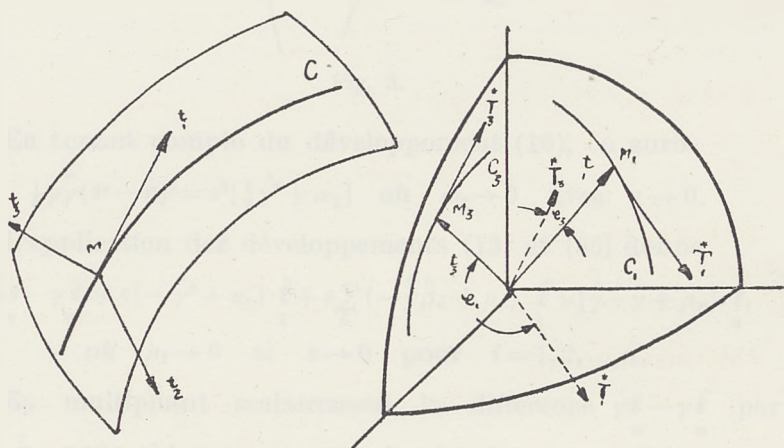


Fig. 1.

(le dessin est fait pour $n=3$).

Soit V_{n-1} une hypersurface régulière plongée dans l'espace euclidien à n -dimensions, C une courbe régulière sur cette hypersurface.

Désignons, pour la courbe C , par κ_1 la courbure première, et par α et β respectivement la courbure et la torsion géodésique, introduites dans le travail cité.

Considérons l'hypersphère unitaire, c'est-à-dire l'ensemble de points dont les distances à un point fixe (par exemple à l'origine du système de coordonnées) sont égales à l'unité.

Désignons par C_1 la projection hypersphérique de la courbe C , obtenue sur cette hypersphère à l'aide des tangentes $(t)_1$ et par C_n celle obtenue à l'aide des normales $(t)_n$ à l'hypersurface.

Désignons ensuite par ω l'angle entre la normale à l'hypersurface $(t)_n$ et la normale principale à la courbe $(i)_2$. Désignons

enfin par φ_1 l'angle entre la tangente à C_1 et la normale $(t)_n$ et par φ_n celui entre la tangente à C_n et la tangente $(t)_1$ à la courbe C .

Ceci étant, nous avons deux théorèmes suivants:

Théorème I. *Si la courbure normale de la courbe est différente de zéro, alors*

$$\alpha = \kappa_1 \cdot \cos \omega \cdot \operatorname{tg} \varphi_1.$$

Théorème II. *Si la courbure normale de la courbe est différente de zéro, alors*

$$\beta = -\kappa_1 \cdot \cos \omega \cdot \operatorname{tg} \varphi_n.$$

Remarque. Le théorème II pour $n=3$ est précisément le théorème de Knoblauch (cf. von Lilienthal: *Die auf einer Fläche gezogenen Kurven*. Enc. d. Math. Wiss. B. III₃, H. 1).

Démonstration.

En tenant compte d'une des formules généralisées de Frenet

$$(1) \quad \frac{di}{ds} = \kappa_1 \cdot i_2,$$

et de celles de Gołąb (les formules généralisées de Bonnet-Kowalewski)

$$(2) \quad \frac{dt}{ds} = \sum a_{\lambda} \cdot t_{\lambda} + \gamma \cdot t_n \quad \lambda=2, \dots, n-1,$$

$$(3) \quad \frac{dt}{ds} = -\gamma \cdot t - \sum \beta_{\lambda} \cdot t_{\lambda}$$

calculons le cosinus de l'angle ω :

$$(4) \quad \begin{aligned} \cos \omega &= i \cdot t = \frac{1}{\kappa_1} \cdot \frac{di}{ds} \cdot t = \\ &= \frac{1}{\kappa_1} \cdot \frac{dt}{ds} \cdot t = \frac{1}{\kappa_1} \cdot \left(\sum a_{\lambda} t_{\lambda} + \gamma \cdot t \right) \cdot t = \frac{\gamma}{\kappa_1}. \end{aligned}$$

Admettons que la courbure normale γ soit différente de zéro, donc, la première courbure

$$(5) \quad \kappa_1 = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}$$

est aussi différente de zéro.

La courbe C_1 étant représentation hypersphérique de la courbe examinée C , obtenue par les tangentes à l'équation:

$$(6) \quad R = t_1$$

le vecteur T_1 tangent à C_1 s'exprime par la formule

$$(7) \quad T_1 = \frac{dR}{ds} = \frac{dt}{ds} = \sum a_{\lambda} t_{\lambda} + \gamma \cdot t_n$$

et le vecteur tangent normalisé $\left(\hat{T}_1 = \frac{T_1}{|T_1|} \right)$ par

$$(8) \quad \hat{T}_1 = \frac{\sum a_{\lambda} \cdot t_{\lambda} + \gamma \cdot t_n}{\sqrt{\sum a_{\lambda}^2 + \gamma^2}}.$$

Il s'ensuit que

$$(9) \quad \cos \varphi_1 = t \cdot \hat{T}_1 = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}$$

vu que

$$(10) \quad \sum a_{\lambda}^2 = \alpha^2$$

et, par conséquent,

$$(11) \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

La courbe C_n étant représentation hypersphérique de la courbe examinée C , obtenue par les normales t_n à l'équation:

$$(12) \quad R = t_n$$

le vecteur T_n tangent à C_n s'exprime par la formule

$$(13) \quad T_n = \frac{dR}{ds} = \frac{dt_n}{ds} = -\gamma \cdot t_1 - \sum \beta_\lambda \cdot t_\lambda$$

et le vecteur tangent normalisé par

$$(14) \quad \overset{*}{T}_n = -\frac{\gamma t_1 + \sum \beta_\lambda \cdot t_\lambda}{\sqrt{\sum \beta_\lambda^2 + \gamma^2}}.$$

Il en résulte que

$$(15) \quad \cos \varphi_n = t_1 \cdot \overset{*}{T}_n = -\frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}$$

vu que

$$(16) \quad \sum \beta_\lambda \stackrel{\text{df}}{=} \beta^2.$$

De la formule (15) nous obtenons

$$(17) \quad \operatorname{tg} \varphi_n = -\frac{\beta}{\gamma}.$$

En vertu des formules prouvées (4), (11) et (17) nous avons

$$(18) \quad \varkappa_1 \cdot \cos \omega \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = \varkappa_1 \cdot \frac{\gamma}{\varkappa_1} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} = \alpha,$$

$$(19) \quad -\varkappa_1 \cdot \cos \omega \cdot \operatorname{tg} \varphi_n = -\varkappa_1 \cdot \frac{\gamma}{\varkappa_1} \cdot \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right) = \beta,$$

ce qui termine la démonstration de nos théorèmes.

SUR LA SOLUTION DE L'ÉQUATION INTÉGRALE DANS LE PROBLÈME DE FOURIER

Par W. POGORZELSKI (Warszawa)

Dans ce travail nous ferons l'étude d'une équation intégrale à laquelle conduit le problème mixte de Fourier pour plusieurs variables spatiales.

Considérons d'abord l'équation de chaleur de la forme

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Le problème mixte de Fourier consiste dans la recherche d'une fonction $u(x, y, t)$ qui satisfait à l'équation (1) en tout point intérieur $M(x, y)$ du domaine D , limité par une courbe fermée C , pour $t > 0$ et qui remplit la relation linéaire donnée

$$(2) \quad \frac{du}{dn} + a(s, t)u + b(s, t) = 0$$

entre la valeur limite de la dérivée normale $\frac{du}{dn}$ et la valeur limite de la fonction u en tout point $P(s)$ de la courbe C déterminé par l'abscisse curviligne s et pour $t > 0$; $a(s, t)$ et $b(s, t)$ sont des fonctions continues et bornées données pour $t > 0$. Nous admettons en outre la condition initiale

$$(3) \quad \begin{cases} u(x, y, t) \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 \end{cases}$$

(x, y) étant à l'intérieur de D ; le cas d'une autre valeur initiale se ramène au cas (3) par addition d'une solution connue. Le problème précédent peut être résolu par une belle méthode

fondée par Holmgren¹⁾, E. Levi²⁾, M. Gevrey³⁾. Cette méthode est basée sur la solution fondamentale

$$(4) \quad \frac{1}{t-\tau} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}}$$

et sur les propriétés des intégrales analogues au potentiel de simple couche et à celui de double couche.

Cherchons notamment la solution $u(M, t)$ du problème mixte sous la forme d'une intégrale

$$(5) \quad u(M, t) = \int_0^t \int_C \frac{1}{t-\tau} e^{-\frac{|MQ|^2}{4(t-\tau)}} \mu(\sigma, \tau) d\sigma d\tau$$

analogue au potentiel de simple couche; $|MQ|$ désigne la distance entre le point $M(x, y)$ et le point $Q(\sigma)$ du contour C ; $\mu(\sigma, \tau)$ est une fonction inconnue, dite densité de la couche, que l'on doit déterminer de façon que la condition limite (2) soit remplie. En supposant que la fonction μ soit continue et que la courbe C admette la tangente dont la direction remplit la condition de Hölder, on peut montrer que si le point M au moment t tend vers le point $P(s)$ du contour C , la dérivée suivant la normale tend vers la valeur limite

$$(6) \quad \left(\frac{du}{dn}\right)_P = +2\pi\mu(s, t) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_C \frac{r_{s\sigma} \cos \varphi_{s\sigma}}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r_{s\sigma}^2}{4(t-\tau)}} \mu(\sigma, \tau) d\sigma d\tau$$

$r_{s\sigma}$ désignant la distance des points $P(s)$ et $Q(\sigma)$ du contour C , $\varphi_{s\sigma}$ désignant l'angle entre le vecteur \overrightarrow{PQ} et la normale intérieure au point $P(s)$.

La condition limite (2) conduit donc à l'équation intégrale suivante

$$(7) \quad 2\pi\mu(s, t) + \int_0^t \int_C \left[\frac{r_{s\sigma} \cos \varphi_{s\sigma}}{2(t-\tau)^2} e^{-\frac{r_{s\sigma}^2}{4(t-\tau)}} + \right. \\ \left. + a(s, t) \frac{1}{t-\tau} e^{-\frac{r_{s\sigma}^2}{4(t-\tau)}} \right] \mu(\sigma, \tau) d\sigma d\tau + b(s, t) = 0$$

avec la fonction inconnue $\mu(s, t)$.

¹⁾ Holmgren, Arkiv för Matematik (1907).

²⁾ E. Levi, Annali di Matematica (1908).

³⁾ M. Gevrey, Journal de Mathématiques (1913).

Nous écrirons l'équation (7) sous la forme

$$(8) \quad \mu(s, t) = f(s, t) + \lambda \int_0^t \int_C N(s, t; \sigma, \tau) \mu(\sigma, \tau) d\sigma d\tau,$$

λ étant un paramètre, les fonctions connues f et N sont définies par les expressions évidentes. Le noyau N de l'équation (8) admet pour $t = \tau$, $s = \sigma$ une singularité assez compliquée.

On cherche comme d'habitude la solution de l'équation (8) sous la forme d'un développement suivant les puissances du paramètre λ :

$$(9) \quad \mu(s, t) = f(s, t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^{\nu} f_{\nu}(s, t).$$

En se bornant à la limitation grossière des intégrales impropres de la forme (7), il n'est pas difficile de montrer la convergence de la série (9) pour les valeurs $|\lambda|$ et les valeurs t suffisamment petites. Mais la preuve de la convergence de la série (9) pour toute valeur de λ et de t entraîne des difficultés à cause de la singularité compliquée de l'équation (8). H. Müntz ⁴⁾ a démontré la convergence de la série de la forme (9) pour toute valeur de λ et de t , mais pour le problème simple de Fourier:

$$\lim_{M \rightarrow P} u(M, t) = \text{fonction donnée de } (s, t)$$

qui conduit à l'équation intégrale avec la singularité analogue à la singularité (7) par l'usage du potentiel de double couche. H. Müntz suppose que la courbe C admette la courbure continue et bornée en tout point.

En 1949 S. Michline (С. Михлин) a démontré dans sa monographie sur les équations intégrales, publiée en langue russe, l'existence de la solution du problème simple de Fourier sous la forme d'une série (9) convergente pour toute valeur de t , mais dans le cas particulier d'une courbe C convexe et λ borné. Les méthodes de Müntz et de Michline ne s'appliquent pas à l'équation intégrale (7) et n'introduisent pas de noyau résolvant.

⁴⁾ H. Müntz, Mathematische Zeitschrift, 1936.

Dans ce travail nous donnerons la preuve de convergence de la solution (9) de l'équation (7) pour toute valeur de λ et de t sous la supposition plus générale que la courbe C admette la tangente en chaque point, dont la direction remplit la condition de Hölder, c.-à-d. que l'angle $\alpha_{s\sigma}$ que font deux tangentes aux points arbitraires (s) et (σ) de la courbe C remplisse l'inégalité

$$|\alpha_{s\sigma}| < k|s - \sigma|^h; \quad (0 < h \leq 1)$$

quelque petit que soit $s - \sigma$; h est une constante dite exposant de Hölder et k une constante déterminée.

Notre méthode et le résultat s'applique de même au problème simple de Fourier traité par M. M. Müntz et Michline. En outre notre méthode permet de préciser la forme du noyau résolvant de l'équation (8), ce qui est important pour le problème non linéaire de Fourier.

Pour résoudre l'équation (8), considérons l'équation itérée de l'équation (8) sous la forme

$$(10) \quad \mu(s, t) = f_1(s, t) + \lambda^2 \int_0^t \int_C M(s, t; \sigma, \tau) \mu(\sigma, \tau) d\sigma d\tau,$$

où l'on a désigné

$$(10') \quad \left\{ \begin{aligned} f_1(s, t) &= f(s, t) + \lambda \int_0^t \int_C N(s, t; \sigma, \tau) f(\sigma, \tau) d\sigma d\tau \\ M(s, t; \sigma, \tau) &= \int_{(C)}^t \int_{(\sigma)}^t N(s, t; \rho, \zeta) N(\rho, \zeta; \sigma, \tau) d\zeta d\rho. \end{aligned} \right.$$

L'équation itérée (10) est équivalente à l'équation (8). Le noyau de l'équation (8) ayant la forme

$$(11) \quad \begin{aligned} N(s, t; \sigma, \tau) &= \frac{1}{2} \frac{\cos \varphi_{s\sigma}}{r_{s\sigma}} \cdot \frac{r_{s\sigma}^2}{(t - \tau)^2} e^{-\frac{r_{s\sigma}^2}{4(t - \tau)}} + \\ &+ a(s, t) \frac{1}{t - \tau} e^{-\frac{r_{s\sigma}^2}{4(t - \tau)}}; \quad (s \neq \sigma; t \neq \tau), \end{aligned}$$

le noyau itéré $M(s, t; \sigma, \tau)$ sera la somme de quatre composants dont le premier aura la forme

$$(12) \quad I(s, t; \sigma, \tau) = \frac{1}{4} \int_C \frac{\cos \varphi_{s\varrho}}{r_{s\varrho}} \frac{\cos \varphi_{\varrho\sigma}}{r_{\varrho\sigma}} \int_{\tau}^t \frac{r_{s\varrho}^2 r_{\varrho\sigma}^2}{(t-\zeta)^2 (\zeta-\tau)^2} e^{-\frac{r_{s\varrho}^2}{(t-\zeta)^2} - \frac{r_{\varrho\sigma}^2}{(\zeta-\tau)^2}} d\zeta d\varrho.$$

(e)

Pour trouver la borne supérieure de cette intégrale, décomposons l'intégrale par rapport à la variable ζ en deux parties suivantes:

$$(13) \quad \int_{\frac{t+\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \frac{r_{s\varrho}^2 r_{\varrho\sigma}^2}{(t-\zeta)^2 (\zeta-\tau)^2} e^{-\frac{r_{s\varrho}^2}{4(t-\zeta)} - \frac{r_{\varrho\sigma}^2}{4(\zeta-\tau)}} d\zeta + \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t \frac{r_{s\varrho}^2 r_{\varrho\sigma}^2}{(t-\zeta)^2 (\zeta-\tau)^2} e^{-\frac{r_{s\varrho}^2}{4(t-\zeta)} - \frac{r_{\varrho\sigma}^2}{4(\zeta-\tau)}} d\zeta.$$

En substituant

$$\frac{r_{\varrho\sigma}^2}{4(\zeta-\tau)} = q$$

nous aurons pour la première partie de la somme (13) l'inégalité

$$(14) \quad \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} \frac{r_{s\varrho}^2 r_{\varrho\sigma}^2}{(t-\zeta)^2 (\zeta-\tau)^2} e^{-\frac{r_{s\varrho}^2}{4(t-\zeta)} - \frac{r_{\varrho\sigma}^2}{4(\zeta-\tau)}} d\zeta < \\ < \frac{r_{s\varrho}^2}{\left(\frac{t-\tau}{2}\right)^2} e^{-\frac{r_{s\varrho}^2}{4(t-\tau)}} \cdot 4 \int_{\frac{r_{\varrho\sigma}^2}{2(t-\tau)}}^{\infty} e^{-q} dq < \frac{16 r_{s\varrho}^2 r_{\varrho\sigma}^2}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r_{s\varrho}^2 + r_{\varrho\sigma}^2}{4(t-\tau)}}.$$

De la même façon nous aurons l'inégalité

$$(15) \quad \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t \frac{r_{s\varrho}^2 r_{\varrho\sigma}^2}{(t-\zeta)^2 (\zeta-\tau)^2} e^{-\frac{r_{s\varrho}^2}{4(t-\zeta)} - \frac{r_{\varrho\sigma}^2}{4(\zeta-\tau)}} d\zeta < \frac{16 r_{\varrho\sigma}^2}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r_{s\varrho}^2 + r_{\varrho\sigma}^2}{4(t-\tau)}}.$$

L'intégrale (12) satisfait donc à l'inégalité

$$(16) \quad |I(s, t; \sigma, \tau)| < 4 \int_C \left| \frac{\cos \varphi_{s\varrho}}{r_{s\varrho}} \right| \cdot \left| \frac{\cos \varphi_{\varrho\sigma}}{r_{\varrho\sigma}} \right| \frac{r_{s\varrho}^2 + r_{\varrho\sigma}^2}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r_{s\varrho}^2 + r_{\varrho\sigma}^2}{4(t-\tau)}} d\varrho.$$

Or, d'après la propriété supposée de la tangente à la courbe C , les rapports

$$\left| \frac{\cos \varphi_{s\sigma}}{r_{s\sigma}^h} \right| ; \quad \left| \frac{\cos \varphi_{\rho\sigma}}{r_{\rho\sigma}^h} \right|$$

restent bornés si $r_{s\sigma} \rightarrow 0$ et $r_{\rho\sigma} \rightarrow 0$ où h est l'exposant d'Hölder donné ($0 < h \leq 1$).

Nous avons donc l'inégalité

$$(17) \quad |I(s, t; \sigma, \tau)| < 4k^2 \int_C \frac{1}{r_{s\sigma}^{1-h} \cdot r_{\rho\sigma}^{1-h}} \frac{r_{s\sigma}^2 + r_{\rho\sigma}^2}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r_{s\sigma}^2 + r_{\rho\sigma}^2}{4(t-\tau)}} d\rho$$

k étant une constante déterminée ($s \neq \sigma$; $t \neq \tau$).

Pour étudier l'intégrale (17) si $s - \sigma \rightarrow 0$ et $t - \tau \rightarrow 0$ posons

$$\frac{r_{s\sigma}^2 + r_{\rho\sigma}^2}{4(t-\tau)} = \beta$$

et remarquons que la fonction $\beta^{1+\frac{2}{3}h} e^{-\beta}$ est bornée dans l'intervalle $(0, \infty)$; on a notamment

$$0 \leq \beta^{1+\frac{2}{3}h} e^{-\beta} \leq \left(1 + \frac{2h}{3}\right)^{1+\frac{2h}{3}} e^{-\left(1+\frac{2h}{3}\right)} = \kappa$$

quel que soit β non négatif. Nous aurons donc, d'après (17)

$$|I(s, t; \sigma, \tau)| < \frac{4^{\frac{2h}{3}+2} k^2 \kappa}{(t-\tau)^{1-\frac{2}{3}h}} \int_C \frac{d\rho}{r_{s\sigma}^{1-h} r_{\rho\sigma}^{1-h} (r_{s\sigma}^2 + r_{\rho\sigma}^2)^{\frac{2h}{3}}}$$

En profitant maintenant de la propriété

$$r_{s\sigma}^2 + r_{\rho\sigma}^2 > 2r_{s\sigma} r_{\rho\sigma}$$

nous arrivons à l'inégalité

$$|I(s, t; \sigma, \tau)| < \frac{k'}{(t-\tau)^{1-\frac{2h}{3}}} \int_C \frac{d\rho}{r_{s\sigma}^{1-\frac{h}{3}} r_{\rho\sigma}^{1-\frac{h}{3}}}$$

Or on connaît bien dans la théorie des équations intégrales singulières la propriété suivante

$$\int_C \frac{d\rho}{r_{s\rho}^\alpha r_{\rho\sigma}^\beta} < \begin{cases} \text{bornée, si } \alpha + \beta < 1 \\ k_1 |\log r_{s\sigma}| + k_2, \text{ si } \alpha + \beta = 1 \\ \frac{k'_1}{r_{s\sigma}^{\alpha+\beta-2}}, \text{ si } \alpha + \beta > 1. \end{cases}$$

k_1, k_2, k'_1 , étant des constantes déterminées.

L'intégrale étudiée I vérifie donc l'inégalité

$$(18) \quad |I(s, t; \sigma, \tau)| < \frac{q}{(t-\tau)^{1-\frac{2h}{3}}} \cdot \frac{1}{r_{s\sigma}^{1-\frac{2}{3}h}},$$

q est une constante ($0 < h \leq 1$).

Les autres composants du noyau itéré (10) seront étudiés plus loin dans l'espace à n dimensions et nous verrons que leurs bornes ne sont pas supérieures. Nous en concluons que le noyau itéré M admet la limitation suivante:

$$(19) \quad |M(s, t; \sigma, \tau)| < \frac{q_1}{(t-\tau)^{1-\frac{2h}{3}}} \cdot \frac{1}{r_{s\sigma}^{1-\frac{2h}{3}}}$$

q_1 étant une constante.

Nous signalons que les fonctions supérieures obtenues dans la limitation (19) ont les singularités *séparées*; cette propriété est importante dans l'étude de la convergence de la série (9).

D'après le raisonnement connu, la solution de l'équation intégrale (10) doit avoir la forme

$$(20) \quad \mu(s, t) = f_1(s, t) + \lambda^2 \int_0^t \int_C \mathfrak{M}(s, t; \sigma, \tau) f_1(\sigma, \tau) d\sigma d\tau$$

où le noyau résolvant \mathfrak{M} est la somme d'une série

$$(21) \quad \mathfrak{M}(s, t; \sigma, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{2m} M_m(s, t; \sigma, \tau)$$

($M_0 = M$) et où les noyaux itérés M_m sont définis par la relation de récurrence

$$(22) \quad M_{m+1}(s, t; \sigma, \tau) = \int_{\tau}^t \int_{\substack{C \\ (\alpha)}} M(s, t; \alpha, \beta) M_m(\alpha, \beta; \sigma, \tau) d\alpha d\beta.$$

Nous allons démontrer que la série (21) est convergente quel que soit λ et pour toute valeur t et τ non négative ($t > \tau > 0$).

Le premier noyau itéré M_1 a la forme

$$(24) \quad M_1(s, t; \sigma, \tau) = \int_{\tau}^t \int_{\substack{C \\ (\alpha)}} M(s, t; \alpha, \beta) M(\alpha, \beta; \sigma, \tau) d\alpha d\beta,$$

donc dans le cas $h=1$ (condition de Lipschitz pour la tangente), d'après la propriété (19), le noyau M_1 et tous les suivants sont évidemment bornés si $r_{s\sigma} \rightarrow 0$ et $t - \tau \rightarrow 0$.

Si $h < 1$, le noyau M_1 n'est pas borné et vérifie l'inégalité

$$(25) \quad |M_1(s, t; \sigma, \tau)| < q_1^2 \int_{\tau}^t \frac{d\beta}{(t-\beta)^{1-\frac{2h}{3}} (\beta-\tau)^{1-\frac{2h}{3}}} \cdot \int_{\substack{C \\ (\alpha)}} \frac{d\alpha}{r_{s\alpha}^{1-\frac{2h}{3}} r_{\alpha\sigma}^{1-\frac{2h}{3}}},$$

d'où il résulte

$$(26) \quad |M_1(s, t; \sigma, \tau)| < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{1-\frac{4}{3}h}} \cdot \frac{1}{r_{s\sigma}^{1-\frac{4}{3}h}}.$$

D'après la formule (22), chaque itération abaisse l'exposant de la différence $t - \tau$ et de la distance $r_{s\sigma}$ au dénominateur du nombre $\frac{2}{3}h$, nous en concluons que les noyaux itérés M_n seront bornés en (t, τ) et (s, σ) à partir d'indice m_0 au plus dépendant d'exposant d'Hölder h de la façon suivante:

$$(27) \quad m_0 = E \left(\frac{3}{2h} \right).$$

Soit P la borne supérieure du noyau M_{m_0} :

$$(28) \quad |M_{m_0}| \leq P.$$

Cherchons les limitations des noyaux bornés suivants. Nous aurons, d'après (22)

$$|M_{m_0+1}(s, t; \sigma, \tau)| < Pq_1 \int_{\tau}^t \frac{d\beta}{(t-\beta)^{1-\frac{2h}{3}}} \cdot \int_{C(\alpha)} \frac{d\alpha}{r_{\alpha\sigma}^{1-\frac{2h}{3}}};$$

mais il existe une constante Q telle que

$$\int_C \frac{d\alpha}{r_{\alpha\sigma}^{1-\frac{2h}{3}}} < Q$$

pour tout point σ , donc

$$(29) \quad |M_{m_0+1}(s, t; \sigma, \tau)| < \frac{3}{2h} PQ_1 (t-\tau)^{\frac{2h}{3}}; \quad (Q_1 = Qq_1)$$

En général, on prévoit que le noyau $M_{m_0+\nu}$, pour ν arbitraire, doit vérifier l'inégalité

$$(30) \quad |M_{m_0+\nu}| < PQ_1^{\nu} \frac{(t-\tau)^{\frac{2h}{3}}}{\kappa_{\nu}},$$

κ_{ν} étant une constante dépendant de ν que nous déterminerons en apercevant que si l'inégalité (30) est vraie, alors d'après (22) le noyau suivant $M_{m_0+\nu+1}$ vérifie l'inégalité

$$\begin{aligned} |M_{m_0+\nu+1}| &< PQ_1^{\nu+1} \frac{(t-\tau)^{\frac{2h}{3}}}{\kappa_{\nu}} \int_0^1 \frac{x^{\nu \frac{2h}{3}} dx}{(1-x)^{1-\frac{2h}{3}}} = \\ &= PQ_1^{\nu+1} \frac{(t-\tau)^{\frac{2h}{3}}}{\kappa_{\nu}} \cdot \frac{\Gamma\left(\nu \frac{2h}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{2h}{3}\right)}{\Gamma\left[(\nu+1) \frac{2h}{3} + 1\right]}, \end{aligned}$$

d'où résulte la relation de récurrence

$$\kappa_{\nu+1} = \kappa_{\nu} \frac{(\nu+1) \Gamma\left[(\nu+1) \frac{2h}{3}\right]}{\nu \Gamma\left(2\nu \frac{h}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2h}{3}\right)}.$$

Nous en concluons par l'induction que les noyaux itérés $M_{m_0+\nu}$ vérifient pour toutes les valeurs naturelles d'indice ν l'inégalité

$$(31) \quad |M_{m_0+\nu}(s, t; \sigma, \tau)| < \frac{3}{2h} P \cdot \frac{1}{\nu} \frac{\left[Q_1 \Gamma\left(\frac{2h}{3}\right) (t-\tau)^{\frac{2h}{3}} \right]^\nu}{\Gamma\left(\nu \frac{2h}{3}\right)}$$

($\nu = 1, 2, 3, \dots$).

La présence du dénominateur $\Gamma\left(\nu \frac{2h}{3}\right)$ dans cette inégalité fondamentale assure donc la convergence absolue (et uniforme dans l'intervalle arbitraire) de la série (21) pour toute valeur de λ et de $t - \tau > 0$ (en négligeant les termes non bornés jusqu'à l'indice m_0 au plus).

La formule (20) présente donc la solution unique de l'équation intégrale donnée (8) pour toute valeur du temps $t > 0$ et pour toute valeur du paramètre λ .

Problème dans l'espace à n dimensions

Le problème de Fourier dans l'espace à n dimensions pour l'équation parabolique d'une forme très générale

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n a_{\mu\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - b \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^n c_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} + d \cdot u = f$$

était traité par M. Gevrey (Comptes Rendus, Paris 1932). Mais la discussion du développement de la solution de l'équation intégrale, à laquelle conduit le problème, n'était pas faite. Nous voulons maintenant étudier le développement de la solution de l'équation intégrale à laquelle conduit le problème mixte de Fourier dans le cas de l'équation de chaleur dans l'espace à n dimensions⁵⁾ ($n > 2$) sous la forme

$$(32) \quad \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

⁵⁾ En 1938 A. Tychonoff, (Bulletin de l'Université de Moscou, vol. 1), a traité le problème simple de Fourier dans le cas $n=3$ avec la discussion du développement de la solution, mais par une méthode différente de la notre.

On cherche une fonction $u(M, t)$ qui en tout point intérieur $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ du domaine D dans l'espace à n dimensions, limité par une hypersurface fermée S , satisfait pour $t > 0$, à l'équation (32) et qui en tout point P de l'hypersurface S (pour $t > 0$) remplit la relation linéaire

$$(33) \quad \left(\frac{du}{dN} \right)_P + a(P, t) u_p + b(P, t) = 0$$

entre les valeurs limites de la dérivée normale $\frac{du}{dN}$ et de u .

On suppose que $a(P, t)$ et $b(P, t)$ soient les fonctions continues données sur la surface S et pour $t > 0$. Nous admettons comme précédemment la condition initiale

$$(34) \quad \begin{cases} u(M, t) \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 \end{cases}$$

M étant un point intérieur du domaine D .

Nous précisons d'abord les propriétés admises pour l'hypersurface S . Soit donc le système de n axes rectangulaires $P\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$ dont l'axe $P\xi_1$ est normale à la surface S au point P et les axes $P\xi_2, P\xi_3, \dots, P\xi_n$ sont situés dans l'hyperplan tangent à la surface S au point P . Nous admettons que pour tout point P de la surface S il existe une portion suffisamment petite de cette surface contenant le point P , telle que la projection $Q'(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$ du chaque point Q de la portion Ω sur le plan tangent en P ne correspond qu'à un point Q de la portion Ω et que la coordonnée ξ_1 du point Q de la portion Ω est une fonction des coordonnées $(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$ qui possède les dérivées premières remplissant la condition de Hölder:

$$(35) \quad \left| \xi'_{1\xi_\alpha}(\xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}) - \xi'_{1\xi_\alpha}(\xi_2^{(2)}, \xi_3^{(2)}, \dots, \xi_n^{(2)}) \right| < k \sum_{\nu=2}^n \left| \xi_\nu^{(1)} - \xi_\nu^{(2)} \right|^h$$

($\alpha = 2, 3, \dots, n$) ($0 < h \leq 1$).

Nous cherchons la solution sous la forme d'une intégrale

$$(36) \quad u(M, t) = \int_0^t \int_S \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|MQ|^2}{4(t-\tau)}} \mu(Q, \tau) d\sigma_Q d\tau$$

$\mu(Q, \tau)$ étant la fonction inconnue sur la surface S pour $t > 0$, MQ — la distance des points M et Q , $d\sigma_Q$ — l'élément d'aire de la surface S au point Q .

En exigeant que l'intégrale (36) remplisse la condition (33) aux limites, on arrive à l'équation intégrale

$$(37) \quad \mu(P, t) = f(P, t) + \lambda \int_0^t \int_S N(P, t; Q, \tau) \mu(Q, \tau) d\sigma_Q d\tau$$

avec la fonction inconnue μ du point P de la surface S et du temps t supposée continue, f désigne la fonction continue donnée, λ un paramètre. Le noyau de l'équation (37) est donnée par l'expression

$$(38) \quad N(P, t; Q, \tau) = \frac{1}{2} \frac{\cos \varphi_{PQ}}{r_{PQ}^{n-1}} \frac{r_{PQ}^n}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}+1}} e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4(t-\tau)}} + \\ + a(P, t) \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4(t-\tau)}}$$

r_{PQ} désignant la distance des points P et Q de la surface S , φ_{PQ} — l'angle que fait le vecteur \overrightarrow{PQ} avec la normale intérieure à la surface S au point P .

Nous signalons que par un changement de la variable d'intégration on peut mettre l'intégrale du premier terme de la somme (38) sous la forme

$$(39) \quad 2^{n+2} \int_S \frac{\cos \varphi_{PQ}}{r_{PQ}^{n-1}} \left[\int_0^\infty q^{n+1} e^{-q^2} \mu \left(Q, t - \frac{r_{PQ}^2}{4q^2} \right) dq \right] \frac{r_{PQ}}{2\sqrt{t}} d\sigma_Q$$

mais, d'après la condition d'Hölder (35), admise pour la surface S , on a

$$(40) \quad |\cos \varphi_{PQ}| < k_1 r_{PQ}^h$$

(k_1 une constante et $0 < h \leq 1$), donc l'intégrale impropre (39) est absolument convergente et a un sens déterminé pour la fonction μ continue et pour $t > 0$. La même remarque est vraie pour la seconde partie de l'intégrale de la fonction (38).

Nous résolvons l'équation (37) par une méthode analogue à celle appliquée précédemment. Considérons donc l'équation itérée équivalente à l'équation (37):

$$(41) \quad \mu(P, t) = f_1(P, t) + \lambda^2 \int_0^t \int_{\substack{S \\ (Q)}} M(P, t; Q, \tau) \mu(Q, \tau) d\sigma_Q d\tau$$

où

$$(42) \quad M(P, t; Q, \tau) = \int_{\substack{S \\ (\Pi)}} \int_{\tau}^t N(P, t; \Pi, \zeta) N(\Pi, \zeta; Q, \tau) d\zeta d_{-\Pi}.$$

Le noyau N ayant la forme (38), nous étudierons le premier composant du noyau (42):

$$(43) \quad \begin{aligned} & I_1(P, t; Q, \tau) = \\ &= \frac{1}{4} \int_{\substack{S \\ (\Pi)}} \frac{\cos \varphi_{P\Pi}}{r_{P\Pi}^{n-1}} \frac{\cos \varphi_{\Pi Q}}{r_{\Pi Q}^{n-1}} \int_{\tau}^t \frac{r_{P\Pi}^n r_{\Pi Q}^n}{(t-\zeta)^{\frac{n}{2}+1} (\zeta-\tau)^{\frac{n}{2}+1}} e^{-\frac{r_{P\Pi}^2}{4(t-\zeta)} - \frac{r_{\Pi Q}^2}{4(\zeta-\tau)}} d\zeta d\sigma_{\Pi} \\ & (P \neq Q). \end{aligned}$$

Pour trouver la limite supérieure de l'intégrale (43), décomposons l'intégrale par rapport à ζ en deux parties étendues aux intervalles $\left(\tau, \frac{t+\tau}{2}\right)$ et $\left(\frac{t+\tau}{2}, t\right)$.

Nous aurons pour la première partie

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} \frac{r_{P\Pi}^n r_{\Pi Q}^n}{(t-\zeta)^{\frac{n}{2}+1} (\zeta-\tau)^{\frac{n}{2}+1}} e^{-\frac{r_{P\Pi}^2}{4(t-\zeta)} - \frac{r_{\Pi Q}^2}{4(\zeta-\tau)}} d\zeta < \\ & < \frac{4^{\frac{n}{2}} r_{P\Pi}^n}{\left(\frac{t-\tau}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}} e^{-\frac{r_{P\Pi}^2}{4(t-\tau)}} \int_{\frac{r_{\Pi Q}^2}{2(t-\tau)}}^{\infty} q^{\frac{n}{2}-1} e^{-q} dq \end{aligned}$$

et l'inégalité analogue pour la seconde partie.

Or la fonction $q^{\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{q}{2}}$ atteint son maximum pour $q = n - 2$, donc

$$q^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{q}{2}} \leq (n-2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{n}{2}+1}; \quad (n > 2)$$

dans l'intervalle $(0, \infty)$. Il en résulte

$$\int_S^\infty q^{\frac{n}{2}-1} e^{-q} dq < (n-2)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}-1} \int_S^\infty e^{-\frac{q}{2}} dq = 2(n-2)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{S}{2}}.$$

Nous obtenons donc l'inégalité

$$\int_\tau^t \frac{r_{P\Pi}^n r_{\Pi Q}^n}{(t-\zeta)^{\frac{n}{2}+1} (\zeta-\tau)^{\frac{n}{2}+1}} e^{-\frac{r_{P\Pi}^2}{4(t-\zeta)} - \frac{r_{\Pi Q}^2}{4(\zeta-\tau)}} d\zeta < \kappa \frac{r_{P\Pi}^n + r_{\Pi Q}^n}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}+1}} e^{-\frac{r_{P\Pi}^2 + r_{\Pi Q}^2}{4(t-\tau)}},$$

où $\kappa = 2^{\frac{3}{2}n+2} (n-2)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}+1}$. En appliquant maintenant la propriété admise (40) de la surface S , nous voyons que l'intégrale (43) remplit l'inégalité suivante:

$$(44) \quad |I_1(P, t; Q, \tau)| < \frac{\kappa_1}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}+1}} \int_{(S)} \frac{r_{P\Pi}^n + r_{\Pi Q}^n}{r_{P\Pi}^{n-h-1} r_{\Pi Q}^{n-h-1}} e^{-\frac{r_{P\Pi}^2 + r_{\Pi Q}^2}{4(t-\tau)}} d\sigma_{\Pi}$$

κ_1 étant une constante.

En profitant de l'inégalité ($a \geq 0$; $b \geq 0$)

$$a^n + b^n \leq (a+b)^n = [(a+b)^2]^{\frac{n}{2}} \leq 2^{\frac{n}{2}} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}},$$

nous pouvons écrire

$$|I_1| < \frac{\kappa_1 2^{\frac{n}{2}}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}+1}} \int_{(S)} \frac{(r_{P\Pi}^2 + r_{\Pi Q}^2)^{\frac{n}{2}}}{r_{P\Pi}^{n-h-1} r_{\Pi Q}^{n-h-1}} e^{-\frac{r_{P\Pi}^2 + r_{\Pi Q}^2}{4(t-\tau)}} d\sigma_{\Pi}.$$

Or la fonction $z^{\frac{n}{2}+\alpha} e^{-z}$ atteint son maximum pour $z = \frac{n}{2} + \alpha$ (α est un nombre positif quelconque), donc

$$z^{\frac{n}{2}+\alpha} e^{-z} \leq \left(\frac{n}{2} + \alpha\right)^{\frac{n}{2}+\alpha} e^{-\frac{n}{2}-\alpha} = \kappa_2$$

dans l'intervalle $(0, \infty)$, nous aurons par conséquent

$$(45) \quad |I_1| < \frac{\varkappa_1 \varkappa_2 2_2^n}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int_{\substack{S \\ (II)}} \frac{d\sigma_{II}}{r_{PII}^{n-h-1} r_{IIQ}^{n-h-1} (r_{PII}^2 + r_{IIQ}^2)^\alpha} < \\ < \frac{\varkappa_1 \varkappa_2 2_2^n}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int_{\substack{S \\ (II)}} \frac{d\sigma_{II}}{r_{PII}^{n+\alpha-h-1} r_{IIQ}^{n+\alpha-h-1}}.$$

Pour que l'intégrale ait un sens, il faut et il suffit choisir la constante α de façon que $n + \alpha - h - 1 < n - 1$, d'où

$$\alpha < h;$$

en outre nous exigeons avoir

$$1 - \alpha < 1.$$

Prenons donc

$$\alpha = \theta h,$$

θ étant un nombre positif inférieur à l'unité ($\theta < 1$) choisi arbitrairement et nous aurons

$$|I_1(P, t; Q, \tau)| < \frac{\varkappa_1 \varkappa_2 2_2^{n-\theta h}}{(t-\tau)^{1-\theta h}} \int_{\substack{S \\ (II)}} \frac{d\sigma_{II}}{r_{PII}^{n-(1-\theta)h-1} r_{IIQ}^{n-(1-\theta)h-1}}.$$

L'intégrale obtenue est bien connue dans la théorie des équations intégrales et admet la limitation suivante:

$$\int_{\substack{S \\ (II)}} \frac{d\sigma_{II}}{r_{PII}^\beta r_{IIQ}^\gamma} < \frac{\text{const}}{r_{PQ}^{\beta+\gamma-n+1}}; \quad (\beta + \gamma - n + 1 > 0).$$

Nous en concluons que l'intégrale (43) vérifie l'inégalité

$$(46) \quad |I_1(P, t; Q, \tau)| < \frac{\varkappa'}{(t-\tau)^{1-\theta h}} \cdot \frac{1}{r_{PQ}^{n-2(1-\theta)h-1}}$$

\varkappa' étant une constante.

Passons maintenant au second composant du noyau itéré M sous la forme

$$(47) \quad I_2(P, t; Q, \tau) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \int_{\tau}^t \frac{\cos \varphi_{P\Pi} \cdot r_{P\Pi} \cdot a(\pi, \zeta)}{(t-\zeta)^{\frac{n}{2}+1} (\zeta-\tau)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{r_{P\Pi}^2}{4(t-\zeta)} - \frac{r_{PQ}^2}{4(\zeta-\tau)}} d\zeta d\sigma_{\Pi}.$$

D'après la propriété (40), nous avons

$$(48) \quad |I_2| < \bar{\kappa} \int_{\Sigma} \int_{\tau}^t \frac{r_{P\Pi}^{h+1}}{(t-\zeta)^{\frac{n}{2}+1} (\zeta-\tau)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{r_{P\Pi}^2}{4(t-\zeta)} - \frac{r_{PQ}^2}{4(\zeta-\tau)}} d\zeta d\sigma_{\Pi}$$

$\bar{\kappa}$ étant une constante. De même que précédemment nous décomposons l'intégrale par rapport à ζ en deux parties étendues aux intervalles $(\tau, \frac{t+\tau}{2})$ et $(\frac{t+\tau}{2}, t)$ et nous aurons pour la première partie l'inégalité

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} &< \frac{r_{P\Pi}^{h+1}}{\left(\frac{t-\tau}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}} e^{-\frac{r_{P\Pi}^2}{4(t-\tau)}} \cdot \frac{1}{r_{PQ}^{\frac{n-2}{2}}} \int_{\frac{r_{PQ}^2}{2(t-\tau)}}^{\infty} q^{\frac{n}{2}-2} e^{-q} dq < \\ &< \text{const} \frac{r_{P\Pi}^{h+1}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}+1}} e^{-\frac{r_{P\Pi}^2}{4(t-\tau)}} \cdot \frac{1}{r_{PQ}^{\frac{n-2}{2}}} e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4(t-\tau)}} < \\ &< \text{const} \frac{z^{\alpha} e^{-\tau}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}+1-\alpha-\beta}} \cdot \frac{1}{r_{P\Pi}^{2\alpha-\beta-1}} \cdot \frac{v^{\beta} e^{-v}}{r_{PQ}^{n-2+2\beta}}, \end{aligned}$$

α, β étant des constantes positives que nous choisirons de façon que

$$\frac{n}{2} + 1 - \alpha - \beta < 1; \quad 2\alpha - h - 1 < n - 1; \quad n - 2 + 2\beta < n - 1.$$

Nous prenons donc

$$\alpha = \frac{n}{2} + \Theta \frac{h}{2}; \quad \beta = \frac{1}{2} h,$$

Θ étant une constante positive arbitraire inférieure à l'unité et nous aurons

$$\int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{1-\Theta}h} \cdot \frac{1}{r_{PI}^{n-(1-\Theta)h-1}} \cdot \frac{1}{r_{IIQ}^{n-2+h}}.$$

De la même façon nous obtenons pour l'intégrale étendue à la seconde partie $\left(\frac{t+\tau}{2}, t\right)$ l'inégalité

$$\int_{\frac{t+\tau}{2}}^t < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{1-\Theta}h} \cdot \frac{1}{r_{PI}^{n-2(1-\Theta)h-1}} \cdot \frac{1}{r_{IIQ}^{n-2+h}},$$

Θ étant une constante positive, inférieure à l'unité, mais supérieure à $1/2$, choisie arbitrairement. Nous concluons que l'intégrale (48) remplit l'inégalité

$$|I_2| < \frac{\bar{\kappa}'}{(t-\tau)^{1-\Theta}h} \int_{\delta}^{\Pi} \frac{d\delta_{II}}{r_{PI}^{n-(1-\Theta)h-1} r_{IIQ}^{n-2+h}}$$

donc

$$(49) \quad |I_2(P, t; Q, \tau)| < \frac{\bar{\kappa}''}{(t-\tau)^{1-\Theta}h r_{PQ}^{n+\Theta h-2}}$$

$(1/2 < \Theta < 1)$.

Les limitations du troisième et quatrième composant du noyau itéré (42) ne sont pas supérieures, nous concluons donc, d'après les inégalités (46) et (49), que le noyau itéré M vérifie les inégalités suivantes:

$$(50) \quad |M(P, t; Q, \tau)| < \begin{cases} \frac{\bar{\kappa}_1}{(t-\tau)^{1-\Theta}h} \cdot \frac{1}{r_{PQ}^{n+\Theta h-2}} & \left(\text{si } \Theta \leq 2 - \frac{1}{h}\right) \\ \frac{\bar{\kappa}_1}{(t-\tau)^{1-\Theta}h} \cdot \frac{1}{r_{PQ}^{n-2(1-\Theta)h-1}} & \left(\text{si } \Theta \geq 2 - \frac{1}{h}\right) \end{cases}$$

Θ étant le nombre choisi arbitrairement à l'intérieur d'intervalle $(1/2, 1)$, $\bar{\kappa}_1$ — une constante positive choisie de manière que l'inégalité (50) soit vraie si $r_{PQ} \leq 1$ et si $r_{PQ} > 1$.

Le raisonnement qui suit est analogue que dans les cas $n=2$.

Nous aurons notamment la solution de l'équation (41) sous la forme

$$(51) \quad \mu(P, t) = f_1(P, t) + \lambda^2 \int_0^t \int_{(Q)}^S \mathfrak{M}(P, t; Q, \tau) f_1(Q, \tau) d\sigma_Q d\tau$$

où le noyau résolvant est la somme de la série

$$(52) \quad \mathfrak{M}(P, t; Q, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{2m} M_m(P, t; Q, \tau)$$

($M_0 = M$). D'après la relation de récurrence

$$M_m(P, t; Q, \tau) = \int_{\tau}^S \int_{(R)} M(P, t; R, \beta) M_{m-1}(R, \beta; Q, \tau) d\sigma_R d\beta$$

et la limitation (50), chaque itération abaisse l'exposant de $t - \tau$ du nombre Θh et l'exposant de r_{PQ} du nombre

$$-[n + \Theta h - 2 - (n - 1)] = 1 - \Theta h$$

ou bien

$$-[n - 2(1 - \Theta)h - 1 - (n - 1)] = 2(1 - \Theta)h,$$

done les noyaux itérés M_m seront bornés en (t, τ) et (P, Q) à partir d'indice m_0 au plus, suivant

$$(53) \quad \begin{cases} m_0 = E\left(\frac{n-1}{1-\Theta h}\right); & \text{si } \Theta \leq 2 - \frac{1}{h} \\ m_0 = E\left(\frac{n-1}{2(1-\Theta)h}\right); & \text{si } \Theta \geq 2 - \frac{1}{h} \end{cases}$$

$1/2 < \Theta < 1$. Par un raisonnement identique à celui dans le cas $n = 2$ nous concluons que tous les noyaux d'ordre $m > m_0$ vérifient les inégalités:

$$(54) \quad M_{m_0+\nu}(P, t; Q, \tau) < \frac{2}{h} g \frac{1}{\nu} \frac{[g_1 \Gamma(\Theta h) (t - \tau)^{\Theta h}]^\nu}{\Gamma(\nu \Theta h)}$$

$(\nu = 1, 2, 3, \dots),$

g et g_1 étant les bornes supérieures des expressions

$$|M_{m_0}| \leq g; \quad \int_S \frac{d^2 Q}{i P Q} \leq g_1,$$

ζ étant le plus grand de deux nombres $n + \Theta h - 2$ et $n - 2(1 - \Theta)h - 1$.

D'après la limitation (54), la série (52) qui détermine le noyau résolvant est *absolument convergente quel que soit λ et $t - \tau > 0$* ; la convergence est aussi *uniforme* par rapport à toutes les variables dans le domaine S et dans chaque intervalle fini de la variable $|\lambda|$ et des variables $t > \tau > 0$.

Państwowy Instytut Matematyczny.

SUR L'ÉQUATION INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE NON LINÉAIRE À SINGULARITÉ POLAIRE

Par W. POGORZELSKI (Warszawa)

Introduction

Dans ce travail nous étudierons l'équation intégrô-différentielle non linéaire et singulière de la forme

$$(1) \quad \int_0^a N(x, y) F[x, y, \varphi(y), \varphi'(y) \dots \varphi^n(y)] dy = f(x)$$

φ étant la fonction inconnue ($n \geq 1$).

Nous admettons les propriétés suivantes des fonctions données N , F , f .

1. La fonction $N(x, y)$ possède la singularité polaire pour $x = y$ c'est-à-dire la singularité définie par l'expression

$$(2) \quad N(x, y) = M_1(x, y) \cotg \frac{\pi}{a} (x - y) + M_2(x, y)$$

les fonctions M_1 et M_2 étant holomorphes et de période réelle a si les points x et y sont situés dans la bande infinie Γ qui contient l'axe réel.

2. La fonction $F(x, y, u_0, u_1, \dots, u_n)$ de $n + 3$ variables est déterminée et holomorphe si les points x, y sont situés dans la bande Γ et les points u_0, u_1, \dots, u_n dans le domaine

$$(3) \quad |u_\alpha - p_\alpha| \leq q_\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, n)$$

p_α étant les constantes réelles ou complexes et q_α les constantes positives; en outre la fonction F admet la période réelle a par rapport aux variables x et y , la périodicité par rapport aux variables u_α n'est pas nécessaire.

3. La fonction $f(x)$ est déterminée, holomorphe dans la bande Γ et admet la période a . L'intégrale dans l'équation (1) a la valeur principale de Cauchy, c'est-à-dire

$$(4) \quad \int_0^a N(x, y) F \cdot dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{x-\varepsilon} NF dy + \int_{x+\varepsilon}^a NF dy \right]$$

x étant un point intérieur du segment $(0, a)$.

Noyau singulier fermé

Pour la résolution de l'équation proposée (1) nous aurons besoin d'un noyau que nous appellerons *noyau singulier fermé*¹⁾. C'est un noyau $K(x, y)$ de même singularité que le noyau (2) tel que l'équation

$$\int_0^a K(x, y) h(y) dy = 0$$

n'a d'autre solution analytique que la solution banale $h=0$.

Dans un travail qui paraîtra en 1952²⁾ nous avons donné un exemple d'un tel noyau sous la forme

$$(5) \quad K(x, y) = A_0(y) \cotg \frac{\pi}{a} (x-y) + \sum_{\nu=1}^n A_\nu(x) B_\nu(y)$$

A_ν, B_ν étant les fonctions holomorphes dans la bande Γ et admettant la période a . Nous avons notamment montré que le noyau (5) sera fermé si les fonctions A_ν, B_ν remplissent la condition suivante:

$$(6) \quad \det \left| \int_0^a \frac{B_\nu(z)}{a^2 A_0(z)} C_\alpha(z) dz - \delta_{\alpha\nu} \right| \neq 0$$

$$(a, \nu = 0, \dots, n)$$

où l'on a posé

$$B_0 = aA_0; \quad C_0 = 1; \quad C_\nu(z) = \int_0^a A_\nu(y) \cotg \frac{\pi}{a} (z-y) dy + \int_0^a A_\nu(y) dy$$

$$(\nu = 1, 2, 3, \dots, n)$$

$\delta_{\alpha\nu}$ est le symbole de Kronecker.

¹⁾ Voir l'article du même auteur: „Journal de Mathématiques“ 1939.

²⁾ „Prace Matematyczne Fizyczne“, tome XLVIII.

La condition (6) est à la fois nécessaire si entre les fonctions A_1, \dots, A_n n'existe pas une relation de la forme

$$\sum_{\nu=1}^n a_\nu A_\nu(x) = q$$

a_ν et q étant des constantes ne s'annulant pas toutes à la fois.

Transformation de Poincaré d'une intégrale itérée

Notre étude de l'équation (1) aura pour base la transformation importante suivante de l'intégrale itérée, donnée par H. Poincaré³⁾:

$$(7) \quad \begin{aligned} I(x) &= \int_0^a K(x, z) \left[\int_0^a N(z, y) P(z, y) dy \right] dz = \\ &= -\pi^2 R_K(x) R_N(x) P(x, x) + \int_0^a Q(x, y) dy \end{aligned}$$

$R_K(x)$ et $R_N(x)$ désignant les résidus des fonctions $K(x, y)$ et $N(x, y)$ au pôle $y=x$; $P(z, y)$ étant une fonction holomorphe si le point z est située dans la bande Γ et le point y dans une partie H de la bande Γ qui contient le segment $(0, a)$, en outre la fonction P admet la période a par rapport à la variable z ; $Q(x, y)$ est une fonction holomorphe de deux variables dans le voisinage du segment $(0, a)$ qui prend sur ce segment les mêmes valeurs que l'intégrale impropre

$$(8) \quad Q(x, y) = \int_0^a K(x, z) N(z, y) P(z, y) dz$$

(x et y sur $0, a$).

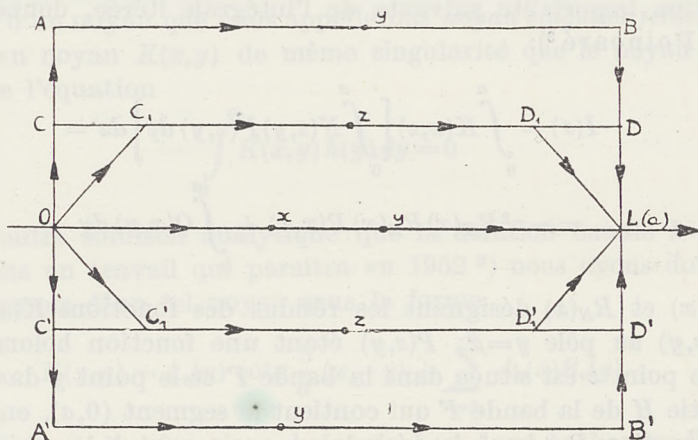
Nous donnerons d'une façon un peu modifiée, la preuve de la transformation (7) et nous en tirerons quelques conséquences concernant les extrémités du segment $(0, a)$.

Soit le rectangle $ABB'A'$ situé dans la partie H de la bande Γ dont les cotés AA' et BB' passent par les extrémités

³⁾ Mécanique Céleste, tome III.

du segment OL d'axe réel et sont perpendiculaires à cet axe. D'après un raisonnement bien connu, la valeur principale de Cauchy le long du segment réel OL est égale à la moitié de la somme des intégrales le long des chemins $OABL$ et $OA'B'L$ embrassant ce segment, nous pouvons donc écrire

$$(9) \quad \int_0^a N(z,y)P(z,y) dy = \frac{1}{2} \int_{OABL} N(z,y)P(z,y) dy + \\ + \frac{1}{2} \int_{OA'B'L} N(z,y)P(z,y) dy = M(z)$$



z étant à l'intérieur du segment OL . Si le point z est un point quelconque à l'intérieur du rectangle $ABB'A'$, la somme des intégrales à droite dans l'égalité (9) sera une fonction holomorphe $M(z)$ qui prend sur le segment réel OL les mêmes valeurs que l'intégrale de Cauchy (9). Nous signalons que le module de la fonction $M(z)$ peut tendre vers l'infinie au plus comme $|\log|z-z_1||$ si le point z tend vers un point z_1 de la frontière du rectangle $OABLB'A'O$.

Le point x étant à l'intérieur du segment OL nous pouvons écrire dans la suite

$$(10) \quad I(x) = \int_0^a K(x,z)M(z) dz = \\ = \frac{1}{2} \int_{OC_1D_1L} K(x,z)M(z) dz + \frac{1}{2} \int_{OC'_1D'_1L} K(x,z)M(z) dz$$

C_1D_1 et $C'_1D'_1$ étant parallèles au segment OL . En remplaçant la fonction $M(z)$ par la somme des intégrales (9), on aura l'intégrale $I(x)$ sous la forme d'une somme de quatre intégrales itérées:

$$I = \frac{1}{4} \int \int_{\substack{OABL(y) \\ OC_1D_1L(z)}} KNP \, dy \, dz + \frac{1}{4} \int \int_{\substack{OABL(y) \\ OC'_1D'_1L(z)}} KNP \, dy \, dz + \\ + \frac{1}{4} \int \int_{\substack{OA'B'L(y) \\ OC_1D_1L(z)}} KNP \, dy \, dz + \frac{1}{4} \int \int_{\substack{OA'B'L(y) \\ OC'_1D'_1L(z)}} KNP \, dy \, dz$$

Or, d'après la théorie des résidus, on a

$$\int_{OABL} NP \, dy = \int_{OL} NP \, dy - 2\pi i R_N(z)P(z, z) \quad (z \text{ sur } C_1D_1)$$

$$\int_{OABL} NP \, dy = \int_{OL} NP \, dy \quad (z \text{ sur } C'_1D'_1)$$

$$\int_{OA'B'L} NP \, dy = \int_{OL} NP \, dy + 2\pi i R_N(z)P(z, z) \quad (z \text{ sur } C'_1D'_1)$$

$$\int_{OA'B'L} NP \, dy = \int_{OL} NP \, dy \quad (z \text{ sur } C_1D_1)$$

Nous aurons donc, en changeant l'ordre d'intégration

$$I(x) = \int_{OL} \left[\frac{1}{2} \int_{OC_1D_1L} K(x, z)N(z, y)P(z, y) \, dz + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{OC'_1D'_1L} K(x, z)N(z, y)P(z, y) \, dz \right] dy + \frac{1}{2} \pi i \int_{OC'_1D'_1LD, C_1O} K(x, z)R_N(z)P(z, z) \, dz.$$

Il en résulte la transformation de Poincaré cherchée

$$I(x) = \int_{OL} Q(x, y) \, dy - \pi^2 R_K(x)R_N(x)P(x, x)$$

$Q(x, y)$ étant une fonction de deux variables

(11)

$$Q(x, y) = \frac{1}{2} \int_{OC_1D_1L} K(x, z)N(z, y)P(z, y) \, dz + \frac{1}{2} \int_{OC'_1D'_1L} K(x, z)N(z, y)P(z, y) \, dz$$

holomorphe dans le domaine embrassé par les chemins d'intégration OC_1D_1L et $OC'_1D'_1L$ et prenant les valeurs de Cauchy (8) sur le segment réel OL .

Supposons maintenant que le point C_1 tende vers le point C du segment OA et le point D_1 vers le point D du segment BL , de même le point C'_1 vers le point C' du segment OA' et le point D'_1 vers le point D' du segment $B'L$. D'après la périodicité supposée des fonctions $K(x, z)$, $N(z, y)$, $P(z, y)$ par rapport à la variable z (la périodicité de la fonction P par rapport à y n'est pas nécessaire) nous avons

$$\int_{oC} K(x, z)N(z, y)P(z, y) dz + \int_{D'L} K(x, z)N(z, y)P(z, y) dz = 0$$

$$\int_{oC'} K(x, z)N(z, y)P(z, y) dz + \int_{D'L} K(x, z)N(z, y)P(z, y) dz = 0$$

donc à la limite nous voyons que la fonction $Q(x, y)$ qui figure dans la transformation de Poincaré est la somme des intégrales suivantes le long des segments CD et $C'D'$:

(12)

$$Q(x, y) = \frac{1}{2} \int_{CD} K(x, z)N(z, y)P(z, y) dz + \frac{1}{2} \int_{C'D'} K(x, z)N(z, y)P(z, y) dz$$

donc cette fonction de deux variables est bien *holomorphe dans un domaine G qui contient à l'intérieur le segment réel OL avec les extrémités et ne contient pas des segments CD et $C'D'$* . La fonction (12) admet dans le domaine G les dérivées de tous les ordres donc aussi aux extrémités du segment OL .

Résolution du problème

Pour résoudre l'équation proposée (1), nous allons la transformer cette équation à l'aide du noyau fermé $K(x, y)$ et de la relation de Poincaré (7). Nous voyons donc que si la fonction $\varphi(y)$ holomorphe au voisinage G du segment $(0, a)$ est

une solution de l'équation (1) elle en sera aussi une de l'équation

$$(13) \quad \int_0^a K(x, z) \left[\int_0^a N(z, y) F(z, y, \varphi'(y) \dots \varphi^{(n)}(y)) dy \right] dz = \\ = \int_0^a K(x, z) f(z) dz = f_1(x)$$

et réciproquement, le noyau $K(x, z)$ étant fermé. D'après la transformation (7) de Poincaré, l'équation (13) est équivalente à l'équation

$$(14) \quad -\pi^2 R_K(x) R_N(x) F(x, x, \varphi(x), \varphi'(x) \dots \varphi^{(n)}(x)) + \\ + \int_0^a \left[\int_0^a K(x, z) N(z, y) F(z, y, \varphi(y), \varphi'(y) \dots \varphi^{(n)}(y)) dz \right] dy = f_1(x).$$

Nous sommes donc conduits à résoudre l'équation intégré-différentielle non linéaire régulière de la forme suivante:

$$(15) \quad \Phi[x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)] = \int_0^a \Psi[x, y, \varphi(y), \varphi'(y) \dots, \varphi^{(n)}(y)] dy$$

où la fonction Φ à $n+2$ variables x, u_0, u_1, \dots, u_n est donnée par l'expression

$$(16) \quad \Phi(x, u_0, u_1, \dots, u_n) = -\pi^2 R_K(x) R_N(x) F(x, x, u_0, u_1, \dots, u_n) \\ - \int_0^a K(x, z) f(z) dz$$

et la fonction Ψ à $n+3$ variables $x, y, u_0, u_1, \dots, u_n$, d'après l'expression (12), est définie par la formule

$$(17) \quad \Psi(x, y, u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{2} \int_{CD+CD'} K(x, z) N(z, y) F(z, y, u_0, u_1, \dots, u_n) dz.$$

D'après nos suppositions concernant les fonctions

$$f(x), \quad K(x, y); \quad N(x, y); \quad F(x, y, u_0, u_1, \dots, u_n)$$

les fonctions Φ et Ψ possèdent les propriétés suivantes.

La fonction $\Phi(x, u_0, u_1, \dots, u_n)$ à $n+2$ variables est définie et holomorphe par rapport à toutes les variables dans le domaine Γ_1 déterminé par les inégalités

$$(18) \quad \Gamma_1 \left\{ \begin{array}{l} |u_\alpha - p_\alpha| \leq q_\alpha; \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, n) \\ x \in \Gamma \end{array} \right.$$

en outre elle admet la période a par rapport à la variable x . Désignons par M_Φ la borne supérieure du module de la fonction Φ dans le domaine Γ_1

$$(19) \quad |\Phi| \leq M_\Phi.$$

Nous supposons en outre que le module de la dérivée Φ'_{u_n} admette dans le domaine Γ_1 la borne inférieure δ plus grande que zéro:

$$(20) \quad |\Phi'_{u_n}(x, u_0, u_1, \dots, u_n)| \geq \delta > 0.$$

La fonction $\Psi(x, y, u_0, u_1, \dots, u_n)$ à $n+3$ variables est définie et holomorphe par rapport à toutes les variables dans le domaine Γ_2

$$(21) \quad \Gamma_2 \left\{ \begin{array}{l} |u_\alpha - p_\alpha| \leq q_\alpha; \quad (\alpha = 0, 1, \dots, n) \\ x \in \Gamma \\ y \in G \end{array} \right.$$

G étant un domaine contenant le segment réel OL avec les extrémités dans son intérieur et ne contenant pas des segments d'intégration CD et $C'D'$; la fonction Ψ admet la période réelle a par rapport à la variable x . Soit M_Ψ la borne supérieure du module de la fonction Ψ dans le domaine Γ_2 :

$$(22) \quad |\Psi| \leq M_\Psi.$$

Nous allons chercher la solution de l'équation (15) en exigeant en outre que la fonction inconnue $\varphi(x)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ prennent les valeurs données

$$(23) \quad \varphi(x_0) = p_0; \quad \varphi^{(\alpha)}(x_0) = p^{(\alpha)}; \quad \alpha = 1, 2, \dots, (n-1)$$

pour une valeur x_0 à l'intérieur d'intervalle $(0, a)$.

Remarquons donc que si la fonction holomorphe $\varphi(x)$ vérifie l'équation (15) elle vérifie aussi l'équation qu'on obtient

en différentiant par rapport à la variable x les deux membres de l'équation (15):

$$(24) \quad \begin{aligned} & \Phi'_x[x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)] + \\ & + \sum_{\alpha=0}^n \Phi'_{u_\alpha}[x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)] \varphi^{(\alpha+1)}(x) = \\ & = \int_0^a \Psi'_x[x, y, \varphi(y), \varphi'(y), \dots, \varphi^{(n)}(y)] dy. \end{aligned}$$

D'après la supposition (20), l'équation (24) est équivalente à l'équation:

$$(25) \quad \varphi^{(n+1)}(x) = \frac{\int_0^a \Psi[x, y, \varphi(y), \dots, \varphi^{(n)}(y)] dy - \Phi'_x(x, \varphi, \dots, \varphi^{(n)}) - \sum_{\alpha=0}^{n+1} \Phi'_{u_\alpha}(x, \varphi, \dots, \varphi^{(n)}) \varphi^{(\alpha+1)}(x)}{\Phi'_{u_n}(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x))}$$

que nous écrirons pour abrégier de la façon suivante

$$(26) \quad \varphi^{(n+1)}(x) = \Omega(x, \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n)})$$

Ω désignant un *opérateur fonctionnel* défini par l'expression (25). L'équation intégré-différentielle (26) est équivalente au système d'équations

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi}{dx} = \psi_1(x); & \frac{d\psi_1}{dx} = \psi_2(x); \dots; & \frac{d\psi_{n-1}}{dx} = \psi_n(x) \\ \frac{d\psi_n}{dx} = \Omega(x, \varphi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \end{cases}$$

à $n+1$ fonctions inconnues $\varphi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$.

Pour résoudre l'équation intégré-différentielle (15) conformément aux conditions (23), formons $n+1$ suites de fonctions

$$(28) \quad \begin{cases} \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_\nu, \varphi_{\nu+1}, \dots \\ \psi_{\lambda, 0}, \psi_{\lambda, 1}, \dots, \psi_{\lambda, \nu}, \psi_{\lambda, \nu+1}, \dots \quad (\lambda=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

à l'aide des relations de récurrence

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{\nu+1}(x) = p_0 + \int_{x_0}^x \psi_{1,\nu}(t) dt \\ \psi_{\lambda,\nu+1}(x) = p_\lambda + \int_{x_0}^x \psi_{\lambda+1,\nu}(t) dt; \quad (\lambda=1, 2, \dots, n-1) \\ \varphi_{n,\nu+1}(x) = \varrho_{\nu+1} + \int_{x_0}^x \Omega(t, \varphi_\nu, \psi_{1,\nu}, \psi_{2,\nu}, \dots, \psi_{n,\nu}) dt \end{array} \right.$$

$\varrho_{\nu-1}$ étant la racine de l'équation numérique

$$(30) \quad \Phi(x_0, p_0, p_1, \dots, p_{n+1}, \varrho_{\nu+1}) = \int_0^a \Psi[x_0, y, \varphi_\nu(y), \dots, \varphi_\nu^{(n)}(y)] dy.$$

On suppose que les fonctions initiales arbitraires $\varphi_0, \psi_{\lambda,0}$ soient holomorphes dans le domaine G et vérifient les inégalités

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\varphi_0(x) - p_0| < q_0 \\ |\psi_{\lambda,0}(x) - p_\lambda| < q_\lambda; \quad \lambda=1, 2, \dots, n. \end{array} \right.$$

Cherchons les conditions sous lesquelles les relations (29) définissent les suites (28) pour toute la valeur ν . Supposons donc que les fonctions $\varphi_\nu, \psi_{\lambda,\nu}$ soient holomorphes dans G et vérifient les inégalités

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\varphi_\nu(x) - p_0| < q_0 \\ |\psi_{\lambda,\nu}(x) - p_\lambda| < q_\lambda; \quad (\lambda=1, 2, \dots, n). \end{array} \right.$$

Admettons qu'il existe une fonction holomorphe $Z(z)$ qui vérifie la relation

$$(33) \quad \Phi(x_0, p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, Z(z)) = z$$

et qui fait correspondre à tout point intérieur z du cercle

$$|z| < M_\varphi$$

un point déterminé $Z(z)$ du cercle

$$|Z - p_n| < q'_n < q_n;$$

admettons en outre qu'on ait

$$(34) \quad M_\psi \cdot a < M_\varphi$$

Alors, d'après les inégalités (32), il existe une valeur de la fonction Z vérifiant la relation (30), donc

$$(35) \quad |q_{\nu+1} - p_n| < q'_n < q_n.$$

Remarquons maintenant que, d'après la supposition (20) et l'expression (25), le module du résultat de l'opération fonctionnelle Ω pour une famille de toutes les fonctions holomorphes $\varphi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ satisfaisant aux inégalités (32) dans le domaine G admet une borne supérieure positive, que nous désignons par B :

$$(36) \quad |\Omega(x, \varphi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)| \leq B.$$

Nous pouvons donc écrire pour les approximations $(\nu+1)$ -mes définies par les formules (29) les inégalités suivantes dans le domaine G

$$(37) \quad \begin{cases} |\varphi_{\nu+1}(x) - p_0| < a(p_1 + q_1) \\ |\psi_{\lambda, \nu+1}(x) - p_\lambda| < a(p_{\lambda+1} + q_{\lambda+1}) \\ |\psi_{n, \nu+1}(x) - p_n| < q'_n + a \cdot B. \end{cases} \quad (\lambda=1, 2, \dots, n-1)$$

Il en résulte que les inégalités (32) pour les fonctions avec l'indice ν entraînent les inégalités analogues pour les fonctions avec l'indice suivant $\nu+1$ dans le domaine G

$$(38) \quad \begin{cases} |\varphi_{\nu+1}(x) - p_0| < q_0 \\ |\psi_{\lambda, \nu+1}(x) - p_\lambda| < q_\lambda; \end{cases} \quad (\lambda=1, 2, \dots, n)$$

si les constantes $p_\lambda, q_\lambda, q'_n, B$ précisées plus haut satisfont aux conditions

$$(39) \quad \begin{cases} a(p_\lambda + q_\lambda) \leq q_{\lambda-1}; \\ aB \leq q_n - q'_n. \end{cases} \quad (\lambda=1, 2, \dots, n)$$

Ces conditions seront remplies par exemple dans le cas particulier si

$$\begin{aligned} p_0 = p_1 = \dots = p_n = 0; & \quad q_0 = q_1 = \dots = q_n \neq 0 \\ 0 < a < 1; & \quad B \leq q_n - q'_n. \end{aligned}$$

Nous en concluons par induction que les fonctions (28) holomorphes dans le domaine G vérifient pour toute valeur d'indice ν les inégalités (32) si celles-ci sont vérifiées par les fonctions initiales $\varphi_0, \psi_{\lambda, 0}$ et si les constantes $p_\lambda, q_\lambda, q'_n, B$ vérifient les conditions (39).

Il reste à démontrer la convergence des suites (28). Nous reproduisons à ce but le raisonnement classique.

Remarquons d'abord que, d'après la relation (30) et la supposition (20), la différence entre deux valeurs consécutives ϱ_{v+1} et ϱ_v vérifie l'inégalité

$$(40) \quad |\varrho_{v+1} - \varrho_v| < \frac{k}{\delta} \int_0^a \left[|\varphi_v(y) - \varphi_{v-1}(y)| + \sum_{\lambda=1}^n |\psi_{\lambda,v}(y) - \psi_{\lambda,v-1}(y)| \right] dy$$

k étant la plus grande des bornes supérieures des modules $|\Psi'_{u_\alpha}|$ dans le domaine (21). Ensuite pour l'opération Ω il existe deux constantes positives k' et k'' , telles qu'on a l'inégalité suivante:

$$(41) \quad \begin{aligned} & |\Omega(x, \varphi_{v+1}, \psi_{1,v+1}, \psi_{2,v+1}, \dots, \psi_{n,v+1}) - \Omega(x, \varphi_v, \psi_{1,v}, \psi_{2,v}, \dots, \psi_{n,v})| < \\ & < k' \left[|\varphi_{v+1}(x) - \varphi_v(x)| + \sum_{\alpha=1}^n |\psi_{\alpha,v+1}(x) - \psi_{\alpha,v}(x)| \right] + \\ & + k'' \int_0^a \left[|\varphi_{v+1}(y) - \varphi_v(y)| + \sum_{\alpha=1}^n |\psi_{\alpha,v+1}(y) - \psi_{\alpha,v}(y)| \right] dy. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire, d'après les relations de récurrence (29), pour les différences entre les fonctions consécutives des suites (28), les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} |\varphi_{v+1}(x) - \varphi_v(x)| &< \left| \int_{x_0}^x |\psi_{1,v}(t) - \psi_{1,v-1}(t)| dt \right| \\ |\psi_{\lambda,v+1}(x) - \psi_{\lambda,v}(x)| &< \left| \int_{x_0}^x |\psi_{\lambda+1,v}(t) - \psi_{\lambda+1,v-1}(t)| dt \right| \\ (\lambda=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\psi_{n,v+1}(x) - \psi_{n,v}(x)| &< k' \left| \int_{x_0}^x |\varphi_v(t) - \varphi_{v-1}(t)| dt \right| + \\ &+ k' \sum_{\alpha=1}^n \left| \int_{x_0}^x |\psi_{\alpha,v}(t) - \psi_{\alpha,v-1}(t)| dt \right| + \\ &+ \left(\frac{k}{\delta} + k''a \right) \int_0^a \left[|\varphi_v(t) - \varphi_{v-1}(t)| + \sum_{\alpha=1}^n |\psi_{\alpha,v}(t) - \psi_{\alpha,v-1}(t)| \right] dt. \end{aligned}$$

Il en résulte d'une façon bien connue la convergence absolue et uniforme des suites (28) ainsi que la convergence de la suite numérique $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots$

D'après les équations (27) et (29) la fonction limite

$$\varphi(x) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_\nu(x)$$

est la solution de l'équation intégré-différentielle (25) et (24) et satisfait aux conditions (23).

La limite ϱ de la suite

$$\varrho = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varrho_\nu$$

est la valeur de la fonction $\psi_n(x) = \varphi^{(n)}(x)$ pour $x = x_0$:

$$\varrho = \varphi^{(n)}(x_0)$$

en outre cette valeur vérifie l'équation

$$\Phi(x_0, p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, \varrho) = \int_0^a \Psi[x_0, y, \varphi(y) \dots \varphi^{(n)}(y)] dy$$

donc la fonction trouvée $\varphi(x)$ est une solution de l'équation (15) ou (14) holomorphe dans le domaine G . On peut montrer d'une façon connue que cette solution, liée à la fonction $Z(z)$ déterminée par l'équation (33), est unique.

En reprenant la construction des rectangles présentés sur la figure mais situés dans le domaine G , nous en concluons que la fonction limite trouvée $\varphi(y)$ est la solution de l'équation (13), donc aussi de l'équation proposée (1), le noyau $K(x, y)$ étant fermé.

SOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE

$$f(f(\dots f(x)\dots)) = g(x)$$

Par S. ŁOJASIEWICZ (Kraków)

Soit E un ensemble d'éléments quelconques. Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ jouit de la propriété p_E , lorsqu'elle transforme, d'une façon biunivoque, l'ensemble E en E . Soit $f(x)$ une fonction jouissant de la propriété p_E . Nous désignerons par $f^n(x)$ la n -ième fonction itérée de $f(x)$; elle sera définie, pour n naturel, par les relations, $f^0(x) = x$, $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$, $f^{-n}(x) = f^{-1}(f^{-n+1}(x))$. Tout ensemble Γ , composé des points

$$\dots, f^{-2}(x), f^{-1}(x), x, f(x), f^2(x), \dots$$

sera appelé cycle de la fonction $f(x)$. Deux cycles différents sont toujours disjoints. La somme de tous les cycles de la fonction $f(x)$ est égale à l'ensemble E .

Dans cette note je donne la solution générale de l'équation fonctionnelle¹⁾

$$(1) \quad f^N(x) = g(x) \text{ dans } E,$$

où N est un nombre naturel et $g(x)$ une fonction donnée jouissant de la propriété p_E . On voit que chaque solution $f(x)$ jouit de cette propriété.

La solution générale de l'équation

$$(2) \quad f^N(x) = x \text{ dans } E$$

peut être obtenue de la manière suivante.

¹⁾ M. T. Ważewski a posé le problème: résoudre l'équation fonctionnelle $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$. Cette équation est équivalente à l'équation $f^2(x) = \frac{1}{x}$.

M. S. Gołąb a traité l'équation $f^2(x) = f(x)$ [Über eine Funktionalgleichung der Theorie der geometrischen Objekte, Wiadom. Matem. 45 (1938), p. 97—137] mais sans admettre l'hypothèse que $f(x)$ jouisse de la propriété p_E .

Soit $1 = n_0 < n_1 < \dots < n_r = N$ la suite complète de diviseurs du nombre N . Décomposons l'ensemble E en sous-ensembles disjoints

$$(3) \quad \begin{aligned} E = & M_1^0 + \\ & + M_1^1 + \dots + M_{n_1}^1 + \\ & \dots \dots \dots \\ & + M_1^r + \dots + M_{n_r}^r, \end{aligned}$$

de façon que les ensembles $M_1^i, \dots, M_{n_i}^i$ soient de la même puissance ($i=1, \dots, r$). Soit $\varphi_j^i(x)$ une fonction qui transforme, d'une façon biunivoque, l'ensemble M_j^i en M_{j+1}^i

$$\varphi_j^i(M_j^i) = M_{j+1}^i \quad \text{pour } j=1, \dots, n_i-1 \text{ et } i=1, \dots, r.$$

Désignons par $\psi_j^i(x)$ la fonction inverse de $\varphi_j^i(x)$ et posons

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \quad \text{lorsque } x \in M_1^0, \\ f(x) &= \varphi_j^i(x), \quad \text{lorsque } x \in M_j^i, \quad j=1, \dots, n_i-1, \quad i=1, \dots, r, \\ f(x) &= \psi_1^i(\dots \psi_{n_i-1}^i(x) \dots), \quad \text{lorsque } x \in M_{n_i}^i, \quad i=1, \dots, r. \end{aligned}$$

La fonction $f(x)$ est définie dans l'ensemble E tout entier et satisfait à l'équation (2).

Nous obtenons de cette manière toutes les solutions de (2). En effet, supposons $f(x) = x$ dans E . Il suffit de trouver une décomposition (3), telle que $f(x) = x$ dans M_1^0 et que $f(M_j^i) = M_{j+1}^i$ ($j=1, \dots, n_i-1$; $i=1, \dots, r$). Désignons par S_i l'ensemble des cycles de $f(x)$ qui sont composés de n_i éléments différents. Or, il existe un ensemble M_1^i contenant un et un seul élément de chaque cycle de S_i . En posant $M_{j+1}^i = f^j(M_1^i)$ pour $j=1, \dots, n_i-1$ et $i=1, \dots, r$, nous obtenons la décomposition cherchée, puisque le nombre d'éléments de chaque cycle de la fonction $f(x)$ est un diviseur de N .

Pour avoir la solution générale de l'équation (1), nous procédons de la manière suivante.

Désignons par R_l l'ensemble des cycles de la fonction $g(x)$ qui sont composés de l éléments ($l=1, 2, \dots, \infty$) et considérons l'équation

$$(4) \quad \Psi^N(\Gamma) = \Gamma \quad \text{dans } R_l.$$

Soit $\Psi(\Gamma)$ une solution de l'équation (4), obtenue par la méthode précédente en partant de la décomposition

$$(5) \quad \begin{aligned} R_l &= P_1^0 + \dots + P_{m_0}^0 + \\ &\dots \\ &+ P_1^s + \dots + P_{m_s}^s, \end{aligned}$$

où $m_i = \frac{N}{k_i}$ et $1 = k_0 < k_1 < \dots < k_s$ est la suite complète de diviseurs de N premiers à l . Soient p_i et q_i deux nombres entiers, tels que

$$(6) \quad p_i k_i - q_i l = 1^2).$$

Associons, à tout cycle Γ de la fonction $g(x)$, un élément ty_Γ de ce cycle. Soit $x \in E$. Il existe un et un seul cycle Γ contenant l'élément x et nous pouvons écrire $x = g^n(y_\Gamma)$. Posons

$$(7) \quad \begin{cases} f(x) = g^n(y_{\Psi(\Gamma)}), & \text{lorsque } \Gamma \in P_j^i, \quad j=1, \dots, m_i-1, \\ f(x) = g^{n+p_i}(y_{\Psi(\Gamma)}), & \text{lorsque } \Gamma \in P_{m_i}^i, \\ & i=1, \dots, s, \quad l=1, 2, \dots, \infty. \end{cases}$$

On vérifie sans peine que la fonction $f(x)$ est définie dans l'ensemble E tout entier et satisfait à l'équation (1).

Nous prouverons que chaque solution de (1) peut être obtenue de cette manière. En effet, si Γ est un cycle de $g(x)$, alors $f(\Gamma)$ l'est aussi et tous les deux cycles sont de la même puissance. Nous pouvons donc poser $\Psi(\Gamma) = f(\Gamma)$ dans R_l et la relation (4) sera satisfaite. Ensuite nous construisons la décomposition (5) de la même manière que pour la solution de l'équation (2). Les ensembles M_j^i , pour lesquels $\frac{N}{n_i}$ n'est pas premier avec l , sont vides.

En effet, supposons que $M_j^i \neq \emptyset$. Soit $x \in \Gamma \in M_j^i$. Il en résulte que $f^{n_i}(\Gamma) = \Gamma$, d'où $f^{n_i}(x) = g^p(x)$ et $g(x) = f^N(x) = g^{\frac{N}{n_i} p}(x)$, alors l est un diviseur de $\frac{N}{n_i} p - 1$; les nombres l et $\frac{N}{n_i}$ sont premiers entre eux³⁾.

²⁾ Pour $l = \infty$, on doit avoir $s = 0$, $R_l = P_1^0 + \dots + P_N^0$ et $p_0 = 1$.

³⁾ Lorsque $l = \infty$, alors $\frac{N}{n_i} = 1$ et les ensembles M_j^i , pour $i < r$, sont vides.

Nous faisons correspondre, à tout cycle Γ appartenant à $\sum_{i=1}^s P_i^l$, un élément y_Γ de ce cycle et posons $y_\Gamma = f^{j-1}(y_{\Gamma'})$ pour $\Gamma \in P_j^l$, $j=2, \dots, m_l$, où $\Gamma' = f^{-j+1}(\Gamma) \in P_1^l$. Enfin calculons p_i de (6) et vérifions les relations (7) en nous appuyant sur la relation $j^{m_i}(\Gamma) = \Gamma$ pour $\Gamma \in P_{m_i}^l$.

L'existence d'une solution de l'équation (1) est équivalente à celle de la décomposition (5). Cette décomposition est toujours possible lorsque l'ensemble R_l est infini. Dans le cas contraire, désignons par L_l le nombre d'éléments de l'ensemble R_l ; pour que la décomposition (5) soit possible il faut et il suffit qu'existent les nombres naturels ξ_0, \dots, ξ_s , tels que

$$L_l = \frac{N}{k_0} \xi_0 + \dots + \frac{N}{k_s} \xi_s.$$

Cette dernière condition est équivalente à la divisibilité de L_l par $\frac{N}{k_s}$. Désignons par d_l le plus grand diviseur de N premier à l (c'est-à-dire $d_l = k_s$). On a donc ce qui suit,

pour qu'il existe une solution de l'équation (1), il faut et il suffit que l'ensemble R_l soit infini ou que L_l soit divisible par $\frac{N}{d_l}$, pour $l=1, 2, \dots, \infty$.

4) Par N , lorsque $l = \infty$.

SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DE LA SPIRALE LOGARITHMIQUE

Par S. ŁOJASIEWICZ (Kraków)

On dira qu'un ensemble plan E possède la propriété (s), s'il est congruent avec son image par chaque homothétie de coefficient $\alpha > 0$, $w = \alpha z$ (où z et w sont des variables complexes). M. T. Ważewski a posé la question, quels sont les ensembles qui jouissent de la propriété (s)?

Je vais démontrer le théorème suivant,

Pour que l'ensemble fermé E ait la propriété (s), il faut et il suffit qu'il existe des nombres (complexes) a et b tels que $a \in E$, $\Re b \neq 0$ ¹⁾ et que l'ensemble $E - \{a\}$ soit somme des spirales logarithmiques

$$z = a + e^{i\alpha} \cdot e^{b\tau}, \quad \text{où} \quad -\infty < \tau < +\infty.$$

Démonstration. La suffisance de la condition est évidente (par vérification). Pour démontrer qu'elle est nécessaire nous allons considérer la transformation linéaire suivante

$$(1) \quad T(z; p, a) = a + p(z - a), \quad (p \neq 0).$$

L'ensemble E possédant la propriété (s), on voit qu'à tout $\alpha > 0$ correspondent des nombres a et b , tels que

$$(2) \quad |p| = \alpha \quad \text{et} \quad T(E; p, a) = E.$$

On peut vérifier que la transformation T jouit des propriétés suivantes

I. Si $T(E; p, a) = E$ et $T(E; q, a) = E$, on a

$$(a) \quad T(E; pq, a) = E,$$

$$(b) \quad T(E; p^n, a) = E, \quad \text{pour} \quad n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots,$$

$$(c) \quad T(E; \frac{p}{q}, a) = E.$$

¹⁾ $\Re b$ désigne la partie réelle du nombre complexe b .

II. Si $T(E; q, a) = E$ et $T(E; p, b) = E$, on a

$$T(E; p, a + q^n(b-a)) = E \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

III. Si $p_n \rightarrow p \neq 0$, $a_n \rightarrow a$ et $T(E; p_n, a_n) = E$, on a $T(E; p, a) = E$ (puisque E est fermé).

D'après (2), il existe un a_0 tel que $T(E; a_0, q) = E$ pour un $|q| < 1$. Soit $\alpha > 0$. Alors existent φ et b tels que $T(E; \alpha e^{t\varphi}, b) = E$. Nous obtenons, d'après II et III (en posant $a = a_0$, $p_n = p = \alpha e^{t\varphi}$, $a_n = q^n(b-a)$),

$$(3) \quad T(E; \alpha e^{t\varphi}, a_0) = E.$$

Désignons par $\varphi(\alpha)$ un nombre φ satisfaisant à (3) dont le module serait le plus petit possible (il existe d'après III). Nous avons

$$(4) \quad T(E; \alpha e^{t\varphi(\alpha)}, a_0) = E, \quad \text{pour } \alpha > 0.$$

Supposons que $\alpha_n \rightarrow 1$ et $\varphi(\alpha_n) \rightarrow \delta$. En vertu de III, I (c) et, (4) il vient $T(E; \sigma_n e^{i[\varphi(\alpha_n) - \delta]}, a_0) = E$. Il s'ensuit, d'après la définition de $\varphi(\alpha)$, que $|\varphi(\alpha_n)| \leq |\varphi(\sigma_n) - \delta|$ et, par suite, $\delta = 0$. On a donc

$$(5) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} \varphi(\alpha) = 0.$$

Nous allons maintenant démontrer qu'il existe un $\varepsilon > 0$, tel que

$$(6) \quad \varphi(\alpha^2) = 2\varphi(\alpha), \quad \text{lorsque } |\alpha - 1| < \varepsilon.$$

A cet effet nous désignons par ϑ_0 la borne inférieure des nombres $\vartheta > 0$ pour lesquels

$$(7) \quad T(E; e^{t\vartheta}, a_0) = E.$$

1°. Si $\vartheta_0 = 0$, alors d'après (I b) et III, la relation (12) est vraie pour chaque ϑ (réel), d'où, d'après I (a) et (4), $T(E; \alpha, a_0) = E$. $\varphi(\alpha)$ est donc identiquement nulle.

2°. Si $\vartheta_0 > 0$, alors en vertu de (5), il existe un $\varepsilon > 0$, tel que $|\varphi(2\alpha) - 2\varphi(\alpha)| < \vartheta_0$ lorsque $|\alpha - 1| < \varepsilon$. Mais d'après (4), I (a) et I (b), nous avons $T(E; e^{i[\varphi(2\alpha) - 2\varphi(\alpha)]}, a_0) = E$, d'où il résulte que $|\varphi(2\alpha) - 2\varphi(\alpha)| = 0$.

Fixons maintenant $a_0 \in (1, 1 + \varepsilon)$. D'après (4), (6) et I (b), nous avons $T(E; \alpha_0^{\frac{m}{2^n}} e^{t\varphi(\alpha_0)}, a_0) = E$ pour tout m entier et n naturel, d'où, en vertu de III, il résulte que

$$(8) \quad T(E; \alpha_0^t e^{t\varphi(\alpha_0)}, a_0) = E \quad \text{pour tout } t \text{ réel.}$$

Posons $b = \ln a_0 + i\varphi(a_0)$. De la relation (8), il s'ensuit que, pour $z_0 \in E$ et $z_0 \neq a_0$ la spirale

$$z = a_0 + e^{\left(\arg(z_0 - a_0) - \frac{\ln|z_0 - a_0| \varphi(a_0)}{\ln a_0}\right) e^{b\tau}}, \text{ où } -\infty < \tau < +\infty,$$

contient le point z_0 et reste comprise dans E , ce qui termine la démonstration.

UN THÉORÈME DE L'OSCILLATION

Par Z. BUTLEWSKI (Poznań)

§ 1. Considérons un système d'équations différentielles

$$(1) \quad \frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

où f_1, f_2, \dots, f_n sont des fonctions *continues* des variables t, x_1, x_2, \dots, x_n dans le domaine

$$(D) \quad t \geq t_0, \quad -\infty < x_1, x_2, \dots, x_n < +\infty.$$

Désignons par

$$(2) \quad x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \dots, \quad x_n = \varphi_n(t)$$

une solution du système (1) qui existe pour $t \geq t_0$.

Supposons que, par tout point $P(T_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ du domaine (D) passe une et une seule solution du système (1).

Nous appelons *oscillante* pour $t \geq t_0$ la solution $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$, si chacune des n fonctions $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ possède une infinité de zéros dans l'intervalle $(t_0, +\infty)$.

Nous trouvons dans cet article, entre autres, des conditions *suffisantes* pour que la solution (2) soit oscillante (théorème II).

Ensuite nous appliquons (§ 4) les résultats obtenus:

1° au système dynamique des équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

2° au système des équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_{k-1}), & (k=1, 2, \dots, n-1; x_0 = x_n) \\ \frac{dx_n}{dt} = -f_n(t, x_{n-1}) \end{cases}$$

3° à l'équation différentielle $x^{(n)} + A(t)x = 0$.

§ 2. Nous allons démontrer le

Théorème I. Si les fonctions f_1, f_2, \dots, f_n possèdent, dans le domaine (D), les propriétés suivantes:

$$(Z) \quad f_k \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases} \text{ pour } \begin{cases} x_{k-1} = 0 \\ x_{k-1} \neq 0 \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots, n; x_0 = x_n),$$

alors: 1° si l'une quelconque des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ s'annule identiquement dans un intervalle, chacune de ces fonctions s'y annule identiquement, 2° si l'une quelconque des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ est oscillante, toutes les autres le sont aussi.

Démonstration. Ad 1°. Supposons que $\varphi_{k-1}(t) \equiv 0$ dans l'intervalle $\alpha \leq t \leq \beta$, ($t_0 \leq \alpha < \beta < +\infty$), où k est un nombre entier fixe, satisfaisant à l'inégalité $1 \leq k \leq n$; pour $k=1$, posons $\varphi_0 \equiv \varphi_n$.

Nous démontrerons que si l'hypothèse (Z) est satisfaite nous aurons:

$$\varphi_1(t) \equiv 0, \dots, \varphi_{k-2}(t) \equiv 0, \varphi_k(t) \equiv 0, \dots, \varphi_n(t) \equiv 0$$

dans l'intervalle $\alpha \leq t \leq \beta$, c'est-à-dire que la solution (2) sera identiquement nulle dans $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Si $\varphi_{k-1}(t) \equiv 0$ dans $\langle \alpha, \beta \rangle$, alors d'après (Z) on a:

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = f_k[t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_{k-2}(t), 0, \varphi_k(t), \dots, \varphi_n(t)] = 0$$

dans $\langle \alpha, \beta \rangle$ et par conséquent

$$\varphi_k(t) = c \quad \text{pour } \alpha \leq t \leq \beta \quad (c = \text{Const.}).$$

Nous démontrerons que $c = 0$. Si $c \neq 0$, nous obtiendrions, d'après (Z),

$$\frac{d\varphi_{k+1}}{dt} = f_{k+1} \neq 0 \quad \text{pour } \alpha \leq t \leq \beta$$

et la fonction $\varphi_{k+1}(t)$ serait monotone (croissante ou décroissante) dans $\langle \alpha, \beta \rangle$. Il existerait alors un point $t = \tau_{k+1}$ ($\alpha \leq \tau_{k+1} \leq \beta$) tel que $\varphi_{k+1}(\tau_{k+1}) \neq 0$.

D'après (Z) nous avons donc

$$\left(\frac{d\varphi_{k+2}}{dt}\right)_{t=\tau_{k+1}} = f_{k+2}[\tau_{k+1}, \varphi_1(\tau_{k+1}), \dots, \varphi_n(\tau_{k+1})] \neq 0$$

et, par conséquent, il existe un point $t = \tau_{k+2}$, ($\alpha \leq \tau_{k+2} \leq \beta$) tel que $\varphi_{k+2}(\tau_{k+2}) \neq 0$.

Le raisonnement appliqué de proche en proche montre que

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1}(\tau_{k+1}) &\neq 0 \\ \varphi_{k+2}(\tau_{k+2}) &\neq 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_n(\tau_n) &\neq 0 && (\alpha \leq \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \leq \beta), \\ \varphi_1(\tau_1) &\neq 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_{k-1}(\tau_{k-1}) &\neq 0. \end{aligned}$$

La dernière inégalité conduit à une contradiction, parce que nous avons supposé $\varphi_{k-1}(t) \equiv 0$ pour $\alpha \leq t \leq \beta$.

Il vient donc $c = 0$ et, par conséquent,

$$\varphi_k(t) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Nous trouvons ensuite de la même façon que

$$\varphi_{k+1}(t) \equiv 0, \dots, \varphi_n(t) \equiv 0, \quad \varphi_1(t) \equiv 0, \dots, \varphi_{k-2}(t) \equiv 0$$

dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Ad 2°. Supposons, par exemple, que la fonction $\varphi_k(t)$ soit oscillante pour $t \geq t_0$ et désignons par T_1, T_2 , ($t_0 < T_1 < T_2$) deux zéros consécutifs de cette fonction, nous avons donc $\varphi_k(T_1) = \varphi_k(T_2) = 0$. Il existe un point $t = \tau$, ($T_1 < \tau < T_2$), tel que

$$\left[\frac{d\varphi_k}{dt}\right]_{t=\tau} = f_k[\tau, \varphi_1(\tau), \dots, \varphi_n(\tau)] = 0.$$

D'après l'hypothèse (Z) nous obtenons $\varphi_{k-1}(\tau) = 0$.

La fonction $\varphi_{k-1}(t)$ est donc oscillante. Nous trouvons de la même façon que les fonctions:

$$\varphi_{k-2}(t), \dots, \varphi_1(t), \varphi_n(t), \dots, \varphi_{k+1}(t)$$

sont oscillantes pour $t \geq t_0$. Le théorème I est donc démontré.

§ 3. Considérons un système d'équations différentielles

$$(1) \quad \frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Supposons que les fonctions f_1, f_2, \dots, f_n soient *continues* par rapport aux variables t, x_1, x_2, \dots, x_n dans le domaine

$$(D) \quad t \geq t_0, \quad -\infty < x_1, x_2, \dots, x_n < +\infty$$

et satisfassent dans (D) aux hypothèses (A), (B), (C), suivantes:

$$(A) \quad \alpha) x_{k-1} f_k > 0 \quad \text{pour } x_{k-1} \neq 0, \quad (k=1, 2, \dots, n-1; x_0 = x_n), \\ \beta) x_{n-1} f_n < 0 \quad \text{pour } x_{n-1} \neq 0.$$

$$(B) \quad \alpha) \text{ Si } \tilde{x}_j \geq \bar{x}_j, \quad (j=n, 1, 2, \dots, k), \\ \tilde{x}_j \leq \bar{x}_j, \quad (j=k+1, \dots, n-1),$$

alors

$$f_k(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \geq f_k(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n), \quad (k=1, 2, \dots, n-1).$$

$\beta)$ Si

$$\tilde{x}_j \leq \bar{x}_j, \quad (j=1, 2, \dots, n-1), \quad \tilde{x}_n \geq \bar{x}_n,$$

alors

$$f_n(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \geq f_n(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n).$$

(C) Si c_1, c_2, \dots, c_n désignent des constantes, il vient

$$\alpha) c_{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t, c_1, c_2, \dots, c_n) dt = +\infty \quad \text{pour } c_{k-1} \neq 0, \\ (k=1, 2, \dots, n-1; c_0 = c_n)$$

$$\beta) c_{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t, c_1, c_2, \dots, c_n) dt = -\infty \quad \text{pour } c_{n-1} \neq 0.$$

Supposons que par tout point $P(T_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ du domaine (D) passe une solution du système (1) et une seule. Désignons par

$$(2) \quad x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \dots, \quad x_n = \varphi_n(t)$$

une solution du système (1) qui existe pour $t \geq t_0$ et qui satisfait, pour $t = t_0$, aux conditions initiales suivantes:

$$(E) \quad \varphi_k(t_0) \geq 0, \quad (k=1, 2, 3, \dots, n-1), \quad \varphi_n(t_0) \leq 0.$$

D'après l'hypothèse (A), nous voyons que $x_1=0, x_2=0, \dots, x_n=0$ est une solution du système (1). Considérons dans la suite une solution (2) différente de cette solution triviale. Alors un au moins des nombres $\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$ est non nul. Dans le cas contraire la condition de l'unicité des solutions du système (1) ne serait pas satisfaite.

Désignons par $t_k^{(1)}, t_k^{(2)}, t_k^{(3)}, \dots, (t_0 < t_k^{(1)} < t_k^{(2)} < \dots)$ les zéros consécutifs de la fonction $\varphi_k(t)$, ($k=1, 2, \dots, n$).

Théorème II. *Si les hypothèses (A), (B) et (C) sont satisfaites, la solution $x_1=\varphi_1(t), x_2=\varphi_2(t), \dots, x_n=\varphi_n(t)$ du système (1), satisfaisante aux conditions initiales (E), est oscillante pour $t \geq t_0$ et nous avons de plus*

$$t_1^{(i)} < t_2^{(i)} < \dots < t_n^{(i)} < t_1^{(i+1)}, \quad (i=1, 2, 3, \dots),$$

c'est-à-dire que les zéros des fonctions $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ sont simples et qu'entre deux zéros consécutifs de $\varphi_p(t)$ il y a exactement un zéro de $\varphi_q(t)$, où $p, q=1, 2, \dots, n$; $p \neq q$).

Remarque.

a) Si

$$\varphi_j(t_0) = 0, \quad (j=1, 2, \dots, k-1), \quad \varphi_k(t_0) > 0$$

$$\varphi_j(t_0) \geq 0, \quad (j=k+1, \dots, n-1), \quad \varphi_n(t_0) \leq 0$$

pour $2 \leq k \leq n-1$ et si $t_1^{(1)}$ désigne le premier zéro à droite de t_0 de la fonction $\varphi_1(t)$, les premiers zéros $t_k^{(0)}, t_{k+1}^{(0)}, \dots, t_n^{(0)}$ à droite de t_0 des fonctions respectives $\varphi_k(t), \varphi_{k+1}(t), \dots, \varphi_n(t)$ se trouvent dans l'intervalle $t_0 < t < t_1^{(1)}$ et nous avons de plus $t_0 < t_k^{(0)} < t_{k+1}^{(0)} < \dots < t_n^{(0)} < t_1^{(1)}$.

¹⁾ Ce théorème est analogue au résultat de Fite, qui a démontré le théorème de l'oscillation suivant: Si $A(t)$ est une fonction continue pour $t \geq t_0 > 0$ et si

$$A(t) > 0, \quad \int_{t_0}^{\infty} A(t) dt = +\infty$$

alors toute intégrale $x(t)$ de l'équation différentielle $x^{(n)} + A(t)x = 0$ est 1° oscillante pour $t \geq t_0 > 0$ si n est pair, 2° oscillante ou tend vers zéro pour $t \rightarrow +\infty$, si n est impair. (Cf. W. B. Fite, *Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations*, Transactions of the American Mathematical Society, 19 (1918), p. 341—352. Voir aussi J. G. Mikusiński, *On Fite's oscillation theorems*, Colloquium Mathematicum, 2 (1949), p. 34—39.

b) Si $\varphi_j(t_0) = 0$, ($j=1, 2, \dots, n-1$), $\varphi_n(t_0) < 0$ et si $t_1^{(1)}$ désigne le premier zéro à droite de t_0 de la fonction $\varphi_1(t)$, le premier zéro $t_n^{(0)}$ à droite de t_0 de la fonction $\varphi_n(t)$ se trouve dans l'intervalle $t_0 < t < t_1^{(1)}$.

Dans ces deux cas les zéros des fonctions $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ sont déplacés pour $t \geq t_1^{(1)}$ comme plus haut dans le théorème II.

Démonstration.

Nous avons les égalités

$$\varphi'_k(t) = f_k[t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)], \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Posons pour simplifier

$$f_k[t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)] \equiv f_k[t, \varphi(t)], \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Nous obtenons alors

$$(3) \quad \varphi'_k(t) = f_k[t, \varphi(t)], \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Supposons que le premier des nombres $\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$ non nul soit $\varphi_k(t_0)$, c'est-à-dire que l'on ait:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_0) = \dots = \varphi_{k-1}(t_0) = 0, \\ \varphi_k(t_0) > 0, \varphi_{k+1}(t_0) \geq 0, \dots, \varphi_{n-1}(t_0) \geq 0, \varphi_n(t_0) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{si} \quad 1 \leq k \leq n-1$$

et

$$\varphi_j(t_0) = 0, \quad (j=1, 2, \dots, n-1), \quad \varphi_n(t_0) < 0$$

si

$$k = n.$$

A titre d'exemple supposons que $k=1$, c'est-à-dire que

$$(E_1) \quad \varphi_1(t_0) > 0, \quad \varphi_j(t_0) \geq 0, \quad (j=2, 3, \dots, n-1), \quad \varphi_n(t_0) \leq 0;$$

pour $k=2, 3, \dots, n$ le raisonnement est analogue.

I. Lorsque $\varphi_1(t_0) > 0$, nous avons $\varphi_1(t) > 0$ dans l'intervalle $t_0 < t \leq \tau_1^{(1)}$, où la différence $\tau_1^{(1)} - t_0$ est suffisamment petite. En vertu de l'hypothèse (A, α), nous aurons

$$\varphi_1(t) f_2[t, \varphi(t)] > 0$$

dans l'intervalle $t_0 < t \leq \tau_1^{(1)}$ et par conséquent

$$\varphi'_2(t) = f_2[t, \varphi(t)] > 0 \quad \text{pour } t_0 < t \leq \tau_1^{(1)},$$

c'est-à-dire que nous obtiendrons selon (E_1) $\varphi_2(t) > 0$ dans l'intervalle $t_0 < t \leq \tau_1^{(1)}$.

Le raisonnement analogue conduit aux inégalités

$$\varphi_k(t) > 0, \quad \varphi'_k(t) > 0, \quad (k=3, 4, \dots, n-1)$$

dans l'intervalle $t_0 < t \leq \tau_1^{(1)}$.

D'après l'hypothèse (A, β) nous avons

$$\varphi_{n-1} f_n[t, \varphi(t)] < 0 \quad \text{pour } t_0 < t \leq \tau_1^{(1)}$$

et, par conséquent,

$$\varphi'_n(t) = f_n[t, \varphi(t)] < 0 \quad \text{pour } t_0 < t \leq \tau_1^{(1)},$$

donc, en vertu de (E_1) , $\varphi_n(t) < 0$ dans l'intervalle $t_0 < t \leq \tau_1^{(1)}$.

D'après (A, α) nous avons

$$\varphi_n(t) f_1[t, \varphi(t)] > 0 \quad \text{pour } t_0 < t \leq \tau_1^{(1)}$$

et, par conséquent,

$$\varphi'_1(t) = f_1[t, \varphi(t)] < 0 \quad \text{pour } t_0 < t \leq \tau_1^{(1)}.$$

En résumé, nous obtenons les inégalités suivantes:

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \varphi_1(t) > 0, & \varphi'_1(t) < 0 \\ \varphi_k(t) > 0, & \varphi'_k(t) > 0 \quad (k=2, 3, \dots, n-1) \\ \varphi_n(t) < 0, & \varphi'_n(t) < 0 \end{array}$$

dans l'intervalle $t_0 < t \leq \tau_1^{(1)}$, où la différence $\tau_1^{(1)} - t_0$ est suffisamment petite.

Supposons que la fonction $\varphi_1(t)$ n'ait pas de zéros pour $t > t_0$; elle serait alors positive pour $t > t_0$ et, par conséquent, les inégalités (4) seraient satisfaites pour $t > t_0$. D'autre part, en intégrant la première équation du système (3) entre les limites $\tau_1^{(1)}, t$, nous obtenons:

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(\tau_1^{(1)}) + \int_{\tau_1^{(1)}}^t f_1[t, \varphi(t)] dt.$$

En vertu des hypothèses (A, a) et (B, a) nous avons

$$f_1[t, \varphi(t)] \leq f_1[t, \varphi(\tau_1^{(1)})] < 0 \quad \text{pour } t > \tau_1^{(1)},$$

et d'après les hypothèses (A, a) et (C, a)

$$\varphi_1(t) \leq \varphi_1(\tau_1^{(1)}) + \int_{\tau_1^{(1)}}^t f_1[t, \varphi(\tau_1^{(1)})] dt < 0$$

pour t suffisamment grand.

Il existe donc un point $t = t_1^{(1)}$, le premier à droite de t_0 , tel que $\varphi_1(t_1^{(1)}) = 0$.

Les inégalités (4) sont donc satisfaites dans l'intervalle $t_0 < t < t_1^{(1)}$ et, pour $t = t_1^{(1)}$, il vient

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_1^{(1)}) &= 0, & \varphi_1'(t_1^{(1)}) &< 0 \\ \varphi_2(t_1^{(1)}) &> 0, & \varphi_2'(t_1^{(1)}) &= 0 \\ \varphi_k(t_1^{(1)}) &> 0, & \varphi_k'(t_1^{(1)}) &> 0, \quad (k=3, 4, \dots, n-1). \\ \varphi_n(t_1^{(1)}) &< 0, & \varphi_n'(t_1^{(1)}) &< 0. \end{aligned}$$

II. Supposons que

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_1^{(1)}) = \varphi_2(t_2^{(1)}) = \dots = \varphi_{k-1}(t_{k-1}^{(1)}) &= 0, \quad (2 \leq k < n), \\ (t_0 < t_1^{(1)} < \dots < t_{k-1}^{(1)}) \end{aligned}$$

et que

$$(5) \quad \begin{aligned} \varphi_{k-1}(t_{k-1}^{(1)}) &= 0, & \varphi_{k-1}'(t_{k-1}^{(1)}) &< 0, \\ \varphi_k(t_{k-1}^{(1)}) &> 0, & \varphi_k'(t_{k-1}^{(1)}) &= 0, \\ \varphi_j(t_{k-1}^{(1)}) &> 0, & \varphi_j'(t_{k-1}^{(1)}) &> 0 \quad (j=k+1, \dots, n-1), \\ \varphi_j(t_{k-1}^{(1)}) &< 0, & \varphi_j'(t_{k-1}^{(1)}) &< 0, \quad (j=n, 1, 2, \dots, k-2). \end{aligned}$$

D'après (5) et l'hypothèse (A), nous obtenons les inégalités

$$(6) \quad \begin{aligned} \varphi_k(t) &> 0, & \varphi_k'(t) &< 0 \\ \varphi_j(t) &> 0, & \varphi_j'(t) &> 0, \quad (j=k+1, \dots, n-1) \\ \varphi_j(t) &< 0, & \varphi_j'(t) &< 0, \quad (j=n, 1, 2, \dots, k-1) \end{aligned}$$

dans l'intervalle $t_{k-1}^{(1)} < t \leq \tau_k^{(1)}$, où la différence $\tau_k^{(1)} - t_{k-1}^{(1)}$ est suffisamment petite.

Si la fonction $\varphi_k(t) > 0$ pour $t > t_{k-1}^{(1)}$, alors, d'après l'hypothèse (A), les inégalités (6) ont lieu pour $t > t_{k-1}^{(1)}$.

Dans ce cas, nous obtenons les inégalités

$$(7) \quad \begin{aligned} 0 < \varphi_k(t) < \varphi_k(\tau_k^{(1)}), \\ \varphi_j(t) > \varphi_j(\tau_k^{(1)}) > 0 & \quad (j = k+1, \dots, n-1), \\ \varphi_j(t) < \varphi_j(\tau_k^{(1)}) < 0 & \quad (j = n, 1, 2, \dots, k-1) \end{aligned}$$

pour $t > \tau_k^{(1)}$. D'après les inégalités (7) et les hypothèses (A) et (B) nous avons

$$(8) \quad f_k[t, \varphi(t)] \leq f_k[t, \varphi(\tau_k^{(1)})] < 0 \quad (2 \leq k < n),$$

pour $t > \tau_k^{(1)}$. D'autre part

$$\varphi_k(t) = \varphi_k(\tau_k^{(1)}) + \int_{\tau_k^{(1)}}^t f_k[t, \varphi(t)] dt.$$

D'après (8) et l'hypothèse (C), nous obtenons

$$\varphi_k(t) \leq \varphi_k(\tau_k^{(1)}) + \int_{\tau_k^{(1)}}^t f_k[t, \varphi(\tau_k^{(1)})] dt < 0, \quad (2 \leq k < n)$$

pour t suffisamment grand. Il existe donc un point $t = i_k^{(1)}$, le premier à droite de $i_{k-1}^{(1)}$, tel que $\varphi_k(i_k^{(1)}) = 0$.

En posant $k = 2, 3, \dots, n-1$ il vient

$$\varphi_1(i_1^{(1)}) = \varphi_2(i_2^{(1)}) = \dots = \varphi_{n-1}(i_{n-1}^{(1)}) = 0,$$

et de plus $t_0 < i_1^{(1)} < i_2^{(1)} < \dots < i_{n-1}^{(1)}$.

III. En posant dans (6) $k = n-1$, nous avons les inégalités

$$\begin{aligned} \varphi_{n-1}(t) > 0, \quad \varphi'_{n-1}(t) < 0 \\ \varphi_j(t) < 0, \quad \varphi'_j(t) < 0, \quad (j = n, 1, 2, \dots, n-2) \end{aligned}$$

dans l'intervalle $i_{n-2}^{(1)} < t < i_{n-1}^{(1)}$ et, pour $t = i_{n-1}^{(1)}$,

$$(9) \quad \begin{aligned} \varphi_{n-1}(i_{n-1}^{(1)}) = 0, \quad \varphi'_{n-1}(i_{n-1}^{(1)}) < 0 \\ \varphi_n(i_{n-1}^{(1)}) < 0, \quad \varphi'_n(i_{n-1}^{(1)}) = 0 \\ \varphi_j(i_{n-1}^{(1)}) < 0, \quad \varphi'_j(i_{n-1}^{(1)}) < 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n-2). \end{aligned}$$

D'après (9) et l'hypothèse (A), nous avons les inégalités

$$(10) \quad \begin{aligned} \varphi_n(t) < 0, \quad \varphi'_n(t) > 0, \\ \varphi_j(t) < 0, \quad \varphi'_j(t) < 0, \end{aligned} \quad (j=1, 2, \dots, n-1)$$

pour $t_{n-1}^{(1)} < t \leq \tau_n^{(1)}$, où la différence $\tau_n^{(1)} - t_{n-1}^{(1)}$ est suffisamment petite.

Supposons que $\varphi_n(t) < 0$ pour $t > t_{n-1}^{(1)}$, alors les inégalités (10) sont satisfaites pour $t > t_{n-1}^{(1)}$.

Nous avons donc pour $t > \tau_n^{(1)}$ les inégalités

$$(11) \quad \begin{aligned} 0 > \varphi_n(t) > \varphi_n(\tau_n^{(1)}), \\ \varphi_j(t) < \varphi_j(\tau_n^{(1)}) < 0, \end{aligned} \quad (j=1, 2, \dots, n-1).$$

D'après (11) et l'hypothèse (B, β) nous obtenons

$$f_n[t, \varphi(t)] \geq f_n[t, \varphi(\tau_n^{(1)})] > 0.$$

En vertu de l'hypothèse (C, β), nous obtenons

$$\varphi_n(t) \geq \varphi_n(\tau_n^{(1)}) + \int_{\tau_n^{(1)}}^t f_n[t, \varphi(\tau_n^{(1)})] dt > 0$$

pour t suffisamment grand. Il existe donc un point $t = t_n^{(1)}$, le premier à droite de $t_{n-1}^{(1)}$, tel que $\varphi_n(t_n^{(1)}) = 0$.

Il en résulte

$$\varphi_1(t_1^{(1)}) = \varphi_2(t_2^{(1)}) = \dots = \varphi_n(t_n^{(1)}) = 0,$$

où

$$t_0 < t_1^{(1)} < t_2^{(1)} < \dots < t_n^{(1)}.$$

IV. D'après l'hypothèse (A), nous obtenons ensuite:

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) < 0, \quad \varphi'_n(t) > 0, \\ \varphi_j(t) < 0, \quad \varphi'_j(t) < 0 \end{aligned} \quad (j=1, 2, \dots, n-1)$$

dans l'intervalle $t_{n-1}^{(1)} < t < t_n^{(1)}$ et, pour $t = t_n^{(1)}$,

$$(12) \quad \begin{aligned} \varphi_n(t_n^{(1)}) = 0, \quad \varphi'_n(t_n^{(1)}) > 0, \\ \varphi_1(t_n^{(1)}) < 0, \quad \varphi'_1(t_n^{(1)}) = 0, \\ \varphi_j(t_n^{(1)}) < 0, \quad \varphi'_j(t_n^{(1)}) < 0, \end{aligned} \quad (j=2, 3, \dots, n-1).$$

Nous avons alors:

$$(13) \quad \begin{aligned} \varphi_1(t) < 0, & \quad \varphi_1'(t) > 0, \\ \varphi_k(t) < 0, & \quad \varphi_k'(t) < 0 \quad (k=2, 3, \dots, n-1), \\ \varphi_n(t) > 0, & \quad \varphi_n'(t) > 0 \end{aligned}$$

dans l'intervalle $t_n^{(1)} < t \leq \tau_1^{(2)}$, où la différence $\tau_1^{(2)} - t_n^{(1)}$ est suffisamment petite.

Pour obtenir les seconds zéros $\varphi_k(t_k^{(2)}) = 0$, ($k=1, 2, \dots, n$), il suffit de poser

$$\begin{aligned} x_k &= -\xi_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \\ -f_k(t, -\xi_1, -\xi_2, \dots, -\xi_n) &\equiv F_k(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad (k=1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Alors nous pouvons écrire le système (1) sous la forme

$$(14) \quad \frac{d\xi_k}{dt} = F_k(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

On peut facilement vérifier que les fonctions F_1, F_2, \dots, F_n satisfont aux hypothèses (A), (B) et (C).

En posant

$$\varphi_k(t) \equiv -\psi_k(t), \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

nous obtenons les fonctions

$$\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t),$$

qui constituent une solution du système d'équations (14), satisfaisant pour $t=t_n^{(1)}$ aux conditions initiales (cf. (12)):

$$(E_2) \quad \psi_1(t_n^{(1)}) > 0, \dots, \psi_{n-1}(t_n^{(1)}) > 0, \quad \psi_n(t_n^{(1)}) = 0.$$

Les conditions (E₂) sont de même type que les conditions (E₁). Nous pouvons appliquer au système (14) le même raisonnement qu'au système (1). Nous obtenons alors

$$\psi_j(t_j^{(2)}) = -\varphi_j(t_j^{(2)}) = 0, \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

où $t_n^{(1)} < t_1^{(2)} < t_2^{(2)} < \dots < t_n^{(2)}$.

V. Pour $t=t_n^{(2)}$, nous avons (cf. (12)):

$$\psi_j(t_n^{(2)}) < 0, \quad (j=1, 2, \dots, n-1), \quad \psi_n(t_n^{(2)}) = 0$$

et, par conséquent,

$$(E_3) \quad \varphi_j(t_n^{(2)}) > 0, \quad (j=1, 2, \dots, n-1), \quad \varphi_n(t_n^{(2)}) = 0.$$

Les conditions initiales (E_3) sont de même type que les conditions (E_1) . Nous pouvons donc appliquer le même raisonnement que plus haut (I, II, III, IV) pour $t > t_n^{(2)}$. Le théorème II est donc démontré.

§ 4. a) Considérons un système *dynamique*²⁾ d'équations différentielles ordinaires:

$$(15) \quad \frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

où f_1, f_2, \dots, f_n sont des fonctions *continues* des variables x_1, \dots, x_n dans le domaine:

$$(D_1) \quad -\infty < x_1, x_2, \dots, x_n < +\infty.$$

Supposons satisfaites les hypothèses suivantes:

$$(A') \quad \alpha) x_{k-1} f_k > 0 \quad \text{pour } x_{k-1} \neq 0, \quad (k=1, 2, \dots, n-1; x_0 = x_n) \\ \beta) x_{n-1} f_n < 0 \quad \text{pour } x_{n-1} \neq 0.$$

$$(B') \quad \alpha) \text{ Si } \quad \tilde{x}_j \geq \bar{x}_j, \quad (j=n, 1, 2, \dots, k) \\ \tilde{x}_j \leq \bar{x}_j, \quad (j=k+1, \dots, n-1)$$

alors

$$f_k(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \geq f_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n), \quad (k=1, 2, \dots, n-1).$$

$$\beta) \text{ Si } \quad \tilde{x}_j \leq \bar{x}_j, \quad (j=1, 2, \dots, n-1), \quad \tilde{x}_n \geq \bar{x}_n,$$

alors

$$f_n(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \geq f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n).$$

Supposons que les fonctions $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)$, où $t \geq t_0$, constituent une solution non triviale (c'est-à-dire que $\psi_k(t) \not\equiv 0$, $k=1, 2, \dots, n$, cf. le théorème I, 1^o) du système (15) avec les conditions initiales suivantes:

$$(E_4) \quad \psi_k(t_0) \geq 0, \quad (k=1, 2, \dots, n-1), \quad \psi_n(t_0) \leq 0$$

et désignons par $T_k^{(1)}, T_k^{(2)}, T_k^{(3)}, \dots, (t_0 < T_k^{(1)} < T_k^{(2)} < T_k^{(3)} < \dots)$, les zéros consécutifs de la fonction $\psi_k(t)$, ($k=1, 2, \dots, n$).

²⁾ Cf. par exemple: E. Kamke, *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*. Leipzig 1942, p. 42.

Supposons que la condition de l'unicité des solutions du système (15) soit satisfaite.

En tenant compte du théorème II nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Si les hypothèses (A') et (B') sont satisfaites, la solution $x_1 = \psi_1(t)$, $x_2 = \psi_2(t), \dots, x_n = \psi_n(t)$ du système (15), satisfaisant aux conditions initiales (E₄) est oscillante, les zéros sont simples et nous avons de plus les inégalités:

$$T_1^{(0)} < T_2^{(i)} < \dots < T_n^{(i)} < T_1^{(i+1)}, \quad (i=1, 2, 3, \dots).$$

Remarque.

Si $T_1^{(1)}$ désigne le premier zéro à droite de t_0 de la fonction $\psi_1(t)$, et si dans (E₄) $\psi_1(t_0) = 0$ et le premier nombre différent de zéro est $\psi_k(t_0)$, ($2 \leq k \leq n$), alors les premiers zéros $T_k^{(0)}, T_{k+1}^{(0)}, \dots, T_n^{(0)}$ respectivement des fonctions $\psi_k, \psi_{k+1}, \dots, \psi_n$ se trouvent dans l'intervalle $t_0 < t < T_1^{(1)}$ et nous avons de plus $T_k^{(0)} < T_{k+1}^{(0)} < \dots < T_n^{(0)}$.

b) Considérons un système d'équations différentielles:

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_n) \\ \frac{dx_j}{dt} = f_j(t, x_{j-1}), & (j=2, 3, \dots, n-1) \\ \frac{dx_n}{dt} = -f_n(t, x_{n-1}), \end{cases}$$

où $f_k(t, x_{k-1})$, ($k=1, 2, \dots, n$; $x_0 = x_n$) sont des fonctions continues dans le domaine

$$(D) \quad t \geq t_0, \quad -\infty < x_1, x_2, \dots, x_n < +\infty.$$

Supposons que la condition de l'unicité des solutions du système (16) soit satisfaite. Désignons par

$$X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$$

une solution (non triviale) du système (16) qui existe pour $t \geq t_0$ et satisfait aux conditions initiales:

$$(E_5) \quad X_j(t_0) \geq 0, \quad (j=1, 2, \dots, n-1), \quad X_n(t_0) \leq 0.$$

Les hypothèses (A), (B), (C) du théorème II prennent, dans le cas du système (16), la forme suivante:

$$(A'') \quad x_{k-1} f_k(t, x_{k-1}) > 0 \quad \text{pour } x_{k-1} \neq 0 \\ (k=1, 2, \dots, n; x_0 = x_n).$$

$$(B'') \quad \text{Si } \tilde{x}_{k-1} \geq \bar{x}_{k-1}, \text{ alors } f_k(t, \tilde{x}_{k-1}) \geq f_k(t, \bar{x}_{k-1}) \\ (k=1, 2, \dots, n; x_0 = x_n).$$

(C'') Si c_1, c_2, \dots, c_n sont des constantes, alors

$$c_{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t, c_{k-1}) dt = +\infty \quad \text{pour } c_{k-1} \neq 0 \\ (k=1, 2, \dots, n; c_0 = c_n).$$

Soient $\Theta_k^{(1)}, \Theta_k^{(2)}, \Theta_k^{(3)}, \dots$ les zéros consécutifs de la fonction $X_k(t)$ plus grands que $t_0, (t_0 < \Theta_k^{(1)} < \Theta_k^{(2)} < \Theta_k^{(3)} < \dots)$ pour $k=1, 2, \dots, n$.

On peut dans le cas du système (16) énoncer le théorème II sous la forme

Si les hypothèses (A''), (B'') et (C'') sont satisfaites, la solution $x_1 = X_1(t), x_2 = X_2(t), \dots, x_n = X_n(t)$ du système (16), satisfaisant aux conditions initiales (E₅), est oscillante pour $t \geq t_0$, ses zéros sont simples et nous avons de plus:

$$\Theta_1^{(i)} < \Theta_2^{(i)} < \dots < \Theta_n^{(i)} < \Theta_1^{(i+1)}, \quad (i=1, 2, 3, \dots).$$

Remarque.

Si $\Theta_1^{(1)}$ est le premier zéro de la fonction $X_1(t)$ à droite de t_0 , chacune des fonctions $X_2(t), \dots, X_n(t)$ peut avoir au plus un zéro dans l'intervalle $t_0 < t < \Theta_1^{(1)}$.

c) Considérons maintenant l'équation différentielle

$$(17) \quad \frac{d^n x}{dt^n} + A(t)x = 0,$$

où $A(t)$ est une fonction continue et positive pour $t \geq t_0$.

Remplaçons l'équation (17) par le système d'équations différentielles:

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = A(t)x_n, \\ \frac{dx_j}{dt} = x_{j-1} \quad (j=2,3,\dots,n-1), \\ \frac{dx_n}{dt} = -x_{n-1}, \end{cases}$$

où nous posons $x_k = -\frac{d^{n-k}x}{dt^{n-k}}$, ($k=1,2,\dots,n-1$), $x_n = x$.

On peut vérifier que si $A(t) > 0$ pour $t \geq t_0$ et si $\int_{t_0}^{\infty} A(t)dt = \infty$, les seconds membres du système (18) satisfont aux hypothèses (A), (B) et (C) du théorème II. Les conditions initiales (E) prennent dans ce cas la forme suivante³:

$$(F_6) \quad x(t_0) \leq 0, \quad x^{(j)}(t_0) \leq 0, \quad (j=1,2,\dots,n-1).$$

Désignons par $t_j^{(1)}, t_j^{(2)}, \dots, t_j^{(n)}, \dots$ les zéros consécutifs de la dérivée $x^{(j)}(t)$, ($j=1,2,\dots,n-1$) et par $t_0^{(1)}, t_0^{(2)}, \dots, t_0^{(n)}, \dots$ les zéros consécutifs de la solution $x(t)$ de l'équation (17), plus grands que t_0 .

En appliquant le théorème II au système d'équations (18), nous obtenons le résultat suivant:

Si $A(t) > 0$ pour $t \geq t_0$ et si $\int_{t_0}^{\infty} A(t)dt = +\infty$, la solution de l'équation (17), satisfaisant aux conditions initiales (F₆), est oscillante pour $t \geq t_0$, ses zéros sont simples et nous avons de plus:

$$t_{n-1}^{(i)} < t_{n-2}^{(i)} < \dots < t_1^{(i)} < t_0^{(i)} < t_{n-1}^{(i+1)}, \quad (i=1,2,3,\dots).$$

Alors, entre deux zéros consécutifs de la dérivée $x^{(j)}(t)$ il y a exactement un zéro de la dérivée $x^{(k)}(t)$, ($j, k=0,1,2,\dots,n-1$; $j \neq k$; $x^{(0)} = x$).

³) Nous remplaçons $\frac{d^i x}{dt^i}$ par $x^{(i)}$.

C'est le résultat obtenu par J. Mikusiński⁴⁾ pour quelques solutions de l'équation (17) dans le cas où A est une constante positive.

Remarque.

- a) Si $x^{(j)}(t_0) = 0$, ($j = n-1, n-2, \dots, n-k+1$), $x^{(n-k)}(t_0) < 0$,
 $x^{(j)}(t_0) \leq 0$, ($j = n-k-1, \dots, 2, 1$), $x(t_0) \leq 0$
 $(2 \leq k \leq n-1)$

et si $t_{n-1}^{(1)}$ désigne le *premier* zéro à droite de t_0 de la dérivée $x^{(n-1)}(t)$, les *premiers* zéros $t_{n-k}^{(0)}, t_{n-k-1}^{(0)}, \dots, t_2^{(0)}, t_1^{(0)}, t_0^{(0)}$ plus grands que t_0 respectivement des fonctions

$$x^{(n-k)}(t), x^{(n-k-1)}(t), \dots, x''(t), x'(t), x(t)$$

se trouvent dans l'intervalle $t_0 < t < t_{n-1}^{(1)}$ et nous avons de plus:

$$t_0 < t_{n-k}^{(0)} < t_{n-k-1}^{(0)} < \dots < t_2^{(0)} < t_1^{(0)} < t_0^{(0)} < t_{n-1}^{(1)}$$

b) Si $x^{(j)}(t_0) = 0$, ($j = n-1, n-2, \dots, 2, 1$), $x(t_0) < 0$ et si $t_{n-1}^{(1)}$ désigne le *premier* zéro à droite de t_0 , le *premier* zéro $t_0^{(0)}$ à droite de t_0 de la fonction $x(t)$ se trouve dans l'intervalle $t_0 < t < t_{n-1}^{(1)}$.

Dans ces deux cas, pour $t \geq t_{n-1}^{(1)}$ les zéros $t_{n-1}^{(1)}, t_{n-2}^{(1)}, \dots, t_1^{(1)}, t_0^{(1)}$ sont déplacés comme plus haut.

⁴⁾ Voir: J. G. Mikusiński, *Sur les fonctions $k_n(x)$* . Annales de la Société Polonaise de Mathématique, T. 21 (1948), p. 49. Cf. aussi les articles de Fite et de Mikusiński cités sous ¹⁾.

SUR UNE CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QU'UNE FONCTION CONTINUE SOIT MONOTONE

Par T. WAŻEWSKI (Kraków)

§ 1. Soit $f(x)$ une fonction définie dans un intervalle Δ . Si $Q \subset \Delta$, nous désignerons par

$$f(Q)$$

l'image de l'ensemble Q , obtenue par l'intermédiaire de la transformation $y=f(x)$, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les valeurs que prend $f(x)$ lorsque x varie dans Q . Nous désignerons respectivement par

$$\bar{D}_+ f(x), \bar{D}_{(-)} f(x), \underline{D}_+ f(x), \underline{D}_{(-)} f(x)$$

le nombre dérivé supérieur à droite, supérieur à gauche, inférieur à droite et inférieur à gauche de $f(x)$.

On doit à M. A. Zygmund le lemme suivant¹⁾:

Si $f(x)$ est continue dans l'intervalle Δ , $Q \subset \Delta$, l'ensemble $f(Q)$ ne contient aucun intervalle non nul (c'est-à-dire ne se réduisant pas à un seul point) et si

$$(1.1) \quad \underline{D}_+ f(x) < 0 \quad \text{lorsque} \quad x \in \Delta - Q$$

alors la fonction $f(x)$ est décroissante au sens large dans Δ (c'est-à-dire $f(x_2) \leq f(x_1)$ lorsque $x_1 \in \Delta$, $x_2 \in \Delta$, et $x_1 < x_2$).

Ce lemme cesse d'être vrai lorsque l'on affaiblit l'inégalité de la condition (1.1) en supposant que

$$(1.2) \quad \underline{D}_+ f(x) \leq 0 \quad \text{lorsque} \quad x \in \Delta - Q.$$

¹⁾ Cf. par exemple S. Saks, *Théorie de l'intégrale*, p. 137. Le présent énoncé passe en celui de l'auteur lorsque l'on introduit la fonction $F(x) = -f(x)$.

Il existe, en effet, une fonction $f(x)$ continue et croissante au sens large dans l'intervalle $\Delta = [0, 1]$ et telle que

$$(1.3) \quad f(0) < f(1), \quad f'(x) = 0 \quad \text{lorsque } x \in \Delta - Q$$

où Q désigne un ensemble de mesure nulle. Une telle fonction a été construite par Lebesgue ²⁾.

Dans cet exemple, on vérifie facilement que l'ensemble $f(Q)$ ne contient aucun intervalle non nul et que la fonction $f(x)$ n'est pas décroissante au sens large en raison de (1.3).

Il convient de rappeler que le lemme de M. Zygmund permet de déduire de (1.2) la conséquence que $f(x)$ est décroissante au sens large lorsque l'on admet accessoirement que l'ensemble Q est dénombrable ³⁾.

Dans la note présente, nous démontrons que la relation (1.2), jointe à l'hypothèse que l'ensemble $f(Q)$ soit de mesure nulle, constitue la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction continue $f(x)$ soit décroissante au sens large.

L'hypothèse que $f(Q)$ ne contienne aucun intervalle non nul a un caractère topologique. Elle exprime que l'ensemble $f(Q)$ est punctiforme. C'est là que réside la raison pour laquelle la démonstration du lemme de M. Zygmund est si rapide et élémentaire.

L'hypothèse que $f(Q)$ soit de mesure nulle a, au contraire, un caractère métrique; c'est pourquoi la démonstration du lemme qui suit est plus compliquée.

§ 2. Lemme. Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle fermé et borné $[a, b]$. Posons

$$A = f(a), \quad B = f(b)$$

et admettons que

$$(2.1) \quad a < b \quad A = f(a) < f(b) = B.$$

Désignons par W l'ensemble de tous les x pour lesquels

$$(2.2) \quad a \leq x < b \quad \underline{D}_+ f(x) > 0 \quad (\text{ensemble } W).$$

²⁾ H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration* (deuxième édition, Paris 1928). La fonction $\xi(x)$, définie à page 56, jouit des propriétés en question.

³⁾ Cf. S. Saks, loc. cit.

Cela posé, la mesure extérieure (au sens de Lebesgue) de l'ensemble $f(W)$ est supérieure à zéro

$$(2.3) \quad m_e f(W) > 0.$$

Démonstration. I. Désignons par $E(y)$ la classe des x pour lesquels

$$(2.4) \quad x \in [a, b], f(x) = y \quad (\text{ensemble } E(y)).$$

La fonction $f(x)$ étant continue dans $[a, b]$, l'ensemble $E(y)$ est fermé et borné. Si $A = f(a) \leq y \leq f(b) = B$, l'ensemble $E(y)$ est évidemment non vide et il admet un maximum que nous désignerons par $\varrho(y)$

$$(2.5) \quad \varrho(y) = \text{maximum de } E(y).$$

II. La fonction $\varrho(y)$ est donc définie dans l'intervalle fermé $[A, B]$, c'est-à-dire dans l'intervalle $f(a) \leq y \leq f(b)$. De (2.4) et (2.5) résultent immédiatement les propriétés III, IV et V suivantes.

III. Si

$$x \in [a, b], f(x) \in [A, B], \xi = \varrho(f(x))$$

alors

$$a \leq x \leq \xi \leq b.$$

IV. Si

$$y \in [A, B], \xi = \varrho(y) \quad \text{alors} \quad y = f(\xi).$$

V. On a

$$(2.6) \quad \varrho(B) = b.$$

VI. Nous soutenons que la fonction $\varrho(y)$ est croissante au sens strict dans l'intervalle $[A, B] = [f(a), f(b)]$. En effet, admettons que

$$(2.7) \quad f(a) = A \leq y_1 < y_2 \leq B = f(b).$$

Il suffit de prouver que

$$(2.8) \quad \varrho(y_1) < \varrho(y_2).$$

Posons

$$(2.9) \quad \xi_1 = \varrho(y_1), \quad \xi_2 = \varrho(y_2)$$

et admettons, pour la démonstration par l'impossible, que (2.8) n'ait pas lieu. On aura donc

$$(2.10) \quad \xi_1 \geq \xi_2.$$

En vertu de (2.9) et de IV on aura

$$(2.11) \quad y_1 = f(\xi_1), \quad y_2 = f(\xi_2).$$

Si $\xi_1 = \xi_2$, il en résulte que $y_1 = y_2$ contrairement à (2.7).

Reste le cas (cf. 2.10)

$$(2.12) \quad \xi_2 < \xi_1.$$

En vertu de (2.7) et (2.11) il vient

$$(2.13) \quad f(\xi_1) < f(\xi_2) \leq f(b).$$

La fonction $f(x)$, étant continue dans l'intervalle $[\xi_1, b]$, prend dans ce dernier toutes les valeurs y situées dans l'intervalle $[f(\xi_1), f(b)]$ et, en particulier, la valeur $f(\xi_2)$ (cf. 2.13).

Il existe donc un σ

$$(2.14) \quad \xi_1 \leq \sigma \leq b,$$

tel que

$$f(\sigma) = f(\xi_2) = y_2.$$

On a donc en vertu de (2.9)

$$\xi_2 = \varrho(y_2) = \varrho(f(\sigma)).$$

Il s'ensuit, en vertu de la propriété III que $\sigma \leq \xi_2$ et, par suite (cf. 2.12), $\sigma < \xi_1$, ce qui est contraire à (2.14).

La proposition que la fonction $\varrho(y)$ est croissante au sens strict dans l'intervalle $[A, B] = [f(a), f(b)]$ se trouve ainsi démontrée.

En s'appuyant sur la définition de $\varrho(y)$ et sur (2.6), on obtient la relation

$$(2.15) \quad a < \varrho(y) < \varrho(B) = b \quad \text{lorsque} \quad A < y < B.$$

VII. La fonction $\varrho(y)$, étant croissante au sens strict dans l'intervalle $[A, B]$ elle possède, comme on le sait bien, presque partout dans cet intervalle, une dérivée finie et non négative $\varrho'(y)$.

L'ensemble U , composé des y pour lesquels

$$(2.16) \quad A < y < B, \quad 0 \leq \varrho'(y) < +\infty \quad (\text{ensemble } U)$$

aura donc la mesure égale à celle de l'intervalle $[A, B]$, c'est-à-dire (cf. 2.1)

$$m(U) = m([A, B]) = B - A > 0.$$

On a évidemment

$$(2.17) \quad 0 \leq \varrho'(y) < +\infty \quad \text{lorsque } y \in U.$$

VIII. Désignons par V l'image de l'ensemble U que l'on obtient par l'intermédiaire de la transformation $x = \varrho(y)$. On aura évidemment

$$V = \varrho(U) \subset [a, b]$$

$$(2.18) \quad f(V) = U, \quad m(f(V)) = m(U) = B - A > 0.$$

IX. Nous soutenons que

$$(2.19) \quad \underline{D}_+ f(x) > 0 \quad \text{lorsque } x \in V.$$

En effet, admettons que

$$x_0 \in V.$$

Il suffira de prouver que

$$\underline{D}_+ f(x_0) > 0.$$

En vertu de la définition de V , il existe un y_0 tel que

$$(2.20) \quad y_0 \in U, \quad \varrho(y_0) = x_0,$$

et, en raison de (2.16), on aura

$$(2.21) \quad A < y_0 < B, \quad 0 \leq \varrho'(y_0) < +\infty$$

En vertu de (2.15) on a donc

$$a < \varrho(y_0) < \varrho(B) = b$$

c'est-à-dire (cf. 2.20)

$$a < x_0 < b.$$

De (2.20) et de IV il vient

$$(2.22) \quad y_0 = f(x_0).$$

En vertu de la définition de $\underline{D}_+ f(x)$ il existe une suite $\{x_\nu\}$, telle que

$$(2.23) \quad x_0 < x_\nu < b, \quad x_\nu \rightarrow x_0, \quad \frac{f(x_\nu) - f(x_0)}{x_\nu - x_0} \rightarrow \underline{D}_+ f(x_0).$$

Posons

$$(2.24) \quad y_\nu = f(x_\nu).$$

On a

$$(2.25) \quad y_\nu = f(x_\nu) \rightarrow f(x_0) = y_0 \in (A, B)$$

et, par suite,

$$y_\nu \in (A, B)$$

lorsque ν est supérieur à certain indice ν_0 . La fonction $\varrho(y)$ sera donc définie pour $y = y_\nu$ ($\nu > \nu_0$). En posant

$$(2.26) \quad \xi_\nu = \varrho(y_\nu) = \varrho(f(x_\nu))$$

on aura (cf. 2.23 et III)

$$(2.27) \quad x_0 < x_\nu, \quad x_0 < x_\nu \leq \xi_\nu \leq b$$

et, en vertu de (2.24), (2.26) et IV

$$y_\nu = f(\xi_\nu) = f(x_\nu).$$

Comme $\xi_\nu > x_0$ (pour $\nu > \nu_0$), $\xi_\nu = \varrho(y_\nu)$, $x_0 = \varrho(y_0)$ et la fonction $\varrho(y)$ est croissante au sens strict, on voit facilement que

$$(2.28) \quad y_\nu > y_0.$$

Nous avons pour $\nu > \nu_0$ (cf. 2.24, 2.22, 2.28, 2.27, 2.26, 2.20)

$$(2.29) \quad \frac{f(x_\nu) - f(x_0)}{x_\nu - x_0} = \frac{y_\nu - y_0}{x_\nu - x_0} \geq \frac{y_\nu - y_0}{\xi_\nu - x_0} = \frac{y_\nu - y_0}{\varrho(y_\nu) - \varrho(y_0)} > 0.$$

Mais, en raison de (2.20), (2.17) et (2.25), il suit

$$(2.30) \quad \frac{\varrho(y_\nu) - \varrho(y_0)}{y_\nu - y_0} \rightarrow \varrho'(y_0), \quad 0 \leq \varrho'(y_0) < +\infty.$$

On conclut, en vertu de (2.29) et (2.30), que se présente un au moins des cas suivants:

$$\frac{f(x_v) - f(x_0)}{x_v - x_0} \rightarrow +\infty \quad (\text{lorsque } \rho'(y_0) = 0),$$

$$\frac{f(x_v) - f(x_0)}{x_v - x_0} \rightarrow \frac{1}{\rho'(y_0)} > 0 \quad (\text{lorsque } 0 < \rho'(y_0) < +\infty).$$

Il vient, de là et de (2.23), que

$$\underline{D}_+ f(x_0) > 0.$$

Comme x_0 désigne un point quelconque de V , il en résulte que

$$\underline{D}_+ f(x) > 0 \quad \text{lorsque } x \in V.$$

Il s'ensuit, en vertu de la définition de l'ensemble W , (cf. 2.2) que $V \subset W$ et, par suite, $f(V) \subset f(W)$. On en conclut, en raison de (2.18), que

$$m_e f(W) \geq m(f(V)) = B - A > 0.$$

L'inégalité (2.3) se trouve ainsi établie.

§ 3. Théorème 1. *Supposons que la fonction $f(x)$ soit continue dans un intervalle Δ . Désignons par Q la classe des points $x \in \Delta$ pour lesquels*

$$(3.1) \quad \underline{D}_+ f(x) > 0.$$

Cela posé, la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit décroissante au sens large dans Δ , consiste en ce que

$$(3.2) \quad mf(Q) = 0^4).$$

Démonstration. Cette condition est évidemment nécessaire, car $f(x)$ étant décroissante au sens large, on a l'inégalité $\underline{D}_+ f(x) \leq 0$ partout dans Δ sauf peut-être à l'extrémité droite de Δ . L'ensemble Q est donc vide ou bien il se réduit à un seul point et, par suite, (3.2) a lieu.

⁴) $mf(Q)$ désigne la mesure au sens de Lebesgue de l'image $f(Q)$ de Q par l'intermédiaire de la transformation $y = f(x)$.

Passons à la suffisance de notre condition. Supposons, pour la démonstration par l'impossible, qu'il existe deux points $a \in \Delta$, $b \in \Delta$, ($a < b$), tels que $f(a) < f(b)$. Désignons par W la classe des points x de l'intervalle $[a, b]$ pour lesquels $\underline{D}_+ f(x) > 0$. En vertu du lemme précédent il vient

$$(3.3) \quad m_e f(W) > 0.$$

D'autre part on a évidemment $W \subset Q$ et, par suite, (cf. 3.2) $0 \leq m_e f(W) \leq m_e f(Q) = m f(Q) = 0$, c'est-à-dire $m_e f(W) = 0$, ce qui est incompatible avec (3.3).

§ 4. On dit qu'une fonction $f(x)$, définie dans un intervalle Δ , satisfait, dans celui-ci, à la condition N de M. Lusin lorsque, pour tout ensemble $A \subset \Delta$, tel que $m A = 0$ on a $m f(A) = 0$.

En s'appuyant sur le théorème précédent on obtient immédiatement le théorème suivant.

Théorème 2. *Si la fonction $f(x)$ continue dans un intervalle Δ , satisfait, dans, ce dernier, à la condition N de M. Lusin et si l'inégalité*

$$(4.1) \quad \underline{D}_+ f(x) \leq 0$$

a lieu presque partout dans Δ , alors la fonction $f(x)$ est décroissante au sens large dans cet intervalle.

Remarque 1. Le Théorème 1 reste vrai lorsque l'on y remplace l'inégalité (3.1) par la suivante

$$\underline{D}_{(-)} f(x) > 0.$$

Lorsque l'on y remplace (3.1) par l'une des inégalités

$$\bar{D}_+ f(x) < 0 \quad \text{ou} \quad \bar{D}_{(-)} f(x) < 0$$

on obtient les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction $f(x)$ soit croissante au sens large dans l'intervalle Δ . Il suffit, en effet d'appliquer une des transformations: $x = X$, $y = -Y$ ou $x = -X$, $y = \pm Y$ pour ramener chacun de ces trois cas au Théorème 1.

Remarque 2. En s'appuyant sur la remarque précédente on voit que le Théorème 2 reste vrai lorsque l'on y remplace l'inégalité (4.1) par l'inégalité $\underline{D}_{(-)}f(x) \leq 0$.

Lorsque l'on y remplace (4.1) par l'une des inégalités

$$\bar{D}_+f(x) \geq 0, \quad \bar{D}_{(-)}f(x) \geq 0$$

on obtient la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue, jouissant de la propriété N de M. Lusin dans l'intervalle Δ , soit croissante au sens large dans cet intervalle.

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

**ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE
DE MATHÉMATIQUE**

FONDÉES EN 1921 par STANISŁAW ZAREMBA

Rédacteur FRANCISZEK LEJA

Membres de la Rédaction

STANISŁAW GOŁĄB

TADEUSZ WAŻEWSKI

TOME XXIV
ANNÉE 1951, FASCICULE II

KRAKÓW 1953

POLSKIE TOWARZYSTWO MATEMATYCZNE
UL. ŚW. JANA 22

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE
DE MATHÉMATIQUE

FONDEURS EN 1911 M. STANISŁAW ZAREMBA

REDACTEUR EN CHEF M. STANISŁAW ZAREMBA

REDACTEUR ADJUT M. STANISŁAW ZAREMBA

REDACTEUR EN CHEF M. STANISŁAW ZAREMBA

REDACTEUR ADJUT M. STANISŁAW ZAREMBA

XIV
10 1760
III

POLSKIE TOWARZYSTWO MATEMATYCZNE

Nakład 1000 egz. — ark. wyd. 16 — ark. druk. $13\frac{1}{2}$ — Papier druk. sat. kl. III, B1, 100 g (16)
Oddano do skład. 20. V. 1953 — Podpisano do druku 15. XII. 1953 — Druk ukończ. w styczniu 1954
Krakowska Drukarnia Naukowa, Kraków — Czapskich 4 — Zam. 248/53

SUR LES SYSTÈMES D'INÉGALITÉS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES REMPLIES EN DEHORS DE CERTAINS ENSEMBLES

Par J. SZARSKI (Kraków)

Introduction. Nous allons nous occuper dans cette note des systèmes d'inégalités différentielles ordinaires de la forme

$$(1) \quad \bar{D}^+ \varphi^i(x) \leq f^i(x, \varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x)) \quad (i=1, \dots, n),$$

où $\bar{D}^+ \varphi(x)$ désigne la dérivée supérieure droite de $\varphi(x)$ et les inégalités (1) sont supposées être satisfaites en dehors d'un ensemble jouissant d'une certaine propriété.

Afin d'expliquer cette propriété, considérons un système d'équations différentielles

$$(2) \quad \frac{dy^i}{dx} = g^i(x, y^1, \dots, y^n) \quad (i=1, \dots, n),$$

où les fonctions $g^i(x, y^1, \dots, y^n)$ sont supposées être de la classe C^1 dans un ensemble ouvert ω et soit Z un ensemble contenu dans ω . Désignons par $E_g(Z)$ la zone d'émission droite de l'ensemble Z , c'est-à-dire l'ensemble des points situés sur les intégrales du système (2) issues des points de l'ensemble Z et prolongées à droite. Pour un \bar{x} donné, désignons par $T_g(Z, \bar{x})$ l'intersection de l'ensemble $E_g(Z)$ avec le plan $x = \bar{x}$ (cet ensemble peut être évidemment vide).

Propriété P de l'ensemble Z. Nous disons que l'ensemble Z jouit de la propriété P par rapport au système (2), lorsque pour tout \bar{x} les projections de l'ensemble $T_g(Z, \bar{x})$ sur les axes des coordonnées y^1, \dots, y^n ne contiennent aucun segment.

Théorème 1. *Supposons que les fonctions $f^i(x, y^1, \dots, y^n)$, ($i=1, \dots, n$) soient continues dans un ensemble ouvert Ω et qu'elles y satisfassent aux hypothèses suivantes:*

1° Si pour un i quelconque

$$(3) \quad \bar{y}^v \leq \tilde{y}^v \quad (v=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n)$$

alors

$$(4) \quad f^i(x, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^{i-1}, \tilde{y}^i, \bar{y}^{i+1}, \dots, \bar{y}^n) \leq f^i(x, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^{i-1}, \tilde{y}^i, \tilde{y}^{i+1}, \dots, \tilde{y}^n).$$

¹) $\underline{D}^+ \varphi(x)$ désignera la dérivée inférieure droite de $\varphi(x)$.

2° Soit

$$(5) \quad y' = \psi^i(x) \quad (i=1, \dots, n)$$

*l'intégrale supérieure à droite*²⁾ *du système*

$$(6) \quad \frac{dy^i}{dx} = f^i(x, y^1, \dots, y^n) \quad (i=1, \dots, n)$$

issue du point $P_0(x_0, y_0^1, \dots, y_0^n)$ *et définie dans l'intervalle*

$$(7) \quad x_0 \leq x < x_0 + a.$$

3° Soit

$$(8) \quad y' = \varphi^i(x) \quad (i=1, \dots, n)$$

une courbe continue dans l'intervalle (7) située dans Ω *et telle que*

$$(9) \quad \varphi^i(x_0) \leq \psi^i(x_0) = y_0^i \quad (i=1, \dots, n).$$

Désignons par Z *l'ensemble des points de la courbe (8) dans lesquels une au moins des inégalités (1) est en défaut.*

4° *Supposons que, pour tout système d'équations différentielles (2) dont les seconds membres sont de la classe* C^1 *dans un ensemble ouvert* $\omega \subset \Omega$ *et* y *satisfont aux inégalités*

$$(10) \quad f^i(x, y^1, \dots, y^n) \leq g^i(x, y^1, \dots, y^n) \quad (i=1, \dots, n)$$

l'ensemble $Z \cdot \omega$ *jouisse de la propriété* P *par rapport au système (2).*

Dans ces hypothèses les inégalités

$$(11) \quad \varphi^i(x) \leq \psi^i(x) \quad (i=1, \dots, n)$$

sont vérifiées dans l'intervalle (7).

Avant de passer à la démonstration de notre théorème, nous démontrerons trois lemmes.

§ 1. Lemme 1. *Supposons que les fonctions* $f^i(x, y^1, \dots, y^n)$, $(i=1, \dots, n)$ *soient de la classe* C^1 *dans* Ω *et que les hypothèses* 1° *et* 2° *soient satisfaites*³⁾. *Supposons ensuite que*

3° *la courbe (8) passe par le point* $P_0(x_0, y_0^1, \dots, y_0^n)$, *c'est-à-dire*

$$(12) \quad \varphi^i(x_0) = \psi^i(x_0) \quad (i=1, \dots, n)$$

et que

²⁾ Pour la définition et l'existence de cette intégrale dans l'hypothèse 1°, voir E. Kamke, *Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Acta Math. T. 58, p. 78, Satz 7.

³⁾ Dans les hypothèses du Lemme 1 la courbe (5) est l'unique intégrale du système (6), issue du point P_0 .

4^o l'ensemble Z_0 des points de la courbe (8) dans lesquels une au moins des inégalités

$$(13) \quad \bar{D}^+ \varphi^i(x) < f^i(x, \varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x)) \quad (i=1, \dots, n)$$

est en défaut, jouisse de la propriété P par rapport au système (6).

Ceci supposé, les inégalités (11) sont vérifiées dans un voisinage à droite du point x_0 .

Démonstration. Désignons par

$$(14) \quad y^i = \hat{y}^i(x, \xi, \eta^1, \dots, \eta^n) \quad (i=1, \dots, n)$$

l'intégrale du système (6) passant par le point $(\xi, \eta^1, \dots, \eta^n)$. Les fonctions $\hat{y}^i(x, \xi, \eta^1, \dots, \eta^n)$ sont de la classe C^1 partout où elles sont définies et remplissent les identités ⁴⁾

$$(15) \quad \hat{y}_\xi^i(x, \xi, \eta^1, \dots, \eta^n) + \sum_{j=1}^n f^j(\xi, \eta^1, \dots, \eta^n) \hat{y}_{\eta^j}^i(x, \xi, \eta^1, \dots, \eta^n) \equiv 0 \quad (i=1, \dots, n)$$

En vertu de l'hypothèse 1^o on a pour $x \geq \xi$ ⁵⁾

$$(16) \quad \hat{y}_{\eta^j}^i(x, \xi, \eta^1, \dots, \eta^n) \geq 0 \quad (i, j=1, \dots, n).$$

Il existe évidemment un nombre $b > 0$, tel que chaque intégrale (14) passant par un point $(\xi, \eta^1, \dots, \eta^n)$ qui appartient au cube

$$(17) \quad |\xi - x_0| < b; \quad |\eta^i - y_0^i| < b \quad (i=1, \dots, n)$$

est définie dans l'intervalle

$$(18) \quad |x - x_0| < b.$$

Désignons enfin par $c \leq b$ le nombre positif tel que la courbe (8) soit située à l'intérieur du cube (17) pour x appartenant à l'intervalle

$$(19) \quad x_0 \leq x < x_0 + c.$$

Nous allons prouver que les inégalités (11) sont remplies dans l'intervalle (19).

En effet, soit \bar{x} un point quelconque appartenant à l'intervalle (19). D'après la définition du cube (17) et de l'intervalle (19) les fonctions $\hat{y}^i(\bar{x}, \xi, \eta^1, \dots, \eta^n)$ sont de la classe C^1 dans le cube (17). Il en résulte que les fonctions

$$(20) \quad \Phi^i(x) = \hat{y}^i(\bar{x}, x, \varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x)) \quad (i=1, \dots, n)$$

sont continues dans l'intervalle

$$(21) \quad x_0 \leq x \leq \bar{x}.$$

⁴⁾ E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1920, p. 155, Satz 1.

⁵⁾ J. Szarski, *Sur un système d'inégalités différentielles*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, t. XX, p. 128.

En vertu de (16) et de ce que les dérivées $\hat{y}_{i,j}^i(x, \xi, \eta^1, \dots, \eta^n)$ ne peuvent s'annuler toutes à la fois, on a — en chaque point de l'intervalle (21) où le système d'inégalités (13) est rempli — les inégalités

$$(22) \quad \underline{D}^+ \Phi^i(x) \leq \hat{y}_{i,i}^i(\bar{x}, x, \varphi^k(x)) + \sum_{j=1}^n \hat{y}_{i,j}^i(\bar{x}, x, \varphi^k(x)) \bar{D}^+ \varphi^j(x) \\ < \hat{y}_{i,i}^i(\bar{x}, x, \varphi^k(x)) + \sum_{j=1}^n \hat{y}_{i,j}^i(\bar{x}, x, \varphi^k(x)) f^j(x, \varphi^k(x)) \quad (i=1, \dots, n).$$

Il s'ensuit d'après (15)

$$(23) \quad \underline{D}^+ \Phi^i(x) < 0 \quad (i=1, \dots, n)$$

en tout point de l'intervalle (21) où les inégalités (13) ont lieu. Désignons par A_i l'ensemble des points de l'intervalle (21) dans lesquels l'inégalité (23) est en défaut. D'après ce que nous venons de constater, une au moins des inégalités (13) n'est pas remplie dans A_i . L'ensemble Z_i des points correspondants sur la courbe (8) fait donc partie de l'ensemble Z_0 et par conséquent, en vertu de 4^o, jouit de la propriété P par rapport au système (6). Il en résulte, en particulier, que la projection de l'ensemble $T_f(Z_i, \bar{x})$ sur l'axe y^i ne contient aucun segment. Mais il est aisé de voir que cette projection est l'image de l'ensemble A_i par la fonction Φ^i . Nous venons ainsi de constater que l'image par la fonction Φ^i de l'ensemble A_i , où l'inégalité (23) est en défaut, ne contient aucun segment.

En vertu d'un théorème de Zygmund ⁶⁾, il en résulte que la fonction $\Phi^i(x)$ est non-croissante dans l'intervalle (21). Nous avons donc en particulier

$$(24) \quad \Phi^i(\bar{x}) \leq \Phi^i(x_0) \quad (i=1, \dots, n).$$

D'autre part, d'après la définition des fonctions $\hat{y}^i(x, \xi, \eta^1, \dots, \eta^n)$

$$(25) \quad \Phi^i(\bar{x}) = \hat{y}^i(\bar{x}, \bar{x}, \varphi^1(\bar{x}), \dots, \varphi^n(\bar{x})) = \varphi^i(\bar{x}) \quad (i=1, \dots, n)$$

et d'après (12)

$$(26) \quad \varphi^i(x_0) = \hat{y}^i(\bar{x}, x_0, \varphi^1(x_0), \dots, \varphi^n(x_0)) = \hat{y}^i(\bar{x}, x_0, \psi^1(x_0), \dots, \psi^n(x_0)) = \psi^i(x_0).$$

Rapprochant les relations (24), (25) et (26) nous obtenons

$$(27) \quad \varphi^i(\bar{x}) \leq \psi^i(\bar{x}) \quad (i=1, \dots, n).$$

Le point \bar{x} étant un point arbitraire de l'intervalle (19) le Lemme 1 est ainsi démontré.

Lemme 2. *Le Lemme 1 reste vrai, lorsqu'on remplace les égalités (12) par les inégalités (9).*

⁶⁾ S. Saks, *Theory of the integral*, 1937, p. 203.

Démonstration. Désignons par $y^i = \bar{\varphi}^i(x)$ l'intégrale du système (6) issue du point $(x_0, \varphi^1(x_0), \dots, \varphi^n(x_0))$, c'est-à-dire

$$(28) \quad \varphi^i(x_0) = \bar{\varphi}^i(x_0) \quad (i = 1, \dots, n)$$

En vertu du Lemme 1, on a les inégalités

$$(29) \quad \varphi^i(x) \leq \bar{\varphi}^i(x) \quad (i = 1, \dots, n)$$

dans un voisinage à droite de x_0 . D'autre part, selon (9) et (28),

$$(30) \quad \bar{\varphi}^i(x_0) \leq \psi^i(x_0) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Il en résulte que⁷⁾

$$(31) \quad \bar{\varphi}^i(x) \leq \psi^i(x) \quad (i = 1, \dots, n)$$

dans un voisinage à droite du point x_0 . En rapprochant les inégalités (29) et (31), nous obtenons la proposition du Lemme 2.

Lemme 3. Dans les hypothèses du Lemme 1, avec les égalités (12) remplacées par les inégalités (9), les inégalités (11) sont remplies dans l'intervalle (7) tout entier.

Démonstration. En vertu du Lemme 2 les inégalités (11) sont vérifiées dans un voisinage à droite du point x_0 . Désignons par \tilde{x} la borne supérieure des points x appartenant à l'intervalle (7) et tels que les inégalités (11) ont lieu dans l'intervalle $[x_0, x)$. Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer que $\tilde{x} = x_0 + a$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait $\tilde{x} < x_0 + a$ et en vertu de la continuité $\varphi^i(\tilde{x}) \leq \psi^i(\tilde{x})$. En appliquant le Lemme 2 au point \tilde{x} (au lieu du point x_0) on arriverait donc à contredire la définition du point \tilde{x} .

§ 2. *Démonstration du Théorème 1.* Il suffit évidemment de prouver que les inégalités (11) ont lieu dans tout intervalle fermé $[x_0, \tilde{x}]$, où $x_0 < \tilde{x} < x_0 + a$. Fixons donc l'intervalle $[x_0, \tilde{x}]$ et soit ω un ensemble ouvert et borné, contenu avec sa frontière dans Ω et contenant les courbes (5) et (8) envisagées dans l'intervalle qui vient d'être fixé. Désignons par $K_\nu(x, y^1, \dots, y^n)$ le cube de demi-coté $1/\nu$ et au centre $P(x, y^1, \dots, y^n)$. Lorsque N est un nombre naturel suffisamment grand, chaque cube K_ν , dont le centre appartient à la fermeture $\bar{\omega}$ est contenu dans Ω pour $\nu \geq N$.

Posons pour tout $P(x, y^1, \dots, y^n)$ appartenant à $\bar{\omega}$

$$(32) \quad f_\nu^i(x, y^1, \dots, y^n) = \frac{\int \int \dots \int f^i(\xi, \eta^1, \dots, \eta^n) d\xi d\eta^1 \dots d\eta^n}{\left(\frac{2}{\nu}\right)^{n+1}} \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ \nu \geq N \end{array} \right).$$

⁷⁾ Cf. ²⁾, E. Kamke, loc. cit., p. 82, Satz 6.

Les fonctions ainsi définies sont de la classe C^1 , satisfont à l'hypothèse 1^o ⁸⁾ et tendent uniformément vers f^i dans $\bar{\omega}$ ⁹⁾. Nous pouvons supposer (en prenant au besoin une suite partielle) qu'on ait

$$(33) \quad |f'_\nu - f^i| < \frac{1}{\nu} \quad (i=1, \dots, n; \nu \geq N)$$

dans $\bar{\omega}$. Posons

$$(34) \quad g'_\nu(x, y^1, \dots, y^n) = f^i_\nu(x, y^1, \dots, y^n) + \frac{1}{\nu} \quad (i=1, \dots, n; \nu \geq N).$$

Les fonctions (34) jouissent des propriétés suivantes:

- (α) g'_ν sont de la classe C^1 dans ω ;
- (β) $g'_\nu > f^i$ dans ω (en vertu de (33) et (34));
- (γ) $\lim_{\nu \rightarrow \infty} g'_\nu = f^i$ uniformément dans $\bar{\omega}$;
- (δ) g'_ν satisfont à l'hypothèse 1^o dans ω .

Considérons le système d'équations différentielles

$$(S_\nu) \quad \frac{dy^i}{dx} = g'_\nu(x, y^1, \dots, y^n) \quad (i=1, \dots, n)$$

et soit

$$(35) \quad y^i = \varphi^i_\nu(x) \quad (i=1, \dots, n)$$

l'intégrale du système (S_ν) issue du point $P_0(x_0, y^1_0, \dots, y^n_0)$. Désignons par Z_ν l'ensemble des points de la courbe (8) dans lesquels une au moins des inégalités différentielles

$$(I_\nu) \quad \bar{D}^+ \varphi^i(x) < g'_\nu(x, \varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x)) \quad (i=1, \dots, n)$$

est en défaut. En vertu de (β) l'ensemble Z_ν fait partie de l'ensemble Z et par conséquent, d'après l'hypothèse 4^o,

(ϵ) l'ensemble Z_ν jouit de la propriété P par rapport au système (S_ν) .

D'après (γ), à partir d'un indice ν suffisamment grand, les intégrales (35) existent dans l'intervalle $[x_0, \tilde{x}]$ et, en vertu de (β) et (δ), y tendent uniformément vers l'intégrale (5), c'est-à-dire qu'on a uniformément ¹⁰⁾

$$(36) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi^i_\nu(x) = \varphi^i(x) \quad (i=1, \dots, n).$$

⁸⁾ Voir l'énoncé du théorème 1 où l'on doit remplacer dans 1^o, f^i par f^i_ν .

⁹⁾ J. Szarski, *Sur une méthode d'approximation des fonctions*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, t. XX, p. 121.

¹⁰⁾ Cf. ²⁾, E. Kamke, loc. cit., p. 80, Satz 8.

D'autre part, en vertu des propriétés (α) , (δ) , (ε) et du Lemme 3, nous avons dans l'intervalle $[x_0, \tilde{x}]$ les inégalités

$$(37) \quad \varphi^i(x) \leq \psi_\nu^i(x) \quad (i=1, \dots, n)$$

pour ν suffisamment grand. Les relations (36) et (37) entraînent les inégalités (11) dans l'intervalle $[x_0, \tilde{x}]$, ce qui termine la démonstration.

§ 3. Théorème 2. *Supposons que toutes les hypothèses du Théorème 1, à l'exception de 4^o, soient remplies. Désignons par A l'ensemble des points de l'intervalle (7) dans lesquels une au moins des inégalités*

$$(38) \quad \underline{D}^+ \varphi^i(x) < f^i(x, \varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x)) \quad (i=1, \dots, n)$$

est en défaut, et admettons que pour tout i

4^{o'} l'image A_i de l'ensemble A par l'intermédiaire de la fonction

$$(39) \quad F^i(x) = \varphi^i(x) - \int_{x_0}^x f^i(x, \varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x)) dx$$

ne contienne aucun segment.

Dans ces hypothèses les inégalités (11) sont vérifiées dans l'intervalle (7).

Démonstration. On voit aisément que

$$(40) \quad \underline{D}^+ F^i(x) = \underline{D}^+ \varphi^i(x) - f^i(x, \varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x)).$$

D'après (40) l'inégalité (38) implique l'inégalité

$$(41) \quad \underline{D}^+ F^i(x) < 0.$$

Il en résulte, en vertu de l'hypothèse 4^{o'}, que l'image par l'intermédiaire de la fonction $F^i(x)$ de l'ensemble des points x , dans lesquels l'inégalité (41) est en défaut, ne contient aucun segment. La fonction $F^i(x)$ étant évidemment continue, on en conclut, d'après le théorème de Zygmund¹¹⁾ qu'elle est non-croissante dans l'intervalle (7) et par conséquent

$$(42) \quad \overline{D}^+ F^i(x) \leq 0$$

partout dans l'intervalle (7). D'après (39) et (42) les inégalités (1) sont donc remplies partout, d'où l'on obtient la thèse du Théorème 2 en vertu d'un théorème démontré par T. Ważewski¹²⁾.

Applications particulières. Nous montrerons à titre d'exemple, comment deux théorèmes connus sur les inégalités différentielles, peuvent être déduits du Théorème 2.

¹¹⁾ Cf. ⁶⁾.

¹²⁾ T. Ważewski, *Systèmes d'équations et d'inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, t. XXIII, Théorème 2, p. 124.

I. Le Théorème 2 subsiste, lorsque l'ensemble A des points x , dans lesquels les inégalités (38) ne sont pas remplies, est au plus dénombrable. En effet, dans ce cas-là les ensembles A_i sont aussi au plus dénombrables et ne contiennent aucun segment.

II. Le Théorème 2 subsiste, lorsque $\varphi^i(x)$ sont des fonctions absolument continues généralisées et satisfont au système d'inégalités (38) presque partout dans l'intervalle (7)¹³⁾.

En effet, dans ces hypothèses $F^i(x)$ sont aussi absolument continues généralisées et l'ensemble A est de mesure nulle. Il en résulte¹⁴⁾ que l'ensemble A_i qui est l'image de l'ensemble A par l'intermédiaire de la fonction $F^i(x)$, est aussi de mesure nulle et par conséquent ne contient aucun segment¹⁵⁾.

¹³⁾ Cf. ⁵⁾.

¹⁴⁾ S. Saks, *Theory of the integral*, 1937, p. 223.

¹⁵⁾ Dans le cas des inégalités faibles (38) on considère la fonction $F^i(x) - \varepsilon x$, où $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

SUR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE COMPLÈTEMENT INTÉGRABLE

Par J. SZARSKI (Kraków)

Le but de cette note est d'évaluer le domaine d'existence de la solution du problème de Cauchy, relatif au système d'équations différentielles de la forme

$$(1) \quad \frac{\partial z_\mu}{\partial x_\alpha} = f_\alpha^\mu \left(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m, \frac{\partial z_\mu}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z_\mu}{\partial y_n} \right) \\ (\mu = 1, 2, \dots, m; \alpha = 1, 2, \dots, k)$$

Nous allons déduire cette évaluation des résultats, obtenus antérieurement par T. Wazewski, pour le cas $m = k = 1$ ¹⁾, en faisant intervenir la transformation de Mayer. Avant de passer au théorème concernant le système (1), nous formulerons un théorème dans le cas particulier $k = 1$, c'est-à-dire dans le cas où le système (1) a la forme

$$(2) \quad \frac{\partial z_\mu}{\partial x} = f^\mu \left(x, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m, \frac{\partial z_\mu}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z_\mu}{\partial y_n} \right) \quad (\mu = 1, 2, \dots, n).$$

Théorème (W). Supposons que les fonctions

$$f^\mu(x, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m, q_1^\mu, \dots, q_n^\mu) \quad (\mu = 1, 2, \dots, n)$$

soient de la classe C^3 dans le cube

$$(3) \quad |x - \bar{x}| \leq a; \quad |y_i - \bar{y}_i| \leq a; \quad |z_\mu - \bar{z}_\mu| \leq a; \quad |q_i^\mu - \bar{q}_i^\mu| \leq a;$$

leurs dérivées du premier, du deuxième et du troisième ordre par rapport aux variables $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m, q_1^\mu, \dots, q_n^\mu$ étant absolument inférieures à un nombre positif M . Soient

$$\omega_\mu(y_1, \dots, y_n) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

des fonctions possédant dans le cube

$$(4) \quad |y_i - \bar{y}_i| \leq a$$

les dérivées partielles jusqu'au troisième ordre continues et absolument inférieures au nombre M .

¹⁾ T. Wazewski, *Sur l'appréciation du domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, t. XIV, Théorème 2, p. 169.

Supposons ensuite qu'on ait les inégalités

$$(5) \quad |\dot{q}_i^\mu| < M; \quad |\omega_\mu(\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n) - \dot{z}_\mu| < \frac{a}{4}; \quad \left| \frac{\partial \omega_\mu(\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n)}{\partial y_i} - \dot{q}_i^\mu \right| < \frac{a}{4}$$

et posons

$$(6) \quad c(M, m, n) = [8M(m+n)]^{-1} [1 + 2M(m+n)]^{-2}$$

$$(7) \quad r(M, m, n) = 2M + \frac{1}{2(m+n)},$$

$$(8) \quad N(M, m, n) = M[1 + 3mr(M, m, n) + m^2r^2(M, m, n)],$$

$$(9) \quad b(M, m, n, a) = a^2\{(n+1)[N(M, m, n) + a + 1]\}^{-5},$$

$$(10) \quad \delta(M, m, n, a) = \min [c(M, m, n), b(M, m, n, a)].$$

Ceci supposé, le système (2) possède une solution unique $\chi_\mu(x, y_1, \dots, y_n)$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$) dans l'ensemble

$$(11) \quad \begin{aligned} |x - \bar{x}| &< \delta(M, m, n, a); \\ |y_i - \dot{y}_i| &\leq a\{4n[N(M, m, n) + 1]\}^{-1} - N(M, m, n) |x - \bar{x}| \end{aligned}$$

qui est de la classe C^2 dans l'ensemble (11) et satisfait aux conditions initiales

$$(12) \quad \chi_\mu(\bar{x}, y_1, \dots, y_n) = \omega_\mu(y_1, \dots, y_n)$$

dans le cube

$$(13) \quad |y_i - \dot{y}_i| \leq a\{4n[N(M, m, n) + 1]\}^{-1}.$$

Le théorème qui vient d'être énoncé résulte immédiatement du théorème cité plus haut¹⁾, lorsqu'on applique au système (2) le procédé des approximations successives, employé par T. Ważewski, dans son travail sur les systèmes de la forme (2)²⁾.

Nous déduirons à présent du Théorème (W) un lemme.

Lemme. Conservons toutes les hypothèses du Théorème (W) en admettant que les seconds membres du système (2) dépendent de certains paramètres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, de façon que leurs dérivées par rapport aux variables $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m, q_1^\mu, \dots, q_n^\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ jusqu'au troisième ordre soient continues et absolument inférieures au nombre M dans le produit cartésien du cube (3) et du cube

$$(14) \quad |\lambda_\alpha| \leq a \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

Pour $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ fixes désignons par $\chi_\mu(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$, ($\mu = 1, 2, \dots, m$), l'unique solution du système

$$(15) \quad \frac{\partial z_\mu}{\partial x} = f^\mu \left(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k, z_1, \dots, z_m, \frac{\partial z_\mu}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z_\mu}{\partial y_n} \right) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

²⁾ T. Ważewski, Sur le problème de Cauchy relatif à un système d'équations aux dérivées partielles, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, t. XV, p. 101.

satisfaisant aux conditions initiales (12), dont l'existence dans l'ensemble (11) est assurée par le Théorème (W). Nous affirmons que dans nos hypothèses les fonctions $\chi_\mu(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ admettent les dérivées par rapport à toutes les variables, jusqu'au deuxième ordre continues dans l'ensemble

$$|x - \bar{x}| < \delta(M, m, n + k, a);$$

$$(16) \quad |y_i - \bar{y}_i| \leq a\{4(n+k)[N(M, m, n+k) + 1]\}^{-1} - N(M, m, n+k)|\bar{x} - \bar{x}|,$$

$$|\lambda_\alpha| \leq a\{4(n+k)[N(M, m, n+k) + 1]\}^{-1} - N(M, m, n+k)|x - \bar{x}|.$$

Démonstration. Le système (15) peut être considéré comme un système de la forme (2) sans paramètres mais avec $n+k$ variables $y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k$. En vertu de nos hypothèses et du Théorème (W) nous obtenons la thèse du Lemme.

Nous passons à présent au théorème qui fait objet de la note présente.

Théorème. Supposons que 1° les fonctions $f_\alpha''(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m, q_1'', \dots, q_n'')$, soient de la classe C^3 , 2° leurs dérivées du premier, du deuxième et du troisième ordre par rapport aux variables $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m, q_1'', \dots, q_n''$ soient absolument inférieures à un nombre positif L dans le cube

$$(17) \quad |x_\alpha - \bar{x}_\alpha| \leq a; \quad |y_i - \bar{y}_i| \leq a; \quad |z_\mu - \bar{z}_\mu| \leq a; \quad |q_i'' - \bar{q}_i''| \leq a,$$

3° le système (1) soit complètement intégrable c'est-à-dire que les identités

$$(18) \quad \frac{\partial f_\alpha''}{\partial x_\beta} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\alpha''}{\partial q_i''} \frac{\partial f_\beta''}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial f_\alpha''}{\partial q_i''} \frac{\partial f_\beta''}{\partial z_\nu} q_i'' + \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial f_\alpha''}{\partial z_\nu} f_\beta''$$

$$\equiv \frac{\partial f_\beta''}{\partial x_\alpha} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\beta''}{\partial q_i''} \frac{\partial f_\alpha''}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial f_\beta''}{\partial q_i''} \frac{\partial f_\alpha''}{\partial z_\nu} q_i'' + \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial f_\beta''}{\partial z_\nu} f_\alpha''$$

soient remplies dans le cube (17).

Soient $\omega_\mu(y_1, \dots, y_n)$, ($\mu = 1, 2, \dots, m$), des fonctions possédant les dérivées partielles jusqu'au troisième ordre continues et absolument inférieures au nombre L dans le cube (4).

Admettons qu'on ait les inégalités

$$(19) \quad |\bar{q}_i''| < L; \quad |\omega_\mu(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) - \bar{z}_\mu| < \frac{a}{4}; \quad \left| \frac{\partial \omega_\mu(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)}{\partial y_i} - \bar{q}_i'' \right| < \frac{a}{4}$$

et posons

$$(20) \quad d = \min(1, a),$$

$$(21) \quad \beta(L, m, n, k, a) = \min \left[\delta(3L + akL, m, n+k, d), \frac{1}{kL} \right],$$

$$(22) \quad \alpha(L, m, n, k, a) = a\{4(n+k)[N(3L + akL, m, n+k) + 1]\}^{-1} - N(3L + akL, m, n+k)\beta(L, m, n, k, a); \quad (\text{cf. (6)-(10)}),$$

$$(23) \quad \gamma(L, m, n, k, a) = \alpha(L, m, n, k, a)\beta(L, m, n, k, a).$$

Ceci supposé, le système (1) possède une solution unique $z_\mu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$, ($\mu = 1, 2, \dots, m$), dans l'ensemble

$$(24) \quad |x_\alpha - \bar{x}_\alpha| < \gamma(L, m, n, k, a); \quad |y_i - \bar{y}_i| \leq \alpha(L, m, n, k, a) - L \sum_{\beta=1}^k |x_\beta - \bar{x}_\beta|,$$

qui y est de la classe C^2 et satisfait aux conditions initiales

$$(25) \quad z_\mu(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, y_1, \dots, y_n) = \omega_\mu(y_1, \dots, y_n)$$

dans le cube

$$(26) \quad |y_i - \bar{y}_i| \leq \alpha(L, m, n, k, a).$$

Démonstration. Nous démontrerons d'abord l'unicité de la solution déterminée par les valeurs initiales (25) dans l'ensemble (24). En effet, introduisons la transformation de Mayer

$$(27) \quad x_\alpha = \bar{x}_\alpha + \lambda_\alpha x \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k),$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont des paramètres vérifiant les inégalités

$$(28) \quad |\lambda_\beta| \leq \alpha(L, m, n, k, a) \quad (\beta = 1, 2, \dots, k),$$

et soit $z_\mu(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$ une solution du système (1) dans l'ensemble (24) satisfaisant aux conditions (25). Fixons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ et posons

$$(29) \quad \chi_\mu(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = z_\mu(\bar{x}_1 + \lambda_1 x, \dots, \bar{x}_k + \lambda_k x, y_1, \dots, y_n)$$

pour (x, y_1, \dots, y_n) appartenant à l'ensemble

$$(30) \quad |x| < \beta(L, m, n, k, a); \quad |y_i - \bar{y}_i| \leq \alpha(L, m, n, k, a) - L \sum_{\beta=1}^k |\lambda_\beta| |x|.$$

On voit alors que les fonctions χ_μ ainsi définies satisfont au système d'équations

$$(31) \quad \frac{\partial \chi_\mu}{\partial x} = F^\mu \left(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \chi_1, \dots, \chi_m, \frac{\partial \chi_\mu}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \chi_\mu}{\partial y_n} \right) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

et aux conditions initiales

$$(32) \quad \chi_\mu(0, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = \omega_\mu(y_1, \dots, y_n)$$

dans l'ensemble (30), où l'on a posé

$$(33) \quad \begin{aligned} & F^\mu(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k, z_1, \dots, z_m, q_1^\mu, \dots, q_n^\mu) \\ &= \sum_{\beta=1}^k \lambda_\beta f_\beta^\mu(\bar{x}_1 + \lambda_1 x, \dots, \bar{x}_k + \lambda_k x, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m, q_1^\mu, \dots, q_n^\mu). \end{aligned}$$

Or, d'après (33) et en vertu des hypothèses sur les fonctions f_α^μ , les dérivées du premier ordre des fonctions F^μ par rapport aux variables q_1^μ, \dots, q_n^μ

sont absolument inférieures au nombre $L \sum_{\beta=1}^k \lambda_{\beta}$. Il en résulte, en vertu de l'unicité des solutions du système de la forme (31), déterminées par les valeurs initiales (32) dans l'ensemble de la forme (30)³⁾, que les valeurs initiales (25) déterminent la solution du système (1) dans l'ensemble (24) d'une façon univoque.

Nous passons à présent à la démonstration de l'existence de la solution du problème.

Nous démontrerons d'abord que, pour tout système fixe de paramètres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ vérifiant les inégalités

$$(34) \quad |\lambda_{\beta}| \leq a(L, m, n, k, a) \quad (\beta = 1, 2, \dots, k),$$

le système (31) possède une solution $\chi_{\mu}(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ dans l'ensemble

$$(35) \quad \begin{aligned} & |x| < \delta(3L + akL, m, n + k, d); \quad |y_i - \bar{y}_i| \\ & \leq a\{4(n + k)[N(3L + akL, m, n + k) + 1]\}^{-1} - N(3L + akL, m, n + k)|x|, \end{aligned}$$

qui admet les dérivées partielles par rapport aux variables $x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k$, jusqu'au deuxième ordre continues et satisfait aux conditions initiales (32).

En effet, selon les hypothèses sur les fonctions f'_a , les seconds membres du système (31) sont de la classe C^3 (par rapport à toutes les variables) dans l'ensemble

$$(36) \quad |x| < 1; \quad |y_i - \bar{y}_i| \leq a; \quad |\lambda_{\beta}| \leq a; \quad |z_{\mu} - \bar{z}_{\mu}| \leq a; \quad |q_i'' - \bar{q}_i''| \leq a$$

et leurs dérivées jusqu'au troisième ordre par rapport aux variables $y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k, z_1, \dots, z_m, q_1'', \dots, q_n''$ sont absolument inférieures au nombre $3L + akL$. Notre proposition en résulte immédiatement en vertu du Lemme. Les fonctions $\chi_{\mu}(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ sont à plus forte raison de la classe C^2 dans l'ensemble

$$(37) \quad |x| < \beta(L, m, n, k, a); \quad |y_i - \bar{y}_i| \leq a(L, m, n, k, a); \quad |\lambda_{\beta}| \leq a(L, m, n, k, a)$$

qui est contenu dans le produit cartésien des ensembles (34) et (35) (cf. (21) et (22)).

Construisons maintenant, à l'aide des solutions χ_{μ} du système (31), les fonctions $z_{\mu}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$ de la façon suivante

$$(38) \quad z_{\mu}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) = \chi_{\mu} \left(\beta - \varepsilon, y_1, \dots, y_n, \frac{x_1 - \bar{x}_1}{\beta - \varepsilon}, \dots, \frac{x_n - \bar{x}_n}{\beta - \varepsilon} \right),$$

³⁾ T. Wazewski, *Sur l'unicité et la limitation des intégrales de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Annali di Matematica, t. XV, p. 3, Théorème 1.

où ε est un nombre fixé arbitrairement, vérifiant l'inégalité $0 < \varepsilon < \beta$. On voit aussitôt que les fonctions z_μ ainsi définies sont de la classe C^2 dans l'ensemble

$$(39) \quad \begin{aligned} |x_\beta - \bar{x}_\beta| &< \alpha(L, m, n, k, a)[\beta(L, m, n, k, a) - \varepsilon]; \\ |y_i - \bar{y}_i| &\leq \alpha(L, m, n, k, a) - L \sum_{\beta=1}^k |x_\beta - \bar{x}_\beta|. \end{aligned}$$

Les fonctions (38) satisfont en plus aux relations (25). Ceci résulte du fait que

$$(40) \quad \chi_\mu(x, y_1, \dots, y_n, 0, \dots, 0) = \omega_\mu(y_1, \dots, y_n),$$

puisque, χ_μ satisfaisant au système (31), on a d'après (33)

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \chi_\mu(x, y_1, \dots, y_n, 0, \dots, 0) = 0$$

d'où l'on obtient (40), en vertu de (32).

Nous allons prouver maintenant que les fonctions (38) satisfont au système (1) dans l'ensemble (39).

Pour le démontrer posons

$$(41) \quad \begin{aligned} &g_\alpha^\mu(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \\ &= \frac{\partial \chi_\mu}{\partial \lambda_\alpha} - x f_\alpha^\mu(\bar{x}_1 + \lambda_1 x, \dots, \bar{x}_k + \lambda_k x, y_1, \dots, y_n, \chi_1, \dots, \chi_m, \frac{\partial \chi_\mu}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \chi_\mu}{\partial y_n}) \end{aligned}$$

dans l'ensemble (37). Nous allons prouver que

$$(42) \quad g_\alpha^\mu \equiv 0$$

dans le produit cartésien de l'ensemble (30) et du cube (28). Remarquons d'abord que

$$(43) \quad g_\alpha^\mu(0, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = 0,$$

en vertu de (32). Les fonctions χ_μ satisfaisant au système (31), on a les identités

$$(44) \quad \frac{\partial \chi_\mu}{\partial x} = \sum_{\beta=1}^k \lambda_\beta f_\beta^\mu(\bar{x}_1 + \lambda_1 x, \dots, \bar{x}_k + \lambda_k x, y_1, \dots, y_n, \chi_1, \dots, \chi_m, \frac{\partial \chi_\mu}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \chi_\mu}{\partial y_n}).$$

Différentiant (44) par rapport à λ_α , on obtient

$$(45) \quad \frac{\partial^2 \chi_\mu}{\partial x \partial \lambda_\alpha} = f_\alpha^\mu + \sum_{\beta=1}^k \lambda_\beta \left[x \frac{\partial f_\beta^\mu}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial f_\beta^\mu}{\partial z_\nu} \frac{\partial \chi_\nu}{\partial \lambda_\alpha} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\beta^\mu}{\partial q_i} \frac{\partial^2 \chi_\mu}{\partial y_i \partial \lambda_\alpha} \right].$$

Différentiant (44) par rapport à y_i nous avons

$$(46) \quad \frac{\partial^2 \chi_\mu}{\partial x \partial y_i} = \sum_{\beta=1}^k \lambda_\beta \left[\frac{\partial f_\beta^\mu}{\partial y_i} + \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial f_\beta^\mu}{\partial z_\nu} \frac{\partial \chi_\nu}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_\beta^\mu}{\partial q_j} \frac{\partial^2 \chi_\mu}{\partial y_j \partial y_i} \right].$$

Ensuite

$$\frac{\partial}{\partial x} [x f'_\alpha] = f''_\alpha + x \left[\sum_{\beta=1}^k \lambda_\beta \frac{\partial f''_\alpha}{\partial x_\beta} + \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial f''_\alpha}{\partial z_\nu} \frac{\partial \chi_\nu}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f''_\alpha}{\partial q_i''} \frac{\partial^2 \chi_\mu}{\partial y_i \partial x} \right],$$

ce qui donne, d'après (44) et (46)

$$(47) \quad \frac{\partial}{\partial x} [x f''_\alpha] = f''_\alpha + x \left\{ \sum_{\beta=1}^k \lambda_\beta \left[\frac{\partial f''_\alpha}{\partial x_\beta} + \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial f''_\alpha}{\partial z_\nu} f''_\nu \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f''_\alpha}{\partial q_i''} \left(\frac{\partial f''_\beta}{\partial y_i} + \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial f''_\beta}{\partial z_\nu} \frac{\partial \chi_\nu}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f''_\beta}{\partial q_j''} \frac{\partial^2 \chi_\mu}{\partial y_j \partial y_i} \right) \right] \right\}.$$

Profitant des identités (18), nous en obtenons

$$(48) \quad \frac{\partial}{\partial x} [x f''_\alpha] = f''_\alpha + x \left\{ \sum_{\beta=1}^k \lambda_\beta \left[\frac{\partial f''_\beta}{\partial x_\alpha} + \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial f''_\beta}{\partial z_\nu} f''_\nu + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f''_\beta}{\partial q_i''} \frac{\partial f''_\alpha}{\partial y_i} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial f''_\beta}{\partial q_i''} \frac{\partial f''_\alpha}{\partial z_\nu} \frac{\partial \chi_\nu}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f''_\alpha}{\partial q_i''} \frac{\partial f''_\beta}{\partial q_j''} \frac{\partial^2 \chi_\mu}{\partial y_j \partial y_i} \right] \right\}.$$

On a enfin

$$(49) \quad \frac{\partial g''_\alpha}{\partial y_i} = \frac{\partial^2 \chi_\mu}{\partial y_i \partial \lambda_\alpha} - x \left[\frac{\partial f''_\alpha}{\partial y_i} + \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial f''_\alpha}{\partial z_\nu} \frac{\partial \chi_\nu}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f''_\alpha}{\partial q_j''} \frac{\partial^2 \chi_\mu}{\partial y_j \partial y_i} \right].$$

Il s'ensuit de (45) et (48) que

$$\frac{\partial g''_\alpha}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\beta=1}^k \lambda_\beta \frac{\partial f''_\beta}{\partial q_i''} \right) \left\{ \frac{\partial^2 \chi_\mu}{\partial y_i \partial \lambda_\alpha} - x \left[\frac{\partial f''_\alpha}{\partial y_i} + \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial f''_\alpha}{\partial z_\nu} \frac{\partial \chi_\nu}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f''_\alpha}{\partial q_j''} \frac{\partial^2 \chi_\mu}{\partial y_j \partial y_i} \right] \right\} \\ + \sum_{\nu=1}^m \left(\sum_{\beta=1}^k \lambda_\beta \frac{\partial f''_\beta}{\partial z_\nu} \right) \left(\frac{\partial \chi_\nu}{\partial \lambda_\alpha} - x f''_\alpha \right),$$

d'où, d'après (41) et (49)

$$(50) \quad \frac{\partial g''_\alpha}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\beta=1}^k \lambda_\beta \frac{\partial f''_\beta}{\partial q_i''} \right) \frac{\partial g''_\alpha}{\partial y_i} + \sum_{\nu=1}^m \left(\sum_{\beta=1}^k \lambda_\beta \frac{\partial f''_\beta}{\partial z_\nu} \right) g''_\alpha.$$

Nous voyons donc que, α et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ étant fixés, les fonctions g''_α , ($\mu = 1, 2, \dots, m$), satisfont à un système linéaire de la forme (2) dans l'ensemble (37) et, à plus forte raison, dans l'ensemble (30) qui en fait partie. Les dérivées premières des seconds membres du système (50) par rapport à $\partial g''_\alpha / \partial y_i$ étant absolument inférieures au nombre $L \sum_{\beta=1}^k |\lambda_\beta|$, on con-

clut, en vertu de l'unicité des solutions du système (50) dans l'ensemble (30)⁴⁾ et d'après (43), que les identités (42) sont remplies dans l'ensemble

$$(51) \quad |x| < \beta(L, m, n, k, a); \quad |y_i - \hat{y}_i| \leq a(L, m, n, k, a) - L \sum_{\beta=1}^k |\lambda_\beta| |x|;$$

$$|\lambda_\beta| \leq a(L, m, n, k, a).$$

Pour achever la démonstration de ce que les fonctions z_μ , définies par (38) satisfont au système (1) dans l'ensemble (39), remarquons que

$$(52) \quad \frac{\partial z_\mu}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{\beta - \varepsilon} \left[\frac{\partial \chi_\mu(\beta - \varepsilon, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)}{\partial \lambda_\alpha} \right] \lambda_\gamma = \frac{x_\gamma - \hat{x}_\gamma}{\beta - \varepsilon},$$

dans l'ensemble (39). En posant en particulier $x = \beta - \varepsilon$, $\lambda_\gamma = \frac{x_\gamma - \hat{x}_\gamma}{\beta - \varepsilon}$, nous avons pour $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$ appartenant à l'ensemble (39)

$$|x| = \beta - \varepsilon; \quad |y_i - \hat{y}_i| \leq a(L, m, n, k, a) - L \sum_{\gamma=1}^k |\lambda_\gamma| (\beta - \varepsilon); \quad |\lambda_\gamma| \leq a(L, m, n, k, a).$$

Il en résulte que le point $\left(\beta - \varepsilon, y_1, \dots, y_n, \frac{x_1 - \hat{x}_1}{\beta - \varepsilon}, \dots, \frac{x_k - \hat{x}_k}{\beta - \varepsilon} \right)$ appartient à l'ensemble (51), donc d'après les relations (41) et (42) calculées pour ce point et en vertu de (52), on obtient

$$\frac{\partial z_\mu}{\partial x_\alpha} = f'_\alpha \left(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m, \frac{\partial z_\mu}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z_\mu}{\partial y_n} \right)$$

dans l'ensemble (39). Nous avons ainsi démontré que les fonctions z_μ satisfont au système (1) dans l'ensemble (39). Mais $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on en conclut, en vertu de l'unicité des solutions du système (1), que la solution du problème de Cauchy, relatif au système (1), existe dans l'ensemble (24).

⁴⁾ Cf. 3).

SUR L'ALLURE ASYMPTOTIQUE DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Par Z. SZMYDÓWNA (Kraków)

On doit à Perron les théorèmes A et B suivants qui ont rapport aux systèmes d'équations différentielles *linéaires* de la forme

$$(0.1) \quad y'_i = f_i(t)y_i + \sum_{j=1}^n g_{ij}(t)y_j \quad (i=1, \dots, n),$$

où les coefficients $f_i(t)$, $g_{ij}(t)$ sont des fonctions continues d'une variable réelle t dans l'intervalle $T \leq t < \infty$.

*Théorème A*¹⁾. Si

$$(0.2) \quad \begin{aligned} R[f_i(t)] &> R[f_{i+1}(t)] + C \quad (i=1, \dots, n-1), \quad C > 0^2), \\ g_{ij}(t) &\rightarrow 0 \quad (i, j=1, \dots, n), \\ &\quad t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

le système (0.1) a n intégrales linéairement indépendantes (y_{1k}, \dots, y_{nk}) ($k=1, \dots, n$) telles que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_{ik}}{y_{hk}} = 0 \quad \text{pour } i \neq k.$$

*Théorème B*³⁾. Si

$$(0.3) \quad \begin{aligned} f_i(t) &= c_i = \text{const}, \quad R(c_1) > R(c_k) \quad (k=2, \dots, n), \\ g_{ij}(t) &\rightarrow c_{ij} = \text{const}, \quad \text{où } c_{ij} = 0 \quad \text{pour } i \geq j \end{aligned}$$

le système (0.1) a n intégrales linéairement indépendantes (y_{1k}, \dots, y_{nk}) telles que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_{ik}}{y_{1k}} = 0 \quad \text{pour } i=2, \dots, n; \quad k=1, \dots, n.$$

¹⁾ O. Perron, *Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängige Variable reell ist*, J. für Math. 142 (1913), p. 254-270.

²⁾ $R(f)$ désigne la partie réelle de la fonction f . Je désignerai dans la suite par $I(f)$ la partie imaginaire de cette fonction.

³⁾ O. Perron, *Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängige Variable reell ist*, J. für Math. 143 (1913), p. 25-49.

Le Théorème 1 que je démontre au § 4, se rapporte aux systèmes d'équations différentielles *non linéaires*. Il englobe les théorèmes A et B de Perron comme cas particuliers.

Aux §§ 5, 6 je déduis du Théorème 1 les Théorèmes 2 et 3 qui se rapportent à l'allure asymptotique des intégrales de systèmes d'équations différentielles linéaires.

Le Théorème 2 du § 5 est une généralisation du théorème A de Perron dans deux directions. Je remplace, d'une part, l'hypothèse (0.2) par une autre plus générale que voici:

$$R(f_1) \geq \dots \geq R(f_p) > R(f_{p+1}) \geq \dots \geq R(f_{p+q}) > R(f_{p+q+1}) \geq \dots \geq R(f_{p+q+r}),$$

$$p + q + r = n, \quad 0 < q < n,$$

$$\int_T^\infty R[f_p(t) - f_{p+1}(t)] dt = \infty, \quad \int_T^\infty R[f_{p+q}(t) - f_{p+q+1}(t)] dt = \infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g_{ij}}{R(f_p - f_{p+1})} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g_{ij}}{R(f_{p+q} - f_{p+q+1})} = 0.$$

Dans cette hypothèse je démontre l'existence de $q+r$ intégrales linéairement indépendantes du système (0.1), vérifiant la propriété

$$(0.4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|y_1|^2 + \dots + |y_p|^2 + |y_{p+q+1}|^2 + \dots + |y_{p+q+r}|^2}{|y_{p+1}|^2 + \dots + |y_{p+q}|^2} = 0.$$

Ce résultat donne un renseignement plus précis sur l'allure asymptotique des intégrales que celui de Perron. De plus, j'évalue la vitesse avec laquelle le rapport, qui intervient dans la relation (0.4), tend vers zéro.

Le Théorème 3 du § 6, étant de même une conséquence du Théorème 1, se rapporte aussi aux systèmes d'équations linéaires. Il englobe le théorème B de Perron comme cas particulier. Je montre notamment que l'on peut remplacer, dans les relations (0.3), l'hypothèse que $c_{ij} = 0$ pour $i \geq j$ par deux conditions:

1) $c_{i1} = 0$ pour $i = 1, \dots, n$,

2) les racines caractéristiques de la matrice $C = \|c_{ij}\|$ ($i, j = 2, \dots, n$) ont des parties réelles plus petites (au sens strict) que $R(\varrho_1)$.

On peut même aller plus loin en remplaçant les hypothèses (0.3) par de plus générales:

a) $\lim_{t \rightarrow \infty} g_{ij} = c_{ij} = \text{const}$, $c_{ij} = 0$ pour $k+1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$;

b) les parties réelles des racines caractéristiques de la matrice $C_1 = \|c_{ij}\|$ ($i, j = 1, \dots, k$) sont plus grandes (au sens strict) que les parties réelles des racines caractéristiques de la matrice $C_2 = \|c_{ij}\|$ ($i, j = k+1, \dots, n$).

Dans ces hypothèses, il existe un système de n intégrales linéairement indépendantes du système (0.1), telles que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|y_{k+1}|^2 + \dots + |y_n|^2}{|y_1|^2 + \dots + |y_k|^2} = 0.$$

La méthode de démonstration, appliquée dans le présent travail, est différente de celle de Perron. Je me sers notamment d'une méthode topologique due à T. Ważewski⁴).

§ 1. *Définitions et notations.* Posons

$$X = (x_1, \dots, x_p), \quad Y = (y_1, \dots, y_q), \quad Z = (z_1, \dots, z_r)$$

où $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q, z_1, \dots, z_r$ sont des variables complexes:

$$x_j = u_j + iv_j \quad (j=1, \dots, p), \quad y_j = u_{p+j} + iv_{p+j} \quad (j=1, \dots, q),$$

$$z_j = u_{p+q+j} + iv_{p+q+j} \quad (j=1, \dots, r), \quad u_j, v_j \text{ réels} \quad (j=1, \dots, p+q+r).$$

Soit

$$n = p + q + r.$$

On pose par définition

$$U = (u_1, \dots, u_n), \quad V = (v_1, \dots, v_n),$$

$$W = (w_1, \dots, w_n) = (u_1 + iv_1, \dots, u_n + iv_n) = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q, z_1, \dots, z_r),$$

ou sous forme vectorielle

$$W = (X, Y, Z) = U + iV.$$

Le vecteur $U - iV$ sera désigné par \bar{W} :

$$\bar{W} = U - iV;$$

la norme du vecteur W le sera par $|W|$

$$|W| = \sum_{j=1}^n w_j \bar{w}_j = \sum_{j=1}^n (u_j^2 + v_j^2).$$

Le vecteur réel

$$(U, V) = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$$

sera appelé *vecteur réel correspondant au vecteur complexe* W .

Soit t une variable réelle. Considérons une fonction

$$h(t, W) = h(t, U + iV)$$

définie dans un ensemble Ω de variables (t, W) . On peut faire correspondre à $h(t, W)$ une fonction $h^*(t, U, V)$ de variables réelles (t, U, V)

$$h^*(t, U, V) = h(t, U + iV) = h(t, W)$$

qui sera définie dans un ensemble Ω^* de variables (t, U, V) , correspondant à l'ensemble Ω .

⁴) T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 20 (1947), p. 279-313 (cité dans la suite sous l'abréviation *Principe topologique*).

Pour abrégier on écrira dans la suite $h(t, U, V)$, $\Omega(t, U, V)$ au lieu de $h^*(t, U, V)$ et $\Omega^*(t, U, V)$.

Je vais introduire maintenant quelques définitions dues à Ważewski⁵). Soit

$$\frac{dw_i}{dt} = \varphi_i(t, w_1, \dots, w_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

un système d'équations différentielles; on l'écrira aussi sous la forme vectorielle

$$(1.1) \quad \frac{dW}{dt} = \Phi(t, W)$$

où t est une variable réelle, W et Φ sont des vecteurs complexes ayant pour coordonnées (w_1, \dots, w_n) et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ respectivement.

On suppose que Φ soit définie dans un ensemble ouvert Ω et là seulement, qu'elle y soit continue et que, par chaque point $P \in \Omega$, passe une seule intégrale de (1.1), prolongée par hypothèse, à droite et à gauche jusqu'à la frontière de Ω . On désignera cette intégrale par $I(t, P)$. Si Ω n'est pas borné, le „point à l'infini“ est considéré comme point frontière au sens large de Ω . La classe de points, qui contient P et tous les points de $I(t, P)$ situés à droite de P , sera dite *demi-intégrale droite saturée*, issue de P , et sera désignée par $\text{Demi}_{(+)} I(P)$.

Soit ω un sous-ensemble ouvert de Ω , $\omega \subset \Omega$. Au cas où $\text{Demi}_{(+)} I(P) \subset \omega$, cette demi-intégrale sera dite *demi-intégrale asymptotique* relativement à ω et Ω .

Soit $g(t, W)$ une fonction définie dans Ω et telle qu'il existe $\frac{d}{dt} g[t, W(t)]$, où $W(t)$ désigne une intégrale du système (1.1). La fonction $D_{(1.1)} g(t, W)$, définie par la formule

$$(1.2) \quad D_{(1.1)} g(t, W) = \frac{d}{dt} g[t, W(t)],$$

sera appelée *dérivée* de la fonction $g(t, W)$ par rapport au système (1.1).

Il est évident que $D_{(1.1)} g(t, W)$ est égale à la dérivée de la fonction $g(t, U, V)$ par rapport au système

$$(1.3) \quad U' = R[\Phi(t, U, V)], \quad V' = I[\Phi(t, U, V)]$$

de $2n$ équations différentielles de variables réelles, équivalent au système (1.1). On a donc,

$$D_{(1.3)} g(t, U, V) = D_{(1.1)} g(t, W).$$

⁵) T. Ważewski, *Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles tangentes aux hyperplans caractéristiques issues du point singulier*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 21 (1948), p. 277-297 (cité dans la suite sous l'abréviation *Sur les intégrales*).

Si, en particulier, la fonction $g(t, W)$ est une fonction réelle, il s'en suit de la relation

$$D_{(1.1)}g(t_0, W_0) > 0, \quad (D_{(1.1)}g(t_0, W_0) < 0), \quad W_0 = U_0 + iV_0$$

que

$$D_{(1.3)}g(t_0, U_0, V_0) > 0, \quad (D_{(1.3)}g(t_0, U_0, V_0) < 0).$$

§ 2. Le théorème de Ważewski, sur lequel je m'appuie pour démontrer le Théorème 1, concerne les systèmes d'équations différentielles aux seconds membres réels⁶⁾. Mais, d'après les remarques du § 1, il est évident que ce théorème reste vrai pour le système (1.1).

Voici maintenant l'hypothèse qui sert de prémisses au théorème mentionné ci-dessus de Ważewski.

Hypothèse H. (Q₁) La fonction $\Phi(t, W)$, intervenant dans le système (1.1), est continue dans un ensemble ouvert Ω . On suppose qu'elle ne soit pas définie en dehors de Ω .

(Q₂) Par tout point $P(t, u_1 + iv_1, \dots, u_n + iv_n)$ de Ω passe une seule intégrale de (1.1) (unicité).

(Q₃) Les fonctions réelles

$$l^\alpha(t, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n), \quad m^\beta(t, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n), \quad (\alpha = 1, \dots, h; \beta = 1, \dots, k)$$

ont les dérivées partielles du premier ordre continues dans $\Omega(t, U, V)$.

(Q₄) L'ensemble ω , dit ensemble polyfacial régulier, et les ensembles L^γ et M^δ ($\gamma = 1, \dots, h; \delta = 1, \dots, k$), dits faces de ω relatives à Ω , se composent des points qui vérifient les relations

$$\begin{aligned} P \in \Omega, \quad l^\alpha(P) < 0, \quad m^\beta(P) < 0 & \quad (\text{ensemble } \omega), \\ P \in \Omega, \quad l^\alpha(P) = 0 & \\ l^\alpha(P) \leq 0, \quad (\alpha = 1, \dots, h), \quad m^\beta(P) \leq 0 \quad (\beta = 1, \dots, k) & \quad \left. \vphantom{l^\alpha(P) \leq 0} \right\} (\text{face } L^\gamma), \\ P \in \Omega, \quad m^\delta(P) = 0 & \\ l^\alpha(P) \leq 0, \quad (\alpha = 1, \dots, h), \quad m^\beta(P) \leq 0 \quad (\beta = 1, \dots, k) & \quad \left. \vphantom{l^\alpha(P) \leq 0} \right\} (\text{face } M^\delta). \end{aligned}$$

Ces ensembles peuvent être aussi considérés comme ensembles dans l'espace réel à $(2n + 1)$ dimensions.

(Q₅) $D_{(1.1)}l^\alpha(P) > 0$ lorsque $P \in L^\alpha - \sum_{\beta=1}^k M^\beta$ ($\alpha = 1, \dots, h$),

$$D_{(1.1)}m^\beta(P) \leq 0 \text{ lorsque } P \in M^\beta \quad (\beta = 1, \dots, k),$$

⁶⁾ T. Ważewski, *Sur les intégrales*, Théorème 1 du § 2.

l'égalité pouvant intervenir seulement le long des intégrales du système (1.1) situées sur M^3).

Remarque 1. Rétracte. Soit ACB et soit P un point variable dans B . On dit qu'une transformation $Q=T(P)$ effectuée une rétraction de B en A lorsqu'elle est continue dans B , $T(P) \in A$ pour $P \in B$ et $T(P)=P$ pour $P \in A$. Si une telle transformation existe, A est appelé, d'après K. Borsuk, un rétracte de B .

On sait que la frontière d'une sphère fermée n'est pas son rétracte (on appelle *sphère fermée* l'ensemble des points intérieurs et frontières d'une sphère à plusieurs dimensions).

Voici maintenant l'énoncé du théorème en question de T. Ważewski (avec la modification indiquée au renvoi⁷⁾).

Admettons l'hypothèse H relativement au système (1.1) et posons

$$S = \sum_{\gamma=1}^h L^\gamma - \sum_{\delta=1}^k M^\delta.$$

Supposons qu'un ensemble E ait les propriétés suivantes:

- 1° $E \in \omega + S$,
- 2° ES est un rétracte de S ,
- 3° ES n'est pas un rétracte de E .

Ceci posé, il existe un point $P^0 = (t^0, w_1^0, \dots, w_n^0)$ tel que $P^0 \in E - S$ (c'est-à-dire $P^0 \in E\omega$), $\text{Demi}_{(+)}I(P^0) \subset \omega$. (Cette inclusion exprime que la demi-intégrale en question est asymptotique relativement à ω et Ω (cf. § 1)).

De plus, si la frontière de ω touche celle de Ω exclusivement sur le plan $t = \infty$ ⁸⁾, la demi-intégrale existe dans un intervalle qui n'est pas borné supérieurement.

§ 3. Lemme 1. Envisageons les inégalités différentielles

$$(3.1) \quad z' < \sigma_1(t)z - \gamma(t), \quad w' > -\sigma_2(t)w + \gamma(t).$$

Supposons que les fonctions $\gamma(t)$, $\sigma_i(t)$ ($i=1,2$) aient les propriétés suivantes:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} &\gamma(t), \quad \sigma_i(t) \quad (i=1,2) \text{ sont continues pour } T < t < \infty, \\ &\gamma(t) \geq 0, \quad \sigma_i(t) > 0 \quad (i=1,2) \text{ pour } T < t < \infty, \\ &\int_T^\infty \sigma_i(t) dt = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma(t)}{\sigma_i(t)} = 0 \quad (i=1,2). \end{aligned}$$

⁷⁾ Dans l'hypothèse H de Ważewski intervenaient les inégalités $D_{(1,1)}l^\alpha(P) > 0$ lorsque $P \in L^\alpha$, et $D_{(1,1)}m^\beta(P) < 0$ lorsque $P \in M^\beta$. Mais il est facile de vérifier que le théorème de Ważewski reste aussi valable dans les hypothèses (Q₃).

⁸⁾ Ceci veut dire que si $P^v = (t^v, w_1^v, \dots, w_n^v)$, $P^v \in \omega$ et aucune suite partielle de $\{P^v\}$ ne tend vers un point fini de Ω , alors $t \rightarrow \infty$. Cette partie du théorème résulte du Théorème 3 du *Principe topologique*.

Dans ces hypothèses, on a les propriétés suivantes:

1° Il existe des solutions du système des inégalités différentielles (3.1)

$$z = \varphi(t), \quad w = \psi(t),$$

telles que

$$(3.3) \quad \varphi(t) > 0, \quad \psi(t) > 0 \quad \text{pour} \quad T < t < \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0.$$

2° Chaque solution $z = \varphi(t)$, $w = \psi(t)$ du système d'équations différentielles.

$$(3.4) \quad z' = \sigma_1(t)z - \delta_1(t), \quad w' = -\sigma_2(t)w + \delta_2(t)$$

($\delta_i(t) = \gamma(t) + \tau(t)\sigma_i(t)$ et $\tau(t)$ désigne une fonction quelconque, continue, positive et tendant vers zéro avec $t \rightarrow \infty$) satisfait aux inégalités différentielles (3.1).

3° En particulier les fonctions

$$(3.5) \quad z = \varphi(t) = \int_t^\infty \delta_1(y) \exp \left[- \int_T^y \sigma_1(u) du \right] dy \exp \int_T^t \sigma_1(v) dv,$$

$$(3.6) \quad z = \psi(t) = \int_T^t \delta_2(y) \left[\exp \int_T^y \sigma_2(u) du \right] dy \exp \left(- \int_T^t \sigma_2(v) dv \right),$$

qui constituent une solution du système d'équations différentielles (3.4), vérifient aussi les inégalités (3.1). De plus, elles satisfont aux conditions (3.3).

Démonstration. La propriété 2° est évidente.

Passons à la démonstration de la propriété 3°. On a, en raison des relations (3.2) et de la définition des fonctions $\delta_i(t)$ ($i=1,2$),

$$(3.7) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\delta_i(t)}{\sigma_i(t)} = 0 \quad (i=1,2).$$

Les fonctions $\delta_i(t)$, $\sigma_i(t)$ ($i=1,2$) étant positives, il s'ensuit, pour les t suffisamment grands,

$$(3.8) \quad \delta_i(t) < \sigma_i(t) \quad (i=1,2).$$

Afin de constater que le second membre de (3.5) a un sens bien déterminé, il suffit de démontrer que

$$(3.9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \delta_1(y) \exp \left[- \int_T^y \sigma_1(u) du \right] dy < \infty.$$

Ceci résulte de la convergence de l'intégrale

$$\int_T^t \sigma_1(y) \exp \left[- \int_T^y \sigma_1(u) du \right] dy = - \exp \left[- \int_T^t \sigma_1(u) du \right] + 1$$

pour $t \rightarrow \infty$ (cf. (3.8) et (3.2)).

La formule (3.5) met en évidence que la fonction $z = \varphi(t)$ est une intégrale positive de l'équation (3.4). Pour démontrer la dernière des relations (3.3) on appliquera la règle de l'Hospital au quotient

$$\varphi(t) = \frac{\int_T^\infty \delta_1(y) \exp \left[- \int_T^y \sigma_1(u) du \right] dy}{\exp \left[- \int_T^t \sigma_1(v) dv \right]}$$

dont le numérateur et le dénominateur tendent vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$ (cf. (3.2) et (3.9)). On obtient ainsi, en raison de (3.7),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\delta_1(t)}{c_1(t)} = 0.$$

D'une façon analogue, on démontre que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\delta_2(t)}{c_2(t)} = 0.$$

$\psi(t)$ (cf. (3.6)) étant l'intégrale de l'équation (3.4), positive pour $T < t < \infty$, la propriété 3° se trouve ainsi démontrée. La remarque que la propriété 1° est une conséquence immédiate de la propriété 3° termine la démonstration du lemme.

§ 4. *Théorème 1. Énoncé et démonstration.* En tenant compte des notations introduites dans le § 1, considérons le système de $n = p + q + r$ équations différentielles, écrit sous forme vectorielle,

$$(4.1) \quad \begin{aligned} X' &= F(t, X, Y, Z) + \varepsilon_1(t, X, Y, Z), \\ Y' &= G(t, X, Y, Z) + \varepsilon_2(t, X, Y, Z) + K(t, X, Y, Z), \\ Z' &= H(t, X, Y, Z) + \varepsilon_3(t, X, Y, Z), \end{aligned}$$

où $X = (x_1, \dots, x_p)$ ($p \geq 0$), $Y = (y_1, \dots, y_q)$ ($0 < q < n$), $Z = (z_1, \dots, z_r)$ ($r \geq 0$). Soit $W = (X, Y, Z)$, $P = (t, W) = P(t, X, Y, Z)$.

Relativement à ce système, admettons l'hypothèse suivante:

Hypothèse K. 1° Les fonctions $F, G, H, K, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont continues dans l'ensemble ouvert Ω défini par les relations

$$t > T, \quad |W| < \infty \quad (\text{ensemble } \Omega)^9.$$

⁹ Le théorème restera vrai aussi sous l'hypothèse que l'ensemble Ω soit défini par les inégalités: $t > T, |X|^2 < \eta |Y|^2 + \delta, |Z|^2 < \eta |Y|^2 + \delta$, où $\eta, \delta > 0$.

2° Par tout point $P = (t^0, X^0, Y^0, Z^0) \in \Omega$ passe une intégrale unique $I(t, P)$ du système (4.1).

$$3^\circ F(t, 0, 0, 0) = G(t, 0, 0, 0) = H(t, 0, 0, 0) = 0.$$

Considérons le système d'équations différentielles

$$(4.2) \quad \begin{aligned} X' &= F(t, X, Y, Z), \\ Y' &= G(t, X, Y, Z), \\ Z' &= H(t, X, Y, Z). \end{aligned}$$

Soient Γ_1 l'ensemble des points pour lesquels $|X| |Y| = 0$, et Γ_2 l'ensemble des points pour lesquels $|Y| |Z| = 0$. Posons (cf. (1.2))

$$s_1(P) = s_1(t, X, Y, Z) = D_{(4.2)} \ln \left| \frac{X}{Y} \right| \quad \text{pour } P \in \Omega - \Gamma_1,$$

$$s_2(P) = s_2(t, X, Y, Z) = D_{(4.2)} \ln \left| \frac{Y}{Z} \right| \quad \text{pour } P \in \Omega - \Gamma_2.$$

On a évidemment

$$(4.3) \quad s_1(P) = \frac{1}{|X|^2} R(\bar{X} F) - \frac{1}{|Y|^2} R(\bar{Y} G), \quad s_2(P) = \frac{1}{|Y|^2} R(\bar{Y} G) - \frac{1}{|Z|^2} R(\bar{Z} H).$$

Théorème 1. Admettons l'hypothèse K. Supposons qu'il existe une constante $\alpha > 0$ et des fonctions $\mu(t)$, $\varrho(t)$, $\sigma_i(t)$ ($i = 1, 2$) continues pour $T < t < \infty$ et telles qu'on ait les inégalités

$$(4.4) \quad \begin{aligned} |K(P)| &\leq \mu(t) |Z|, \quad |\varepsilon_i(P)| \leq \varrho(t) |W| \quad \text{lorsque } P \in \Omega \quad (i = 1, 2, 3), \\ 0 < \sigma_1(t) &\leq s_1(P) - \mu(t) \alpha \quad \text{lorsque } P \in \Omega - \Gamma_1, \\ 0 < \sigma_2(t) &\leq s_2(P) - \mu(t) \alpha \quad \text{lorsque } P \in \Omega - \Gamma_2. \end{aligned}$$

Supposons enfin que

$$(4.5) \quad \int_T^\infty \sigma_i(t) dt = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varrho(t)}{\sigma_i(t)} = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Le système (4.1) admet alors une famille, à $2(q+r)$ paramètres¹⁰ réels d'intégrales $(X(t), Y(t), Z(t))$ vérifiant les relations

$$(4.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|X| + |Z|}{|Y|} = 0.$$

¹⁰ Le facteur 2 provient de ce que le système (4.1) est équivalent au système de $2n$ équations différentielles de variables réelles (cf. § 1).

Plus précisément

$$(4.7) \quad \left| \frac{X}{Y} \right| = o[\varphi(t)]^{11), \quad \left| \frac{Z}{Y} \right| = o[\psi(t)],$$

où les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont définies par les relations (3.5) et (3.6) du lemme 1 dans lequel il faut poser $\gamma(t) = 4\rho(t)$.

De plus, si le système (4.1) se réduit à un système d'équations différentielles linéaires, il aura au moins $q+r$ intégrales linéairement indépendantes vérifiant les propriétés (4.7).

Démonstration. Posons

$$(4.8) \quad \gamma(t) = 4\rho(t).$$

On voit facilement que la fonction $\gamma(t)$ ainsi définie et les fonctions $\sigma_i(t)$ ($i=1, 2$) satisfont aux hypothèses (3.2) du lemme 1 (cf. (4.4), (4.5)). Il existe donc des fonctions $\varphi(t), \psi(t)$ telles que

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \varphi'(t) &< \sigma_1(t)\varphi(t) - \gamma(t), & \psi'(t) &> -\sigma_2(t)\psi(t) + \gamma(t), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0, & \varphi(t) &> 0, \psi(t) > 0 \text{ lorsque } T < t < \infty, \end{aligned}$$

et l'on peut choisir un nombre $t^0 > T$ de sorte que¹²⁾

$$(4.10) \quad \varphi(t) < \min(\alpha, 1), \quad \psi(t) < \min(\alpha, 1), \quad \text{lorsque } t^0 \leq t < \infty.$$

Posons

$$(4.11) \quad m^1(P) = t^0 - t, \quad m^2(P) = |Z|^2 - \psi^2(t)|Y|^2, \quad l^1(P) = |X|^2 - \varphi^2(t)|Y|^2.$$

Soit ω l'ensemble polyfacial des points P pour lesquels

$$(4.12) \quad m^i(P) < 0, \quad (i=1, 2), \quad l^1(P) < 0 \quad (\text{ensemble } \omega).$$

Désignons par M^1, M^2, L^1 les ensembles étant faces de ω , définis par des relations

$$(4.13) \quad \begin{aligned} m^1(P) &= 0, & m^2(P) &\leq 0, & l^1(P) &\leq 0 & (\text{ensemble } M^1), \\ m^2(P) &= 0, & m^1(P) &\leq 0, & l^1(P) &\leq 0 & (\text{ensemble } M^2), \\ l^1(P) &= 0, & m^1(P) &\leq 0, & m^2(P) &\leq 0 & (\text{ensemble } L^1). \end{aligned}$$

¹¹⁾ $g(t) = o[f(t)]$ signifie que la fonction $g(t)/f(t)$ reste bornée lorsque $t \rightarrow \infty$. Les relations (4.7) permettent d'évaluer la vitesse avec laquelle le rapport intervenant dans la relation (4.6) tend vers zéro.

¹²⁾ Si l'on admettait la définition de Ω sous la forme insérée dans le renvoi ⁹⁾, il faudrait alors choisir t^0 de sorte que l'on ait $\varphi(t) < \min(1, \eta, \alpha)$, $\psi(t) < \min(1, \eta, \alpha)$ lorsque $t^0 \leq t < \infty$.

L'hypothèse K admise, il est évident, d'après les définitions introduites ci-dessus, que les propriétés (Q₁)-(Q₄) de l'hypothèse H (cf. § 2) subsistent relativement au système (4.1) et à l'ensemble ω (4.12).

La propriété (Q₅) subsiste aussi. Pour le démontrer, remarquons d'abord (cf. (4.4) et prémisse 3^o de l'hypothèse K) que l'axe t , qu'on désignera par Γ , est l'intégrale du système (4.1), située sur $M^2 \cdot L^1$. En démontrant les inégalités

$$D_{(4.1)} m^1(P) < 0 \text{ lorsque } P \in M^1,$$

$$D_{(4.1)} m^2(P) < 0 \text{ lorsque } P \in M^2 - \Gamma$$

et

$$D_{(4.1)} l^1(P) > 0 \text{ lorsque } P \in L^1 - \Gamma,$$

on établira la propriété (Q₅). On a évidemment

$$D_{(4.1)} m^1(P) = -1 < 0 \text{ sur la face } M^1.$$

Puisque l'ensemble M^2 (cf. (4.11), (4.13)) est défini par les relations

$$t \geq t^0, \quad |X|^2 \leq \varphi^2 |Y|^2, \quad |Z|^2 = \psi^2 |Y|^2,$$

les inégalités suivantes (cf. (4.4) et (4.10))

$$|\varepsilon_i| \leq \varrho \sqrt{|X|^2 + |Y|^2 + |Z|^2} \leq \varrho |Y| \sqrt{1 + \varphi^2 + \psi^2} \leq 2\varrho |Y|,$$

$$|K| \leq \mu |Z| = \mu \psi |Y|$$

subsistent. On a donc, en vertu de (4.11), (4.3), (4.10), (4.4), (4.8), (4.9), pour les points $P \in M^2 - \Gamma$, les inégalités

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} D_{(4.1)} m^2(P) &= R(\bar{Z}H + \bar{Z}\varepsilon_3) - \psi \psi' |Y|^2 - \varphi^2 R(\bar{Y}G + \bar{Y}\varepsilon_2 + \bar{Y}K) \\ &\leq \psi |Y|^2 \{-s_2 \psi - \psi'\} + |Z| |\varepsilon_3| + \varphi^2 |Y| |\varepsilon_2| + \psi^2 |Y| |K| \\ &\leq \psi |Y|^2 \{-(s_2 - \mu \psi) \psi - \psi' + 2\varrho + 2\psi \varrho\} \leq \psi |Y|^2 (-\sigma_2 \psi - \psi' + \gamma) < 0. \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue montre que, pour les points $P \in L^1 - \Gamma$,

$$D_{(4.1)} l^1(P) > 0 \text{ lorsque } P \in L^1 - \Gamma.$$

Les prémisses de l'hypothèse H ainsi vérifiées, on peut appliquer le théorème de Wazewski (cf. § 2). Posons à cet effet

$$S = L^1 - M^1 - M^2,$$

et soit E un ensemble défini par les relations

$$(4.14) \quad t = \tau, \quad Y = Y^0, \quad Z = Z^0, \quad |X| \leq \varphi(\tau) |Y^0| \quad (\text{ensemble } E),$$

où τ est fixe, $\tau > t^0$ et Y^0, Z^0 sont choisis arbitrairement avec la seule restriction que

$$(4.15) \quad |Y^0| > 0, \quad |Z^0| < \varphi(\tau)|Y^0|.$$

L'ensemble ES coïncide avec l'ensemble des points pour lesquels

$$t = \tau, \quad Y = Y^0, \quad Z = Z^0, \quad |X| = \varphi(\tau)|Y^0|.$$

L'ensemble E est donc une sphère dans l'espace réel à $2p$ dimensions (cf. § 1), l'ensemble ES forme la frontière de cette sphère. L'ensemble ES n'est donc pas un rétracte de E .

On construira maintenant une transformation $Q = \Phi(P)$ effectuant une rétraction de S en ES . Soit $\hat{P} = (\hat{t}, \hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ un point variable de S . On aura pour ce point

$$|\hat{X}| = \varphi(\hat{t})|\hat{Y}|, \quad m^i(\hat{P}) < 0 \quad (i=1, 2).$$

En désignant les coordonnées de Q par (t^*, X^*, Y^*, Z^*) , on définit la transformation $Q = \Phi(\hat{P})$ par les formules

$$t^* = \tau, \quad Y^* = Y^0, \quad Z^* = Z^0, \quad X^* = \frac{\varphi(\tau)|Y^0|}{\varphi(\hat{t})|\hat{Y}|} \hat{X}.$$

Cette transformation effectue une rétraction de S en ES , car elle est continue sur S ; on a $\Phi(\hat{P}) \in ES$ lorsque $\hat{P} \in S$ et enfin $\Phi(\hat{P}) = \hat{P}$ lorsque $\hat{P} \in ES$. L'ensemble ES est donc un rétracte de S .

En vertu du théorème de Ważewski (cf. § 2), il existe un point $P^0 \in E - S$, c'est-à-dire $P^0 = (\tau, X^1, Y^0, Z^0)$, tel que la $\text{Demi}_{(+)} I(P^0)$ soit asymptotique relativement à ω et Ω . La frontière de ω touchant celle de Ω exclusivement sur le plan $t = \infty$ (cf. le renvoi ⁸⁾), cette demi-intégrale existe dans un intervalle qui n'est pas borné supérieurement, à savoir:

$$\text{Demi}_{(+)} I(P^0) \in \omega \quad \text{pour} \quad \tau \leq t < \infty.$$

En vertu de (4.11), (4.12), cette intégrale satisfait donc aux relations (4.7) et par conséquent (cf. (4.9)) aux relations (4.6).

Remarquons que les relations (4.14) définissent (pour τ fixe) une famille d'ensembles E qui dépend de $2(q+r)$ paramètres réels et telle qu'à deux systèmes différents de ces paramètres correspondent des ensembles E disjoints. Choisissons arbitrairement, pour chacun de ces E , une intégrale satisfaisant aux conditions (4.7), dont l'existence vient d'être démontrée, et désignons-la par $J(E)$. La famille d'intégrales, ainsi définie, dépend de $2(q+r)$ paramètres réels, car on a supposé l'unicité des intégrales du système d'équations différentielles (4.1) (cf. hypothèse K).

Supposons de plus que le système (4.1) soit un système d'équations différentielles linéaires. Les intégrales $J(E)$, coupent le plan $t = \tau$ en un ensemble A qui projeté sur l'hyperplan YZ englobe l'ensemble ouvert et non vide des points (vecteurs) Y_0, Z_0 satisfaisant à (4.15), qui contient

$q+r$ vecteurs linéairement indépendants. L'ensemble A en renferme au moins $q+r$. Les intégrales $J(E)$ issues des ces derniers points forment un système d'au moins $q+r$ intégrales linéairement indépendantes. Le théorème est ainsi démontré.

§ 5. *Théorème 2.* Considérons le système d'équations différentielles linéaires

$$(5.1) \quad y'_i = f_i(t)y_i + \sum_{j=1}^n g_{ij}(t)y_j \quad (i=1, \dots, n)$$

où les coefficients $f_i(t)$, $g_{ij}(t)$ sont des fonctions (en général complexes) d'une variable réelle t , continues pour $T \leq t < \infty$. Supposons que

$$n = p + q + r, \quad 0 < q < n,$$

$$R(f_1) \geq \dots \geq R(f_p) > R(f_{p+1}) \geq \dots \geq R(f_{p+q}) > R(f_{p+q+1}) \geq \dots \geq R(f_{p+q+r}),$$

$$(5.2) \quad \int_T^\infty R[f_p(t) - f_{p+1}(t)] dt = \infty, \quad \int_T^\infty R[f_{p+q}(t) - f_{p+q+1}(t)] dt = \infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g_{ij}}{R(f_p - f_{p+1})} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g_{ij}}{R(f_{p+q} - f_{p+q+1})} = 0.$$

Dans ces hypothèses, il existe un système de $q+r$ intégrales linéairement indépendantes du système (5.1), ayant la propriété

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|y_1|^2 + \dots + |y_p|^2 + |y_{p+q+1}|^2 + \dots + |y_{p+q+r}|^2}{|y_{p+1}|^2 + \dots + |y_{p+q}|^2} = 0.$$

Plus précisément,

$$\frac{|y_1|^2 + \dots + |y_p|^2}{|y_{p+1}|^2 + \dots + |y_{p+q}|^2} = o[\varphi(t)], \quad \frac{|y_{p+q+1}|^2 + \dots + |y_{p+q+r}|^2}{|y_{p+1}|^2 + \dots + |y_{p+q}|^2} = o[\psi(t)],$$

où $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont définis par les relations (3.5) et (3.6) du lemme 1 dans lequel il faut poser

$$\sigma_1(t) = R[f_p(t) - f_{p+1}(t)], \quad \sigma_2(t) = R[f_{p+q}(t) - f_{p+q+1}(t)]$$

$$\gamma(t) = 4 \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |g_{ij}(t)|^2}.$$

Démonstration. En posant par définition

$$(5.3) \quad \begin{aligned} X &= (y_1, \dots, y_p), & Y &= (y_{p+1}, \dots, y_{p+q}), & Z &= (y_{p+q+1}, \dots, y_{p+q+r}), \\ F &= (f_1 y_1, \dots, f_p y_p), & G &= (f_{p+1} y_{p+1}, \dots, f_{p+q} y_{p+q}), \\ H &= (f_{p+q+1} y_{p+q+1}, \dots, f_{p+q+r} y_{p+q+r}), & K &= (0, \dots, 0), \\ \varepsilon_1 &= \left(\sum_{j=1}^n g_{1j} y_j, \dots, \sum_{j=1}^n g_{pj} y_j \right), & \varepsilon_2 &= \left(\sum_{j=1}^n g_{p+1,j} y_j, \dots, \sum_{j=1}^n g_{p+q,j} y_j \right), \\ \varepsilon_3 &= \left(\sum_{j=1}^n g_{p+q+1,j} y_j, \dots, \sum_{j=1}^n g_{p+q+r,j} y_j \right), \end{aligned}$$

on constate que le système (5.1) est un cas particulier du système (4.1) et qu'il satisfait à l'hypothèse K.

Posons

$$(5.4) \quad \alpha = 1, \quad \mu(t) = 0, \quad \varrho(t) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |g_{ij}|^2}.$$

D'après l'inégalité de Schwarz, on a

$$|\varepsilon_1| = \sqrt{\sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n g_{kj} y_j \right) \left(\sum_{j=1}^n \bar{g}_{kj} \bar{y}_j \right)} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n |g_{kj}|^2 \sum_{j=1}^n |y_j|^2} \leq \varrho(t) \sqrt{|X|^2 + |Y|^2 + |Z|^2}.$$

Un calcul analogue montre que

$$|\varepsilon_i| \leq \varrho(t) \sqrt{|X|^2 + |Y|^2 + |Z|^2} \quad (i = 2, 3).$$

En raison de (4.3), (5.3) et (5.2) on a les inégalités

$$s_1(t, X, Y, Z) = \frac{1}{|X|^2} R \left(\sum_{i=1}^p \bar{y}_i f_i y_i \right) - \frac{1}{|Y|^2} R \left(\sum_{i=p+1}^{p+q} \bar{y}_i f_i y_i \right) \geq R(f_p - f_{p+1}),$$

et pareillement

$$s_2(t, X, Y, Z) \geq R(f_{p+q} - f_{p+q+1}).$$

Posons

$$\sigma_1(t) = R(f_p - f_{p+1}), \quad \sigma_2(t) = R(f_{p+q} - f_{p+q+1}).$$

On constate facilement (cf. (5.2) et (5.4)) que toutes les prémisses du Théorème 1 sont satisfaites. Il devient ainsi clair que le Théorème 2 résulte du Théorème 1.

Corollaire 1. Supposons que les coefficients $f_i(t)$, $g_{ij}(t)$, intervenant dans (5.1), soient continus pour $T \leq t < \infty$ et que

$$(5.5) \quad R(f_k - f_{k+1}) > 0, \quad \int_T^\infty R(f_k - f_{k+1}) dt = \infty \quad (k = 1, \dots, n-1),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g_{ij}}{R(f_k - f_{k+1})} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n-1).$$

Dans ces hypothèses, il existe, pour chaque p ($0 \leq p \leq n-1$), un système de $n-p$ intégrales linéairement indépendantes pour lequel on a

$$(5.6) \quad \frac{|y_1|^2 + \dots + |y_p|^2}{|y_{p+1}|^2} = o[\varphi(t)], \quad \frac{|y_{p+2}|^2 + \dots + |y_n|^2}{|y_{p+1}|^2} = o[\psi(t)],$$

où $\varphi(t)$, $\psi(t)$ désignent les fonctions définies dans le Théorème 2 pour $q=1$. Pour les intégrales de ce système, on a donc

$$(5.7) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|y_i|}{|y_{p+1}|} = 0 \quad (i \neq p+1).$$

Remarque 2. Le théorème A de Perron peut être considéré comme cas particulier du corollaire précédent.

En effet, désignons par $(y_{1,p+1}, \dots, y_{n,p+1})$ l'intégrale du système (5.1), choisie arbitrairement parmi les intégrales satisfaisant à (5.6). En faisant varier p ($0 \leq p \leq n-1$), on aura (cf. (5.7)) un système de n intégrales, linéairement indépendantes du système (5.1) et telles que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|y_{i,p+1}|}{|y_{p+1,p+1}|} = 0 \quad (p=0, \dots, n-1, i \neq p+1).$$

Cette conclusion forme la thèse du théorème A de Perron. Les hypothèses (5.5) étant une conséquence immédiate de (0.2), la remarque 2 se trouve démontrée.

Remarque 3. L'exemple de système d'équations différentielles

$$x'_k = \frac{1}{t} \left[(n-k)x_k + \frac{1}{t} \sum_{j=1}^n x_j \right] \quad (k=1, \dots, n)$$

prouve que le corollaire 1 est un résultat plus général que celui du théorème A de Perron (les hypothèses (5.5) sont satisfaites sans que (0.2) subsiste).

§ 6. **Théorème 3.** Considérons le système d'équations différentielles

$$(6.1) \quad w'_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) w_j \quad (i=1, \dots, n)$$

où $\lambda_{ij}(t)$ sont des fonctions continues pour $T \leq t < \infty$, $\lambda_{ij}(t) \rightarrow c_{ij} = \text{const}$, $c_{ij} = 0$ lorsque $q < i \leq n$, $1 \leq j \leq q$.

Posons $n = q + r$.

Soient s_1, \dots, s_q et s_{q+1}, \dots, s_n les suites complètes des racines caractéristiques des matrices

$$C_1 = \|c_{ij}\| \quad (i, j = 1, \dots, q) \quad \text{et} \quad C_2 = \|c_{ij}\| \quad (i, j = q+1, \dots, n)$$

respectivement.

Supposons que

$$(6.2) \quad R(s_1) \geq \dots \geq R(s_q) > R(s_{q+1}) \geq \dots \geq R(s_n), \quad \beta = R(s_q) - R(s_{q+1}) > 0.$$

Dans ces hypothèses, le système (6.1) admet n intégrales linéairement indépendantes, telles que

$$(6.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|w_{q+1}|^2 + \dots + |w_n|^2}{|w_1|^2 + \dots + |w_q|^2} = 0.$$

Démonstration. Soit donnée une matrice carrée C . A chaque nombre $\eta > 0$ on peut choisir une matrice $D(\eta)$ semblable à C

$$(6.4) \quad D(\eta) = M(\eta) C M^{-1}(\eta)^{13}$$

¹³⁾ M^{-1} désigne la matrice inverse à la matrice M .

de la forme

$$\begin{pmatrix} s_1 & \eta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \eta_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & \eta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_n \end{pmatrix},$$

où s_1, \dots, s_n désigne la suite complète des racines caractéristiques de la matrice C et $0 \leq \eta_i \leq \eta$ ($i=1, \dots, n-1$).

Ceci est possible pour $\eta=1$ en vertu d'un théorème bien connu de Jordan.

Passons au cas général. On peut construire facilement une matrice $N(\eta) = \|n_{ij}(\eta)\|$ telle que $n_{ij}(\eta) = 0$ pour $i \neq j$ et que $N(\eta)D(1)N^{-1}(\eta) = D(\eta)$. La matrice $M(\eta) = N(\eta)M(1)$ vérifie la relation (6.4).

Choisissons un nombre η tel que (cf. (6.2))

$$(6.5) \quad 0 < \eta < \frac{1}{2}\beta.$$

D'après les remarques faites ci-dessus, il est clair qu'il existe des matrices

$$T_1 = \|t_{ij}\| \quad (i, j = 1, \dots, q), \quad T_2 = \|t_{ij}\| \quad (i, j = q+1, \dots, q+r)$$

telles que

$$(6.6) \quad T_1 C_1 T_1^{-1} = \begin{pmatrix} s_1 & \eta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \eta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_q \end{pmatrix}, \quad T_2 C_2 T_2^{-1} = \begin{pmatrix} s_{q+1} & \eta_{q+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_{q+2} & \eta_{q+2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_n \end{pmatrix},$$

où $0 \leq \eta_i \leq \eta$.

Soit

$$(6.7) \quad T = \|t_{ij}\| = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}.$$

En appliquant au système (6.1) la transformation linéaire

$$y_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} w_j \quad (i=1, \dots, n),$$

on est conduit au système

$$(6.8) \quad y_i' = s_i y_i + \eta_i y_{i+1} + \sum_{j=q+1}^n d_{ij} y_j + \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}(t) y_j \quad (i=1, \dots, q),$$

$$y_i' = s_i y_i + \eta_i y_{i+1} + \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}(t) y_j \quad (i=q+1, \dots, n)$$

où $d_{ij} = \text{const}$ ($i=1, \dots, q, j=q+1, \dots, n$), $\eta_q = \eta_n = 0$, $\varepsilon_{ij}(t) \rightarrow 0$ ($i, j=1, \dots, n$).

$t \rightarrow \infty$

On appliquera le Théorème 1 au système (6.8). Posons, à cet effet $p=0$,

$$(6.9) \quad \begin{aligned} Y &= (y_1, \dots, y_q), \quad Z = (y_{q+1}, \dots, y_n), \\ G &= (s_1 y_1 + \eta_1 y_2, \dots, s_{q-1} y_{q-1} + \eta_{q-1} y_q, s_q y_q), \\ H &= (s_{q+1} y_{q+1} + \eta_{q+1} y_{q+2}, \dots, + s_{n-1} y_{n-1} + \eta_{n-1} y_n, s_n y_n), \\ K &= \left(\sum_{j=q+1}^n d_{1j} y_j, \dots, \sum_{j=q+1}^n d_{qj} y_j \right), \\ \varepsilon_2 &= \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_{1j}(t) y_j, \dots, \sum_{j=1}^n \varepsilon_{qj} y_j \right), \quad \varepsilon_3 = \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_{q+1,j} y_j, \dots, \sum_{j=1}^n \varepsilon_{nj} y_j \right). \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier qu'il existe une constante $d > 0$ (dépendant des d_{ij}) et une fonction $\varrho(t)$ telles que

$$|K| \leq d |Z|, \quad |\varepsilon_i| \leq \varrho(t) \sqrt{|Y|^2 + |Z|^2} \quad (i=2,3), \quad \varrho(t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty.$$

En raison de (6.9), (6.2), (6.6) et (6.5), on a

$$\frac{1}{|Y|^2} R(\bar{Y}G) - \frac{1}{|Z|^2} R(\bar{Z}H) \geq \beta - 2\eta > 0.$$

On peut donc choisir une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\sigma = \beta - 2\eta - \alpha d > 0.$$

Il est ainsi clair que les relations (4.4) et (4.5) (cf. § 4, Théorème 1) sont satisfaites. Donc le système \sum de n intégrales linéairement indépendantes du système (6.8), telles que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|Z|}{|Y|} = 0$$

existe.

Remarquons que les transformations T_1 et T_2 sont non singulières. Il en résulte que

- 1° la transformation T est non singulière (6.7);
- 2° il existe des constantes $a > 0$, $b > 0$ telles que

$$|w_{q+1}|^2 + \dots + |w_n|^2 \leq a |Z|^2, \quad |w_1|^2 + \dots + |w_q|^2 \geq b |Y|^2.$$

Il résulte de ces propriétés qu'en appliquant la transformation T^{-1} au système des intégrales \sum , on aura le système de n intégrales linéairement indépendantes de (6.1), satisfaisant à (6.3). Le théorème se trouve ainsi établi.

Remarque 4. Le théorème B de Perron peut être considéré comme cas particulier du Théorème 3. Pour le démontrer, supposons que les hypothèses du théorème B de Perron soient satisfaites. Il suffit de prouver que les hypothèses du Théorème 3 le sont aussi. En employant

les notations introduites dans le Théorème 3, on a, dans le cas considéré par Perron,

$$q = 1, \quad C_1 = \|\varrho_1\|, \quad \lambda_{1j}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} c_{1j} \quad (j = 2, \dots, n),$$

$$C_2 = \begin{vmatrix} \varrho_2 & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & \varrho_3 & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varrho_n \end{vmatrix}.$$

En vertu de la forme des matrices C_1 et C_2 , il est évident que ϱ_1 est la racine caractéristique de C_1 et $\varrho_2, \dots, \varrho_n$ forment la suite complète des racines caractéristiques de la matrice C_2 . Ainsi, toutes les hypothèses du Théorème 3 sont vérifiées, car on a, d'après (0.3),

$$R(\varrho_1) > R(\varrho_k) \quad (k = 2, \dots, n).$$

SUR UNE INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES ÉLÉMENTS COMPLEXES

Par W. SOSNOWSKI †

1. Soit une conique arbitraire dans un plan. Elle détermine, sur chaque droite du plan, une involution polaire conjuguée qui lui est relative.

Sur une sécante, l'involution est hyperbolique et les points d'intersection de la droite avec la conique sont les points doubles de l'involution.

Sur une tangente l'involution dégénère de façon que tout point de la droite devienne point de contact.

C'était le point de départ des considérations de Staudt ¹⁾. L'auteur lia toute involution sur une droite avec un couple de points. Dans le cas d'une involution hyperbolique, c'était un couple de points doubles, dans le cas elliptique, par contre, il généralisa la notion de point.

Il arriva de cette manière à identifier un couple de points complexes conjugués avec une involution elliptique sur une droite. Pour discerner les points d'un tel couple, Staudt lia l'involution elliptique avec l'orientation d'une droite. Sa définition était la suivante:

Un point complexe est une involution elliptique orientée sur une droite. Cette droite s'appelle *support* des points complexes ²⁾.

De la même manière prit jour la définition d'une droite complexe dans un plan et d'un plan dans l'espace. Cela fit ressortir dans l'espace les droites complexes de seconde espèce qui n'ont pas de porteur réel. Ce sont des droites qui réunissent les points complexes avec les supports réels obliques.

2. Pour éviter les droites complexes de seconde espèce, on se bornera uniquement à des considérations de figures planes. Remarquons, cependant, que la définition de Staudt, quoique'elle prenne son origine de la considération du lien entre la conique et les droites, peut être étendue sur une base plus générale.

Il s'agit notamment de toutes les involutions qui ont des points doubles. A l'aide de cette définition, on peut faire associer des points doubles aux involutions qui ne les ont pas. Si l'on envisage toutes les

¹⁾ Voir G. Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage*.

²⁾ Cf. aussi C. Juel, *Vorlesungen über projektive Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der Staudtschen Imaginärtheorie*, Berlin 1934.

projectivités sur les droites, la définition d'un point complexe peut se baser sur ce que toute projectivité elliptique a des points doubles.

On doit toutefois admettre qu'à différentes projectivités, on associe le même point.

On évite cette difficulté en ne considérant que des involutions, car deux involutions elliptiques différentes n'ont sûrement aucun point double commun.

La question subsiste si l'on ne peut pas trouver une autre classe de projectivités qui donnerait une base suffisante à la définition du point complexe. La définition, basée uniquement sur une classe d'involutions apparaît plus que problématique.

La classe de projectivités choisie pour ce but doit satisfaire aux conditions suivantes:

I. A tout point complexe correspond une et une seule projectivité de la classe.

II. A toute projectivité de la classe correspond un et un seul point complexe.

La classe des involutions elliptiques ne satisfait pas à cette condition, d'où la nécessité d'une liaison artificielle de l'involution avec l'orientation d'une droite.

III. La projectivité d'une classe est déterminée à l'aide d'un nombre de points aussi petit que possible.

Les involutions sont déterminées à l'aide de quatre points (deux couples).

IV. Les constructions élémentaires des points d'intersection peuvent se faire facilement.

Si l'on adopte la définition de Staudt, l'intersection d'une droite avec la conique se fait aisément; par contre, l'intersection de deux droites nécessite quelques constructions assez compliquées.

3. J'appelle *involution d'ordre n* toute projectivité dont la n -ième itération est une identité tandis que la m -ième ne l'est pas si $m < n$.

Une involution du premier ordre est donc une identité.

Par contre, l'involution dans le sens ordinaire est une involution du deuxième ordre. Cette désignation sera maintenue dans la suite.

Soient x_1, x_2, \dots, x_n n points et soit φ une involution du n -ième ordre, où

$$x_2 = \varphi(x_1), \quad x_3 = \varphi(x_2), \quad \dots, \quad x_1 = \varphi(x_n).$$

J'appelle *cycle de l'involution φ* l'ensemble de points (x_1, x_2, \dots, x_n) cycliquement ordonné.

Le cycle d'une involution du n -ième ordre se compose donc de n points différents.

Proposition 1. *Trois points arbitraires cycliquement ordonnés, situés sur une droite, forment un cycle d'une et une seule involution du 3-ième ordre.*

Démonstration. Désignons ces points par x, y, z . Il existe une et une seule projectivité qui transforme les points x, y, z en points y, z, x respectivement. J'affirme que c'est une involution du 3-ième ordre.

Supposons, pour le prouver, qu'un point arbitraire t transforme cette projectivité en u , u en v et v en w . Le rapport anharmonique de deux couples de points étant invariant des projectivités, on a

$$(x, y; z, t) = (y, z; x, u) = (z, x; y, v) = (x, y; z, w);$$

il s'ensuit que $t = w$, ce qui était à démontrer.

Proposition 2. Toute involution du 3-ième ordre n'a aucun point double réel.

Démonstration. Supposons que x, y, z forment un cycle de cette involution dont t est un point double. Il en résulte que

$$(x, y; z, t) = (y, z; x, t) = (z, x; y, t).$$

Ces rapports anharmoniques ne peuvent avoir, tous les trois, le même signe et, par conséquent, être égaux; t ne peut pas être un point double, ce qui était à démontrer.

4. A chaque involution du 3-ième ordre on peut faire correspondre un et un seul point complexe. On le considère comme faisant partie des points de la droite sur laquelle l'involution est déterminée. A différentes involutions on fait correspondre différents points.

Puisque l'involution du 3-ième ordre (en vertu de la proposition 2) n'a aucun point double réel, la théorie de Staudt lui fait correspondre un couple de points complexes, conjugués. Ces mêmes points sont considérés comme associés à l'involution réciproque du 3-ième ordre. L'un d'eux est associé à l'involution du 3-ième ordre, l'autre — à l'une de ses involutions réciproques. Les points complexes conjugués sont considérés comme correspondants aux involutions du 3-ième ordre.

Il en résulte évidemment que les conditions I et II sont satisfaites.

Remarquons que tout point complexe est déterminé par trois points réels qui forment un cycle d'une involution du 3-ième ordre.

Désignons par xyz le point complexe qui correspond au cycle (x, y, z) . Ce point peut être associé à différents cycles s'ils correspondent à la même involution du 3-ième ordre. En particulier, $xyz (=) yzx (=) zxy$. Le point $xzy (=) zyx (=) yxz$ est conjugué, par contre, avec xyz .

Un ensemble de trois points cycliquement ordonné est la plus simple figure rectiligne qui peut déterminer sur des droites réelles un point complexe dont l'ensemble est à deux dimensions.

On voit de suite que la condition III est aussi satisfaite.

5. De la même manière, à toute involution du 3-ième ordre dans un faisceau de rayons, on fait correspondre une et une seule droite com-

plexe. On la considère comme faisant partie des droites de ce faisceau. Un point complexe est situé sur l'une des droites complexes si les involutions correspondantes se trouvent dans une position de perspective et dans ce cas seulement.

Problème 1. Faire passer une droite par deux points complexes donnés.

Si les deux points ont un support commun réel, ce dernier est la droite cherchée, réel dans ce cas.

Supposons que les supports réels de ces deux points soient deux droites différentes et désignons par x leur point d'intersection réel. Soient $)xyz($ et $)xwv($ les points complexes donnés, t le point d'intersection réel de deux droites $\overline{y\bar{u}}$ et $\overline{x\bar{v}}$.

L'involution du 3-ième ordre dans le faisceau de rayons de sommet t , dont le cycle est

$$(\overline{tx}, \overline{ty}, \overline{tz}) = (\overline{tx}, \overline{tu}, \overline{tv}),$$

est située dans une position de perspective avec les involutions (x, y, z) et (x, u, v) ; la droite complexe $\overline{tx}, \overline{ty}, \overline{tz}$ est alors la droite cherchée.

Problème 2. Déterminer le point d'intersection de deux droites complexes données.

On trouve la solution en appliquant le principe de dualité.

Les constructions élémentaires du premier degré ont, comme on le voit, des solutions tout-à-fait simples, plus simples que celles dans la théorie de Staudt.

6. Considérons maintenant les points complexes situés sur une conique.

Soit une conique S sur laquelle sont donnés trois points $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Faisons passer par \bar{x} une tangente à S coupant la droite $\bar{y}\bar{z}$ en un point x . On détermine pareillement les points y et z .

Les points x, y, z sont situés sur la même droite L (droite de Pascal d'un hexagone inscrit dans une conique $\bar{x}\bar{y}\bar{y}\bar{z}\bar{z}$). Les deux points complexes conjugués $)xyz($ et $)xzy($ sont les points d'intersection de la droite L avec la conique S .

Supposons, pour le prouver, que les points \bar{x} et \bar{z} soient pris pour sommets de deux faisceaux de rayons se trouvant mutuellement dans un rapport projectif tel que les droites correspondantes se coupent aux points de la conique.

Désignons cette projectivité par φ . Elle transforme le faisceau de sommet \bar{x} en un faisceau de sommet \bar{z} . Considérons maintenant les droites $\bar{x}\bar{x}, \bar{x}\bar{y}, \bar{x}\bar{z}$ que la projectivité φ transforme en droites $\bar{z}\bar{y}, \bar{z}\bar{z}, \bar{z}\bar{x}$ (fig. 1). De même φ transforme la droite complexe $)\bar{x}\bar{x}, \bar{x}\bar{y}, \bar{x}\bar{z}($ en la droite $)\bar{z}\bar{y}, \bar{z}\bar{z}, \bar{z}\bar{x}($. Le point d'intersection de ces droites doit être un point complexe situé sur la conique S . Ce point est donc un point complexe $)xyz($ de la droite L , ce qui était à prouver.

On voit que sur une conique, aussi bien que sur une droite, à tout ensemble de 3 points cycliquement ordonné correspond un point con-

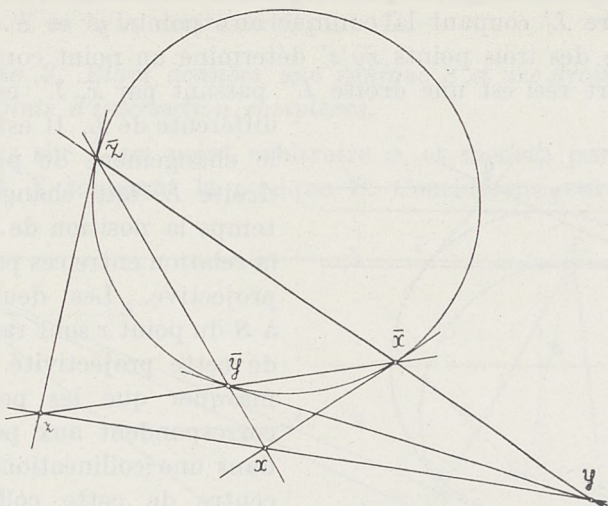


Fig. 1

jugué de la conique et que les supports réels de ce point c'est la droite de Pascal d'un des hexagones dont on a parlé plus haut.

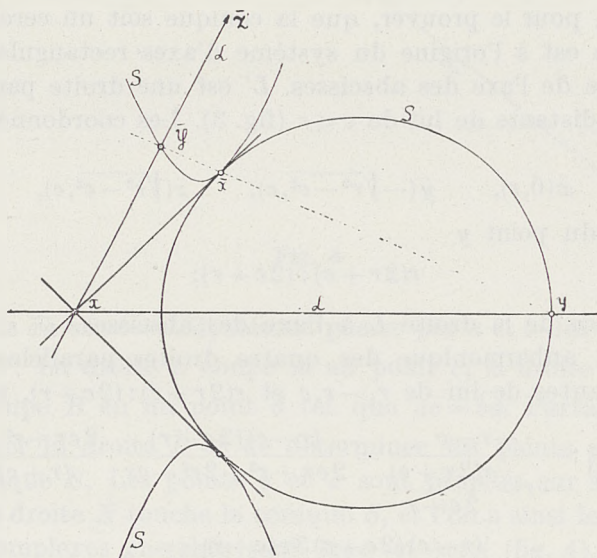


Fig. 2

7. Soient une conique S et une droite L qui ne la coupe pas. Déterminer les points d'intersection de la droite L avec la conique S .

On choisit sur L un point arbitraire x , et on cherche les points y et z du cycle correspondant. Il s'ensuit qu'il existe sur S trois points $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$

tels que L soit une droite de Pascal de l'hexagone $\bar{x}\bar{y}\bar{y}\bar{z}\bar{z}$ et $\bar{x}\bar{x}$ — une tangente à S . Faisons passer par le point x une tangente $x\bar{x}$ et une sécante arbitraire L' coupant la conique aux points \bar{y}' et \bar{z}' .

L'ensemble des trois points $\bar{x}\bar{y}'\bar{z}'$ détermine un point complexe $)xy'z'$ (dont le support réel est une droite L'' passant par x . L'' est en général différente de L . Il est évident que le changement de position de la droite L' fait changer en même temps la position de la droite L'' , la relation entre ces positions étant projective. Les deux tangentes à S du point x sont rayons doubles de cette projectivité. Il faut remarquer que les points \bar{y}' et \bar{z}' correspondent aux points y' et z' dans une collinéation centrale. Le centre de cette collinéation est le point \bar{x} et son axe est la seconde tangente à S du point x , qui ne passe pas par \bar{x} . Le coef-

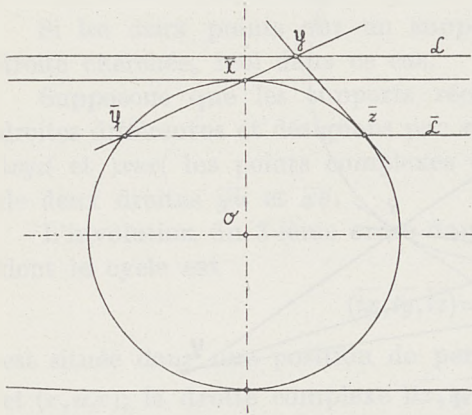


Fig. 3

efficient de cette collinéation est le nombre -3 (fig. 2).

Supposons, pour le prouver, que la conique soit un cercle de rayon r dont le centre est à l'origine du système d'axes rectangulaire. x est un point impropre de l'axe des abscisses. L' est une droite parallèle à l'axe des abscisses, distante de lui de $c < r$ (fig. 3). Les coordonnées des points sont

$$\bar{x}(0, r), \quad \bar{y}(-\sqrt{r^2 - c^2}, c), \quad \bar{z}(\sqrt{r^2 - c^2}, c),$$

et l'ordonnée du point y

$$r(2r + c) : (2c + r);$$

c'est la distance de la droite L à l'axe des abscisses.

Le rapport anharmonique des quatre droites parallèles à l'axe des abscisses, distantes de lui de $r, -r, c$ et $r(2r + c) : (2c + r)$, est

$$\begin{aligned} \frac{r-c}{r-\frac{r(2r+c)}{2c+r}} : \frac{-r-c}{-r-\frac{r(2r+c)}{2c+r}} &= \frac{(r-c)(2c+r)}{2cr+r^2-2r^2-cr} \cdot \frac{2cr+r^2+2r^2+cr}{(r+c)(2c+r)} \\ &= \frac{(r-c)(2c+r)3r(c+r)}{(r+c)(2c+r)r(c-r)} = -3. \end{aligned}$$

Puisque la proposition est vraie dans ce cas, elle le sera pour tout autre conique et tout autre point extérieur x . Cela résulte de ce que la conique peut toujours être rapportée projectivement au cercle de manière que x se transforme en un point impropre et la valeur numérique du rapport anharmonique reste invariable.

8. Il en résulte une construction bien simple d'une involution du 3-ième ordre à laquelle on a fait associer un point complexe commun à la conique S et à la droite arbitraire L .

Problème 3. *Etant données une conique S et une droite extérieure L , trouver les points d'intersection complexes.*

Choisissons sur L un point arbitraire x , et menons par celui-ci deux droites M et N touchant la conique S . Considérons, sur la droite M ,

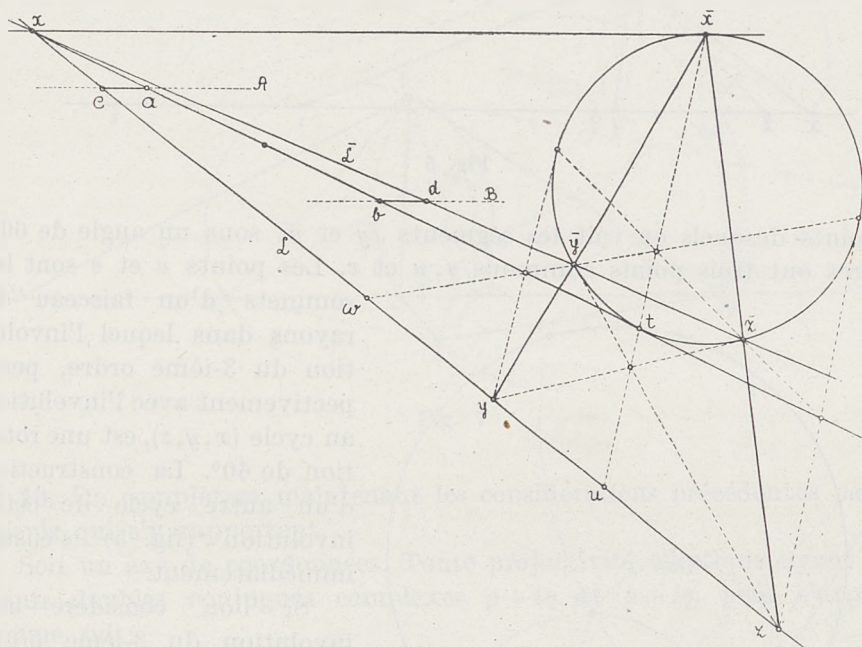


Fig. 4

deux segments \overline{xa} et $\overline{xb} = 3\overline{xa}$; faisons passer par a et b des droites A et B parallèles à N . La droite L coupe A au point c ; la droite \overline{L} , qui correspond à L , coupe B en un point d tel que $\overline{ac} = \overline{bd}$. Partant de là, il est facile de tracer la droite \overline{L} et de déterminer les points \overline{y} et \overline{z} , où elle coupe la conique S . Les points \overline{y} et \overline{z} sont projetés sur la droite L du point \overline{x} , où la droite N touche la conique S , et l'on a ainsi les points y et z . Les points complexes cherchés sont xyz (et) xzy (fig. 4).

Le problème de dualité, c'est-à-dire faire passer d'un point donné une droite complexe tangentielle à une conique, se résout pareillement. Ces constructions ne sont donc pas plus compliquées que celles dans la méthode de Staudt.

9. La plus simple involution du 3-ième ordre dans un faisceau de rayons est une rotation de 60° . Cette involution correspond, d'après sa

signification, à l'involution rectangulaire de la méthode de Staudt. Soit un cycle arbitraire d'une involution du 3-ième ordre (x, y, z) sur une droite réelle. Traçons deux arcs de circonférences — lieux géométriques

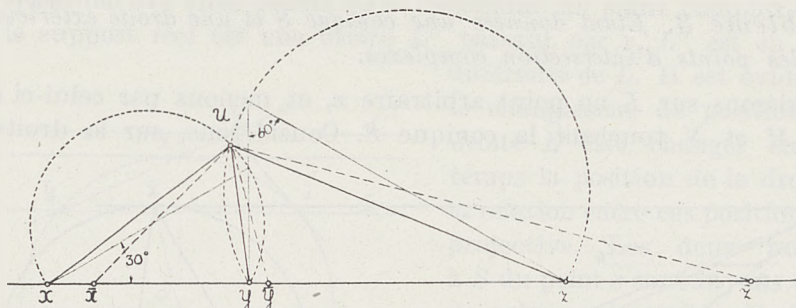


Fig. 5

des points desquels on voit les segments \overline{xy} et \overline{yz} sous un angle de 60° . Ces arcs ont trois points communs y, u et v . Les points u et v sont les sommets d'un faisceau de rayons dans lequel l'involution du 3-ième ordre, perspectivement avec l'involution au cycle (x, y, z) , est une rotation de 60° . La construction d'un autre cycle de cette involution (fig. 5) s'ensuit immédiatement.

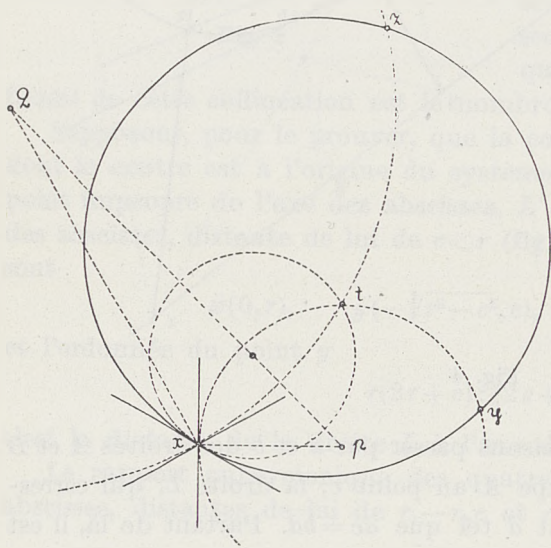


Fig. 6

de cette involution par (x, y, z) , et si l'on fait passer des circonférences par le centre t du cercle, les points x, y et y, z , on voit que ces circonférences se coupent sous un angle de 60° . Puisque la projectivité sur le plan de Gauss est une représentation qui conserve les angles, la propriété dont on a parlé plus haut a lieu même si le point double t n'est pas le centre du cercle. Si l'on prend donc, sur le cercle, un point arbitraire x , on trouvera y de la condition que la circonférence passant par t et x coupe le cercle sous un angle de 60° (fig. 6).

Il résulte de la construction ci-dessus que, dans le plan de Gauss, deux points doubles d'une involution du 3-ième ordre déterminent complètement cette involution. Une involution du 3-ième ordre est aussi déterminée si l'on donne un point double et le cercle (ou une droite) qui se représente sur lui-même. Par contre, deux couples de points, à savoir le couple primitif et le couple transformé, situés sur la même droite, ou sur le même cercle, déterminent généralement deux involutions du 3-ième ordre, parfois une seule, et dans certains cas aucune (fig. 7).

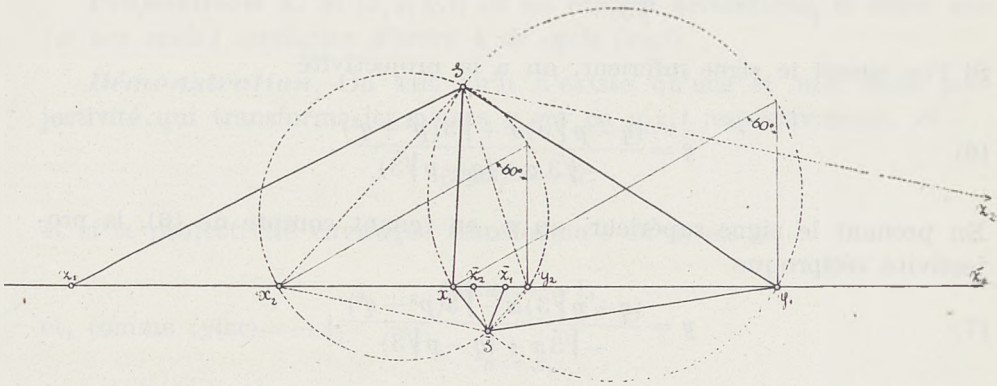


Fig. 7

10. On complètera maintenant les considérations précédentes par des calculs qui s'y rapportent.

Soit un axe de coordonnées. Toute projectivité elliptique ayant deux points doubles conjugués complexes $p + iq$ et $p - iq$, peut s'exprimer comme suit:

$$(1) \quad y = \frac{(\mu + 2p)x - (p^2 + q^2)}{x + \mu},$$

où μ est un paramètre arbitraire.

La fonction réciproque est

$$(2) \quad y = \frac{\mu x + (p^2 + q^2)}{-x + (\mu + 2p)}.$$

La deuxième itération de la projectivité primitive s'exprime

$$(3) \quad y = \frac{[(\mu + 2p)^2 - (p^2 + q^2)]x - 2(p^2 + q^2)(\mu + p)}{2(\mu + p)x - [(p^2 + q^2) - \mu^2]}.$$

Dans le cas d'une involution du 3-ième ordre, elle doit être identique à l'involution réciproque. Il s'ensuit que

$$(4) \quad \mu = \frac{(p^2 + q^2) - (\mu + 2p)^2}{2(\mu + p)}.$$

Alors

$$2\mu^2 + 2p\mu - p^2 - q^2 + \mu^2 + 4p\mu + 4p^2 = 0,$$

$$3\mu^2 + 6p\mu + 3p^2 - q^2 = 0,$$

$$3(\mu + p)^2 = q^2,$$

(5)

$$\mu_{1,2} + p = \pm \frac{q}{\sqrt{3}},$$

$$\mu_{1,2} = \frac{-p\sqrt{3} \pm q}{\sqrt{3}}.$$

Si l'on prend le signe inférieur, on a la projectivité

$$(6) \quad y = \frac{(q - p\sqrt{3})x + \sqrt{3}(p^2 + q^2)}{-\sqrt{3}x + (q - p\sqrt{3})}.$$

En prenant le signe supérieur, on a, en tenant compte de (6), la projectivité réciproque

$$(7) \quad y = \frac{(q + p\sqrt{3})x - \sqrt{3}(p^2 + q^2)}{-\sqrt{3}x + (q + p\sqrt{3})}.$$

On fait correspondre le point $p + iq$ à la projectivité (6) et point $p - iq$ à la projectivité (7).

La seconde projectivité peut être obtenue de la première en changeant q en $-q$. On peut donc considérer, en général, que le point $p + iq$ correspond à la projectivité (6).

11. On va voir maintenant si les involutions d'ordre n ($n = 4, 5, \dots$) peuvent aussi servir de point de départ pour l'introduction des points complexes. On peut dire d'une manière générale, qu'une classe d'involution d'ordre n ne peut être employée dans ce but que s'il existe un et un seul nombre $m < n$ tel que m et n soient premiers entre eux. Dans ce cas la m -ième itération d'une involution d'ordre n est aussi une involution d'ordre n différente de la première. Les deux involutions ont exactement deux points doubles communs. Si ces derniers sont conjugués et complexes, on peut faire correspondre le premier point double à la première involution et le second point double — à la deuxième.

La propriété en question n'ont que les nombres 3, 4, 6, et ce n'est qu'eux qui peuvent être pris en considération en introduisant les points complexes d'après la méthode de Staudt.

Le nombre 2, employé par Staudt, n'a pas cette propriété, et, par conséquent, on doit faire correspondre les deux points doubles à la même involution.

12. Pour les involutions d'ordre 4, on démontre les propositions suivantes:

Proposition 3. *Si les points x, y, z et t forment un cycle d'une involution d'ordre 4, $(x, z; y, t)$ est un rapport harmonique.*

Démonstration. Les rapports anharmoniques suivants sont égaux

$$(xzyt) = (ytzx) = (zxt y) = (tyxz),$$

ce qui ne peut avoir lieu que si les couples xz et yt sont divisés harmoniquement.

Proposition 4. *Si $(x, z; y, t)$ est un rapport harmonique, il existe une (et une seule) involution d'ordre 4 de cycle $(xyzt)$.*

Démonstration. On sait qu'il n'existe qu'une et une seule projectivité qui transforme les points x, y, z en y, z, t respectivement. Si

$$(xyzt) = -1,$$

et si la projectivité envisagée transforme t en u , on a

$$(ytzu) = -1,$$

et, comme $(ytzx) = -1$,

$$u = x,$$

ce qui était à démontrer.

Proposition 5. *Une involution du 4-ième ordre n'a aucun point double réel.*

Démonstration. Si une involution d'ordre 4, de cycle $(xyzt)$ en avait un, son itération, qui est une involution d'ordre 2, devrait l'avoir aussi. Mais l'involution du deuxième ordre a comme couple de points correspondants xz et yt . D'après la proposition 3, ces couples forment une division harmonique. L'involution du 2-ième ordre est alors elliptique et ne peut avoir de point double.

Proposition 6. *Une involution du 4-ième ordre est déterminée par trois points ordonnés, situés sur une droite, le premier se change en le deuxième, le deuxième en le troisième, et le troisième en un point conjugué harmoniquement avec le deuxième par rapport au premier et le troisième.*

La démonstration résulte immédiatement des propositions 3 et 4.

13. Il résulte de ces propositions qu'à toute involution du 4-ième ordre, on peut faire correspondre un point complexe de manière qu'aux points conjugués échoient les involutions réciproques. On voit encore que les points ordonnés x, y et z , situés sur une droite, déterminent un point complexe qui peut être désigné par (xyz) .

Si l'on désigne par t un point conjugué harmoniquement avec y par rapport à x et z , on a

$$(xyz) = (yzt) = (ztx) = (txy).$$

Par contre, le point

$$(zyx) = (tzy) = (xtz) = (yxt)$$

est conjugué avec le précédent.

De façon analogue, s'il s'agit d'involutions du 4-ième ordre dans un faisceau, on peut leur faire correspondre des droites complexes de manière qu'un point complexe soit situé sur la droite complexe si les involutions correspondantes sont liées perspectivement.

Les problèmes des jonctions et des intersections se résolvent comme les problèmes 1 et 2. Par contre, s'il s'agit de déterminer les points d'intersection d'une droite L avec la conique S , on prend sur L un point arbitraire x , et on trace sa polaire relative à S qui coupe L au point z . Les tangentes à S , partant des points x et z , forment un quadrilatère circonscrit à S . L'une de ses diagonales est L et les deux autres coupent L aux points y et t . Les points complexes cherchés sont alors (xyz) et (xtz) .

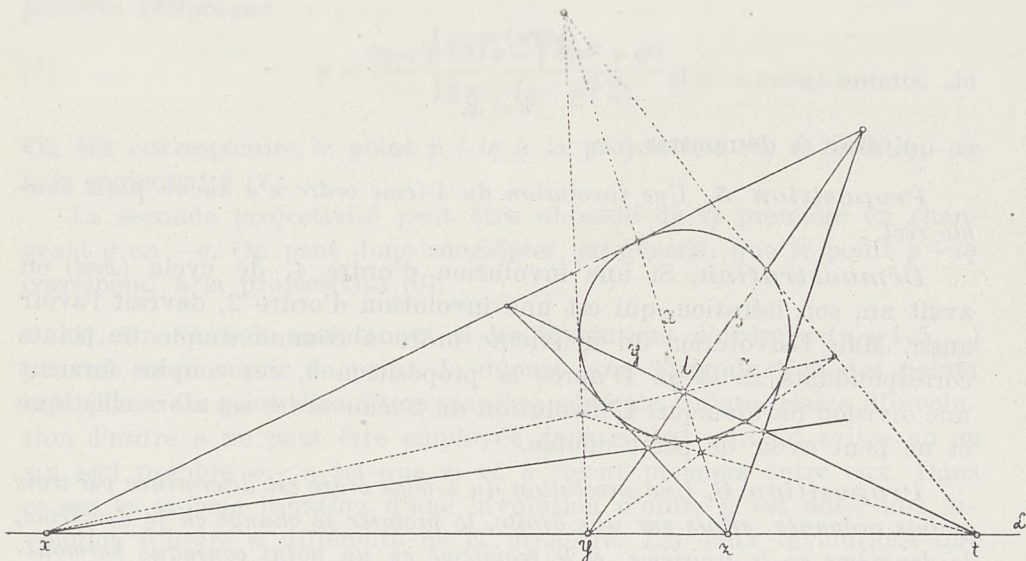


Fig. 8

La démonstration est analogue à celle qui fut donnée dans la section 7 (fig. 8).

14. Dans le calcul, semblable à celui de la section 10, on utilise la propriété que l'itération d'une involution du 4-ième ordre est une involution d'ordre 2 à laquelle s'applique la formule

$$y = \frac{px - (p^2 + q^2)}{x - p},$$

d'où à cause de (3),

$$\frac{p^2 + q^2 - \mu^2}{2(\mu + p)} = p.$$

Donc

$$p^2 + q^2 - \mu^2 - 2p\mu - 2p^2 = 0,$$

$$\mu^2 + 2p\mu + p^2 = q^2$$

$$\mu_{1,2} = -p \pm q.$$

A l'involution

$$y = \frac{(p - q)x - (p^2 + q^2)}{x - (p + q)},$$

on fait correspondre $p + iq$, ce qui revient à prendre le signe supérieur; à l'involution

$$y = \frac{(p + q)x - (p^2 + q^2)}{x - (p - q)}$$

le point $p - iq$.

15. Les involutions du 4-ième ordre fournissent des constructions pareilles à celles que l'on emploie dans les involutions du 2-ième ordre. Si $(xyzt)$ est le cycle d'une involution du 4-ième ordre, celle-ci a les mêmes points doubles conjugués que l'involution du 2-ième ordre dans laquelle les couples de points x, z et y, t se correspondent.

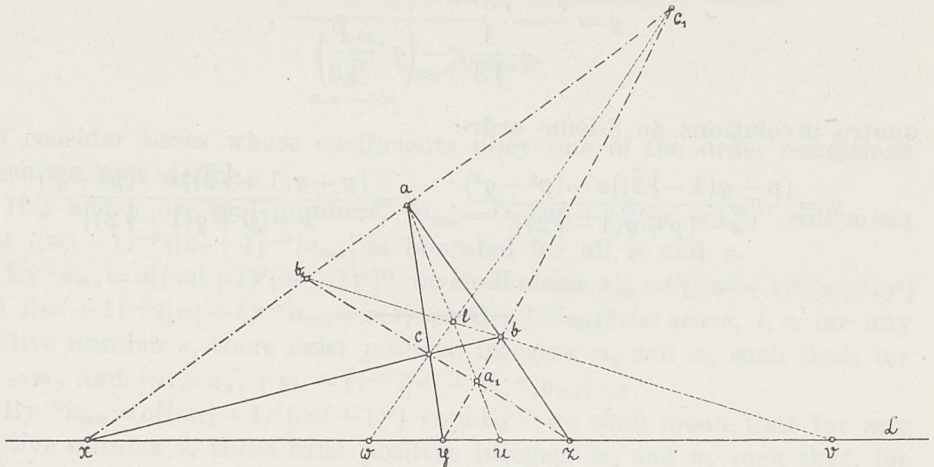


Fig. 9

En ce qui concerne les involutions du 6-ième ordre, il est facile d'en donner la construction, dans laquelle la première itération est une involution donnée du 3-ième ordre, de cycle (xyz) . Dans ce but, on trace un triangle abc tel que les prolongements des côtés ab, bc et ca passent respectivement par z, x et y (fig. 9 et aussi fig. 4). On trace ensuite un

triangle $\ddot{a}\ddot{b}\ddot{c}$ dont les côtés $\ddot{a}\ddot{b}$, $\ddot{b}\ddot{c}$ et $\ddot{c}\ddot{a}$ passent respectivement par les points zc, xa et yb . Les droites $\ddot{a}\ddot{a}$, $\ddot{b}\ddot{b}$, $\ddot{c}\ddot{c}$ se coupent en un point (Théorème de Desargues) et la droite en u, v et w .

Les points x, w, y, u, z et v forment un cycle d'une involution du 6-ième ordre.

Une projectivité qui transforme x, w, y en w, y, u respectivement doit aussi transformer le point z , conjugué harmoniquement avec w par rapport à x et y , en le point v conjugué harmoniquement avec y par rapport à w et u .

On peut démontrer de la même manière que le point u doit être transformable en z , et v en x , ce qui était à démontrer.

La même configuration complète le cycle $(xwyuzv)$ si l'on donne trois de ses points initiaux x, w, y .

16. Terminons en donnant des formules aux involutions d'ordre 5, 6 et 8 dont les points doubles sont $p + iq$ et $p - iq$.

On a: quatre involutions du 5-ième ordre

$$y = \frac{(p \pm q\sqrt{1 - \frac{2}{5}})x - (p^2 + q^2)}{x - (p \mp q\sqrt{1 - \frac{2}{5}})}, \quad y = \frac{(p \pm q\sqrt{1 + \frac{2}{5}})x - (p^2 + q^2)}{x - (p \mp q\sqrt{1 + \frac{2}{5}})},$$

deux involutions du 6-ième ordre

$$y = \frac{\left(q \pm \frac{P}{\sqrt{3}}\right)x \mp \frac{1}{\sqrt{3}}(p^2 + q^2)}{\pm \frac{1}{\sqrt{3}}x - \left(q \mp \frac{P}{\sqrt{3}}\right)},$$

quatre involutions du 8-ième ordre

$$y = \frac{[p \pm q(1 - \sqrt{2})]x - (p^2 + q^2)}{x - [p \mp q(1 - \sqrt{2})]}, \quad y = \frac{[p \pm q(1 + \sqrt{2})]x - (p^2 + q^2)}{x - [p \mp q(1 + \sqrt{2})]}.$$

ON THE THEORY OF LOCALIZATION FOR DOUBLE TRIGONOMETRIC SERIES

By R. P. GOSSELIN (Chicago)

The purpose of this paper is to extend to double trigonometric series certain results in the theory of localization for single trigonometric series. The theory, originated by Riemann, was developed by Rajchman and Zygmund [1] through the use of the formal multiplication of series. Lepecki [3] has extended this theory for the case of double trigonometric series with coefficients which go to 0 in a prescribed manner. We shall consider more general trigonometric series. The main technique to be used in the proofs involves the theory of the formal multiplication of double series, which will be developed as far as necessary.

The author wishes to thank Professor A. Zygmund for suggesting this problem and for his guidance and encouragement.

We shall use the exponential form of trigonometric series,

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} a_{mn} e^{i(mx+ny)},$$

and consider series whose coefficients obey one of the order conditions which we now define.

If β and σ are real numbers, " $a_{mn} = O[(|m|+1)^\beta(|n|+1)^\sigma]$ " will mean that $(|m|+1)^{-\beta}(|n|+1)^{-\sigma}|a_{mn}|$ is bounded for all m and n .

By " $a_{mn} = o[(|m|+1)^\beta(|n|+1)^\sigma]$ " we shall mean $a_{mn} = O[(|m|+1)^\beta(|n|+1)^\sigma]$ and $(|m|+1)^{-\beta}(|n|+1)^{-\sigma}a_{mn} = o(1)$ in the *Pringsheim sense*, i. e. for any positive number ε , there exist positive integers m_0 and n_0 such that, for $|m| \geq m_0$ and $|n| \geq n_0$, $(|m|+1)^{-\beta}(|n|+1)^{-\sigma}|a_{mn}| < \varepsilon$.

By " $a_{mn} = o[(|m|+1)^\beta(|n|+1)^\sigma]$ rapidly" we shall mean that for any positive number ε , there exist positive integers m_0 and n_0 such that, for $|m| \geq m_0$ or $|n| \geq n_0$, $(|m|+1)^{-\beta}(|n|+1)^{-\sigma}|a_{mn}| < \varepsilon$.

By " $a_{mn} = o[(|m|+1)^\beta(|n|+1)^\sigma]$ semi-rapidly" we shall mean that $a_{mn} = o[(|m|+1)^\beta(|n|+1)^\sigma]$ and that $a_{m0} = o[(|m|+1)^\beta]$ and $a_{0n} = o[(|n|+1)^\sigma]$ in the usual sense.

If β is a non-negative number, $[\beta]$ will denote the greatest integer less than or equal to β ; $\langle \beta \rangle$ will denote the least integer greater than or equal to β .

Chapter I

Preliminary Lemmas

In most of the lemmas to follow, we shall be considering two series

$$(1) \quad \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} a_{mn}$$

and

$$(2) \quad \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \alpha_{mn}$$

and the formal product of these two series

$$(3) \quad \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} A_{mn}$$

with coefficients defined by

$$A_{mn} = \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} a_{pq} \alpha_{m-p, n-q},$$

if this sum exists. It will, for example, be enough to assume that a_{mn} is bounded, and that (2) converges absolutely to insure the existence of the coefficients A_{mn} .

Lemma I. *If $a_{mn} = o(1)$, and (2) converges absolutely, then the coefficients A_{mn} of the formal product of (1) and (2) are also $o(1)$.*

We have that

$$|A_{mn}| \leq \sum_{|p| < \frac{1}{2}|m| \text{ or } |q| < \frac{1}{2}|n|} |a_{pq}| |\alpha_{m-p, n-q}| + \sum_{|p| \geq \frac{1}{2}|m|, |q| \geq \frac{1}{2}|n|} |a_{pq}| |\alpha_{m-p, n-q}|.$$

We denote the first sum by Σ_1 and the second by Σ_2 . Let B be a bound for coefficients a_{mn} , and let

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} |\alpha_{mn}| = C.$$

It follows that

$$\Sigma_1 \leq B \sum_{|p| < \frac{1}{2}|m| \text{ or } |q| < \frac{1}{2}|n|} |\alpha_{pq}|.$$

By the absolute convergence of (2), Σ_1 becomes arbitrarily small as $|m|$ and $|n| \rightarrow \infty$. For any positive number ε , we can find positive integers m_0 and n_0 such that for $|m| \geq m_0$ and $|n| \geq n_0$, $|a_{mn}| < \varepsilon$. Hence, for m and n sufficiently large, Σ_2 is not greater than εC . Moreover, $|A_{mn}| \leq BC$ for all m and n .

We may use Lemma I to prove the following more general lemma:

Lemma II. *If, for $\beta \geq 0$ and $\sigma \geq 0$, $a_{mn} = o[(|m| + 1)^\beta (|n| + 1)^\sigma]$, and $\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} |a_{mn}| (|m| + 1)^\beta (|n| + 1)^\sigma$ converges, then $A_{mn} = o[(|m| + 1)^\beta (|n| + 1)^\sigma]$.*

Let $\varepsilon_{mn} = |a_{mn}| / (|m| + 1)^\beta (|n| + 1)^\sigma$, and $\eta_{mn} = |a_{mn}| (|m| + 1)^\beta (|n| + 1)^\sigma$. Then,

$$|A_{mn}| \leq \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} |a_{pq}| |a_{m-p,n-q}| \leq \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} \varepsilon_{pq} \eta_{m-p,n-q} \left(\frac{|p| + 1}{|m-p| + 1} \right)^\beta \left(\frac{|q| + 1}{|n-q| + 1} \right)^\sigma.$$

If $m \geq 0$, then for $p \leq 0$, $|p| + 1 / |m-p| + 1 \leq 1$; for $0 \leq p \leq 2m$, $|p| + 1 / |m-p| + 1 \leq 2m + 1$; for $p \geq 2m$, $|p| + 1 / |m-p| + 1 \leq 2$. Hence, in all cases $|p| + 1 / |m-p| + 1 \leq 2|m| + 2$, and the same inequality holds for m negative. Similarly, $|q| + 1 / |n-q| + 1 \leq 2|n| + 2$. Hence,

$$|A_{mn}| \leq 2^{\beta+\sigma} (|m| + 1)^\beta (|n| + 1)^\sigma \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} \varepsilon_{pq} \eta_{m-p,n-q}$$

and by Lemma I, $\sum_{p,q=-\infty}^{\infty} \varepsilon_{pq} \eta_{m-p,n-q} = o(1)$.

Lemma III. *If, for $\beta \geq 0$ and $\sigma \geq 0$,*

$$a_{mn} = o[(|m| + 1)^{-\beta} (|n| + 1)^{-\sigma}],$$

and

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} |a_{mn}| (|m| + 1)^\beta (|n| + 1)^\sigma$$

converges, then

$$A_{mn} = o[(|m| + 1)^{-\beta} (|n| + 1)^{-\sigma}].$$

Let $\varepsilon_{mn} = |a_{mn}| (|m| + 1)^\beta (|n| + 1)^\sigma$ and $\eta_{mn} = |a_{mn}| (|m| + 1)^\beta (|n| + 1)^\sigma$. Then

$$\begin{aligned} & (|m| + 1)^\beta (|n| + 1)^\sigma |A_{mn}| \\ & \leq (|m| + 1)^\beta (|n| + 1)^\sigma \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{pq} \eta_{m-p,n-q}}{(|p| + 1)^\beta (|q| + 1)^\sigma (|m-p| + 1)^\beta (|n-q| + 1)^\sigma}. \end{aligned}$$

If $|m| \geq 0$, then for $p \leq 0$, $(|m| + 1 / |m-p| + 1)^\beta \leq 1$; for $0 \leq p \leq [m/2]$, $(|m| + 1 / |m-p| + 1)^\beta \leq 2^\beta$; for $p > [m/2]$, $(m + 1 / p + 1)^\beta \leq 2^\beta$. Similar estimates hold for $m < 0$ and also for the terms involving q and n . Hence,

$$(|m| + 1)^\beta (|n| + 1)^\sigma |A_{mn}| \leq 2^{\beta+\sigma} \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} \varepsilon_{pq} \eta_{m-p,n-q}.$$

Since

$$\sum_{p,q=-\infty}^{\infty} \varepsilon_{pq} \eta_{m-p, n-q} = o(1)$$

by Lemma I, the lemma is proved.

Lemma IV. *If, for $0 < \beta < 1$ and $0 < \sigma < 1$, $a_{mn} = o[(|m| + 1)^{-\beta} (|n| + 1)^{-\sigma}]$, and $a_{mn} = O[(|m| + 1)^{-\beta-1} (|n| + 1)^{-\sigma-1}]$, then letting*

$$A_{mn} = \sum_{p,q=0}^{\infty} a_{pq} a_{m-p, n-q}$$

(we consider only non-negative m and n), we have

$$A_{mn} = o[(|m| + 1)^{-\beta} (|n| + 1)^{-\sigma}].$$

Let

$$\varepsilon_{mn} = |a_{mn}| (|m| + 1)^{\beta} (|n| + 1)^{\sigma}, \quad \eta_{mn} = |a_{mn}| (|m| + 1)^{\beta} (|n| + 1)^{\sigma},$$

$M = \text{l. u. b. } \varepsilon_{mn}$ and $N = \text{l. u. b. } \eta_{mn}$. Then,

$$\begin{aligned} & (m+1)^{\beta} (n+1)^{\sigma} |A_{mn}| \\ & \leq (m+1)^{\beta} (n+1)^{\sigma} N \sum_{p,q=0}^{m,n} \frac{\varepsilon_{pq}}{(p+1)^{\beta} (q+1)^{\sigma} (m-p+1)^{\beta+1} (n-q+1)^{\sigma+1}}. \end{aligned}$$

If $p > [m/2]$ and $q > [n/2]$, $(m+1/p+1)^{\beta} (n+1/q+1)^{\sigma} \leq 2^{\beta+\sigma}$; ε_{pq} becomes arbitrarily small for these values of (p, q) as m and $n \rightarrow \infty$. Furthermore,

$$\sum_{p,q=0}^{m,n} \frac{1}{(m-p+1)^{\beta+1} (n-q+1)^{\sigma+1}} = O(1).$$

If $0 \leq p \leq [m/2]$ and $q > [n/2]$, $(m+1/m-p+1)^{\beta} (n+1/q+1)^{\sigma} \leq 2^{\beta+\sigma}$. Also

$$\frac{1}{(p+1)^{\beta} (m-p+1)} \leq \frac{1}{(p+1)^{1+\beta/2} (m-p+1)^{\beta/2}} \leq \frac{2^{\beta/2}}{(m+1)^{\beta/2} (p+1)^{1+\beta/2}}$$

and $N \sum_{p,q=0}^{m,n} \varepsilon_{pq} / (p+1)^{1+\beta/2} (n-q+1)^{\sigma+1} = O(1)$. Thus,

$$\begin{aligned} & (m+1)^{\beta} (n+1)^{\sigma} N \sum_{p,q=0}^{[m/2], n} \frac{\varepsilon_{pq}}{(p+1)^{\beta} (q+1)^{\sigma} (m-p+1)^{\beta+1} (n-q+1)^{\sigma+1}} \\ & = \frac{O(1)}{(m+1)^{\beta/2}} = o(1). \end{aligned}$$

Similar arguments can be given if $0 \leq q \leq [n/2]$. It is clear from the above arguments that $(m+1)^{\beta} (n+1)^{\sigma} |A_{mn}|$ is bounded for all m and n , and the lemma is proved.

Lemma V. If, for $0 < \beta < 1$ and $\sigma \geq 0$, $a_{mn} = o[(|m| + 1)^{-\beta} (|n| + 1)^\sigma]$ and $\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} |\alpha_{mn}| (|m| + 1)^\beta (|n| + 1)^\sigma$ converges, then $A_{mn} = o[(|m| + 1)^{-\beta} (|n| + 1)^\sigma]$.

This lemma may easily be proved by a combination of arguments used in the proofs of Lemmas II and III.

Remarks to Lemmas I—V.

1. If the coefficients a_{mn} of series (1) and the coefficients of series (2) depend upon a parameter such that the hypotheses of the preceding lemmas are satisfied uniformly in that parameter, then the conclusions hold uniformly in that parameter.

2. If the hypotheses on the coefficients a_{mn} are replaced by another type of order condition of those defined in the introduction (except for the semi-rapid order condition), then the coefficients A_{mn} will also satisfy this new order condition. For example, if we assume in Lemma II that $a_{mn} = o[(|m| + 1)^\beta (|n| + 1)^\sigma]$ rapidly, then we may conclude that $A_{mn} = o[(|m| + 1)^\beta (|n| + 1)^\sigma]$ rapidly.

Lemma VI. If, for K a positive integer,

$$a_{mn} = O[(|m| + 1)^{-2K-1} (|n| + 1)^{-2K-1}],$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^j a_{mn} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, K-1 \quad \text{and} \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^j a_{mn} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, K-1$$

for all integral m and n respectively, then

$$\sum_{p_K=-\infty}^{\infty} \sum_{p_{K-1}, q_{K-1}=p_K, n}^{\infty} \cdots \sum_{p, q=p_1, q_1}^{\infty} a_{pq} = \frac{1}{K!} \sum_{q_{K-1}=n}^{\infty} \cdots \sum_{q=q_1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} p^K a_{pq},$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

and

$$\sum_{q_K=-\infty}^{\infty} \sum_{p_{K-1}, q_{K-1}=m, q_K}^{\infty} \cdots \sum_{p, q=p_1, q_1}^{\infty} a_{pq} = \frac{1}{K!} \sum_{p_{K-1}=m}^{\infty} \cdots \sum_{p=p_1}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} q^K a_{pq},$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

It is enough to prove the first formula; the second will then follow from the symmetry in m and n of the assumptions on a_{mn} . We first show

the formula true for $K=1$. Let $R_{mn}^{(1)} = \sum_{p, q=m, n}^{\infty} a_{pq}$. Since $\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{mn} = 0$

and $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} = 0$ for all integral n and m respectively, we have

$$R_{mn}^{(1)} = \sum_{p, q=m, n}^{\infty} a_{pq} = - \sum_{p, q=-\infty, n}^{m-1, \infty} a_{pq} = - \sum_{p, q=m, -\infty}^{\infty, n-1} a_{pq} = \sum_{p, q=-\infty}^{m-1, n-1} a_{pq}.$$

Hence, $R_{mn}^{(1)} = O[(|m|+1)^{-2}(|n|+1)^{-2}]$, which implies the convergence of the series $\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{mn}^{(1)}$ and $\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{mn}^{(1)}$ uniformly in n and m respectively. We now apply Abel's formula to the partial sum of the first series. Thus

$$\sum_{p=-m}^m R_{pn}^{(1)} = \sum_{p=-m}^m p(R_{pn}^{(1)} - R_{p+1,n}^{(1)}) + mR_{m-1,n} + (m+1)R_{-mn}.$$

The last two terms of the right side are $o(1)$ rapidly, and $R_{pn}^{(1)} - R_{p+1,n}^{(1)}$ $= \sum_{q=n}^{\infty} \alpha_{p,q}$ so that letting $m \rightarrow \infty$, we obtain

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} R_{pn}^{(1)} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} p\alpha_{pq} = \sum_{q=n}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} p\alpha_{pq},$$

the last equality following from the absolute convergence of the series. This proves the formula for $K=1$.

We now suppose the formula proved for every positive integer less than K . We introduce the following notations: let

$$R_{mn}^{(j+1)} = \sum_{p,q=m,n}^{\infty} R_{pq}^{(j)}, \quad j=1, 2, \dots, K-1.$$

One may easily see that these expressions make sense, all the series being convergent. Furthermore, $\sum_{p=-\infty}^{\infty} R_{pn}^{(K)}$ converges absolutely and uniformly in n . In fact, since

$$\sum_{p,q=m,n}^{\infty} R_{pq}^{(1)} = - \sum_{p,q=-\infty,n}^{m-1,\infty} R_{pq}^{(1)} = - \sum_{p,q=m,-\infty}^{\infty,n-1} R_{pq}^{(1)} = \sum_{p,q=-\infty}^{m-1,n-1} R_{pq}^{(1)},$$

$R_{mn}^{(1)} = O[(|m|+1)^{-2K+1}(|n|+1)^{-2K+1}]$. Proceeding in a similar manner, we see that $R_{mn}^{(K)} = O[(|m|+1)^{-K-1}(|n|+1)^{-K-1}]$. The formula which we are attempting to prove may be written in the form

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} R_{pn}^{(K)} = \frac{1}{K!} \sum_{q_{K-1}=n}^{\infty} \cdots \sum_{q=q_1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} p^K \alpha_{pq}, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

From the calculus of finite differences, we have the formula

$$1 = \frac{1}{K!} \sum_{j=0}^K (-1)^j A_K^{(j)} (p-j)^K, \quad A_K^{(j)} = \binom{K}{j}, \quad p - \text{arbitrary integer.}$$

One can then write

$$\begin{aligned} \sum_{p=-m}^m R_{pn}^{(K)} &= \frac{1}{K!} \sum_{p=-m}^m \sum_{j=0}^K (-1)^j A_K^{(j)} (p-j)^K R_{pn}^{(K)} \\ &= \frac{1}{K!} \sum_{i=0}^K \sum_{p=-m}^m (-1)^j A_K^{(j)} p^K R_{p+j,n}^{(K)} + \frac{1}{K!} \sum_{j=1}^K \left\{ \sum_{p=-m-j}^{-m-1} - \sum_{p=m-j+1}^m \right\} (-1)^j A_K^{(j)} p^K R_{p+j,n}^{(K)}. \end{aligned}$$

Since $m^K R_{mn}^{(K)} = o(1)$ rapidly, the second sum of the right side which remains finite, is also $o(1)$ rapidly. The first sum can be written

$$\frac{1}{K!} \sum_{p=-m}^m p^K \sum_{j=0}^K (-1)^j A_K^{(j)} R_{p+j,n}^{(K)},$$

the inner sum being the K^{th} difference of $R_{pn}^{(K)}$. The first difference is $\sum_{q_{K-1}=n}^{\infty} R_{pq_{K-1}}^{(K-1)}$, the second is $\sum_{q_{K-1}=n}^{\infty} \sum_{q_{K-2}=q_{K-1}}^{\infty} R_{pq_{K-2}}^{(K-2)}$ and the K^{th} difference is $\sum_{q_{K-1}=n}^{\infty} \sum_{q_{K-2}=q_{K-1}}^{\infty} \cdots \sum_{q=q_1}^{\infty} a_{pq}$. Letting $m \rightarrow \infty$, we obtain

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} R_{pn}^{(K)} = \frac{1}{K!} \sum_{p=-\infty}^{\infty} p^K \sum_{q_{K-1}=n}^{\infty} \cdots \sum_{q=q_1}^{\infty} a_{pq}.$$

To justify the interchange of the order of summation, we note that

$$\sum_{q_{K-2}=q_{K-1}}^{\infty} \cdots \sum_{q=q_1}^{\infty} a_{pq} = \sum_{j=0}^{K-1} (-1)^j A_{K-1}^{(j)} R_{p+j,n}^{(K-1)}$$

since the left side, which we denote by $D_{pq_{K-1}}$ is the $(K-1)^{\text{ST}}$ difference of $R_{pn}^{(K-1)}$. Hence, $D_{pq_{K-1}} = O[(|p|+1)^{-K-2}(|q_{K-1}|+1)^{-K-2}]$, and

$\sum_{p=-\infty}^{\infty} p^K \sum_{q_{K-1}=n}^{\infty} D_{pq_{K-1}}$ converges absolutely. We may thus change the

order of summation:

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} R_{pn}^{(K)} = \sum_{q_{K-1}=n}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} p^K \sum_{q_{K-2}=q_{K-1}}^{\infty} \cdots \sum_{q=q_1}^{\infty} a_{pq}.$$

By sufficiently many repetitions of the above argument, the desired formula is obtained.

Chapter II

Formal Products

In this chapter, we shall consider two trigonometric series

$$(4) \quad \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \alpha_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

and

$$(5) \quad \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \alpha_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

and the Cesàro summability of a given order of their formal product

$$(6) \quad \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} A_{mn} e^{i(mx+ny)}.$$

We shall consider summability only in the Pringsheim sense, *i. e.* (6) will be said to be *summable* (C, β, σ) at (x_0, y_0) to a limit L , if letting

$S_{mn}(x_0, y_0)$ be the mn^{th} symmetric partial sum of $\sum_{mn=-\infty}^{\infty} A_{mn} e^{i(mx_0+ny_0)}$

$$\frac{1}{C_M^{(\beta)} C_N^{(\sigma)}} \sum_{m,n=0}^{M,N} C_{M-m}^{(\beta-1)} C_{N-n}^{(\sigma-1)} S_{mn}(x_0, y_0) \rightarrow L$$

in the Pringsheim sense. Both β and σ will always be taken greater than -1 , and the various theorems will deal with summability for β in a given range and σ in a given range.

We shall be dealing also with conjugate series; we define the series conjugate to (6) to be the series

$$(7) \quad - \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} [\text{signum}(mn)] A_{mn} e^{i(mx+ny)}.$$

In what follows, we shall consider "cross-shaped" neighbourhoods of a point (x_0, y_0) , such neighbourhoods consisting by definition of all points (x, y) satisfying either the condition $|x-x_0| < \varepsilon, y$ arbitrary, or the condition $|y-y_0| < \varepsilon, x$ arbitrary. More generally, let X be a point set of the x -axis and Y a point set of the y -axis. By $X \oplus Y$, we shall mean the set of all (x, y) such that $x \in X, y$ arbitrary or $y \in Y, x$ arbitrary. By $X \times Y$, we shall mean the set of points (x, y) such that $x \in X, y \in Y$. For the theorems we are going to prove, the situation will in general be as follows. The series (4) is „bad“ by which we mean it has coefficients of some order; and the series (5) is „good“ in the sense that its coefficients tend to 0 with sufficient rapidity, and its sum satisfies certain

conditions on a set $X \oplus Y$. The conclusion will be about the behaviour of the formal product (6) of (4) and (5) in the set $X \times Y$.

Theorem I. *If, for $0 < \beta < 1$ and $0 < \sigma < 1$, the coefficients a_{mn} of series (4) are $O[(|m|+1)^{-\beta}(|n|+1)^{-\sigma}]$, and the coefficients α_{mn} of series (5) are $O[(|m|+1)^{-3}(|n|+1)^{-3}]$, and if (5) converges to 0 for $(x, y) \in X \oplus Y$, then the formal product (6) of (4) and (5) is uniformly summable $(C, -\beta, -\sigma)$ to 0 for $(x, y) \in X \times Y$.*

We shall assume that the set X consists of a single point x_0 , and the set Y consists of a single point y_0 ; and when this special case of the theorem has been proved, the full theorem will follow from Remark 1 to Lemmas I-IV of Chapter I. For convenience, let the point (x_0, y_0) be $(0, 0)$. All the coefficients A_{mn} of the formal product certainly exist in this case since the coefficients a_{mn} are bounded and (5) converges

absolutely. Letting $S_{mn} = \sum_{p,q=-m,-n}^{m,n} A_{pq}$, we have

$$S_{mn} = \sum_{p,q=-m,-n}^{m,n} \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} \alpha_{p-r, q-s} = \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} \sum_{p,q=-m-r,-n-s}^{m-r, n-s} \alpha_{pq}.$$

Now let $R_{mn} = \sum_{p,q=m,n}^{\infty} \alpha_{pq}$. The assumptions on α_{mn} insure us that

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{mn} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{and} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{mn} = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

For, letting $x=0$ in (4), we obtain $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{mn}) e^{iny}$ which is identically

0 in y ; letting $y=0$ in (4), we obtain $\sum_{m=-\infty}^{\infty} (\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn}) e^{imx}$ which is identically 0 in x . As shown in the proof of Lemma VI of Chapter I,

$R_{mn} = O[(|m|+1)^{-2}(|n|+1)^{-2}]$. Hence,

$$S_{mn} = \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} (R_{-m-r, -n-s} - R_{m-r+1, -n-s} - R_{-m-r, n-s+1} + R_{m-r+1, n-s+1}).$$

Consider the MN^{th} Cesàro sum of order $(-\beta, -\sigma)$:

$$\begin{aligned} S_{MN}^{(-\beta, -\sigma)} &= \sum_{m,n=0}^{M,N} O_{M-m}^{(-\beta-1)} O_{N-n}^{(-\sigma-1)} S_{mn} \\ &= \sum_{m,n=0}^{M,N} O_{M-m}^{(-\beta-1)} O_{N-n}^{(-\sigma-1)} \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} (R_{-m-r, -n-s} - \dots + R_{m-r+1, n-s+1}). \end{aligned}$$

The expressions

$$\sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} R_{-m-r, -n-s}, \dots, \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} R_{m-r+1, n-s+1}$$

are of the order $o[(|m|+1)^{-\beta}(|n|+1)^{-\sigma}]$ by Lemma III of Chapter I.

It is enough to consider only the first sum: $D_{m,n} = \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} R_{-m-r, -n-s}$.

We must show

$$\frac{1}{C_M^{(-\beta)} C_N^{(-\sigma)}} \sum_{m,n=0}^{M,N} C_{M-m}^{(-\beta-1)} C_{N-n}^{(-\sigma-1)} D_{mn} = o(1)$$

in the Pringsheim sense. Since

$$C_M^{(-\beta)} \simeq \frac{M^{-\beta}}{\Gamma(-\beta+1)} \quad \text{and} \quad C_N^{(-\sigma)} \simeq \frac{N^{-\sigma}}{\Gamma(-\sigma+1)},$$

we may apply Lemma IV, and the theorem is proved, the uniformity following from Remark 1 to Lemmas I-V.

We note that Lemma IV also shows that this double sequence is $o(1)$ in the sense defined in the introduction.

Theorem II. *If, for $0 < \beta < 1$ and $0 < \sigma < 1$, the coefficients a_{mn} of series (4) are $o[(|m|+1)^{-\beta}(|n|+1)^{-\sigma}]$ rapidly, and the coefficients a_{mn} of series (5) are $O[(|m|+1)^{-3}(|n|+1)^{-3}]$, and if (5) converges to 0 for $(x, y) \in X \oplus Y$, then the series (7), conjugate to (6), is uniformly summable $(C, -\beta, -\sigma)$ for $(x, y) \in X \times Y$.*

Again we shall demonstrate the theorem only for a single point (x_0, y_0) , which we assume for convenience to be $(0, 0)$. Let \tilde{S}_{mn} be the mn^{th} symmetric partial sum of (7) evaluated at $(0, 0)$, and let $\varepsilon_{mn} = \text{signum}(mn)$. Then,

$$\begin{aligned} -\tilde{S}_{mn} &= \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} \sum_{p,q=-m,n}^{m,n} \varepsilon_{pq} \alpha_{p-r, q-s} \\ &= \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} \sum_{p,q=1}^{m,n} (\alpha_{p-r, q-s} - \alpha_{-p-r, q-s} - \alpha_{p-r, -q-s} + \alpha_{-p-r, -q-s}). \end{aligned}$$

It is enough to consider only the first term of the inner sum of the right side. Let $R_{mn} = \sum_{p,q=m,n}^{\infty} \alpha_{pq}$, and again $R_{mn} = O[(|m|+1)^{-2}(|n|+1)^{-2}]$.

Hence

$$\sum_{p,q=1}^{m,n} \alpha_{p-r, q-s} = R_{1-r, 1-s} - R_{m-r+1, 1-s} - R_{1-r, n-s+1} + R_{m-r+1, n-s+1}.$$

Let $D^{(1)} = \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} R_{1-r,1-s}$. Then,

$$\frac{1}{C_M^{(-\beta)} C_N^{(-\sigma)}} \sum_{m,n=0}^{M,N} C_{M-m}^{(-\beta-1)} C_{N-n}^{(-\sigma-1)} D^{(1)} = D^{(1)}.$$

Let $D_m^{(2)} = \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} R_{m-r+1,1-s}$. This is $o(m^{-\beta})$ by Remark 2 of Chapter I applied to Lemma III. Then,

$$\frac{1}{C_M^{(-\beta)} C_N^{(-\sigma)}} \sum_{m,n=0}^{M,N} C_{M-m}^{(-\beta-1)} C_{N-n}^{(-\sigma-1)} D_m^{(2)} = \frac{1}{C_M^{(-\beta)}} \sum_{m=0}^M C_{M-m}^{(-\beta-1)} D_m^{(2)}$$

which is $o(1)$ by a simple adaptation of Lemma IV to the case of one variable. Similarly,

$$\frac{1}{C_M^{(-\beta)} C_N^{(-\sigma)}} \sum_{m,n=0}^{M,N} C_{M-m}^{(-\beta-1)} C_{N-n}^{(-\sigma-1)} \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} R_{1-r,n-s+1}$$

is $o(1)$, and finally

$$\frac{1}{C_M^{(-\beta)} C_N^{(-\sigma)}} \sum_{m,n=0}^{M,N} C_{M-m}^{(-\beta-1)} C_{N-n}^{(-\sigma-1)} \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} R_{m-r+1,n-s+1}$$

is $o(1)$ as shown in the proof of Theorem I.

In the following theorem, we take β and σ to be positive and assume for the sake of definiteness that $\sigma \geq \beta$.

Theorem III. *If the coefficients a_{mn} of (4) are $o[(|m|+1)^\beta (|n|+1)^\sigma]$ and the coefficients a_{mn} of (5) are $O[(|m|+1)^{-2\sigma-3} (|n|+1)^{-2\sigma-3}]$, and if (5) converges, together with all derivatives with respect to x and all derivatives with respect to y up to order $\langle \sigma \rangle$, to 0 for $(x, y) \in X \oplus Y$, then (6), the formal product of (4) and (5), is uniformly summable (C, β, σ) to 0 for $(x, y) \in X \times Y$.*

Again we assume $(0, 0) \in X \times Y$ and consider the formal product only at this point. From the assumptions on series (5) and its derivatives, we have

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} m^j a_{mn} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

and

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^j a_{mn} = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, j = 0, 1, \dots, \langle \sigma \rangle.$$

A proof of this fact for the case $\langle \sigma \rangle = 0$ was included in the proof of

Theorem I. Let $R_{mn}^{(1)} = \sum_{p,q=m,n}^{\infty} \alpha_{pq}$ and $R_{mn}^{(i+1)} = \sum_{p,q=m,n}^{\infty} R_{pq}^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, \langle \sigma \rangle - 1$.

To show these exist and have a certain order, we need only refer to the proof of Lemma VI and replace K in the notation of that lemma by $\langle \sigma \rangle$. It is then clear that $R_{mn}^{(i+1)} = O[(|m|+1)^{-2\sigma-2+i}(|n|+1)^{-2\sigma-2+i}]$. Furthermore,

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} R_{pn}^{(\langle u \rangle)} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{and} \quad \sum_{q=-\infty}^{\infty} R_{mq}^{(\langle \sigma \rangle)} = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

so that

$$R_{mn}^{(\langle \sigma \rangle + 1)} = O[(|m|+1)^{-\sigma-2+i}(|n|+1)^{-\sigma-2+i}] \quad \text{where} \quad \eta = \langle \sigma \rangle - \sigma.$$

That the coefficients A_{mn} exist is shown by Lemma II. Let

$$S_{mn} = \sum_{p,q=-m,-n}^{m,n} A_{pq}. \quad \text{Then,}$$

$$\begin{aligned} S_{mn} &= \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} \sum_{p,q=-m-r,-n-s}^{m-r,n-s} a_{pq} \\ &= \sum_{r-s=-\infty}^{\infty} a_{rs} (R_{-m-r,-n-s}^{(1)} - R_{m-r+1,-n-s}^{(1)} - R_{-m-r,n-s+1}^{(1)} + R_{m-r+1,n-s+1}^{(1)}). \end{aligned}$$

It is enough to consider only the first inner sum of the right side. We must show

$$(8) \quad \frac{1}{C_M^{(\beta)} C_N^{(\sigma)}} \sum_{m,n=0}^{M,N} C_{M-m}^{(\beta-1)} C_{N-n}^{(\sigma-1)} \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} R_{-m-r,-n-s}^{(1)} = o(1)$$

in the Pringsheim sense. Our proof will show that the left side of (8) is $o(1)$ in the sense defined in the introduction. The method of proof consists of applying Abel's formula repeatedly to the sum

$$(9) \quad \sum_{m,n=0}^{M,N} C_{M-m}^{(\beta-1)} C_{N-n}^{(\sigma-1)} R_{-m-r,-n-s}^{(1)}.$$

Since

$$\begin{aligned} R_{-m-r,-n-s}^{(1)} &= (R_{-m-r,-n-s}^{(2)} - R_{-m-r+1,-n-s}^{(2)}) \\ &\quad - (R_{-m-r,-n-s+1}^{(2)} - R_{-m-r+1,-n-s+1}^{(2)}), \end{aligned}$$

we have

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^M C_{M-m}^{(\beta-1)} R_{-m-r,-n-s}^{(1)} &= \sum_{m=0}^M (C_{M-m}^{(\beta-1)} - C_{M-m-1}^{(\beta-1)}) R_{-m-r,-n-s}^{(2)} - C_M^{(\beta-1)} R_{-r+1,-n-s}^{(2)} \\ &\quad - \sum_{m=0}^M (C_{M-m}^{(\beta-1)} - C_{M-m-1}^{(\beta-1)}) R_{-m-r,-n-s+1}^{(2)} + C_M^{(\beta-1)} R_{-r+1,-n-s+1}^{(2)}, \end{aligned}$$

where $C_{M-m}^{(\beta-1)} - C_{M-m-1}^{(\beta-1)} = C_{M-m}^{(\beta-2)}$ if $C_{-1}^{(\beta-1)}$ is defined to be 0. Now summing with respect to n , we find that (9) is equal to

$$(10) \quad \sum_{m,n=0}^{M,N} C_{M-m}^{(\beta-2)} C_{N-n}^{(\sigma-2)} R_{-m-r, -n-s}^{(2)} - C_N^{(\sigma-1)} \sum_{m=0}^M C_{M-m}^{(\beta-2)} R_{-m-r, -s+1}^{(2)} \\ - C_M^{(\beta-1)} \sum_{n=0}^N C_{N-n}^{(\sigma-2)} R_{-r+1, -n-s}^{(2)} + C_M^{(\beta-1)} C_N^{(\sigma-1)} R_{-r+1, -s+1}^{(2)}.$$

The last term of the right side of (10) can be immediately neglected since $C_M^{(\beta-1)} C_N^{(\sigma-1)} / C_M^{(\beta)} C_N^{(\sigma)} = o(1)$, and the convergence of the series

$\sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} R_{-r+1, -s+1}^{(2)}$ is insured by the order condition on $R_{mn}^{(2)}$. To show that the second and third terms of (10) are also negligible (we consider

only the second), we apply Abel's formula to $\sum_{m=0}^M C_{M-m}^{(\beta-2)} R_{-m-r, -s+1}^{(2)}$, obtaining

$$\sum_{m=0}^M C_{M-m}^{(\beta-3)} R_{-m-r, -s+1}^{(3)} - C_M^{(\beta-2)} R_{-r+1, -s+1}^{(3)} \\ - \sum_{m=0}^M C_{M-m}^{(\beta-2)} R_{-m-r, -s+2}^{(3)} + C_M^{(\beta-2)} R_{-r+1, -s+2}^{(3)}.$$

The second and fourth terms are immediately negligible, and the first and third being of the same form, we consider only the first. By repeated applications of the preceding arguments, we find $\sum_{m=0}^M C_{M-m}^{(\beta-3)} R_{-m-r, -s+1}^{(3)}$ equal to

$$(11) \quad \sum_{m=0}^M C_{M-m}^{(\beta-j)} R_{-m-r, -s+1}^{(j)} + f, \quad j = 3, 4, \dots, \langle \beta \rangle + 1,$$

where f is the sum of terms which can be neglected immediately or are similar in form to the first term of (11). If β is an integer, for $j = \beta$ in (11), the first term becomes

$$\sum_{m=0}^M R_{-m-r, -s+1}^{(\beta)} = R_{-M-r, -s+1}^{(\beta+1)} - R_{-r+1, -s+1}^{(\beta+1)} - R_{-M-r, -s-2}^{(\beta+1)} + R_{-r+1, -s+2}^{(\beta+1)},$$

the second and fourth terms being negligible. Since

$$\sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} (R_{-M-r, -s+1}^{(\beta+1)} - R_{-r+1, -s+2}^{(\beta+1)}) = O(M^\beta)$$

by Lemma II, substitution of this term into (8) gives $(C_N^{(\sigma-1)}/C_M^{(\beta)} C_N^{(\sigma)})O(M^\beta)$ which is $o(1)$. If β is not an integer, let $\xi = \langle \beta \rangle - \beta$, and the first term of (11) becomes, for $j = \langle \beta \rangle + 1$, $\sum_{m=0}^M C_{M-m}^{(-\xi-1)} R_{-m-r, -s+1}^{(\langle \beta \rangle + 1)}$. Now

$\sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} R_{-m-r, -s+1}^{(\langle \beta \rangle + 1)} = O(m^\beta)$ by Lemma II, and

$$\frac{C_N^{(\sigma-1)}}{C_M^{(\beta)} C_N^{(\sigma)}} \sum_{m=0}^M C_{M-m}^{(-\xi-1)} O(m^\beta)$$

is clearly $o(1)$ by the absolute convergence of the series $\sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(-\xi-1)}$.

Hence, all but the first term of (10) have been shown to be $o(1)$, and since this is of the same form as (9), we may apply Abel's formula again to obtain that this first term is equal to

$$(12) \quad \sum_{m,n=0}^{M,N} C_{M-m}^{(\beta-3)} C_{N-n}^{(\sigma-3)} R_{-m-r, -n-s}^{(3)} - C_N^{(\sigma-2)} \sum_{m=0}^M C_{M-m}^{(\beta-3)} R_{-m-r, -s+1}^{(3)} \\ - C_M^{(\beta-2)} \sum_{n=0}^N C_{N-n}^{(\sigma-3)} R_{-r+1, -n-s}^{(3)} + C_M^{(\beta-2)} C_N^{(\sigma-2)} R_{-r+1, -s+1}^{(3)},$$

where the last three terms can be treated as were analogous terms of (10). A further reduction of the first term of (12) leads to an expression of the form (12) so that it is enough to consider

$$(13) \quad \sum_{m,n=0}^{M,N} C_{M-m}^{(\beta-j)} C_{N-n}^{(\sigma-j)} R_{-m-r, -n-s}^{(j)}, \quad j - \text{positive integer.}$$

If β is an integer and $\sigma = \beta$, letting $j = \beta$ in (13) gives

$$\sum_{m,n=0}^{M,N} R_{-m-r, -n-s}^{(\beta)} = R_{-M-r, -N-s}^{(\beta+1)} - R_{-r+1, -N-s}^{(\beta+1)} - R_{-M-r, -s+1}^{(\beta+1)} + R_{-r+1, -s+1}^{(\beta+1)}$$

and

$$\sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} (R_{-M-r, -N-s}^{(\beta+1)} - R_{-r+1, -N-s}^{(\beta+1)} - R_{-M-r, -s+1}^{(\beta+1)} + R_{-r+1, -s+1}^{(\beta+1)}) = o[M^j N^\sigma]$$

by Lemma II and the fact that β and σ are positive. The theorem is proved for this case.

If β and σ are integers, but $\sigma > \beta$, the reduction of (13) leads to terms of the form

$$R_{-M-r, -N-s}^{(\sigma+1)} - R_{-r+1, -N-s}^{(\sigma+1)} - R_{-M-r, -s+1}^{(\sigma+1)} + R_{-r+1, -s+1}^{(\sigma+1)}.$$

These terms may be treated exactly like the corresponding terms of the previous case for which $\sigma = \beta$.

If β is an integer, but σ is not, and $\eta = \langle \sigma \rangle - \sigma$, letting $j = \beta$ in (13) gives

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n=0}^{M,N} C_{N-n}^{(\sigma-\beta)} R_{-m-r,-n-s}^{(\beta)} = \sum_{n=0}^N C_{N-n}^{(\sigma-\beta)} \sum_{m=0}^M R_{-m-r,-n-s}^{(\beta)} \\ & = \sum_{n=0}^N C_{N-n}^{(\sigma-\beta)} (R_{-M-r,-n-s}^{(\beta+1)} - R_{-M-r,-n-s+1}^{(\beta+1)} - R_{-r+1,-n-s}^{(\beta+1)} + R_{-r+1,-n-s+1}^{(\beta+1)}) \end{aligned}$$

which can further be reduced to terms of the form

$$\sum_{n=0}^N C_{N-n}^{(-\eta-1)} R_{-M-r,-n-s}^{(\langle \sigma \rangle + 1)}.$$

Since

$$\sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} R_{-M-r,-n-s}^{(\langle \sigma \rangle + 1)} = o[M^\beta(n+1)^\sigma]$$

by Lemma II,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_M^{(\sigma)} C_N^{(\sigma)}} \sum_{n=0}^N C_{N-n}^{(-\eta-1)} o[M^\beta(n+1)^\sigma] = \frac{1}{C_N^{(\sigma)}} \sum_{n=0}^N C_{N-n}^{(-\eta-1)} o[(n+1)^\sigma] \\ & = \frac{1}{C_N^{(\sigma)}} \sum_{n=0}^{N_0} C_{N-n}^{(-\eta-1)} O[(n+1)^\sigma] + \frac{1}{C_N^{(\sigma)}} \sum_{n=N_0+1}^N C_{N-n}^{(-\eta-1)} o[(n+1)^\sigma] \end{aligned}$$

for arbitrarily large N and some sufficiently large but fixed N_0 . The first term on the right is clearly $o(1)$, and the second is arbitrarily small

by the absolute convergence of the series $\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(-\eta-1)}$.

If β is not an integer, but σ is, and if $\xi = \langle \beta \rangle - \beta$, the reduction of (13) leads to terms of the type

$$\sum_{m=0}^M C_{M-m}^{(-\xi-1)} (R_{-m-r,-N-s}^{(\sigma+1)} - R_{-m-r+1,-N-s}^{(\sigma+1)} - R_{-m-r,-s+1}^{(\sigma+1)} + R_{-m-r+1,-s+1}^{(\sigma+1)}).$$

Since

$$\sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} R_{-m-r,-N-s}^{(\sigma+1)} = o[(m+1)^\beta N^\sigma],$$

and

$$\frac{1}{C_M^{(\beta)} C_N^{(\sigma)}} \sum_{M=0}^M C_{M-m}^{(-\xi-1)} o[(m+1)^\beta N^\sigma] = o(1)$$

as shown above, the other terms being treated similarly, the theorem is proved for this case.

If both β and σ are not integers, (13) may be reduced to terms of the type

$$\sum_{m,n=0}^{M,N} C_{M-m}^{(-\xi-1)} C_{N-n}^{(-\eta-1)} R_{-m-r, -n-s}^{(\langle\sigma\rangle+1)}.$$

By Lemma II,

$$\sum_{r,s=-\infty}^{\infty} a_{rs} R_{-m-r, -n-s}^{(\langle\sigma\rangle+1)} = o[(m+1)^\beta (n+1)^\sigma]$$

so that

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_M^{(\beta)} C_N^{(\sigma)}} \sum_{m,n=0}^{M,N} C_{M-m}^{(-\xi-1)} C_{N-n}^{(-\eta-1)} o[(m+1)^\beta (n+1)^\sigma] \\ &= \frac{1}{C_M^{(\beta)} C_N^{(\sigma)}} \left\{ \sum_{m,n=0}^{M_0, N_0} + \sum_{m,n=0, N_0+1}^{M_0, N} + \sum_{m,n=M_0+1, 0}^{M, N_0} + \sum_{m,n=M_0+1, N_0+1}^{M, N} \right\} C_{M-m}^{(-\xi-1)} C_{N-n}^{(-\eta-1)} o[(m+1)^\beta (n+1)^\sigma] \end{aligned}$$

for sufficiently large but fixed M_0 and N_0 . The first three sums on the right are clearly $o(1)$, and the last is arbitrarily small by the absolute convergence of the series $\sum_{m,n=0}^{\infty} C_m^{(-\xi-1)} C_n^{(-\eta-1)}$. The theorem is then proved for all cases.

We now state the corresponding theorem for conjugate series, its proof being similar to the proof of Theorem II.

Theorem IV. *If, for β and σ positive, the coefficients a_{mn} of series (4) are $o[(|m|+1)^\beta (|n|+1)^\sigma]$ rapidly, and the coefficients α_{mn} of (5) are $O[(|m|+1)^{-2\sigma-3} (|n|+1)^{-2\sigma-3}]$, and if (5) converges, together with all derivatives with respect to x and all derivatives with respect to y up to order $\langle\sigma\rangle$, to 0 for $(x, y) \in X \oplus Y$, then the series (7), conjugate to the formal product of (4) and (5), is uniformly summable (C, β, σ) for $(x, y) \in X \times Y$.*

In the following theorem, we consider the case in which the two indices of summation are in different ranges. For definiteness, we assume $-1 < -\beta \leq 0$ and $\sigma \geq 0$.

Theorem V. *If the coefficients a_{mn} of (4) are $o[(|m|+1)^{-\beta} (|n|+1)^\sigma]$ and the coefficients α_{mn} of (5) are $O[(|m|+1)^{-2\sigma-\beta-3} (|n|+1)^{-2\sigma-3}]$, and if (5) converges, together with all its derivatives with respect to x and all its derivatives with respect to y up to order $\langle\sigma\rangle$, to 0 for $(x, y) \in X \oplus Y$, then the formal product (6) of (4) and (5) is uniformly summable $(C, -\beta, \sigma)$ to 0 for $(x, y) \in X \times Y$.*

In case $\sigma = 0$, we need only assume that the coefficients of (5) are $O[(|m|+1)^{-3} (|n|+1)^{-3}]$.

The proof of this theorem, which involves an application of Lemma V, is similar to the proofs of Theorems I and III and need not be given.

We now state without proof the theorem for the conjugate series corresponding to Theorem V.

Theorem VI. *If the coefficients a_{mn} of (4) are $o[(|m|+1)^{-\beta}(|n|+1)^\sigma]$ rapidly and the coefficients α_{mn} of (5) are $O[(|m|+1)^{-2\sigma-\beta-3}(|n|+1)^{-2\sigma-3}]$, and if (5) converges, together with all its derivatives with respect to x and all its derivatives with respect to y up to order $\langle\sigma\rangle$, to 0 for $(x,y) \in X \oplus Y$, then the series (7), conjugate to the formal product of (4) and (5), is uniformly summable $(C, -\beta, \sigma)$ for $(x,y) \in X \times Y$.*

In case $\sigma=0$, we need only assume that the coefficients a_{mn} of (5) are $O[(|m|+1)^{-3}(|n|+1)^{-3}]$.

Chapter III

On the Derivatives of the Formal Product

In this chapter, we shall deal with the Cesàro summability of the formal product of (4) and (5) differentiated formally a certain number of times with respect to x and y .

Theorem I. *Suppose that K and L are non-negative integers, β and σ are non-negative numbers such that $0 \leq \beta - K < 1$ and $0 \leq \sigma - L < 1$. If the coefficients a_{mn} of (4) are $o[(|m|+1)^{-\beta}(|n|+1)^{-\sigma}]$ and the coefficients α_{mn} of (5) are $O[(|m|+1)^{-K-3}(|n|+1)^{-L-3}]$, and if (5) is the Fourier series of a function $\lambda(x,y)$ which is constant for $(x,y) \in X \oplus Y$, while its derivatives*

$$\frac{\partial^{i+j}\lambda(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad i=0,1,\dots,K; j=0,1,\dots,L; i+j>0,$$

are 0 for $(x,y) \in X \oplus Y$, then

$$(14) \quad \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} m^K n^L A_{mn} e^{i(mx+ny)} - \lambda(x,y) \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} m^K n^L a_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

is uniformly summable $(C, K-\beta, L-\sigma)$ to 0 for $(x,y) \in X \times Y$.

If, in addition to the above hypotheses, $a_{mn} = o[(|m|+1)^{-\beta}(|n|+1)^{-\sigma}]$ rapidly, then the difference

$$(15) \quad - \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \text{signum}(mn) m^K n^L A_{mn} e^{i(mx+ny)} \\ + \lambda(x,y) \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \text{signum}(mn) m^K n^L a_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

is uniformly summable $(C, K-\beta, L-\sigma)$ for $(x,y) \in X \times Y$.

We assume that $(0,0) \in X \times Y$ and prove the theorem only for this point. The uniformity will follow from the uniformity conditions of the theorems used in the proof. Consider the formal product

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} A'_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

of series (4) and the series

$$(16) \quad \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \alpha'_{mn} e^{i(mx+ny)}, \quad \alpha'_{mn} = \alpha_{mn}, \quad |m| + |n| > 0; \quad \alpha'_{00} = \alpha_{00} - \lambda(0,0).$$

Then, $A'_{mn} = A_{mn} - \lambda(0,0) a_{mn}$, and (14) evaluated at $(0,0)$ is the same as $\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} m^K n^L A'_{mn}$. Moreover, (16) is the Fourier series of a function $\lambda_1(x,y)$ which is 0, together with its derivatives

$$\frac{\partial^{i+j} \lambda_1(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad i=0,1,\dots,K; \quad j=0,1,\dots,L; \quad i+j > 0$$

for $(x,y) \in X_0 \oplus Y_0$ where X_0 consists of the single point $x=0$, and Y_0 consists of the single point $y=0$. We must then show that this differentiated formal product

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} m^K n^L A'_{mn}$$

is summable $(C, K-\beta, L-\sigma)$ to 0. By the binomial expansion,

$$\begin{aligned} m^K n^L A'_{mn} &= \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} m^K n^L a_{pq} \alpha'_{m-p, n-q} \\ &= \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{K,L} \binom{K}{k} \binom{L}{l} p^k q^l (m-p)^{K-k} (n-q)^{L-l} a_{pq} \alpha'_{m-p, n-q}, \end{aligned}$$

and we consider the general term of the right side, *i. e.*

$$\binom{K}{k} \binom{L}{l} \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} p^k q^l (m-p)^{K-k} (n-q)^{L-l} a_{pq} \alpha'_{m-p, n-q}.$$

This is, except for a constant factor, simply the mn^{th} coefficient of the formal product of the series

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} m^k n^l a_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

and

$$(17) \quad \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} m^{K-k} n^{L-l} a'_{mn} e^{i(mx+ny)}.$$

Letting $m^k n^l a_{mn} = c_{mn}$, we have $c_{mn} = o[(|m|+1)^{K-\beta} (|n|+1)^{L-\sigma}]$, and letting $m^{K-k} n^{L-l} a'_{mn} = \gamma_{mn}$, we have $\gamma_{mn} = O[(|m|+1)^{-3} (|n|+1)^{-3}]$. Moreover, (17) is the Fourier series of the function

$$\frac{\partial^{K-k+L-l} \lambda_1(x, y)}{\partial x^{K-k} \partial y^{L-l}},$$

which is 0 for $(x, y) \in X_0 \oplus Y_0$. Hence, these two series satisfy the hypotheses of Theorem I of Chapter II if $0 < \beta - K < 1$ and $0 < \sigma - L < 1$. If $\beta - K = 0$ or $\sigma - L = 0$, the hypotheses of Theorem V of Chapter II are satisfied. In either case, their formal product,

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} m^K n^L A'_{mn},$$

is summable $(C, K - \beta, L - \sigma)$ to 0 at $(0, 0)$.

To prove the second part of the theorem, we note that (15) evaluated at $(0, 0)$ is the same as

$$- \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \text{signum}(mn) A'_{mn}.$$

Since this is the conjugate of the formal product of

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} m^k n^l a_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

and (17) evaluated at $(0, 0)$, it is summable $(C, K - \beta, L - \sigma)$ by Theorem II or Theorem VI of Chapter II, according to whether $\beta - L$ and $\sigma - L$ are both positive or not.

Theorem II. Suppose that K and L are non-negative integers, β and σ are real numbers such that $K + \beta \geq 0$ and $L + \sigma \geq 0$. (For definiteness, we assume $L + \sigma \geq K + \beta$). If the coefficients a_{mn} of (4) are $o[(|m|+1)^\beta (|n|+1)^\sigma]$ and the coefficients a'_{mn} of (5) are $O[(|m|+1)^{-2(L+\sigma)-K-3} (|n|+1)^{-2(L+\sigma)-L-3}]$, and if (5) is the Fourier series of a function $\lambda(x, y)$ which is constant for $(x, y) \in X \oplus Y$, while its derivatives

$$\frac{\partial^{i+j} \lambda(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad i = 0, 1, \dots, K + L + \langle \sigma \rangle; \quad j = 0, 1, \dots, 2L + \langle \sigma \rangle; \quad i + j > 0$$

are 0 for $(x, y) \in X \oplus Y$, then

$$\sum_{m, n = -\infty}^{\infty} m^K n^L A_{mn} e^{i(mx+ny)} - \lambda(x, y) \sum_{m, n = -\infty}^{\infty} m^K n^L a_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

is uniformly summable $(C, K + \beta, L + \sigma)$ to 0 for $(x, y) \in X \times Y$.

If, in addition to the above hypotheses, $a_{mn} = o[(|m| + 1)^\beta (|n| + 1)^\sigma]$ rapidly, then

$$\begin{aligned} - \sum_{m, n = -\infty}^{\infty} \text{signum}(mn) m^K n^L A_{mn} e^{i(mx+ny)} \\ + \lambda(x, y) \sum_{m, n = -\infty}^{\infty} \text{signum}(mn) m^K n^L a_{mn} e^{i(mx+ny)} \end{aligned}$$

is uniformly summable $(C, K + \beta, L + \sigma)$ for $(x, y) \in X \times Y$.

Following the procedure and notation of Theorem I of this chapter, we note that (17) is the Fourier series of $\partial^{K-k+L-l} \lambda_1(x, y) / \partial x^{K-k} \partial y^{L-l}$, which, together with its derivatives with respect to x and derivatives with respect to y up to order $L + \langle \sigma \rangle$ is 0 for $(x, y) \in X_0 \oplus Y_0$. Furthermore,

$$c_{mn} = o[(|m| + 1)^{K+\beta} (|n| + 1)^{L+\sigma}]$$

and

$$\gamma_{mn} = O[(|m| + 1)^{-2(L+\sigma)-3} (|n| + 1)^{-2(L+\sigma)-3}].$$

Hence, the two series under consideration satisfy the hypotheses of Theorem III of Chapter II if $K + \beta > 0$ and $L + \sigma > 0$. If $K + \beta = 0$ or $L + \sigma = 0$, the hypotheses of Theorem V of Chapter II are satisfied. In either case, their formal product is summable $(C, K + \beta, L + \sigma)$ to 0 at $(0, 0)$.

The second part of the theorem follows from a similar application of Theorems IV and VI of Chapter II.

Theorem III. Suppose that K and L are non-negative integers, β and σ are real numbers such that $0 \leq \beta - K < 1$ and $L + \sigma \geq 0$. If the coefficients a_{mn} of (4) are $o[(|m| + 1)^{-\beta} (|n| + 1)^\sigma]$, and the coefficients a_{mn} of (5) are $O[(|m| + 1)^{-2(L+\sigma)-\beta-3} (|n| + 1)^{-2(L+\sigma)-L-3}]$, and if (5) is the Fourier series of a function $\lambda(x, y)$ which is constant for $(x, y) \in X \oplus Y$ while its derivatives

$$\frac{\partial^{i+j} \lambda(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad i = 0, 1, \dots, K + L + \langle \sigma \rangle; \quad j = 0, 1, \dots, 2L + \langle \sigma \rangle; \quad i + j > 0$$

are 0 for $(x, y) \in X \oplus Y$, then

$$\sum_{m, n = -\infty}^{\infty} m^K n^L A_{mn} e^{i(mx+ny)} - \lambda(x, y) \sum_{m, n = -\infty}^{\infty} m^K n^L a_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

is uniformly summable $(C, K - \beta, L + \sigma)$ to 0 for $(x, y) \in X \times Y$.

If, in addition to the above hypotheses, $a_{mn} = o[(|m| + 1)^{-\beta} (|n| + 1)^\sigma]$ rapidly, then

$$- \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \text{signum}(mn) m^K n^L A_{mn} e^{i(mx+ny)} \\ + \lambda(x,y) \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \text{signum}(mn) m^K n^L a_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

is uniformly summable $(C, K - \beta, L + \sigma)$ for $(x, y) \in X \times Y$.

For the proof of this theorem, we need only refer to and apply Theorems V and VI of Chapter II as analogous theorems were applied to the proofs of the two preceding theorems. For the sake of brevity, we omit the details.

Chapter IV

The Theory of Localization

Using the theorems of the last chapter, we may now prove theorems concerning the theory of localization for double trigonometric series. We consider first the case in which series (4) is "incomplete" by which is meant that all the coefficients a_{mn} , for $m = 0$ or $n = 0$, are 0. Then, if (4) is integrated formally sufficiently many times with respect to x and y , the resulting series converges absolutely and is the Fourier series of its sum. Thus, if $a_{mn} = o[(|m| + 1)^{\beta} (|n| + 1)^\sigma]$, where $\beta > -1$ and $\sigma > -1$ and K and L are non-negative integers such that $K - \beta > 1$ and $L - \sigma > 1$, then

$$(18) \quad \left(\frac{1}{i}\right)^{K+L} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{a_{mn}}{m^K n^L} e^{i(mx+ny)}$$

is the Fourier series of its sum, which we denote by $F(x, y)$.

We now suppose that the set X consists of the interval $a \leq x \leq b$, the set X' of the interval $a' \leq x \leq b'$ where $-\pi \leq a < a' < b' < b \leq \pi$, the set Y of the interval $c \leq y \leq d$, and the set Y' of the interval $c' \leq y \leq d'$ where $-\pi \leq c < c' < d' < d \leq \pi$. To obtain a periodic function $\lambda(x, y)$ which equals 1 on the set $X' \oplus Y'$ and 0 outside the set $X \oplus Y \pmod{2\pi}$, and which has arbitrarily many continuous derivatives, we may consider the function $-\lambda(x)\mu(y) + \lambda(x) + \mu(y)$, where

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1, & x \in X' \\ 0, & x \text{ outside } X \end{cases} \pmod{2\pi}; \quad \mu(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y' \\ 0, & y \text{ outside } Y \end{cases} \pmod{2\pi},$$

and where $\lambda(x)$ and $\mu(y)$ have sufficiently many continuous derivatives. The construction of $\lambda(x)$ and $\mu(y)$ offers no difficulty (see [1], p. 87).

This function, $\lambda(x, y)$, is called a *localizing function*, and its use in our theory is fundamental as will be seen in the theorems of this chapter.

As a matter of notation, we let $D_M(x)$ be the Dirichlet kernel of order M and $d^K/du^K(D_M(x-u) = D_M^{(K)}(x-u)$; $\bar{D}_M(x)$ the conjugate Dirichlet kernel and $d^K/du^K(\bar{D}_M(x-u) = \bar{D}_M^{(K)}(x-u)$.

We now state the theorem of localization for incomplete trigonometric series, which in the case $\beta = \sigma = 0$ is due to Lepecki [3].

Theorem I. *Let $\lambda(x, y)$ be a function periodic in x and y of period 2π and continuous with its derivatives of sufficiently high order, $\partial^{i+j}\lambda(x, y)/\partial x^i \partial y^j$. Suppose that*

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \text{ outside } X \oplus Y \\ 1, & (x, y) \in X' \oplus Y' \end{cases} \quad \text{mod } 2\pi$$

Then, for $(x, y) \in X' \times Y'$, the difference

$$(19) \quad \sum_{m, n = -M, -N}^{M, N} a_{mn} e^{i(mx+ny)} - \frac{(-1)^{K+L}}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(u, v) F(u, v) D_M^{(K)}(x-u) D_N^{(L)}(y-v) du dv$$

is uniformly summable (C, β, σ) in the sense of Pringsheim to 0.

If, in addition to the above hypotheses, $a_{mn} = o[(|m|+1)^\beta (|n|+1)^\sigma]$ rapidly, and $\bar{\lambda}(x, y)\bar{F}(x, y)$ is the function conjugate to $\lambda(x, y)F(x, y)$, then

$$(20) \quad + \sum_{m, n = -M, -N}^{M, N} \text{signum}(mn) a_{mn} e^{i(mx+ny)} + \frac{(-1)^{K+L}}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(u, v) F(u, v) \bar{D}_M^{(K)}(x-u) \bar{D}_N^{(L)}(y-v) du dv$$

is uniformly summable (C, β, σ) for $(x, y) \in X' \times Y'$.

Let $c_{mn} = a_{mn}/(im)^K (in)^L$. Then,

$$F(x, y) = \sum_{m, n = -\infty}^{\infty} c_{mn} e^{i(mx+ny)},$$

and $c_{mn} = o[(|m|+1)^{\beta-K} (|n|+1)^{\sigma-L}]$. Let

$$\sum_{m, n = -\infty}^{\infty} A_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

be the formal product of (5), by which we denote the Fourier series of $\lambda(x, y)$, and

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{i(mx+ny)};$$

then, being absolutely convergent, it is the Fourier series of its sum $F(x, y)\lambda(x, y)$.

We consider first the case in which $-1 < \beta \leq 0$ and $-1 < \sigma \leq 0$. If $\lambda(x, y)$ is chosen so that its derivatives

$$\frac{\partial^{i+j}\lambda(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad i=0, 1, \dots, K; \quad j=0, 1, \dots, L; \quad i+j > 0$$

are 0 for $(x, y) \in X' \oplus Y'$, then (5) and the Fourier series of $F(x, y)$ obey the hypotheses of Theorem I of Chapter III. This is easily seen by identifying the β and σ of this theorem with the $K-\beta$ and $L-\sigma$ of that theorem. Thus,

$$(20) \quad \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} m^K n^L A_{mn} e^{i(mx+ny)} - \lambda(x, y) \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} m^K n^L c_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

is uniformly summable (C, β, σ) to 0 for $(x, y) \in X' \times Y'$. But for $(x, y) \in X' \times Y'$ $\lambda(x, y) = 1$. Furthermore, $m^K n^L c_{mn} = a_{mn}/i^{K+L}$, and the MN^{th} partial sum of

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} m^K n^L A_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

is $(1/i)^{K+L}$ times the MN^{th} partial sum of the Fourier series of $F(x, y)\lambda(x, y)$ differentiated K times with respect to x and L times with respect to y , i. e.

$$\frac{1}{(i)^{K+L} \pi^2} \frac{d^{K+L}}{dx^K dy^L} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u, v) \lambda(u, v) D^M(x-u) D^N(y-v) du dv \right\}.$$

Taking the derivative sign inside the integral and noting that $a^K D_M(x-u)/ax^K = (-1)^K D_M^{(K)}(x-u)$, we have by (20)

$$\sum_{m,n=-M,-N}^{M,N} a_{mn} e^{i(mx+ny)} - \frac{(-1)^{K+L}}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(u, v) F(u, v) D_M^{(K)}(x-u) D_N^{(L)}(y-v) du dv$$

is uniformly summable (C, β, σ) to 0 for $(x, y) \in X' \times Y'$.

For the proof of the theorem for the cases when $\beta \geq 0$ and $\sigma \geq 0$, or when $\beta \geq 0$ and $-1 < \sigma \leq 0$, or when $-1 < \beta \leq 0$ and $\sigma \geq 0$, Theorems II and III of Chapter III are applied in a manner similar to the above.

To prove the second part of the theorem, we note that

$$- \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \text{signum}(mn) A_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

is the Fourier series of its sum $\overline{F(x, y)\lambda(x, y)}$ since this series also converges absolutely. In the first case considered above, we have by Theorem I of Chapter III that

$$- \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{signum}(mn) m^K n^L A_{mn} e^{i(mx+ny)} \\ + \lambda(x, y) \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} \text{signum}(mn) m^K n^L c_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

is uniformly summable (C, β, σ) for $(x, y) \in X' \times Y'$. The second term is $(1/i)^{K+L} \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} \text{signum}(mn) a_{mn} e^{i(mx+ny)}$, and the MN^{th} partial sum of the Fourier series of $\overline{F(x, y)\lambda(x, y)}$ differentiated K times with respect to x and L times with respect to y is

$$\frac{1}{\pi^2} \frac{d^{K+L}}{dx^K dy^L} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u, v) \lambda(u, v) \bar{D}_M(x-u) \bar{D}_N(y-v) du dv \right\}$$

so that

$$\sum_{m, n=-M, -N}^{M, N} \text{signum}(mn) a_{mn} e^{i(mx+ny)} \\ + \frac{(-1)^{K+L}}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(u, v) F(u, v) \bar{D}_M^{(K)}(x-u) \bar{D}_N^{(L)}(y-v) du dv$$

is uniformly summable (C, β, σ) for $(x, y) \in X' \times Y'$.

By similar applications of Theorems II and III of Chapter III, the theorem may be proved for the other two cases.

The last theorem contains the theory of localization for incomplete double trigonometric series. For, if

$$(21) \quad \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} a'_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

is another incomplete trigonometric series such that

$$a'_{m, n} = o[(|m| + 1)^\beta (|n| + 1)^\sigma]$$

and $F'(x, y)$ corresponds to (21) as $F(x, y)$ corresponds to (4), and if $F(x, y) = F'(x, y)$ for $(x, y) \in X \oplus Y$, then Theorem I shows that (4) and (21) are uniformly equisummable (C, β, σ) for $(x, y) \in X' \times Y'$, by which is meant that the difference of the two series is uniformly summable (C, β, σ) to 0 for $(x, y) \in X' \times Y'$. With the above hypotheses, the series conjugate to (4) and (21) are uniformly equisummable in the wider sense for $(x, y) \in X' \times Y'$,

by which is meant that the difference of the two conjugate series is uniformly summable (C, β, σ) .

If (4) and (21) are not incomplete, in order to prove a localization theorem for these series, we assume a semi-rapid order condition on the coefficients of the two series, *i. e.* a_{mn} and a'_{mn} are $o[(|m|+1)^\beta(|n|+1)^\sigma]$ semi-rapidly. The formally integrated series are now no longer trigonometric series, but $F(x, y)$ may be written

$$(22) \quad a_{0,0} \frac{x^K y^L}{K! L!} + \frac{x^K}{K!} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_{0n}}{(in)^L} e^{iny} \\ + \frac{y^L}{L!} \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \frac{a_{m0}}{(im)^K} e^{imx} + \sum'_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{a_{mn}}{(im)^K (in)^L} e^{i(mx+ny)}$$

where \sum' indicates certain terms are omitted from the sum: *e. g.* in the first sum, the term for $n=0$ is omitted; in the second sum, the term for $m=0$ is omitted; and for the third sum, the terms for $m=0$ and $n=0$ are omitted. It will be convenient to assume that $K-\beta > 2$ and $L-\sigma > 2$. We now state the theorem of localization for double trigonometric series, which for the case $\beta=\sigma=0$ is due to Lepecki [3].

Theorem II. *If, for $(x, y) \in X \oplus Y$, $F(x, y) = F'(x, y)$, then in every rectangle $X' \times Y'$, concentric with and interior to the rectangle $X \times Y$, the series (4) and (21) are uniformly equisummable (C, β, σ) in the sense of Pringsheim.*

If, in addition to the above hypotheses, the coefficients of series (4) and (21) are $o[(|m|+1)^\beta(|n|+1)^\sigma]$ rapidly, then the series conjugate to (4) and (21) are uniformly equisummable (C, β, σ) in the wider sense for $(x, y) \in X' \times Y'$.

We split up series (4) into four parts:

$$\sum'_{m,n=-\infty}^{\infty} a_{mn} e^{i(mx+ny)} + \sum'_{m=-\infty}^{\infty} a_{m0} e^{imx} + \sum'_{n=-\infty}^{\infty} a_{n0} e^{iny} - a_{00}$$

where \sum' denotes as usual that certain terms have been omitted. We denote the partial sums of the first, second, and third series by $e_{MN}(x, y)$, $g_M(x)$, and $h_N(y)$ respectively, and the partial sums of (4) by $s_{MN}(x, y)$. Then, $s_{MN}(x, y) = e_{MN}(x, y) + g_M(x) + h_N(y) - a_{00}$. Let

$$E(x, y) = \sum'_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{a_{mn}}{(im)^K (in)^L} e^{i(mx+ny)}; \\ G(x) = \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \frac{a_{m0}}{(im)^K} e^{imx} + \frac{a_{00} x^K}{K!}; \quad H(y) = \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_{n0}}{(in)^L} e^{iny} + \frac{a_{00} y^L}{L!}.$$

Then,

$$F(x, y) = E(x, y) + \frac{y^L}{L!} G(x) + \frac{x^K}{K!} H(y) - \frac{a_{00} x^K y^L}{K! L!}.$$

Now let $\lambda(x, y) = -\lambda(x)\mu(y) + \lambda(x) + \mu(y)$ where $\lambda(x)$ and $\mu(y)$ have sufficiently many continuous derivatives, and such that

$$\lambda(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1, x \in X' \\ 0, x \text{ outside } X \end{array} \right\} \pmod{2\pi}; \quad \mu(y) = \left\{ \begin{array}{l} 1, y \in Y' \\ 0, y \text{ outside } Y \end{array} \right\} \pmod{2\pi}.$$

We introduce the following notations:

$$(23) \quad \frac{(-1)^K}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(u) G(u) D_M^{(K)}(x-u) du = g_M(x) + \varepsilon_M(x),$$

$$\frac{(-1)^L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mu(v) H(v) D_N^{(L)}(y-v) dv = h_N(y) + \eta_N(y),$$

$$(24) \quad \frac{(-1)^K}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u^K}{K!} \lambda(u) D_M^{(K)}(x-u) du = 1 + \varrho_M(x),$$

$$\frac{(-1)^L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{v^L}{L!} \mu(v) D_N^{(L)}(y-v) dv = 1 + \sigma_N(y),$$

$$(25) \quad \frac{(-1)^K}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u^K}{K!} D_M^{(K)}(x-u) du = 1 + \xi_M(x),$$

$$\frac{(-1)^L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{v^L}{L!} D_N^{(L)}(y-v) dv = 1 + \tau_N(y).$$

The expressions in (23) are simply the Riemann formulas for certain single series. Since $a_{m0} = o[m^3]$ and $a_{0n} = o[n^\sigma]$, $\varepsilon_M(x)$ is uniformly summable (C, β) to 0 for $x \in X'$, and $\eta_N(y)$ is uniformly summable (C, σ) to 0 for $y \in Y'$ (see [1], p. 101). The expressions in (24) are the Riemann formulae in one variable for the series consisting only of the term 1. Hence, $\varrho_M(x)$ and $\sigma_N(y)$ are uniformly summable (C, β) and (C, σ) respectively to 0 for $(x, y) \in X' \times Y'$.

Let $G(u) = a_{00} u^K / K! + \tilde{G}(u)$ where $\tilde{G}(u)$ is periodic. Then,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}(u) D_M^{(K)}(x-u) du = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{a_{m0}}{(im)^K} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imu} D_M^{(K)}(x-u) du \right)$$

by the uniform convergence of the series. This equals, after integration by parts, $(-1)^K (g_M(x) - a_{00})$. Hence,

$$(26) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(u) D_M^{(K)}(x-u) du = (-1)^K (g_M(x) + a_{00} \xi_M(x)),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(v) D_N^{(L)}(y-v) dv = (-1)^L (h_N(y) + a_{00} \tau_N(y)).$$

Now we analyze the difference

$$\Delta_{MN}(x, y) = S_{MN}(x, y) - \frac{(-1)^{K+L}}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u, v) \lambda(u, v) D_M^{(K)}(x-u) D_N^{(L)}(y-v) du dv.$$

We can write this as

$$\begin{aligned} \Delta_{MN}(x, y) &= e_{MN}(x, y) - \frac{(-1)^{K+L}}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E(u, v) \lambda(u, v) D_M^{(K)}(x-u) D_N^{(L)}(y-v) du dv \\ &+ g_M(x) - \frac{(-1)^{K+L}}{\pi^2 L!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(u, v) v^L G(u) D_M^{(K)}(x-u) D_N^{(L)}(y-v) du dv \\ &+ h_N(y) - \frac{(-1)^{K+L}}{\pi^2 K!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(u, v) u^K H(v) D_M^{(K)}(x-u) D_N^{(L)}(y-v) du dv \\ &- a_{00} + \frac{(-1)^{K+L}}{\pi^2 K! L!} a_{00} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(u, v) u^K v^L D_M^{(K)}(x-u) D_N^{(L)}(y-v) du dv. \end{aligned}$$

Designate these differences by $\Delta_{MN}^{(1)}(x, y)$, $\Delta_{MN}^{(2)}(x, y)$, $\Delta_{MN}^{(3)}(x, y)$, $\Delta_{MN}^{(4)}(x, y)$. According to Theorem I of this chapter, $\Delta_{MN}^{(1)}(x, y)$ is uniformly summable (C, β, σ) to 0 for $(x, y) \in X' \times Y'$. Writing $\lambda(x, y)$ in terms of $\lambda(x)$ and $\mu(y)$, we obtain from (23), (24), (25), and (26)

$$\Delta_{MN}^{(2)}(x, y) = -g_M(x) \tau_N(y) - \varepsilon_M(x) \tau_N(y) - a_{00} \xi_M(x) - a_{00} \xi_M(x) \sigma_N(y) + \varepsilon_M(x) \sigma_N(y)$$

where $\varepsilon_M(x) \sigma_N(y)$ is uniformly summable (C, β, σ) to 0 for $(x, y) \in X' \times Y'$ since the first factor is uniformly summable (C, β) to 0 for $x \in X'$ and the second factor is uniformly summable (C, σ) to 0 for $y \in Y'$. Furthermore,

$$\Delta_{MN}^{(3)}(x, y) = -h_N(y) \xi_M(x) - \eta_N(y) \xi_M(x) - a_{00} \tau_N(y) - a_{00} \tau_N(y) \varrho_M(x) + \eta_N(y) \varrho_M(x)$$

where $\eta_N(y) \varrho_M(x)$ is uniformly summable (C, β, σ) to 0 for $(x, y) \in X' \times Y'$. Finally

$$\Delta_{MN}^{(4)}(x, y) = a_{00} [\xi_M(x) + \tau_N(y) + \varrho_M(x) \tau_N(y) + \xi_M(x) \sigma_N(y) - \varrho_M(x) \sigma_N(y)]$$

where $\varrho_M(x)\sigma_N(y)$ is uniformly summable (C, β, σ) to 0 for $(x, y) \in X' \times Y'$. By combining the above, we obtain

$$(27) \quad \Delta_{MN}(x, y) = -\tau_N(y)(g_M(x) + \varepsilon_M(x)) - \xi_M(x)(h_N(y) + \eta_N(y)) + D_{MN}(x, y)$$

where $D_{MN}(x, y)$ is uniformly summable (C, β, σ) to 0 for $(x, y) \in X' \times Y'$. Designate by $s'_{MN}(x, y), g'_M(x), \dots$ expressions analogous to $s_{MN}(x, y), g_M(x), \dots$ but constructed from the coefficients a'_{MN} of (21). Then, corresponding to (27), we have

$$(28) \quad \Delta'_{MN}(x, y) = -\tau_N(y)(g'_M(x) + \varepsilon'_M(x)) - \xi_M(x)(h'_N(y) + \eta'_N(y)) + D'_{MN}(x, y)$$

where $D'_{MN}(x, y)$ is uniformly summable (C, β, σ) to 0 for $(x, y) \in X' \times Y'$. The theorem will be proved when it has been shown that $G(x) = G'(x)$ for $x \in X$ and $H(y) = H'(y)$ for $y \in Y$. For then

$$\begin{aligned} s_{MN}(x, y) - s'_{MN}(x, y) &= \Delta_{MN}(x, y) - \Delta'_{MN}(x, y) \\ &= \tau_N(y)[g'_M(x) + \varepsilon'_M(x) - g_M(x) - \varepsilon_M(x)] \\ &\quad + \xi_M(x)[h'_N(y) + \eta'_N(y) - h_N(y) - \eta_N(y)] + D_{MN}(x, y) - D'_{MN}(x, y) \end{aligned}$$

and if $G(x) = G'(x)$, $x \in X$, and $H(y) = H'(y)$, $y \in Y$, (23) shows that

$$g_M(x) + \varepsilon_M(x) = g'_M(x) + \varepsilon'_M(x), \quad h_N(y) + \eta_N(y) = h'_N(y) + \eta'_N(y)$$

so that $s_{MN}(x, y) - s'_{MN}(x, y) = D_{MN}(x, y) - D'_{MN}(x, y)$ which is uniformly summable (C, β, σ) to 0 for $(x, y) \in X' \times Y'$. We have that

$$\begin{aligned} F(x, y) - F'(x, y) &= E(x, y) - E'(x, y) + \frac{y^L}{L!} (G(x) - G'(x)) \\ &\quad + \frac{x^K}{K!} (H(y) - H'(y)) + \frac{x^K y^L}{K! L!} (a_{00} - a'_{00}) \end{aligned}$$

is 0 for $(x, y) \in X \oplus Y$. Letting $\tilde{H}(y) = H(y) - a_{00} y^L / L!$ and $\tilde{H}'(y) = H'(y) - a'_{00} y^L / L!$ we have

$$(29) \quad E(x, y) - E'(x, y) + \frac{x^K}{K!} (\tilde{H}(y) - \tilde{H}'(y)) = \frac{y^L}{L!} (G'(x) - G(x))$$

for $(x, y) \in X \oplus Y$. Fix an arbitrary x , say x_0 in X . The left side of (29) which we designate by $L(y)$ is a periodic function of y and can be written as a trigonometric series with coefficients $o(n^{-2})$. Thus, the graph of $L(y)$ can have no angular points ([2], p. 271]). Since $y^L / L! [G'(x_0) - G(x_0)]$ is periodic and contains no angular points, $G'(x_0) = G(x_0)$ and more generally $G(x) = G'(x)$ for $x \in X$. A similar argument may be used to show $H'(y) = H(y)$ for $y \in Y$.

The second part of the theorem may be proved by quite analogous arguments.

We conclude with two remarks. If we had defined the series conjugate to (4) to be

$$-i \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \text{signum}(m) a_{mn} e^{i(mx+ny)} \quad \text{or} \quad -i \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \text{signum}(n) a_{mn} e^{i(mx+ny)},$$

there are theorems for such series corresponding to the ones we have proved. However, under either of the above definitions of conjugate series, we obtain a stronger result concerning the equisummability of two such series. In particular, if the coefficients of series (4) and (21) obey some rapid order condition, and if the other hypotheses of Theorem II of this chapter are satisfied, we may conclude that the conjugates of the two series are equisummable by some Cesàro method, whereas under our original definition of conjugate series, we could merely conclude that the conjugates of the two series were equisummable in the wider sense.

Although all our theorems have been stated for the case of two variables, the case of more than two variables can be treated in a quite similar fashion.

References

- [1] A. Zygmund, *Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques*, Math. Zeit. 24 (1926), p. 47-104.
 [2] — , *Trigonometrical Series*, Warsaw, 1935.
 [3] Z. Lepecki, *On some theorems on trigonometric double series*, Faculdade de Filosofia Ciências e Letras do Paraná, Anuario (1940-41), p. 159-187.
-

ON FINSLER'S MEASUREMENT OF AN ANGLE *)

By S. GOŁĄB (Kraków)

In Finsler's spaces Finsler¹⁾ stated a definition of a measure of an angle which for certain angles can be *unreal*. Remaining in the two-dimensional geometry of Minkowski (Finsler's geometry is locally a Minkowski's one and problems of measurement of an angle are typical local problems) let us denote by I the indicatrice²⁾, by O its origin. Let's establish positive direction of rotation on the plane and let us speak about oriented angles³⁾. So that we could determine the measure (in the sense of Finsler) of an oriented angle whose first side is radius r_1 (starting from O) it is necessary and sufficient that the indicatrice I should have at the point P_1 of intersection with the radius r_1 a determined half-tangent t_1 (directed towards increasing angles) which would not lay on the line determined by radius r_1 ⁴⁾. Let's denote now by r an radius starting from O , sufficiently near to the radius r_1 and such that the angle $\sphericalangle(r_1, r)$ should be positive; r should be neighbouring enough to the radius r_1 so that it must intersect the half-tangent t_1 at a point Q ⁵⁾. To continue let's denote by P the point of intersection of radius r with the indicatrice I .

*) The results contained in this paper were presented at a meeting of the Polish Mathematical Society (the Cracow Branch) on 25-th November 1947.

¹⁾ P. Finsler, *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen*, Dissertation Göttingen 1918, p. 39.

²⁾ According to Mr C. Carathéodory. Indicatrice is called by many an *Eichkurve*. Hadamard is calling it *figuratrice*, Chr. Pauc calls it *courbe d'étallonage*.

³⁾ In Finsler's spaces the Finsler's measure of an angle depends on the direction (orientation) of an angle. For that purpose see the paper by A. Bielecki and S. Gołąb, *Sur un problème de la métrique angulaire dans les espaces de Finsler*, Ann. Soc. Pol. Math. 18 (1945), p. 134-144, Théorème II.

⁴⁾ Finsler himself made unnecessary a stronger assumption, because he assumed that there is a tangent to the indicatrice at the point P_1 . Really it is enough to make a less strong assumption. See the paper as under ³⁾. The assumption about the line passing through t_1 but not through the origin O is necessary for the existence of the point Q , which is used in the definition of the measure of an angle.

⁵⁾ So that the point Q could exist, the euclidean measure of an angle between r_1 and r must be smaller than euclidean measure of the angle between the radius r_1 and t_1 . The latter is from the assumption positive.

By Finsler's measure of an (oriented) angle between r_1 and r we understand a number φ such that

$$(1) \quad \cos \varphi = \frac{\overline{OP}^6}{OQ}.$$

It is obvious that when indicatrice I is a convex curve (even though in larger meaning of that word) then the measure φ will exist for r near enough to r_1 at freely chosen position of radius r_1 and that measure will be always a positive number. That comes obviously from a fact, that for a convex curve at any point exists a half-tangent t , not passing through O and there is $\overline{OP} < \overline{OQ}$.

In a case when indicatrice I is not convex it may happen that $\overline{OP} > \overline{OQ}$ and then there isn't a real number φ satisfying equation (1).

The purpose of this note is the proof of a theorem which is in a sense a reverse property of the fact that for convex indicatrice I the Finsler's measure of sufficiently small angles is a real number.

Theorem. If indicatrice I is a closed curve⁷⁾ and if Finsler's measure of angles uniformly small⁸⁾ and equally directed⁹⁾ is a real number, then indicatrice I is a convex curve in a large sense.

Proof. Let us suppose for a moment that indicatrice I is not a convex curve. In that case, remembering a certain theorem by Leja and

⁶⁾ It is easy to see that this definition is the natural generalization of euclidean measure of an angle *i. e.* the euclidean measure we are getting in a case when the indicatrice I is a circle, and the origin O is its centre.

⁷⁾ The supposition that indicatrice is a closed curve is essential. To show that it is enough to have a look at the following example. Let the origin of axis of reference O be the origin of indicatrice as well and let the indicatrice itself be formed by four lines: one line of equation $y = 1 - 2x$ for $0 < x \leq \frac{1}{2}$ and the rest of lines formed by the given above equation and turned about point O by an angle $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. For such indicatrice (having 4 points of discontinuity), obviously not convex, all conditions are fulfilled except one: such indicatrice is not closed curve.

Instead of a supposition that the indicatrice is a closed curve, we could make a less strong one and such: the increasing of the measure of an angle *i. e.* the following quality: if the radius r_1 precedes radius r_2 , and r_2 precedes r_3 , then the Finsler's measure of the angle between r_1 and r_2 is smaller or equal to the measure of the angle between r_1 and r_3 . Would the Finsler's measure fulfill the condition of addibility, then the above property would be obvious, but we know that the Finsler's measure does not satisfy in general the law of addibility (see paper under ³⁾).

⁸⁾ Uniformly small means that there is such positive number ω , that, providing the euclidean measure of an angle between r_1 and r_2 is less than ω ; the r_1 and r_2 we call as being near.

⁹⁾ We say, that angles $\sphericalangle(r_1, r_2)$ and $\sphericalangle(r_3, r_4)$ are equally oriented if from " r_1 precedes r_2 " can be conclude that " r_3 precedes r_4 ". The preceding is defined as follows: draw a line through r_1 then the r_2 should find itself in that half-plane which corresponds to the euclidean measures of angle between 0 and π , providing we take the arm r_1 as starting line.

Wilkosz¹⁰⁾, there must be on indicatrice I at least one point of concavity R . That point R has a following property: there is a circle C , with centre in R , whose full halfdisk except the point R lays inside I . Let's take one of such points R under consideration. Because-as it is not difficult to show — Finsler's measure of angles is an invariant of the group of centro-affine transformations of I ¹¹⁾, we can, by applying certain transformation, make that the point of concavity R will have coordinates $(1,0)$ and that the diameter of the halfdisk D will be perpendicular to the horizontal x -axis.

Let us first look into the case when the half-tangent t_0 at the point R lays along the diameter of the halfdisk D ¹²⁾. Here the arc of indicatrice I runs in the righthand-neighbourhood of R outside D and for points

P of indicatrice I near enough to R the line \overline{OP} cuts the radius t_0 at the point Q (Fig. 1) and, therefore, there is $\overline{OP} > \overline{OQ}$ and the measure of the angle $\sphericalangle(OR, OP)$ is, in spite of supposition, unreal. We have therefore a contradiction and that case is proved.

Now we will start a more difficult case when half-tangent t_0 lays outside of D .

Let us denote by ω the euclidean measure of an angle, about which there is a note under⁸⁾. Here, we have

$$(2) \quad \omega_1 = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \varrho_0,$$

where $2\varrho_0$ is a diameter of the halfdisk D . By s we will denote a radius starting from R and parallel to the y -axis, by b a radius starting from R and a bisector of the angle between s and t_0 , by $\omega_2/2$ an euclidean measure of the angle between radius OP and OR , which angle should be small enough so that the common part of the angle $\sphericalangle(OP, OR)$ and (s, b) , without the point R itself, must not contain any point of indicatrice I . By making the ω_2 smaller it is possible to satisfy the last condition because half-tangent t_0 lays outside of the above mentioned common part. Let us at least denote

$$(3) \quad \omega_0 = \operatorname{Min}(\omega, \omega_1, \omega_2)$$

and, by r_1 or r_2 radius which with the x -axis makes an angle, whose euclidean measure is either $-\frac{\omega_0}{2}$ or $+\frac{\omega_0}{2}$.

¹⁰⁾ F. Leja and W. Wilkosz, *Sur une propriété des domaines concaves*. Ann. Soc. Pol. Math. 2 (1923), p. 222-224.

¹¹⁾ The affine transformation is called *centro-affine*, when the point O is unchanged during the transformation.

¹²⁾ Would we take the original definition by Finsler, then the proof could be reduced to that case. In case of two-sided tangent, that tangent must lie on the diameter of the halfdisk D , if D must lie inside I .

Next, let us draw through a point M of intersection of radius r_2 with radius b a line l , perpendicular to the x -axis and let us denote by G the interior of an area bounded by lines $-s, l, x, r_1$ (Fig. 2). The domain G is shaded on the drawing. Because R is a point of indicatrice and indicatrice is a closed curve, the domain G must have points of it. All the following reasoning will tend to show in the domain G such a point A on indicatrice I at which the half-tangent t would cross the line OM ¹³).

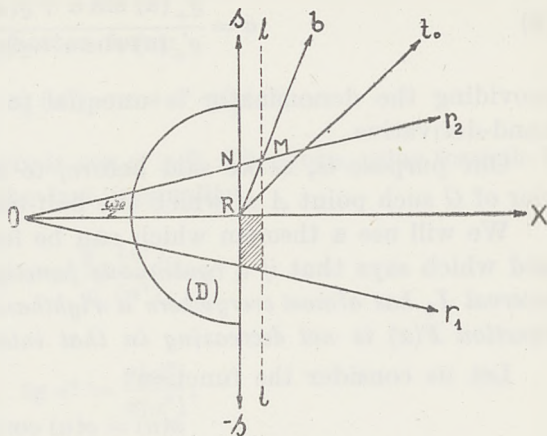


Fig. 2.

Here we will use the fact, that the interior of I is *corps radial* i. e. that I has with each radius r issue from O only one point P in common. For that purpose we will use the polar equation for I , where the above fact is taken into account. If

$$(4) \quad \varrho = \varrho(\alpha)$$

is a polar representation of I where O is taken as origin and x -axis for initial line, then the parametric equations will have the form:

$$(5) \quad \begin{aligned} x &= \varrho(\alpha) \cos \alpha, \\ y &= \varrho(\alpha) \sin \alpha. \end{aligned}$$

The following lemma will now be used.

Lemma. The necessary and sufficient condition for a curve defined by equations (5) to have in $\alpha = \alpha_0$, when $\varrho(\alpha_0) \neq 0$, a tangent not passing through O , is the fact that the function $\varrho(\alpha)$ must have for $\alpha = \alpha_0$ a derivative $\varrho'(\alpha_0)$.

The proof of that lemma, probably not new, is left to the reader.

From that lemma it is easy to get its generalization in such a way that for the word *tangent* the word *half-tangent* will be substituted and for the word *derivative* the word *one-sided derivative*.

Because points of indicatrice I , which are inside G are certainly different than O and because from supposition the half-tangent t at the point P does not go through O , therefore we can to our points P laying

¹³) It follows from our supposition that I should have only on-sided tangent at any point, therefore a priori it might appear possible to connect the point A with the point R with such arc for which the half-tangent at any point does not cut the line OM .

inside G apply the generalized lemma. Then the coefficient of direction a of the half-tangent t will be as follows:

$$(6) \quad a = \frac{\varrho'_+(\alpha) \sin \alpha + \varrho(\alpha) \cos \alpha}{\varrho'_+(\alpha) \cos \alpha - \varrho(\alpha) \sin \alpha},$$

providing the denominator is unequal to zero. $\varrho'_+(\alpha)$ means the righthand-derivative.

Our purpose is, as we said before, to show that there is in the interior of G such point A at which the half-tangent t would cut the line \overline{OM} .

We will use a theorem which can be found in the book of S. Saks¹⁴⁾ and which says that if a continuous function $F(x)$ of a real variable in an interval I_0 has almost everywhere a righthand-derivative $F'_+(x) \geq 0$, then the function $F(x)$ is not decreasing in that interval.

Let us consider the function

$$x(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \alpha$$

in the interval $\left(-\frac{\omega_0}{2}, 0\right)$. There is $x(0) = \varrho(0) = 1$, but for $-\frac{\omega_0}{2} < \alpha < 0$ there is $x(\alpha) > 1$ when a suitable point of indicatrice lays outside D . For α near enough to zero the corresponding point of indicatrice would lay inside the halfdisk D . We maintain, that there is such α^* interior of the interval $\left(-\frac{\omega_0}{2}, 0\right)$, for which there is

$$(7) \quad x'_+(\alpha^*) < 0.$$

Indeed, would there be in the lefthand neighbourhood of the point $\alpha = 0$:

$$x'_+(\alpha) \geq 0,$$

then, using the mentioned before theorem, the function $x(\alpha)$ should be in that neighbourhood non-decreasing. Therefore, because of the equation $x(0) = 1$, should be $x(\alpha) \leq 1$, which is impossible. Let A^* mean a point of indicatrice corresponding to the amplitude α^* and let t be a half-tangent at the point A^* . We have

$$\varrho(\alpha^*) > 0$$

which can be written as

$$\varrho(\alpha^*) \{\cos^2 \alpha^* + \sin^2 \alpha^*\} > 0$$

or

$$-\varrho(\alpha^*) \sin^2 \alpha^* < \varrho(\alpha^*) \cos^2 \alpha^*.$$

Let us add to the both sides the expression

$$\varrho'_+(\alpha^*) \sin \alpha^* \cos \alpha^*;$$

¹⁴⁾ S. Saks, *Théorie de l'intégrale*, Monografie matematyczne, Warszawa 1933, p. 137, theorem 17.

we will get

$$\sin \alpha^* \{ \rho'_+(\alpha^*) \cos \alpha^* - \rho(\alpha^*) \sin \alpha^* \} < \cos \alpha^* \{ \rho'_+(\alpha^*) \sin \alpha^* + \rho(\alpha^*) \cos \alpha^* \},$$

which can be written in a shorter form:

$$\sin \alpha^* \cdot x'_+(\alpha^*) < \cos \alpha^* \cdot y'_+(\alpha^*).$$

Let us note however, that there is $\cos \alpha^* > 0$. Therefore, using formula (7), we will get by division of the last inequality

$$\operatorname{tg} \alpha^* > \frac{y'_+(\alpha^*)}{x'_+(\alpha^*)} = a^*.$$

On other hand we have

$$\operatorname{tg} \alpha^* = \frac{y(\alpha^*)}{x(\alpha^*)};$$

because the domain G lays below x -axis, hence we have

$$(8) \quad a^* < \frac{y(\alpha^*)}{x(\alpha^*)} < 0,$$

which proves, that the half-tangent t cuts inside the line \overline{OM} .

Now there is only one step to finish the proof. Let us denote by N a point of intersection of radius r_2 with the radius s . Then we know that the interior of the triangle RNM hasn't got any points from the indicatrice I . Further let's denote by $-\frac{\omega^*}{2}$ the euclidean amplitude of radius OA^* and let us take any radius r issue from O which would have amplitude $0 < \alpha < \frac{\omega^*}{2}$. That radius r will cut firstly (counting from O) the half-tangent t and later on the indicatrice I hence $\overline{OQ} < \overline{OP}$.

The measure φ will be unreal while the euclidean measure of the angle between radius r and OA^* is smaller than ω^* hence smaller than ω_0 , hence than ω what is contradiction with the already established fact.

And so, in the second case, we come to a contradiction and, therefore, the theorem is proved.

Remark. A question arises whether it would be possible to make less strong assumption about the reality of angles uniformly near to each other. An example can be given however showing, that the assumption is essential. Let us take an indicatrice, which is formed from three arcs of following curves:

$$(9) \quad \begin{array}{ll} 1) & x = -\sqrt{1-y^2} \\ 2) & x^2 - 6xy + 9y^2 + 6x - 2y - 7 = 0 \quad \text{for } x \geq 0, y \geq 0 \\ 3) & x^2 + 6xy + 9y^2 + 6x + 2y - 7 = 0 \quad \text{for } x \geq 0, y \leq 0 \end{array}$$

That curve is formed by a halfcircle and two parabolical arcs. It reminds by its graph a cardioid and differs on principle by a point of bending (for $x=1, y=0$), while the cardioid has an edge. For cardioid, as an indicatrice, the Finslers measure of angles, whose first arm goes through the vertex of the edge, is not determined. On the other hand we can see that for our above mentioned curve (9) as an indicatrice, for each radius r_1 there is such righthand-neighbourhood (not for all r_1 equally large) that for any radius r from that neighbourhood the measure φ of an angle between r_1 and r is real, but the indicatrice, in spite of that, is not a convex curve.

ÉVALUATION DU DOMAINE DE RÉGULARITÉ DU CONOÏDE CARACTÉRISTIQUE

Par J. SZARSKI (Kraków)

Introduction

Considérons une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, normale et du type hyperbolique

$$(1) \quad \sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik}(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = 0 \quad (a_{ik} = a_{ki}),$$

où les coefficients a_{ik} sont de la classe C^2 dans le voisinage

$$(2) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2} < R,$$

et la forme caractéristique

$$(3) \quad \sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik}(x_1, \dots, x_m) \lambda_i \lambda_k$$

est positive, définie pour tout point (x_1, \dots, x_m) du voisinage (2).

L'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(4) \quad \sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik}(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_k} - \left(\frac{\partial z}{\partial x_m} \right)^2 = 0$$

définit les caractéristiques de l'équation (1), tandis que le système d'équations différentielles ordinaires

$$(5) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m-1} a_{ik}(x_1, \dots, x_m) p_k \quad (i=1, 2, \dots, m-1); \quad \frac{dx_m}{dt} = -p_m,$$

$$(6) \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{m-1} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} p_j p_k \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

définit les bandes caractéristiques de l'équation (4). Désignons par

$$(7) \quad x_i = \hat{x}_i(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m), \quad p_i = \hat{p}_i(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m) \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

l'intégrale du système (5) et (6), déterminée par les valeurs initiales

$$(8) \quad \hat{x}_i(0, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m) = 0, \quad \hat{p}_i(0, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m) = \hat{p}_i.$$

Lorsque les valeurs initiales $(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m)$ satisfont aux relations

$$(9) \quad \sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik}(0, \dots, 0) \hat{p}_i \hat{p}_k - \hat{p}_m^2 = 0, \quad \sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2 > 0,$$

la courbe

$$(10) \quad x_i = \hat{x}_i(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

dans l'espace de points (x_1, \dots, x_m) , est dite la *bicaractéristique* de l'équation (1), issue du point $(0, \dots, 0)$.

Il est évident, d'après la forme des équations (5) et (6), que, pour $\alpha \neq 0$ fixé arbitrairement, la courbe

$$x_i = \hat{x}_i(\alpha s, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m), \quad p = \alpha \hat{p}_i(\alpha s, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m)$$

est une intégrale du système (5) et (6) satisfaisant aux conditions initiales

$$\hat{x}_i(\alpha s, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m)_{s=0} = 0, \quad \alpha \hat{p}_i(\alpha s, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m)_{s=0} = \alpha \hat{p}_i.$$

Il en résulte, en vertu de l'unicité des solutions du système (5) et (6), que

$$(11) \quad \hat{x}_i(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m)_{t=\alpha s} = \hat{x}_i(s, \alpha \hat{p}_1, \dots, \alpha \hat{p}_m),$$

et, par conséquent, la courbe $x_i = \hat{x}_i(s, \alpha \hat{p}_1, \dots, \alpha \hat{p}_m)$ n'est que la courbe (10) mais avec une représentation paramétrique différente. Il s'ensuit, d'après (9), que les bicaractéristiques, issues du point $(0, \dots, 0)$, forment une famille de courbes à $m-2$ paramètres. Elles engendrent donc une surface à $m-1$ dimensions dans l'espace de points (x_1, \dots, x_m) .

D'après ce qu'on vient de constater, il suffit, pour obtenir toutes les bicaractéristiques issues du point $(0, \dots, 0)$, de remplacer les relations (9) par les suivantes

$$(12) \quad \hat{p}_m = - \sqrt{\sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik}(0, \dots, 0) \hat{p}_i \hat{p}_k},$$

$$(13) \quad \sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2 = 1.$$

La surface engendrée par ces bicaractéristiques est composée de deux nappes, dont l'une s'appelle *conoïde caractéristique direct* au sommet $(0, \dots, 0)$, l'autre *conoïde caractéristique rétrograde* au sommet $(0, \dots, 0)$. Le premier conoïde est composé des bicaractéristiques envisagées pour les valeurs $t \geq 0$, le second — pour les valeurs $t \leq 0$.

Le but de ce travail est d'évaluer le voisinage du point $(0, \dots, 0)$ dans l'espace de points (x_1, \dots, x_{m-1}) , où l'équation de chacun de ces conoïdes peut être mise sous la forme

$$x_m = \varphi(x_1, \dots, x_{m-1}),$$

ainsi que de trouver une évaluation d'en bas de leurs hauteurs. Il suffit évidemment de résoudre le problème pour le conoïde direct. C'est de ce dernier que nous allons donc nous occuper dans la suite.

Le premier problème pour ce conoïde revient à l'évaluation du voisinage U du point $(0, \dots, 0)$ dans l'espace (x_1, \dots, x_{m-1}) tel que, pour tout point $(x_1, \dots, x_{m-1}) \in U$ et différent de $(0, \dots, 0)$ vienne correspondre un système unique de valeurs

$$(V) \quad t = t(x_1, \dots, x_{m-1}), \quad \hat{p}_i = \hat{p}_i(x_1, \dots, x_{m-1}), \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

de manière que

$$(R) \quad t > 0, \quad \hat{p}_m = -\sqrt{\sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik}(0, \dots, 0) \hat{p}_i \hat{p}_k}, \quad \sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2 = 1,$$

et

$$(J) \quad x_i = \hat{x}_i[t(x_1, \dots, x_{m-1}), \hat{p}_1(x_1, \dots, x_{m-1}), \dots, \hat{p}_m(x_1, \dots, x_{m-1})], \quad (i = 1, 2, \dots, m-1).$$

L'équation du conoïde direct aura alors la forme

$$x_m = \hat{x}_m[t(x_1, \dots, x_{m-1}), \hat{p}_1(x_1, \dots, x_{m-1}), \dots, \hat{p}_m(x_1, \dots, x_{m-1})].$$

Hypothèses sur les coefficients a_{ik}

Nous allons admettre, dans la suite, l'existence de trois constantes positives M, N, Q telles que (pour $i, k = 1, 2, \dots, m-1$; $j, l = 1, 2, \dots, m$)

$$(14) \quad |a_{ik}|, \quad \left| \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} \right| < M \quad \text{dans le voisinage (2),}$$

$$(15) \quad Q < \sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik}(x_1, \dots, x_m) \lambda_i \lambda_k < N \quad \text{pour} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 = 1 \quad \text{dans le voisinage (2).}$$

I. Commençons par évaluer l'intervalle $0 \leq t < \delta_1$, dans lequel les intégrales du système (5) et (6), qui correspondent aux valeurs initiales \hat{p}_i vérifiant (13), sont définies.

En vertu de (6) et (14), nous avons pour une telle intégrale, tant que

$\sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{x}_i^2} < R$, l'inégalité différentielle

$$\left(\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\sum_{j,k=1}^{m-1} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x} \hat{p}_j \hat{p}_k \right)^2 \leq \frac{M^2}{4} \left(\sum_{j,k=1}^{m-1} \hat{p}_j \hat{p}_k \right)^2 \leq \frac{M^2 m^2}{4} \left(\sum_{j=1}^m \hat{p}_j^2 \right)^2,$$

d'où

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial t}\right)^2} \leq \frac{Mm^2}{2} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2} \right)^2,$$

et, par conséquent,

$$(16) \quad \left| D_+ \sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2} \right| \leq \frac{Mm^2}{2} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2} \right)^2,$$

D_+ désignant la dérivée droite par rapport à t . D'autre part, d'après (8) et (13),

$$(17) \quad \left(\sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2} \right)_{t=0} = 1,$$

et puisque l'intégrale $y(t)$ de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Mm^2}{2} y^2,$$

déterminée par la valeur initiale $y(0)=1$, a la forme

$$y(t) = \frac{2}{2 - Mm^2 t},$$

nous déduisons de (16) et (17) que l'inégalité ¹⁾

$$(18) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2} \leq \frac{2}{2 - Mm^2 t}$$

est vérifiée dans l'intervalle

$$(19) \quad 0 \leq t < \frac{2}{Mm^2},$$

tant que l'intégrale envisagée existe. Pour les mêmes valeurs de t , nous avons de (5) l'inégalité différentielle

$$\left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t}\right)^2 \leq m(M+1)^2 \sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2,$$

d'où

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t}\right)^2} \leq m(M+1) \sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2},$$

¹⁾ Cf. par exemple T. Ważewski, *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 23 (1950), p. 112—166.

et, par conséquent, en vertu de (18),

$$(20) \quad D_+ \sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{x}_i^2} \leq \frac{2m(M+1)}{2-Mm^2t}.$$

D'autre part, d'après (8),

$$(21) \quad \left(\sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{x}_i^2} \right)_{t=0} = 0,$$

et puisque l'intégrale $y(t)$ de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2m(M+1)}{2-Mm^2t},$$

telle que $y(0) = 0$, a la forme

$$y(t) = -\frac{2(M+1)}{Mm} \ln \frac{1}{2} (2-Mm^2t),$$

nous avons de (20) et (21) l'inégalité

$$(22) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{x}_i^2} \leq -\frac{2(M+1)}{Mm} \ln \frac{1}{2} (2-Mm^2t)$$

dans l'intervalle (19), tant que l'intégrale envisagée existe. Il résulte de (22) que dans l'intervalle

$$(23) \quad 0 \leq t < \frac{2 - 2 \exp\left(-\frac{MmR}{2(M+1)}\right)}{Mm^2} = \delta_1$$

l'inégalité $\sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{x}_i^2} < R$ est vérifiée. Or, puisque $\delta_1 < \frac{2}{Mm^2}$ et comme toute intégrale du système (5) et (6) peut être prolongée jusqu'à la frontière du domaine

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2} < R, \quad p_1, \dots, p_m \text{ arbitraires,}$$

dans lequel le système est défini, nous en concluons que les intégrales du système (5) et (6), correspondant aux valeurs initiales \hat{p}_i qui vérifient la relation (13), sont définies dans l'intervalle (23).

II. Posons

$$\tilde{x}_i(q_1, \dots, q_m) = \hat{x}_i \left(\sqrt{\sum_{j=1}^m q_j^2}, \frac{q_1}{\sqrt{\sum_{j=1}^m q_j^2}}, \dots, \frac{q_m}{\sqrt{\sum_{j=1}^m q_j^2}} \right) \text{ pour } 0 < \sqrt{\sum_{j=1}^m q_j^2} < \delta_1,$$

$$\tilde{x}_i(0, \dots, 0) = 0.$$

Les fonctions $\tilde{x}_i(q_1, \dots, q_m)$ ainsi définies sont continues dans le voisinage

$$(24) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^m q_i^2} < \delta_1.$$

Les valeurs \hat{p}_i étant fixées arbitrairement et ne s'annulant pas toutes à la fois, nous avons

$$(25) \quad \tilde{x}_i(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m) = \tilde{x}_i(t\hat{p}_1, \dots, t\hat{p}_m), \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

pour tout $t \geq 0$ tel que les membres gauches existent. En effet, d'après la définition des fonctions $\tilde{x}_i(q_1, \dots, q_m)$ et d'après (11), nous avons

$$\tilde{x}_i(t\hat{p}_1, \dots, t\hat{p}_m) = \hat{x}_i \left(t \sqrt{\sum_{j=1}^m \hat{p}_j^2}, \frac{\hat{p}_1}{\sqrt{\sum_{j=1}^m \hat{p}_j^2}}, \dots, \frac{\hat{p}_m}{\sqrt{\sum_{j=1}^m \hat{p}_j^2}} \right) = \hat{x}_i(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m).$$

Nous démontrerons que les fonctions $\tilde{x}_i(q_1, \dots, q_m)$ ont les dérivées partielles du premier ordre. Nous savons que les fonctions $\hat{x}_i(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m)$ sont de la classe C^1 par rapport à toutes les variables. Il s'ensuit que les fonctions $\tilde{x}_i(q_1, \dots, q_m)$ sont de la classe C^1 pour

$$(26) \quad 0 < \sqrt{\sum_{j=1}^m q_j^2} < \delta_1.$$

D'autre part, en différentiant les identités (25) par rapport à \hat{p}_j , nous avons les relations

$$\frac{\partial \tilde{x}_i(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m)}{\partial \hat{p}_j} = t \left[\frac{\partial \tilde{x}_i(q_1, \dots, q_m)}{\partial q_j} \right]_{q_k = t\hat{p}_k}$$

pour $0 < t < \delta_1$ et $\sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2 = 1$. Il en résulte que

$$(27) \quad \frac{\partial \tilde{x}_i(q_1, \dots, q_m)}{\partial q_j} = \left[\frac{1}{t} \frac{\partial \hat{x}_i(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m)}{\partial \hat{p}_j} \right]_t = \sqrt{\sum_{j=1}^m q_j^2} \cdot \hat{p}_k = \sqrt{\sum_{j=1}^m q_j^2} \frac{q_k}{\sqrt{\sum_{j=1}^m q_j^2}}$$

pour q_i satisfaisant à l'inégalité (26).

En posant, en particulier dans (25), $\hat{p}_l = \delta_{ij}$, ($l=1, 2, \dots, m$) et en différentiant par rapport à t , nous avons, d'après (5),

$$(28) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} \right)_{q_l = t\delta_{ij}} &= \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t} \right)_{\hat{p}_l = \delta_{ij}} = \left[\sum_{k=1}^{m-1} a_{ik}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m) \hat{p}_k \right]_{\hat{p}_l = \delta_{ij}} \quad (i=1, 2, \dots, m-1), \\ \left(\frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial q_j} \right)_{q_l = t\delta_{ij}} &= \left(\frac{\partial \hat{x}_m}{\partial t} \right)_{\hat{p}_l = \delta_{ij}} = [-\hat{p}_m]_{\hat{p}_l = \delta_{ij}}. \end{aligned}$$

En faisant tendre t vers zéro et en tenant compte de ce que

$$(\hat{x}_i)_{t=0} = 0, \quad (\hat{p}_i)_{t=0}, \hat{p}_i = \delta_{ij} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m),$$

on déduit de (28) les relations suivantes:

$$(29) \quad \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} \right)_{q_k=0} = a_{ij}(0, \dots, 0) \quad (i, j = 1, 2, \dots, m-1),$$

$$(30) \quad \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_m} \right)_{q_k=0} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m-1),$$

$$(31) \quad \left(\frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial q_j} \right)_{q_k=0} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m-1),$$

$$(32) \quad \left(\frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial q_m} \right)_{q_k=0} = -1.$$

Nous démontrerons dans la suite que les dérivées $\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q}$ sont aussi continues au point $(0, \dots, 0)$.

III. Posons à présent

$$\bar{x}_i(q_1, \dots, q_{m-1}) = \tilde{x}_i(q_1, \dots, q_{m-1}, q_m)_{q_m} = - \sqrt{\sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik}(0, \dots, 0) q_i q_k}.$$

Les fonctions \bar{x}_i sont, selon (15) et (24), définies dans le voisinage

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} q_i^2} < \frac{\delta_1}{\sqrt{N+1}}.$$

Considérons la transformation

$$(T) \quad x_i = \bar{x}_i(q_1, \dots, q_{m-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, m-1).$$

Nous avons

$$\bar{x}_i(0, \dots, 0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m-1)$$

et lorsque

$$(T^{-1}) \quad q_i = \bar{q}_i(x_1, \dots, x_{m-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, m-1)$$

est la transformation inverse à (T), nous aurons, en posant

$$t = \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} \bar{q}_i^2 + \sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik}(0) \bar{q}_i \bar{q}_k}, \quad \dot{p}_i = \frac{1}{t} \bar{q}_i \quad (i = 1, 2, \dots, m-1),$$

$$\dot{p}_m = -\frac{1}{t} \sqrt{\sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik}(0) \bar{q}_i \bar{q}_k}$$

pour $0 < \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} x_i^2}$, les relations (R) et les identités (J), (cf. ci-dessus, Introduction), d'après la définition des fonctions \bar{x}_i et en vertu de (25). L'évaluation du voisinage U , dans lequel le système (V) de valeurs qui vérifient les relations (R) et les identités (J) existe, revient donc à l'évaluation du voisinage d'existence de la transformation inverse (T^{-1}) .

IV. Passons à présent à quelques évaluations auxiliaires. En substituant $x_i = \hat{x}_i(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m)$; $p_i = \hat{p}_i(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m)$ dans (5) et (6), nous avons des identités qui, différentiées par rapport à \hat{p}_j , donnent

$$(33) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \hat{p}_j} \right) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^m \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} \frac{\partial \hat{x}_l}{\partial \hat{p}_j} \hat{p}_k + \sum_{k=1}^{m-1} a_{ik} \frac{\partial \hat{p}_k}{\partial \hat{p}_j} \quad (i=1, 2, \dots, m-1),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{x}_m}{\partial \hat{p}_j} \right) = - \frac{\partial \hat{p}_m}{\partial \hat{p}_j},$$

$$(34) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \hat{p}_j} \right) = - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{k,l=1}^{m-1} \frac{\partial^2 a_{kl}}{\partial x_i \partial x_r} \frac{\partial \hat{x}_r}{\partial \hat{p}_j} \hat{p}_k \hat{p}_l - \sum_{k,l=1}^{m-1} \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} \hat{p}_k \frac{\partial \hat{p}_l}{\partial \hat{p}_j}.$$

Les identités (33) et (34) sont valables pour $0 \leq t < \delta_1$ et $\sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2 = 1$.

Pour simplifier les calculs,¹ nous allons considérer ces identités dans l'intervalle ²⁾

$$(35) \quad 0 \leq t < \delta_2 = \min \left(\delta_1, \frac{1}{Mm^2} \right).$$

D'après (18) nous avons, dans l'intervalle (35),

$$(36) \quad |\hat{p}_i| \leq 2 \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

En vertu des inégalités (14) et (36), nous déduisons de (33) et (34) les inégalités différentielles suivantes

$$(37) \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \hat{p}_j} \right) \right| \leq 2mM \sum_{l=1}^m \left| \frac{\partial \hat{x}_l}{\partial \hat{p}_i} \right| + M \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial \hat{p}_k}{\partial \hat{p}_j} - \delta_{kj} \right| + M \quad (i=1, 2, \dots, m-1),$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{x}_m}{\partial \hat{p}_j} \right) \right| \leq \left| \frac{\partial \hat{p}_m}{\partial \hat{p}_j} - \delta_{mj} \right| + 1,$$

$$(38) \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \hat{p}_j} - \delta_{ij} \right) \right| \leq 2m^2M \sum_{r=1}^m \left| \frac{\partial \hat{x}_r}{\partial \hat{p}_j} \right| + 2mM \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial \hat{p}_k}{\partial \hat{p}_j} - \delta_{kj} \right| + 2mM.$$

De (37) et (38) nous avons ensuite l'inégalité

$$(39) \quad \sum_{i=1}^m \left[\left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \hat{p}_j} \right) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \hat{p}_j} - \delta_{ij} \right) \right| \right] \\ \leq (4m^3M + 1) \sum_{k=1}^m \left(\left| \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial \hat{p}_j} \right| + \left| \frac{\partial \hat{p}_k}{\partial \hat{p}_j} - \delta_{kj} \right| \right) + 4m^3M + 1.$$

²⁾ Nous verrons dans la suite que, si nous continuons les calculs dans l'intervalle $0 \leq t < \delta_1$, les constantes à évaluer seraient au plus deux fois plus grandes, car $\delta_1 < 2\delta_2$.

D'autre part, puisque

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \hat{p}_j}\right)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \hat{p}_j}\right)_{t=0} = \delta_{ij},$$

alors

$$(40) \quad \sum_{i=1}^m \left(\left| \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \hat{p}_j} \right| + \left| \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \hat{p}_j} - \delta_{ij} \right| \right)_{t=0} = 0.$$

Il résulte de (39) et (40) que nous avons dans l'intervalle (35)³

$$(41) \quad \sum_{i=1}^m \left(\left| \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \hat{p}_j} \right| + \left| \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \hat{p}_j} - \delta_{ij} \right| \right) \leq \exp [(4m^3 M + 1)t] - 1,$$

d'où

$$(42) \quad \sum_{i=1}^m \left(\left| \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \hat{p}_j} \right| + \left| \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \hat{p}_j} \right| \right) \leq \exp \left(\frac{4m^3 M + 1}{m^2 M} \right) = A.$$

Il vient en outre de (39) et (41)

$$(43) \quad \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \hat{p}_j} \right) \right| \leq (4m^3 M + 1)A,$$

ainsi que de (5), (14) et (36)

$$(44) \quad \left| \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t} \right| \leq 2mM.$$

V. Nous allons évaluer la somme

$$\sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \hat{p}_j} - t \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} \right)_{q_s=0} \right|.$$

Il résulte de (33) que

$$(45) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \hat{p}_j} - t \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} \right)_{q_s=0} \right] &= \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^m \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} \left[\frac{\partial \hat{x}_l}{\partial \hat{p}_j} - t \left(\frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial q_j} \right)_{q_s=0} \right] \hat{p}_k \\ &+ t \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^m \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} \hat{p}_k \left(\frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial q_j} \right)_{q_s=0} + \sum_{k=1}^{m-1} a_{ik} \frac{\partial \hat{p}_k}{\partial \hat{p}_j} - \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} \right)_{q_s=0}, \quad (i=1, 2, \dots, m-1), \\ &\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \hat{x}_m}{\partial \hat{p}_j} - t \left(\frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial q_j} \right)_{q_s=0} \right] = - \frac{\partial \hat{p}_m}{\partial \hat{p}_j} - \left(\frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial q_j} \right)_{q_s=0}. \end{aligned}$$

³ E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930, p. 151, Hilfssatz 3.

Posons

$$f_{ij}(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m) = \sum_{k=1}^{m-1} a_{ik} \frac{\partial \hat{p}_k}{\partial \hat{p}_j} - \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \right)_{q_s=0} \quad (i=1, 2, \dots, m-1),$$

$$f_{mj}(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m) = - \frac{\partial \hat{p}_m}{\partial \hat{p}_j} - \left(\frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial q_j} \right)_{q_s=0},$$

où, dans les $a_{ik}(x_1, \dots, x_m)$, nous avons substitué $x_j = \hat{x}_j(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m)$. D'après (14), (29), (30) et (36), il suit alors de (45)

$$(46) \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \hat{p}_j} - t \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} \right)_{q_s=0} \right] \right| \leq 2mM \sum_{l=1}^m \left| \frac{\partial \hat{x}_l}{\partial \hat{p}_j} - t \left(\frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial q_j} \right)_{q_s=0} \right| + 2m^2 M^2 t + |f_{ij}|$$

$$(i=1, 2, \dots, m-1),$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \hat{x}_m}{\partial \hat{p}_j} - t \left(\frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial q_j} \right)_{q_s=0} \right] \right| = |f_{mj}|.$$

Evaluons à présent $|f_{ij}|$. Nous avons

$$(47) \quad \frac{\partial f_{ij}}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^m \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} \frac{\partial \hat{x}_l}{\partial t} \frac{\partial \hat{p}_k}{\partial \hat{p}_j} + \sum_{k=1}^{m-1} a_{ik} \frac{\partial^2 \hat{p}_k}{\partial \hat{p}_j \partial t}$$

$$(i=1, 2, \dots, m-1),$$

$$\frac{\partial f_{mj}}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \hat{p}_m}{\partial \hat{p}_j \partial t}.$$

Il en résulte, en vertu de (14), (42), (43) et (44),

$$(48) \quad \left| \frac{\partial f_{ij}}{\partial t} \right| \leq 2m^2 M^2 A + M(4m^3 M + 1)A < 2(M+1)(4m^3 M + 1)A$$

$$(i=1, 2, \dots, m-1),$$

$$\left| \frac{\partial f_{mj}}{\partial t} \right| \leq (4m^3 M + 1)A < 2(M+1)(4m^3 M + 1)A.$$

D'autre part, en vertu de (8), (29), (30), (31) et (32),

$$(49) \quad (f_{ij})_{t=0} = 0. \quad (i, j=1, 2, \dots, m).$$

De (48) et (49), il vient donc

$$(50) \quad |f_{ij}| \leq 2(M+1)(4m^3 M + 1)At, \quad (i, j=1, 2, \dots, m).$$

Revenons maintenant aux inégalités (46). Nous en déduisons selon (50)

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \hat{x}_m}{\partial \hat{p}_j} - t \left(\frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial q_j} \right)_{q_s=0} \right] \right| \leq 2mM \sum_{l=1}^m \left| \frac{\partial \hat{x}_l}{\partial \hat{p}_j} - t \left(\frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial q_j} \right)_{q_s=0} \right|$$

$$+ 2t[m^2 M^2 + (M+1)(4m^3 M + 1)A] \quad (i=1, 2, \dots, m-1),$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \hat{x}_m}{\partial \hat{p}_j} - t \left(\frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial q_j} \right)_{q_s=0} \right] \right| \leq 2t(M+1)(4m^3 M + 1)A,$$

d'où

$$(51) \quad D_+ \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \hat{p}_j} - t \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} \right)_{q_s=0} \right| \leq 2m^2 M \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \hat{p}_j} - t \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} \right)_{q_s=0} \right| + 2m[m^2 M^2 + (M+1)(4m^3 M + 1)A]t.$$

Puisque

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \hat{p}_j} - t \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} \right)_{q_s=0} \Big|_{t=0} = 0,$$

nous en concluons

$$(52) \quad \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \hat{p}_j} - t \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} \right)_{q_s=0} \right| \leq \frac{m^2 M^2 + (M+1)(4m^3 M + 1)A}{2m^3 M^2} [\exp(2m^2 M t) - 1] - \frac{m^2 M^2 + (M+1)(4m^3 M + 1)A}{mM} t = \alpha(t),$$

car $\alpha(t)$ est l'intégrale de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = 2m^2 M y + 2m[m^2 M^2 + (M+1)(4m^3 M + 1)A]t,$$

qui s'annule pour $t=0$. Nous vérifions facilement que

$$(53) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t)}{t} = 0.$$

Puisque, en posant en particulier dans (52)

$$t = \sqrt{\sum_{i=1}^m q_i^2}, \quad \hat{p}_s = \frac{1}{t} q_s \quad \text{pour} \quad 0 < \sqrt{\sum_{i=1}^m q_i^2} < \delta_2,$$

nous avons, d'après (27),

$$(54) \quad \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} - \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} \right)_{q_s=0} \right| < \left(\frac{\alpha(t)}{t} \right)_{t=\sqrt{\sum_{i=1}^m q_i^2}},$$

il résulte de (53) que les dérivées $\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j}$ sont aussi continues au point $(0, \dots, 0)$.

Le résultat que nous venons de déduire permet de démontrer que les fonctions $\tilde{x}_i(q_1, \dots, q_{m-1})$ (cf. alinéa III) sont de la classe C^1 dans le voisinage

$$(55) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} q_i^2} < \frac{\delta_2}{\sqrt{N+1}}.$$

Pour

$$0 < \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} q_i^2} < \frac{\delta_2}{\sqrt{N+1}},$$

ceci est évident, et nous avons

$$(56) \quad \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_m} \frac{\sum_{k=1}^{m-1} a_{jk}(0) q_k}{\sqrt{\sum_{l,k=1}^{m-1} a_{lk}(0) q_l q_k}} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m-1).$$

En vertu de (14) et (15)

$$(57) \quad \left| \frac{\sum_{k=1}^{m-1} a_{jk}(0) q_k}{\sqrt{\sum_{l,k=1}^{m-1} a_{lk}(0) q_l q_k}} \right| \leq \frac{M\sqrt{m}}{\sqrt{Q}}.$$

Il en résulte, d'après (29), (30), (56) et en vertu de la continuité des $\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j}$, que

$$(58) \quad \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_j} \right)_{q_s=0} = \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} \right)_{q_s=0} = a_{ij}(0, \dots, 0) \quad (i, j = 1, 2, \dots, m-1).$$

VI. Pour évaluer le voisinage d'existence de la transformation inverse à la transformation (T) (cf. alinéa III), nous allons d'abord évaluer le jacobien de la transformation (T). Nous nous appuyerons sur le suivant

Lemme. Posons

$$\Delta = \text{Det} [a_{ik}(0, \dots, 0)]_{i,k=1,2,\dots,m-1}$$

et considérons la fonction à $(m-1)^2$ variables ε_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, m-1$):

$$F(\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{m-1, m-1}) = \text{Det} (a_{ik} + \varepsilon_{ik}).$$

Lorsque

$$(59) \quad |\varepsilon_{ik}| < B = \min [1, \frac{1}{2} Q^{m-1} (m-1)^{-2} (m-2)^{\frac{2-m}{2}} (M+1)^{2-m}],$$

nous avons

$$(60) \quad |F| > \frac{\Delta}{2}.$$

En effet, désignons par A_{ik} le mineur algébrique du déterminant F , correspondant à l'élément $a_{ik} + \varepsilon_{ik}$. Nous avons alors, en vertu de (14) et de (59), en appliquant le théorème de Hadamard au déterminant A_{ik} ,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ik}} \right| = |A_{ik}| \leq (m-2)^{\frac{m-2}{2}} (M+1)^{m-2},$$

et, par conséquent, puisque $F(0, \dots, 0) = \Delta$ et $|\varepsilon_{ik}| < B$,

$$\begin{aligned} \left| |F| - |\Delta| \right| &\leq |F - \Delta| \leq \sum_{i,k=1}^{m-1} \left| \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ik}} \right| \cdot |\varepsilon_{ik}| \\ &< (m-1)^2 (m-2)^{\frac{m-2}{2}} (M+1)^{m-2} B \leq \frac{1}{2} Q^{m-1}. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\left| |F| - |\Delta| \right| < \frac{\Delta}{2}$$

puisque, d'après (15), $\Delta > Q^{m-1}$, d'où (60).

Passons maintenant à l'évaluation du jacobien de la transformation (T) (cf. alinéa III)

$$(61) \quad \Delta(q_1, \dots, q_{m-1}) = \text{Det} \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_j} \right) = \text{Det} \left[a_{ij}(0, \dots, 0) + \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_j} - a_{ij}(0, \dots, 0) \right) \right].$$

Nous avons, selon (58), $\Delta = \Delta(0, \dots, 0)$. Pour pouvoir appliquer le Lemme au déterminant (61), il suffit d'évaluer le voisinage du point $(0, \dots, 0)$ dans l'espace (q_1, \dots, q_{m-1}) , dans lequel on ait

$$(62) \quad \left| \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_j} - a_{ij}(0, \dots, 0) \right| < B \quad (i, j = 1, 2, \dots, m-1).$$

En vertu de (54) (56) et (57), nous avons dans le voisinage (55),

$$(63) \quad \left| \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_j} - a_{ij}(0, \dots, 0) \right| \leq \left(1 + \frac{M\sqrt{m}}{\sqrt{Q}} \right) \left[\frac{\alpha(t)}{t} \right]_t = \sqrt{\sum_{l=1}^{m-1} q_l^2 + \sum_{l,k=1}^{m-1} a_{lk}^{(0)} q_l q_k}.$$

Nous vérifions sans difficulté que, pour $t \geq 0$,

$$(64) \quad \left| \frac{\alpha(t)}{t} \right| \leq \frac{m^2 M^2 + (M+1)(4m^3 M + 1)A}{mM} [\exp(2m^2 Mt) - 1]^4.$$

Il en résulte, selon (63), en posant

$$C = \frac{m^2 M^2 + (M+1)(4m^3 M + 1)A}{mM} \left(1 + \frac{M\sqrt{m}}{\sqrt{Q}} \right),$$

que

$$(65) \quad \left| \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_j} - a_{ij}(0, \dots, 0) \right| \leq C [\exp(2m^2 Mt) - 1]_t = \sqrt{\sum_{l=1}^{m-1} q_l^2 + \sum_{l,k=1}^{m-1} a_{lk}^{(0)} q_l q_k}$$

dans le voisinage (55).

⁴⁾ Ceci résulte de l'inégalité $\frac{b \exp at - 1}{a^2} - \frac{b}{a} < \frac{b}{a} (\exp at - 1)$, lorsque nous posons $a = 2m^2 M$, $b = 2m[m^2 M^2 + (M+1)(4m^3 M + 1)A]$.

Nous en concluons que les inégalités (62) sont vérifiées pour

$$0 \leq t < \frac{1}{2m^2 M} \ln \frac{B+C}{C},$$

c'est-à-dire, selon (15), dans le voisinage

$$(66) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} q_i^2} < \delta_3 = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \min \left(\delta_2, \frac{1}{2m^2 M} \ln \frac{B+C}{C} \right).$$

En vertu du Lemme, nous avons donc, dans le voisinage (66),

$$(67) \quad \left| \text{Det} \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_j} \right) \right| = |\Delta(q_1, \dots, q_{m-1})| > \frac{\Delta}{2}.$$

D'après (14) et (62), il vient en outre dans le même voisinage

$$(68) \quad \left| \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_j} \right| < B + M \quad (i, j = 1, 2, \dots, m-1).$$

Les inégalités (67) et (68) nous permettent d'évaluer les allongements supérieur et inférieur ⁵⁾ de la transformation (T). Nous avons, en effet ⁵⁾,

$$\begin{aligned} \overline{\text{all}}(\bar{x}; q_1, \dots, q_{m-1}) &\leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m-1} \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_j} \right)^2}, \\ \underline{\text{all}}(\bar{x}; q_1, \dots, q_{m-1}) &\geq \left| \text{Det} \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_j} \right) \right| \cdot \left(\sqrt{\sum_{i,j=1}^{m-1} \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_j} \right)^2} \right)^{2-m}, \end{aligned}$$

donc, d'après (68),

$$(69) \quad \overline{\text{all}}(\bar{x}; q_1, \dots, q_{m-1}) \leq (m-1)(B+M),$$

et, en vertu de (67) et (68),

$$\underline{\text{all}}(\bar{x}; q_1, \dots, q_{m-1}) > \frac{\Delta}{2} [(m-1)(B+M)]^{2-m},$$

d'où

$$(70) \quad \underline{\text{all}}(\bar{x}; q_1, \dots, q_{m-1}) > \frac{Q^{m-1}}{2} [(m-1)(B+M)]^{2-m}$$

puisque, d'après (15), $\Delta > Q^{m-1}$. Les inégalités (69) et (70) sont valables dans le voisinage (66).

⁵⁾ T. Wazewski, *Sur l'évaluation du domaine d'existence des fonctions implicites réelles ou complexes*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 20 (1947), p. 89.

VII. Les inégalités (69) et (70) impliquent la conclusion suivante ⁶⁾:

a) La transformation (T) est univalente dans le voisinage

$$(71) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} q_i^2} < \frac{1}{2} \delta_3 Q^{m-1} [(m-1)(B+M)]^{1-m},$$

c'est-à-dire que deux points $(x_1^1, \dots, x_{m-1}^1), (x_1^2, \dots, x_{m-1}^2)$, correspondant à deux points différents $(q_1^1, \dots, q_{m-1}^1), (q_1^2, \dots, q_{m-1}^2)$ et appartenant au voisinage (71), sont différents.

b) La transformation inverse (T⁻¹) est définie dans le voisinage

$$(72) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} x_i^2} < \delta = \frac{1}{4} \delta_3 Q^{2m-2} [(m-1)(B+M)]^{3-2m}$$

et y est de la classe C¹.

Il en résulte, en vertu des considérations antérieures (cf. alinéa III) qu'à tout point (x_1, \dots, x_{m-1}) du voisinage (72), différent de $(0, \dots, 0)$, vient correspondre un système unique (V) (cf. Introduction) vérifiant les relations (R) et (J), à savoir

$$(73) \quad t(x_1, \dots, x_{m-1}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m-1} \bar{q}_k^2 + \sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik}(0) \bar{q}_i \bar{q}_k}, \quad \bar{p}_i(x_1, \dots, x_{m-1}) = \frac{1}{t} \bar{q}_i$$

$$(i = 1, 2, \dots, m-1),$$

$$\bar{p}_m(x_1, \dots, x_{m-1}) = -\frac{1}{t} \sqrt{\sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik}(0) \bar{q}_i \bar{q}_k}.$$

Par conséquent, l'équation du conoïde direct a la forme (cf. Introduction)

$$(74) \quad x_m = \hat{x}_m [t(x_1, \dots, x_{m-1}), \bar{p}_1(x_1, \dots, x_{m-1}), \dots, \bar{p}_m(x_1, \dots, x_{m-1})] = \varphi(x_1, \dots, x_{m-1})$$

dans le voisinage (72) et la fonction $\varphi(x_1, \dots, x_{m-1})$ est de la classe C¹ en tout point de ce voisinage, différent de $(0, \dots, 0)$. Nous avons ainsi démontré le suivant

Théorème 1. Dans les hypothèses sur les coefficients a_{ik} , introduites au début, l'équation du conoïde direct a la forme

$$x_m = \varphi(x_1, \dots, x_{m-1})$$

dans le voisinage

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} x_i^2} < \delta,$$

⁶⁾ Cf. ⁵⁾ Théorème 4, p. 116.

où la constante δ est définie successivement par les relations

$$\delta_1 = \frac{2 - 2 \exp\left(\frac{-MmR}{2(M+1)}\right)}{m^2 M}, \quad \delta_2 = \min\left(\delta_1, \frac{1}{m^2 M}\right),$$

$$A = \exp\left(\frac{4m^3 M + 1}{m^2 M}\right),$$

$$B = \min\left[1, \frac{1}{2} Q^{m-1} (m-1)^{-2} (m-2)^{\frac{2-m}{2}} (M+1)^{2-m}\right],$$

$$C = \frac{m^2 M^2 + (M+1)(4m^3 M + 1)A}{mM} \left(1 + \frac{M\sqrt{m}}{\sqrt{Q}}\right),$$

$$\delta_3 = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \min\left(\delta_2, \frac{1}{2m^2 M} \ln \frac{B+C}{C}\right),$$

$$\delta = \frac{1}{4} \delta_3 Q^{2m-2} [(m-1)(B+M)]^{3-2m}.$$

La fonction $\varphi(x_1, \dots, x_{m-1})$ est de la classe C^1 à l'exception du point $(0, \dots, 0)$.

Remarque 1. L'essentiel du Théorème 1 consiste en ce que la constante δ est indépendante de la forme particulière des coefficients a_{ik} et ne dépend que des constantes R, M, N, Q, m .

Remarque 2. Il est aisé de voir que si les coefficients a_{ik} étaient supposés être de la classe C^{n+1} , la fonction $\varphi(x_1, \dots, x_{m-1})$ serait de la classe C^n à l'exception du point $(0, \dots, 0)$.

VII. Passons maintenant à l'évaluation de la hauteur du conoïde direct. Pour mettre en évidence de quoi il s'agit, remarquons d'abord que, pour la transformation (T^{-1}) , nous avons, en vertu de (69) ⁷⁾,

$$\underline{\text{all}}(\bar{q}; x_1, \dots, x_{m-1}) = [\overline{\text{all}}(\bar{x}; q_1, \dots, q_{m-1})]^{-1} \geq [(m-1)(B+M)]^{-1}$$

dans le voisinage (72). Par conséquent, l'image du voisinage (72) par l'intermédiaire de la transformation (T^{-1}) contient le voisinage ⁸⁾

$$(75) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} q_i^2} < \delta [(m-1)(B+M)]^{-1}.$$

Les portions des bicaractéristiques correspondant à ces valeurs de q_i , c'est-à-dire les portions qui ont servi à la construction de la surface (74), existent donc au moins dans l'intervalle

$$(76) \quad 0 \leq t < \delta_4 = \delta [(m-1)(B+M)]^{-1} \sqrt{1+Q}$$

puisque, d'après (15),

$$t = \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} q_i^2 + \sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik}(0) q_i q_k} \geq \sqrt{1+Q} \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} q_i^2}.$$

⁷⁾ Cf. ⁵⁾, p. 92.

⁸⁾ Cf. ⁶⁾, p. 113, Théorème 3.

Il s'agit maintenant d'évaluer une constante $h > 0$ telle que

$$(77) \quad \text{borne sup } \hat{x}_m(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m) \geq h \\ 0 \leq t < \delta_4$$

pour toute bicaractéristique.

Nous savons dans la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre, que pour toute intégrale (7) du système (5) et (6), dont les valeurs initiales $(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m)$ satisfont à (12), nous avons

$$(78) \quad \hat{p}_m(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m) = - \sqrt{\sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m) \hat{p}_i \hat{p}_k}$$

dans l'intervalle, où cette intégrale est définie et $\sum_{i=1}^{m-1} \hat{p}_i^2 > 0$. Par conséquent, d'après (5)

$$(79) \quad \frac{\partial}{\partial t} \hat{x}_m(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m) = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m) \hat{p}_i \hat{p}_k}$$

Nous allons maintenant évaluer d'en bas le second membre de (79). Remarquons à cet effet, qu'en vertu de (16)

$$\left| D_+ \left(\sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2} - 1 \right) \right| \leq \frac{1}{2} m^2 M \left[\left(\sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2} - 1 \right) + 1 \right]^2,$$

et, par conséquent,

$$(80) \quad D_+ \left| \sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2} - 1 \right| \leq \frac{1}{2} m^2 M \left(\left| \sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2} - 1 \right| + 1 \right)^2$$

dans l'intervalle (23). D'autre part, d'après (8) et (13),

$$(81) \quad \left| \sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2} - 1 \right|_{t=0} = 0.$$

Il résulte de (80) et (81) que

$$(82) \quad \left| \sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2} - 1 \right| \leq \frac{M m^2 t}{2 - M m^2 t}$$

dans l'intervalle (23) puisque l'intégrale de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} m^2 M (y + 1)^2,$$

telle que $y(0) = 0$, à la forme

$$y(t) = \frac{M m^2 t}{2 - M m^2 t}.$$

Nous déduisons de (82) l'inégalité

$$\left| \sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$$

dans l'intervalle

$$(83) \quad 0 \leq t < \min \left(\delta_1, \frac{2}{3m^2 M} \right),$$

d'où

$$(84) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i^2} \geq \frac{1}{2}$$

dans l'intervalle (83). En particulier, lorsque les valeurs initiales \hat{p}_i satisfont à (12), nous avons, d'après (15), (78) et (84),

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} \hat{p}_i^2 + \sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m) \hat{p}_i \hat{p}_k} \leq \sqrt{1+N} \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} \hat{p}_i^2},$$

d'où

$$(85) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} \hat{p}_i^2} \geq \frac{1}{2\sqrt{N+1}}$$

dans l'intervalle (83). Les relations (79) et (85) impliquent, selon (15), l'inégalité

$$\frac{\partial \hat{x}_m}{\partial t} \geq \sqrt{Q} \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} \hat{p}_i^2} \geq \frac{\sqrt{Q}}{2\sqrt{N+1}},$$

d'où

$$(86) \quad \hat{x}_m(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m) \geq \frac{\sqrt{Q} t}{2\sqrt{N+1}}$$

dans l'intervalle (83), puisque $\hat{x}_m(0, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m) = 0$. En posant

$$\delta^* = \min \left(\delta_1, \delta_4, \frac{2}{3m^2 M} \right),$$

il suit de (86)

$$\hat{x}_m(\delta^* - \varepsilon, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m) \geq \frac{\sqrt{Q}(\delta^* - \varepsilon)}{2\sqrt{N+1}},$$

d'où, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire,

$$\text{borne sup}_{0 \leq t < \delta_4} \hat{x}_m(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m) \geq \frac{\sqrt{Q} \delta^*}{2\sqrt{N+1}} = \hbar$$

pour toute bicaractéristique. Nous avons ainsi démontré le suivant

Théorème 2. Pour les portions des bicaractéristiques qui engendrent le conoïde caractéristique direct, nous avons

$$\text{borne sup}_{0 < t} \hat{x}_m(t, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m) \geq h,$$

où la constante $h > 0$ est définie successivement par les relations

$$\delta_4 = \delta \sqrt{1 + Q} [(m-1)(B+M)]^{-1}, \quad \delta^* = \min \left(\delta_1, \delta_4, \frac{2}{3m^2 M} \right),$$

$$h = \frac{\sqrt{Q} \delta^*}{2\sqrt{N+1}}.$$

Remarque 3. Le Théorème 2 nous informe sur la hauteur du conoïde, calculée à partir du plan $x_m = 0$. Cette hauteur est supérieure à la constante h .

Remarque 4. La constante h est indépendante de la forme particulière des coefficients a_{ik} et ne dépend que des constantes R, M, N, Q, m .

VIII. Les Théorèmes 1 et 2 ont été énoncés pour l'équation hyperbolique de la forme spéciale (1). Considérons maintenant l'équation normale du type hyperbolique dans le cas général, c'est-à-dire l'équation

$$(87) \quad \sum_{i,k=1}^m a_{ik}(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (a_{ik} = a_{ki}),$$

où la forme caractéristique

$$(88) \quad \sum_{i,k=1}^m a_{ik}(x_1, \dots, x_m) \lambda_i \lambda_k$$

a $m-1$ racines caractéristiques positives et une négative pour tout point (x_1, \dots, x_m) en lequel l'équation est définie.

Supposons que les coefficients a_{ik} soient de la classe C^3 dans le voisinage

$$(89) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - \hat{x}_i)^2} < \bar{R},$$

et que nous ayons dans ce voisinage

$$(90) \quad |a_{ik}|, \left| \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} \right|, \left| \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} \right|, \left| \frac{\partial^3 a_{ik}}{\partial x_j \partial x_l \partial x_r} \right| < \bar{M} \quad (i, k = 1, \dots, m).$$

Admettons enfin que, pour tout point (x_1, \dots, x_m) appartenant au voisinage (89), soit satisfaite la suivante hypothèse:

Hypothèse (H). Toutes les racines caractéristiques positives de la forme (88) sont supérieures au nombre $\bar{Q} > 0$ et inférieures au nombre $\bar{N} > 0$, tandis que la racine négative est inférieure au nombre $-a$, où $a > 0$.

Nous démontrerons qu'à l'aide d'une transformation des variables indépendantes, non-singulière, l'équation (87) peut être mise sous la forme spéciale (1) dans un voisinage du point $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$. Nous allons évaluer en même temps ce voisinage ainsi que les constantes M, N, Q (cf. Hypothèses sur les coefficients a_{ik}) pour l'équation transformée de manière que les Théorèmes 1 et 2 puissent être appliqués dans le cas général.

Il existe une transformation orthogonale à coefficients constants

$$(T_1) \quad x'_i = \sum_{k=1}^m a_{ik} (x_k - \bar{x}_k) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

par laquelle l'équation (87) prend la forme

$$(91) \quad \sum_{i,k=1}^m a'_{ik} (x'_1, \dots, x'_m) \frac{\partial^2 u}{\partial x'_i \partial x'_k} = 0,$$

de façon que la forme caractéristique

$$(92) \quad \sum_{i,k=1}^m a'_{ik} (x'_1, \dots, x'_m) \lambda'_i \lambda'_k$$

se réduise pour $(x'_1, \dots, x'_m) = (0, \dots, 0)$ à une combinaison linéaire des carrés $\lambda'_i{}^2$, les coefficients de $\lambda'_1{}^2, \dots, \lambda'_{m-1}{}^2$ étant les racines caractéristiques positives et celui de $\lambda'_m{}^2$ étant la racine négative. Ceci résulte du théorème sur la réduction des formes quadratiques à la forme canonique. Les racines caractéristiques étant invariantes par rapport aux transformations orthogonales, nous avons donc en particulier, en vertu de l'hypothèse (H),

$$(93) \quad a'_{mm}(0, \dots, 0) < -a.$$

Les nouveaux coefficients a'_{ik} s'obtiennent des coefficients a_{pq} de la façon suivante

$$(94) \quad a'_{ik} (x'_1, \dots, x'_m) = \sum_{p,q=1}^m a_{ip} a_{kq} a_{pq} (x_1, \dots, x_m)_{(T_1^{-1})}.$$

La transformation (T_1) étant orthogonale, il en résulte que les coefficients a'_{ik} satisfont aux inégalités

$$(95) \quad |a'_{ik}|, \left| \frac{\partial a'_{ik}}{\partial x'_j} \right|, \left| \frac{\partial^2 a'_{ik}}{\partial x'_j \partial x'_l} \right|, \left| \frac{\partial^3 a'_{ik}}{\partial x'_j \partial x'_l \partial x'_r} \right| < m^5 \bar{M} \quad (i, k, = 1, 2, \dots, m)$$

dans le voisinage

$$(96) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i{}^2} < \bar{R}.$$

Les racines caractéristiques de la forme (92), identiques à celles de la forme (88), satisfont à l'hypothèse (H) dans le voisinage (96). D'après (93) et (95), nous avons

$$(97) \quad a'_{mm}(x'_1, \dots, x'_m) < -\frac{a}{2}$$

dans le voisinage

$$(98) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i'^2} < R' = \min\left(\bar{R}, \frac{a}{2m^6 \bar{M}}\right).$$

Introduisons à présent une nouvelle transformation des variables indépendantes

$$(T_2) \quad \bar{x}_i = \varphi_i(x'_1, \dots, x'_m) \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

L'équation (91) prendra alors la forme

$$(99) \quad \sum_{i,k=1}^m \bar{a}_{ik}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_k} + \sum_{j=1}^m \bar{b}_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_j} = 0,$$

où

$$(100) \quad \bar{a}_{ik}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) = \left[\sum_{p,q=1}^m a'_{pq}(x'_1, \dots, x'_m) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x'_p} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x'_q} \right]_{(T_2^{-1})};$$

les \bar{b}_j sont faciles à calculer et n'interviennent pas en outre dans la construction du conoïde. Nous allons choisir la transformation (T_2) de manière que la première somme dans l'équation (99) prenne la forme du premier membre de l'équation (1) au voisinage du point $(0, \dots, 0)$. Posons à cet effet

$$(101) \quad \varphi_m(x'_1, \dots, x'_m) = x'_m.$$

Nous aurons alors, selon (100),

$$\bar{a}_{mm}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)_{(T_2)} = a'_{mm}(x'_1, \dots, x'_m),$$

donc, d'après (97),

$$(102) \quad \bar{a}_{mm}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)_{(T_2)} < -\frac{a}{2}$$

dans le voisinage (98). Nous exigeons avoir ensuite

$$\bar{a}_{im}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m-1),$$

c'est-à-dire, selon (100), que les fonctions φ_i , $(i=1, 2, \dots, m-1)$, soient choisies de façon à satisfaire à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\sum_{p=1}^m a'_{pm}(x'_1, \dots, x'_m) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x'_p} = 0$$

ou, ce qui revient au même, selon (97), à l'équation

$$(103) \quad \frac{\partial z}{\partial x'_m} = - \sum_{p=1}^{m-1} \frac{a'_{pm}}{a'_{min}} \frac{\partial z}{\partial x'_p}.$$

Posons

$$c_p(x'_1, \dots, x'_m) = \frac{a'_{pm}}{a'_{min}} \quad (p=1, 2, \dots, m-1).$$

Nous avons alors, d'après (95) et (97),

$$(104) \quad \left| c_p \right| < \frac{2m^5 \bar{M}}{a}, \quad \left| \frac{\partial c_p}{\partial x'_j} \right| < \frac{8m^{10} \bar{M}^2}{a^2}, \quad \left| \frac{\partial^2 c_p}{\partial x'_j \partial x'_k} \right| < \frac{64m^{15} \bar{M}^3}{a^3},$$

$$\left| \frac{\partial^3 c_p}{\partial x'_j \partial x'_k \partial x'_l} \right| < \frac{576m^{20} \bar{M}^4}{a^4}$$

dans le voisinage (98). Désignons par

$$x'_p = \psi_p(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_{m-1}) \quad (p=1, 2, \dots, m-1)$$

l'intégrale du système d'équations différentielles ordinaires

$$(105) \quad \frac{dx'_p}{dx} = c_p(x'_1, \dots, x'_{m-1}, x) \quad (p=1, 2, \dots, m-1),$$

déterminée par les valeurs initiales

$$\psi_p(\xi, \xi, \eta_1, \dots, \eta_{m-1}) = \eta_p \quad (p=1, 2, \dots, m-1).$$

Il est aisé de voir, en vertu de (104), que toute intégrale du système (105), issue d'un point $\xi = x'_m$, $\eta_p = x'_p$, ($p=1, 2, \dots, m-1$) appartenant au voisinage

$$(106) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i'^2} < R'' = \frac{1}{2} R' \left[\sqrt{(m-1) \frac{4m^{10} \bar{M}^2}{a^2} + 1} + 1 \right]^{-1},$$

existe pour $x=R''$. Il en résulte que les fonctions

$$(107) \quad \varphi_p(x'_1, \dots, x'_m) = \psi_p(R'', x'_m, x'_1, \dots, x'_{m-1}) - \psi_p(R'', 0, \dots, 0) \quad (p=1, 2, \dots, m-1)$$

sont définies dans le voisinage (106). Les fonctions c_p étant de la classe C^3 , les fonctions φ_p le sont aussi et satisfont à l'équation (103)⁹). Le jacobien

$$(108) \quad \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1})}{D(x'_1, \dots, x'_{m-1})}$$

⁹) E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930, p. 155^a Satz 1.

est différent de zéro. La transformation (T_2) , avec φ_p , ($p=1, 2, \dots, m-1$) définies par (107) et $\varphi_m = x'_m$, est donc de la classe C^3 dans le voisinage (106); son jacobien (égal à (108)) est différent de zéro et la première somme dans l'équation (99) devient

$$(109) \quad \sum_{i,k=1}^{m-1} \bar{a}_{ik}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_k} + \bar{a}_{mm}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_m^2},$$

où la forme caractéristique

$$(110) \quad \sum_{i,k=1}^{m-1} \bar{a}_{ik}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_k$$

est positive, définie, et $\bar{a}_{mm} < 0$, les signes des racines caractéristiques d'une forme quadratique étant invariants par rapport aux transformations affines.

Il s'agit maintenant d'évaluer:

1° le voisinage dans lequel les coefficients \bar{a}_{ik} existent,

2° les modules des coefficients \bar{a}_{ik} et de leurs dérivées du premier et du second ordre,

3° les valeurs maxima et minima de la forme (110) sur la sphère

$$\text{unitaire } \sum_{i=1}^{m-1} \bar{\lambda}_i^2 = 1.$$

Ad 1°. D'après (100), il faut évaluer le voisinage de l'existence de la transformation (T_2^{-1}) . Les fonctions φ_p satisfaisant au système (105), nous avons, selon (104), en appliquant la méthode des inégalités différentielles

$$(111) \quad \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x'_j} \right|, \left| \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x'_j \partial x'_k} \right|, \left| \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial x'_j \partial x'_k \partial x'_l} \right| < D$$

dans le voisinage (106), où

$$D = 3072 m^{29} (3 + 17m + 24m^2) \frac{\bar{M}^5}{a^5} \exp \left[16 m^{11} (3 + m + m^2) \frac{\bar{M}^2}{a^2} R'' \right] + 1.$$

D'après un théorème bien connu ¹⁰⁾, nous avons, dans le voisinage (106),

$$\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1})}{D(x'_1, \dots, x'_{m-1})} = \exp \left[\int_{x'_m}^{R''} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial c_k}{\partial x'_k} dx \right],$$

donc, selon (104),

$$(112) \quad \left| \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1})}{D(x'_1, \dots, x'_{m-1})} \right| > E$$

¹⁰⁾ E. Kamke, loc. cit.

dans le voisinage (106), où

$$E = \exp \left[-16R''(m-1)m^{10} \frac{\bar{M}^2}{a^2} \right].$$

Puisque le jacobien J de la transformation (T_2) est égal à (108), nous avons, selon (112),

$$(113) \quad |J| > E$$

dans le voisinage (106). En vertu de (111) et (113), nous avons ¹¹⁾

$$(114) \quad \overline{\text{all}} (\varphi; x'_1, \dots, x'_m) \leq mD,$$

$$(115) \quad \underline{\text{all}} (\varphi; x'_1, \dots, x'_m) \geq E(mD)^{2-m}$$

et, selon (107),

$$\varphi_p(0, \dots, 0) = 0 \quad (p=1, 2, \dots, m).$$

Il en résulte que la transformation (T_2^{-1}) est définie dans le voisinage

$$(116) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^m \bar{x}_i^2} < R''E(mD)^{2-m}.$$

Ad 2°. En désignant par

$$(T_2^{-1}) \quad x'_i = \chi_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

la transformation (T_2^{-1}) , nous avons, dans le voisinage (116), en vertu de (111) et (113),

$$(117) \quad \left| \frac{\partial \chi_i}{\partial \bar{x}_j} \right|, \left| \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial \bar{x}_j \partial \bar{x}_l} \right| < F,$$

où

$$F = m^{2m+1} D^{3m-2} E^{-3}.$$

D'après (95), (100), (111) et (117), nous avons, comme il est facile de voir,

$$(118) \quad \left| \bar{a}_{ik} \right|, \left| \frac{\partial \bar{a}_{ik}}{\partial \bar{x}_j} \right|, \left| \frac{\partial^2 \bar{a}_{ik}}{\partial \bar{x}_j \partial \bar{x}_l} \right| < G$$

dans le voisinage (116), où

$$G = 12m^9 \bar{M} D^2 (F+1)^2.$$

Ad 3°. En vertu de (100), la forme quadratique

$$(119) \quad \sum_{i,k=1}^{m-1} \bar{a}_{ik}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_k + \bar{a}_{mm}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \bar{\lambda}_m^2$$

¹¹⁾ Cf. 5).

est l'image de la forme (92) par l'intermédiaire de la transformation linéaire

$$(120) \quad \lambda'_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \bar{\lambda}_j \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

Nous voyons aisément que, pour l'allongement supérieur de la transformation (120), la limitation (114) a lieu. En désignant par $\bar{s}_1 \leq \bar{s}_2 \leq \dots \leq \bar{s}_m$ les racines caractéristiques de la forme (119), nous avons donc (en vertu de l'hypothèse (H), des propriétés extrémales des racines caractéristiques et selon (118)) les inégalités

$$(121) \quad |\bar{s}_1| = |\bar{a}_{mm}| < G, \quad 0 < \bar{s}_i < \bar{N}m^2D^2 \quad (i=2, 3, \dots, m),$$

d'où, en particulier,

$$(122) \quad \bar{s}_m = \max_{i,k=1}^{m-1} \bar{a}_{ik} \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_k < \bar{N}m^2D^2 \quad \text{sur la sphère} \quad \sum_{i=1}^{m-1} \bar{\lambda}_i^2 = 1.$$

Désignons par Δ et $\bar{\Delta}$ respectivement les déterminants des formes (92) et (119). Le déterminant de la transformation (120) étant égal au jacobien J , nous avons

$$|\bar{s}_1| \cdot \bar{s}_2 \dots \bar{s}_m = |\bar{\Delta}| = |I|^2 \cdot |\Delta|,$$

et puisque, d'après l'hypothèse (H),

$$|\Delta| > a\bar{Q}^{m-1},$$

il vient, en vertu de (113),

$$(123) \quad |\bar{s}_1| \cdot \bar{s}_2 \dots \bar{s}_m > E^2 a \bar{Q}^{m-1}.$$

Selon (121) et (123)

$$s_2 > E^2 a \bar{Q}^{m-1} G^{-1} (\bar{N}m^2D^2)^{2-m},$$

donc

$$(124) \quad s_2 = \min_{i,k=1}^{m-1} \bar{a}_{ik} \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_k > E^2 a \bar{Q}^{m-1} G^{-1} (\bar{N}m^2D^2)^{2-m}$$

sur la sphère $\sum_{i=1}^{m-1} \bar{\lambda}_i^2 = 1.$

En divisant (109) par $-\bar{a}_{mm} (> 0)$ et en posant

$$\tilde{a}_{ik} = -\frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{a}_{mm}} \quad (i, k=1, 2, \dots, m-1),$$

nous avons l'équation de la forme (1) à laquelle s'appliquent, en vertu de (102), (116), (118), (122) et (124), les Théorèmes 1 et 2 avec

$$M = \frac{64 G^3}{a^3}, \quad R = R'' E (mD)^{2-m}, \quad N = \frac{2\bar{N} m^2 D^2}{a},$$

$$Q = E^2 a \bar{Q}^{m-1} G^{-2} (\bar{N} m^2 D^2)^{2-m},$$

où

$$R' = \min \left(\bar{R}, \frac{a}{2m^6 \bar{M}} \right), \quad R'' = \frac{1}{2} R' \left(\sqrt{(m-1) \frac{4m^{10} \bar{M}^2}{a^2} + 1} + 1 \right)^{-1},$$

$$D = 3072 m^{29} (3 + 17m + 24m^2) \frac{\bar{M}^5}{a^5} \exp \left[16 m^{11} (3 + m + m^2) \frac{\bar{M}^2}{a^2} R'' \right] + 1,$$

$$E = \exp \left[-16 R'' (m-1) m^{10} \frac{\bar{M}^2}{a^2} \right], \quad F = m^{2m+1} D^{3m-2} E^{-3},$$

$$G = 12 m^9 \bar{M} D^2 (F + 1)^2.$$

Remarque 5. En vertu de (101) et (T₁), les plans $\bar{x}_m = \text{const}$ se transforment par l'intermédiaire de la transformation T₁T₂ en les plans

$\sum_{k=1}^m \alpha_{mk} x_k = \text{const}$. Il en résulte que le Théorème 2 donne l'évaluation de

la hauteur du conoïde caractéristique de l'équation (87) en direction ortho-

gonale aux plans $\sum_{k=1}^m \alpha_{mk} x_k = \text{const}$, à partir du plan $\sum_{k=1}^m \alpha_{mk} (x_k - \bar{x}_k) = 0$.

SUR LES OBJETS GÉOMÉTRIQUES DE LA CLASSE ZÉRO QUI ADMETTENT UNE ALGÈBRE

Par H. PIDEK (Kraków)

Introduction

Considérons l'espace à une dimension X_1 ; nous y envisagerons des objets géométriques spéciaux de la classe zéro¹⁾ à une composante. L'ensemble de tels objets sera désigné brièvement par K .

Les règles de transformations des objets du type K ont été étudiées par S. Gołąb dans: „Sur les objets géométriques non différentiels“ (*Bull. de l'Acad. Pol. de Sc.* 1949). Désignons notamment par ξ et $\bar{\xi}$ les coordonnées, dans deux systèmes quelconques B et \bar{B} , du point courant \bar{E} et soit en \bar{E} un objet géométrique du type K . S. Gołąb montra que, pour que x et \bar{x} soient les composantes de cet objet dans les systèmes B et \bar{B} , il faut et il suffit qu'entre ces composantes existe la relation de transformation:

$$(0.1) \quad \bar{x} = q[Q(x, \xi), \bar{\xi}]$$

où $Q(x, \xi)$ est une fonction arbitraire ayant les propriétés suivantes: a) $Q(x, \xi)$ est déterminée pour $-\infty < \xi < \infty$ (puisque ξ , comme coordonnée, peut prendre toutes les valeurs possibles) et pour x d'un intervalle (a, b) (fini ou infini) déterminant le champ de variation de la composante de l'objet; b) $Q(x, \xi)$ doit être inversible par rapport à la première variable dans tout son champ de variation.

Si l'on désigne par $q(\zeta, \xi)$ la fonction inverse à $Q(x, \xi)$, les équations

$$(0.2) \quad \begin{aligned} \zeta &= Q(x, \xi) \\ x &= q(\zeta, \xi) \end{aligned}$$

seront équivalentes et l'on aura l'identité

$$(0.3) \quad q[Q(x, \xi), \xi] = x.$$

¹⁾ Suivant la terminologie introduite par MM. Schouten et Haantjes dans le travail *On the theory of the geometric objects* (Proc. Lond. Mathem. Soc. 42 (1937), 356-376), on appelle *objet géométrique spécial de la classe zéro* tout objet dont la règle de transformation s'exprime par des fonctions qui ne dépendent pas des dérivées des fonctions transformant les coordonnées.

Définissons

$$(0.4) \quad a(x, \xi, \bar{\xi}) \stackrel{\text{df}}{=} q[Q(x, \xi), \bar{\xi}].$$

La fonction $a(x, \xi, \bar{\xi})$ — comme on le voit d'après la formule (0.1) — donne directement la règle de transformation de l'objet étudié.

Les mêmes objets, c'est-à-dire ceux qui ont la même règle de transformation, peuvent provenir de deux fonctions différentes Q . C'est donc la fonction $a(x, \xi, \bar{\xi})$ qui décide de l'objet et non la fonction $Q(x, \xi)$. Nous allons démontrer, à cet effet, la proposition suivante:

Proposition 0.1. Si la règle de transformation d'un objet géométrique du type K est donnée à l'aide d'une fonction $Q_0(x, \xi)$, à cet objet conduisent toutes les fonctions $Q(x, \xi)$ (et seulement ces fonctions) qui peuvent être écrites sous la forme

$$(0.5) \quad Q(x, \xi) = \Omega\{Q_0(x, \xi)\},$$

où Ω est une fonction inversible quelconque d'une variable.

Démonstration. Supposons que la fonction Q puisse être écrite sous la forme (0.5). Alors, en résolvant par rapport à x l'équation $\zeta = Q(x, \xi)$, on a, en vertu des relations (0.2),

$$q(\zeta, \xi) = q_0\{\Omega^{-1}(\zeta), \xi\},$$

où le symbole Ω^{-1} désigne la fonction inverse à Ω . De là

$$q[Q(x, \xi), \bar{\xi}] = q_0[Q_0(x, \xi), \bar{\xi}],$$

ce qui signifie qu'à toutes les fonctions $Q(x, \xi)$ de la forme (0.5) correspond une même fonction $a(x, \xi, \bar{\xi})$.

Supposons maintenant que les fonctions $P(x, \xi)$ et $Q_0(x, \xi)$ correspondent à une même fonction $a(x, \xi, \bar{\xi})$. Elles vérifient donc la relation

$$p[P(x, \xi), \bar{\xi}] = q_0[Q_0(x, \xi), \bar{\xi}]$$

pour tous les $\xi, \bar{\xi}$ et pour tout x de l'intervalle (a, b) . Cette relation peut être mise sous la forme

$$P\{q_0[Q_0(x, \xi), \bar{\xi}], \bar{\xi}\} = P(x, \xi).$$

En y posant $x = x_0$, $\bar{\xi} = \xi_0$, $\xi = \xi$ (où $x_0 \in (a, b)$ et ξ_0 est arbitraire), on a

$$P\{q_0[Q_0(x_0, \xi_0), \xi], \xi\} = P(x_0, \xi_0).$$

On voit de cette forme que la fonction $P(x, \xi)$ est constante le long des courbes

$$x = q_0[Q_0(x_0, \xi_0), \xi]$$

dans le plan (ξ, x) pour tous les x_0, ξ_0 . L'équation de ces courbes peut être réécrite sous la forme

$$Q_0(x, \xi) = Q_0(x_0, \xi_0).$$

On voit de là que ces courbes sont les izohispes de la fonction $Q_0(x, \xi)$. La fonction $P(x, \xi)$ qui est constante le long de ces izohispes peut donc être écrite

$$(0.6) \quad P(x, \xi) = \Omega\{Q_0(x, \xi)\}.$$

D'une manière analogue, on arrive à la relation

$$(0.7) \quad Q_0(x, \xi) = \bar{\Omega}\{P(x, \xi)\}.$$

Les relations (0.6) et (0.7) ne peuvent avoir lieu simultanément que si la fonction Ω est inversible dans le domaine de sa variation, c. q. f. d.

Dans le cas où $Q(x, \xi)$ ne dépend pas de ξ , la fonction de transformation prend la forme particulièrement simple

$$a(x, \xi, \bar{\xi}) = x,$$

et l'objet se réduit à un scalaire (la composante x ne dépend pas du système des coordonnées). Autrement dit, les scalaires sont des objets géométriques du type K , dont la règle de transformation est donnée par une fonction arbitraire $Q(x, \xi)$ inversible par rapport à x et qui ne dépend pas de ξ .

Le sujet du présent travail est le problème, posé S. Gołab, concernant l'algèbre des objets du type K . Ce problème est le suivant: l'expression $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ représente-elle un objet du type K si l'on suppose x_1, x_2, \dots, x_n des composantes de n objets du type K assujettis à la même règle de transformation et f une fonction arbitraire de n variables?

Pour les scalaires, la réponse est banale et peut être énoncée par la proposition évidente suivante:

Proposition 0.2. *Si x_1, x_2, \dots, x_n désignent les composantes de n scalaires arbitraires et f est une fonction arbitraire de n variables, alors $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est également composante d'un scalaire.*

Cette proposition cesse d'être juste pour des objets du type K qui ne sont pas des scalaires.

Dans ce travail nous traitons les cas, où $n=1$ et $n=2$ (le cas général sera l'objet d'un travail ultérieur). Il s'avère que pour $n=1$ toute fonction inversible représente un objet du type K . Par contre, pour $n=2$, il y a toujours (à certaines conditions de régularité) des objets pour lesquels aucune fonction f n'est un objet du type K .

S'il y a (pour $n=2$) des fonctions $f(x_1, x_2)$, dépendant de deux variables x_1, x_2 , telles que $f(x_1, x_2)$ représente un objet géométrique du type K (même si elles ont des règles de transformation différentes de celles de

x_1, x_2) nous allons dire que les objets x_1, x_2 „admettent une algèbre“. S'il n'en est pas ainsi, nous dirons que x_1, x_2 „n'admettent pas d'algèbre“.

Dans toutes les considérations ultérieures, nous allons désigner brièvement par $F_1(x_1, \dots, x_n), F_2(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)$ les dérivées partielles de la fonction $F(x_1, \dots, x_n)$ respectivement par rapport aux variables x_1, x_2, \dots, x_n . Le symbole G^{-1} désignera la fonction inverse à G . En outre K^i sera l'ensemble de tous les objets du type K dont la règle de transformation peut être donnée par la fonction $a(x, \xi, \bar{\xi})$ de la classe C^i (dérivées continues d'ordre i).

§ 1

Les considérations du présent paragraphe s'appliquent au cas où n est naturel quelconque.

* Supposons que x_1, x_2, \dots, x_n soient les composantes de n objets géométriques du type K ayant la même règle de transformation donnée par la fonction $Q(x, \xi)$. Soit en outre $f(u_1, \dots, u_n)$ une fonction arbitraire de n variables, déterminée pour les u_i de l'intervalle (a, b) . D'après une proposition de S. Gołąb, la condition nécessaire et suffisante pour que $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ et $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ soient composantes d'un objet géométrique du type K respectivement dans les systèmes \bar{B} et B consiste en ce qu'il doit exister une fonction $P(x, \xi)$ inversible par rapport à la première variable qui vérifie l'équation

$$(1.1) \quad f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = p\{P[f(x_1, x_2, \dots, x_n), \xi], \bar{\xi}\}.$$

Cette équation, en tenant compte de la supposition que $\bar{x}_i = q[Q(x_i, \xi), \bar{\xi}]$ (pour $i=1, 2, \dots, n$) prend la forme de l'identité

$$(1.2) \quad f\{q[Q(x_1, \xi), \bar{\xi}], \dots, q[Q(x_n, \xi), \bar{\xi}]\} = p\{P[f(x_1, \dots, x_n), \xi], \bar{\xi}\},$$

qui doit être satisfaite pour tous les $\xi, \bar{\xi}$ et pour les x_i de l'intervalle (a, b) . En appliquant, à l'égalité $L_1 = L_2$, l'opération $P(L_1, \bar{\xi}) = P(L_2, \bar{\xi})$ et en utilisant la relation $P[p(\gamma, \bar{\xi}), \bar{\xi}] = \gamma$, on peut récrire l'identité (1.2) sous la forme équivalente suivante:

$$P\{f\{q[Q(x_1, \xi), \bar{\xi}], \dots, q[Q(x_n, \xi), \bar{\xi}]\}, \bar{\xi}\} = P\{f(x_1, \dots, x_n), \xi\}.$$

On en conclue (en raisonnant comme dans la démonstration de la proposition (0.1)) que la fonction $P(x, \xi)$ ne vérifie l'équation (1.1) que si elle est constante le long des courbes de la famille

$$(1.3) \quad x = f\{q[c_1, \xi], \dots, q[c_n, \xi]\}.$$

On constate donc que, pour que la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ représente un objet géométrique du type K , il faut et il suffit qu'il existe au moins une fonction des variables x, ξ constante le long des courbes (1.3) et inversible par rapport à la variable x . Cette fonction, désignons la par $P_0(x, \xi)$, donne la règle de transformation de l'objet $f(x_1, \dots, x_n)$. De la proposition (0.1) résulte que toutes les solutions possibles de l'équation (1.2) peuvent être obtenues de cette fonction à l'aide de la formule

$$(1.4) \quad P(x, \xi) = \Pi\{P_0(x, \xi)\}$$

où Π est une fonction inversible.

Après avoir fait ces remarques préliminaires, passons aux cas de $n=1$ et $n=2$.

§ 2. $n=1$

Proposition 2.1. Si x est la composante d'un objet géométrique du type K avec la règle de transformation donnée par la fonction $Q(x, \xi)$, toute la fonction inversible arbitraire $f(x)$ d'une variable représente un objet géométrique du type K , dont la règle de transformation est donnée par la fonction de la forme

$$(2.1) \quad P(x, \xi) = \Pi\{Q[f^{-1}(x), \xi]\}$$

où Π est une fonction inversible quelconque.

Démonstration. Pour une fonction f d'une variable, l'équation (1.3) prend la forme

$$x = f\{q[c, \xi]\}.$$

Si l'on suppose l'inversibilité de la fonction f , la dernière équation peut être résolue par rapport à la constante c

$$c = Q\{f^{-1}(x), \xi\}.$$

Evidemment la fonction $P_0(x, \xi) = Q\{f^{-1}(x), \xi\}$ est constante le long des courbes données par l'équation de tout à l'heure. La fonction f représente donc un objet géométrique du type K et, en vertu de la formule (1.4), la règle de transformation de cet objet est donnée par la fonction (2.1).

§ 3. $n=2$

Introduisons les notations suivantes: D — domaine des points (x, ξ) , déterminé par les inégalités $-\infty < \xi < +\infty, a \leq x \leq b$; G — domaine des points (x, y) , déterminé par les inégalités $a \leq x, y \leq b$ (carré dont une diagonale est sur la bissectrice des angles droits du 1^{er} et du 3^{ème} quadrants).

Proposition 3.1. 1°. Si x, y sont des composantes de deux objets géométriques du type K^3 avec la même règle de transformation et s'il existe une fonction $f(x, y)$ de classe C^3 satisfaisant dans le domaine G aux conditions

$$(3.1) \quad f_1(x, y) \neq 0, \quad f_2(x, y) \neq 0$$

et représentant dans celui-ci un objet géométrique du type K^1 , la fonction $Q(x, \xi)$, à l'aide de laquelle est donnée la règle de transformation des objets x, y , peut être écrite dans le domaine D sous la forme

$$(3.2) \quad Q(x, \xi) = \Omega\{\Theta(\xi)L(x) + \Phi(\xi)\},$$

où Ω, Θ, L et Φ sont fonctions d'une variable.

2°. a) Si la fonction $Q(x, \xi)$ peut être écrite dans le domaine D sous la forme (3.2) ²⁾, la fonction

$$(3.3) \quad f(x, y) = \Psi\{L(x) + \gamma L(y)\},$$

où γ est une constante arbitraire et Ψ — une fonction inversible arbitraire, représente un objet géométrique du type K avec la règle de transformation donnée par la fonction

$$(3.4) \quad P(x, \xi) = \Pi\{\Theta(\xi)\Psi^{-1}(x) + (1 + \gamma)\Phi(\xi)\},$$

où Π est une fonction arbitraire inversible d'une variable.

b) De plus, si la fonction $a(x, \xi, \bar{\xi})$ est de la classe C^2 , Φ et Θ — de la classe C^1 , L — de la classe C^2 , et Φ et Θ ne dépendent pas linéairement entre elles ³⁾, toute fonction $f(x, y)$ de la classe C^2 satisfaisant, au point (x, y) du domaine G , aux conditions (3.1) et représentant un objet géométrique du type K^1 , peut être écrite sous la forme (3.3) dans le voisinage de ce point.

3°. a) Si la fonction $Q(x, \xi)$ peut être écrite, dans le domaine D sous la forme

$$(3.5) \quad Q(x, \xi) = \Omega\{L(x) + \Phi(\xi)\},$$

la fonction

$$(3.6) \quad f(x, y) = \Psi\{L(x) + \gamma L(y) + \chi[L(x) - L(y)]\},$$

où χ est une fonction arbitraire, γ — une constante quelconque et Ψ — une fonction arbitraire inversible, représente un objet géométrique du type K

¹⁾ La fonction L est inversible, car la fonction $Q(x, \xi)$ est inversible par rapport à la première variable.

²⁾ Si les fonctions Φ et Θ sont linéairement dépendantes, la fonction $Q(x, \xi)$ peut être écrite sous la forme (3.5).

avec la règle de transformation donnée par la formule

$$(3.7) \quad P(x, \xi) = \Pi\{\Psi^{-1}(x) + (\gamma + 1)\Phi(\xi)\},$$

où Π est une fonction inversible quelconque.

b) Si, en outre, la fonction $a(x, \xi, \bar{\xi})$ est de la classe C^2 , Φ — de la classe C^1 , L — de la classe C^2 et $\Phi(\xi) \equiv \text{const}$ ⁴⁾, toute fonction $f(x, y)$ de classe C^2 satisfaisant, au point (x, y) du domaine G , aux conditions (3.1) et représentant un objet géométrique du type K^1 , peut être écrite sous la forme (3.6) dans le voisinage de ce point.

Afin de rendre plus claire la démonstration de la proposition que nous venons d'énoncer, décomposons la en plusieurs lemmes.

Lemme 1. Si x, y sont des composantes d'objets géométriques du type K^2 avec la même règle de transformation donnée par la fonction $Q(x, \xi)$, toute fonction $f(x, y)$ de la classe C^2 satisfaisant, au point (x, y) , aux conditions (3.1) et représentant un objet géométrique du type K^1 , vérifie, pour toutes les valeurs de ξ dans le voisinage du point (x, y) , l'équation

$$(3.8) \quad g_1(x, y) \lambda(x, \xi) + g_2(x, y) \lambda(y, \xi) + g(x, y) [\lambda_1(x, \xi) - \lambda_1(y, \xi)] = 0,$$

où

$$(3.9) \quad g(x, y) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}$$

et

$$(3.10) \quad \lambda(x, \xi) \stackrel{\text{df}}{=} a_2(x, \xi, \bar{\xi}) \left(a(x, \xi, \bar{\xi}) \stackrel{\text{df}}{=} q[Q(x, \xi), \bar{\xi}] \right).$$

Démonstration. La fonction $f(x, y)$, représentant un objet géométrique du type K^1 , vérifie (en vertu de la formule (1.2) et de la définition (0.4)) l'identité

$$f[a(x, \xi, \bar{\xi}), a(y, \xi, \bar{\xi})] = b[f(x, y), \xi, \bar{\xi}],$$

la fonction du membre droit

$$b(x, \xi, \bar{\xi}) \stackrel{\text{df}}{=} p[P(x, \xi), \bar{\xi}]$$

étant différentiable. En différentiant les deux membres de cette identité par rapport à x et y , on a

$$(3.11) \quad \begin{aligned} f_1[a(x, \xi, \bar{\xi}), a(y, \xi, \bar{\xi})] a_1(x, \xi, \bar{\xi}) &= b_1[f(x, y), \xi, \bar{\xi}] f_1(x, y) \\ f_2[a(x, \xi, \bar{\xi}), a(y, \xi, \bar{\xi})] a_1(y, \xi, \bar{\xi}) &= b_1[f(x, y), \xi, \bar{\xi}] f_2(x, y). \end{aligned}$$

De la supposition (3.1), on a que $f_2(x, y) \neq 0$. D'autre part, en vertu de la continuité de cette fonction, elle sera différente de zéro dans un certain

⁴⁾ Si la fonction Φ est constante, la fonction $Q(x, \xi)$ ne dépend pas de la deuxième variable et l'objet considéré se réduit à un scalaire.

voisinage du point (x, y) . Puisque la fonction $a(x, \xi, \bar{\xi})$ est continue et $a(x, \xi, \xi) = x$, on a, pour $\bar{\xi}$ et ξ suffisamment voisins,

$$f_2[a(x, \xi, \bar{\xi}), a(y, \xi, \bar{\xi})] \neq 0.$$

On peut donc éliminer des équations (3.11) la fonction b_1 et, en tenant compte de la définition (3.9), récrire le résultat obtenu sous la forme

$$g[a(x, \xi, \bar{\xi}), a(y, \xi, \bar{\xi})] a_1(x, \xi, \bar{\xi}) = g(x, y) a_1(y, \xi, \bar{\xi}).$$

En différentiant cette relation par rapport à ξ , on aura

$$\begin{aligned} g_1[a(x, \xi, \bar{\xi}), a(y, \xi, \bar{\xi})] a_1(x, \xi, \bar{\xi}) a_2(x, \xi, \bar{\xi}) \\ + g_2[a(x, \xi, \bar{\xi}), a(y, \xi, \bar{\xi})] a_1(x, \xi, \bar{\xi}) a_2(y, \xi, \bar{\xi}) \\ + g[a(x, \xi, \bar{\xi}), a(y, \xi, \bar{\xi})] a_{12}(x, \xi, \bar{\xi}) = g(x, y) a_{12}(y, \xi, \bar{\xi}). \end{aligned}$$

On posera dans l'identité obtenue $\bar{\xi} = \xi$, en remarquant que la différentiation de l'identité $a(x, \xi, \xi) = x$ donne

$$(3.12) \quad a_1(x, \xi, \xi) = 1.$$

Il suffit de considérer la définition (3.10) pour arriver à l'équation (3.8), c. q. f. d.

Remarquons encore qu'on obtient de la définition (0.4), en différentiant, les relations

$$\begin{aligned} a_1(x, \xi, \bar{\xi}) &= q_1[Q(x, \xi), \bar{\xi}] Q_1(x, \xi), \\ a_2(x, \xi, \bar{\xi}) &= q_1[Q(x, \xi), \bar{\xi}] Q_2(x, \xi). \end{aligned}$$

En posant $\bar{\xi} = \xi$, on a, en tenant compte de l'identité (3.12) et de la définition (3.10), une relation importante pour nous entre les fonctions $Q(x, \xi)$ et $\lambda(x, \xi)$

$$(3.13) \quad \lambda(x, \xi) = \frac{Q_2(x, \xi)}{Q_1(x, \xi)}.$$

Lemme 2. Si x, y sont les composantes d'objets géométriques du type K^3 avec la même règle de transformation donnée par la fonction $Q(x, \xi)$ et si la fonction $f(x, y)$ de la classe C^3 satisfait dans G aux conditions (3.1) et représente un objet géométrique du type K^1 , la fonction $Q(x, \xi)$ peut être écrite, dans le domaine D , sous la forme (3.2).

Démonstration. Il s'ensuit, des suppositions et du lemme 1, que la fonction $f(x, y)$ vérifie l'équation (3.8) en chaque point du domaine D et pour toutes les valeurs de ξ . Les fonctions qui figurent dans cette

équation étant différentiables, on aura, en passant aux dérivées par rapport à x et en posant ensuite $x=y$,

$$(3.14) \quad [g_{21}(x, x) + g_{11}(x, x)]\lambda(x, \xi) + g_1(x, x)\lambda_1(x, \xi) + g(x, x)\lambda_{11}(x, \xi) = 0.$$

Supposons que λ ne soit pas identiquement égale à zéro dans le domaine D . Remarquons que si l'on avait $\lambda = 0$, il viendrait, en vertu de (3.13), $Q_2 = 0$ et l'on aurait affaire à un scalaire ce qui était déjà considéré auparavant. On peut affirmer que la fonction $g(x, x)$ est constante dans l'intervalle Δ faisant partie du voisinage du point x_0 pour lequel la fonction $\lambda(x_0, \xi)$ n'est pas nulle pour une certaine valeur ξ_0 . En effet, en posant dans l'équation (3.8) $y=x$, on a

$$[g_1(x, x) + g_2(x, x)]\lambda(x, \xi) = 0,$$

d'où

$$g_1(x, x) + g_2(x, x) = 0$$

dans l'intervalle considéré Δ . Puisque $g_1(x, x) + g_2(x, x) = \frac{d}{dx}g(x, x)$, il suit $g(x, x) = \text{const} = c$ dans Δ et, d'après la supposition (3.1) et la définition (3.9), on doit avoir $c \neq 0$. Remarquons en outre que

$$g_{21}(x, x) + g_{11}(x, x) = \frac{d}{dx}g_1(x, x),$$

et désignons par $u(x)$ la fonction

$$u(x) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g_1(x, x) dx$$

(la fonction $g_1(x, x)$ est continue et, par suite, intégrable). L'équation (3.14) prendra alors la forme

$$(3.15) \quad u''(x)\lambda(x, \xi) + u'(x)\lambda_1(x, \xi) + \lambda_{11}(x, \xi) = 0.$$

Pour une valeur fixe de ξ l'équation (3.15) sera une équation différentielle ordinaire du deuxième ordre par rapport à la fonction $\lambda(x, \xi)$. Posons

$$(3.16) \quad L(x) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{x_0}^x e^{u(x)} dx.$$

Un calcul facile montre que les fonctions

$$\lambda(x, \xi) = \frac{L(x)}{L'(x)}, \quad \lambda_1(x, \xi) = \frac{1}{L'(x)}$$

sont les solutions, indépendantes entre elles, de l'équation (3.15) (la fonction L définie par la formule (3.16) ne peut être constante). Il s'ensuit

que pour un ξ fixe la solution générale de cette équation sera égale à la fonction

$$\lambda(x, \xi) = \frac{c_1 L(x) + c_2}{L'(x)}$$

(c_1, c_2 — deux constantes arbitraires). En faisant varier le paramètre ξ dans l'équation (3.15), on voit que chaque solution de cette équation dans l'intervalle Δ est de la forme

$$(3.17) \quad \lambda(x, \xi) = \frac{\vartheta(\xi)L(x) + \varphi(\xi)}{L'(x)}.$$

La formule (3.17) est juste dans l'intervalle entier (a, b) . Pour le démontrer, on supposera le contraire, c'est-à-dire que l'intervalle Δ , dans lequel la représentation (3.17) est juste, ne puisse être étendu à l'intervalle entier (a, b) . Ceci ne pourrait avoir lieu que s'il existait une valeur de x à l'intérieur de (a, b) telle qu'on ait

$$(3.18) \quad \lambda(\bar{x}, \xi) \equiv 0$$

pour tous les ξ . Désignons pour cela par E l'ensemble de toutes les valeurs de \bar{x} de l'intervalle (a, b) pour lesquelles on a (3.18). A cause de la continuité de la fonction λ , l'ensemble E est fermé. Le cas où E se confond avec l'intervalle entier (a, b) a été exclu auparavant. Il s'ensuit que l'ensemble restant

$$R = (a, b) - E$$

doit être un ensemble ouvert non vide. Il est facile de voir que les cas suivants donnent la disjonction complète:

I. E se compose d'un seul point \bar{x} .

II. R se compose d'un seul intervalle dont l'une des extrémités est \bar{x} et l'autre se confond avec l'une des extrémités de l'intervalle (a, b) .

III. R renferme au moins un intervalle ouvert dont les extrémités x_1, x_2 sont des points intérieurs de l'intervalle (a, b) .

Supposons d'abord l'éventualité I. Dans ce cas dans l'intervalle fermé (a, \bar{x}) on a

$$(3.19a) \quad \lambda(x, \xi) = \frac{\vartheta_1(\xi)L(x) + \varphi_1(\xi)}{L'(x)},$$

et, dans l'intervalle fermé (\bar{x}, b) ,

$$(3.19b) \quad \lambda(x, \xi) = \frac{\vartheta_2(\xi)L(x) + \varphi_2(\xi)}{L'(x)}.$$

En posant, dans les formules (3.19), $x = \bar{x}$, on a

$$\varphi_1(\xi) = -L(\bar{x})\vartheta_1(\xi), \quad \varphi_2(\xi) = -L(\bar{x})\vartheta_2(\xi)$$

ce qui donne

$$\lambda(x, \xi) = \begin{cases} \vartheta_1(\xi) \frac{L(x) - L(\bar{x})}{L'(x)}, & \text{pour } a \leq x \leq \bar{x} \\ \vartheta_2(\xi) \frac{L(x) - L(\bar{x})}{L'(x)}, & \text{pour } \bar{x} \leq x \leq b \end{cases}$$

En différentiant ces relations par rapport à x (ce qui est possible d'après nos suppositions), il suit

$$(3.20) \quad \lambda_1(x, \xi) = \begin{cases} \vartheta_1(\xi) \frac{L'^2(x) - L''(x)[L(x) - L(\bar{x})]}{L'^2(x)}, & \text{pour } a \leq x \leq \bar{x} \\ \vartheta_2(\xi) \frac{L'^2(x) - L''(x)[L(x) - L(\bar{x})]}{L'^2(x)}, & \text{pour } \bar{x} \leq x \leq b. \end{cases}$$

En posant $x = \bar{x}$, on a

$$\vartheta_1(\xi) \equiv \vartheta_2(\xi)$$

et, par suite,

$$\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi).$$

La formule (3.17) serait ainsi juste, contrairement à la supposition, dans l'intervalle entier (a, b) .

Supposons maintenant le cas II et soit

$$\lambda(x, \xi) = \frac{\vartheta(\xi)L(x) + \varphi(\xi)}{L'(x)} \quad \text{pour } a \leq x \leq \bar{x},$$

$$\lambda(x, \xi) \equiv 0 \quad \text{pour } \bar{x} \leq x \leq b.$$

Un raisonnement semblable au précédent conduit au résultat

$$\varphi(\xi) = -L(\bar{x}) \cdot \vartheta(\xi).$$

De là, en passant à la limite du côté gauche, on a pour $x \rightarrow \bar{x}$

$$\lambda_1(\bar{x}, \xi) \equiv 0.$$

En passant à la limite du côté droit, on a pour $x \rightarrow \bar{x}$

$$\vartheta(\xi) \equiv 0,$$

c'est-à-dire $\lambda(x, \xi) \equiv 0$ dans le domaine entier D , ce qui est contraire à la supposition.

Passons à la dernière des éventualités (III). On a alors dans l'intervalle fermé (x_1, x_2)

$$\lambda(x, \xi) = \frac{\vartheta(\xi)L(x) + \varphi(\xi)}{L'(x)}.$$

Puisque $\lambda(x_1, \xi) \equiv \lambda(x_2, \xi) \equiv 0$, il en résulte

$$\vartheta(\xi)L(x_1) + \varphi(\xi) = \vartheta(\xi)L(x_2) + \varphi(\xi),$$

ce qui donne

$$\vartheta(\xi)\{L(x_2) - L(x_1)\} \equiv 0.$$

Puisque $\vartheta(\xi) \equiv 0$, il s'ensuit que $L(x_2) = L(x_1)$, ce qui est en contradiction avec la supposition d'inversibilité de la fonction $L(x)$ dans l'intervalle (a, b) .

Ainsi donc la proposition se trouve démontrée. La formule (3.17) est donc valable dans l'intervalle entier (a, b) . En revenant à la formule (3.13), on voit que la fonction $Q(x, \xi)$ vérifie dans le domaine D l'équation différentielle

$$L'(x)Q_2(x, \xi) = Q_1(x, \xi)[\vartheta(\xi)L(x) + \varphi(\xi)].$$

Les caractéristiques de cette équation linéaire aux dérivées partielles vérifient l'équation différentielle ordinaire

$$[\varphi(\xi) + \vartheta(\xi)L(x)]d\xi + L'(x)dx = 0.$$

En multipliant cette équation par le facteur intégrant $e^{\int \vartheta(\xi) d\xi}$, on arrive à une équation à différentielle totale dont la première intégrale a la forme

$$\int \varphi(\xi) e^{\int \vartheta(\xi) d\xi} d\xi + L(x) e^{\int \vartheta(\xi) d\xi}.$$

En introduisant les notations

$$\Phi(\xi) \stackrel{\text{df}}{=} \int \varphi(\xi) e^{\int \vartheta(\xi) d\xi} \cdot d\xi, \quad \Theta(\xi) = e^{\int \vartheta(\xi) d\xi},$$

on voit que $Q(x, \xi)$ est de la forme (3.2) dans le domaine D . Le lemme est ainsi démontré ainsi que la partie 1° de la proposition 3.1.

Lemme 3. *Si la fonction $Q(x, \xi)$ peut être écrite sous la forme (3.2) dans le domaine D et si Φ et Θ sont de la classe C^1 , L de la classe C^2 , Θ et Φ n'étant pas linéairement dépendantes entre elles, alors toute fonction $f(x, y)$ de la classe C^2 , qui satisfait, au point (x, y) de G , aux conditions (3.1) et représente un objet géométrique du type K^1 , peut être écrite sous la forme (3.3) dans le voisinage de ce point.*

Démonstration. Si les suppositions de régularité faites au début sont satisfaites, la fonction $f(x, y)$ doit, en vertu du Lemme 1, vérifier, dans le voisinage du point (x, y) , l'équation (3.8) pour toutes les valeurs

de ξ . Pour la fonction $Q(x, \xi)$ de la forme (3.2), on aura, en vertu des suppositions,

$$(3.21) \quad \lambda(x, \xi) = \frac{L(x)\Theta'(\xi) + \Phi'(\xi)}{L'(x)\Theta(\xi)},$$

et, de là,

$$\lambda_1(x, \xi) = \frac{L'^2(x)\Theta'(\xi) - L''(x)[L(x)\Theta'(\xi) + \Phi'(\xi)]}{L'^2(x)\Theta(\xi)} = \frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)} - \frac{L''(x)}{L'(x)}\lambda(x, \xi).$$

L'équation (3.8) prendra la forme

$$(3.22') \quad \left[g_1(x, y) - \frac{L''(x)}{L'(x)}g(x, y) \right] \lambda(x, \xi) + \left[g_2(x, y) + \frac{L''(y)}{L'(y)}g(x, y) \right] \lambda(y, \xi) = 0.$$

Si l'on y substitue η à la place de ξ , on aura une équation analogue

$$(3.22'') \quad \left[g_1(x, y) - \frac{L''(x)}{L'(x)}g(x, y) \right] \lambda(x, \eta) + \left[g_2(x, y) + \frac{L''(y)}{L'(y)}g(x, y) \right] \lambda(y, \eta) = 0.$$

En profitant de la formule (3.21), on calculera facilement que

$$\left| \begin{array}{cc} \lambda(x, \xi) & \lambda(y, \xi) \\ \lambda(x, \eta) & \lambda(y, \eta) \end{array} \right| = \frac{L(x) - L(y)}{\Theta(\xi)\Theta(\eta)L'(x)L'(y)} \left| \begin{array}{cc} \Theta'(\xi) & \Phi'(\xi) \\ \Theta'(\eta) & \Phi'(\eta) \end{array} \right|.$$

La fonction L étant inversible, le premier facteur du membre droit de la dernière identité est identiquement égal à zéro dans le voisinage du point (x, y) . Le second facteur ne peut pas être identiquement nul car, si contraire, on aurait une relation linéaire entre Φ et Θ , ce qui a été exclu. Il en résulte qu'il est possible de choisir des valeurs pour ξ et η telles que le déterminant

$$\left| \begin{array}{cc} \Theta'(\xi) & \Phi'(\xi) \\ \Theta'(\eta) & \Phi'(\eta) \end{array} \right|$$

soit différent de zéro. Dans ce cas le système (3.22) pourra être réécrit, dans le voisinage du point (x, y) , sous la forme

$$(3.23) \quad g_1(x, y) - \frac{L''(x)}{L'(x)}g(x, y) = 0; \quad g_2(x, y) + \frac{L''(y)}{L'(y)}g(x, y) = 0.$$

On a supposé que la fonction $f(x, y)$ vérifie les conditions (3.1) dans le voisinage du point (x, y) . Il s'ensuit que $g(x, y)$ est différente de zéro dans le voisinage de ce point et que le système d'équations (3.23) peut être réécrit sous la forme

$$(3.24') \quad \frac{g_1(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L''(x)}{L'(x)}$$

$$(3.24'') \quad \frac{g_2(x, y)}{g(x, y)} = -\frac{L''(y)}{L'(y)}$$

L'intégration par rapport à x des deux membres de l'équation (3.24') conduit à la conclusion que la solution générale de cette équation est la fonction

$$g(x, y) = \frac{L'(x)}{\sigma(y)},$$

où $\sigma(y)$ est une fonction arbitraire, différente de zéro, de la classe C^1 . On prouve de même que la solution générale de l'équation (3.24'') est la fonction

$$g(x, y) = \frac{\tau(x)}{L'(y)},$$

où $\tau(x)$ est une fonction arbitraire de la classe C^1 . Donc, si $g(x, y)$ doit être une solution des deux équations à la fois, les fonctions τ et σ doivent vérifier la relation

$$\frac{\tau(x)}{L'(y)} = \frac{L'(x)}{\sigma(y)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sigma(y)}{L'(y)} = \frac{L'(x)}{\tau(x)}.$$

Cette dernière relation, comme il est facile de le voir, n'est possible que si

$$\frac{\sigma(y)}{L'(y)} = \frac{L'(x)}{\tau(x)} = \text{const} \neq 0,$$

c'est-à-dire si

$$\tau(x) = \gamma L'(x), \quad \sigma(y) = \frac{1}{\gamma} L'(y),$$

où γ est une constante différente de zéro. La solution générale du système (3.24) est donc la fonction

$$g(x, y) = \gamma \frac{L'(x)}{L'(y)}.$$

En revenant à la définition (3.9), on voit que la fonction $f(x, y)$ vérifie l'équation

$$\frac{f_1(x, y)}{L'(x)} - \gamma \frac{f_2(x, y)}{L'(y)} = 0.$$

Après une intégration facile de cette équation, on obtient sa solution générale qui est une fonction de la forme (3.3) c. q. f. d.

Lemme 4. Si la fonction $Q(x, \xi)$ est de la forme (3.5) dans le domaine D , si la fonction Φ est de la classe C^1 , L de la classe C^2 , et la fonction

$\Phi'(\xi) \equiv 0$, alors toute fonction $f(x, y)$ de la classe C^2 , qui satisfait au point (x, y) du domaine G aux conditions (3.1) et représente un objet géométrique du type K^1 , peut être écrite sous la forme (3.6) dans le voisinage de ce point.

Démonstration. Les suppositions de régularité étant satisfaites, il s'ensuit du Lemme 1 que la fonction $f(x, y)$ doit vérifier l'équation (3.8) dans le voisinage du point (x, y) pour tous les ξ . D'après les suppositions, on a, pour la fonction $Q(x, \xi)$ donnée par la formule (3.5),

$$\lambda(x, \xi) = \frac{\Phi'(\xi)}{L'(x)}, \quad \lambda_1(x, \xi) = -\frac{\Phi'(\xi)L''(x)}{L'^2(x)}.$$

L'équation (3.8) prendra la forme

$$\Phi'(\xi) \left\{ \frac{g_1(x, y)}{L'(x)} + \frac{g_2(x, y)}{L'(y)} + g(x, y) \left[\frac{L''(y)}{L'^2(y)} - \frac{L''(x)}{L'^2(x)} \right] \right\} = 0.$$

Cette équation est vérifiée pour toutes les valeurs de ξ . Puisqu'en vertu de la supposition, $\Phi'(\xi) \equiv 0$, la fonction $g(x, y)$ doit vérifier l'équation différentielle

$$(3.25) \quad \frac{g_1(x, y)}{L'(x)} + \frac{g_2(x, y)}{L'(y)} + g(x, y) \left[\frac{L''(y)}{L'^2(y)} - \frac{L''(x)}{L'^2(x)} \right] = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est la fonction

$$(3.26) \quad g(x, y) = \frac{L'(x)}{L'(y)} \Gamma[L(x) - L(y)],$$

où Γ est une fonction arbitraire de la classe C^1 .

En effet, si $g(x, y) \neq 0$ dans le voisinage du point (x, y) , ceci résulte de la supposition (3.1), les caractéristiques de l'équation (3.25) vérifient le système d'équations

$$dxL'(x) = dyL'(y) = \frac{dg}{g} \frac{1}{\frac{L''(x)}{L'^2(x)} - \frac{L''(y)}{L'^2(y)}}.$$

Ce système peut être récrit sous la forme équivalente

$$\begin{aligned} dxL'(x) &= dyL'(y) \\ dxL'(x) \cdot \left[\frac{L''(x)}{L'^2(x)} - \frac{L''(y)}{L'^2(y)} \right] &= \frac{dg}{g} \end{aligned}$$

ou bien encore

$$\begin{aligned} dxL'(x) &= dyL'(y) \\ dx \frac{L''(x)}{L'(x)} - dxL'(x) \frac{L''(y)}{L'^2(y)} &= dx \frac{L''(x)}{L'(x)} - dy \frac{L''(y)}{L'(y)} = \frac{dg}{g}. \end{aligned}$$

Les intégrales premières de ce système sont

$$L(x) - L(y), \quad g \frac{L'(y)}{L'(x)}.$$

La surface intégrale de l'équation (3.25) aura donc la forme

$$(3.27) \quad G \left\{ L(x) - L(y), \quad g \frac{L'(y)}{L'(x)} \right\} = 0,$$

où $G(u, v)$ est une fonction arbitraire de la classe C^1 . Si la fonction $g(x, y)$ doit être déterminée univoquement dans le voisinage du point (x, y) , l'équation (3.27) doit être résoluble par rapport à g et l'on a (3.28).

En revenant à la définition (3.9), on obtient pour $f(x, y)$ l'équation différentielle

$$(3.28) \quad \frac{f_1(x, y)}{L'(x)} - \frac{f_2(x, y)}{L'(y)} \cdot I[L(x) - L(y)] = 0.$$

Le cas $I \equiv 0$ étant en contradiction avec la supposition (3.1), l'équation des caractéristiques de l'équation (3.28) peut être écrite sous la forme

$$(3.29) \quad L'(x)dx + \frac{L'(y)dy}{I[L(x) - L(y)]} = 0.$$

On intégrera cette équation en faisant le changement des variables

$$(3.30) \quad \begin{aligned} L(x) - L(y) &= u \\ L(x) + L(y) &= v \end{aligned}$$

dont le Jacobien $J = 2L'(x) \cdot L'(y) > 0$. On a de (3.30)

$$L'(x)dx = \frac{1}{2}(du + dv)$$

$$L'(y)dy = \frac{1}{2}(dv - du)$$

et l'équation (3.29) prend la forme

$$(3.31) \quad [I(u) - 1]du + [I(u) + 1]dv = 0.$$

Pour $I(u) \equiv -1$, l'intégrale première de cette équation est v , c'est-à-dire l'intégrale première de l'équation (3.29) est la fonction

$$L(x) - L(y).$$

La solution $f(x, y)$ s'exprime alors par la formule

$$f(x, y) = \Psi[L(x) - L(y)];$$

elle est donc de la forme (3.6) (si $\gamma = -1$).

Si, par contre, $\Gamma(u) \equiv -1$, l'équation (3.31) peut être réécrite sous la forme

$$dv + \frac{\Gamma(u)-1}{\Gamma(u)+1} du = 0.$$

L'intégrale première de cette équation a la forme

$$v + \int \frac{\Gamma(u)-1}{\Gamma(u)+1} du,$$

ce qui, en raison de la définition (3.30), peut être réécrit sous la forme

$$L(x) + L(y) + \chi[L(x) - L(y)],$$

où $\chi(u) \stackrel{\text{df}}{=} \int \frac{\Gamma(u)-1}{\Gamma(u)+1} du$.

La fonction $f(x, y)$ s'exprime alors par la formule

$$f(x, y) = \Psi \{L(x) + L(y) + \chi[L(x) - L(y)]\}.$$

On voit que cette fonction est également de la forme (3.6) (où $\gamma=1$) c. q. f. d.

Lemme 5. 1°. Si la fonction $Q(x, \xi)$ peut être écrite sous la forme (3.2) dans le domaine D , les fonctions Ω et L étant inversibles, alors la fonction (3.3), où γ est une constante arbitraire et Ψ une fonction inversible, représente un objet géométrique du type K dont la règle de transformation est donnée par la fonction (3.4).

2°. Si la fonction $Q(x, \xi)$ peut être écrite sous la forme (3.5) dans le domaine D , les fonctions Ω et L étant inversibles, la fonction (3.6), où χ est une fonction arbitraire, γ une constante quelconque et Ψ une fonction inversible arbitraire, représente un objet géométrique du type K avec la règle de transformation donnée par la fonction (3.7).

Démonstration. 1°. Supposons que $Q(x, \xi)$ soit donnée par la formule (3.2). En résolvant par rapport à x l'équation $\zeta = Q(x, \xi)$, on a (en vertu des relations (0.2))

$$q(\zeta, \xi) = L^{-1} \left\{ \frac{\Omega^{-1}(\zeta) - \Phi(\xi)}{\Theta(\xi)} \right\}.$$

Pour que la fonction $f(x, y)$ soit un objet du type K , il faut et il suffit qu'il existe une fonction $P_0(x, \xi)$ qui soit constante le long des courbes (1.3). Pour la fonction $f(x, y)$ de la forme (3.3), l'équation (1.3) est

$$x = \Psi \left\{ \frac{\Omega^{-1}(c_1) - \Phi(\xi) + \gamma \Omega^{-1}(c_2) - \gamma \Phi(\xi)}{\Theta(\xi)} \right\} = \Psi \left\{ \frac{c - (\gamma + 1)\Phi(\xi)}{\Theta(\xi)} \right\},$$

ce qui peut être réécrit sous la forme

$$(3.32) \quad c = \Theta(\xi) \Psi^{-1}(x) + (\gamma + 1)\Phi(\xi).$$

La fonction $P_0(x, \xi) = \Theta(\xi) \cdot \Psi^{-1}(x) + (\gamma + 1)\Phi(\xi)$ est évidemment constante le long des courbes (3.32), d'où il s'ensuit que les fonctions $f(x, y)$ de l'ensemble (3.3) sont des objets du type K et que leurs règles de transformation sont données par les fonctions (3.4).

2°. Supposons que $Q(x, \xi)$ soit donné par la formule (3.5). Dans ce cas

$$q(\zeta, \xi) = L^{-1}\{\Omega^{-1}(\zeta) - \Phi(\xi)\}.$$

Pour la fonction $f(x, y)$ de la forme (3.6), l'équation (1.3) prend la forme

$$\begin{aligned} x &= \Psi\{\Omega^{-1}(c_1) + \gamma \Omega^{-1}(c_2) - (\gamma + 1)\Phi(\xi) + \chi[\Omega^{-1}(c_1) - \Omega^{-1}(c_2)]\} \\ &= \Psi\{c - (\gamma + 1)\Phi(\xi)\}, \end{aligned}$$

qui peut être réécrite comme suit

$$(3.33) \quad c = \Psi^{-1}(x) + (\gamma + 1)\Phi(\xi).$$

Evidemment la fonction $P_0(x, \xi) = \Psi^{-1}(x) + (\gamma + 1)\Phi(\xi)$ est constante le long des courbes (3.33). Les fonctions $f(x, y)$ de l'ensemble (3.6) sont donc les objets du type K auxquels les fonctions (3.7) fournissent la règle de transformation, c. q. f. d.

Réunissant les résultats des lemmes 2, 3, 4, 5, on voit que la proposition 3.1 est démontrée.

ON A THEOREM OF WAŻEWSKI

By A. ALEXIEWICZ (Poznań)

The purpose of this Note is to generalize a theorem of T. Ważewski [5] concerning the mean value theorem for vector valued functions. The theorems of Ważewski deal with the strong limiting processes, I generalize these results to the weak ones. Finally, I supply an example giving the answer on a problem of Ważewski.

In this note X will denote a Banach space, V a convex and closed set in X ; ξx will stand for linear functionals over X . By $x(t)$ will be denoted a vector valued function *i. e.* a function from a real interval $I = [a, b]$ to X ; the real valued functions will be denoted by $\varphi(t), \psi(t)$.

The function $x(t)$ is said to be *weakly continuous* if, given any linear functional ξ , the real valued function $\xi x(t)$ is continuous.

In the sequel $\varphi(t)$ will stand for an increasing (real valued) function.

Theorem. Let the function $x(t)$ be weakly continuous and suppose that for every $t \in (a, b)$, except a denumerable set, there is a sequence of reals $\tau_n \rightarrow 0^+$ and elements $y_n \in V$ such that the expression

$$\frac{x(t + \tau_n) - x(t)}{\varphi(t + \tau_n) - \varphi(t)} - y_n$$

tends weakly to 0 as $n \rightarrow \infty$. Then for every $t \in I$ and $\tau \neq 0$

$$\frac{x(t + \tau) - x(t)}{\varphi(t + \tau) - \varphi(t)} \in V.$$

The proof will be based on a lemma concerning real valued functions. Given a function $\psi(t)$ we put

$$D_{\varphi}^{+} \psi(t_0) = \overline{\lim}_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\psi(t_0 + \tau) - \psi(t_0)}{\varphi(t_0 + \tau) - \varphi(t_0)}.$$

Lemma. Let the function $\psi(t)$ be continuous and let $D_{\varphi}^{+} \psi(t) \geq 0$ except *an* at most denumerable set. Then the function $\psi(t)$ is non-decreasing.

The proof of this lemma does not differ essentially from the case when $\varphi(t) = t$ (Saks [4], p. 203).

Proceeding to the proof of the theorem suppose it to be no true. Then there is a t_0 and $\tau \neq 0$ such that

$$z_0 = \frac{x(t_0 + \tau) - x(t_0)}{\varphi(t_0 + \tau) - \varphi(t_0)} \text{ non } \in V,$$

whence by a theorem of Mazur ([3], p. 73) one can find a linear functional ξ such that $\xi y \geq 0$ for $y \in V$ and $\xi z_0 < 0$. The function $\psi(t) = \xi x(t)$ is continuous and it is obvious that $D_{\varphi}^{+} \psi(t) \geq 0$ except at most denumerable set. By Lemma $\psi(t_0 + \tau) - \psi(t_0) \geq 0$ for $\tau > 0$, hence $\xi z_0 \geq 0$ which leads to contradiction.

The theorem just proved leads to a generalization of the rule of l'Hôpital for vector valued functions proved by Ważewski [5].

Let $\Delta_{\varphi}^{+} x(t_0)$ be the class of all the sequences $\{y_n\}$ such that $[x(t_0 + \tau_n) - x(t_0)] / [\varphi(t_0 + \tau_n) - \varphi(t_0)] - y_n$ tends weakly to 0 as $n \rightarrow \infty$, $\{\tau_n\}$ being a sequence (depending on $\{y_n\}$) such that $\tau_n \rightarrow 0$. Now put

$$d(t_0, y) = \inf_{\{y_n\}} \inf_n \|y_n - y\|$$

the second infimum being taken over all sequences $\{y_n\} \in \Delta_{\varphi}^{+} x(t_0)$. Then Theorem gives immediately:

Let $x(t)$ be weakly continuous and suppose that $x(b) = 0, \varphi(b) = 0$; if $\lim_{t \rightarrow b-} d(t, y) = 0$, then

$$\lim_{t \rightarrow b-} \frac{x(t)}{\varphi(t)} = y.$$

The function $x(t)$ is said to satisfy the condition of Lipschitz if $\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq M |t_1 - t_2|$ with M independent of t_1 and t_2 . By $Dx(t)$ we shall denote the set of the elements y for which there exists a sequence $\tau_n \rightarrow 0$ such that the ratio $[x(t + \tau_n) - x(t)] / \tau_n$ tends weakly to 0. The following result gives an answer to a problem of Ważewski.

There exists a function $x(t)$ from $[0, 1]$ to a separable Banach space, satisfying the condition of Lipschitz, and such that the set $Dx(t)$ is empty for every t .

Let X be the space L of the functions $\varphi = \varphi(u)$ integrable in $[0, 1]$. Put

$$\psi(t, u) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \leq u \leq 1, \\ 0 & \text{for } 0 \leq u < t, \end{cases}$$

$$x(t) = \psi(t, \cdot)^1.$$

The function $x(t)$ satisfies the condition of Lipschitz since

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| = \left| \int_{t_1}^{t_2} dt \right| = |t_1 - t_2|.$$

¹ $\psi(\cdot)$ denotes the function $\psi(u)$ considered as an element of a functional space. The function defined by this formula has been supplied by Gelfand [2] as an example of a function without the weak derivative, satisfying the condition of Lipschitz.

The ratio $[x(t + \tau_n) - x(t)]/\tau_n$ does not converge weakly as $\tau_n \rightarrow 0$; in fact

$$\psi_n(\cdot) = \frac{x(t + \tau_n) - x(t)}{\tau_n} = \begin{cases} \frac{1}{\tau_n} & \text{for } \min(t, t + \tau_n) \leq u < \max(t, t + \tau_n), \\ 0 & \text{elsewhere;} \end{cases}$$

put $E_n = [\min(t, t + \tau_n), \max(t, t + \tau_n)]$ then $|E_n| \rightarrow 0$ and

$$\left| \int_{E_n} \psi_n(u) du \right| = 1;$$

hence the sequence $\{\psi_n(\cdot)\}$ cannot converge weakly in L (Banach [1], p. 136).

BIBLIOGRAPHY

- [1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1932.
- [2] I. Gelfand, *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren*, Recueil Mathématique 4 (1938), p. 235-286.
- [3] S. Mazur, *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen*, Studia Mathematica 4 (1933), p. 70-84.
- [4] S. Saks, *Theory of the integral*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów 1937.
- [5] T. Ważewski, *Une généralisation des théorèmes sur les accroissements finis au cas des espaces abstraits. Applications*. Bulletin Intern. de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, sér. A, 1949, p. 183-185.

UNE GÉNÉRALISATION DES THÉORÈMES SUR LES ACCROISSEMENTS FINIS AU CAS DES ESPACES DE BANACH ET APPLICATION À LA GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE L'HÔPITAL

Par T. WAŻEWSKI (Kraków)

Introduction. I. Une extension de la notion des théorèmes sur les accroissements finis. Le premier et le second théorème sur les accroissements finis conduisent aux formules

$$(0.1) \quad \frac{\Phi(t) - \Phi(a)}{t - a} = \Phi'(\xi)$$
$$(0.2) \quad \frac{\Phi(t) - \Phi(a)}{f(t) - f(a)} = \frac{\Phi'(\xi)}{f'(\xi)} \quad (a < \xi < b),$$

valables sous l'hypothèse que les fonctions réelles f et Φ satisfassent à certaines conditions bien connues.

Sur la relation (0.2) est basée la démonstration du théorème de L'Hôpital.

Or, dans maintes applications, le rôle essentiel de (0.1) consiste en ce que l'on peut localiser le rapport

$$(0.3) \quad \frac{\Phi(t) - \Phi(a)}{t - a}$$

lorsqu'on a des renseignements convenables sur la localisation de la dérivée de Φ . Le fait qu'il existe un ξ pour lequel subsiste l'égalité (0.1) joue un rôle plutôt secondaire. Si l'on sait par exemple que, pour tout t d'un intervalle Δ , le nombre $\Phi'(t)$ appartient à l'intervalle $[0, \infty)$ (c'est-à-dire si $\Phi'(t)$ est localisé dans cet intervalle), alors le rapport (0.3) est aussi localisé dans $[0, \infty)$ (ce qui veut dire que $\Phi(t)$ est croissante au sens large).

Supposons maintenant que les valeurs de $\Phi(t)$ représentent non pas des nombres mais des vecteurs cartésiens à n dimensions ou, ce qui revient au même, des points appartenant à l'espace cartésien à n dimensions. Supposons de plus que $\Phi'(t)$ existe dans un intervalle Δ . Or, des exemples faciles à construire montrent que l'égalité (0.1) peut être fautive pour tous les $\xi \in \Delta$.

Néanmoins, si l'on sait que $\Phi'(t)$ appartient à un ensemble convexe V lorsque $t \in \Delta$, on peut affirmer que (0.3) appartient au même ensemble V (Proposition A).

On a ainsi une raison de *considérer la Proposition A comme un théorème sur les accroissements finis.*

La formule (0.2) est fautive lorsque $\Phi(t)$ est un point variable dans l'espace à n dimensions ($n > 1$), $f(t)$ est monotone au sens strict, $f'(t)$ et $\Phi'(t)$ existent dans un intervalle Δ ($f'(t) \neq 0$).

On peut néanmoins déduire du Théorème 1 (§ 3) la suivante Proposition B: Si $\frac{\Phi'(t)}{f'(t)}$ appartient à un ensemble convexe V lorsque $t \in \Delta$, il en est de même du rapport

$$(0.4) \quad \frac{\Phi(t) - \Phi(a)}{f(t) - f(a)}.$$

La Proposition B reste aussi exacte lorsque les valeurs de $\Phi(t)$ appartiennent à un espace vectoriel D de Banach (cf. Théorème 1, § 3). En s'appuyant sur ce fait, on peut aussi démontrer le théorème de L'Hôpital pour $\Phi(t) \in D$, sans se servir de l'égalité (0.2) qui est inexacte dans ce cas.

La Proposition B tient donc, dans ce cas, la place de l'égalité (0.2). Cette circonstance ainsi que quelques autres suggèrent l'idée que *les propositions permettant de localiser les premiers membres de (0.1) et (0.2) lorsqu'on connaît une localisation des deuxièmes membres, peuvent être considérées comme théorèmes sur les accroissements finis.*

II. Une liaison avec la théorie des contingents de M. Bouligand. La Proposition A est un cas particulier d'un théorème qui joue un rôle fondamental dans la théorie des équations différentielles aux contingents et aux paratingents, construites indépendamment par A. Marchaud [2] et S. K. Zaremba [6]. La dérivée $\Phi'(t)$ y est remplacée par la dérivée contingentielle (à droite) qu'on désignera par

$$(0.5) \quad \left(\frac{d\Phi(t)}{dt} \right)_+$$

et qui constitue un ensemble de points. (Cette notion, définie dans le § 4, est, en un certain sens, isomorphe à celle du contingent de M. Bouligand dont se servent A. Marchaud et S. K. Zaremba. Elle présente quelques avantages formels dans le cas qu'on traite dans la suite).

Au cas où $\Phi(t)$ varie dans un espace D de Banach, on peut définir une notion analogue

$$(0.6) \quad \left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)} \right)_+$$

et avoir ainsi une généralisation du théorème (0.2) (Théorème 2, § 4).

On peut aller plus loin en indiquant une localisation de (0.3) et (0.4) même au cas où les dérivées contingentielles (0.5) et (0.6) n'existent en aucun point $t \in \Delta$.

III. Une généralisation de la dérivée contingentielle: bouts différentiels. J'ai esquissé une telle généralisation dans une note antérieure [3] relative aux théorèmes sur les accroissements finis en introduisant certaines notions

$$(0.7) \quad \left(\frac{d\Phi(t)}{dt} \right)_+^{**},$$

$$(0.8) \quad \left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)} \right)_+^{**}$$

qui existent pour chaque $\Phi(t)$ et pour chaque $f(t)$ monotone dans l'intervalle Δ (cf. § 6). Elles seront appelées *bouts différentiels*. (Dans la note [3] je les ai appelées „sommas différentiels“).

Ces notions n'interviennent pas dans l'énoncé du Théorème 1 (§ 3) sur les accroissements finis, mais, grâce à elles, on peut mettre le Théorème 1 sous la forme équivalente du Théorème 1 a (§ 6) (tout à fait analogue au Théorème 2 (§ 4) dans lequel interviennent les dérivées contingentielles).

Grâce à la notion de bout différentiel, on peut mettre le théorème généralisé de L'Hôpital sous une forme analogue à sa forme classique, même au cas où les dérivées contingentielles (0.6) n'existent nulle part (Théorème 4 du § 8, Hypothèse H_2 bis, Exemple 1 du § 8).

A. Alexiewicz [1] a donné un exemple d'une fonction $\Phi(t)$ vérifiant (avec une fonction $f(t)$ convenable) les prémisses du Théorème 1, pour laquelle la dérivée contingentielle (0.6) n'existe nulle part (cf. § 5, Remarque 3). — Un tel exemple est possible seulement au cas où l'espace D n'est pas compact.

Ceci prouve que le Théorème 1 s'applique aux fonctions $\Phi(t)$ d'une classe plus vaste que celle pour lesquelles la dérivée contingentielle (0.6) existe, et que la notion de bout différentiel mérite un certain intérêt comme une généralisation essentielle de la dérivée contingentielle.

IV. J'ai signalé le Théorème 1 dans la Note [3] sans entrer dans les détails de la démonstration. A. Alexiewicz [1] a démontré un théorème plus général que le Théorème 1 en y remplaçant la notion de convergence forte par celle de convergence faible. C'est pourquoi sa démonstration, bien rapide, n'est pas élémentaire, car elle s'appuie sur un théorème avancé, puisé de la théorie des fonctionnelles linéaires (Théorème de S. Mazur).

Au cas d'espaces à un nombre fini de dimensions M. Marchaud et S. K. Zaremba ont démontré que l'hypothèse que l'ensemble V soit convexe est nécessaire pour la vérité de la Proposition A. Il en est, à plus forte raison, de même du Théorème 1.

Le Lemme 1 (§ 2), bien élémentaire, relatif aux rapports de la forme (0.3) a l'avantage de mettre au jour la façon dont l'hypothèse de la convexité de V intervient dans la démonstration du Théorème 1.

V. Méthode de la démonstration du théorème généralisé de L'Hôpital. Les démonstrations courantes du théorème classique de L'Hôpital s'appuient sur l'égalité (0.2) laquelle n'est pas stricte pour les espaces D . J'ai indiqué précédemment [4] un lemme élémentaire sur les suites de nombres (Lemme 2 inséré au § 7 du présent article) servant à une démonstration uniforme pour tous les cas du théorème classique de L'Hôpital. Dans le même travail [4], à la page 126, j'ai indiqué une forme du théorème de L'Hôpital dans lequel n'interviennent pas du tout les dérivées des fonctions en question. Un théorème analogue de L'Hôpital ayant un caractère „non différentiel“ est vrai aussi au cas des espaces D de Banach (§ 7, Théorème 3). On en peut déduire la forme „différentielle“ du théorème de L'Hôpital (§ 8, Théorème 4) en s'appuyant sur le Théorème 1 qui, par conséquent, joue ici le rôle du théorème classique (0.2) sur les accroissements finis.

Dans le théorème de L'Hôpital ainsi généralisé les „bouts différentiels“ (0.7) et (0.8) ou, dans un cas plus particulier, les dérivées contingentielles (0.5) et (0.6), jouent le rôle du produit $\frac{\Phi'(t)}{f'(t)}$ qui en est un cas particulier.

L'Exemple 1 du § 8, déduit de l'exemple mentionné de A. Alexiewicz, montre que le théorème de L'Hôpital ainsi généralisé s'applique aussi au cas où les dérivées contingentielles (au sens de M. Bouligand) (0.5) et (0.6) n'existent nulle part.

Même au cas où les valeurs de $\Phi(t)$ sont réelles, le Théorème 4 paraît être nouveau en ce qui concerne le caractère de sa généralité.

§ 1. *Hypothèse G.* $f(t)$ est une fonction réelle, continue et monotone au sens strict dans un intervalle ouvert Δ .

$\Phi(t)$ est une fonction continue dans Δ ayant pour valeurs les points appartenant à un espace D de Banach.

A est un ensemble vide, fini ou dénombrable, ACA .

V est un ensemble convexe fermé, VCD .

Notation N. En admettant l'Hypothèse G , on pose

$$I(p, q) = \frac{\Phi(q) - \Phi(p)}{f(q) - f(p)} \quad \text{lorsque} \quad p \in \Delta, q \in \Delta, p \neq q.$$

La norme de $u \in D$ sera désignée par $|u|$.

$$\rho(u, v) = |v - u|$$

désigne la distance des points u et v . Pour $Z \neq 0$, ZCD , $u \in D$ on pose

$$\rho(u, Z) = \inf_{v \in Z} |v - u|.$$

§ 2. La démonstration du Théorème 1 du § 3 s'appuiera sur une remarque élémentaire insérée au lemme suivant (cf. [3], p. 184):

Lemme 1. Admettons l'Hypothèse G . Si t_2 est situé entre t_1 et t_3 ($t_i \in \Delta$ pour $i=1,2,3$), le point $I(t_1, t_3)$ est situé sur le segment rectiligne fermé S reliant les points $I(t_1, t_2)$ et $I(t_2, t_3)$ qui appartiennent à l'espace D .

Démonstration. Posons

$$(2.1) \quad \lambda = \frac{f(t_3) - f(t_2)}{f(t_3) - f(t_1)}, \quad \mu = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{f(t_3) - f(t_1)}.$$

La fonction $f(t)$ étant monotone au sens strict et t_2 étant situé entre t_1 et t_3 , on a

$$(2.2) \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0, \quad \lambda + \mu = 1.$$

En vertu de (2.1), il vient l'égalité

$$I(t_1, t_3) = \lambda I(t_2, t_3) + \mu I(t_1, t_2)$$

qui, en vertu de (2.2), exprime que le point $I(t_1, t_3)$ est situé sur le segment S .

§ 3. *Théorème 1 (sur les accroissements finis).* Admettons l'Hypothèse G . Si la relation

$$(3.1) \quad \sigma(t) = \liminf_{h \rightarrow 0+0} \varrho \left(\frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{f(t+h) - f(t)}, V \right) = \liminf_{h \rightarrow 0+0} \varrho(I(t, t+h), V) = 0$$

a lieu lorsque $t \in A-A$, pour toute couple de points ¹⁾

$$(3.2) \quad p \in \Delta, \quad q \in \Delta, \quad p \neq q$$

on a

$$(3.3) \quad I(p, q) = \frac{\Phi(q) - \Phi(p)}{f(q) - f(p)} \in V.$$

Démonstration. Comme $I(p, q) = I(q, p)$ pour $p \neq q$, il suffit de se borner au cas

$$(3.4) \quad p < q.$$

L'ensemble V étant fermé, $A-A$ partout dense dans Δ , $f(t)$ et $\Phi(t)$ continues dans Δ , il suffit de prouver (3.3) au cas où

$$(3.5) \quad p < q, \quad p \in A-A, \quad q \in A-A$$

car un passage à la limite permettra d'établir (3.3) dans le cas (3.2).

¹⁾ Dans ma Note [3] l'ensemble A n'intervenait pas dans l'énoncé de ce théorème. L'idée d'introduire A est due à A. Alexiewicz [1].

On peut se borner au cas où $f(t)$ est croissante au sens strict car, dans le cas contraire, on pourrait remplacer f et Φ par $-f$ et $-\Phi$, ce qui ne changerait pas la valeur de $I(p, q)$ et, par suite, les relations (3.1) et (3.3) passeraient en des relations équivalentes.

Désignons par R la classe des valeurs que prend la fonction

$$\gamma(t) = \varrho(I(p, t), V)$$

lorsque t varie dans A . R constitue donc un ensemble au plus dénombrable de nombres non négatifs. Il existe donc une suite de nombres $\{\eta_n\}$ n'appartenant pas à R telle que

$$\eta_n > 0, \quad \eta_n \bar{\in} R, \quad \eta_n \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \rightarrow \infty.$$

On a évidemment

$$(3.6) \quad t \in A - A, \quad \sigma(t) = 0 \quad \text{lorsque} \quad \gamma(t) = \eta_n.$$

Désignons par

$$V_n, \quad F_n$$

respectivement le voisinage convexe fermé de V de rayon η_n et la frontière de ce voisinage. Comme

$$V = \prod_{n=1}^{\infty} V_n$$

il suffit de prouver que

$$I(p, q) \in V_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Supposons que cette relation n'ait pas lieu pour certain $n = N$, c'est-à-dire que

$$I(p, q) \bar{\in} V_N.$$

On a évidemment

$$(3.7) \quad \varrho(I(p, q), V) > \eta_N.$$

Envisageons le point variable $I(p, t)$ pour $t \in A$, $t > p$. Comme $p \bar{\in} A$, on a (cf. 3.1) $\sigma(p) = 0$. Il existe donc un point τ tel que $p < \tau < q$, $\varrho(I(p, \tau), V) < \eta_N$.

On donc

$$(3.8) \quad I(p, \tau) \in V_N.$$

En vertu de (3.7) et (3.8), il existe un point t^* tel que

$$(3.9) \quad p < \tau < t^* < q, \quad \gamma(t^*) = \varrho(I(p, t^*), V) = \eta_N,$$

$$(3.10) \quad \varrho(I(p, t), V) > \eta_N \quad \text{pour} \quad t^* < t \leq q.$$

On a évidemment

$$(3.11) \quad I(t^*, p) \in F_N \subset V_N.$$

En vertu de (3.9) et (3.6) il vient $\sigma(t^*) = 0$. Il existe donc (cf. 3.1) une suite de nombres t_k tels que

$$(3.12) \quad t^* < t_k < q, \quad t_k \rightarrow t^*, \quad \varrho(I(t^*, t_k), V) < \eta_N \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

et, par suite,

$$(3.13) \quad I(t^*, t_k) \in V_N.$$

Appliquons le Lemme 1 aux points p, t^*, t_k . Comme $p < t^* < t_k$, le point $I(p, t_k)$ appartient au segment S reliant les points $I(p, t^*)$ et $I(t^*, t_k)$. Mais ces points, qui constituent les extrémités de S , appartiennent à l'ensemble convexe V_N (cf. 3.11 et 3.13). Il en résulte (cf. 3.12) que

$$I(p, t_k) \in V_N, \quad t^* < t_k < q$$

et, par suite,

$$\varrho(I(p, t_k), V) \leq \eta_N, \quad t^* < t_k < q,$$

ce qui est contraire à (3.10).

Théorème 1 bis. Le Théorème 1 reste vrai lorsqu'on remplace (3.1) par la relation

$$\liminf_{h \rightarrow 0-0} \left(\frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{f(t+h) - f(t)}, V \right) = 0$$

ayant lieu, par hypothèse, pour $t \in \Delta - A$. On l'établit en introduisant la variable $s = -t$.

§ 4. Le point $P(t) \in D$ sera dit *élément contingentiel (à droite) de $\Phi(t)$ relatif à $f(t)$* lorsqu'il existe une suite h_n telle que

$$h_n > 0, \quad h_n \rightarrow 0, \quad \frac{\Phi(t+h_n) - \Phi(t)}{f(t+h_n) - f(t)} \rightarrow P(t).$$

La classe de tous les $P(t)$ de cette sorte sera désignée par

$$(4.1) \quad \left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)} \right)_+$$

et appelée *dérivée contingentielle (à droite) de Φ relative à f* . On définit d'une façon analogue la *dérivée contingentielle (à gauche) relative à f*

$$(4.2) \quad \left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)} \right)_-.$$

Il peut arriver qu'aucune de ces dérivées n'existe pas (ou, plutôt, qu'elle soit vide).

Du Théorème 1 résulte immédiatement le théorème suivant:

Théorème 2. Admettons l'Hypothèse G et supposons que la relation

$$(4.3) \quad V \left(\frac{d\varphi(t)}{df(t)} \right)_+$$

ait lieu pour $t \in \Delta - A$. Ceci posé, la relation (3.3) est vraie pour tous les p, q vérifiant (3.2).

Démonstration. Il suffit de remarquer que la relation (3.1) constitue une conséquence de (4.3).

Remarque 1. Un théorème analogue subsiste pour la dérivée contingente à gauche (4.2).

§ 5. *Un rapport du Théorème 1 à la théorie des équations différentielles aux contingents et paratingents de A. Marchaud et de S. K. Zaremba.*

Remarque 2. Au cas où $f(t) = t$ et l'espace D de Banach se réduit à l'espace cartésien à n dimensions, le Théorème 2 constitue une généralisation d'un théorème fondamental dans la théorie des équations différentielles aux contingents (ou aux paratingents) construites indépendamment par A. Marchaud ([2], cf. en particulier la Proposition 3^o à la page 100) et S. K. Zaremba [6].

Il peut arriver que la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{f(t+h) - f(t)}$$

existe. Elle sera alors appelée *dérivée (à droite) de Φ relative à f* et désignée par

$$(5.1) \quad \left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)} \right)_+$$

On définit la dérivée relative à gauche de la même manière.

Corollaire 1. Gardons l'Hypothèse G et supposons

$$\left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)} \right)_+ \in V \quad \text{lorsque} \quad t \in \Delta - A.$$

Ceci posé, la relation (3.3) a lieu pour les points p, q vérifiant (3.2).

C'est une conséquence immédiate du Théorème 2. — Un corollaire analogue subsiste pour la dérivée relative à gauche.

Corollaire 2. Admettons l'Hypothèse G et supposons que, pour tout $t \in \Delta - A$, les dérivées (à droite) $\Phi'_+(t)$, $f'_+(t)$ existent ($f'_+(t)$ fini et $f'_+(t) \neq 0$). Si

$$\frac{\Phi'_+(t)}{f'_+(t)} \in V \quad \text{lorsque} \quad t \in \Delta - A,$$

la relation (3.3) a lieu. — Une propriété analogue subsiste pour les dérivées à gauche.

En remarquant que

$$\frac{\Phi'_+(t)}{f'_+(t)} = \left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)} \right)_+ \quad \text{pour } t \in \Delta - A,$$

on ramène ce corollaire au précédent.

Remarque 3. Le Théorème 1 peut être appliqué même au cas où les dérivées contingentielles n'existent pas, car il peut arriver que la relation (3.1) soit satisfaite et les dérivées contingentielles (4.1) n'existent pas.

On doit notamment à A. Alexiewicz [1] un exemple d'une fonction $\Phi(t)$, telle que

$$\left| \frac{\Phi(q) - \Phi(p)}{q - p} \right| < 1 \quad \text{pour } p \in \Delta, q \in \Delta, p \neq q$$

et que (4.1) est vide pour tout $t \in \Delta$. Les relations (3.1) et (3.3) seront alors évidemment satisfaites lorsque $f(t) \equiv t$ et V désigne la sphère

$$|x| \leq 1, \quad x \in D.$$

Le Théorème 1 est donc essentiellement plus général que le Théorème 2 dans lequel interviennent les dérivées contingentielles.

§ 6. Une généralisation de la dérivée contingentielle (relative à $f(t)$) de la fonction $\Phi(t)$. Bout différentiel (relatif à f) de la fonction $\Phi(t)$.

La remarque précédente suggère l'idée de généraliser la notion des dérivées contingentielles (4.1) et (4.2) au cas où elles sont vides, en les remplaçant par une notion plus générale

$$\left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)} \right)_+^{**}, \quad \left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)} \right)_-^{**}$$

de façon que le Théorème 1 puisse revêtir, dans toute sa généralité, une forme analogue à celle du Théorème 2.

Notion de bout fermé. Soient $\{F_n\}$ et $\{G_n\}$ deux suites d'ensembles fermés telles que

$$F_n \subset D, \quad G_n \subset D \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ces suites seront dites *équivalentes* lorsque chaque F_n contient presque tous les G_k ($G_k \subset F_n$ pour k suffisamment grand) et inversement.

La classe B de toutes les suites $\{G_n\}$ équivalentes à $\{F_n\}$ sera dite *bout fermé* ²⁾.

²⁾ Notion analogue à celle du *Ende* dans la théorie des *Primenden* de C. Carathéodory.

Tout $\{G_n\}$ sera dit *représentant de B*. Soient Q un ensemble fermé ($Q \subset D$) et $Q(\varepsilon)$ un voisinage fermé ³⁾ de Q de rayon $\varepsilon > 0$.

On écrira

$$(6.1) \quad QB \neq 0$$

lorsque, pour chaque $\varepsilon > 0$,

$$Q(\varepsilon)F_n \neq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

et on écrira

$$(6.2) \quad B \subset Q$$

lorsque $F_n \subset Q(\varepsilon)$ pour chaque $\varepsilon > 0$ à partir d'un indice assez grand.

Notion de bout différentiel. Admettons l'Hypothèse G . Soient $t \in \Delta$ et $\{h_n\}$ une suite de nombres tels que

$$(6.3) \quad t < t + h_n, \quad t + h_n \in \Delta, \quad h_{n+1} < h_n, \quad h_n \rightarrow 0.$$

Désignons par U_n l'ensemble des valeurs que prend

$$\frac{\Phi(s) - \Phi(t)}{f(s) - f(t)}$$

lorsque s varie dans l'intervalle $(t, t + h_n]$, c'est-à-dire $t < s \leq t + h_n$. Désignons par F_n la fermeture de U_n . La suite $\{F_n\}$ représente évidemment un bout fermé qui ne dépend pas du choix des h_n intervenant dans (6.3). Ce bout sera dit *bout différentiel (à droite) de $\Phi(t)$ relatif à $f(t)$* et sera désigné par

$$(6.4) \quad \left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)} \right)_+^{**}$$

On définit d'une façon analogue

$$(6.4a) \quad \left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)} \right)_-^{**}$$

Il est à peu près évident (cf. (6,1)) que la relation (3.1) est équivalente à la relation

$$(6,5) \quad V \left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)} \right)_+^{**} \neq 0.$$

Le Théorème 1 peut donc être exprimé de la façon suivante:

Théorème 1a. Si l'on a, dans l'Hypothèse G ,

$$(6.6) \quad V \left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)} \right)_+^{**} \neq 0 \quad \text{pour } t \in \Delta - A,$$

la relation (3.3) a lieu pour les p, q satisfaisant à (3.2).

³⁾ Soit $S(P, \varepsilon)$ la sphère fermée de rayon ε et de centre P . La fermeture de l'ensemble des points appartenant aux sphères $S(P, \varepsilon)$, pour lesquels $P \in Q$ constitue le voisinage $Q(\varepsilon)$.

Remarque 4. Le théorème précédent reste vrai lorsqu'on remplace (6.4) par (6.4a) dans la relation (6.6).

Du Théorème 1 résulte facilement la suivante généralisation d'un théorème sur les dérivées contingentes fondamental dans la théorie des équations différentielles aux contingents ([2] et [6]).

Théorème 1 b. Si, dans l'Hypothèse G , le bout différentiel de $\Phi(t)$ relatif à $f(t)$ satisfait à la condition (cf. 6.1)

$$V\left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)}\right)_+^{**} \neq 0 \quad \text{lorsque} \quad t \in \Delta - A,$$

alors (cf. 6.2)

$$\left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)}\right)_+^{**} \subset V \quad \text{pour tout} \quad t \in \Delta.$$

§ 7. *Théorème de L'Hôpital.* J'appliquerai un lemme élémentaire que j'ai introduit dans un article antérieur [4] pour faire une démonstration uniforme de tous les cas du théorème classique de L'Hôpital. Voici ce lemme:

Lemme 2. Supposons qu'on ait, pour les suites des nombres $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$,

1°) $b_n \neq 0$ ($n=1, 2, \dots$)

2°) on a soit

$$a_n \rightarrow 0, \quad b_n \rightarrow 0,$$

soit

$$|b_n| \rightarrow \infty.$$

Il existe alors deux suites croissantes d'indices $\{\gamma_n\}$ et $\{\delta_n\}$ tels que

$$\gamma_n \rightarrow \infty, \quad \delta_n \rightarrow \infty, \quad \frac{a_{\gamma_n}}{b_{\delta_n}} \rightarrow 0, \quad \frac{b_{\gamma_n}}{b_{\delta_n}} \rightarrow 0, \quad b_{\delta_n} - b_{\gamma_n} \neq 0.$$

Définition 1 (de la convergence au sens C). Soient V un ensemble convexe fermé, $V(\varepsilon)$ le voisinage convexe de V de rayon ε et $\{x_n\}$ une suite de points appartenant à D . Si, pour chaque $\varepsilon > 0$, on a $x_n \in V(\varepsilon)$ à partir d'un indice assez grand, on écrira

$$x_n \xrightarrow{C} V$$

(x_n converge au sens C vers l'ensemble V).

Remarque 5. Si l'ensemble V se réduit à un seul point $P \in D$, la convergence au sens C coïncide avec la convergence au sens ordinaire vers le point P .

Hypothèse hôtaliennne K. Admettons l'Hypothèse G relative à $f(t)$, $\Phi(t)$ et Δ . Les valeurs de $\Phi(t)$ appartiennent à un espace vectoriel D de Banach. k désigne une extrémité (fini ou non) de l'intervalle ouvert Δ . On a soit

$$\lim_{t \rightarrow k} f(t) = \lim_{t \rightarrow k} |\Phi(t)| = 0$$

soit

$$\lim_{t \rightarrow k} |f(t)| = \infty.$$

Hypothèse hôtaliennne L. V est un ensemble convexe borné ($V \in D$). Pour chaque couple de suites de points p_n, q_n tels que

$$(7.1) \quad p_n \in \Delta, \quad q_n \in \Delta, \quad p_n \neq q_n, \quad p_n \rightarrow k, \quad q_n \rightarrow k,$$

on a (cf. la Définition 1)

$$(7.2) \quad \frac{\Phi(q_n) - \Phi(p_n)}{f(q_n) - f(p_n)} \xrightarrow{c} V.$$

Au cas où V se réduit à un point unique, la relation (7.2) exprime (cf. la Remarque 5) une convergence au sens ordinaire

$$(7.2 \text{ bis}) \quad \frac{\Phi(q_n) - \Phi(p_n)}{f(q_n) - f(p_n)} \rightarrow V.$$

Théorème 3. (Forme „non différentielle“ du théorème généralisé de L'Hôpital). Dans les Hypothèses K et L , on a (cf. la Définition 1)

$$(7.3) \quad \frac{\Phi(t)}{f(t)} \xrightarrow{c} V \quad \text{lorsque} \quad t \in \Delta, \quad t \rightarrow k,$$

c'est-à-dire

$$(7.4) \quad \frac{\Phi(t_n)}{f(t_n)} \xrightarrow{c} V$$

pour chaque suite $\{t_n\}$ telle que $t_n \in \Delta, t_n \rightarrow k$ (cf. la Définition 1). Au cas où V se réduit à un point unique, la relation (7.3) exprime (cf. la Remarque 5) une convergence au sens ordinaire

$$(7.3 \text{ bis}) \quad \frac{\Phi(t)}{f(t)} \rightarrow V \quad \text{lorsque} \quad t \in \Delta, \quad t \rightarrow k.$$

Démonstration. Supposons, pour la démonstration par l'impossible, que (7.4) n'ait pas lieu. Il existe donc une suite $\{s_n\}$, telle que

$$(7.5) \quad s_n \in \Delta, \quad s_n \rightarrow k, \quad \varrho \left(\frac{\Phi(s_n)}{f(s_n)}, V \right) > \eta > 0 \quad (\eta \text{ fixe}).$$

Posons

$$a_n = |\Phi(s_n)|, \quad b_n = f(s_n).$$

En vertu de l'Hypothèse K , les suites $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ satisfont à la prémisses du Lemme 2⁴).

Il existe donc deux suites croissantes d'indices $\{\gamma_n\}$ et $\{\delta_n\}$ telles que

$$(7.6) \quad \gamma_n \rightarrow \infty, \quad \delta_n \rightarrow \infty, \quad \frac{f(s_{\gamma_n})}{f(s_{\delta_n})} \rightarrow 0, \quad \frac{|\Phi(s_{\gamma_n})|}{f(s_{\delta_n})} \rightarrow 0, \quad f(s_{\delta_n}) - f(s_{\gamma_n}) \neq 0.$$

Posons

$$(7.7) \quad I_n = \frac{\Phi(s_{\delta_n}) - \Phi(s_{\gamma_n})}{f(s_{\delta_n}) - f(s_{\gamma_n})}.$$

Comme $s_{\gamma_n} \rightarrow k$, $s_{\delta_n} \rightarrow k$, on aura, en vertu de l'Hypothèse L ,

$$(7.8) \quad I_n \xrightarrow{c} V.$$

Il existe donc une suite $\{x_n\}$ telle que

$$(7.9) \quad x_n \in V, \quad I_n - x_n \rightarrow 0.$$

En calculant $\Phi(s_{\delta_n})$ de la formule (7.7), il vient

$$(7.10) \quad \frac{\Phi(s_{\delta_n})}{f(s_{\delta_n})} - I_n = \frac{\Phi(s_{\gamma_n})}{f(s_{\delta_n})} - I_n \frac{f(s_{\gamma_n})}{f(s_{\delta_n})}.$$

En vertu de (7.8), la suite $\{I_n\}$ est bornée car V est borné. De (7.6) et (7.10) il vient

$$\frac{\Phi(s_{\delta_n})}{f(s_{\delta_n})} - I_n \rightarrow 0,$$

d'où (cf. 7.9)

$$\frac{\Phi(s_{\delta_n})}{f(s_{\delta_n})} - x_n \rightarrow 0,$$

et, comme $x_n \in V$, on a

$$\varrho \left(\frac{\Phi(s_{\delta_n})}{f(s_{\delta_n})}, V \right) \rightarrow 0$$

ce qui n'est pas compatible avec (7.5).

Remarque 6. Dans le cas particulier où l'espace D de Banach se réduit à l'espace cartésien à une dimension, $D = (-\infty, +\infty)$, le théorème précédent reste vrai aussi quand V est un ensemble convexe non borné.

Si dans la relation (7.2 bis), on a $V = +\infty$ ou $V = -\infty$, la relation (7.3 bis) a aussi lieu. — On l'établit facilement en se servant du Lemme 2.

⁴) La fonction $f(t)$ étant monotone au sens strict dans l'intervalle ouvert Δ , elle devient nulle au plus une fois. Comme $s_n \rightarrow k =$ extrémité de Δ , il en résulte que $b_n = f(s_n) \neq 0$ à partir d'un indice n assez grand. En supprimant dans $\{b_n\}$ un nombre fini d'éléments, on aura $b_n \neq 0$.

§ 8. Si $\eta > 0$ et V est fermé et convexe, désignons, comme précédemment, par

$$V(\eta)$$

le voisinage convexe fermé de V de rayon η .

Théorème 4. (Forme „différentielle“ du théorème généralisé de L'Hôpital).

Prémises. Admettons les Hypothèses G et K relativement à $f(t)$, $\Phi(t)$, Δ et k .

Soit V un ensemble fermé, borné et convexe (VCD).

Admettons de plus l'une des Hypothèses suivantes H_1 - H_6 :

H_1 . A tout $\eta > 0$ correspond un $s \in \Delta$ tel que

$$(8.1) \quad \liminf_{h \rightarrow 0+0} \varrho \left(\frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{f(t+h) - f(t)}, V(\eta) \right) = 0$$

lorsque $t \in (s, k) - A(s, k)$;

H_2 . A tout $\vartheta > 0$ correspond un $s \in \Delta$ tel que

$$V(\vartheta) \left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)} \right)^{**} \neq 0$$

lorsque $t \in (s, k) - A(s, k)$. (Pour la signification de cette relation cf. (6.1), et (6.5)).

On peut introduire la définition suivante de la convergence au sens E :

Étant donné une suite de bouts fermés B_n (cf. § 6) et un ensemble convexe fermé V , on écrira

$$B_n \xrightarrow[E]{} V$$

lorsque pour tout $\eta > 0$, la relation $V(\eta)$, $B_n \neq 0$ a lieu à partir d'un indice suffisamment grand (cf. 6.1). En vertu de cette définition l'Hypothèse H_1 pourra être mise sous la forme équivalente suivante:

$$H_2 \text{ bis.} \quad \left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)} \right)^{**} \xrightarrow[E]{} V \quad \text{lorsque} \quad t \in \Delta - A, \quad t \rightarrow k.$$

H_3 . A tout $\eta > 0$ correspond un $s \in \Delta$ tel que

$$\left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)} \right)^*_+ V(\eta) \neq 0 \quad \text{pour} \quad t \in (s, k) - A(s, k)$$

(Dans le premier terme de cette relation intervient la dérivée continue de Φ relative à f , cf. (4.1)).

H_4 . A tout $t \in \Delta - A$ correspond un élément $P(t)$

$$P(t) \in \left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)} \right)^*_+$$

tel que

$$P(t) \xrightarrow[C]{} V \quad \text{lorsque} \quad t \in \Delta - A, \quad t \rightarrow k$$

(cf. (4.1) et la Définition 1).

H_5 . Pour tout $t \in \Delta - A$ la dérivée relative à droite $\left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)}\right)_+$ existe et l'on a

$$\left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)}\right)_+ \xrightarrow{c} V \quad \text{lorsque} \quad t \in \Delta - A, t \rightarrow k,$$

(cf. la notation (5.1) et la Définition 1).

H_6 . Pour tout $t \in \Delta - A$ les dérivées à droite $f'_+(t)$ (finie et non nulle) et $\Phi'_+(t)$ existent, $\Phi'_+(t) \in D$ et

$$\frac{\Phi'_+(t)}{f'_+(t)} \xrightarrow{c} V \quad \text{lorsque} \quad t \in \Delta - A, t \rightarrow k.$$

Thèse. Ceci étant admis, on a (cf. la Définition 1)

$$(8.2) \quad \frac{\Phi(t)}{f(t)} \xrightarrow{c} V \quad \text{lorsque} \quad t \rightarrow k.$$

Remarque 7. Dans le cas où V se réduit à un seul point, la convergence au sens C (8.2) passe en la convergence au sens ordinaire

$$\frac{\Phi(t)}{f(t)} \rightarrow V \quad \text{lorsque} \quad t \rightarrow k.$$

Démonstration. Les Hypothèses H_1 et H_2 sont équivalentes (cf. 6.5). On remarque facilement que l'Hypothèse H_1 est une conséquence de chacune des Hypothèses H_3 - H_6 .

Il suffit donc de démontrer le théorème en s'appuyant sur l'Hypothèse H_1 .

Ramenons le présent théorème au Théorème 3. Les Hypothèses G , K et L constituent les prémisses du Théorème 3, les Hypothèses G , K , H_1 constituent celles du présent théorème. Il suffit donc de prouver que l'Hypothèse L résulte de l'Hypothèse H_1 car la thèse (7.3) du Théorème 3 coïncide avec la thèse (8.2) du présent théorème.

Admettons relativement aux suites $\{p_n\}$ et $\{q_n\}$ les relations (7.1), c'est-à-dire suivantes

$$p_n \in \Delta, \quad q_n \in \Delta, \quad p_n \neq q_n, \quad p_n \rightarrow k, \quad q_n \rightarrow k.$$

Il suffit de prouver (cf. 7.2) que

$$(8.3) \quad \frac{\Phi(q_n) - \Phi(p_n)}{f(q_n) - f(p_n)} \xrightarrow{c} V \quad \text{lorsque} \quad n \rightarrow \infty.$$

Soit $\eta > 0$ un nombre arbitraire. En vertu de H_1 , il existe un s tel que la relation (8.1) ait lieu dans l'ensemble $(s, k) - A(s, k)$. En vertu du Théorème 1, sur les accroissements finis, il s'ensuit que

$$\frac{\Phi(q) - \Phi(p)}{f(q) - f(p)} \in V(\eta)$$

lorsque $p \neq q$, $p \in (s, k)$, $q \in (s, k)$.

On a, à partir d'un indice $n = N$,

$$p_n \neq q_n, \quad p_n \in (s, k), \quad q_n \in (s, k).$$

Il vient, en vertu du Théorème 1, que

$$\frac{\Phi(q_n) - \Phi(p_n)}{f(q_n) - f(p_n)} \in V(\eta) \quad \text{pour } n \geq N,$$

c'est-à-dire

$$\rho\left(\frac{\Phi(q_n) - \Phi(p_n)}{f(q_n) - f(p_n)}, V\right) \leq \eta \quad \text{pour } n \geq N,$$

$\eta > 0$ étant arbitraire, on en conclue la vérité de (8.3) (cf. la Déf. 1 du § 7).

La prémisse L du Théorème 3 se trouvant ainsi vérifiée, on a la relation (7.3), ce qui termine la démonstration.

Remarque 7. Le théorème précédent restera vrai lorsque l'on remplacera dans les Hypothèses H_1 - H_6 les limites à droite (respectivement les dérivées, les dérivées contingentielles ou les bouts différentiels à droite) par les limites (ou les dérivées etc.) à gauche (cf. Théorème 1 bis).

Exemple 1. Le théorème précédent peut être aussi appliqué au cas où la dérivée contingentielle

$$(8.4) \quad \left(\frac{d\Phi(t)}{df(t)}\right)_+$$

n'existe en aucun point de Δ (en ce sens qu'elle constitue un ensemble vide).

Soit, en effet, $A(t)$ la fonction construite dans l'article cité de M. Alexiewicz [1], dont la dérivée contingentielle est vide pour chaque t et pour laquelle on a

$$|A(q) - A(p)| \leq |q - p|$$

lorsque $p \in \bar{\Delta}$, $q \in \bar{\Delta}$ ou $\bar{\Delta} = [0, 1]$ et $\Delta = (0, 1)$.

En ajoutant au besoin une constante convenable r ($r \in D$) à $A(t)$, on peut admettre que $A(0) = 0$.

En posant $\Phi(t) = tA(t)$, $f(t) = t$, on démontre facilement que (8.4) n'existe pas (ou plutôt est vide) pour tout $t \in \Delta$. En désignant par Θ le zéro de l'espace D en question, et en posant $V = \Theta$ et $k = 0$, on voit facilement que les Hypothèses G , K et H_1 ont lieu. On aura donc $\frac{\Phi(t)}{f(t)} \rightarrow \Theta$ lorsque $t \rightarrow 0$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Alexiewicz, *On a theorem of T. Ważewski*, ce volume, p. 129—131.
 [2] A. Marchaud, *Sur les champs continus de demi-cônes convexes et leurs intégrales*, Compositio Mathematica t. 3 (1936), p. 89-127.
 [3] T. Ważewski, *Une généralisation des théorèmes sur les accroissements finis au cas des espaces abstraits. Applications*, Bull. de l'Acad. Polon. des Sciences et des Lettres, série A (1949), p. 183-185.
 [4] — *Quelques démonstrations uniformes pour tous les cas du théorème de L'Hôpital. Généralisations*, Prace Mat. Fiz. t. 47 (1949), p. 117-123.
 [5] — *Une démonstration uniforme du théorème généralisé de L'Hôpital*, Ann. Soc. Polon. de Math. t. 22 (1949), p. 161-168.
 [6] S. K. Zaremba, *Sur les équations au paratingent*, Bull. des Sciences Math. t. 60 (2), (1936), p. 139-160.

SUR UN THÉORÈME DE KNESER

Par S. ŁOJASIEWICZ (Kraków)

Le théorème bien connu de Kneser¹⁾ affirme que l'intersection de la zone d'émission d'un point $p_0 = (t^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$, respective à un système d'équations différentielles $dx_i/dt = f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ et d'un hyperplan $t=c$, est toujours un continu, pourvu que toute intégrale passant par p_0 soit définie dans l'intervalle $[t_0, c]$.

T. Ważewski a posé un problème qui consiste à caractériser les continus qui sont des intersections de la zone d'émission à droite (ou à gauche) d'un point, respective à un système, par un hyperplan ($t=c$).

Dans la note présente je montre, pour $n=2$, en admettant l'unicité des intégrales à gauche (ou à droite), que les continus en question sont ceux qui ne coupent pas le plan.

Considérons un système d'équations différentielles

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, y), \\ \dot{y} &= g(t, x, y), \end{aligned}$$

et supposons que f et g soient continues dans un domaine à 3 dimensions G .

Théorème I. Soient $p_0 = (t_0, x_0, y_0) \in G$, $c > t_0$, Z la partie commune de la bande $t_0 \leq t \leq c$ et de la zone d'émission de p_0 , λ le plan $t=c$. Supposons que chaque intégrale de (1), qui passe par p_0 , soit définie dans $[t_0, c]$ et que chaque point de la frontière de Z soit un point d'unicité à gauche. Nous affirmons que $Z\lambda$ est un continu qui ne coupe pas le plan.

Démonstration. Dans le cas contraire, l'ensemble $Z\lambda$ couperait le plan λ entre certains points a et b de $\lambda - \lambda Z$. Z étant un compact contenu dans G , on peut admettre, sans restreindre la généralité, que G soit

¹⁾ H. Kneser, *Über die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen daß der Lipschitz-Bedingung nicht genügt*, Sitz.-Ber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., Phys.-Math. Kl., 1923, p. 171-174. Cf. aussi M. Müller, *Beweis eines Satzes des Herrn H. Kneser über die Gesamtheit der Lösungen die ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen durch einen Punkt scheidet*, Math. Zeitschr. 28 (1928), p. 349-355; M. Fukuhara, *Sur les systèmes d'équations différentielles ordinaires, I*, Japanese Journal of Math. 5 (1929), p. 345-350; E. Kamke, *Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, II*, Acta Math. 58 (1932), p. 57-85.

l'espace tout entier, que f et g soient bornées, et, par suite, que toutes les intégrales soient définies dans $(-\infty, \infty)$. Il existent alors deux points a_0 et b_0 sur le plan $\pi: t=t^0$, tels que a, a_0 ou b, b_0 soient situés sur la même intégrale. a_0 et b_0 étant différents de p_0 , on peut les joindre par un continu $\Gamma C \pi$ qui ne contient pas p_0 . En désignant par Z_Γ la zone d'émission de Γ , $Z_\Gamma \lambda$ est un continu ²⁾ contenant a et b . $Z_\Gamma \lambda$ a donc un point commun d avec $Z \lambda$. Il existe un $d_0 \in \Gamma$ tel que d, d_0 soient situés sur la même intégrale \mathcal{J} . Comme $d_0 \notin Z$ et $d \in Z$, il existe un point de \mathcal{J} qui est le premier (si l'on parcourt \mathcal{J} à partir de d_0 à d) qui fait partie de Z et, par suite, de la frontière de Z . Evidemment ce point n'est pas un point d'unicité à gauche, contrairement à l'hypothèse ³⁾.

Théorème II. Soit C un continu qui ne coupe pas le plan $t=1$. Il existent des fonctions $f(t, x, y)$ et $g(t, x, y)$, continues dans l'espace tout entier, telles que

1° chaque point différent de l'origine $t=x=y=0$ est un point d'unicité du système (1),

2° C est la partie commune du plan $t=1$ et de la zone d'émission de l'origine.

Démonstration. Écrivons le système (1) sous la forme complexe

$$(2) \quad \dot{z} = F(t, z),$$

où $z = x + iy$ et $F(t, z) = f(t, x, y) + ig(t, x, y)$. Soit C un continu donné qui ne coupe pas le plan. Posons

$$(3) \quad F(t, z) = 0 \quad \text{pour } t \leq 0,$$

$$(4) \quad F(t, z) = \frac{2z}{t} \quad \text{pour } (t, z) \in E,$$

où E est l'ensemble de points (t, z) tels que

$$(5) \quad t > 0 \quad \text{et} \quad \frac{z}{t^2} \in C \quad (\text{ensemble } E).$$

²⁾ Cf. S. K. Zaremba, *Sur les équations au paratingent*, Bull. Sci. Math. LX (1936), p. 153; c'est une conséquence immédiate du théorème de Kneser. En effet, si $Z_\Gamma \lambda$ était la réunion d'ensembles disjoints, non vides, fermés, A et B , alors $\Gamma = \Gamma Z_A + \Gamma Z_B$, où Z_A et Z_B sont les zones d'émission de A et B . ΓZ_A et ΓZ_B auraient donc un point commun q . En désignant par Z_q la zone d'émission de q , on aurait $Z_q \lambda \subset Z_\Gamma \lambda$, d'où $Z_q \lambda = Z_q A + Z_q B$. Mais $Z_q A$, $Z_q B$ étant disjoints, non vides et fermés, $Z_q \lambda$ ne serait pas un continu, contrairement au théorème de Kneser.

³⁾ On voit que le théorème est général et que la démonstration pour $n > 2$ est identique à celle présentée pour $n = 2$.

Alors $z = at^2$ dans $(0, \infty)$ sont des intégrales de (2), pourvu que $a \in C$. Il suffit de définir la fonction $F(t, z)$ dans le domaine D

$$(6) \quad t > 0 \quad \text{et} \quad \frac{z}{t^2} \text{ non } \in C \quad (\text{domaine } D),$$

de façon que

1) $F(t, z)$ soit continue dans l'espace tout entier,

2) par chaque point de D passe une intégrale unique du système (2) envisagé dans D , et que deux intégrales différentes ne puissent pas tendre vers le même point du plan $t=0$,

3) aucune intégrale du système (2) envisagé dans D ne tende vers la frontière de E .

Soit $w = \varphi(z)$ la représentation conforme du complémentaire de C sur le domaine $|w| > 1$ telle que $\varphi(\infty) = \infty$ et soit $z = \varphi(w)$ la représentation réciproque.

La formule

$$(7) \quad z = t^2 \varphi\left(\frac{w}{t^2}\right)$$

est une transformation de B sur D , où B est défini par les relations

$$(8) \quad t > 0 \quad \text{et} \quad |w| > t^2 \quad (\text{domaine } B).$$

La transformation (7) conduit d'un système

$$(9) \quad \dot{w} = G(t, w) \quad \text{dans } B$$

au système

$$(10) \quad \dot{z} = \frac{2z}{t} + \left[G(t, w) - \frac{2w}{t} \right] \varphi'\left(\frac{w}{t^2}\right) \quad \text{dans } D,$$

où

$$(11) \quad w = t^2 \varphi\left(\frac{z}{t^2}\right).$$

Nous allons chercher une fonction $G(t, w)$ telle que

$$(12) \quad F(t, z) = \frac{2z}{t} + \left[G(t, w) - \frac{2w}{t} \right] \varphi'\left(\frac{w}{t^2}\right)$$

satisfasse aux conditions 1), 2) et 3).

On a, d'après (7),

$$(13) \quad z \rightarrow \varphi'(\infty)w_0, \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad w \rightarrow w_0 \neq 0$$

$$(14) \quad \varphi(v) - v\varphi'(v) \rightarrow a_0, \quad \text{lorsque } v \rightarrow \infty$$

car $\varphi(v) = \varphi'(\infty)v + a_0 + \frac{a_1}{v} + \frac{a_2}{v^2} + \dots$;

$$(15) \quad \varphi'(v)(|v|-1) \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } 1 < |v| \rightarrow 1^4,$$

et, d'après (7) et (12),

$$(16) \quad F(t, z) = 2t \left[\varphi\left(\frac{w}{t^2}\right) - \frac{w}{t^2} \varphi'\left(\frac{w}{t^2}\right) \right] + \varphi'\left(\frac{w}{t^2}\right) G(t, w).$$

Supposons maintenant que $t \rightarrow t_0$ et $z \rightarrow z_0$.

Si $t_0 > 0$ et $(t_0, z_0) \in$ frontière de E , alors, d'après (11), $|w/t^2| \rightarrow 1$, car, z_0/t_0^2 appartenant à la frontière de C (cf. (5)), on a $|\varphi(z/t^2)| \rightarrow 1$. On en conclut, en vertu de (12) et (15), que, si l'on avait

$$(17) \quad G(t, w) - \frac{2w}{t^2} = O\left(\left|\frac{w}{t^2} - 1\right|\right) \quad \text{pour } \left|\frac{w}{t^2}\right| \rightarrow 1 \text{ et } t \rightarrow t_0 > 0,$$

alors $F(t, z) \rightarrow 2z_0/t_0$ et, par suite, d'après (4), $F(t, z)$ serait continue en (t_0, z_0) .

Si $t_0 = 0$ et $z_0 \neq 0$, on a, d'après (11), $w/t^2 \rightarrow \infty$ et $w \rightarrow w_0 = z_0 \varphi'(\infty)$. Il résulte donc des relations (16) et (14) que, si l'on avait

$$(18) \quad G(t, w) \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0 \text{ et } w \rightarrow w_0 = z_0 \varphi'(\infty),$$

alors $F(t, z) \rightarrow 0$, et par conséquent, d'après (3), $F(t, z)$ serait continue en (t_0, z_0) .

Si enfin $t_0 = 0$ et $z_0 = 0$, on a, en vertu de (13), $w \rightarrow 0$. Lorsque $|w|/t^2 \geq 2$, alors, d'après (14),

$$\varphi\left(\frac{w}{t^2}\right) - \frac{w}{t^2} \varphi'\left(\frac{w}{t^2}\right)$$

reste borné; en supposant que

$$(19) \quad G(t, w) \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0 \text{ et } w \rightarrow 0,$$

on aura (cf. (16)) $F(t, z) \rightarrow 0$. Lorsque $t^2 < |w| < 2t^2$, alors, d'après (15),

$$\varphi'\left(\frac{w}{t^2}\right) \left(\left|\frac{w}{t^2} - 1\right|\right)$$

reste borné et, d'après (7), $2z/t \rightarrow 0$; en supposant que

$$(20) \quad G(w, t) = o\left(\left|\frac{w}{t^2} - 1\right|\right), \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0 \text{ et } w \rightarrow 0,$$

⁴ Cf. W. Seidel et J. L. Walsh, *On the derivatives of functions analytic in unit circle*, Trans. Am. Math. Soc. 52 (1942), p. 135, Corollary 2.

on aura (cf. (12)) $F(t, z) \rightarrow 0$. Les conditions (19) et (20) entraînent donc la continuité de $F(t, z)$ à l'origine.

La condition 1) est satisfaite lorsque $G(t, w)$ est continue dans B et lorsque les relations (17)-(20) sont vérifiées. D'après (13), la condition 2) est satisfaite s'il en est de même pour le système (9). Enfin, pour satisfaire à la condition 3), il suffit d'exiger, d'après (13), qu'aucune intégrale de (9) ne tende vers l'ensemble $|w| = t^2$.

Toutes ces conditions seront satisfaites, si l'on pose

$$G(t, w) = \frac{2t|w|}{w} \quad \text{dans } B^4).$$

⁴⁾ Après que ma note a été composée j'ai appris d'un article inséré par la publication: *Математика в СССР за тридцать лет*, Москва 1948, que le théorème II est démontré par M. Bocktein dans son travail: *Теоремы существования и единственности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, М., Учпед. зап. ун-та 15 (1939), p. 3-72.

SUR LES THÈSES DE DEUX NOTES DE T. WAŻEWSKI RELATIVES AUX CRACOVIENS ET MATRICES

Par T. BANACHIEWICZ (Kraków)

On trouve dans les Annales de la Société Polonaise de Mathématique 22, p. 286-288, Kraków 1950, deux notes de M. Ważewski: I. Remarques relatives aux certains théorèmes de M. Banachiewicz (première partie), II. Théorème de M. Banachiewicz relatif à la méthode des moindres carrés (deuxième partie). Nous examinerons ici les thèses de ces notes du point de vue des mathématiques pratiques.

Note I

§ 1. M. Ważewski appelle deux procédés de calcul P et Q *numériquement identiques* lorsqu'ils dictent des calculs identiques. Une pareille définition, bien que parfaitement licite du point de vue formel, ne permet nullement de conclure qu'„une machine automatique fonctionnant suivant P fonctionnera suivant Q et inversement“. Considérons, par exemple, une machine qui fonctionne à l'aide de cellules photoélectriques, et transporte automatiquement les nombres écrits, ou plutôt dactylographiés, à son mécanisme de calcul. Si, dans le procédé P , on obtient les quantités intermédiaires écrites suivant un ordre p , conforme aux exigences de la machine M , et si le procédé Q donne les mêmes quantités écrites dans un ordre différent q , on a besoin, en employant Q , de transcrire l'ordre q à l'ordre p , ce qui demande un travail supplémentaire. Si, par exemple, on a à calculer un déterminant du 8-ième ordre, la machine M demandant que les éléments du déterminant soient écrits dans un ordre habituel, et si le procédé P les donne ainsi, tandis que Q les dispose sur les cadres d'un échiquier suivant les positions successives du cavalier (sautant suivant une loi donnée), alors le procédé Q demandera un travail supplémentaire pour ordonner les éléments. Deux procédés numériquement identiques peuvent donc demander de la machine M des opérations différentes. Si même du point de vue des mathématiques abstraites ce fait importe peu, il est néanmoins essentiel du point de vue des mathématiques pratiques, et, dans le choix entre les matrices cayleyennes et les cracoviens, ce sont les considérations des mathématiques pratiques qui doivent être décisives.

§ 2. Dans le premier alinéa de la page 287, M. Wazewski remarque que la réduction (A_1) de la solution d'un système d'équations linéaires à la solution d'un système „en escalier“ est numériquement identique à un procédé (B_1) de Doolittle. Cette assertion, qui réquirit essentiellement le champ d'applicabilité de (A_1) , est inexacte, puisque le procédé de Doolittle¹⁾ n'a trait qu'au cas de systèmes symétriques d'équations, tandis que (A_1) est général.

§ 3. Le fait, exprimé dans le second théorème que communique M. Wazewski: „ p étant une matrice symétrique (dont certains mineurs ne sont pas nuls), il existe deux matrices en escalier q et r qui, avec leurs transposées q' et r' , vérifient les relations

$$r = r', \quad p = qrq',$$

sert de base depuis 1938, sans avoir été spécialement formulé, à deux procédés de solution des équations normales²⁾. Dans l'énoncé de la proposition ci-dessus, au lieu de „deux“ on peut mettre „une infinité de“, puisque la matrice diagonale r est arbitraire. Par exemple, si $p = (36)$, on a

$$(36) = (6) (1) (6) = (1) (36) (1) = (2) (9) (2) = (3) (4) (3) \text{ etc.},$$

et de même pour les matrices à plusieurs lignes.

Note II

§ 4. Après une série de propositions plus ou moins évidentes ou connues, M. Wazewski se soulève contre l'opinion que le mécanisme mathématique des procédés cracoviens A_1 et A_2 n'est possible que grâce à la notion de cracovien. Les chercheurs qui connaissent la relation entre les matrices et les cracoviens savent à quoi s'en tenir. Lorsqu'ils considèrent le point de vue des mathématiques pratiques, ils savent qu'il ne s'agit pas d'employer des méthodes quelconques, théoriquement possibles, mais de choisir les meilleures du point de vue de l'exécution du calcul. On sait déjà que deux méthodes „numériquement identiques“ peuvent exiger un travail différent même pour un calcul avec une „machine automatique“. La machine mentionnée au § 1, à yeux-récepteurs photoélectriques, arrangés pour la multiplication des matrices, devrait être plus compliquée, pour des raisons de géométrie, qu'une machine à multiplier les cracoviens. Quant à „l'avantage psychologique“, M. Wazewski considère qu'on a le même effet en „tournant“ les matrices. C'est une opération indiquée déjà dans le travail de T. Banachiewicz, *Zur Berechnung der Determinanten* (Acta Astronomica c 3, p. 46): on tourne (transpose) la première matrice du produit, on multiplie les facteurs

¹⁾ Report of the Superintendent of the M. S. Coast and Geodetic Survey etc. pour 1877/78. Appendix 8, Paper Nr 3.

²⁾ Voir, par exemple, la note de T. Banachiewicz, *Sur la résolution des équations normales de la méthode des moindres carrés*, Comptes Rendus de la Société des Sciences de Varsovie 41 (1948), Classe III, p. 63.

colonne par colonne suivant les règles cracoviennes, et on a encore à tourner le produit final. Quelquefois, on associe plusieurs facteurs voisins dans le produit; si l'on devait associer les facteurs en m groupes, cette règle exigerait une transposition $2m$ fois. „Tourner“ ce n'est sans doute qu'un seul mot pour la pensée, mais, dans l'exécution, c'est toute une opération qui demande du temps et de l'attention, et qui, de plus, est facilement sujette à une erreur.

Par ailleurs, la notation cracovienne

$$p = x \cdot a^2 \cdot x,$$

ou explicitement, par exemple, dans l'expression bien connue

$$p = \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} [aa] [ba] [ca] [la] \\ [ab] [bb] [cb] [lb] \\ [ac] [bc] [cc] [lc] \\ [al] [bl] [cl] [ll] \end{array} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ 1 \end{array}$$

correspond à une symétrie dans la conception et dans l'exécution.

Il n'en est pas de même en notation matricielle, où l'on aurait

$$p = (x \ y \ z \ 1) \begin{pmatrix} [aa] & [ba] & [ca] & [la] \\ [ab] & [bb] & [cb] & [lb] \\ [ac] & [bc] & [cc] & [lc] \\ [al] & [bl] & [cl] & [ll] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons encore ajouter les considérations suivantes.

Les calculs sont en général bien difficiles à faire sans erreur. Ils demandent à cet effet des règles rigides, simples et constantes. Un calculateur moyen, ayant à multiplier des tableaux tantôt, dans des déductions théoriques, lignes par colonnes, tantôt, dans une évaluation numérique des produits, colonnes par colonnes, et ceci avec un enregistrement différent des résultats obtenus dans le produit „théorique“ et les produits „numériques“ — difficiles d'ailleurs à délimiter — finirait par se désorienter, ce qui empêcherait un travail tranquille et sûr. C'est pourquoi chacun doit se décider, croyons-nous, soit pour le calcul matriciel, soit pour le calcul cracovien. Du point de vue des applications numériques, nous sommes d'avis que c'est ce dernier qui s'impose; mais nous voyons bien, que les cracoviens ont à lutter pour cette thèse puisque les matrices apparurent trois quarts de siècle plus tôt, et eurent ainsi le temps de s'enraciner aussi dans le domaine des applications numériques. Elles y sont d'ailleurs protégées, soit par les tendances naturelles à la conservation, soit par la lenteur de diffusion des idées nouvelles, enfin par peu d'importance attachée par beaucoup de mathématiciens contemporains aux questions de calcul.

§ 5. On lit dans la Note: „la multiplication des cracoviens n'étant pas commutative, il est plus pratique de se servir des matrices dans les considérations théoriques“. Cette phrase est énonnante, la multiplication des matrices étant non plus commutative. Il semble que M. Ważewski a confondu la commutativité avec l'associativité. Quant à la commutativité, elle est même, en quelque sorte, plus grande pour les cracoviens que pour les matrices parce que, dans un produit cracovien de 2 facteurs, on peut toujours changer leur ordre sans que le produit perde un sens (on transpose de cette façon le produit — propriété souvent commode), tandis que pour les matrices le produit ne perd alors de sens que si leurs dimensions sont particulières. Concernant la phrase corrigée, en y plaçant „associativité“ au lieu de „commutativité“, on peut remarquer que, du point de vue de l'analyse pratique, la maniabilité du résultat importe plus, à notre avis, qu'une petite complication dans sa déduction.

§ 6. D'après l'avant-dernier passage de la Note, entre autres le procédé A_1 constituerait une algorithmisation au moyen des matrices d'un spécimen *connu* (notre cursive) de la méthode des éliminations successives. Cette assertion paraissant reposer sur la supposition erronée que A_1 est numériquement identique au procédé de Doolittle (voir § 2 du présent article) est sans fondement. Quant à la solution A_2 , nous avons indiqué au moins deux solutions numériquement différentes, A_2' et A_2'' , et chacune d'elles se compose de deux parties: solution déterminée, relativement simple, et solution indéterminée; les notes de M. Ważewski parlent seulement de la solution déterminée. Dans ces solutions et celles relatives aux systèmes non symétriques, il y a des procédés numériquement différents de ceux qu'on connaissait et des procédés numériquement identiques aux procédés connus. Ce que nous avons obtenu ne provient pas de la transformation, au moyen des matrices, de résultats connus, mais de l'introduction de nouveaux concepts du calcul cracovien, passant depuis peu à peu dans le calcul matriciel (comme la méthode de décomposition en deux facteurs élémentaires, la division directe différente de la multiplication par l'inverse, le contrôle des produits), où ils deviennent d'ailleurs parfois plus compliqués psychologiquement, ce qui explique peut-être en partie leur apparition tardive dans la théorie des matrices.

En terminant, nous exprimons notre reconnaissance à M. Arend de l'Observatoire d'Uccle pour ses conseils relatifs à cet article.

Pour plus de détails concernant la relation entre les cracoviens et les matrices le lecteur pourra consulter la note de T. Banachiewicz, *On the Use of Cracoviens for Theoretical Purposes in Pure and Applied Mathematics*, Acta Astronomica c 4 (1949), p. 97-100.

SUR L'ALGORITHMISATION DES MÉTHODES D'ÉLIMINATIONS SUCCESSIVES

(réponse à un article polémique de T. Banachiewicz)

Par T. WAŻEWSKI (Kraków)

Dans les Comptes Rendus des Séances de la Société Polonaise de Mathématique (cf. ces Annales 22, p. 286 et 288) se trouvent les résumés de deux de mes conférences: celles du 30 novembre 1948 (*Remarques relatives aux certains théorèmes de M. Banachiewicz* — première partie) et du 14 décembre 1948 (*Théorème de M. Banachiewicz relatif à la méthode des moindres carrés. Remarques méthodologiques* — deuxième partie). Dans le présent volume des Annales, M. T. Banachiewicz publie un article polémique sur ce sujet (reçu par la rédaction le 26 octobre 1951)¹⁾. Mes résumés seront cités dans la suite sous l'abréviation RW et l'article de M. T. Banachiewicz sous l'abréviation APB. Je répondrai à chaque paragraphe de APB séparément.

Ad § 1 de APB. J'ai commencé mon résumé par les deux phrases suivantes (RW, p. 286):

I. L'auteur *) appelle deux procédés de calcul P et Q *numériquement identiques* lorsqu'ils dictent des calculs identiques.

II. Une machine automatique fonctionnant suivant P fonctionnera donc suivant Q et inversement.

Deux calculs sont considérés comme identiques lorsqu'ils consistent en l'application de mêmes suites de mêmes opérations effectuées sur les mêmes nombres²⁾. L'identité de suites d'éléments quelconques implique évidemment l'identité de l'ordre de ces éléments. Il est à peu près évident que la proposition II est une conséquence de la définition I.

Or, M. T. Banachiewicz a substitué à ma définition I une *autre — la sienne*. Il n'est donc pas étonnant que M. T. Banachiewicz ait pu faire entrevoir (cf. l'exemple d'une machine photoélectrique dans § 1 de APB) que la proposition II n'est pas compatible avec *sa définition*. Cette conclusion de M. T. Banachiewicz ne donne évidemment *aucun* renseigne-

¹⁾ T. Banachiewicz, *Sur les thèses de deux notes de T. Ważewski relatives aux cracoviens et aux matrices*, ce volume p. 153-156.

²⁾ La ligne 6 d'en haut de la page 287 de RW, qui se rapporte au procédé B_1 jouant le rôle d'un des procédés P ou Q , ne laisse aucun doute qu'il s'agit de *suites* d'opérations.

*) C'est-à-dire T. Ważewski.

ment sur ce qui concerne la compatibilité de proposition II avec ma définition I.

Il est, peut-être, inutile d'insister sur ce que deux opérations P et Q ne cessent d'être numériquement équivalentes à mon sens si l'on varie les accessoires *techniques* au sens large (multiplication de matrices ligne par colonne, ou d'autres matrices convenables colonne par colonne, calcul à la main ou calcul à la machine, l'usage du crayon rouge ou noir, etc.) pourvu que la suite des opérations *mathématiques* (addition, division, etc.) et la suite des nombres en question reste la même. Grâce à cette propriété de ma définition I, j'ai pu *démontrer* que le procédé A_1 de M. T. Banachiewicz est numériquement équivalent (à mon sens) à un procédé élémentaire B_1 d'éliminations successives.

Ad § 2 de APB. A la page 287 de RW, on lit:

III. ...(A_1) est numériquement identique à un procédé (procédé de Doolittle) intervenant dans la méthode élémentaire de substitutions (ou d'éliminations) successives légèrement modifiée.

On y trouve aussi une définition du procédé B_1 rédigée en quelques mots:

IV. On trouve w_1 au moyen de u_1 et w_{i+1} au moyen de w_1, \dots, w_i, u_{i+1} *).

La proposition III peut être répartie en deux propositions V et VI, dont la première a un caractère mathématique, la seconde — bibliographique et, sous un autre aspect, terminologique.

V. A_1 est numériquement équivalent à B_1 (où B_1 est défini par IV).

VI. Le procédé B_1 est dû à Doolittle.

M. T. Banachiewicz affirme que la proposition III est inexacte. Ceci pourrait faire croire au lecteur que M. T. Banachiewicz affirme que ni V ni VI ne sont exactes.

Or, au cours de ma première conférence (à laquelle assistait aussi M. T. Banachiewicz), j'ai présenté la démonstration de la proposition V. L'objection de M. T. Banachiewicz se rapporte donc uniquement à la proposition VI.

Le procédé de Doolittle (correspondant de plus près au procédé que j'ai désigné par B_2) est, en ce qui concerne la méthode (et non pas le terrain d'application de cette méthode: matrices symétriques ou non), basé sur un principe analogue que le procédé B_1 . C'est pour cette raison qu'en définissant la construction de B_1 , je ne croyais pas avoir inventé un procédé *essentiellement nouveau*. J'estimais donc être en règle, du point de vue terminologique, en appelant B_1 procédé de Doolittle.

Mes conférences ont eu lieu en 1948. Plus tard, en 1950, a paru le livre de R. Zurmühl, *Matrizen, eine Darstellung für Ingenieure*. Ce livre sera cité, dans la suite, sous l'abréviation ZMDI. On y trouve quelques remarques, importantes du point de vue mathématique et bibliogra-

*) Pour la signification de u_i et w_i , voir RW, p. 286.

phique, qui concernent le sujet traité dans RW. Dans le § 23 de ZMDI portant le titre:

VII. Auflösung linearer Gleichungssysteme durch *Matrizenmultiplikation*, et plus particulièrement dans l'alinéa 23.1 de ce § portant le titre:

VIII. Das abgekürzte Verfahren von Gauss in *Matrizenform* (*Banachiewicz*), on trouve, à la page 249, le passage suivant:

IX. Es handelt sich hier um Verfahren des Franzosen Cholesky und des polnischen Astronomen Banachiewicz. In beiden Fällen sind die benutzten Formeln, übrigens *ohne Wissen der Autoren*, mit Formeln des sogenannten abgekürzten Gaußschen Verfahrens *identisch*, die die Form skalarer Produkte haben.

Du texte de ZMDI qui suit le passage cité, il résulte que l'auteur, en parlant du procédé de M. T. Banachiewicz, parle du procédé A_1 qui se rapporte aux équations à matrice non symétrique. Le procédé d'éliminations successives que j'ai désigné par B_1 y est appelé: „procédé raccourci de Gauss“. Il s'ensuit de IX que, dans ZMDI, le procédé B_1 est considéré comme un procédé d'éliminations qui était *connu* avant l'époque, où les algorithmes en question de Cholesky et de M. T. Banachiewicz ont été construits (cf. le fragment de IX „ohne Wissen der Autoren“). Doolittle n'est pas cité dans ZMDI.

À la page 288 de RW se trouvent les phrases:

X. Le lien théorique mutuel entre les procédés A_1 et A_2 ne consiste pas évidemment en emploi des cracoviens.

XI. L'auteur *) remarque qu'un tel lien consiste en ce que ces procédés constituent une algorithmisation, au moyen des matrices, de deux différents spécimens *connus* de la méthode des éliminations successives.

On observe facilement que, dans le passage cité IX de ZMDI, est énoncée une opinion compatible avec la mienne (cf. XI) relativement à ce que A_1 constitue une algorithmisation d'un spécimen *connu* de la méthode d'éliminations successives (il en est de même pour A_2). Ceci représente aussi une réponse à l'objection formulée au commencement du § 6 de APB.

Il n'est peut-être pas inutile d'insister sur ce que la démonstration de l'équivalence numérique de A_1 avec un procédé connu (ou non) d'éliminations successives n'est pas liée au problème de la priorité relative à A_1 . Aucune mention concernant ce sujet ne se trouve dans RW.

Ad § 3 de APB. M. T. Banachiewicz déclare qu'il n'a pas formulé les relations (2) à la page 287 de RW en disant qu'il ne les a pas spécialement formulées. Dans ma conférence, j'ai indiqué des exemples de décompositions (2) différentes au cas général de matrices à n lignes et à n colonnes, à côté d'une décomposition méritant un intérêt spécial.

Ad § 4 de APB. M. T. Banachiewicz revient à l'exemple d'une machine photoélectrique qui n'est, comme on vient de le remarquer, en

*) C'est-à-dire T. Ważewski.

aucun rapport méritorique avec la question de compatibilité de la proposition II avec ma définition I.

A la page 288 de RW, on lit:

XII. L'avantage psychologique provenant de la multiplication colonne par colonne peut être acquis sans cracoviens. Il suffit à cet effet d'introduire la directive que le *théoricien* doit tourner d'abord les matrices de manière à multiplier colonne par colonne et adresser *ensuite* l'algorithme en question au *calculateur*.

J'ai donc nettement distingué le rôle du théoricien et celui du calculateur. Le théoricien, en partant de la théorie des matrices, construit l'algorithme (sans effectuer le calcul strictement numérique) en invertissant le rôle des lignes et des colonnes. L'algorithme, formé ainsi par le *théoricien*, *coïncidera textuellement* avec le procédé A_1 de M. T. Banachiewicz. Le calculateur en se servant de cet algorithme n'aura donc pas à tourner les matrices, il multipliera colonne par colonne en suivant les directives de l'algorithme fourni par le théoricien.

Or, M. T. Banachiewicz procède dans sa polémique comme si j'avais attribué au calculateur le rôle d'invertir lignes et colonnes (action de „tourner“), ce qui est en contradiction avec le passage cité de RW. Ce n'est, au fond, que grâce à une substitution *implicite* de son texte à la place de mon texte que M. T. Banachiewicz peut suggérer à un lecteur, pas suffisamment critique, que j'ai formulé une assertion dans RW qui ne s'y trouve réellement pas. M. T. Banachiewicz dit en effet (APB § 4):

„Tourner“ ce n'est sans doute qu'un seul mot pour la pensée, mais, dans *l'exécution*, c'est toute une opération qui demande du temps et de l'attention et qui, de plus, est facilement sujette à une erreur.

Il s'ensuit clairement que M. T. Banachiewicz parle de l'action de tourner les matrices par le calculateur.

Le reste du § 4 de APB est, en sa plus grande partie, basé sur la confusion des rôles que j'attribue au théoricien et au calculateur.

Ad § 5 de APB. A la page 288 de RW se trouve inséré un passage qui, débarrassé d'une faute qui s'y est fauflée, a la forme suivante:

XIII. La multiplication des cracoviens n'étant pas associative³⁾, il est plus pratique de se servir de matrices dans les considérations théoriques. Au besoin, il suffit de tourner les matrices à la fin des considérations.

R. Zurmühl fait la remarque suivante à ce sujet (cf. ZMDI, p. 21):

XIV. Indem hier⁴⁾ das gewissermassen *natürliche*, aus der Hintereinanderschaltung linearer Transformationen erwachsene Multiplikationsgesetz für Koeffizientenschemata verlassen wird zugunsten einer doch höchstens gerinfügigen und vor allem leicht *anderweitig* zu erreichenden Erhöhung der rechentechnischen Bequemlichkeit, geht damit zugleich eine Reihe *einfacher* Rechengesetze der Matrizenmultiplikation, insbesondere das assoziative Gesetz verloren und damit gerade die besondere Leichtigkeit des *formelmässigen* Rechnens mit Matrizen.

³⁾ Au lieu de „associative“, j'ai mis „commutative“, ce qui constitue un *lapsus calami* évident.

⁴⁾ C'est-à-dire au cas des cracoviens.

La compatibilité de XIII et XIV est manifeste. L'opinion XIV de R. Zurmühl est formulée d'une façon plus nette en ce qui concerne certains détails. En plus, XIV indique la cause essentielle et naturelle qui a imposé la multiplication des matrices ligne par colonne (et non colonne par colonne). Cette cause réside dans le théorème fondamental T suivant:

La matrice jacobienne du produit de deux transformations est égale au produit des matrices jacobiniennes de ces transformations.

Ce théorème devient faux si l'on y remplace le terme „matrice“ par le terme „cracovien“. Sur le terrain des cracoviens, un théorème S, „isomorphe“ avec T, fait totalement disparaître la simplicité fondamentale dans laquelle réside la valeur algébrique de T. C'est grâce à T que j'ai pu démontrer, d'une façon simple et rapide, l'identité numérique des procédés A_1 et B_1 . C'est aussi grâce à T que le produit des matrices possède la propriété associative. Si *chacun* avait à se décider, comme le croit M. T. Banachiewicz (cf. APB, § 4), soit pour le calcul matriciel, soit cracovien, le *théoricien* choisirait, pour ses considérations théoriques (relatives, par exemple, au développement en série des puissances d'une matrice) le calcul ajusté au théorème T, c'est-à-dire celui des matrices. Ce choix est plus économique sur ce terrain que le choix du calcul cracovien. C'est donc dans le théorème T que réside, en général, la raison *intrinsèque* qui impose le choix de la multiplication ligne par colonne dans les recherches théoriques (n'exigeant pas de calculs strictement numériques). Le résultat final pourra être facilement remanié par le théoricien de façon à avoir un algorithme avec la directive de multiplier colonne par colonne. Il adressera ensuite cet algorithme au calculateur. On aura ainsi une double économie de temps et de travail, au lieu d'une économie simple.

Quel est donc, en définitive, le rôle de la *théorie des cracoviens* 1° sur le terrain des recherches théoriques, 2° sur le terrain de l'application pratique de l'algorithme par un calculateur effectuant les calculs numériques ?

On a vu que, sur le terrain des recherches théoriques, l'usage des cracoviens rend le travail plus difficile, compliqué, et, par suite, facilement sujet à une erreur. L'usage de la théorie des cracoviens n'est donc ni pratique, ni économique sur ce terrain.

Sur le terrain de l'application par le calculateur d'un algorithme *construit précédemment*, l'introduction des cracoviens est équivalente à l'introduction de la directive postulant la multiplication colonne par colonne de tableaux convenablement remaniés par le théoricien. Le problème se réduit donc plutôt à une question de nomenclature, à la question de savoir s'il est pratique, du point de vue du calculateur, d'appeler cette multiplication par un nom spécial et, en particulier, de l'appeler multiplication cracovienne et les tableaux en question cracoviens.

Les avantages pratiques de l'algorithme A_1 de M. T. Banachiewicz, et des autres algorithmes d'un genre analogue, sont faciles à constater. On les trouve insérés dans certains manuels récents. Leur mécanisme *mathématique* est indépendant de la théorie des cracoviens. Ainsi, par exemple, l'algorithme A_1 est présenté dans ZMDI sous sa forme matricielle. Ceci conduit à l'opinion que ces algorithmes méritent une attention plus spéciale que la théorie des cracoviens. Ne serait-il pas juste de les appeler „algorithmes cracoviens“, même au cas où l'on se sert de matrices et non pas de cracoviens ? ⁵⁾

La théorie des „algorithmes cracoviens“, ainsi définie, aurait pour but d'algorithmer diverses méthodes d'éliminations successives (cf. RW, le fragment cité plus bas sous XV); les algorithmes de M. T. Banachiewicz feraient partie de cette théorie comme résultats particuliers. Elle se servirait, dans sa partie strictement théorique, de matrices (économie de travail) pour construire les algorithmes destinés aux calculs numériques.

Le problème de „lutte“ entre matrices et cracoviens, de chance entre ces deux „adversaires“, perdrait ainsi sa complication apparente. La décision dans cette „lutte“ reviendrait tout simplement au choix entre deux formes numériquement équivalentes d'un même „algorithme cracovien“ fourni par le théoricien. Il s'agirait, au fond de choisir la façon de multiplier qui est la plus commode. Dans cette situation, il deviendrait inutile de construire des hypothèses sur la chance des deux „adversaires“ dans la „lutte“ ainsi localisée ⁶⁾.

Ad § 6 de APB. Au début de ce paragraphe, M. T. Banachiewicz répète son objection sur l'équivalence numérique des procédés A_1 et B_1 . Nous y avons répondu plus haut.

Ensuite, M. T. Banachiewicz parle de certains sujets qui n'interviennent pas dans RW (par exemple des solutions A'_2 et A''_2). Je les laisse sans réponse. En ce qui concerne la pénétration „tardive“ de „nouveaux concepts du calcul cracovien“ sur le terrain du calcul matriciel, elle provient probablement de ce que M. T. Banachiewicz a obtenu ses procédés en se servant de la notion de cracovien, ce qui a conduit à l'opinion que c'est grâce à cette notion que le mécanisme mathématique des procédés A_1 et A_2 est possible. Or, on peut réaliser une pénétration mutuelle immédiate et

⁵⁾ Il paraît qu'il serait pratique de remplacer le terme „multiplication cracovienne“ par un autre, par exemple, „multiplication verticale“, car l'usage du terme „cracovien“ dans plusieurs sens différents (théorie des cracoviens, calcul cracovien, méthode cracovienne) a conduit à des malentendus sur le rapport entre la façon de multiplier et le mécanisme mathématique des algorithmes.

⁶⁾ M. T. Banachiewicz attribue la chance actuellement favorable aux matrices, à ce qu'elles sont „protégées“, soit par des tendances naturelles à la conservation, soit par la lenteur de diffusion des idées nouvelles, enfin par peu d'importance attachée par beaucoup de mathématiciens contemporains aux questions de calcul“.

complète de *la théorie* des matrices et de celle des cracoviens en remarquant que ces deux théories sont tout simplement isomorphes au sens de RW. En ce qui concerne l'identité entre la théorie des matrices et celle des cracoviens (au sens de l'isomorphie en question) S. Arend, mentionné par M. T. Banachiewicz à la fin de APB, est du même avis que moi. Ceci résulte d'un passage d'un de ses articles⁷⁾; ce passage a pour titre: „Matrices et cracoviens, aspects jumeaux d'une même conception“.

Du même avis est aussi R. Zurmühl (cf. par exemple, les titres à la page 248 de ZMDI, cités plus haut sous VIII et VII).

Je dois insister sur ce que je n'ai pas contesté dans RW la valeur pratique des procédés A_1 et A_2 de M. T. Banachiewicz. C'est en attachant une importance aux questions de calcul que je me suis demandé si l'on pouvait obtenir de nouveaux résultats et de nouvelles méthodes du même genre, et comment. Ainsi j'ai été amené à soumettre les procédés en question de M. T. Banachiewicz à une analyse détaillée, qui m'a conduit à distinguer deux côtés tout-à-fait différents: le rôle de la théorie des cracoviens et le mécanisme mathématique des procédés A_1 et A_2 . J'ai remarqué qu'il y a huit théories isomorphes, au sens indiqué dans RW, à celle des matrices, dont deux se servent de la multiplication colonne par colonne: celle des cracoviens et une autre sans nom spécial. J'ai observé, d'autre part, que les procédés A_1 et A_2 sont numériquement équivalents à certains procédés indépendants de la notion de matrice et de celle de cracovien. Ceci m'a conduit à la conclusion suivante (cf. RW, p. 288):

XV. Les résultats en question de M. T. Banachiewicz peuvent être classés comme appartenant à un domaine de recherches plus vaste dont la *direction à prendre* consiste à algorithmiser, dans le sens précédent, les autres cas connus de la méthode des éliminations successives, pour obtenir des procédés numériquement identiques, mais présentant des avantages psychologiques pour le calculateur.

Je considère cette conclusion comme un résultat principal de RW. J'ai déterminé une direction de recherches, une voie dont une partie a été suivie par Cholesky et T. Banachiewicz (à leur insu — d'après IX⁸⁾).

⁷⁾ S. Arend, *Voies nouvelles dans le calcul scientifique*, Ciel et Terre, LVII-ième Année, numéro 12, Bruxelles (décembre 1941), p. 9.

⁸⁾ L'observation bibliographique suivante se rattache de près à la thèse XV. Cholesky a construit un algorithme (communiqué en 1924) en se servant de matrices et sans connaître la notion de cracovien introduite plus tard par M. T. Banachiewicz. Ce dernier a construit un algorithme (communiqué en 1938), indépendamment de Cholesky, en se servant de cracoviens (cf. ZMDI, p. 249 et 260). Le manuel ZMDI considère ces deux algorithmes comme identiques. Suivant notre terminologie, ils sont numériquement identiques. Ils résultent mutuellement l'un de l'autre par une simple isomorphie. Tous les deux constituent, suivant la terminologie proposée plus haut, certains algorithmes cracoviens. (Il ne s'agit pas ici de l'algorithme A_1 de M. T. Banachiewicz qui est plus général en un certain sens.)

L'opinion citée de ZMDI (cf. IX) est compatible avec cette conclusion en ce qui concerne le procédé A_1 de M. T. Banachiewicz. Le fait que certaines recherches récentes procèdent dans la direction indiquée dans XIV paraît confirmer ce point de vue.

La mise en évidence, d'une façon nette, d'un lien entre deux procédés, ou deux méthodes, paraissant mutuellement indépendants, apporte souvent de la clarté dans les recherches et détermine le sens de leur évolution en facilitant la construction de résultats définitifs. L'indication d'une direction de recherches peut attirer l'attention sur certains problèmes importants, mais non aperçus, dont la solution peut rendre des services pratiques. C'est pour cette raison que j'ai cru utile de présenter, au cours de mes conférences, les résultats de mes réflexions sur l'algorithme de la méthode d'éliminations successives.

Les RW ne constituent pas des notes autonomes, comme on pourrait le croire d'après le titre de APB. Ce sont des résumés de mes deux conférences. J'étais obligé de les rédiger en peu de lignes. L'article APB suggère qu'il serait peut-être bon de publier le sujet de ces conférences sous une forme détaillée, accessible aux larges sphères des personnes qui, sans être mathématiciens, s'intéressent aux mathématiques appliquées.

SUR CERTAINES FONCTIONS HOMOGÈNES DE DEUX VARIABLES COMPLEXES

Par C. LOSTER (Kraków)

1. Introduction. Désignons par Q l'espace de deux variables complexes x et y . Les points de Q seront désignés par les lettres p, q, u, \dots , et leurs coordonnées par $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y), \dots$. Etant donnés deux points quelconques p et q de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , nous désignerons par pq l'expression

$$(1) \quad pq = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

La valeur absolue $|pq| = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$ sera dite *distance triangulaire* des points p et q .

Soit E un ensemble fermé et borné de points de Q , contenant une infinité de points dont les distances triangulaires mutuelles sont positives. Désignons par $p^{(n)}$ un système de $n+1$ points de E ; soit

$$(2) \quad p^{(n)} = (p_0, p_1, \dots, p_n) \quad \text{où} \quad |p_i p_j| > 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

et soit u un point variable dans Q , les produits

$$(3) \quad \begin{aligned} L_n^{(j)}(u, p^{(n)}) &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{u p_k}{p_j p_k} & (j = 0, 1, 2, \dots, n), \\ C_n^{(j)}(u, p^{(n)}) &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{u p_j}{p_k p_j} & (j = 0, 1, 2, \dots, n), \\ R_n^{(j)}(u, p^{(n)}) &= L_n^{(j)}(u, p^{(n)}) C_n^{(j)}(u, p^{(n)}) & (j = 0, 1, 2, \dots, n), \\ S_n(u, p^{(n)}) &= \prod_{\substack{j, k=0 \\ j \neq k}}^n \frac{u p_k}{p_j p_k}, \end{aligned}$$

sont des polynômes homogènes des coordonnées x et y du point u . Lorsque u est fixé et le système (2) varie dans E les maxima

$$\max_{(j)} |L_n^{(j)}(u, p^{(n)})|, \quad \max_{(j)} |C_n^{(j)}(u, p^{(n)})|, \quad \max_{(j)} |R_n^{(j)}(u, p^{(n)})|$$

et le module $|S_n(u, p^{(n)})|$ ont des bornes inférieures finies. Nous les désignerons comme il suit

$$(4) \quad L_n(u) = \inf_{(p^{(n)} \in E)} \{ \max_{(j)} |L_n^{(j)}(u, p^{(n)})| \},$$

$$(5) \quad C_n(u) = \inf_{(p^{(n)} \in E)} \{ \max_{(j)} |C_n^{(j)}(u, p^{(n)})| \},$$

$$(6) \quad R_n(u) = \inf_{(p^{(n)} \in E)} \{ \max_{(j)} |R_n^{(j)}(u, p^{(n)})| \},$$

$$(7) \quad S_n(u) = \inf_{(p^{(n)} \in E)} |S_n(u, p^{(n)})|.$$

F. Leja a introduit une constante $\Theta(E)$ liée à l'ensemble E , dite *écart* de cet ensemble¹⁾, et il a démontré que la suite $\{\sqrt[n]{L_n(u)}\}$ tend dans l'espace entier Q , vers une limite finie ou infinie $L(u)$. La fonction $L(u)$ est partout finie si $\Theta(E) > 0$ ²⁾.

Le but de ce travail est d'examiner les suites

$$\{\sqrt[n]{C_n(u)}\}, \quad \{\sqrt[2n]{R_n(u)}\} \quad \text{et} \quad \{\sqrt[n]{S_n(u)}\}.$$

2. La suite $\{C_n(u)\}$. Je devrai m'appuyer sur les lemmes suivants:

Lemme I. Les fonctions (5) s'annulent à l'origine des coordonnées 0 et sont positives lorsque $u \neq 0$.

Démonstration. L'égalité $C_n(0) = 0$ pour $n = 1, 2, \dots$ est évidente. Soit $u \neq 0$, et z_0 un point de Q tel que $|uz_0| > 0$. Considérons le polynôme $(uz_0)^n$ et le système (2) de points de E . D'après la formule d'interpolation de Lagrange on a identiquement

$$(8) \quad (uz_0)^n = \sum_{j=0}^n (up_j)^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{z_0 p_k}{p_j p_k};$$

si l'on pose $\gamma(z_0) = \sup_{(p \in E)} |pz_0|$, on aura l'inégalité

$$|uz_0|^n \leq \sum_{j=0}^n |C_n^{(j)}(u, p^{(n)})| \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n |z_0 p_k| \leq (n+1) \max_{(j)} |C_n^{(j)}(u, p^{(n)})| \gamma(z_0)^n,$$

¹⁾ F. Leja, *Sur l'existence du domaine de convergence des séries de polynômes homogènes*, *Bullet. de l'Acad. Polon., Classe des Sc. Mathem.*, 1933, p. 453-461.

²⁾ F. Leja, *Sur une fonction homogène de deux variables jouissant d'une propriété extrême*, *Ann. de l'Acad. des Sc. Techn.* 3 (1936), p. 193.

donc

$$(9) \quad \max_{(j)} |C_n^{(j)}(u, p^{(n)})| \geq \frac{|uz_0|^n}{(n+1)\gamma(z_0)^n},$$

et, par suite,

$$C_n(u) \geq \frac{|uz_0|^n}{(n+1)\gamma(z_0)^n} > 0, \quad \text{pour } u \neq 0, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Lemme II. Les fonctions (5) satisfont quel que soit u aux inégalités suivantes

$$(10) \quad C_{n+k}(u) \geq C_n(u)C_k(u) \quad \text{pour } n \text{ et } k=1, 2, 3, \dots$$

La démonstration de ce lemme est analogue à celle du lemme I, inséré dans le travail de F. Leja, *Sur une suite de fonctions liée aux ensembles plans fermés*, Ann. de la Soc. Pol. de Math. 13 (1935), p. 53-58.

Théorème I. Quel que soit $u \in Q$ la limite finie ou infinie

$$(11) \quad \lim_n \sqrt[n]{C_n(u)} = C(u)$$

existe. Si l'écart $\Theta(E)$ est positif, la fonction $C(u)$ est partout finie.

Démonstration. Il est clair que la limite (11) existe si $u=0$. Si $u \neq 0$, tous les termes de la suite (5) sont positifs et satisfont aux inégalités (10). Il en résulte immédiatement l'existence de la limite (11) en chaque point $u \in Q$ en vertu du lemme connu suivant:

Si une suite $\{a_n\}$, où $a_n > 0$, satisfait aux inégalités

$$a_{n+k} \geq a_n a_k \quad \text{pour } n \text{ et } k=1, 2, 3, \dots,$$

la suite $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ tend vers une limite finie ou infinie.

Supposons maintenant l'écart $\Theta(E)$ positif, et soit $q^{(n)} = (q_0, q_1, \dots, q_n)$ un système de points de E tel que, si l'on pose

$$\Theta^{(j)}(p^{(n)}) = \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^n |p_j p_k| \quad \text{et} \quad \Theta_n = \sup_{(p^{(n)} \in E)} [\min_{(j)} \Theta^{(j)}(p^{(n)})],$$

on ait

$$(12) \quad \Theta_n = \min_{(j)} \Theta^{(j)}(q^{(n)}) \quad \text{et} \quad \lim_n \sqrt[n]{\Theta_n} = \Theta(E)^3.$$

D'après (3), on a

$$(13) \quad |C_n^{(j)}(u, q^{(n)})| \leq \frac{\Delta(u, E)^n}{\Theta_n} \quad \text{pour } j=0, 1, 2, \dots, n,$$

³⁾ Voir le travail cité dans la remarque 1).

où $\Delta(u, E) = \sup_{(p \in E)} |up|$, donc

$$(14) \quad \sqrt[n]{C_n(u)} \leq \frac{\Delta(u, E)}{\sqrt[n]{\Theta_n}} \quad \text{pour } n=1, 2, 3, \dots,$$

et

$$\lim \sqrt[n]{C_n(u)} = C(u) \leq \frac{\Delta(u, E)}{\Theta(E)}.$$

Le théorème est donc démontré.

3. Les suites $\{R_n(u)\}$ et $\{S_n(u)\}$. Lemme III. Les fonctions (6) satisfont quel que soit $u \in Q$ aux inégalités

$$(15) \quad R_{n+k}(u) \geq R_n(u) R_k(u) \quad \text{pour } n \text{ et } k=1, 2, 3, \dots$$

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et

$$(16) \quad q^{(n+k)} = (q_0, q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots, q_{n+k})$$

un système de $n+k+1$ points de E tels qu'on ait

$$(17) \quad R_{n+k}(u) > \max_{(j)} |R_{n+k}^{(j)}(u, q^{(n+k)})| - \varepsilon.$$

Formons l'expression

$$(18) \quad \frac{|uq_{j_0} uq_{j_1} \dots uq_{j_{k-1}}|^k |uq_{j_k} uq_{j_{k+1}} \dots uq_{j_{k+n}}|}{V(q_{j_0}, q_{j_1}, \dots, q_{j_{k-1}})^2}$$

où u est un point fixe de l'espace Q , $(q_{j_0}, q_{j_1}, \dots, q_{j_{k-1}})$ est un système de k points du système (16) et $V(q_{j_0}, q_{j_1}, \dots, q_{j_{k-1}})$ est le produit

$$V(q_{j_0}, q_{j_1}, \dots, q_{j_{k-1}}) = \prod_{0 \leq u < v \leq k-1} |q_{j_u} q_{j_v}|.$$

Cherchons le minimum de l'expression (18) lorsque, k étant fixe, les points $q_{j_0}, q_{j_1}, \dots, q_{j_{k-1}}$ parcourent le système (16). En changeant convenablement les indices des points (16), on peut toujours supposer que ce minimum soit égal à

$$\frac{|uq_{n+1} uq_{n+2} \dots uq_{n+k}|^k |uq_0 uq_1 \dots uq_n|}{V(q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_{n+k})^2}.$$

Par suite, quel que soient $i=0, 1, 2, \dots, n$ et $l=n+1, n+2, \dots, n+k$, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} & \frac{|uq_{n+1} \dots uq_{l-1} uq_l uq_{l+1} \dots uq_{n+k}|^k |uq_0 \dots uq_{i-1} uq_i uq_{i+1} \dots uq_n|}{V(q_{n+1}, \dots, q_{l-1}, q_l, q_{l+1}, \dots, q_{n+k})^2} \\ & \geq \frac{|uq_{n+1} uq_{n+2} \dots uq_{n+k}|^k |uq_0 uq_1 \dots uq_n|}{V(q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_{n+k})^2}, \end{aligned}$$

d'où l'on deduit la suivante:

$$\frac{|uq_i|^k |uq_l|}{|q_l q_{n+1} \dots q_l q_{l-1} q_l q_{l+1} \dots q_l q_{n+k}|^2} \geq \frac{|uq_l|^k |uq_l|}{|q_l q_{n+1} \dots q_l q_{l-1} q_l q_{l+1} \dots q_l q_{n+k}|^2}.$$

En multipliant les deux membres par

$$\frac{|uq_{n+1} \dots uq_{l-1} uq_{l+1} \dots uq_{n+k}|}{|q_l q_l|^2},$$

et en se servant de la notation (3), on trouve l'inégalité

$$(19) \quad |R_k^{(i)}(u; q_l, q_{n+1}, \dots, q_{n+k})| \geq |R_k^{(i)}(u; q_l, q_{n+1}, \dots, q_{n+k})|$$

pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$ et $l = n+1, n+2, \dots, n+k$.

Cela posé, considérons les $n+1$ points q_0, q_1, \dots, q_n du système (16), et supposons que l'indice $p, 0 \leq p \leq n$, soit tel qu'on ait

$$|R_n^{(p)}(u; q_0, q_1, q_2, \dots, q_n)| = \max_{(i)} |R_n^{(j)}(u; q_0, q_1, q_2, \dots, q_n)|.$$

D'après (6), on aura

$$(20) \quad |R_n^{(p)}(u; q_0, q_1, q_2, \dots, q_n)| \geq R_n(u),$$

et, comme on a identiquement

$$R_{n+k}^{(p)}(u, q^{n+k}) = R_n^{(p)}(u; q_0, q_1, q_2, \dots, q_n) R_k^{(p)}(u; q_p, q_{n+1}, \dots, q_{n+k}),$$

il vient, en vertu de (19) et (20), l'inégalité

$$R_{n+k}(u) > \max_{(j)} |R_n^{(j)}(u; q_0, q_1, \dots, q_n)| \max_{(i)} |R_k^{(i)}(u; q_p, q_{n+1}, \dots, q_{n+k})|$$

qui entraîne l'inégalité (15).

Posons

$$(21) \quad r_n(u) = \sqrt[2n]{R_n(u)} \quad \text{et} \quad s_n(u) = \sqrt[n(n+1)]{S_n(u)}, \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

Théorème II. Quel que soit $u \in Q$, les limites

$$(22) \quad \lim_n r_n(u) = R(u) \quad \text{et} \quad \lim_n s_n(u) = S(u)$$

existent et on a $R(u) = S(u)$. Lorsque $\Theta(E) > 0$, ces limites sont partout finies.

Démonstration. Soit u un point quelconque, mais fixe, de l'espace Q . Posons

$$(23) \quad \delta(u, E) = \inf |pu| \quad \text{lorsque } p \in E,$$

$$(24) \quad \varrho(E) = \sup |r_1 r_2| \quad \text{lorsque } r_1 \in E, r_2 \in E.$$

Distinguons les deux cas suivants.

Si $\delta(u, E) = 0$, on a, d'après (6) et (7), $R_n(u) = S_n(u) = 0$ pour $n = 1, 2, \dots$, et le théorème est évident.

Si $\delta(u, E) > 0$, tous les termes $R_n(u)$ sont positifs. En effet, soit $p^{(n)} = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ un système (2) de points de E . D'après la définition (3), on a identiquement

$$S_n(u, p^{(n)}) = \prod_{j=0}^n L_n^{(j)}(u, p^{(n)}) = \prod_{j=0}^n C_n^{(j)}(u, p^{(n)}),$$

donc

$$[S_n(u, p^{(n)})]^2 = \prod_{j=0}^n R_n^{(j)}(u, p^{(n)}),$$

et, par suite,

$$\left[\max_{(j)} |R_n^{(j)}(u, p^{(n)})| \right]^{n+1} \geq |S_n(u, p^{(n)})|^2 \geq \left[\frac{\delta(u, E)}{\varrho(E)} \right]^{2n(n+1)}.$$

On en déduit l'inégalité

$$(25) \quad R_n(u) \geq \left[\frac{\delta(u, E)}{\varrho(E)} \right]^{2n} > 0 \quad \text{pour } n=1, 2, 3, \dots,$$

donc, d'après (15), la suite $\{r_n(u)\}$ converge vers une limite finie ou infinie.

Soit $\varepsilon > 0$ fixe. Il existe un système $q^{(n)} = (q_0, q_1, \dots, q_n)$ de points de E tel que

$$(26) \quad S_n(u) > |S_n(u, q^{(n)})| - \varepsilon.$$

Soit k un indice tel qu'on ait

$$|R_n^{(k)}(u, q^{(n)})| = \max_{(j)} |R_n^{(j)}(u, q^{(n)})|.$$

En vertu de la définition (3), on a identiquement

$$S_n(u, q^{(n)}) = R_n^{(k)}(u, q^{(n)}) S_{n-1}(u; q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n),$$

d'où suit d'après (6), (7) et (26) l'inégalité

$$S_n(u) > R_n(u) S_{n-1}(u) - \varepsilon,$$

et, comme ε est arbitrairement petit, on trouve

$$S_n(u) \geq R_n(u) S_{n-1}(u) \quad \text{pour } n=2, 3, 4, \dots$$

De cette inégalité on déduit la suivante

$$S_n(u) \geq R_1(u) R_2(u) \dots R_n(u) \quad \text{pour } n=1, 2, 3, \dots;$$

celle-ci peut être mise, d'après (21), sous la forme

$$(27) \quad s^n(u) \geq [r_1(u) r_2(u)^2 \dots r_n(u)^n]^{2/n(n+1)} \quad \text{pour } n=1, 2, 3, \dots$$

D'autre part, il existe un système $v^{(n)} = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ de $n+1$ points de E tel qu'on ait

$$R_n(u) + \varepsilon > \max_{(j)} |R_n^{(j)}(u, v^{(n)})|,$$

donc

$$(28) \quad R_n(u) + \varepsilon > |R_n^{(j)}(u, v^{(n)})| \quad \text{pour } j=0, 1, 2, 3, \dots, n.$$

En multipliant ces inégalités membres par membres, on a

$$[R_n(u) + \varepsilon]^{n+1} > \prod_{j=0}^n |R_n^{(j)}(u, v^{(n)})| = |S_n(u, v^{(n)})|^2 \geq S_n(u)^2,$$

et, par suite,

$$(29) \quad r_n(u) \geq s_n(u) \quad \text{pour } n=1, 2, 3, \dots$$

Puisque la limite $\lim r_n(u)$ existe, les relations (27) et (29) entraînent l'existence de la limite $\lim s_n(u)$ et l'égalité

$$\lim_n r_n(u) = \lim_n s_n(u).$$

Remarquons maintenant que

$$(30) \quad S_n(u) \leq \frac{\Delta(u, E)^{n(n+1)}}{\Theta_n^{n+1}} \quad \text{pour } n=1, 2, 3, \dots,$$

et que $\sqrt[n]{\Theta_n} \rightarrow \Theta(E)$, donc, si $\Theta(E)$ est positif, on a

$$S(u) \leq \frac{\Delta(u, E)}{\Theta(E)}$$

et le théorème est démontré.

4. Homogénéité des fonctions limites. Une fonction $f(x, y)$ des variables complexes x et y sera dite *homogène d'ordre 1* si, λ étant un nombre complexe quelconque, on a

$$|f(\lambda x, \lambda y)| = |\lambda| |f(x, y)|.$$

Il est clair que la distance triangulaire $|up|$ est une fonction homogène par rapport aux coordonnées du point u .

Théorème III. Les fonctions limites

$$(31) \quad C(u), \quad R(u), \quad S(u)$$

sont homogènes d'ordre 1 par rapport aux coordonnées du point u .

Il suffit de borner la démonstration à une seule des fonctions (31), par exemple à $C(u)$, et à une valeur de λ différente de zéro. Soit u un point quelconque de l'espace Q , et ε un nombre positif quelconque. Désignons par v le point de coordonnées $\lambda x, \lambda y$, où x et y sont celles du

point u , et soit n un nombre naturel quelconque. A $\varepsilon > 0$, n , u et v correspondent deux systèmes de $n+1$ points de E ; soient

$$p^{(n)} = (p_0, p_1, p_2, \dots, p_n), \quad q^{(n)} = (q_0, q_1, q_2, \dots, q_n)$$

tels qu'on ait

$$C_n(u) + \varepsilon > \max_{(j)} |C_n^{(j)}(u, p^{(n)})|,$$

$$C_n(v) + \varepsilon > \max_{(j)} |C_n^{(j)}(v, q^{(n)})|.$$

Puisque

$$|C_n^{(j)}(v, q^{(n)})| = |\lambda|^n |C_n^{(j)}(u, q^{(n)})| \quad \text{et} \quad |\lambda|^n |C_n^{(j)}(u, p^{(n)})| = |C_n^{(j)}(v, p^{(n)})|,$$

on a

$$|\lambda|^n C_n(u) + |\lambda|^n \varepsilon > \max_{(j)} |C_n^{(j)}(v, p^{(n)})|,$$

$$C_n(v) + \varepsilon > \max_{(j)} |C_n^{(j)}(u, q^{(n)})| |\lambda|^n,$$

d'où il suit que

$$|\lambda|^n C_n(u) + |\lambda|^n \varepsilon > C_n(v),$$

$$C_n(v) + \varepsilon > |\lambda|^n C_n(u),$$

et, comme ε est arbitrairement petit,

$$|\lambda|^n C_n(u) \geq C_n(v)$$

$$C_n(v) \geq |\lambda|^n C_n(u)$$

pour $n=1, 2, 3, \dots$

Il en résulte que

$$|\lambda| C(u) \geq C(v), \quad C(v) \geq |\lambda| C(u),$$

donc $C(v) = |\lambda| C(u)$, c. q. f. d.

Remarque. F. Leja a démontré que la fonction $L(u)$ a plusieurs propriétés remarquables par rapport aux séries de polynômes homogènes de deux variables⁴⁾. Il serait intéressant d'examiner la continuité des fonctions (31) et les relations entre ces fonctions et la fonction $L(u)$.

⁴⁾ F. Leja, *Sur une classe de fonctions homogènes et les séries de Taylor des fonctions de deux variables*, Ann. Soc. Pol. Math. 22 (1949), p. 245-268.

SUR UN PROBLÈME CONCERNANT UN RÉSEAU À 36 POINTS

Par W. SIERPIŃSKI (Warszawa)

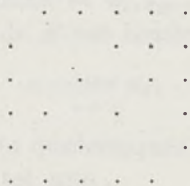
Dans sa lettre du 22 juillet 1951 M. K. Zarankiewicz m'a posé le problème suivant:

Soit n un nombre naturel plus grand que 3 et R_n un réseau formé de n^2 points situés dans le plan et rangés en n lignes et n colonnes. Il s'agit de trouver le plus petit nombre naturel $k(n)$ tel que tout sous-ensemble de R_n formé de $k(n)$ points contienne 9 points situés sur trois lignes et trois colonnes du réseau R_n .

On démontre sans difficulté que $k(4)=14$ et $k(5)=21$.

Le but de cette note est de trouver le nombre $k(6)$.

La figure, formée de 26 points,



qui ne contient aucun système de 9 points situés sur trois lignes et trois colonnes, prouve qu'on a $k(6) > 26$.

Je démontrerai que $k(6)=27$. Vu que $k(6) > 26$, il suffira de démontrer que $k(6) \leq 27$.

Soit donc S un sous-ensemble du réseau R_6 formé de 27 points. L'ensemble $F=R_6-S$ contient donc 9 points. Le réseau R_6 contenant 6 lignes, et l'ensemble F ayant 9 points, seulement trois cas peuvent se présenter:

1. Une seule ligne contient plus qu'un point de F .

On voit sans peine que cette ligne contient alors au moins 4 éléments de F . Si l'on supprime cette ligne, il reste au plus 5 points de F qui peuvent être recouverts par deux lignes et trois colonnes. Donc, en supprimant trois lignes et trois colonnes convenables, on a de R_6 un système formé de 9 points contenus dans S et situés sur trois lignes et trois colonnes.

2. Seulement deux lignes contiennent plus qu'un point de F .

On voit sans peine qu'une au moins de ces lignes contient alors 3 éléments de F . Si l'on supprime ces deux lignes, il reste au plus 4 points de F qui peuvent être recouverts par une ligne et trois colonnes. Donc, en supprimant trois lignes et trois colonnes convenables, on a de R_6 un système formé de 9 points de S situés sur trois lignes et trois colonnes.

3. Trois lignes ou plus contiennent plus qu'un point de F .

Si l'on supprime trois de ces lignes, il reste au plus 3 points de F qui peuvent être recouverts par trois colonnes. On en déduit comme plus haut que S a un système de 9 points situés sur trois lignes et trois colonnes.

Nous avons ainsi démontré que tout sous-ensemble de R_6 contenant 27 points a un système de 9 points situés sur trois lignes et trois colonnes. Il en résulte immédiatement que $k(6) \leq 27$. La formule $k(6) = 27$ se trouve ainsi démontrée.

Le problème de trouver $k(7)$ et, à plus forte raison, le problème de trouver une formule permettant de calculer $k(n)$ pour tout nombre naturel donné $n > 6$ reste ouvert.

UN THÉORÈME CONCERNANT LES FONCTIONS CONTINUES DANS LES ENSEMBLES ORDONNÉS

Par W. SIERPIŃSKI (Warszawa)

Dans une communication que j'ai présentée à la section de Varsovie de la Société Polonaise de Mathématique en 1951¹⁾, je m'occupais de fonctions continues, définies pour les nombres ordinaux, et dont les valeurs sont des nombres ordinaux. M. K. Zarankiewicz m'a posé la question si les théorèmes que j'ai alors énoncés peuvent être généralisés pour des fonctions définies dans un ensemble ordonné quelconque et dont les valeurs appartiennent à un (autre ou le même) ensemble ordonné. Le but de cette note est de généraliser ainsi un de ces théorèmes.

Je commencerai par des définitions de la convergence de suites et de la continuité de fonctions dans les ensembles ordonnés.

E étant un ensemble ordonné et a_1, a_2, \dots une suite infinie d'éléments de E , on dit que l'élément a de E est *limite* de cette suite, ce qu'on écrit

$$(1) \quad a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

si, b et c étant deux éléments quelconques de E et tels que $b \prec a \prec c$, il existe un nombre naturel μ tel que

$$b \prec a_n \prec c \quad \text{pour } n > \mu.$$

Dans le cas, où a est le premier élément de l'ensemble E , on a la formule (1) s'il existe, pour tout élément c de E tel que $a \prec c$, un nombre naturel μ tel que $a_n \prec c$ pour $n > \mu$; dans le cas où a est le dernier élément de E , on a la formule (1) s'il existe, pour tout élément b de E tel que $b \prec a$, un nombre naturel μ tel que $b \prec a_n$ pour $n > \mu$.

Soit $f(x)$ une fonction définie pour les éléments x d'un ensemble ordonné E et dont les valeurs sont des éléments d'un ensemble ordonné H . On dira que la fonction $f(x)$ est *continue* pour un élément x_0 de E si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

dans E entraîne toujours

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

dans H .

¹⁾ Voir W. Sierpiński, *Sur les fonctions continues d'une variable ordinale*, *Fundamenta Mathematicae* **38** (1951), p. 204-208.

On démontre sans peine que pour que la fonction $f(x)$ (définie pour les éléments x de l'ensemble ordonné E et dont les valeurs appartiennent à l'ensemble H) soit continue pour l'élément x_0 de E , il suffit que, a_1, b_1 étant des éléments quelconques de H tels que $a_1 \prec f(x_0) \prec b_1$, il existe des éléments a, b de E tels que $a \prec x_0 \prec b$ et que $a_1 \prec f(x) \prec b_1$ pour $a \prec x \prec b$. Dans le cas, où $f(x)$ est le premier ou le dernier élément de l'ensemble H , ainsi que dans le cas, où x_0 est le premier ou le dernier élément de l'ensemble E , il faut modifier ces conditions d'une façon évidente.

A l'aide de l'axiome du choix on démontre que cette condition est aussi nécessaire.

Théorème. Chaque fonction, définie dans un ensemble ordonné dénombrable E et dont les valeurs sont des éléments d'un ensemble ordonné H , est limite d'une suite infinie de fonctions continues dans E , dont les valeurs appartiennent à H .

Lemme. E étant un ensemble ordonné dénombrable, a, b deux éléments de E , tels que $a \prec b$, il existe une décomposition de E en une somme de deux ensembles, $E = A + B$, ayant les trois propriétés suivantes:

1° $a \in A$ et $b \in B$,

2° tout élément de A précède tout élément de B ,

3° soit A a un élément dernier et B un élément premier, soit A n'a d'élément dernier et B d'élément premier.

Démonstration du lemme. Soient a et b deux éléments de l'ensemble ordonné dénombrable E , tels que $a \prec b$. Soit E_1 le sous-ensemble ordonné de E formé des éléments a et b et de tous les éléments x de E tels que $a \prec x \prec b$.

Si E_1 n'est pas dense, il a deux éléments a_1 et b_1 , entre lesquels ne se trouve aucun élément de E_1 , donc aussi aucun élément de E . En désignant par A l'ensemble de tous les éléments de E qui précèdent l'élément b_1 et en posant $B = E - A$, on a une décomposition $E = A + B$ qui satisfait aux conditions 1° et 2° ainsi qu'à la condition 3° puisqu'il existe un élément dernier a_1 de A et un élément premier b_1 de B .

Supposons E_1 dense. Il est donc infini et en tant que sous-ensemble de l'ensemble dénombrable E , il est dénombrable. En tant que dénombrable, dense et ayant un élément premier a et un dernier b , il est, comme on le sait, semblable (dans le sens de l'ordre) à l'ensemble R de tous les nombres rationnels de l'intervalle $(0,1)$ ordonné d'après leurs grandeurs. Soient α un nombre irrationnel de l'intervalle $(0,1)$ et M , ou N , l'ensemble de tous les nombres de R qui sont respectivement plus petits, ou plus grands, que α . L'ensemble M n'a pas, comme on le sait, d'élément dernier, et l'ensemble N d'élément premier. Or, à la décomposition $R = M + N$ correspond une décomposition $E_1 = A_1 + B_1$, où l'ensemble A_1 est semblable à M et l'ensemble B_1 à N .

Désignons par A l'ensemble formé de tous les éléments de E qui précèdent a et de tous les éléments de A_1 , et posons $B = E - A$. On voit sans peine que la décomposition $E = A + B$ satisfait aux propriétés 1° et 2°, ainsi qu'à 3° puisque l'ensemble A (en tant que semblable à M) n'a pas d'élément dernier et l'ensemble B (semblable à N) n'a pas d'élément premier.

Le lemme se trouve ainsi démontré.

Démonstration du théorème. Soit E un ensemble ordonné dénombrable. Il existe donc une suite infinie x_1, x_2, \dots formée de tous les éléments distincts de E .

Soit n un nombre naturel. Ordonnons les éléments x_1, x_2, \dots, x_n d'après leur ordre dans l'ensemble E , et soit

$$x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_n$$

la suite ainsi formée.

D'après le lemme, pour tout nombre naturel $k < n$, il existe une décomposition $E = A_k + B_k$ telle que 1° $x_k \in A_k$ et $x_{k+1} \in B_k$, 2° tout élément de A_k précède tout élément de B_k , 3° soit A_k a un élément dernier et B_k un élément premier, soit A_k n'a d'élément dernier et B_k d'élément premier.

On voit sans peine qu'on a $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_{n-1}$.

Soit $f(x)$ une fonction définie dans E et dont les valeurs sont des éléments d'un ensemble ordonné H .

Posons

$$\begin{aligned} f_n(x) &= f(x'_1) && \text{pour } x \in A_1, \\ f_n(x) &= f(x'_k) && \text{pour } x \in A_k - A_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots, n-1), \\ f_n(x) &= f(x'_n) && \text{pour } x \in B_{n-1}. \end{aligned}$$

On voit sans peine que la fonction $f_n(x)$ sera, de cette manière, définie pour tout élément x de E . Elle sera aussi continue dans E . En effet, si $x_0 \in A_1$ et si A_1 a un élément dernier a_1 , alors B_1 , d'après la propriété 3°, a un élément premier b_1 ; on a $x_0 \prec b_1$ (d'après 2°), et, pour tout élément x de E tel que $x \prec b_1$, on a $x \in A_1$, d'où, d'après la définition de la fonction $f_n(x)$,

$$f_n(x) = f(x'_1), \quad f_n(x_0) = f(x'_1),$$

done

$$f_n(x) = f_n(x_0) \quad \text{pour } x \prec b_1.$$

Vu que $x_0 \prec b_1$, la fonction $f_n(x)$ est continue dans E pour x_0 . Si A_1 , n'a pas d'élément dernier, alors, vu que $x_0 \in A_1$, il existe un élément a de A_1 tel que $x_0 \prec a$ et on a $x \in A_1$ pour $x \prec a$, donc

$$f_n(x) = f(x'_1), \quad f_n(x_0) = f(x'_1),$$

d'où

$$f_n(x) = f_n(x_0) \quad \text{pour } x \prec a;$$

vu que $x_0 \prec a$, la fonction $f_n(x)$ est continue dans E pour l'élément x_0 .

Si $x_0 \in A_k - A_{k-1}$, où k est un des nombres $2, 3, \dots, n-1$, on a, d'après $E = A_{k-1} + B_{k-1}$, $x_0 \in B_{k-1}$. Si B_{k-1} a un élément premier, A_{k-1} a un élément dernier a et $a \prec x_0$. Si B_{k-1} n'a pas d'élément premier, il existe, d'après $x_0 \in B_{k-1}$, un élément a de B_{k-1} tel que $a < x_0$. Si A_k a un élément dernier, B_k a un élément premier b et, comme $x_0 \in A_k$, on a $x_0 \prec b$. Si A_k n'a pas d'élément dernier, il existe, d'après $x_0 \in A_k$, un élément b de A_k tel que $x_0 \prec b$. On aura donc $a \prec x_0 \prec b$ dans chaque cas, et, comme on le voit sans peine, $x \in A_k - A_{k-1}$ pour $a \prec x \prec b$, donc

$$f_n(x) = f(x'_1), \quad f_n(x_0) = f(x'_1),$$

c'est-à-dire

$$f_n(x) = f_n(x_0) \quad \text{pour} \quad a \prec x \prec b;$$

comme $a \prec x_0 \prec b$, la fonction $f_n(x)$ est donc continue dans E pour l'élément x_0 .

Si enfin $x_0 \in B_{n-1}$ et si B_{n-1} a un élément premier, A_{n-1} a un élément dernier a , et on a $a \prec x_0$. Si B_{n-1} n'a pas d'élément premier, il existe, d'après $x_0 \in B_{n-1}$, un élément a de B_{n-1} , tel que $a \prec x_0$. En tout cas, on aura $x \in B_{n-1}$ pour $a \prec x$, donc

$$f_n(x) = f(x'_n), \quad f_n(x_0) = f(x'_n),$$

d'où

$$f_n(x) = f_n(x_0) \quad \text{pour} \quad a \prec x \prec b,$$

et, comme $a \prec x_0 \prec b$, la fonction $f_n(x)$ est continue dans E pour x_0 .

Il a été ainsi démontré que les fonctions $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) sont continues dans l'ensemble E . Or, la fonction $f(x)$ ne prenant que les valeurs de l'ensemble H , il résulte de la définition des fonctions $f_n(x)$ qu'elles ont la même propriété.

D'après la définition de la fonction $f_n(x)$, on a $f_n(x'_k) = f(x'_k)$ pour $k=1, 2, \dots, n$, donc aussi $f_n(x_k) = f(x_k)$ pour $k=1, 2, \dots, n$, ce qui donne $f_n(x_k) = f(x_k)$ pour $n \geq k$ ($k=1, 2, \dots$), et prouve que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_k) = f(x_k) \quad \text{pour} \quad k=1, 2, \dots$$

La suite infinie x_1, x_2, \dots contenant tous les éléments de l'ensemble E , on a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{pour} \quad x \in E.$$

La fonction $f(x)$ est donc, dans E , limite d'une suite infinie de fonctions continues dans E et dont les valeurs sont des éléments de H . Le théorème se trouve ainsi démontré.

Tout ensemble ordonné E peut être regardé comme un espace topologique de Hausdorff si l'on considère, comme voisinage d'un élément a de E , chaque ensemble de tous les éléments x de E tels que $b \prec x \prec c$, où b, c sont des éléments de E tels que $b \prec a \prec c$. Dans le cas, où a est

l'élément premier, ou dernier, de E , il faut modifier cette définition de voisinage d'une façon évidente.

Il s'impose donc de voir si le théorème ci-dessus peut être généralisé en remplaçant la condition que les ensembles E et H soient ordonnés par celle qu'ils soient des espaces topologiques de Hausdorff.

Je démontrerai que le théorème cesse d'être vrai si l'on remplace la condition que l'ensemble E soit ordonné par celle qu'il soit un espace topologique de Hausdorff.

Soit, en effet, E l'ensemble formé de tous les nombres rationnels de l'intervalle $(0,1)$ et de tous les nombres naturels.

Comme voisinage de l'élément 0 de E considérons tout ensemble de nombres rationnels r tels que $0 \leq r < 1/n$, où n est un nombre naturel quelconque; comme voisinage de l'élément 1 de E considérons tout ensemble de nombres rationnels r tels que $1 - 1/n < r \leq 1$, où n est un nombre naturel quelconque.

Si n est un nombre naturel > 1 , considérons, comme voisinage de l'élément n de E , tout ensemble composé du nombre n , de tous les nombres rationnels r tels que $u < r < 1/n$, où u est un nombre rationnel quelconque tel que $0 < u < 1/n$, et de tous les nombres rationnels r tels que $1 - 1/n < r < v$, où v est un nombre rationnel quelconque tel que $1 - 1/n < v < 1$.

Pour r rationnel, $0 < r < 1$, considérons, comme voisinage de r , seulement l'ensemble composé de l'élément r .

On vérifie sans peine que l'ensemble E deviendra ainsi un espace topologique de Hausdorff.

Soit H un ensemble ordonné composé de deux nombres 0 et 1.

Posons $f(0) = 0$ et $f(x) = 1$ pour $x \in E$, $x \neq 0$. Je démontrerai que, dans E , la fonction $f(x)$ n'est pas une limite de fonctions continues dans E qui ne prennent que les valeurs 0 et 1.

Admettons qu'on ait

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

dans E , où $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) sont des fonctions continues dans E qui ne prennent que les valeurs 0 et 1. Il résulte tout de suite de $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

et de $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ qu'on a, pour p suffisamment grand, $f_p(0) = 0$ et $f_p(1) = 1$. La fonction $f_p(x)$ étant continue dans E et ne prenant que les valeurs 0 et 1, il existe dans E un voisinage $V(0)$ de 0 tel que $f_p(x) = 0$ pour $x \in V(0)$ et un voisinage $V(1)$ de 1 tel que $f_p(x) = 1$ pour $x \in V(1)$. Or, d'après la définition de voisinage dans E , il existe un nombre naturel g tel que $V(0)$ soit l'ensemble de tous les nombres rationnels r tels que $0 \leq r < 1/g$, et un nombre naturel h tel que $V(1)$ soit l'ensemble de tous les nombres rationnels r tels que $1 - 1/h < r \leq 1$.

Soit maintenant n un nombre naturel $> g$ et $> h$. La fonction $f_p(x)$ étant continue dans E , il existe un voisinage $V(n)$ de n tel que $f_p(x) = f_p(n)$

pour $x \in V(n)$. D'après la définition de voisinage dans E , il existe un nombre rationnel u , $0 < u < 1/n$, et un nombre rationnel v , $1 - 1/n < v < 1$, tels que $V(n)$ soit l'ensemble composé du nombre n , de tous les nombres rationnels r tels que $u < r < 1/n$, et de tous les nombres rationnels r tels que $1 - 1/n < r < v$. Soit r_0 un nombre rationnel tel que $u < r_0 < 1/n$, et soit r_1 un nombre rationnel tel que $1 - 1/n < r_1 < v$. On aura donc $r_0 \in V(n)$, $r_1 \in V(n)$, d'où $f_\rho(r_0) = f_\rho(r_1) = f_\rho(n)$. D'autre part, comme $0 < r_0 < 1/n < 1/g$, on a $r_0 \in V(0)$, donc $f_\rho(r_0) = 0$ et, comme $1 - 1/h < 1 - 1/n < r_1 < 1$, on a $r_1 \in V(1)$, donc $f_\rho(r_1) = 1$. Ainsi $f_\rho(r_0) \neq f_\rho(r_1)$, ce qui est impossible.

L'hypothèse que la fonction $f(x)$ soit, dans E , une limite de fonctions continues dans E , qui ne prennent que les valeurs 0 et 1, implique donc une contradiction.

Il a été ainsi démontré qu'on ne peut pas, dans le théorème, remplacer la condition que l'ensemble E soit ordonné par celle qu'il soit un espace topologique de Hausdorff. D'autre part, on voit sans peine que le théorème reste vrai lorsqu'on remplace la condition que l'ensemble H soit ordonné par celle qu'il soit un espace topologique.



COMPTES RENDUS DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

1. VII. 1950 — 1. VII. 1951

État de la Société

Bureau Central

élu à l'Assemblée Générale de la Société Polonaise de Mathématique qui a eu lieu le 21 avril 1951 à Varsovie.

Président de la Société: Prof. Dr Kazimierz Kuratowski.

Secrétaire de la Société: Doc. Dr Roman Sikorski.

Trésorier de la Société: Prof. Dr Karol Borsuk.

Conformément au règlement de la Société tous les présidents des Sections sont en même temps vice-présidents de la Société.

Commission de Contrôle: Dr Zygmunt Butlewski, Prof. Dr Stanisław Gołąb, Prof. Dr Bronisław Knaster.

Section de Cracovie

Président de la Section: Prof. Dr Franciszek Leja.

Vice-Président de la Section: Prof. Dr Włodzimierz Wrona.

Secrétaire de la Section: Doc. Dr Jacek Szarski.

Trésorier de la Section: Mgr Antoni Skwarczyński.

Membres du Bureau de la Section: Prof. Dr Stanisław Gołąb, Prof. Dr Tadeusz Kochmański, Prof. Dr Tadeusz Ważewski.

Commission de Contrôle: Prof. Dr Tadeusz Banachiewicz, Dr Roman Leitner, Dr Świętosław Romanowski.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Franciszek Leja, Prof. Dr Jan Leśniak, Prof. Dr Stanisław Gołąb, Prof. Dr Tadeusz Ważewski.

Suppléants des Délégués: Prof. Dr Mirosław Krzyżański, Doc. Dr Jacek Szarski.

Section de Gdańsk

Président de la Section: Prof. Dr Stanisław Turski.

Vice-Président de la Section: Prof. Dr Witold Nowacki.

Secrétaire de la Section: Prof. Dr Bronisław Czerwiński.

Trésorier de la Section: Mgr Ing. Marian Piątek.

Membre du Bureau de la Section: Mgr Jan Wełniak.

Commission de Contrôle: Prof. Ing. Michał Broszko, Dr Waclaw Pawelski, Prof. Ing. Józef Wysocki.

Section de Lublin

Président de la Section: Prof. Dr Mieczysław Biernacki.

Vice-Président de la Section: Prof. Dr Adam Bielecki.

Secrétaire de la Section: Mgr Jan Krzyż.

Trésorier de la Section: Mgr Wiktor Oktaba.

Membre du Bureau de la Section: Prof. Dr Mikołaj Olekiewicz.

Commission de Contrôle: Mgr Wiktor Józwiakowski, Prof. Dr Włodzimierz Urbański.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Mieczysław Biernacki, Prof. Dr Adam Bielecki.

Suppléants des Délégués: Prof. Dr Mikołaj Olekiewicz, Prof. Dr Włodzimierz Urbański.

Section de Łódź

Président de la Section: Prof. Dr Zygmunt Zahorski.

Vice-Président de la Section: Dr Zygmunt Charzyński.

Secrétaire de la Section: Mgr Józef Janikowski.

Trésorier de la Section: Mgr Lech Włodarski.

Commission de Contrôle: Mgr Włodzimierz Krysicki, Mgr Jan Słowikowski.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Jerzy Popruzenko, Ignacy Roliński.

Section de Poznań

Président de la Section: Prof. Dr Władysław Orlicz.

Vice-Président de la Section: Prof. Antoni Schönhuber.

Secrétaire de la Section: Doc. Dr Andrzej Alexiewicz.

Trésorier de la Section: Dr Zygmunt Butlewski.

Membre du Bureau de la Section: Mgr Halina Ryffertówna.

Commission de Contrôle: Mgr Marian Jarosz, Prof. Dr Zdzisław Krygowski, Prof. Dr Waclaw Smosarski.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Władysław Orlicz, Prof. Antoni Schönhuber.

Section de Varsovie

Président de la Section: Prof. Dr Kazimierz Zarankiewicz.

Vice-Président de la Section: Prof. Dr Karol Borsuk.

Secrétaire de la Section: Prof. Dr Aleksander Gruzewski.

Trésorier de la Section: Alina Böhmówna.

Membres du Bureau de la Section: Prof. Dr Kazimierz Kuratowski, Prof. Dr Waclaw Sierpiński.

Commission de Contrôle: Dr Henryk Greniewski, Prof. Dr Stefan Straszewicz.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Karol Borsuk, Prof. Dr Aleksander Gruzewski, Prof. Dr Kazimierz Kuratowski, Prof. Dr Waclaw Sierpiński, Prof. Dr Stefan Straszewicz.

Suppléants des Délégués: Prof. Dr Andrzej Mostowski, Prof. Dr Witold Pogorzelski, Prof. Dr Kazimierz Zarankiewicz.

Section de Wrocław

Président de la Section: Prof. Dr Władysław Ślebodziński.

Vice-Président de la Section: Prof. Dr Edward Marczewski.

Secrétaire de la Section: Mgr Abraham Götz.

Trésorier de la Section: Dr Maria Nosarzewska.

Membre du Bureau de la Section: Prof. Dr Bronisław Knaster.

Commission de Contrôle: Prof. Dr Jerzy Słupecki, Prof. Dr Hugo Steinhaus, Prof. Dr Witold Wolibner.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Bronisław Knaster, Prof. Dr Edward Marczewski, Prof. Dr Jan Mikusiński, Mgr Marceł Stark.

Suppléants des Délégués: Prof. Dr Hugo Steinhaus, Prof. Dr Władysław Ślebodziński, Dr Stanisław Hartman, Prof. Dr Jerzy Słupecki.

Comptes rendus des séances des Sections

Section de Cracovie

12. XII. 1950. Maurin, K., *Sur les équations autoadjointes du type elliptique* (à paraître dans ces Annales).

19. XII. 1950. Leja, F., *Remarques sur les séries entières doubles* (ces Annales 24, Fasc. 1, p. 19—24).

5. I. 1951. Krzyżański, M., *Les solutions des équations linéaires du type parabolique, considérées comme limites des solutions des équations des types hyperbolique et elliptique.*

L'équation linéaire autoadjointe

$$(1) \quad \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik}(P) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c(P)u = \frac{\partial u}{\partial t},$$

où $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$ est un point du domaine D de l'espace à m dimensions), est du type elliptique, parabolique ou hyperbolique suivant que le signe du nombre constant h est positif, nul ou négatif.

Admettons d'abord que (1) ait une solution de la forme

$$u(P, t) = v(P)w(t).$$

On aboutit alors aux équations

$$(2) \quad \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) + (c + \lambda)v = 0,$$

et

$$(3) \quad hw'' - w' - \lambda w = 0,$$

λ étant un nombre constant.

A l'équation ordinaire (3) correspond l'équation caractéristique

$$(4) \quad hr^2 - r - \lambda = 0.$$

Distinguons deux cas:

1) $h > 0$, soit $h = 1/k^2$. L'équation (1) est du type elliptique; l'équation (4) admet deux racines réelles de signes opposés, dont l'une, positive, tend vers l'infini avec k , l'autre, négative, soit $r_2 = -\varrho(k, \lambda)$, — vers $-\lambda$ pour $k \rightarrow \infty$.

Si $v(P)$ est une solution de (2), la fonction

$$u_z(P, t, k) = v(P)e^{-\varrho(k, \lambda)t}$$

en est une de (1), convergeant vers $v(P)e^{-\lambda t}$ pour $k \rightarrow \infty$. Cette limite constitue une solution de l'équation parabolique, correspondant à $h = 0$.

2) $h < 0$, soit $h = -1/k^2$. L'équation (1) est du type hyperbolique; les racines de l'équation (4) sont réelles pour $\lambda \leq (k/2)^2$, et complexes pour $\lambda > (k/2)^2$.

Dans le cas elliptique, on cherche une solution de (1) qui s'annulerait pour $P \in FD$, et $t \geq 0$ (FD désignant la frontière du domaine D) et qui se réduirait à une fonction donnée $\varphi(P)$ pour $t = 0$, où $P \in D$. Supposons donc $\varphi(P)$ développable en une série uniformément et absolument convergente, de fonctions caractéristiques de l'équation (2); la solution prend alors la forme

$$u(P, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(P) e^{-\varrho(k, \lambda_n)t}.$$

$u(P, t)$ tend pour $k \rightarrow \infty$, vers une solution

$$\bar{u}(P, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(P) e^{-\lambda_n t}$$

de l'équation du type parabolique ($h = 0$), s'annulant pour $P \in FD$ et se réduisant à $\varphi(P)$ pour $t = 0$.

Dans le cas hyperbolique on cherche une solution de (1), qui s'annulerait pour $P \in FD$ et $t \geq 0$ et satisfèrait, pour $t = 0$, aux conditions initiales (conditions de Cauchy):

$$u(P, 0) = \varphi(P), \quad u_t(P, 0) = \varphi_1(P).$$

Si l'on choisit

$$\varphi_1(P) = \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) + c\varphi,$$

et si l'on admet des hypothèses convenables, concernant la fonction φ , on peut représenter cette solution par une série de la forme

$$u(P, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(P) w_n(t, k),$$

où w_n sont des solutions de (3) convenablement choisies et la fonction $u(P, t)$ tend, pour $k \rightarrow \infty$, vers la solution $\bar{u}(P, t)$ de l'équation de type parabolique.

13. III. 1951. Jankowski, W., *Sur les zéros des polynômes* (Annales U. M. C. S. 5, 1951, p. 31—92).
10. IV. 1951. Szarski, J., *Evaluation du domaine de régularité du conoïde caractéristique* (ce volume, p. 85—110).
5. IV. 1951. Krzyżański, M., 1. *Sur une propriété de l'équation linéaire du type elliptique.*

Soit $u(P)$ une solution de l'équation linéaire, homogène, du type elliptique,

$$\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^m b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = 0,$$

à coefficients continus dans un domaine D .

L'auteur démontre que l'ensemble des points du domaine D , où $u(P)$ s'annule, ne peut contenir de points isolés.

2. *Sur l'allure des solutions de l'équation du type parabolique, la variable du temps tendant vers l'infini.*

Considérons l'équation linéaire homogène du type parabolique

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x)u,$$

à deux variables indépendantes, x — celle de l'espace, t — celle du temps.

Soit $u(x, t)$ une solution de (1) qui satisfait à certaines conditions initiales et, éventuellement, à certaines conditions aux limites.

L'auteur présente des exemples qui montrent qu'en général $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ peut ne pas exister.

Il énonce ensuite des conditions suffisantes pour que cette limite existe et satisfasse à l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = a(x) \frac{du}{dx} + c(x)u,$$

correspondant à la distribution stationnaire de la température.

11. VI. 1951. Pleskot, V., (Prague), *Méthodes et applications de la nomographie.*

Section de Gdańsk

15. VII. 1950. Naleszkiewicz, J., *Sur l'équation intégrale de la ligne de flexion d'une poutre dont le moment d'inertie est variable et la charge arbitraire.*

15. X. 1950. Bielewicz, E., *Sur l'équation intégrale de la corde vibrante.*

15. XI. 1950. Pawelski, W., *Sur la réduction des équations différentielles avec des conditions aux limites aux équations intégrales de Fredholm.*

10. III. 1951. Czerwiński, B., *Sur les fonctions multiplicativement périodiques.*

15. IV. 1951. Czerwiński, B., *Sur les fonctions elliptiques.*

11. V. 1951. Turski, S., *Sur l'intégration approchée des équations intégrales.*

1. VI. 1951. Turski, S., *Sur l'intégration numérique des équations différentielles ordinaires.*

4. VI. 1951. Pleskot, V., (Prague), *Sur quelques problèmes de la nomographie.*

8. VI. 1951. Nowacki, W., *Sur l'application des équations aux différences finies à quelques problèmes du bâtiment.*

8. VI. 1951. Kowalczyk, B., *Sur l'application des méthodes de relaxation à l'intégration numérique des équations différentielles linéaires du second ordre.*

9. VI. 1951. Naleszkiewicz, J., *Sur l'application des équations intégrales à la théorie des vibrations des poutres, en particulier, à la théorie des vibrations des coques des navires.*

Section de Lublin

30. I. 1949. Zahorski, Z., *Sur une condition suffisante pour qu'une fonction soit monotone* (Publié dans Trans. American Math. Soc. **69**, 1950, théorème 2, p. 19).

7. 10. 1950. Butlewski, Z., *Sur les solutions oscillantes des équations différentielles* (voir *Un théorème de l'oscillation*, ces Annales **24** Fasc. 1, p. 29—110).

24. XI. 1950. Séance consacrée aux travaux des mathématiciens de l'U. R. S. S.

Bielecki, A., *La théorie des fonctions d'une variable réelle et des équations différentielles.*

Biernacki, M., *La théorie des nombres et celle des fonctions analytiques.*

Olekiewicz, M., *Statistique mathématique.*

15. XII. 1950. Olekiewicz, M., *Sur certaines méthodes d'évaluer la moyenne arithmétique.*

2. I. 1951. Ryll-Nardzewski, C., *Sur une équidistribution des ensembles sur un cercle* (à paraître dans „Colloquium Mathematicum“).

27. I. 1951. Charzyński, Z., *Sur une condition nécessaire d'univalence des fonctions holomorphes bornées.*

Nous considérons deux familles de fonctions univalentes: la famille F_T composée de toutes les fonctions de la forme

$$(*) \quad f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad |z| < 1,$$

univalentes et bornées, c'est-à-dire telles que $|f(z)| < 1$ et que $a_1 \geq T$, où $0 < T \leq 1$ est un nombre quelconque fixe, et la famille F_∞ composée de toutes les fonctions de la forme

$$(**) \quad F(z) = z + A_2 z^2 + \dots, \quad |z| < 1$$

univalentes et non nécessairement bornées.

On obtient le théorème suivant.

Théorème. Pour chaque fonction (*) de la famille F_T , il existe dans la famille F_∞ une fonction (**), et une seule, telle que

$$F[f(z)] = a_1 F(z).$$

6. IV. 1951. Biernacki, M., *Les thèses de la Sous-Section de Mathématique du Congrès de la Science Polonaise.*

6. IV. 1951. Krzyż, J., *Sur certaines équations différentielles réductibles aux quadratures* (à paraître aux Ann. U. M. C. S.).

13. IV. 1951. Radziszewski, K., *Les problèmes idéologiques dans la logique mathématique.*

27. IV. 1951. Olekiewicz, M., *Critique du mendélisme du point de vue de la statistique mathématique.*

4. V. 1951. Dobrzycki, S., *Sur les polynômes prolongeables.*

11. V. 1951. Kowalski, M., *Les théorèmes de Grace et Grace-Heawood.*

26. V. 1951. Krzyż, J., *La vie et l'oeuvre scientifique de Stefan Banach.*

9. VI. 1951. Szpikowski, S., *Les représentations isométriques.*

16. VI. 1951. Pidekówna, B., *Les séries de Dirichlet et leurs applications dans la théorie analytique des nombres.*

18. VI. 1951. Leja, F., *Une nouvelle méthode d'interpolation permettant de résoudre le problème de Dirichlet dans le plan* (à paraître dans ces Annales).

23. VI. 1951. Łukaszewicz, Ł., *Les lignes géodésiques.*

Section de Łódź

11. XI. 1950. Charzyński, Z., *Sur quelques propriétés d'une classe de fonctions univalentes bornées.*

Soit

$$(1) \quad f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \text{ où } a_1 > 0,$$

une fonction quelconque, univalente dans le cercle $|z| < 1$ et satisfaisant aux conditions:

1. $f(z)$ est bornée, c'est-à-dire $|f(z)| < 1$ pour $|z| < 1$,

2. la mesure du contredomaine du cercle $|z| < 1$ est égale à celle de ce cercle,

c'est-à-dire à $\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 = 1$.

Nous désignons par L la classe de toutes les fonctions (1) considérées ci-dessus. Posons, pour la fonction (1),

$$(2) \quad [f(z)]^p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(p)} z^n, \quad \text{où } p = 1, 2, \dots$$

On obtient le

Théorème I. Pour chaque fonction (1) de classe L , les relations d'orthogonalité suivantes ont lieu:

$$\sum \sqrt{\frac{n}{k}} a_k^{(k)} \sqrt{\frac{n}{l}} \bar{a}_n^{(l)} = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq l \\ 1 & \text{pour } k = l \end{cases} \quad k, l = 1, 2, \dots$$

Considérons maintenant la famille H composée de toutes les fonctions

$$(3) \quad h(z) = d_1 z + d_2 z^2 + \dots,$$

holomorphes dans le cercle $|z| < 1$ et telles que $\sum_{n=1}^{\infty} n |d_n|^2 < \infty$.

On voit, sans difficulté, que chaque fonction (1) et toutes ses puissances (2) appartiennent à la famille H .

Considérons une suite fixe quelconque de nombres complexes

$$(4) \quad \{\lambda_n\},$$

telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n|^2}{n} < \infty$, et posons pour chaque fonction (3) de la famille H

$$(5) \quad U h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n d_n.$$

L'expression $U h(z)$ représente donc une fonctionnelle complexe, définie dans la famille H . En s'appuyant sur le théorème I, on peut déduire le

Théorème II. *Pour chaque fonction (1) de classe L et pour chaque fonctionnelle (5) de genre décrit ci-dessus, l'inégalité suivante a lieu :*

$$(6) \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|U\{[f(z)]^p\}|^2}{p} \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|U\{[t(z)]^p\}|^2}{p},$$

où l'on a posé $t(z) \equiv z$.

Remarque. La classe L ne contient pas toutes les fonctions univalentes bornées, mais chacune de ces fonctions est limite d'une suite de fonctions de classe L .

Exemples. En posant, dans (4), $\lambda_n = \begin{cases} 0, & n \neq N \\ 1, & n = N \end{cases}$, où N est un nombre naturel quelconque fixe, on a $U(h) = d_N$ et en appliquant l'inégalité (6), on obtient, pour chaque fonction (1) de classe L ,

$$\sum_{p=1}^N \frac{|a_n^{(p)}|^2}{p} \leq \frac{1}{N}, \quad N=1, 2, \dots$$

D'une manière analogue, en posant $\lambda_n = z_0^n$, où z_0 est un nombre complexe quelconque fixe du cercle $|z| < 1$, on a $U(h) = h(z_0)$, et en utilisant la formule (6), on trouve

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{|f(z_0)|^{2p}}{p} \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|z_0|^{2p}}{p}, \quad \text{c'est-à-dire } -\ln(1 - |f(z_0)|^2) \leq -\ln(1 - |z_0|^2);$$

de même

$$|f(z_0)| \leq |z_0|,$$

ce qui est bien le lemme connu de Schwarz, déduit par une méthode nouvelle pour les fonctions de classe L .

10. III. 1951. Zahorski, Z., *Sur une décomposition du segment.*

Wojdysławski a démontré qu'on ne peut pas décomposer un segment ouvert en deux ensembles de type F_σ disjoints et tels que chacun de leurs points soit point d'accumulation bilatérale.

On en conclut tout de suite que le segment ouvert n'est pas somme dénombrable d'ensembles F_σ ou somme finie d'ensembles G_δ ayant la propriété citée.

Mais l'on ne savait pas si cette même propriété subsiste dans le cas de la somme dénombrable d'ensembles G_δ .

En utilisant quelques propriétés de l'ensemble de Cantor, je donne un exemple d'une telle décomposition.

5. V. 1951. Włodarski, L., *Sur les méthodes continues de limitation.*

12. V. 1951. Włodarski, L., *Sur les méthodes continues de limitation* (fin).

S. Mazur et W. Orlicz ont introduit l'espace B_0 ¹⁾ dans leurs travaux sur les ensembles de suites limitables par les méthodes de Toeplitz²⁾. Cette idée peut être étendue avec succès aux méthodes continues de limitation, pourvu que l'on se borne à une classe particulière de ces méthodes. On parvient ainsi aux résultats suivants:

Soit $a_m(t)$ une suite de fonctions continues dans l'intervalle $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$. Cette suite détermine une méthode A de limitation. On dit que la suite

$$(1) \quad x = (\xi_m)$$

est limitable par la méthode A au nombre ξ , lorsque

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \beta^-} \sum a_m(t) \xi_m = \xi;$$

en symbole

$$(3) \quad A \cdot \lim \xi_m = \xi.$$

L'ensemble A^* des suites limitables par la méthode A sera dit *domaine de A* . Deux méthodes sont dites *équivalentes* lorsqu'elles ont les mêmes domaines et sont compatibles.

Posons $A_t(x) = \sum_m a_m(t) \xi_m$.

La méthode A est du type α , si

1° il existe une suite croissante $t_n \geq \alpha$ telle que $\lim t_n = \beta$ et que l'existence de $A_t(x)$, pour $t = t_{n-1}$ et $t = t_n$ entraîne celle de $A_t(x)$ pour tout $t_{n-1} < t < t_n$.

2° $A_t(x)$ est continue pour $\alpha \leq t < \beta$.

Remarque 1. Les méthodes d'Abel et de Borel sont du type α .

Remarque 2. Toute méthode de limitation de Toeplitz, définie par la matrice (a_{nm}) , équivaut à une méthode continue du type α , à savoir

$$a_m(t) = \frac{t_{n+1} - t}{t_{n+1} - t_n} a_{nm} + \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} a_{m+1,n} \quad \text{pour } t_n \leq t \leq t_{n+1}.$$

Théorème 1. *Le domaine de toute méthode continue du type α peut être considéré comme un espace complet B_0 avec les pseudonormes:*

$$\sup_t |A_t(x)|, \quad |\xi_m| \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad \sup_m \left| \sum a_k(t_n) \xi_k \right| \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

¹⁾ S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires* (I), *Studia Mathematica* 10 (1948), p. 184—208.

²⁾ S. Mazur, *Eine Anwendung der Theorie der Operationen zur Untersuchung der Toeplitzischen Limitierungsverfahren*, *Studia Mathematica* 2 (1930), p. 40—50.

S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les méthodes linéaires de sommation*, *C. R. Académie des Sciences Paris* 196, p. 32—34.

Théorème 2. Toute fonctionnelle linéaire $f(x)$, définie dans le domaine A^* de la méthode A , est de la forme

$$(4) \quad f(x) = \int_a^b A_t(x) dh(t) + \sum_m \gamma_m \xi_m,$$

où

$$(5) \quad h(t) \text{ est une fonction à variation bornée dans l'intervalle } \langle a, \beta \rangle,$$

et

$$(6) \quad \gamma_m = \delta_m + \sum_{n=1}^r a_m(t_n) \sum_{k=m}^{\infty} \varepsilon_{nk},$$

δ_m s'annulant à partir d'un indice m_0 et $\sum_k |\varepsilon_{nk}|$ étant fini pour $n = 1, 2, \dots, r$.

La méthode B sera dite non plus faible que A lorsque $A^* \subset B^*$.

Remarque 3. Si A^* contient toutes les suites convergentes, on a $\sum_m |\gamma_m| < \infty$.

Théorème 3. (a) La limite (au sens généralisé) donnée par la méthode non plus faible que A est une fonctionnelle linéaire dans le domaine de A .

(b) Il existe, pour toute fonctionnelle linéaire définie dans A^* , une méthode de Toeplitz non plus faible que A et compatible avec cette fonctionnelle.

La méthode A est dite permanente lorsque A^* contient toutes les suites convergentes et lorsqu'elle est compatible avec la limite habituelle.

Théorème 4. Pour qu'une méthode permanente A du type a soit compatible, pour une suite $x_0 = (\xi_m^0)$, à toute méthode permanente B de type a , non plus faible que A , il faut et il suffit que

$$\int_a^{b-} a_m(t) dh(t) + \gamma_m = 0, \quad \text{pour } m = 0, 1, \dots, \quad \text{entraîne} \quad \int_a^{b-} A_t(x_0) dh(t) + \sum_m \gamma_m \xi_m^0 = 0$$

pour toute fonction $h(t)$ de la forme (5) et pour toute suite (γ_m) de la forme (6).

(Le symbole \int_a^{b-} désigne $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon}$).

Théorème 5. Toute méthode permanente A de type a est compatible dans le domaine des suites bornées avec toute méthode permanente B du type a , non plus faible.

Théorème 6. (commun avec C. Ryll-Nardzewski). Toute méthode de la forme

$$a_m(t) = \frac{1}{f(t)} \alpha_m t^m, \quad 0 \leq \alpha \leq t \leq \beta < \infty,$$

où

$$f(t) = \sum_m \alpha_m t^m, \quad \alpha_m > 0 \quad \text{pour } m = 0, 1, \dots \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \beta-} \frac{1}{f(t)} = 0,$$

est parfaite, c'est-à-dire compatible avec toute méthode permanente non plus faible.

Corollaire. La méthode d'Abel est parfaite.

12. V. 1951. Bojarski, B., *Sur la dérivée d'une fonction discontinue.*

Z. Zahorski m'a posé le problème suivant: Etant donné un ensemble A dénombrable ($x_n \in A$), du type G_δ , construire une fonction d'une variable réelle $f(x)$, telle que l'on ait $f'(x) = 0$ pour tout $x \bar{\in} A$ et $f'(x) = \infty$ pour tout $x \in A$.

Suivant l'idée de E. Marczewski, j'en donne ici la solution.

On sait, d'après les hypothèses de ce problème, que l'ensemble A est clairsemé. E. Marczewski a construit une fonction $f_1(x)$ ayant les propriétés suivantes:

1. $f_1(x) \geq 0$,
2. pour chaque x_0 , il existe un $\delta(x) > 0$ tel que

$$f_1(x) \leq (x - x_0)^2 \quad \text{pour } 0 < |x - x_0| < \delta(x_0),$$

$$f_1(x) = 0 \text{ si } x \notin A, \quad f_1(x) > 0 \text{ si } x \in A^1).$$

On voit que l'on peut supposer $0 \leq f_1(x) < 1$.

Posons $f_2(x) = f_1(x) = 0$ pour $x \notin A$, $f_2(x) = \frac{f_1(x)}{2^n}$ pour $x \in A$, $x = x_n$, $f_2(x)$ est une fonction à variation bornée dans tout intervalle (fini ou non).

En effet, si $t_{i+1} > t_i$,

$$\sum_{i=1}^n |f_2(t_{i+1}) - f_2(t_i)| \leq \sum_{i=1}^n (|f_2(t_{i+1})| + |f_2(t_i)|) \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

donc la fonction $f(x) = \nabla f_2(x)$ est bien définie.

Je vais démontrer qu'elle constitue la solution du problème. Soit $x \in A$ et $h > 0$. Alors $f_2(x) > 0$, et

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f_2(t) \quad \text{pour } t \in [x, x+h],$$

$$\nabla f(t) \geq |f_2(x) - f_2(t')| \quad \text{pour } t' \in (x, x+h),$$

et pour $t' \notin A$ (A clairsemé), on a $\nabla f_2(t) \geq f_2(x)$, donc $f(x+h) - f(x) \geq f_2(x)$ pour $h > 0$. D'une manière analogue, $f(x+h) - f(x) \leq -f_2(x)$ pour $h < 0$. On en déduit que $f'(x) = \infty$ pour chaque $x \in A$. Considérons maintenant le cas où $x \notin A$. Nous avons $f_2(x) = 0$ et il existe un $\delta(x) > 0$ tel que $|f_1(x+h)| \leq h^2$ pour chaque $|h| < \delta(x)$. Donc, pour $0 < h < \delta(x)$,

$$\nabla f_2(t) = \sup_i \sum |f_2(t_{i+1}) - f_2(t_i)| \leq \sum_i (|f_2(t_{i+1})| + |f_2(t_i)|) \leq 2 \sum_i |f_2(t_i)| \leq 2h^2 \sum_i \frac{1}{2^i} = 2h^2,$$

$$t \in [x, x+h],$$

d'où $f(x+h) = f(x) + \nabla f_2(t) \leq f(x) + 2h^2$, par conséquent,

$$f(x+h) - f(x) \leq 2h^2 \quad (0 < h < \delta(x)).$$

De même

$$-2h^2 \leq f(x+h) - f(x) \quad \text{pour } |h| < \delta(x) \text{ et } h < 0.$$

On en déduit que $f'(x) = 0$ pour $x \notin A$.

Section de Poznań

28. V. 1950. Olekiewicz, M., *Sur une méthode d'évaluer la moyenne arithmétique.*

20. I. 1951. Biernacki, M., *Sur quelques propriétés des ovals.*

5. VI. 1951. Suszko, R., *Sur le paradoxe de Skolem et Loewenheim.*

5. VI. 1951. Alexiewicz, A., *Sur la distribution des valeurs des fonctions analytiques vectorielles.*

Section de Varsovie

17. III. 1950. Zarankiewicz, K., *Sur le théorème des quatre domaines.*

L'auteur pose la question de savoir si le théorème suivant est vrai: *Supposons que le plan contient n domaines univoqués et disjointes G_i ($i=1, 2, \dots, n$) et n continus disjointes K_j ($j=1, 2, \dots, n$). Si chaque continu a un point commun avec chaque domaine ($G_i \cdot K_j \neq \emptyset$ pour $i, j=1, 2, \dots, n$) alors il y a au moins $(n-2)^2$ couples des indices (i, j) pour lesquels l'ensemble $G_i - K_j$ n'est pas connexe.*

L'auteur a réussi à démontrer ce théorème dans le cas où $n = 4$.

13. X. 1950. Sierpiński, W., *Sur les opérations relatives aux ensembles de trois éléments.*

13. X. 1950. Szmielew, W., *Sur les théorèmes vrais dans tous les systèmes axiomatisables.*

27. X. 1950. Grzegorzczak, A., *Sur l'indécision dans la topologie élémentaire.*

10. XI. 1950. Maciąg, S., *Sur le degré des nombres algébriques $\sqrt[n]{n}$.*

17. XI. 1950. Sikorski, R., *Sur la détermination des homomorphies.*

17. XI. 1950. Sierpiński, W., *Sur un nombre pair pour lequel le „théorème des Chinois“ est en défaut.*

24. XI. 1950. Marczewski, E., *Compte rendu de la théorie de la mesure.*

1. XII. 1950. Sierpiński, W., *Sur les fonctions de la variable ordinaire.*

1. XII. 1950. Szmielew, W., *Impressions du séjour aux Etats-Unis.*

15. XII. 1950. Mostowski, A., *Sur le degré de quelques nombres algébriques.*

26. I. 1951. Sierpiński, W., *Sur les fonctions continues, définies sur les ensembles ordonnés.*

26. I. 1951. Rieger, L., (Prague), *Une démonstration de la simplicité du groupe alterné.*

12. II. 1951. Ważewski, W., *Sur les inégalités aux dérivées partielles du 2^e ordre.*

12. II. 1951. Steinhaus, H., *Compte rendu du domaine des mathématiques appliquées.*

2. III. 1951. Sierpiński, W., *Sur une décomposition paradoxale du cube.*

2. III. 1951. Kuratowski, K., *Remarques sur le théorème de M. Sierpiński.*

16. III. 1951. Marczewski, E., *Remarques sur l'indépendance stochastique.*

16. III. 1951. Pogorzelski, W., *Sur l'équation intégrale du problème de Fourier.*

4. V. 1951. Sikorski, R., *Sur les produits cartésiens des corps de Boole.*

18. V. 1951. Sierpiński, W., *Sur quelques ordinations partielles des parties d'un ensemble dénombrable.*
18. V. 1951. Marczewski, E., *Sur les translations des ensembles.*
25. V. 1951. Janiczak, A., *Sur les fonctions calculables à l'aide de machines.*
6. VI. 1951. Sierpiński, W., *Sur les procédés employés dans la théorie des ensembles par MM. Tarski et Eilenberg.*
6. VI. 1951. Sikorski, R., *Sur les limites généralisées.*
13. VI. 1951. Kuratowski, K., *Les impressions du séjour scientifique en Tchécoslovaquie.*
13. VI. 1951. Gruzewska, H., *Sur un schéma des processus stochastiques.*
15. VI. 1951. Pogorzelski, W., *Sur une équation intégrale non linéaire, fortement singulière.*
20. VI. 1951. Leja, F., *Sur le problème de Dirichlet.*
27. VI. 1951. Ryll-Nardzewski, C., *Sur le principe de Dirichlet.*

Section de Wrocław *)

6. X. 1950. Marczewski, E. et Ryll-Nardzewski, C., *Sur la valeur moyenne d'une variable aléatoire sous des conditions imposées à une autre variable.*
13. X. 1950. Matulewicz, K., *Sur les solutions de la congruence $a^n \equiv a \pmod{n}$, où n est un nombre composé.*
27. X. 1950. Łoś, J. et Ryll-Nardzewski, C., *Sur les applications du théorème de Tychonoff dans quelques démonstrations mathématiques.*
3. X. 1950. Perkal, J., Florek, K. et Zubrzycki, S., *Sur les ordinations des ensembles finis dont les distances sont connues, applications à l'anthropologie.*
10. XI. 1950. Hartman, S., *Sur les coefficients de Fourier des fonctions intégrables.*
10. XI. 1950. Marczewski, E., *Une généralisation du théorème de Daniell-Kolmogoroff.*
17. XI. 1950. Ryll-Nardzewski, C., *Sur les mesures compactes.*
17. XI. 1950. Knaster, B., *Sur un problème topologique de Borsuk (Solution partielle de J. Siciarz).*
24. XI. 1950. Gołąb, S., *Sur une méthode nouvelle de quadrature approchée.*
24. XI. 1950. Drobot, S., *Sur les vibrations des villebrequins.*
1. XII. 1950. Florek, K., *Une remarque sur la répartition des points engendrés en portant bout à bout un arc fixe sur une circonférence.*
5. XII. 1950. Ryll-Nardzewski, C., *Sur le rôle de l'axiome d'induction dans les arithmétiques élémentaires.*

*) Les résumés et notices bibliographiques concernant les communications présentées à la Section de Wrocław paraîtront dans Colloquium Mathematicum.

15. XII. 1950. Hartman, S., *Sur une relation entre les suites.*
15. XII. 1950. Gładysz, S., *Sur l'équivalence des mesures dans les produits cartésiens.*
5. I. 1951. Szmielew, W., *Sur les théorèmes valables dans toutes les théories complètes et axiomatisables.*
5. I. 1951. Fast, H., *Sur la limite d'une suite de fonctions ayant la propriété de Darboux.*
12. I. 1951. Łoś, J., *Une démonstration simple du fait que le calcul des fonctions propositionnelles est complet.*
19. I. 1951. Łukaszewicz, J., *Sur la réunion des points d'un ensemble fini* (travail collectif du groupe Général d'Applications de l'Institut Mathématique de l'Etat).
19. I. 1951. Ryll-Nardzewski, C., *Sur une hypothèse de Blackwell concernant les puissances.*
26. I. 1951. Marczewski, E., *Sur les théorèmes d'existence dans la théorie des processus stochastiques.*
26. I. 1951. Mikusiński, J. G., *Sur la réduction de l'étude des équations aux dérivées partielles à coefficients constants à celle de la fonction exponentielle généralisée.*
2. II. 1951. Mikusiński, J. G., *Sur la fonction exponentielle e^{-s} .*
2. II. 1951. Mikusiński, J. G., *Sur un théorème de la théorie des moments.*
2. II. 1951. Steinhaus, H., *Sur les bottes.*
16. II. 1951. Mikusiński, J. G., *Sur les équations aux dérivées partielles à coefficients constants.*
16. II. 1951. Gładysz, S., *Sur les fonctions faiblement indépendantes.*
23. II. 1951. Łoś, J., *Sur le principe de Dirichlet.*
23. II. 1951. Steinhaus, H., *Sur la décision alternative dans le contrôle de la qualité.*
2. III. 1951. Ryll-Nardzewski, C., *Sur les fonctions également continues.*
2. III. 1951. Hartman, S., *Sur les suites écartées.*
2. III. 1951. Steinhaus, H., *Sur la division pragmatique.*
9. III. 1951. Zięba, A., *Une démonstration de l'existence de l'intégrale d'un système d'équations différentielles.*
9. III. 1951. Zięba, A., *Sur une généralisation de la notion d'intégrale d'un système d'équations différentielles.*
9. III. 1951. Ryll-Nardzewski, C., *Un théorème sur les moments avec quelques applications.*
16. III. 1951. Ingarden, R. et Mikusiński, J. G., *La théorie statistique de la granularité des matériaux photographiques* (séance commune avec la Section de Wrocław de la Société Polonaise de Physique).
30. III. 1951. Ryll-Nardzewski, C., *Sur la convergence des séries opératoires de puissances.*

30. III. 1951. Florek, K., *Sur le processus stochastique de Poisson.*
30. III. 1951. Marczewski, E., *Quelques remarques au sujet du processus stochastique de Poisson.*
6. IV. 1951. Ślebodziński, W., *Sur l'équivalence des formes différentielles extérieures.*
6. IV. 1951. Urbanik, K., *Sur l'intersection des ensembles composés de segments parallèles à une droite.*
13. IV. 1951. Steinhaus, H., *Sur le problème d'équipartition dans le modèle cinématique classique.*
27. IV. 1951. Łoś, J., *Sur les transformations qui laissent invariables les relations données.*
27. IV. 1951. Łoś, J., *Une remarque sur l'équivalence entre le théorème de Tichonoff et l'axiome du choix¹⁾.*
4. V. 1951. Mycielski, J., *Sur la représentation des nombres naturels par des puissances à base et exposant naturels.*
4. V. 1951. Steinhaus, H., *Sur l'estimation séquentielle dans la statistique.*
11. V. 1951. *Séance consacrée au jubilé de 40 ans de travail scientifique de M. Hugo Steinhaus.*
- Orlicz, M., *Les travaux de M. Steinhaus sur la théorie des séries orthogonales et l'analyse fonctionnelle.*
- Marczewski, E., *Les travaux de M. Steinhaus sur la théorie de la mesure et le calcul de probabilités.*
- Kowarzyk, H. et Perkal, J., *Sur les problèmes pratiques dans les travaux de M. Steinhaus.*
18. V. 1951. Steinhaus, H., *Sur le principe de contrôle statistique.*
25. V. 1951. Ingarden, J., *Sur une manière nouvelle de formuler la mécanique relativiste des quanta.* (Séance commune avec la Section de Wrocław de la Société Polonaise de Physique).
1. VI. 1951. Ślebodziński, W., *Sur les travaux scientifiques d'Elie Cartan.*
1. VI. 1951. Hartman, S., *Un théorème sur l'équipartition.*
8. VI. 1951. Ryll-Nardzewski, C., *Sur quelques méthodes parfaites de sommation.*
8. VI. 1951. Knaster, B., *Sur un continu irréductible* (résultat de J. Mioduszewski).
12. VI. 1951. Plescot, V. (Prague), *Revue des méthodes employées dans la nomographie.*
15. VI. 1951. *Séance consacrée à la mémoire de Maksymilian T. Huber.*
- Wysocki, J., *La vie et l'oeuvre de M. T. Huber.*
- Drobot, S., *Sur les travaux scientifiques de M. T. Huber.*
22. VI. 1951. Hartman, S., *Sur quelques estimations.*
22. VI. 1951. Wolibner, W., *Sur la vitesse des ondes.*

¹⁾ Cf. l'article de J. L. Kelley, *Fund. Math.* 37, p. 75—76.

Chronique et publications

Conférence

Le 3 et 4 mars 1951 eut lieu à Wrocław une conférence destinée à la préparation de la Sous-Section de Mathématiques et de la Sous-Section de la Statistique du I Congrès de la Science Polonaise. Tous les mathématiciens de Wrocław y ont pris part. Cette conférence comprenait:

- 3. III. 1951. Weryho, A., *Allocution d'ouverture.*
- 3. III. 1951. Steinhaus, H., *Sur la conception du calcul des probabilités.*
- 3. III. 1951. Marczewski, E., *Sur la notion de processus stochastique.*
- 3. III. 1951. Olekiewicz, M., *La régularité et le hasard.*
- 4. III. 1951. Skrzywan, W., *Sur la notion de corrélation.*
- 4. III. 1951. Oderfeld, J., *La statistique au service de la production.*
- 4. III. 1951. Steinhaus, H., *Sur les méthodes de taxonomie employées à Wrocław.*
- 4. III. 1951. Nowakowski, T., *Sur l'emploi de la statistique dans la médecine.*
- 4. III. 1951. Kosiba, A., *Sur l'importance de la statistique dans le service météorologique.*
- 4. III. 1951. Mydlarski, J., *Sur les problèmes statistiques dans l'anthropologie.*
- 4. III. 1951. Perkal, J., *Sur les travaux statistiques du Groupe Général d'Applications de l'Institut Mathématique de l'Etat.*

A Gdańsk, le Recteur de l'École Polytechnique organisa une série de conférences que voici:

- Szulkin, P., *Sur la théorie du champ vectoriel.*
- Nowacki, W., *Sur la théorie de l'élasticité.*
- Naleszkiewicz, J., *Sur la théorie de la plasticité.*
- Czerwiński, B., *Sur les fonctions analytiques.*
- Mosingiewicz, K., *Sur le calcul opératoire.*
- Łunc, M., *Sur la mécanique des quanta.*
- Błaszowski, S., *Sur la méthode de Cross.*

Nominations aux chaires de mathématiques dans les écoles supérieures polonaises

Dr Włodzimierz Wrona a été nommé professeur de mathématiques de l'Académie des Mines de Cracovie.

Dr Bronisław Czerwiński est suppléant de professeur à la chaire de Mathématiques de la Faculté de Mécanique de l'École Polytechnique de Gdańsk, depuis le 1^{er} septembre 1946.

Dr Waclaw Pawelski est suppléant de professeur à la chaire de Mathématiques de la Faculté de Génie Terrestre et Aquatique de l'École Polytechnique de Gdańsk depuis le 1^{er} septembre 1950. Il existe une chaire de Mathématiques à la Faculté de Chimie de l'École Polytechnique de Gdańsk depuis le 1^{er} septembre 1950. Cette chaire est actuellement (18 juin 1951) vacante.

Doc. dr Adam Bielecki a été nommé professeur de mathématiques à la Faculté des Sciences de l'Université Curie-Skłodowska de Lublin.

Dr Hanna Szmuszkowicz est suppléant de professeur à la IV^e chaire de Mathématiques de l'Université de Łódź depuis le 1^{er} octobre 1950.

Dr Witold Janowski est suppléant de professeur à la chaire de Mathématiques de la Faculté de Chimie de l'École Polytechnique de Łódź depuis le 1^{er} novembre 1950.

Doc. dr Roman Sikorski a été nommé suppléant de professeur à la chaire de Mathématiques à la Faculté de Chimie de l'École Polytechnique de Varsovie.

Thèses de doctorat

Université de Cracovie.

Stanisław Łojasiewicz, *Przebieg całek układu równań różniczkowych w otoczeniu punktu osobliwego* (Sur l'allure des intégrales du système d'équations différentielles au voisinage d'un point singulier). A paraître dans ces Annales.

Zofia Krygowska, *O granicach ścisłości w nauczaniu geometrii elementarnej* (About the limits of precision in the teaching of elementary geometry).

Zofia Mikołajska, *O asymptotycznym zachowaniu się całek równań różniczkowych* (Sur l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles).

Halina Pidekówna, *O możliwości algebraizacji obiektów geometrycznych klasy zero w przestrzeni jednowymiarowej* (Sur la possibilité d'algebraïsation des objets géométriques de classe zéro dans l'espace à une dimension).

Académie des Mines de Cracovie.

Antoni Woźniacki, *Obiekty geometryczne czysto różniczkowe pierwszej klasy w przestrzeni jednowymiarowej o dwu lub więcej składowych* (Objets géométriques différentiels purs de première classe, de deux ou plusieurs composantes dans l'espace à une dimension).

Université de Lublin.

Wiktor Jankowski, *O pierwiastkach wielomianów zawierających dowolne parametry* (Sur les zéros des polynomes contenant des paramètres

arbitraires. *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska* **5** (1951), p. 31—92.

Université de Varsovie.

Antoni Wakulicz, *O sumie liczby skończonej liczb porządkowych*¹⁾ (Sur la somme d'un nombre fini de nombres ordinaux). *Fundamenta Mathematicae* **36** (1949), p. 254—266.

Hanna Szmuszkowicz, *O funkcjach quasi-analitycznych*²⁾ (Sur les fonctions quasi-analytiques).

École Polytechnique de Varsovie.

Jan Słowikowski, *Własności pochodnych potencjału opóźnionego warstwy pojedynczej* (Sur les propriétés des dérivées du potentiel retardé d'une couche simple).

Włodzimierz Krysiński, *Twierdzenie graniczne o wyrazach wyższego rzędu w zagadnieniu Bayesa* (Un théorème concernant les limites des termes d'ordre supérieur dans le problème de Bayes). Un résumé de ce travail a paru dans les *Comptes-Rendus* du 7-ème Congrès des mathématiciens polonais et du 3-ème Congrès des mathématiciens tchécoslovaques à Prague, p. 188—291.

Université de Wrocław.

Julian Perkal, *O oznaczaniu objętości pni drzewnych* (Sur la détermination du volume des troncs d'arbres), *Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego*, seria B, Nr 31, p. 80.

Le II Concours Olympique Mathématique

L'organisation de ce second Concours était en tous points semblable à celle du premier³⁾. Le Comité du Concours se composait de MM. Stefan Straszewicz, président du Comité, Kazimierz Zarankiewicz, directeur du Concours, Edward Otto, Olga Turska, Antoni Marian Rusiecki, Jan Gosiewski, représentants du Ministère de l'Instruction Publique et Antoni Kosiński, représentant le Z. M. P. (Association de la Jeunesse Polonaise). Les Comités Régionaux se sont constitués:

à Cracovie	sous la présidence de S. Gołąb,
à Lublin	„ „ „ „ M. Biernacki,
à Łódź	„ „ „ „ Z. Charzyński,
à Poznań	„ „ „ „ A. Alexiewicz,
à Varsovie	„ „ „ „ W. Sierpiński,
à Wrocław	„ „ „ „ J. Słupecki.

¹⁾ Cette thèse a été soutenue le 19 décembre 1949.

²⁾ Cette thèse a été soutenue le 15 juin 1950.

³⁾ Voir ces *Annales* **23** (1950), p. 299—300.

Sur 1234 élèves de lycées participant au II-ème concours, 256 furent admis à la II-ème phase de ce Concours et 68 à la III-ème (dernière), 23 concurrents obtinrent des prix, 13 autres des mentions honorables. Les gagnants ainsi que quelques-uns de leurs professeurs ont reçu en outre plusieurs autres prix, fondés par des Ministères et d'autres Institutions.

Il ne manqua pas de sensation à ce Concours. Le plus jeune concurrent, un élève de IX-ème au Lycée de Sandomierz, A. Schinzel a pris la première place.

Le Gouvernement consentit à quelques modifications du règlement du Concours dont les plus importantes consistent en ce que les concurrents qui ont gagné des prix soient exempts des examens d'entrée aux Écoles Supérieures (à l'exception de l'examen de dessin aux Facultés d'Architecture des Écoles Polytechniques), et que leurs professeurs reçoivent des récompenses pécuniaires (cette mesure a pour but d'encourager des professeurs à consacrer plus d'attention et de soins aux élèves qui participent au Concours).

51 professeurs, dont 21 de l'enseignement supérieur, ont participé aux travaux liés au Concours Olympique.

Tous les buts du concours ont été atteints. En outre il a beaucoup contribué à la popularisation des mathématiques chez les jeunes gens. Parmi les étudiants en mathématiques inscrits à l'Université de Varsovie cette année se trouvent la plupart des vainqueurs du concours. De même que l'an passé, les vainqueurs du I-er Concours contribuèrent à l'élévation de l'instruction en mathématiques des étudiants de première année en aidant leurs collègues moins avancés.

Le III-ème Concours Olympique Mathématique commencera en octobre 1951 et se terminera en juin 1952. Comme auparavant le Comité du Concours publiera une brochure contenant les solutions de tous les problèmes du II-ème Concours Olympique.

Les Mathématiciens Polonais au I Congrès des Mathématiciens Hongrois

Du 27 août au 2 septembre 1950 délibérait à Budapest le I^{er} Congrès des Mathématiciens Hongrois, joint à la célébration solennelle du 70-ème anniversaire de Frédéric Riesz et Leopold Fejér. A ce congrès participèrent à côté de la délégation polonaise celles de l'Union Soviétique, de la Chine, de la Tchécoslovaquie, Roumanie, Bulgarie, et de la République Démocratique Allemande.

La délégation polonaise se composait de MM. K. Borsuk, H. Greniewski, K. Kuratowski, E. Marzewski, S. Mazur, A. Mostowski, W. Nowacki, W. Pogorzelski, W. Sierpiński, R. Sikorski, M. Stark, S. Turski.

A part des communications de section, les mathématiciens polonais eurent les conférences plénières suivantes:

K. Borsuk: *Les transformations en sphères et la théorie de la décomposition des espaces euclidiens.*

K. Kuratowski: *Quelques problèmes topologiques concernant le prolongement de fonctions.*

E. Marczewski: *Théorème ergodique, généralisations et applications.*

Le congrès a contribué à resserrer la collaboration entre les mathématiciens polonais et hongrois, ainsi que ceux des pays, dont les délégations y ont pris part.

Mathématiciens Polonais à l'Étranger

Au début de juillet 1950, Wanda Szmielew est rentrée d'un voyage scientifique aux États-Unis.

En avril 1951 K. Kuratowski et H. Greniewski ont fait un voyage scientifique en Tchécoslovaquie; K. Kuratowski a fait des conférences à Prague, Brno et Bratislava.

Mathématiciens étrangers en Pologne

Prof. Dr Vaclav Pleskot (Prague) a séjourné en Pologne du 28 mai au 14 juin. Il a eu un cycle de conférences sur la nomographie à l'Institut Mathématique de l'État à Varsovie, en outre à Cracovie, Wrocław et Gdańsk.

Dr Ladislav Rieger (Prague) a séjourné en qualité de boursier à Varsovie et y a fait des études spéciales de juillet 1950 à février 1951.

Prix et distinctions scientifiques

W. Sierpiński a été élu membre correspondant de l'Académie des Sciences de Berlin. Le Ministre de l'Enseignement Supérieur et des Recherches Scientifiques lui a remis le diplôme d'académicien le 10 janvier 1951.

L'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres à Cracovie a accordé en juin 1951 son prix scientifique annuel du domaine des sciences mathématiques et naturelles à K. Kuratowski pour l'ouvrage *Topologie II*.

M. Biernacki a obtenu le prix scientifique du II-ème degré de l'État pour l'année 1950.

Les prix scientifiques annuels, fondés par le Ministère de l'Instruction Publique, pour les meilleurs travaux mathématiques publiés par les membres de la Société au cours des deux années précédentes ont été accordés pour la sixième fois, le 20 avril 1951.

Les prix ont été décernés à MM. H. Steinhaus (prix Mazurkiewicz) pour 1^o *Sur les fonctions indépendantes (VII)* (*Un essai de points à l'intérieur*

d'un cube), *Studia Mathematica* **10** (1948), p. 1—20, 2° *Sur les fonctions indépendantes* (VIII) (*Loi des grands nombres, suites aléatoires*), *Studia Mathematica* **11** (1949), p. 133—144; W. Wrona (prix Zaremba) pour 1° *Conditions nécessaires et suffisantes qui déterminent les espaces einsteiniens conformément euclidiens et de courbure constante*, ces *Annales* **20** (1948), p. 28—80, 2° *On multivectors in a V_n* , *Kon. Ned. Akad. Wetensch. Amsterdam* **51** (1948), p. 1291—1301 et **52** (1948), p. 61—68; A. Bielecki pour: *Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour l'unicité des solutions des systèmes d'équations différentielles ordinaires et des équations au paratangent*, *Annales Universitatis Marie Curie-Skłodowska* **2**, section A, (1948), p. 49—106.

Livres et périodiques parus

Dans le but d'honorer le I^{er} Congrès de la Science Polonaise, la Société Polonaise de Mathématique s'est engagée à publier avant le 29. VI. 1951 les livres et périodiques suivants: Monographie Matematyczne vol. XI, W. Sierpiński, *Zasady Algebry Wyższej*, 2-ème édition; vol. XVII, S. Banach, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*; vol. XXIII, W. Sierpiński, *Algèbre des Ensembles*; vol. XXIV, S. Banach, *Mechanics* (traduction anglaise du livre „Mechanika“, Monographie Matematyczne, vol. VIII et IX), *Studia Mathematica* **12**, fasc. 1 (1951), *Colloquium Mathematicum* **2**, fasc. 2 (1951).

Cet engagement était déjà rempli le 26 juin 1951.

Annales de la Société Polonaise de Mathématique **23** (1950), Kraków, pages 307, contient 19 travaux de 18 auteurs et les Comptes Rendus de la Société Polonaise de Mathématique du 1. X. 1949 au 1. VII. 1950.

Dodatek do Rocznika P. T. M. **23** (Supplément aux *Annales de la Société Polonaise de Mathématique* **23**), Kraków, 1950, pages 103, contient le travail: W. Ottenbreit, *Metody obliczania średnic pozaskończonych i rozwartości zbiorów* (Les méthodes du calcul des diamètres transfinis et des écarts des ensembles).

Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, section A, Sciences Mathématiques, vol. IV, Lublin, 1950, pages IV + 135, contient 13 travaux de 9 auteurs.

Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et Lettres, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, série A, Sciences Mathématiques, 1950, Nr 1—10 A. Parmi 13 articles contenus dans ces numéros il y en a 1 concernant les mathématiques (p. 1—9).

Colloquium Mathematicum **2**, fasc. 1, Wrocław, 1949, pages 88, contient 14 travaux de 13 auteurs, 9 problèmes, les Comptes Rendus de la Section de Wrocław de la Société Polonaise de Mathématique du 1. VII. 1948 au 31. III. 1949 et chronique; *Colloquium Mathematicum* **2**, fasc. 2, Wrocław, 1950, p. 89—172 contient 5 travaux de 9 auteurs, 26 problèmes,

les Comptes Rendus de la Section de Wrocław du 1. IV. 1949 au 31. XII. 1950 et chronique.

Fundamenta Mathematicae **37**, Warszawa, 1950, pages 287, contient 28 travaux de 19 auteurs.

Matematyka, de IV^e année, fasc. 1 et 2 (en polonais), P. Z. W. S. (Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych), Warszawa, 1951, chaque fascicule compte 64 pages et contient des parties: scientifique, historique, didactique, une chronique, des analyses, une bibliographie ainsi qu'une collection de problèmes.

Studia Mathematica **11**, Wrocław, 1950, pages 272, contient 15 travaux de 12 auteurs; *Studia Mathematica* **12**, fasc. 1, Wrocław, 1951, pages 144, contient 22 travaux de 11 auteurs.

Banach, S., *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych* (Introduction à la théorie des fonctions réelles), Monografie Matematyczne, vol. XVII, Warszawa-Wrocław 1951, pages IV + 224.

Banach, S., *Mechanics*, translated by E. J. Scott, Monografie Matematyczne, vol. XIV, Warszawa-Wrocław 1951, pages IV + 546.

Borsuk, K., *Geometria analityczna w n wymiarach* (Géométrie analytique dans l'espace à n dimensions), Cours de la Faculté des Sciences, Monografie Matematyczne, vol. XII, Lund 1950, Czytelnik, pages IV + 448.

Krysicki, W., et Włodarski, L., *Analiza matematyczna w zadaniach* (Problèmes d'Analyse Mathématique), 1^{ère} partie, P. Z. W. S. (Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych), Warszawa 1950, pages 248.

Kuratowski, C., *Topologie II, Espaces compacts, espaces connexes, plan euclidien*, Monografie Matematyczne, vol. XXI, Warszawa-Wrocław 1950, pages VIII + 444.

Otto, E., *Geometria wykreślna* (Géométrie descriptive), Monografie Matematyczne, vol. XVI, Uppsala, 1951, Czytelnik, pages VI + 272.

Pogorzelski, W., *Rachunek operatorowy i przekształcenia Laplace'a* (Calcul opératoire et transformations de Laplace), P. Z. W. S., Warszawa 1950, pages 151.

Rubinowicz, W., *Wektory i tensory* (Vecteurs et tenseurs), manuel pour les étudiants de physique, Monografie Matematyczne, vol. XXII, Warszawa-Wrocław 1950, pages IV + 170.

Sierpiński, W., *Zasady algebry wyższej* (Principes d'Algèbre Supérieure) avec une Note de A. Mostowski, *Zarys teorii Galois* (Esquisse de la théorie de Galois), 2^{ème} édition corrigée, Monografie Matematyczne, vol. XI, Warszawa-Wrocław 1951*).

Sierpiński, W., *Algèbre des ensembles*, Monografie Matematyczne, vol. XXIII, Warszawa-Wrocław 1951, pages 205.

*) On trouve une analyse de cet ouvrage dans ces Annales **20** (1947), p. 147—421.

Sierpiński, W., *Les ensembles projectifs et analytiques*, Mémorial de s Sciences mathématiques, fasc. 112, Paris, 1950, pages 80.

Szerszeń, S., *Nauka o rzutach* (La science des projections), P. Z. W. S., Warszawa 1950, pages 296.

Analyses

Stefan Banach, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych* (Introduction à la théorie des fonctions réelles), Monografie Matematyczne, vol. XVII, Warszawa-Wrocław 1951, p. IV + 222.

Cet ouvrage de l'un des plus grands mathématiciens polonais, mort en 1945, est un manuel qui relie l'analyse élémentaire à la théorie des fonctions réelles; l'auteur s'y occupe surtout de la mesure de Jordan et de l'intégrale de Riemann ainsi que des fonctions et des courbes continues. La deuxième partie de l'ouvrage, qui devait contenir en particulier la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue (en même temps que la théorie des intégrales curvilignes et superficielles de Lebesgue et les théorèmes de Green et de Stokes relatifs à ces intégrales), ne paraîtra jamais, car le manuscrit, déposé avant la guerre à l'imprimerie de l'Université de Cracovie, a été détruit sur l'ordre des „Kulturträger“ hitlériens. Heureusement, la plupart de la première partie était déjà imprimée et les travailleurs de l'imprimerie, qui ont reçu l'ordre de détruire les épreuves, réussirent à les cacher en bravant le danger; c'est ainsi que sa publication a été rendue possible. Les passages manquants ont été complétés par des élèves et collègues de l'auteur, à savoir MM. W. Orlicz et A. Alexiewicz.

Ce travail est bien plus complet, plus précis et contient beaucoup plus de détails que les cours habituels d'analyse. Les théories constructives des nombres réels (appartenant au fond à l'arithmétique théorique) sont omises. L'auteur expose dès le début 13 axiomes sur les nombres réels (γ compris le principe de Dedekind). Il s'occupe ensuite en introduisant les symboles correspondants, de l'algèbre des ensembles et des notions logiques fondamentales du calcul des propositions et des quantificateurs. Après avoir exposé les notions de fonction définie sur un ensemble d'éléments quelconques et de produit cartésien d'ensembles, l'auteur passe à la théorie des nombres cardinaux, en particulier au théorème de Bernstein sur la comparaison des puissances d'ensembles et au théorème de Cantor sur la puissance de l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble donné, en citant de nombreux exemples d'ensembles de puissances \aleph_0 , c et 2^c . Il donne aussi quelques exemples d'ensembles ordonnés de types η et λ , sans établir leurs propriétés caractéristiques. Par contre, il démontre plusieurs théorèmes sur les ensembles bien ordonnés, à savoir le théorème sur la similitude des portions d'ensembles bien ordonnés, le théorème de Zermelo et le principe de l'induction transfinie. Cette étude de la théorie des ensembles constitue le I-er chapitre de l'ouvrage.

Chapitre II. *Limite de suite*. Ce chapitre contient le théorème de Cantor-Ascoli sur la suite descendante de segments, la définition des bornes d'un ensemble de nombres réels avec la démonstration de leur existence, la définition de la limite et des limites supérieure et inférieure, le critère de Cauchy de convergence des suites et le théorème sur la convergence des suites monotones. L'auteur s'occupe en outre des théorèmes relatifs aux opérations sur les suites convergentes, sur les permutations et sur les suites partielles, et de la définition de la somme d'une série. Il traite en détail des limites supérieure et inférieure en les définissant tout d'abord comme la plus grande (la plus petite) des limites de suites partielles convergentes; il démontre l'équivalence de cette définition de limites extrêmes à deux autres (dans l'une d'elles, il utilise quelques inégalités et dans l'autre il effectue un double passage à la limite en considérant certaines suites convenables formées avec le maximum ou le minimum des termes de la suite).

Dans les démonstrations, il utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass sur les points d'accumulation d'une suite. Le chapitre s'achève par le théorème sur la conservation du signe d'inégalité après le passage à la limite supérieure ou inférieure et par une étude des relations qui ont lieu entre ces limites et les opérations élémentaires effectuées sur les suites.

Chapitre III. *Les ensembles ponctuels.* Après avoir défini les points d'accumulation et les ensembles fermés sur une droite et démontré le théorème de Weierstrass sur l'existence d'un point d'accumulation de l'ensemble borné, l'auteur s'occupe de quelques définitions et théorèmes que l'on ne trouve généralement pas dans les cours d'analyse (ensembles isolés, ensemble dérivé, ensembles frontières et ensembles parfaits). Il expose deux définitions de l'ensemble ouvert et démontre leur équivalence. Parmi les exemples, on trouve l'ensemble ternaire parfait et non-dense de Cantor. Il définit ensuite les ensembles denses en soi ou denses sur un autre ensemble et les ensembles non denses et il établit les théorèmes fondamentaux relatifs aux ensembles linéaires connexes; il introduit la notion de continu et celle des ensembles de I^{ère} et II^{ème} catégories et il établit quelques théorèmes sur les ensembles séparables. Il expose deux „théorèmes de couverture“ à savoir aussi bien le théorème de Heine-Borel que celui, généralement omis dans les cours d'analyse, de Lindelöf. La théorie des ensembles linéaires s'achève par un exposé des notions de diamètre des ensembles et de distance entre eux ainsi que de quelques théorèmes qui s'y rattachent (par exemple du théorème sur la distance des ensembles fermés, bornés et disjoints).

L'auteur considère ensuite des ensembles ponctuels dans l'espace euclidien à m dimensions en basant la métrique sur les inégalités de Hölder et de Schwarz. Après avoir défini quelques notions géométriques (segment, cube *), réseau) et celle de limite d'une suite de points, il étend les théorèmes de Cauchy, de Cantor-Ascoli, de Bolzano-Weierstrass, de Heine-Borel et d'autres, déjà établis dans le cas des ensembles linéaires, au cas de l'espace à m dimensions et démontre que tout ensemble ouvert est la somme d'une suite de cubes fermés ou de sphères ouvertes. On trouve à cet endroit beaucoup de théorèmes sur la connexion et sur les constituants d'un ensemble (dans le cas des ensembles linéaires les théorèmes analogues étaient bien moins nombreux) et le théorème sur le „ ε — enchaînement“ d'un continu. L'auteur introduit les notions d'ensemble convexe, de simplexe et de polyèdre en exposant quelques théorèmes qui s'y rattachent. Il établit aussi le théorème de Cantor sur la suite descendante d'ensembles fermés, celui de Cantor-Bendixson et quelques autres théorèmes élémentaires sur les points de condensation. Les considérations sur la structure des ensembles fermés, des ensembles F_σ et des ensembles G_δ (avec des exemples de F_σ qui ne sont pas G_δ) achèvent ce chapitre.

Chapitre IV. *Fonctions dans E^m .* L'auteur définit la limite et la continuité selon Heine, démontre leur équivalence avec les définitions de Cauchy et expose les propriétés fondamentales des fonctions continues et des fonctions qui représentent E^m dans l'espace euclidien E^n à n dimensions (en particulier, le théorème d'après lequel une image continue d'un ensemble connexe est aussi un ensemble connexe). Ensuite il expose les théorèmes sur le prolongement des fonctions continues, à savoir a) d'une fonction continue sur un ensemble quelconque à un G_δ convenable, b) d'une fonction uniformément continue sur un ensemble quelconque à sa fermeture avec conservation du module de continuité, c) d'une fonction continue sur un ensemble fermé et borné à l'espace entier, d) le même prolongement avec conservation de la condition de Hölder. Il traite en détail la théorie des ensembles compacts de fonctions, très utile dans l'étude des équations différentielles et intégrales et dans celle des fonctions analytiques, mais généralement omise dans les cours élémentaires d'analyse. En particulier, il établit le

*) Ce mot désigne ici un parallélépipède rectangle.

théorème d'Arzela sur les ensembles des fonctions uniformément et également continues. Il s'occupe aussi des théorèmes relatifs à l'approximation uniforme des fonctions continues par des polynômes, en particulier par des polynômes de Bernstein et il expose ensuite les théorèmes fondamentaux sur les fonctions de Baire (il considère surtout des fonctions de I^{1^e} classe en établissant le théorème sur les points de continuité d'une fonction de I^{1^e} classe et le théorème sur une suite uniformément convergente de fonctions de I^{1^e} classe). La théorie des courbes est traitée à fond avec une grande précision; l'auteur donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble soit une courbe (la notion ainsi précisée de courbe conduit à des exemples qu'un débutant n'aurait jamais nommé „courbe“). L'auteur ne se contente pas de citer l'exemple de la courbe de Peano qui remplit un carré, mais établit le théorème de Sierpiński, d'après lequel les courbes sont identiques avec les continus qui se laissent décomposer en un nombre fini de continus dont les diamètres sont tous moindres que ε , et cela quel que soit $\varepsilon > 0$. Il cite quelques conséquences de ce théorème relatives aux sommes d'un nombre fini ou même dénombrable de courbes. Le chapitre s'achève par le théorème: tout ensemble convexe, fermé et borné (donc en particulier tout simplexe ou polyèdre) est une courbe.

Chapitre V. *Intégrale de Riemann*. L'auteur commence par exposer la théorie de l'intégrale d'une fonction d'une et de plusieurs variables d'une manière qui ne diffère pas de celle employée dans les cours d'analyse, mais en précisant davantage les démonstrations des lemmes utilisés. Il dépasse le programme d'analyse en établissant une condition nécessaire et suffisante de l'intégrabilité (R) exprimée en termes de la théorie de la mesure de Lebesgue (l'auteur ne définit point cette mesure dans le cas général, mais explique la notion de l'ensemble de la mesure de Lebesgue nulle). Il prouve le théorème de Fubini en supposant que l'une des deux intégrales successives est une intégrale supérieure ou inférieure. Afin de préparer la théorie de l'intégrale (R) sur un ensemble mesurable au sens de Jordan, d'ailleurs quelconque, l'auteur s'occupe de la théorie de la mesure de Jordan, il établit les propriétés des mesures intérieure et extérieure et la mesurabilité de la somme, de la différence, du produit et du complément des ensembles mesurables. Il établit aussi l'additivité de la mesure des ensembles disjoints (ou dont les intérieurs sont disjoints) et les théorèmes sur la mesure de quelques ensembles ayant des rapports avec l'ensemble donné (son intérieur, sa fermeture, son ensemble dérivé et sa frontière). Il ne mentionne pas l'invariance de la mesure par rapport au groupe des transformations isométriques en se bornant à l'établir dans le cas des translations seulement. Ensuite l'auteur s'occupe de l'intégrale (R) sur les ensembles arbitraires en étendant à ces intégrales tous les théorèmes établis auparavant dans le cas des intégrales sur les cubes (le théorème sur l'additivité de l'intégrale par rapport aux ensembles et à la fonction sous le signe d'intégration, les conditions d'intégrabilité, le théorème de Fubini dans des conditions peu restrictives et d'autres encore). Enfin l'auteur démontre deux théorèmes qui relient la théorie de la mesure à celle de l'intégrale: d'après le premier, la mesure est l'intégrale de la fonction caractéristique, tandis que, d'après le second, l'intégrale d'une fonction non négative est la mesure de l'ensemble des ordonnées dans E^{m+1} . Le théorème de Fubini est illustré par quelques exemples élémentaires relatifs au cas de l'espace à 2 ou à 3 dimensions, dans le dernier exemple cependant calcule le volume d'une sphère dans l'espace à n dimensions (le résultat de ce calcul contient une erreur d'impression qui n'est pas corrigée dans les errata).

A l'exception peut-être de l'ouvrage de Haupt, Aumann et Pauc (*Differential und Integralrechnung*) il y a bien peu de bons livres du genre de celui-ci. Un étudiant ne trouvera les théorèmes qui sont étudiés ici ni dans les cours élémentaires d'analyse, ni dans les ouvrages sur la théorie des fonctions du genre de la „Théorie de l'intégrale“ de S. Saks, où l'on s'occupe surtout de l'intégrale de Lebesgue; on ne trouve la plu-

part de ces théorèmes qu'aux périodiques. Cette monographie, rédigée en polonais, rendra de grands services aux étudiants qui commencent à étudier la théorie des fonctions réelles ou qui veulent approfondir leurs connaissances d'analyse. On doit d'ailleurs recommander la lecture de cette monographie à toute personne voulant étudier une branche quelconque de l'analyse supérieure.

Zygmunt Zahorski

Casimir Kuratowski, *Topologie II. Espaces compacts, espaces connexes, plan euclidien*, Monografie Matematyczne XXI, Warszawa-Wrocław 1950, p. VIII + 444.

Le vaste domaine des phénomènes topologiques est traité dans deux directions. L'une d'elles, allant des espaces très spéciaux (polytopes) à de espaces des plus en plus généraux, est liée étroitement à l'algèbre et est ordinairement combinatoire, l'autre, progressant des ensembles de points, les plus généraux, vers des espaces à contenu géométrique de plus en plus riche, est liée avant tout à la théorie des ensembles. Il existe plusieurs oeuvres comportant un cours systématique de la direction combinatoire, cependant, la littérature mondiale n'en possédait aucune jusqu'alors qui refléterait parfaitement la direction ensembliste; les oeuvres connues, traitant ce sujet, avaient toujours plus ou moins un caractère fragmentaire. Le second volume de l'ouvrage de Kuratowski, *Topologie*, ainsi que le premier, paru plus tôt (Monografie Matematyczne III (1933) I^{re} édition, et Monografie Matematyczne XX (1948) II^{me} édition), comblent cette lacune. Les résultats des topologues sur la direction ensembliste, parsemés dans beaucoup de travaux, ont été réunis dans l'oeuvre de Kuratowski en un système concis, imposant par la richesse du sujet et la clarté de la structure.

Alors que le volume I comporte la théorie des espaces topologiques les plus généraux, le volume II est consacré surtout à des types d'espaces métriques séparables particulièrement riches en intéressantes propriétés de caractère géométrique.

Le numérotage des chapitres et des paragraphes est commun aux deux volumes. Ainsi, le volume II commence par le chapitre IV, consacré aux espaces compacts, et comporte 4 paragraphes: le paragraphe 37 dans lequel sont données les propriétés générales des espaces compacts (métriques), le paragraphe 38 contenant la théorie des espaces des sous-ensembles fermés 2^X ainsi que des espaces fonctionnels F^X , le paragraphe 39 contenant la théorie des fonctions semi-continues, et finalement le paragraphe 40 contenant des connaissances ultérieures de la théorie de la dimension, dont les débuts ont été déjà traités dans le volume I. On y trouve entre autres les théorèmes sur la décomposition d'un espace à n dimensions, la théorie des dits *coefficients d'aplatissement* de Urysohn, les théorèmes classiques de Hurewicz sur les transformations continues qui augmentent ou diminuent la dimension, le théorème d'Alexandroff sur les transformations des polytopes formulé par l'Auteur d'une manière très élégante, et finalement le théorème de Menger-Nöbeling sur le plongement de l'espace métrique séparable de dimension n dans l'espace euclidien à $2n+1$ dimensions.

Le chapitre V est consacré à la théorie des espaces connexes. Après avoir commenté les propriétés de la notion de connexité et d'autres notions analogues au paragraphe 41, l'Auteur passe, au paragraphe 42, à la théorie des continus. On y trouvera également des caractérisations topologiques d'arcs simples et de courbes simples fermées (théorème de R. L. Moore). Le paragraphe 43 contient la théorie des continus irréductibles et indécomposables. Cette importante théorie, dont le développement est dû en grande partie à l'Auteur, a été exposée d'une façon accessible et illustrée par d'intéressants exemples pris en partie des travaux de Knaster.

La théorie des espaces localement connexes est traitée au chapitre VI. Le paragraphe 44 est consacré aux propriétés générales des espaces métriques localement con-

nexes. Le paragraphe 45 fixe les rapports entre la connexité locale et la connexité par arcs; il contient, en particulier, une démonstration courte et élégante du théorème fondamental (Mazurkiewicz-Moore-Menger) sur la connexité par arcs des espaces complets, connexes et localement connexes, et du théorème (Mazurkiewicz-Hahn) sur la caractérisation des images continues de l'intervalle par la compactivité et la connexité locale. On trouve, au paragraphe 46, les principales notions de la théorie des courbes, basée sur la notion de l'ordre d'un point, et illustrée d'intéressants exemples. Entre autres, ce paragraphe contient une caractérisation topologique des arcs simples et courbes simples fermées et les plus simples propriétés des dendrites. Il y a également des informations sur certains théorèmes plus profonds de la théorie des courbes, mais dont les démonstrations ne sont pas contenues dans ce livre. Le paragraphe 47 contient un beau cours de la théorie de la décomposition des continus localement connexes en éléments connexes, établie par G. T. Whyburn, W. L. Ayres et l'Auteur.

En renforçant graduellement les hypothèses, l'Auteur passe aux espaces à structure de plus en plus régulière. Le chapitre VII a pour sujet les espaces dont la structure rappelle en grande partie celle des polytopes, c'est-à-dire les espaces localement connexes en dimension n , les espaces localement contractiles et les rétractes absolus de voisinage. Au paragraphe 48 sont décrites la notion de restriction et ses rapports avec la théorie du prolongement des fonctions continues ainsi que d'autres notions fondamentales de la théorie des rétractes avec leurs propriétés principales. L'auteur développe cette théorie en utilisant une notion introduite par lui-même et dite relation τ , grâce à laquelle il obtient une exposition claire, courte et générale. De plus, ce paragraphe contient la théorie des espaces connexes en dimension n , ainsi que localement connexes en dimension n . Le paragraphe 49 renferme une partie élémentaire de la théorie de la homotopie, en particulier, la théorie de contractilité, de la contractilité locale et des rétractes par déformation. Sur les théorèmes plus profonds du domaine de la homotopie, qui exigent des méthodes combinatoires, l'Auteur ne donne que des informations superficielles.

La direction combinatoire de la topologie se sert au début de notions algébriques, en particulier, de la notion du groupe. Dans la direction ensembliste le besoin de notions appartenant à la théorie des groupes paraît beaucoup plus tard et sous une forme un peu différente. Le chapitre VIII est consacré à ces notions qui paraissent d'une façon naturelle au fur et à mesure que l'on examine les propriétés de forme et de lieu des ensembles à l'aide des méthodes ensemblistes.

Le paragraphe 50 contient des connaissances élémentaires du domaine de la théorie des groupes abéliens (discrets et topologiques) et les propriétés du groupe (topologique) des transformations continues Y^X d'un espace arbitraire X en sous-ensembles du groupe topologique Y . Les rapports entre la connexité de l'espace X et les propriétés du groupe G^X , où G détermine un groupe de nombres entiers, y sont fixés. Au paragraphe 51, on trouve l'examen des propriétés fondamentales des groupes S^x et P^x , où P est un groupe de nombres complexes $z \neq 0$ et S un groupe de nombres complexes $|z| = 1$ (avec la multiplication comme opération du groupe), ainsi que de certains de leurs facteurs-groupes. Divers rapports entre les propriétés de ces groupes et celles de l'espace X y sont établis. Le paragraphe 52 est consacré aux espaces unichérents et à la dite contractilité relativement à S . En particulier, la caractérisation des continus localement connexes et unichérents y est donnée, à l'aide des propriétés de leurs transformations continues sur la circonférence S .

Le dernier chapitre (IX) comporte un cours systématique de la topologie du plan, fondé en grande partie sur les méthodes développées au chapitre précédent. Le paragraphe 53 contient des faits élémentaires du domaine de la topologie de l'espace euclidien à n dimensions, Σ^n , accessibles aux méthodes ensemblistes, c'est-à-dire la caractérisation des coupures compactes de l'espace Σ^n , à l'aide de transformations conti

nues, en surface sphérique à $n - 1$ dimensions, les rapports entre la séparation de l'espace \mathcal{S}^n et la théorie des rétractes, et le théorème (Mazurkiewicz) sur la séparation des régions situées dans l'espace \mathcal{S}^n par les ensembles de dimensions $\leq n - 2$. Au paragraphe 54, l'Auteur, en utilisant la notion du dit espace de Janiszewski, examine les problèmes qualitatifs de la surface sphérique S_2 à deux dimensions. Une démonstration classique du théorème de Jordan sur la séparation par une courbe simple fermée et sur l'accessibilité des points de celle-ci, ainsi que la démonstration du théorème réciproque y sont données pour un espace de Janiszewski ne contenant aucun point de séparation. En outre, ce paragraphe comporte la caractérisation topologique de la surface sphérique S_2 et d'importants théorèmes sur l'équivalence topologique d'une courbe simple fermée et située sur S_2 avec une circonférence.

Le paragraphe 55 final contient la théorie des problèmes quantitatifs d'un plan, fondée sur une méthode appartenant à la théorie des groupes et développée au chapitre VIII dont Eilenberg, pour la première fois, a fait systématiquement usage dans ce but. Le remplacement du groupe S^1 , qu'employait Eilenberg, par le groupe P^1 donna à l'Auteur quelques simplifications et mit en évidence le caractère topologique de certains théorèmes sur la théorie des fonctions analytiques (p. ex., le théorème de Weierstrass sur la décomposition d'une fonction entière en facteurs primaires ou bien le théorème de Rouché sur le nombre algébrique de zéros d'une fonction holomorphe).

Finalement, il est à mentionner que la bibliographie du livre est ample, bien rédigée et permet au lecteur de s'orienter aisément dans la littérature du sujet, jusqu'aux ouvrages les plus récents.

Après avoir lu l'oeuvre de Kuratowski, le lecteur est bien informé des résultats obtenus dans le vaste domaine de la direction ensembliste de la topologie. Ce domaine n'est pourtant qu'une partie de la monumentale topologie actuelle, mais une partie digne du reste.

Karol Borsuk

Edward Otto, *Geometria Wykreślna (Géométrie Descriptive)*, Monografie Matematyczne XVI, Warszawa-Wrocław 1950, p. VIII+272, (en polonais).

Ce livre a été imprimé en Suède comme don du Gouvernement suédois pour la reconstitution de la culture polonaise.

Dans l'avant-propos l'auteur remarque qu'en vue d'améliorer le système d'études il a été nécessaire de condenser les matières, destinées aux élèves-ingénieurs, en un manuel réduit. Pourtant ce livre a été écrit dans l'intention de servir aussi aux étudiants des universités.

Cet ouvrage, qui constitue une position très précieuse dans notre littérature scientifique, se distingue par sa précision, au point de vue didactique par une bonne exposition des matières, un style simple, une langue correcte. Il contient les solutions de nombreux problèmes de construction, un grand nombre d'exercices, et plus de 400 figures très bien faites. L'exécution typographique est très soignée. Le tout fait une excellente impression.

Ce livre est divisé en 7 chapitres: I. Projections cotées, II. Projections sur 2 plans, III. Courbes du second degré, IV. Surfaces du second degré, V. Intersections de surfaces, VI. Axonométrie, VII. Perspective.

Dans les chapitres I et II l'auteur s'occupe des méthodes de représentation des éléments, de leur correspondance mutuelle, de parallélisme et de perpendicularité des droites et des plans, de rotations et de rabattements. Il résout des problèmes de construction où il s'agit, entre autres, de déterminer les angles entre droites et plans, les projections de polygones et polyèdres réguliers, les sections planes et intersections de pyramides

et de prismes, les ombres (éclairage parallèle) de polygones, polyèdres, cônes et cylindres de révolution, ainsi que les ombres mutuelles de ces corps. Dans le chapitre I on trouve des exemples d'applications techniques: déterminer un comble, un chemin de pente donnée avec déblais et remblais, déterminer sur une surface topographique les lignes de pente constante et les lignes de plus grande pente. Dans le chapitre II, il considère les changements des plans de projection et le plan de projection latéral, ainsi que les constructions effectuées sans avoir recours aux traces des droites et des plans.

Dans le chapitre III, il insiste sur le rôle fondamental que joue dans la Mathématique toute entière, par suite aussi dans la Géométrie, la notion de fonction. Ayant introduit les éléments à l'infini, il considère les fonctions $x = f(X)$ qui font correspondre

1) à tout point X d'une série de points $[p]$, une droite x du faisceau $[W]$ passant par X ,

2) à tout point X d'un système plan $[a]$, une droite x de la gerbe $[W]$ passant par X , ainsi que les fonctions inverses $X = f^{-1}(x)$, faisant correspondre dans les cas a) et b) à toute droite x , un point X . L'auteur donne à ces fonctions le nom de transformations homologiques ou homologies.

a) Si, pour un nombre fini de séries $[p_1], [p_2], \dots$ et de faisceaux $[W_2], [W_4], \dots$, la fonction f_1 détermine une homologie entre $[p_1]$ et $[W_2]$, la fonction f_2 est une homologie entre $[W_2]$ et $[p_2]$, et la fonction f_3 une homologie entre $[p_2]$ et $[W_4]$, etc..

b) Si, d'autre part, pour un nombre fini de systèmes plans $[a_1], [a_2], \dots$ et de gerbes $[W_2], [W_4], \dots$, la fonction f_1 détermine une homologie entre $[a_1]$ et $[W_2]$, la fonction f_2 est une homologie entre $[W_2]$ et $[a_2]$, etc., l'auteur appelle une transformation, composée d'un nombre fini de telles transformations homologiques, dans le cas a) — transformation homographique ou projectivité, dans le cas b) — collinéation.

Une transformation projective de 2 systèmes plans $[a_1]$ et $[a_2]$, dans laquelle les points correspondants sont situés sur des droites passant par un point fixe W , est dite *collinéation centrale*. L'auteur étudie les propriétés de ces transformations, en considérant aussi les cas particuliers de collinéations: affinité centrale, transformations affines, similitude et congruence. Après avoir examiné les propriétés des séries et des faisceaux projectifs (rapport de division, rapport anharmonique, théorèmes de Pappus, de Staudt, problème de l'univocité des transformations projectives), il aborde les propriétés générales des coniques. Il définit une conique comme ensemble de tous les points X communs aux droites x_1 et x_2 , qui correspondent l'une à l'autre dans la transformation projective $x_2 = f(x_1)$, parmi les droites de 2 faisceaux $[W_1]$ et $[W_2]$, situées dans un plan. L'auteur considère les collinéations des coniques, leur classification, les méthodes servant à les déterminer, il étudie les propriétés de la polaire d'un point par rapport à une conique, celles du centre, des diamètres conjugués et des axes de la conique, et résout des problèmes de construction relatifs aux coniques. Il détermine les sections planes de cônes et de cylindres, le développement du cylindre, et étudie les propriétés métriques des coniques (foyers, directrice, rayon de courbure).

Dans le chapitre IV, il définit la collinéation centrale de l'espace projectif en lui-même, dont le centre est W , le plan de collinéation τ (ne contenant pas W) et la cote de collinéation $c \neq 0$, comme transformation, faisant correspondre au point X' , le point X'' sur la droite WX' qui satisfait à la condition $(WX'X'') = c$, X désignant le point d'intersection de la droite WX' et du plan τ . On appelle transformation projective toute transformation composée d'un nombre fini de collinéations centrales.

L'auteur appelle *surface du second degré* ou *quadrique* tout ensemble de points qu'un plan coupe suivant une conique (dégénérée ou non). Il étudie les propriétés du plan polaire d'un point par rapport à une quadrique, du cône circonscrit à la quadrique, des droites conjuguées par rapport à celle-ci, du plan diamétral, du diamètre, des axes et du centre de la quadrique. Il considère les transformations de la quadrique en elle-

même, d'une quadrique non singulière en quadrique de révolution, la classification des quadriques, et les sections planes des quadriques.

Le chapitre V s'occupe des modes de génération et des propriétés des surfaces de révolution (point régulier, droite tangente, points elliptiques, paraboliques et hyperboliques, contour de la surface et contour projeté de celle-ci, contour de l'ombre propre, section plane). On y trouve de nombreux exemples d'intersections de surfaces (cônes, cylindres, sphère, tore), l'auteur y traite aussi les cas où la courbe d'intersection se compose de 2 coniques: intersections circulaires du cylindre elliptique et du cône, voûte en arc de cloître et voûte d'arête, intersection de 2 cônes circonscrits à une même sphère, ombres d'un cône et d'une sphère creux.

Dans le chapitre VI l'auteur expose la démonstration du théorème de Pohlke (théorème fondamental de l'axonométrie oblique) et la construction de la projection axonométrique (c'est-à-dire projection parallèle sur le plan de projection choisi) d'un corps donné déterminé par 3 projections orthogonales. Pour l'axonométrie orthogonale, il étudie les relations entre les rapports de réduction axonométrique pour 3 axes d'un système orthogonal, il indique les constructions, au moyen desquelles on détermine les angles que font les axes avec le plan de projection ou les projections des 3 coordonnées d'un point arbitraire.

Le chapitre VII traite de la représentation des points, droites et plans par la méthode des projections centrales (perspective). L'auteur y étudie les rabattements des plans, la représentation des éléments orthogonaux, la construction des points de division, la construction des perspectives des polygones, polyèdres, coniques et des ombres de ces corps.

L'auteur fait aussi mention des anaglyphes, dessins représentant dans un plan π deux perspectives différentes F_l et F_p de la même figure F , avec 2 centres de projection différents, S_l et S_p . Si la droite $S_l S_p$ est parallèle au plan π , la distance des 2 centres S_l et S_p égale à la distance des pupilles des yeux de l'observateur, et la projection F_l tracée en rouge, la projection F_p , en bleu, alors l'observateur, dont les pupilles seraient placées respectivement aux centres S_l et S_p , regardant π par des lunettes dont le verre gauche est bleu et le verre droit rouge, aurait l'impression de voir la figure F .

L'auteur considère enfin un problème important de photogrammétrie, consistant à dresser la carte d'un terrain plan à l'aide d'une photographie de celui-ci, dans le cas où le cliché de l'appareil n'était pas parallèle au terrain au moment où la photographie a été prise.

A. Plamitzer

Wojciech Rubinowicz, *Wektory i tensory*, podręcznik dla studentów fizyki (*Vectors and tensors, a Text-Book for Students of Physics*), Monografie Matematyczne t. XXII, Warszawa-Wrocław 1950, p. 170.

Professor Rubinowicz has been very successful in producing a text-book on Vector Analysis for first and second year students of physics at our universities and institutes of technology. At any rate, the first half of his book may be so qualified, as the second one contains some more advanced topics, *e. g.*, a brief but, considering its length, unexpectedly comprehensive account of spherical harmonics, and an introduction to the theory of Green's functions.

After an opening section containing a very well written survey of the different aspects under which vectors appear in physics, the algebra of vectors is developed on some thirty pages. There follow two sections on „tensors“, though by *tensor* Professor Rubinowicz understands in his book only tensors of *rank two*. Here it may also be mentioned that, due to its elementary character, the whole book deals exclusively, with three- (and two-) dimensional objects. Two sections treating of the changes of

coordinate system and the concepts of vectors and tensors from the point of view of such changes close the first part of the first chapter on Vector and Tensor Algebra. Differentiation and integration of vectors are developed in a short second part of the first chapter.

The second chapter, which comprises far more than a half of the book, is devoted to the theory of fields and gives the autor a better opportunity to display his didactic talent. After some introductory sections on gradients, divergences, and curls, in connection with the Stokes, Gauss-Ostrogradski, and Green integral theorems, such subjects as single, double, and multiple point sources, the determination of a vector field from its sources and vortices, etc., are very intelligibly expounded in detail; some more advanced subjects which are also included in this chapter have already been mentioned.

The book contains a considerable number of problems (which together with their solutions comprise more than a quarter of the whole), but these are mainly designed to illustrate points of principle or to bring out new concepts rather than to give the student extensive practice in manipulation.

Gibbs's notation, which seems to be ever more and more spreading over the whole world is used throughout the book, though — as it seems — unfortunately, not in its most consequent, original, Gibbs-Wilson form but in the Gibbs-Jaumann modification (scalar products without the dot, $(\bar{a} \text{ grad}) \bar{b}$ instead of $(a \nabla) b$, etc.), which for a time was used in Germany but in recent years seems to yield, even in Germany, to the original Gibbs-Wilson notation (see, e. g., Lagally's exhaustive treatise on Vector Calculus published in Leipzig in 1928). Professor Rubinowicz himself admits that vectors are often denoted in print by Clarendon type; in the opinion of the reviewer the book would gain much in appearance by adhering to this custom rather than that of denoting vectors by ordinary type with a bar above, a method which may be considered nowadays as rather obsolete.

But these are only quite minor objections; it cannot be doubted that Professor Rubinowicz's book fills up an important gap in the Polish text-book literature, a gap which was badly felt for some decades past by prospective physicists and all those interested in physics as an auxiliary science.

Jan Weysenhoff

Wacław Sierpiński, *Algèbre des Ensembles*, Monografie Matematyczne, vol. XXIII, Warszawa-Wrocław 1951, p. 205.

Ce nouveau livre de Wacław Sierpiński contient les parties de la théorie générale des ensembles qui se rapportent aux fonctions, aux ensembles et aux familles d'ensembles, mais où les notions de puissance et d'ordre n'interviennent pas. Ce livre contient beaucoup de sujets. On y a omis quelques démonstrations difficiles de résultats particuliers en les remplaçant par des renseignements bibliographiques, et les problèmes faciles (souvent empruntés aux travaux originaux des auteurs) sont formulés comme exercices. C'est pourquoi il peut se rendre utile aussi bien aux étudiants, qu'aux mathématiciens plus avancés. Dans toutes les parties de l'ouvrage on rencontre des résultats propres de l'auteur, qui le plus souvent ont été publiés dans „Fundamenta Mathematicae“.

Dans le chapitre I^{er}: *Algèbre des propositions* (§§ 1—6, p. 1—34), l'auteur s'occupe successivement de l'équivalence des propositions, de l'implication, de la somme et du produit logique, de la négation, des fonctions propositionnelles et des quantificateurs. L'exposé n'est point axiomatique, il contient cependant plusieurs systèmes d'axiomes (ceux de Łukasiewicz, de Hilbert-Ackermann et quelques autres), pourvus de commentaires.

Dans le chapitre II^c: *Ensembles, éléments, sous-ensembles* (§§ 7—13, p. 35—61) l'auteur traite l'appartenance d'un élément à l'ensemble: $p \in E$, l'égalité de deux ensembles, les ensembles composés d'un seul élément, l'ensemble vide, les ensembles d'ensembles (en particulier, l'axiome de l'infini) et le plus petit (le plus grand) ensemble ayant une propriété donnée. Bien qu'ici encore l'exposé ne soit pas axiomatique, le lecteur est mis au courant, à des endroits appropriés, des axiomes de la théorie des ensembles d'après Zermelo et Fraenkel. En citant d'intéressants passages empruntés aux savants de tout temps, l'auteur éclaircit plusieurs problèmes fondamentaux qui ont suscité des doutes et discussions à diverses époques.

Le chapitre III^c: *Opérations élémentaires sur les ensembles* (§§ 14—22, p. 62—111), concerne aussi bien les opérations effectuées sur deux ensembles que celles relatives aux suites d'ensembles. On y parle de la somme, du produit, de la différence et de la formation du complémentaire; on s'y occupe séparément des sommes des ensembles disjoints. Un paragraphe est consacré au parallélisme entre l'algèbre des propositions et l'algèbre des ensembles et une partie de ce paragraphe à l'algèbre de Boole. On y parle du „système ordinaire de l'algèbre de Boole“ selon Tarski, du „corps de Boole“ et du „corps généralisé de Boole“ d'après la terminologie d'un travail de Mostowski et finalement, du système d'axiomes de Byrne. (Au lecteur moins avancé dans la théorie des ensembles, il serait peut-être désirable d'expliquer les relations qui ont lieu entre ces diverses notions et d'adopter une notation uniforme). C'est à juste raison que l'auteur traite en détail la différence symétrique dans un paragraphe spécial, et cela en liaison avec les notions algébriques de groupe et d'anneau. Il serait probablement plus indiqué de compléter ce paragraphe par une remarque sur le parallélisme entre la différence symétrique que l'auteur désigne par le symbole \odot et l'opération logique dont il est question dans l'exercice de la page 18 et qui est désignée par \pm . Il me semble d'ailleurs que deux symboles différents sont ici superflus: l'addition des ensembles et celle des propositions ne sont-elles pas désignées dans ce livre par le même symbole $+$? Dans les derniers paragraphes du chapitre III^c, l'auteur s'occupe de la limite d'une suite d'ensembles et du produit cartésien de deux ensembles et il mentionne le parallélisme entre la projection et le petit quantificateur. Ce chapitre contient un grand nombre d'exercices grâce auxquels le lecteur pourra se familiariser avec le calcul des ensembles; le § 16 contient 20 exercices parmi lesquels on en trouve, par exemple du genre suivant: quel est le nombre des ensembles que l'on peut obtenir à partir d'ensembles donnés par itération des opérations élémentaires données?

Le chapitre IV^c: *Fonctions. Images d'ensembles. Relations*, contient beaucoup de sujets. On s'y occupe de transformations d'ensembles, de produits cartésiens infinis, de relations (en particulier de relations réflexives, symétriques et transitives) du principe d'abstraction, de quelques fonctions d'ensemble (en particulier d'un théorème de Banach généralisé par Knaster et Tarski, et du théorème de Cantor-Bernstein qui en est une conséquence) et finalement, de la topologie considérée comme chapitre de la théorie générale des ensembles.

Dans le chapitre V^c: *Familles d'ensembles et opérations sur ces familles*, on étudie les corps et les anneaux d'ensembles, les opérations $s, d, \rho, \sigma, \delta, B$ et A , les classes abstraites de Borel, les théorèmes sur la séparabilité (en particulier des formes abstraites de quelques théorèmes sur la séparation des ensembles boréliens et du théorème de Souslin sur la séparation des ensembles analytiques), le crible de Lusin et les opérations de Hausdorff. La plupart du contenu de ce chapitre se rattache à la partie de la théorie des ensembles boréliens et analytiques qui se laisse concevoir abstraitement et sans l'emploi des nombres transfinis.

En général, l'auteur s'occupe dans son livre avant tout des problèmes de la théorie générale des ensembles et des familles d'ensembles qui correspondent à la théorie dite *descriptive* des fonctions et non pas à leur théorie dite *métrique*, c'est-à-dire à la théorie

de la mesure et de l'intégrale. Il me semble désirable de compléter ce livre dans une prochaine édition par l'introduction de quelques notions et propositions sur les familles d'ensembles, utiles dans la théorie de la mesure. On pourrait citer, dans cet ordre d'idées, les *classes monotones* d'ensembles au sens de Halmos¹⁾ et avant tout les *ensembles indépendants* au sens de la théorie des ensembles. Plusieurs auteurs, par exemple Fichtenholz, Kantorovitch, Tarski, Sikorski, Rényi, se sont occupés de cette notion; elle se rattache aux problèmes et aux notions du calcul des probabilités, de la théorie de la mesure, de l'algèbre et des métamathématiques. Elle se rattache d'ailleurs aussi aux matières traitées dans ce livre, c'est ainsi par exemple que les nombres d'ensembles dont il s'agit dans les problèmes cités auparavant (§ 16, problèmes 4—9, p. 70—71) sont évidemment des nombres maximum, et sont atteints lorsque les ensembles donnés sont indépendants.

Il me semble aussi que l'on pourrait développer davantage (vu surtout le titre de l'ouvrage) les relations avec l'algèbre. Dans cet ordre d'idées *l'isomorphisme* des familles d'ensemble et avant tout le théorème déjà classique de Stone sur l'isomorphisme entre les corps de Boole et les corps d'ensembles mériteraient d'être étudiés (d'autant plus que l'on mentionne dans l'ouvrage les idéaux et les idéaux premiers).

On pourrait aussi ajouter quelques résultats propres de l'auteur, par exemple son étude de certaines opérations qu'il a introduites, et qui sont effectuées sur les suites d'ensembles.

L'auteur cite au début d'un chapitre de son livre le passage suivant d'une note récente de E. Borel „Créée seulement à la fin du XIX^e siècle, la Théorie des Ensembles s'est rapidement développée dans de nombreuses directions. Ses éléments font désormais partie de la culture générale, au même titre que les éléments de l'Algèbre, de la Géométrie, du Calcul différentiel“. Assurément, c'est bien cette conviction qui a animé l'éminent auteur de cet ouvrage pendant qu'il l'écrivait, comme d'ailleurs au cours de toute sa féconde activité scientifique qui dure 45 ans déjà.

E. Marczewski

Waclaw Sierpiński, *Les ensembles projectifs et analytiques*, Mémo-
rial des sciences mathématiques, Fasc. 112, Paris 1950, p. 80.

La théorie des ensembles analytiques a été créée il y a 35 ans. Elle a suscité autrefois beaucoup d'intérêt pour diverses raisons, et aujourd'hui elle constitue une théorie achevée dans un certain sens. Bien qu'aujourd'hui l'on ne rencontre que rarement des articles consacrés à cette théorie (ainsi, par exemple, le dernier (37) volume de „Fundamenta Mathematicae“ n'en contient aucun), il y avait cependant une époque, où beaucoup de mathématiciens, surtout en U. R. S. S. et en Pologne, s'en occupaient activement. Ce sont surtout quelques problèmes fondamentaux, jusqu'à présent non résolus, qui ont suscité un vif intérêt de ces derniers. Aujourd'hui, l'on n'espère plus résoudre ces problèmes qui sont devenus l'objet de recherches métamathématiques. Il est fort heureux que la rédaction de la collection „Mémo-
rial des sciences mathématiques“ a décidé de publier un fascicule sur la théorie des ensembles projectifs et analytiques et qu'elle a incité à écrire ce fascicule un savant qui a contribué activement à l'édification et au développement de cette théorie. En effet, Waclaw Sierpiński a écrit en collaboration avec Nicolas Lusin plusieurs articles fondamentaux sur les ensembles analytiques et est en outre l'auteur de quelques dizaines de notes et d'articles sur les ensembles projectifs et analytiques.

¹⁾ P. R. Halmos, *Measure Theory*, New York 1950, § 6, en particulier p. 27, Theorem B.

En lisant ce fascicule un mathématicien non spécialisé, et même un étudiant, comprendra aisément les origines et l'essentiel de la théorie. L'auteur s'occupe surtout des ensembles analytiques et projectifs dans l'espace euclidien. Les ensembles projectifs sont définis comme résultats de l'itération de la projection et de la formation des complémentaires à partir de la classe des ensembles ouverts. Bien que l'ouvrage contienne une revue systématique d'un grand nombre de résultats, ce sont seulement les théorèmes à la fois simples et fondamentaux qui sont exposés avec leurs démonstrations complètes (par exemple le théorème d'existence des ensembles d'une classe projective quelconque). En utilisant la méthode de Kuratowski et Tarski, l'auteur explique le rôle de la notion d'ensemble projectif dans les mathématiques: tous les ensembles définissables sont projectifs et l'on peut évaluer la classe projective de l'ensemble à l'aide de sa définition écrite en symboles. L'auteur mentionne plusieurs problèmes non résolus, par exemple celui de l'existence d'un complémentaire analytique de puissance \aleph_1 , ou bien celui de l'existence d'un ensemble non mesurable (L) qui est projection d'un complémentaire analytique. L'auteur cite plusieurs fois les résultats (publiés en général sans démonstrations) de Gödel sur la consistance dans certaines hypothèses, par exemple dans l'hypothèse de l'existence d'un complémentaire analytique linéaire et non dénombrable, dont aucune partie n'est parfaite.

L'ouvrage contient deux chapitres, dont le premier (p. 1—27) est consacré aux ensembles projectifs en général et le second (p. 28—78) aux ensembles analytiques, aux complémentaires analytiques et aux projections de ces complémentaires. L'auteur fait des remarques historiques intéressantes sur l'origine et les premières phases du développement de la théorie des ensembles analytiques. Il rappelle que Souslin est parvenu à la notion d'ensemble analytique, ayant découvert une faute chez Lebesgue; celui-ci avait affirmé, notamment, que la projection du produit d'une suite infinie descendante d'ensembles plans était toujours identique avec le produit de leurs projections. L'auteur accentue aussi les grands mérites de Lusin dans le développement de la théorie des ensembles analytiques et il cite tous les ouvrages importants qui contiennent cette théorie. Signalons d'ailleurs que, bientôt après la publication du fascicule de M. Sierpiński, a paru un article intéressant de W. J. Arsenin et A. A. Liapounoff intitulé *La théorie des ensembles A* (Uspiechi matem. nauk. tome V, fasc. 5, 1950) contenant les démonstrations détaillées et embrassant moins de problèmes. Les ensembles analytiques sont définis dans l'ouvrage de M. Sierpiński comme noyaux de systèmes déterminants, comme projections des ensembles G_δ et comme images continues de l'ensemble des nombres irrationnels. L'auteur établit l'équivalence de ces trois définitions et il esquisse une démonstration de son théorème, d'après lequel les ensembles analytiques linéaires sont identiques avec les ensembles des valeurs des fonctions continues d'un côté déterminé (du côté droit par exemple) et aussi avec les ensembles des valeurs des fonctions semi-continues. Il y a lieu de rappeler à cette occasion qu'en utilisant ce théorème de M. Sierpiński, S. Kierst a obtenu le beau résultat suivant: les ensembles analytiques plans sont identiques avec les ensembles des valeurs asymptotiques finies des fonctions holomorphes dans un cercle ¹⁾.

On s'occupe ensuite de la décomposition d'un ensemble analytique et de son complémentaire en \aleph_1 ensembles boréliens disjoints (constituantes); ce problème se rattache à une étude de la puissance et de la mesurabilité des ensembles de premières classes projectives. Le théorème de Souslin sur la séparation des ensembles analytiques disjoints par des ensembles boréliens et le théorème de Lusin, d'après lequel les ensembles boréliens sont identiques avec les noyaux de systèmes d'unicité, sont cités sans démonstrations, mais on en déduit quelques corollaires simples: du théorème de Souslin il résulte immédiatement que, si un ensemble est analytique en même temps que son

¹⁾ Fundamenta Mathematicae 27 (1936), p. 226.

complémentaire, ces deux ensembles sont boréliens, tandis que le théorème de Lusin entraîne le fait que l'image biunivoque et continue d'un ensemble borélien est aussi un ensemble borélien. Il est curieux que cette proposition importante, bien qu'elle concerne des ensembles boréliens seulement, ne peut être démontrée qu'à l'aide de la théorie des ensembles analytiques.

L'auteur s'occupe dans un paragraphe intéressant de la classe projective des images géométriques de fonctions et il fait une étude assez détaillée du problème de l'uniformisation des ensembles analytiques et de leurs complémentaires. Ensuite il expose la théorie du crible de Lusin avec quelques généralisations, en mentionnant la théorie des fonctions analytiques des suites d'ensembles (Kantorowitch et Liwenson). Dans un des derniers paragraphes l'auteur s'occupe des opérations de Hausdorff et il explique leurs relations avec l'opération A .

L'ouvrage s'achève par une revue de problèmes qui, bien que relatifs aux ensembles et fonctions très simples, conduisent cependant d'une façon naturelle aux ensembles analytiques non boréliens ou même aux ensembles de classes projectives supérieures. A cette catégorie de problèmes appartiennent en particulier: l'étude des propriétés de l'ensemble des distances entre les points d'un ensemble plan, le problème (d'Urysohn) de l'accessibilité linéaire d'un ensemble plan, l'étude des propriétés de la limite d'une fonction de deux variables où l'on a effectué le passage à la limite avec une variable. L'auteur cite aussi des exemples simples de classes d'ensembles qui sont analytiques et non boréliens dans l'espace des ensembles fermés. Grâce à une grande variété des résultats cités et à une exposition intéressante de ceux-ci, l'ouvrage de M. Sierpiński servira comme excellent guide dans la théorie des ensembles analytiques et projectifs.

S. Hartman et E. Marczewski



ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

**ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE
DE MATHÉMATIQUE**

FONDÉES EN 1921 par STANISŁAW ZAREMBA

Rédacteur FRANCISZEK LEJA

Membres de la Rédaction

STANISŁAW GOŁĄB

TADEUSZ WAŻEWSKI

**TOME XXIV
ANNÉE 1951, FASCICULE II**

KRAKÓW 1953

POLSKIE TOWARZYSTWO MATEMATYCZNE
UL. ŚW. JANA 22

Avis

A partir de l'année 1954 le journal »Annales de la Société Polonaise de Mathématique« sera publié sous le nouveau titre »Annales Polonici Mathematici«. Le périodique »Annales Polonici Mathematici« constituera la continuation des »Annales de la Société Polonaise de Mathématique« et va paraître chaque année.

Le premier volume des »Annales Polonici Mathematici« sera envoyé aux Rédactions des périodiques qui recevaient jusqu'ici les »Annales de la Société Polonaise de Mathématique« en voie d'échange. Toutes ces Rédactions sont priées de continuer l'échange sous l'adresse

Annales Polonici Mathematici
Warszawa 10, Śniadeckich 8 (Pologne)

Table des matières

	Page
J. Szarski. Sur les systèmes d'inégalités différentielles ordinaires remplies en dehors de certains ensembles	1
— Sur un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre complètement intégrable	9
Z. Szmydtówna. Sur l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires	17
W. Sosnowski. Sur une interprétation géométrique des éléments complexes .	35
R. P. Gosselin. On the theory of localization for double trigometric series .	49
S. Gołąb. On Finsler's measurement of an angle	78
J. Szarski. Evaluation du domaine de régularité du cône caractéristique .	85
H. Pidek. Sur les objets géométriques de la classe zéro qui admettent une algèbre	111
A. Alexiewicz. On a theorem of Ważewski	129
T. Ważewski. Une généralisation des théorèmes sur les accroissements finis au cas des espaces de Banach et application à la généralisation du théorème de l'Hôpital	132
S. Łojasiewicz. Sur un théorème de Kneser	148
T. Banachiewicz. Sur les thèses de deux notes de T. Ważewski relatives aux cracoviens et aux matrices	153
T. Ważewski. Sur l'algorithme des méthodes d'éliminations successives .	157
C. Loster. Sur certaines fonctions homogènes de deux variables complexes .	165
W. Sierpiński. Sur un problème concernant un réseau à 36 points	173
— Un théorème concernant les fonctions continues dans les ensembles ordonnés	175
Comptes rendus de la Société Polonaise de Mathématique	181
