ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

400—

FONDÉES EN 1921 par STANISŁAW ZAREMBA

TOME XXV

ANNÉE 1952

Dédié à

M. HUGO STEINHAUS

à l'occasion de son Jubilé

KRAKÓW 1952

POLSKIE TOWARZYSTWO MATEMATYCZNE

UL. ŚW. JANA 22

Avis

A partir de l'année **1953** le journal »Annales de la Société Polonaise de Mathématique« sera publié sous le nouveau titre **»Annales Polonici Mathematici«**. Le périodique »Annales Polonici Mathematici« constituera la continuation des »Annales de la Société Polonaise de Mathématique« et va paraître chaque année.

Le premier volume des »Annales Polonici Mathematici« sera envoyé aux Rédactions des périodiques qui recevaient jusqu'ici les »Annales de la Société Polonaise de Mathématique« en voie d'échange. Toutes ces Rédactions sont priées de continuer l'échange sous l'adresse

Annales Polonici Mathematici
Warszawa, Śniadeckich 8 (Pologne).

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

FONDÉES EN 1921 par STANISŁAW ZAREMBA

TOME XXV

ANNÉE 1952

Dédié à

M. HUGO STEINHAUS

à l'occasion de son Jubilé

KRAKÓW 1952
POLSKIE TOWARZYSTWO MATEMATYCZNE
UL. ŚW. JANA 22

POLSKIE TOWARZYSTWO MATEMATYCZNE

Nakład 1000 egz. — ark. wyd. $20^1/_4$ — ark. druk. $21^1/_2$ — Papier druk. sat. kl. III, B1, 100 g (16)
Oddano do skład. 5. VI. 1952 — Podpisano do druku 18. II. 1953 — Druk ukoń. w kwietniu 1953
Krakowska Drukarnia Naukowa, Kraków, Czapskich 4 — Zam. 340/52

Table des matières

SUR UNE FAMILLE DE FONCTIONS ANALYTIQUES EXTRÉMALES

Par F. Leja (Kraków)

1. Notations. Soit D un domaine plan borné, F la frontière de D et $A(z)$ une fonction définie et continue sur F, admettant des valeurs réelles positives. Supposons que F soit somme de $\nu+1$, $\nu\geqslant 0$, continus disjoints $C_0, C_1, \dots, C_\nu$ jouissant des propriétés suivantes:

1⁰ Chaque C_k $(k=0,1,\dots,\nu)$ est la frontière commune de deux domaines disjoints simplement connexes D_k et Δ_k, où D_k est borné et Δ_k contient le point $z=\infty$.

2⁰ Chaque domaine fermé D_k+C_k $(k=1,2,\dots,\nu)$ est contenu dans D_0 et dans chaque Δ_i pour $i>0$ et $\neq k$.

3⁰ Le domaine D est égal au produit

$$D=D_0\cdot\Delta_1\cdot\Delta_2\cdot\ldots\cdot\Delta_\nu.$$

Lorsque $\nu=0$, posons $D=D_0$.

Il suit de ces hypothèses que $F=C_0+C_1+\ldots+C_\nu$, l'ordre de connexion de D est $\nu+1$, et C_0 est la frontière extérieure de D. Dans chacun des domaines D_k $(k=1,2,\dots,\nu)$ choisissons un point fixe a_k, et posons

$$p(z)=(z-a_1)^{\sigma_1}(z-a_2)^{\sigma_2}\ldots(z-a_\nu)^{\sigma_\nu},$$

où $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_\nu$ sont des nombres réels rationnels positifs satisfaisant à la condition

$$\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_\nu<1.$$

Pour $\nu=0$, posons par définition $p(z)\equiv 1$.

Soit n un nombre naturel fixé quelconque, λ un paramètre réel, et $\zeta^{(n)}$ un système de $n+1$ points différents quelconques $\zeta_0,\zeta_1,\dots,\zeta_n$ situés sur F

$$\zeta^{(n)}=\{\zeta_0,\zeta_1,\dots,\zeta_n\}. \tag{1}$$

Faisons correspondre à ce système les $n+1$ polynômes de Lagrange

$$(2)\qquad L^{(j)}(z,\zeta^{(n)})=\prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n}\frac{z-\zeta_k}{\zeta_j-\zeta_k}\qquad (j=0,1,\ldots,n),$$

et les $n+1$ fonctions algébriques

$$(3)\qquad \Phi^{(j)}(z,\lambda,\zeta^{(n)})=L^{(j)}(z,\zeta^{(n)})\left[\frac{p(\zeta_j)}{p(z)}\right]^n A(\zeta_j)^{n\lambda}\qquad (j=0,1,\ldots,n);$$

de plus, désignons par $V(\zeta^{(n)})$ le produit de toutes les distances mutuelles des points (1)

$$(4)\qquad V(\zeta^{(n)})=\prod_{0\leqslant j<k\leqslant n}|\zeta_j-\zeta_k|,$$

et par $U(\lambda,\zeta^{(n)})$ l'expression

$$(5)\qquad U(\lambda,\zeta^{(n)})=V(\zeta^{(n)})\cdot\prod_{k=0}^{n}[|p(\zeta_k)|^{-n}A(\zeta_k)^{-n\lambda}].$$

Il est clair que $U(0,\zeta^{(n)})$ tend vers $V(\zeta^{(n)})$ lorsque chacun des nombres $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_\nu$ tend vers 0.

Les fonctions (3) dépendent du paramètre λ, du système $\zeta^{(n)}$ et, en outre, des fonctions $p(z)$ et $A(z)$. Elles se réduisent à des polynômes lorsque $\nu=0$, et à des fonctions rationnelles lorsque $\nu>0$ et tous les nombres $n\sigma_1,n\sigma_2,\ldots,n\sigma_\nu$ sont entiers. Dans le cas général, les fonctions (3) sont multiformes et possèdent $\nu+1$ pôles de ramification

$$a_1,a_2,\ldots,a_n,\infty.$$

Les modules de ces fonctions sont toujours uniformes. Remarquons encore que la somme

$$\sum_{j=0}^{n}|\Phi^{(j)}(z,\lambda,\zeta^{(n)})|$$

est égale à $A(z)^{n\lambda}$ aux points du système (1), donc la fonction

$$\Big(\sum_{j=0}^{n}|\Phi^{(j)}(z,\lambda,\zeta^{(n)})|\Big)^{1/n\lambda}$$

constitue une approximation de la fonction frontière $A(z)$ aux points de F.

2. Points extrémaux et fonctions principales. Lorsque les points (1) varient arbitrairemnet sur F, l'expression (5) varie et atteint un maximum dépendant de λ. Désignons ce maximum par $U_n(\lambda,F)$, et soit

$$x^{(n,\lambda)}=\{x_0^{(n,\lambda)},x_1^{(n,\lambda)},\ldots,x_n^{(n,\lambda)}\} \tag{6}$$

un système de $n+1$ points de F, que nous désignerons plus brièvement par

$$x^{(n)}=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}, \tag{6'}$$

pour lequel

$$U_n(\lambda,F)=U(\lambda,x^{(n)})=\max_{\zeta^{(n)}\in F} U(\lambda,\zeta^{(n)}). \tag{7}$$

Le système (6) satisfaisant à la condition (7) sera dit *système de points extrémaux du rang n de F correspondant à la valeur λ du paramètre* [1]).

Je dis que les fonctions

$$\Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)})=L^{(j)}(z,x^{(n)})\left[\frac{p(x_j)}{p(z)}\right]^n A(x_j)^{n\lambda} \quad (j=0,1,\ldots,n) \tag{8}$$

satisfont, en chaque point de F, à l'inégalité

$$|\Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)})|\leqslant A(z)^{n\lambda} \quad (j=0,1,\ldots,k;\ z\in F). \tag{9}$$

En effet, dans le cas contraire, il existerait un indice j et un point x_j' situé sur F tels que l'on ait

$$|\Phi^{(j)}(x_j',\lambda,x^{(n)})|>A(x_j')^{n\lambda},$$

et, par suite,

$$\Big(\prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n}|x_j'-x_k|\Big)|p(x_j')|^{-n}A(x_j')^{-n\lambda}>\Big(\prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n}|x_j-x_k|\Big)|p(x_j)|^{-n}A(x_j)^{-n\lambda}.$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par l'expression

$$V(x_0,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)\prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n}[|p(x_k)|^{-n}A(x_k)^{-n\lambda}],$$

[1]) A chaque valeur de n et λ correspond au moins un système de points extrémaux; s'il y en a plusieurs, on peut en choisir un quelconque pour le système (6).

on obtiendrait l'inégalité

$$U(\lambda,\zeta^{(n)}) > U(\lambda, x^{(n)}),$$

où $\zeta^{(n)} = \{x_0, \ldots, x_{j-1}, x'_j, x_{j+1}, \ldots, x_n\}$, ce qui est incompatible avec (7).

Parmi les fonctions (8) correspondant aux points extrémaux (6) nous allons distinguer une comme il suit: Désignons par $I^{(j)}(x^{(n)})$ le produit

$$I^{(j)}(x^{(n)}) = [\prod_{\substack{k=0 \\ (k\neq j)}}^{n} (x_j - x_k)]\, p(x_j)^{-n} A(x_j)^{-n\lambda},$$

et supposons que les indices des points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ soient choisis de manière qu'on ait

$$|I^{(0)}(x^{(n)})| \leqslant |I^{(j)}(x^{(n)})| \quad \text{pour} \quad j=1,2,\ldots,n.$$

Alors, étant identiquement [2])

$$\Phi^{(0)}(z,\lambda,x^{(n)}) = \Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)}) \frac{I^{(j)}(x^{(n)})}{I^{(0)}(x^{(n)})} \cdot \frac{z-x_j}{z-x_0},$$

on a, dans le plan entier,

$$(10) \qquad |\Phi^{(0)}(z,\lambda,x^{(n)})| \geqslant |\Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)})| \cdot \left|\frac{z-x_j}{z-x_0}\right|.$$

La fonction

$$(11) \qquad \Phi^{(0)}(z,\lambda,x^{(n)}) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

sera dite *fonction principale du rang n*. Elle est régulière en déhors des points $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ et dépend de la frontière F, des fonctions $A(z)$, $p(z)$ et du paramètre λ.

Formons la suite

$$(12) \qquad e^{i\theta_n} \sqrt[n]{\Phi^{(0)}(z,\lambda,x^{(n)})} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Nous verrons que, si les nombres θ_n sont convenablement choisis, cette suite converge, quel que soit λ dans le domaine D et dans chacun des domaines $\Delta_0, D_1, D_2, \ldots, D_\nu$, vers une fonction analytique, régulière dans ces domaines. La fonction limite jouit de plusieurs propriétés remarquables.

---

[2]) Lorsque les fonctions $\Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)})$ sont multiformes, on doit choisir convenablement leurs déterminations.

3. Propositions auxiliaires. Soit $V_n = V_n(F)$ la plus grande des valeurs du produit (4) lorsque les points

$$\zeta^{(n)} = \{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$$

varient sur la frontière du domaine D, et

(13) $$\eta^{(n)} = \{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n\}$$

un système de $n+1$ points de F pour lesquels

$$V_n = V(\eta^{(n)}) = \max_{\zeta^{(n)} \in F} V(\zeta^{(n)}).$$

D'autre part, soit $\Delta_n = \Delta_n(F)$ le plus petit des $n+1$ produits

$$\prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} |\eta_j - \eta_k| \qquad (j = 0, 1, \ldots, n).$$

On sait que[3])
Les deux suites

$$\left\{ V_n^{\frac{2}{n(n+1)}} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \Delta_n^{\frac{1}{n}} \right\}$$

convergent vers une même limite $d(F)$ dite *diamètre transfini* (ou *capacité*) de l'ensemble F

(14) $$\lim_{n\to\infty} \Delta_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} V_n^{\frac{2}{n(n+1)}} = d(F).$$

Le diamètre $d(F)$ est positif car F contient des continus. Remarquons qu'en vertu du principe de maximum, tous les points (13) sont situés sur la partie C_0 de F. On en conclut que $d(F) = d(C_0)$.

Désignons par $F_n(z, \lambda)$ la somme des modules des fonctions (8) correspondant aux points extrémaux (6)

(15) $$F_n(z, \lambda) = \sum_{j=0}^{n} |\Phi^{(j)}(z, \lambda, x^{(n)})|.$$

Nous allons démontrer le

---

[3]) Ces Annales 18 (1945), p. 4-11.

Théorème I. *Pour toutes les valeurs de* $z \neq a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ *et de* λ, *la suite* $\{\sqrt[n]{F_n(z,\lambda)}\}$ *tend vers une limite*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{F_n(z,\lambda)} = \Phi(z,\lambda) \qquad (z \neq a_1, a_2, \ldots, a_\nu). \tag{16}$$

La fonction limite $\Phi(z,\lambda)$ *est partout positive et finie.*

Démonstration. Soit $\Phi_n(z,\lambda)$ la borne inférieure du plus grand des modules $|\Phi^{(j)}(z,\lambda,\zeta^{(n)})|$ $(j=0,1,\ldots,n)$ lorsque, $z \neq a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ et λ étant fixés arbitrairement, les points du système $\zeta^{(n)}$ varient sur F

$$\Phi_n(z,\lambda) = \inf_{\zeta^{(n)}\in F} \{\max_{(j)} |\Phi^{(j)}(z,\lambda,\zeta^{(n)})|\}. \tag{17}$$

On démontre [4]) que les fonctions $\Phi_n(z,\lambda)$ satisfont aux inégalités

$$\Phi_{\mu+\nu}(z,\lambda) \geqslant \Phi_\mu(z,\lambda)\cdot\Phi_\nu(z,\lambda) \qquad (\mu,\nu=1,2,\ldots). \tag{18}$$

Soient m et M les bornes inférieure et supérieure de la fonction $A(z)$ sur F, et m_0, M_0 celles de $|p(z)|$ sur F. Puisque $A(z)$ et $|p(z)|$ sont positives et continues sur F, les bornes m et m_0 sont positives. Je dis que, quels que soient z et $\lambda \geqslant 0$, l'on a [5])

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\,\frac{m_0 m^\lambda}{|p(z)|} \leqslant \sqrt[n]{\Phi_n(z,\lambda)} \leqslant \frac{R(z)}{\sqrt[n]{\Delta_n}}\,\frac{M_0 M^\lambda}{|p(z)|}, \tag{19}$$

où $R(z)$ est la plus grande des distances $|z-\zeta|$ lorsque ζ parcourt F et Δ_n satisfait à la condition (14).

En effet, quel que soit $\zeta^{(n)}$, il vient, d'après la formule (3),

$$\max_{(j)} |\Phi^{(j)}(z,\lambda,\zeta^{(n)})| \geqslant \frac{1}{n+1}\left[\frac{m_0 m^\lambda}{|p(z)|}\right]^n,$$

car $\max_{(j)} |L^{(j)}(z,\zeta^{(n)})| \geqslant 1/(n+1)$; donc, la première des inégalités (19) est vraie. D'autre part, lorsque $\eta^{(n)}$ est le système (13), on a $|L^{(j)}(z,\eta^{(n)})| \leqslant R(z)^n/\Delta_n$; donc,

$$\max_{(j)} |\Phi^{(j)}(z,\lambda,\eta^{(n)})| \leqslant \frac{R(z)^n}{\Delta_n}\left[\frac{M_0 M^\lambda}{|p(z)|}\right]^n,$$

ce qui entraîne la seconde des inégalités (19).

---

[4]) J. Górski, ces Annales 23 (1950), p. 26.

[5]) L'inégalité (19) reste vraie, pour $\lambda<0$, si l'on échange les quantités m^λ et M^λ.

Il résulte des inégalités (18) que la suite $\{\sqrt[n]{\Phi_n(z,\lambda)}\}$ tend vers une limite finie ou infinie en vertu du lemme connu suivant: Si les termes d'une suite $\{a_n\}$ sont positifs et satisfont aux inégalités $a_{\mu+\nu} \geqslant a_\mu \cdot a_\nu$ pour $\mu,\nu=1,2,\ldots,$ alors la limite $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ finie ou infinie existe. Posons

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Phi_n(z,\lambda)}=\Phi(z,\lambda), \tag{20}$$

et remarquons qu'on a, d'après (19),

$$\frac{m_0 m^\lambda}{|p(z)|}\leqslant\Phi(z,\lambda)\leqslant\frac{R(z)}{d(F)}\,\frac{M_0 M^\lambda}{|p(z)|}, \tag{21}$$

donc la limite $\Phi(z,\lambda)$ est partout positive et finie.

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit de prouver que les fonctions $F_n(z,\lambda)$ satisfont aux inégalités

$$\Phi_n(z,\lambda)\leqslant F_n(z,\lambda)\leqslant(n+1)^2\Phi_n(z,\lambda). \tag{22}$$

La première de ces inégalités est évidente. Pour prouver la seconde, faisons correspondre à z,λ et $\varepsilon>0$ un système de $n+1$ points $\zeta^{(n)}=\{\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_n\}$ situés sur F, pour lesquels on ait

$$\Phi_n(z,\lambda)>\max_{(j)}|\Phi^{(j)}(z,\lambda,\zeta^{(n)})|-\varepsilon. \tag{23}$$

D'autre part, considérons les fonctions (8). Le produit $\Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)})\cdot p(z)^n$ est un polynôme du degré n; donc, d'après la formule d'interpolation de Lagrange, on a identiquement

$$\Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)})\cdot p(z)^n=\sum_{k=0}^{n}\Phi^{(j)}(\zeta_k,\lambda,x^{(n)})\cdot p(\zeta_k)^n\cdot L^{(k)}(z,\zeta^{(n)}).$$

Puisque les points $\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ sont situés sur F et que, d'après (9),

$$|\Phi^{(j)}(\zeta_k,\lambda,x^{(n)})|\leqslant A(\zeta_k)^{n\lambda},$$

il suit

$$|\Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)})|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|L^{(k)}(z,\zeta^{(n)})\cdot\left[\frac{p(\zeta_k)}{p(z)}\right]^n A(\zeta_k)^{n\lambda}\right|,$$

ou, en d'autre termes,

$$|\Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)})|\leqslant\sum_{k=0}^{n}|\Phi^{(k)}(z,\lambda,\zeta^{(n)})|;$$

donc, d'après (23),

$$|\Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)})| \leqslant (n+1)[\Phi_n(z,\lambda)+\varepsilon],$$

et, par suite,

$$F_n(z,\lambda) \leqslant (n+1)^2[\Phi_n(z,\lambda)+\varepsilon],$$

ce qui entraîne la seconde des inégalités (22). Le théorème est démontré.

Remarque. La fonction $\Phi(z,\lambda)$ satisfait sur F à l'inégalité

(24) $$\Phi(z,\lambda) \leqslant A(z)^{\lambda}.$$

En effet, d'après (9), on a

$$F_n(z,\lambda) \leqslant (n+1)A(z)^{n\lambda}$$

lorsque z est situé sur F, et cette inégalité entraîne (24).

4. Ensembles F_λ. Nous aurons à nous appuyer sur les lemmes suivants: Soit C un continu quelconque ne se réduisant pas à un seul point.

Lemme 1. *A tout point z_0 de C, et à tout $\varepsilon > 0$ correspondent deux nombres $\delta > 0$ et $N > 0$ tels que toute suite de polynômes $\{P_n(z)\}$, où le degré de $P_n(z)$ est $\leqslant n$, satisfaisant sur C aux inégalités*

$$|P_n(z)| \leqslant M \quad \textit{pour} \quad n=1,2,\ldots,$$

où M est une constante, vérifie, dans le cercle $|z-z_0|<\delta$, les inégalités

$$P_n(z) \leqslant M(1+\varepsilon)^n \quad \textit{pour} \quad n>N.$$

Soit $\{\zeta_j^{(n)}\}$, où $j=0,1,\ldots,n$ et $n=1,2,\ldots$, une suite triangulaire de points situés sur C et tels que, pour chaque n, les points du système $\zeta^{(n)}=\{\zeta_0^{(n)},\zeta_1^{(n)},\ldots,\zeta_n^{(n)}\}$ soient distincts. Formons, pour chaque $n=1,2,\ldots$, les polynômes de Lagrange

$$L^{(0)}(z,\zeta^{(n)}),\ L^{(1)}(z,\zeta^{(n)}),\ldots,\ L^{(n)}(z,\zeta^{(n)}),$$

et désignons par $M(z_0,r,\zeta^{(n)})$, où z_0 est un point de C, r un nombre positif quelconque, le plus grand de ceux des modules

$$|L^{(j)}(z_0,\zeta^{(n)})| \qquad (j=0,1,\ldots,n)$$

pour lesquels le point $\zeta_j^{(n)}$ est contenu dans le cercle $|z-z_0|\leqslant r$. Si tous les points $\zeta_0^{(n)},\zeta_1^{(n)},\ldots,\zeta_n^{(n)}$ sont extérieurs au cercle $|z-z_0|\leqslant r$, posons $M(z_0,r,\zeta^{(n)})=0$.

Lemme 2. *Lorsque z_0 est un point d'accumulation de la suite triangulaire $\{\zeta_j^{(n)}\}$, on a, quel que soit $r>0$,*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{M(z_0,r,\zeta^{(n)})}\geqslant 1.$$

La démonstration du lemme 1 se trouve dans les Math. Ann. 108 (1933), p. 520, et celle du lemme 2 dans les Annales de la Société Polonaise de Mathématique 21 (1948), p. 80-89.

Les points extrémaux (6) forment une suite triangulaire $\{x^{(n,\lambda)}\}$ dépendant de λ, pour $n=1,2,\ldots$ Désignons par F_λ l'ensemble de points d'accumulation de cette suite. Il est clair que les ensembles F_λ, correspondant à des différentes valeurs de λ, sont contenus dans F.

Lemme 3. *En tout point z_0 de F_λ, on a l'égalité*

$$\Phi(z_0,\lambda)=A(z_0)^\lambda. \tag{25}$$

Démonstration. Supposons d'abord que $\lambda\geqslant 0$. Comme la fonction $A(z)$ est continue en z_0, à tout $\varepsilon>0$ correspond un $\delta>0$ tel que, sur la partie de F contenue dans le cercle $K\{|z-z_0|<\delta\}$, on ait $A(z)>A(z_0)-\varepsilon$. Par suite, lorsque le point $x_j=x_j^{(n,\lambda)}$ est contenu dans l'ensemble $F\cdot K$ et $A(z_0)-\varepsilon>0$ les fonctions (8) satisfont, quel que soit z, à l'inégalité

$$|\Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)})|\geqslant|L^{(j)}(z,x^{(n)})|\cdot\left|\frac{p(x_j)}{p(z)}\right|^n[A(z_0)-\varepsilon]^{n\lambda}.$$

En particulier, cette inégalité a lieu pour $z=z_0$, et, comme $p(z)$ est continu en z_0, on peut supposer que le nombre δ soit si petit qu'on ait $|p(x_j)/p(z_0)|>1-\varepsilon$ lorsque $x_j\in F\cdot K$. Il vient donc

$$|\Phi^{(j)}(z_0,\lambda,x^{(n)})|\geqslant|L^{(j)}(z_0,x^{(n)})|(1-\varepsilon)^n[A(z_0)-\varepsilon]^{n\lambda},$$

et, par suite,

$$F_n(z_0,\lambda)\geqslant M(z_0,\delta,x^{(n)})\cdot(1-\varepsilon)^n[A(z_0)-\varepsilon]^{n\lambda},$$

où $M(z_0,\delta,x^{(n)})$ est le plus grand de ceux des modules

$$L^{(j)}(z_0,x^{(n)}) \qquad (j=0,1,\dots,n)$$

pour lesquels le point x_j est contenu dans le cercle $|z-z_0|<\delta$.

Puisque z_0 est un point d'accumulation de la suite $\{x_j^{(n,\lambda)}\}$, il suit de la dernière inégalité, en vertu du lemme 2 et du théorème I, que

$$\Phi(z_0,\lambda)\geqslant(1-\varepsilon)[A(z_0)-\varepsilon]^\lambda,$$

donc $\Phi(z_0,\lambda)\geqslant A(z_0)^\lambda$. Mais, d'après (24), comme

$$\Phi(z_0,\lambda)\leqslant A(z_0)^\lambda,$$

on voit que l'égalité (25) est vraie. Pour $\lambda<0$, la démonstration est analogue.

5. Fonctions extrémales. Considérons les fonctions principales

$$\Phi^{(0)}(z,\lambda,x^{(n)}) \qquad (n=1,2,\dots)$$

où λ est fixé arbitrairement, et soit $F_\lambda+\Sigma(a_k)$ l'ensemble F_λ augmenté des points $a_1,a_2,\dots,a_\nu$.

Théorème II. *La suite*

$$\{\sqrt[n]{|\Phi^{(0)}(z,\lambda,x^{(n)})|}\}$$

converge en tout point n'appartenant pas à l'ensemble $F_\lambda+\Sigma(a_k)$, et on a

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\Phi^{(0)}(z,\lambda,x^{(n)})|}=\Phi(z,\lambda). \tag{26}$$

La convergence est uniforme dans chaque domaine borné E dont la distance à $F_\lambda+\Sigma(a_k)$ est positive, et la fonction $\log\Phi(z,\lambda)$ est harmonique en dehors de $F_\lambda+\Sigma(a_k)$.

Démonstration. Désignons par r la plus petite, et par R la plus grande distance $|z-\zeta|$ lorsque z parcourt E et ζ parcourt $F_\lambda+\Sigma(a_k)$; remarquons qu'on a, dans E, pour tous les n suffisamment grands,

$$\frac{1}{n+1}\frac{r}{R}F_n(z,\lambda)\leqslant|\Phi^{(0)}(z,\lambda,x^{(n)})|\leqslant F_n(z,\lambda) \quad (n>N). \tag{27}$$

La première de ces inégalités résulte de (10); la seconde est évidente. Donc, en vertu du théorème I, la limite (26) existe dans E, et, par suite, en chaque point n'appartenant pas à $F_\lambda + \Sigma(a_k)$.

D'autre part, lorsque $\lambda \geqslant 0$, les inégalités (19), (22) et (27) donnent dans E[6])

$$c_n \sqrt[n]{\frac{r}{R}\, \frac{m_0 m^\lambda}{|p(z)|}} \leqslant \sqrt[n]{|\Phi^{(0)}(z,\lambda,x^{(n)})|} \leqslant \frac{1}{c_n}\, \frac{R}{\sqrt[n]{\Delta_n}}\, \frac{M_0 M^\lambda}{|p(z)|}, \tag{28}$$

où $c_n = 1/\sqrt[n]{(n+1)^2}$; donc la suite

$$\log \sqrt[n]{|\Phi^{(0)}(z,\lambda,x^{(n)})|} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

est uniformément bornée dans E, et comme ses termes sont harmoniques, la convergence (26) est uniforme dans E, c.q.f.d.

Désignons par G l'un des domaines[7])

$$D,\ D_1-(a_1),\ D_2-(a_2), \ldots,\ D_\nu-(a_\nu), \Delta_0, \tag{29}$$

et soit a un point fixe quelconque de G. Les zéros et les pôles de $\Phi^{(0)}(z,\lambda,x^{(n)})$ sont situés en dehors de G; donc, la fonction $\sqrt[n]{\Phi^{(0)}(z,\lambda,x^{(n)})}$, est régulière et différente de zéro dans G. Formons les fonctions

$$\varphi_n(z,\lambda) = e^{i\theta_n} \sqrt[n]{\Phi^{(0)}(z,\lambda,x^{(n)})} \qquad (n=1,2,\ldots), \tag{30}$$

où le nombre θ_n et la détermination du radical sont choisis de manière qu'on ait $\varphi_n(a,\lambda) > 0$. Dans chaque domaine simplement connexe contenu dans G et contenant a, ces fonctions restent uniformes.

Théorème III. *La suite* (30) *converge dans chaque domaine simplement connexe G' contenu dans G et contenant a. La fonction*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z,\lambda) = \varphi(z,\lambda) \tag{31}$$

---

[6]) Pour $\lambda < 0$, on doit échanger, dans (28), les quantités m^λ et M^λ.

[7]) $D_k - (a_k)$ désigne le domaine D_k sans le point a_k.

est régulière dans G', prolongeable analytiquement à tout point de G, et on a identiquement

$$|\varphi(z,\lambda)| = \Phi(z,\lambda) \tag{32}$$

en dehors de F.

Démonstration. D'après le théorème précédent, la suite des modules

$$|\varphi_n(z,\lambda)| \qquad (n=1,2,\ldots)$$

converge dans G vers $\Phi(z,\lambda)$, la convergence étant uniforme dans le voisinage de chaque point de G. D'autre part, on a

$$|\varphi_n(a,\lambda)| = \varphi_n(a,\lambda) \qquad (n=1,2,\ldots);$$

donc la limite (31) existe au point $z=a$, et $\varphi(a,\lambda)=\Phi(a,\lambda)>0$. On en conclut qu'elle existe et est régulière dans G'. La fonction $\varphi(z,\lambda)$ est prolongeable à chaque point z_0 de G car le domaine G' peut toujours être choisi de manière que z_0 soit contenu dans G'.

Remarque. Si la frontière de G possède des points n'appartenant pas à l'ensemble F_λ, il suit, du théorème II, que la fonction $\varphi(z,\lambda)$ est prolongeable en dehors de G jusqu'à chaque point qu'on peut réunir avec le point a par une courbe ne rencontrant pas F_λ.

La formule (31) définit dans chacun des domaines (29) une famille des fonctions anyltiques $\varphi(z,\lambda)$ — uniformes ou multiformes—dépendant du paramètre λ et des fonctions $A(z)$ et $p(z)$. Nous les appellerons *fonctions extrémales* associées à $F, A(z)$ et $p(z)$ [8]).

Les modules de ces fonctions sont uniformes car

$$|\varphi(z,\lambda)| = \Phi(z,\lambda).$$

Remarquons que $\varphi_n(z,\lambda)$ est égal au produit

$$e^{i\theta n}\sqrt[n]{L^{(0)}(z,x^{(n)})}\cdot\frac{p(x_0)}{p(z)}\,A(x_0)^\lambda,$$

---

[8]) Deux fonctions $\varphi(z,\lambda)$, correspondent à deux différents domaines (29), ne sont pas, en général, des branches d'une seule fonction analytique.

et que le facteur $\sqrt[n]{L^{(0)}(z,x^{(n)})}$ est uniforme et différent de zéro dans chacun des domaines (29), le premier excepté. Puisque

$$p(z)=(z-a_1)^{\sigma_1}\ (z-a_2)^{\sigma_2}\ \dots(z-a)^{\sigma_\nu},$$

la fonction $[\varphi_n(z,\lambda)]^{1/\sigma_k}$ est uniforme dans le domaine D_k et possède un pôle simple au point $z=a_k$ pour $k=1,2,\dots,\nu$. Il en résulte que:

Dans le domaine D_k $(k=1,2,\dots,\nu)$, la fonction

$$[\varphi(z,\lambda)]^{1/\sigma_k}$$

est uniforme, quel que soit λ, et possède un pole simple au point $z=a_k$.

De même, dans le domaine Δ_0, la fonction

$$[\varphi(z,\lambda)],^{1/(1-\sigma)},$$

où $\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\dots+\sigma_n$, est uniforme et possède un pôle simple à l'infini.

6. Continuité des fonctions $\Phi(z,\lambda)$. Nous allons maintenant démontrer le

Théorème IV. *Quel que soit λ, la fonction $\Phi(z,\lambda)$, définie par la formule* (16), *est continue dans le plan entier, les points $a_1,a_2,\dots,a_\nu$ exceptés, et tend vers l'infini positif lorsque z tend vers l'un des points $a_1,a_2,\dots,a_\nu,\infty$.*

Démonstration. 1° Il suffit de démontrer la continuité aux points de F_λ. Je dis d'abord qu'en tout point $\Phi(z,\lambda)$ est semi-continue inférieurement.

En effet, soient k et n deux nombres naturels quelconques. D'après (18), on a $\Phi_{kn}(z,\lambda)\geqslant\Phi_n(z,\lambda)^k$, donc

$$\sqrt[kn]{\Phi_{kn}(z,\lambda)}\geqslant\sqrt[n]{\Phi_n(z,\lambda)},$$

et, par suite,

$$\Phi(z,\lambda)\geqslant\sqrt[n]{\Phi_n(z,\lambda)}\quad\text{pour}\quad n=1,2,\dots$$

D'autre part, d'après (22),

$$\Phi_n(z,\lambda)\geqslant\frac{F_n(z,\lambda)}{(n+1)^2},$$

donc

$$\Phi(z,\lambda)\geqslant c_n\sqrt[n]{F_n(z,\lambda)},$$

où $c_n = 1/\sqrt[n]{(n+1)^2}$, et, par suite, z_0 étant un point quelconque, il suit

$$\Phi(z,\lambda) \geqslant c_n \sqrt[n]{F_n(z_0,\lambda)} + c_n[\sqrt[n]{F^n(z,\lambda)} - \sqrt[n]{F_n(z_0,\lambda)}].$$

Lorsque $n \to \infty$, $c_n \sqrt[n]{F_n(z_0,\lambda)} \to \Phi(z_0,\lambda)$; il existe donc un nombre $N = N(\varepsilon)$ tel que

$$c_N \sqrt[N]{F_N(z_0,\lambda)} > \Phi(z_0,\lambda) - \varepsilon,$$

et, par suite, on a, quel que soit z,

$$\Phi(z,\lambda) > \Phi(z_0\ \lambda) - \varepsilon + c_N[\sqrt[N]{F_N(z\ \lambda)} - \sqrt[N]{F_N(z_0,\lambda)}].$$

Mais la fonction $\sqrt[N]{F_N(z,\lambda)}$ est continue en z_0; il existe donc un voisinage $|z - x_0| < \delta$ dans lequel

$$c_N[\sqrt[N]{F_N(z,\lambda)} - \sqrt[N]{F_N(z_0,\lambda)}] > -\varepsilon,$$

et, par suite,

(33) $$\Phi(z,\lambda) > \Phi(z_0,\lambda) - 2\varepsilon \quad \text{pour} \quad |z - z_0| < \delta.$$

2° Il reste à prouver que $\Phi(z,\lambda)$ est semi-continue supérieurement en $z_0 \in F_\lambda$. Supposons d'abord que $\lambda \geqslant 0$, et soit $K_1\{|z - z_0| < \delta_1\}$ un cercle tel que les fonctions $p(z)$ et $A(z)$ satisfassent aux inégalités

(34) $$\frac{|p(z_0)|}{1+\varepsilon} < |p(z)| < p|(z_0)|(1+\varepsilon) \quad \text{dans } K_1,$$

et

$$A(z)^\lambda < A(z_0)^\lambda(1+\varepsilon) \quad \text{dans} \quad F \cdot K_1.$$

Par suite, d'après (9), on a dans $F \cdot K_1$,

$$|\Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)}) \cdot p(z)^n| < |p(z_0)|^n \cdot A(z_0)^{n\lambda} \cdot (1+\varepsilon)^{2n} \quad (j = 0,1,\ldots,n).$$

Or, les expressions

$$\frac{\Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)}) \cdot p(z)^n}{|p(z_0)|^n A(z_0)^{n\lambda}(1+\varepsilon)^{2n}} \qquad (j = 0,1,\ldots,n)$$

sont des polynômes du degré n et leurs modules ne surpassent pas 1 sur un continu passant par z_0 et appartenant à $F \cdot K_1$; donc, d'après le lemme 1, il existe un cercle $K_2\{|z - z_0| < \delta_2\}$ et un nombre N tels que l'on ait, dans K_2, pour $j = 0,1,\ldots,n$ et $n > N$,

$$|\Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)}) \cdot p(z)^n| < |p(z_0)|^n \cdot A(z_0)^{n\lambda} \cdot (1+\varepsilon)^{3n}.$$

Par suite, en vertu de (34), on a, dans $K_1 \cdot K_2$, pour $j=0,1,\ldots,n$ et $n>N$,

$$|\Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)})|<A(z_0)^{n\lambda}(1+\varepsilon)^{4n},$$

d'où l'on déduit l'inégalité

$$\sqrt[n]{F_n(z,\lambda)}<\sqrt[n]{n+1}\cdot A(z_0)^{\lambda}(1+\varepsilon)^4$$

qui donne

$$\Phi(z,\lambda)\leqslant\Phi(z_0,\lambda)(1+\varepsilon)^4 \quad \text{pour} \quad z\in K_1\cdot K_2$$

car $A(z_0)^{\lambda}=\Phi(z_0,\lambda)$ sur F_λ. Il en résulte que $\Phi(z,\lambda)$ est semi-continue supérieurement en z_0. La démonstration pour $\lambda<0$ est analogue; la continuité de $\Phi(z,\lambda)$ est ainsi démontrée.

Remarquons maintenant que la fonction $\varphi(z,\lambda)^{1/\sigma_k}$ possède un pôle simple au point a_k, et $\varphi(z,\lambda)^{1-\sigma}$, $\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_\nu$, un pôle simple à l'infini; donc, comme $\sigma_k>0$, $\sigma<1$ et $\Phi(z,\lambda)=|\varphi(z,\lambda)|$, la fonction $\Phi(z,\lambda)$ jouit des propriétés demandées.

7. Un cas particulier. Lorsque $\lambda=0$, les fonctions $F_n(z,\lambda)$ ne dépendent pas de la fonction frontière $A(z)$; donc, la fonction $\Phi(z,0)$ ne dépend que la de frontière F et de $p(z)$.

Désignons par $w=g(z,D_k)$ $(k=1,2,\ldots,\nu)$, la fonction effectuant la transformation conforme du domaine D_k sur le cercle $|w|<1$ de manière que les points $z=a_k$ et $w=0$ se correspondent [9]). De même, soit $w=g(z,\Delta_0)$ la transformation conforme du domaine Δ_0 sur le cercle $|w|<1$, dans laquelle les points $z=\infty$ et $w=0$ se correspondent.

Théorème V. *Dans le domaine D, la fonction $\varphi(z,0)$ se réduit à une constante de module* 1. *En dehors de D, on a*

$$\varphi(z,0)=e^{i\theta}[g(z,D_k)]^{-\sigma_k} \quad \textit{dans } D_k \ (k=1,2,\ldots,\nu), \tag{35}$$

$$\varphi(z,0)=e^{i\theta}[g(z,\Delta_0)]^{\sigma-1} \quad \textit{dans } \Delta_0, \tag{36}$$

où θ est une constante réelle et $\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_\nu$ [10]).

Démonstration. D'après le n° 5, la fonction

$$[\varphi(z,0)]^{-1/\sigma_k} \tag{37}$$

est analytique, uniforme dans le domaine D_k, et possède un zéro simple au point a_k. D'autre part, d'après le n° 6 et le

[9]) On sait que $g(z,D_k)$ est déterminée à un facteur $e^{i\varphi}$ près.

[10]) Lorsque $\nu=0$, l'on doit poser $\sigma=0$.

lemme 3 [11]), le module de cette fonction tend uniformément vers 1 lorsque z tend vers la frontière C_k de D_k. Il en résulte que la fonction (37) est univalente dans D_k et représente ce domaine sur le cercle $|w|<1$ de manière que les points $z=a_k$ et $w=0$ se correspondent; l'égalité (35) est donc démontrée. La démonstration de l'égalité (36) est analogue.

Désignons par $G(z, D_k)$ la fonction de Green du domaine D_k et de pôle $z=a_k$ pour $k=1,2,\dots,\nu$, et par $G(z,\Delta_0)$ celle du domaine Δ_0 et de pôle $z=\infty$. Il suit immédiatement du théorème précédent le suivant

Corollaire. *La fonction* $\log\Phi(z,0)$ *est identiquement nulle dans le domaine* D, *et, en dehors de* D, *on a*

$$\log\Phi(z,0)=\sigma_k G(z,D_k) \quad \textit{dans } D_k \ (k=1,2,\dots,\nu), \tag{38}$$

$$\log\Phi(z,0)=(1-\sigma)G(z,\Delta_0) \quad \textit{dans } \Delta_0. \tag{39}$$

Soient m et M les bornes inférieure et supérieure de la fonction $A(z)$ sur F. Pour $\lambda\neq 0$, les fonctions $\Phi(z,\lambda)$ ne se réduisent pas, en général, à des constantes dans le domaine D, mais il est facile de prouver le

Théorème VI. *Lorsque* $\lambda>0$, *on a, dans le plan entier,*

$$\log\Phi(z,0)+\lambda\log m\leqslant \log\Phi(z,\lambda)\leqslant \log\Phi(z,0)+\lambda\log M, \tag{40}$$

et, lorsque $\lambda<0$, *ces inégalités restent vraies si l'on échange les nombres* m *et* M.

En effet, lorsque $\lambda>0$, il suit de la formule (3) que

$$|\Phi^{(j)}(z,0,\zeta^{(n)})|\,m^{n\lambda}\leqslant|\Phi^{(j)}(z,\lambda,\zeta^{(n)})|\leqslant|\Phi^{(j)}(z,0,\zeta^{(n)})|\,M^{n\lambda}$$

pour $j=0,1,\dots,n$, d'où l'on déduit

$$\Phi_n(z,0)\,m^{n\lambda}\leqslant\Phi_n(z,\lambda)\leqslant\Phi_n(z,0)\cdot M^{n\lambda},$$

et, par suite,

$$\Phi(z,0)m^{\lambda}\leqslant\Phi(z,\lambda)\leqslant\Phi(z,0)M^{\lambda};$$

les inégalités (40) sont donc démontrées.

Les propriétés des fonctions extrémales $\varphi(z,\lambda)$, pour $\lambda\neq 0$, seront étudiées dans un autre travail.

[11]) Il est facile de voir que $F_\lambda=F$ lorsque $\lambda=0$.

Państwowy Instytut Matematyczny
Institut Mathématique de l'État

INTÉGRALES DE STIELTJES GÉNÉRALISÉES

Par P. Lévy (Paris)

1. Introduction. Je suis heureux de m'associer à l'hommage rendu dans ce volume au savant dont les travaux sur les fonctions indépendantes ont si heureusement contribué à l'évolution grâce à laquelle le calcul des probabilités est aujourd'hui un chapitre de l'analyse qui ne cède à aucun autre au point de vue de la rigueur.

L'objet du présent travail peut être situé à la lisière du calcul des probabilités. Il s'agit d'une extension des intégrales de Stieltjes et de L. C. Young que je n'ai encore exposée que dans de brèves notes [1]), mais que j'avais, dès 1939, appliquée à la courbe du mouvement brownien plan [2]). J'ai appelé *intégrales stochastiques* les intégrales que j'avais d'abord introduites. Mais en cherchant à généraliser davantage, j'ai été conduit à des définitions où le calcul des probabilités ne joue plus aucun rôle, et j'appellerai *intégrales généralisées* les nouvelles intégrales ainsi définies. Les précédentes restant utiles pour certaines applications, je crois bien faire de les rappeler, et d'indiquer ensuite l'évolution de mes idées qui m'a conduit à de nouvelles définitions.

Je préciserai d'abord que mes intégrales n'ont rien de commun avec les intégrales de fonctions aléatoires considérées

---

[1]) Voir Ann. Univ. Lyon, s. 3, Sciences, sect. A, fasc. 4 (1941), p. 67-74, ainsi que C. R. Acad. Sciences 212 (1941), p. 1066-1068, et 229, p. 644-645.

[2]) Voir Amer. Jour. of Math. 62 (1940), p. 487-550. Voir aussi *Processus stochastiques et mouvement brownien* (1948), p. 262-270, C. R. Acad. Sciences 230 (1950), p. 432-434 et errata, p. 689, et *Communication au 2-ième symposium de Berkeley* (août 1950; Univ. of California Press 1951, p. 171-187).

par E. Slutsky, ni avec celles de Pettis, K. Karhunen et G. Kallianpur. Ces savants proposent des définitions applicables à des familles de fonctions, qui, même à l'intérieur d'une telle famille, peuvent n'avoir aucun sens pour des fonctions isolées. Celles qui vont être exposées peuvent s'appliquer à ces dernières, et prolongent plutôt les définitions *classiques* de Stieltjes et de L. C. Young. Mais certaines familles de fonctions aléatoires constituent sans doute leur champ d'application le plus intéressant.

2. Notations. L'intégrale classique. Nous dirons indifférement le point x,y ou le point z. Nous désignerons par C l'arc de courbe

$$x=f(t), \qquad y=g(t) \qquad (0\leqslant t\leqslant 1), \tag{1}$$

essentiellement supposé continu, par L_n la ligne polygonale ayant pour sommets les points $z_0, z_1, \dots, z_n$ ($z_\nu = z(t_\nu)$; $t_0=0\leqslant t_1\leqslant \leqslant t_2 \dots \leqslant t_n=1$), par L'_h la ligne L_n obtenue en prenant $n=2^h$ et $t_\nu=2^{-h}\nu$. L'intégrale (ou aire)

$$I=\int_C y\,dx=\int_0^1 g(t)\,df(t) \tag{2}$$

est alors la limite (pour $n\to\infty$, Max $(t_\nu - t_{\nu-1})\to 0$) des sommes riemanniennes

$$S_n=\sum_1^n \tfrac{1}{2}(y_{\nu-1}+y_\nu)\,(x_\nu - x_\nu) \qquad (x_\nu = f(t_\nu),\ y=g_\nu(t_\nu)) \tag{3}$$

qui représentent des aires limitées aux lignes L_n.

Donnons-nous une suite $\{T_n\}$ de nombres $T_n \in (0,1)$, partout dense dans $(0,1)$. Nous désignerons par S_n^* la somme S_n obtenue en prenant pour $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ les valeurs $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ rangées dans l'ordre des grandeurs croissantes. Le passage de S_n^* à S_{n+1}^* implique l'introduction d'un nouveau sommet $Z_n= =z(T_n)$, et la différence $U_n=S_{n+1}^*-S_n^*$ est l'aire d'un triangle D_n, comptée positivement ou négativement suivant l'orientation de ce triangle. De même, la différence $U'_h=S'_{h+1}-S'_h$ des aires limitées à L'_{h+1} et L'_h, représente la somme algébrique des aires de 2^h triangles $D'_{h,\nu}$.

La convergence de ΣU_n pour toutes les suites $\{T_n\}$ possibles est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de l'intégrale au sens classique. Mais il faut remarquer que cette série, et, en particulier, la série $\Sigma U'_h$ peuvent n'être pas absolument convergentes, même si cette intégrale existe.

Exemple. Courbe analogue à celle de von Koch, intérieure à un triangle isocèle dont les sommets sont les points $z(0)$, $z(\frac{1}{2}), z(1)$. Les points $z_{4\nu}, z_{4\nu+1}, z_{4\nu+3}, z_{4\nu+4}$ de chaque ligne $L'_h (h>1)$ sont en ligne droite, et

$$z_{4\nu+1}+z_{4\nu+3}=z_{4\nu}+z_{4\nu+4}, \quad z_{4\nu+3}-z_{4\nu+1}=a_h(z_{4\nu+4}-z_{4\nu}), \quad (0<a_h<1).$$

La donnée du triangle initial et celle des a_h déterminent cette courbe qui comprend celle de von Koch comme cas particulier. En posant

$$\varphi(h)=(1-a_0)(1-a_1)\dots(1-a_{h-1}),$$

on a

$$U'_h=(-1)^h\varphi(h)U'_0.$$

La courbe C est un arc de Jordan sans points doubles, et, si $\varphi(h)$ tend vers zéro, sa mesure superficielle est nulle. L'aire I est alors bien définie. Cela n'implique évidemment pas la convergence de $\Sigma|U'_h|=|U'_0|\,\Sigma\varphi(h)$. Ainsi, pour $\varphi(h)=1/(h+1)$, c'est-à-dire $a_h=1/(h+2)$, la série $\Sigma|U'_h|$ n'est pas convergente.

3. Intégrales stochastiques. Supposons maintenant que chaque T_n soit choisi au hasard dans $(0,1)$, indépendamment des autres, avec répartition uniforme de la probabilité. Même si, au sens classique, l'intégrale I n'existe pas, il peut arriver qu'il y ait convergence *presque sûre* (almost sure: *a. s.*), ou *en moyenne quadratique (m. q.)*, ou *en probabilité (pr.)* de la suite $\{S^*_n\}$ vers une limite I. Nous dirons respectivement, dans ces trois cas, que I est une *intégrale stochastique a. s.*, ou *m. q.*, ou *pr.* D'autres modes de convergence peuvent être aussi considérés (en moyenne d'ordre a, par exemple). Sauf s'il y a convergence au sens classique, tous impliquent l'idée d'une certaine compensation entre les triangles positifs et les triangles négatifs.

L'introduction des S^*_n n'est utile que pour l'étude de la convergence a. s. Pour les autres modes de convergence, la corrélation entre deux sommes consécutives n'intervient pas, et on peut écrire S_n au lieu de S^*_n.

4. Remarque sur l'intégrale a. s. Pour n infini, la suite $\{S_n^*\}$ a une borne supérieure $\overline{S}^*$ et une inférieure $\underline{S}^*$.

Théorème. *Il existe deux nombres certains $\overline{I}$ et $\underline{I}$ tels que*

$$\Pr\{\overline{S}=\overline{I}, \quad \underline{S}=\underline{I}\}=1.$$

En effet, quel que soit ν, la connaissance de T_ν ne peut avoir aucune influence sur les probabilités de $\overline{S}<s$, et de $\underline{S}<s$. D'ailleurs, les ensembles définis par ces inégalités sont boreliens, donc mesurables. Le théorème énoncé est alors une conséquence immédiate du *théorème de l'alternative zéro ou un* de Kolmogoroff (d'après lequel, les probabilités considérées ne peuvent être égales qu'à 0 ou 1).

Les nombres $\overline{I}$ et $\underline{I}$ ne sont soumis à aucune autre restriction que $\underline{I}\leqslant\overline{I}$; nous le montrerons plus loin par des exemples. Si ces deux nombres sont égaux, leur valeur commune est l'intégrale a. s.

5. Application à la courbe du mouvement brownien plan. Pour cette courbe, on sait que $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions aléatoires additives, et qu'à un acroissement positif Δt de t correspondent des accroissements $\Delta f(t)=\xi\sqrt{\Delta t}$, $\Delta g(t)=\eta\sqrt{\Delta t}$, ξ et η étant deux variables normales réduites et indépendantes. L'aire de chacun des triangles $D'_{h,\nu}$ est de la forme $\pm 2^{-(h+2)}U$, U dépendant de la première loi de Laplace. Il en résulte que la somme des triangles positifs ne tend presque sûrement pas vers zéro pour h infini, donc qu'elle n'existe pas au sens classique. Mais, grâce à la compensation des triangles positifs et des triangles négatifs,

$$\sigma^2\{U'_h\}=2^{-(h+3)},$$

et il y a convergence m. q. et convergence a. s. de S'_h vers une limite I.

On obtient aisément des résultats analogues pour les aires S_n liées à une suite $\{T_n\}$ quelconque. Si les T_n sont choisis au hasard comme il a été dit au n° 3, il en résulte que: pour presque toutes les courbes C et presque toutes les suites $\{T_n\}$, il y a convergence de S_n vers une limite I. D'après le théorème de Fubini, ce résultat, obtenu en supposant les T_n choisis d'abord et C ensuite, subsiste si l'on intervertit l'ordre des choix. Donc:

pour presque toutes les courbes C (c'est-à-dire sauf dans des cas de probabilité totale nulle), *l'intégrale stochastique a. s. existe.*

Pour les démonstrations, et pour la loi dont dépend l'aire obtenue, nous renvoyons à nos travaux antérieurs (cités à la note [2])).

6. Suite de la théorie générale. Discussion. Première definition de l'intégrale généralisée. Les conditions étant celles définies au n° 3, et le caractère aléatoire de S_n ne provenant plus que des T_ν, posons

$$(4) \qquad \mu_n = E\{S_n\}, \quad S_n = \mu_n + \eta_n.$$

Pour qu'il y ait convergence m. q. de S_n vers une limite I il faut et il suffit que μ_n tende vers I, et que η_n tende en moyenne quadratique vers zéro. Si la première condition n'est pas réalisée, il y a des *oscillations forcées* de la suite des S_n; si la seconde ne l'est pas, il y a des *oscillations stochastiques* [3]).

Au lieu de $(0,1)$, prenons pour intervalle d'intégration un intervalle (t',t'')-réunion de deux intervalles (t',τ) et (τ,t''); on change infiniment peu S_n, si n est grand, en supposant que τ est un des t_ν. Alors η_n est la somme de deux termes indépendants η'_n et η''_n relatifs aux deux intervalles partiels, et ne peut tendre vers zéro que si η'_n et η''_n tendent vers zéro. Ce résultat s'appliquant à n'importe quelle division de (t',t'') en intervalles partiels, l'absence d'oscillations stochastiques est liée à une certaine propriété locale, qui doit être vérifiée en chaque point de l'intervalle d'intégration.

Une condition suffisante pour qu'il n'y ait pas d'oscillations stochastiques est que, pour $\tau > 0$, on ait

$$(5) \qquad |f(t+\tau)-f(t)| \leqslant \varphi(\tau), \quad |g(t+\tau)-g(\tau)| \leqslant \psi(\tau),$$

$\varphi(\tau)$ et $\psi(\tau)$ étant deux fonctions monotones telles que

$$(6) \qquad \int_0^1 \varphi^2(\tau)\,\psi^2(\tau)\,\tau^{-2}\,d\tau < \infty.$$

[3]) Il semble que, pour la suite des S_n^*, la convergence m. q. et la convergence a. s. soient liées. Nous ne pouvons pas l'affirmer. S'il en est ainsi, l'existence d'oscillations stochastiques équivaut à *l'existence presque sûre d'oscillations fortuites* (de $S_n^* - \mu_n$).

Elle n'est pas nécessaire; il suffit évidemment que plusieurs conditions de cette forme soient successivement vérifiées dans l'intervalle d'intégration. Mais la condition (6) est peut-être nécessaire pour que les conditions (5) entraînent l'absence d'oscillations stochastiques.

Le caractère local de la condition considérée rend son étude relativement facile. Mais les oscillations stochastiques ne sont pas les plus importantes. On peut en faire abstraction, et considérer que, μ_n étant la valeur probable de S_n, sa limite pour n infini, si elle existe, est une bonne valeur pour l'intégrale qu'il s'agit de définir. On peut aller plus loin, et considérer cette intégrale comme ayant un sens si μ_n a une limite généralisée.

Remarquons maintenant que le caractère local des oscillations stochastiques n'existe pas pour les oscillations forcées. Ainsi, si

$$z(t) = e^{i\theta} z(-t) \qquad (\theta \text{ réel, } t > 0),$$

et si l'intervalle d'intégration est de la forme $(-t', +t')$, μ_n est une constante indépendante de n, et l'intégrale définie comme limite de μ_n existe, même s'il n'en est pas ainsi pour les intervalles $(-t', 0)$ et $(0, t')$. Nous hésitons à considérer une telle expression comme une intégrale. Nous pensons préférable de proposer la définition suivante:

L'intégrale I a un sens comme *intégrale généralisée* si les moyennes μ_n ont, pour n infini, une limite, ou au moins une limite généralisée, et s'il en est de même pour tout intervalle intérieur à l'intervalle d'intégration. Elle est alors une fonctionnelle additive de l'intervalle d'intégration.

7. Deuxième définition. Comparaison des deux définitions. Considérons l'intégrale

$$(7) \qquad \Phi(\tau) = \int_0^{1-\tau} \frac{g(t) + g(t+\tau)}{2} \cdot \frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau} dt \qquad (0 < \tau < 1),$$

toujours bien définie si $f(t)$ et $g(t)$ sont continus. Si τ tend vers zéro, elle tend vers l'intégrale I relative à l'intervalle $(0,1)$, si cette intégrale existe au point de vue classique. Il est alors indiqué de définir l'intégrale généralisée comme *limite*, ou *limite généralisée*, de $\Phi(\tau)$, avec cette condition restrictive qu'une limite analogue puisse être définie dans n'importe quel intervalle intérieur à l'intervalle d'intégration.

Pour comparer cette deuxième définition à la précédente, rappelons que, pour n très grand, la longueur de chacun des n intervalles séparés par les points $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$, est asymptotiquement de la forme U/n, U dépendant de la première loi de Laplace. La probabilité qu'un point donné de $(0,1)$ appartienne à un intervalle de longueur U/n, avec $u \leqslant U < u + du$, est alors $[ue^{-u} + 0(1/n)]du$. On en déduit aisément que

$$(8) \qquad \mu_n - \int_0^\infty u e^{-u} \Phi\left(\frac{1}{n}\right) du \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Alors la limite de μ_n, si elle existe, est une limite généralisée de $\Phi(\tau)$, et, *à condition de ne considérer que des définitions régulières des limites généralisées* (nous entendons par là qu'elles permettent de considérer la formule (8) comme restant vraie à la limite), *une limite généralisée de μ_n en est une de $\Phi(t)$, et inversement.* Les deux définitions sont donc équivalentes.

8. Exemples. Nous allons considérer des courbes C analogues à celle de von Koch, pour lesquelles tous les triangles $D'_{h,\nu}$ (notation du nº 2) sont semblables à un même triangle isocèle, dont les deux côtés égaux font un angle $2\theta > \pi/3$. Chaque ligne L'_h a alors ses 2^h côtés égaux, leur longueur commune étant q^h ($q = 1/2 \sin\theta < 1$, condition nécessaire et suffisante pour que C soit un arc continu; la longueur de L'_0 est prise pour unité). Chaque courbe C est bien définie par la donnée de θ, et des nombres $\varepsilon_{h,\nu} = \pm 1$, le signe de chacun d'eux étant celui de l'aire de $D'_{h,\nu}$. Si $\theta > \pi/4$, donc $q^2 < 1/2$; la mesure superficielle de C est nulle, et l'intégrale I bien définie au point de vue classique. Le cas qui nous intéresse est celui où $\pi/2 \geqslant 2\theta > \pi/3$ (donc $1/2 \leqslant q^2 < 1$).

Si tous les $\varepsilon_{h,\nu}$ sont positifs, on a $U'_h = (2q^2)^h U'_0 \geqslant U'_0$, et $\bar{I} = +\infty$. Si $\varepsilon_{h,\nu} = (-1)^h$, alors $U'_h = (-2q^2)^h U'_0$, et les bornes $\bar{I}'$ et $\underline{I}'$ de la suite $\{S'_h\}$ sont respectivement U'_0 et 0 si $2\theta = \pi/2$, $+\infty$ et $-\infty$ si $\theta > \pi/4$. Dans ce dernier cas, on a aussi $\bar{I} = +\infty$, $\underline{I} = -\infty$. Dans les deux cas, l'intégrale généralisée existe; si on ne considère que la suite des S'_h, leur limite généralisée s'obtient par la sommation exponentielle de E. Borel, et même par les moyennes de Cesàro si $\theta=\pi/4$. La suite des μ_n, rapportée à l'échelle logarithmique, a des variations analogues à celle des S'_h, et a aussi une limite généralisée.

Supposons maintenant chaque $\varepsilon_{h,\nu}$ choisi au hasard, et $E\{\varepsilon_{h,\nu}\}=\alpha_h$ indépendant de ν. On peut prendre pour α_h n'importe quelle suite de nombres du segment $[-1,+1]$. Comme $E\{U'_h\}=(2q^2)^h\alpha_h|U'_0|$, on voit qu'on peut réaliser pour la suite des S'_h, non seulement n'importe quel intervalle d'indétermination à l'infini, mais aussi n'importe quelle succession de maxima et de minima donnés. Il en est de même pour la suite des μ_n.

Le cas le plus intéressant est celui, où $\alpha_h=0$; pour chaque $\varepsilon_{h,\nu}$, les deux signes sont également probables. Alors

$$E\{U'_h\}=0,\ E\{U'^2_h\}=(2q^4)^h U'^2_0,$$

et, si $2q^4<1$, il y a convergence m. q. et convergence a. s. de la suite des S'_h vers une limite I. Sous cette condition, on peut raisonner comme pour le mouvement brownien. La principale différence est que les accroissements successifs de $f(t)$ et $g(t)$ ne sont pas indépendants, mais presque indépendants au sens de S. Bernstein. Cela suffit pour que la convergence m. q. de la suite $\{S_\nu\}$ entraîne sa convergence a. s., et, si $2q^4<1$, la conclusion est la même que pour le mouvement brownien: *pour la courbe C obtenue en tirant au sort les valeurs des $\varepsilon_{h,\nu}$ dans les conditions qui viennent d'etre précisées, il est presque sûr que l'intégrale I a un sens, non seulement comme intégrale généralisée, mais même comme intégrale stochastique a. s.* (et aussi m. q.).

Au contraire, si $2q^4\geqslant 1$, quelle que soit la méthode *choisie d'avance* pour la définition d'une limite généralisée, il est presque sûr qu'elle ne permet pas de donner un sens à l'intégrale I [4]).

9. Cas des intégrales doubles. Nous considérons encore le cas d'une intégrale de Stieltjes généralisée

$$\iint_S z(u,v)\,dx(u,v)\,dy(u,v), \tag{9}$$

[4]) Ce résultat se rattache à notre théorème sur la non-sommabilité des séries aléatoires essentiellement divergentes (Bull. Soc. Math. de France 63 (1935), p. 11).

étendue à une aire S du plan des uv, et où les trois fonctions x, y, z sont continues. Si z est constant, elle se ramène par la formule de Riemann à une intégrale de type (2). Pour le cas général, la seule des méthodes proposées pour les intégrales simples qui soit facile à généraliser est celle du nº 7. Désignons par $\Sigma_{u,v}^{(\varrho)}$ le cercle de centre u, v et de rayon ϱ, et par S_ϱ le lieu des points pour lesquels ce cercle est intérieur à S. L'intégrale (9) sera alors par définition la limite, pour ϱ tendant vers zéro, ou la limite généralisée, de l'expression

$$\frac{1}{\pi\varrho^2}\iint\limits_{S_\varrho} z(u,v)\,du\,dv \iint\limits_{\Sigma_{u,v}^{(\varrho)}} dx(u,v)\,dy(u,v). \tag{10}$$

Une définition analogue s'applique aux intégrales multiples d'ordres quelconques.

10. Problèmes non résolus. 1º *Peut-il arriver, pour une courbe de mesure superficielle positive, que l'intégrale stochastique non généralisée ait un sens?*

Pour l'intégrale généralisée, la question est résolue par un des exemples du nº 8 (cas particulier connu $\theta = \pi/4$, $\varepsilon_{h,\nu} = (-1)^h$). Pour l'intégrale non généralisée, notre impression est que la réponse est négative. En ce qui concerne l'exemple final du nº 8, rappelons que, si $\theta = \pi/4$, la mesure superficielle de C est nulle; la méthode de démonstration indiquée pour le mouvement brownien (loc. cit. note [2]), notamment *Processus*, p. 256) s'applique sans difficulté. Elle ne s'étend pas au cas où $\theta < \pi/4$.

2º *Problème des changements de variables.* Sous la condition essentielle que l'intégrale I ait un sens pour tout intervalle partiel intérieur à $(0,1)$, elle ne risque pas d'être changée par un changement de variable $t = \varphi(\tau)$, si la fonction $\varphi(\tau)$ est continue, croissante, et que l'intervalle $(0,1)$ puisse être divisé en un nombre fini d'intervalles partiels dans chacun desquels elle soit linéaire.

A quelle classe de fonctions continues et croissantes ce résultat peut-il s'étendre? Que peut-on dire de la classe des fonctions absolument continues?

Questions analogues pour les intégrales multiples.

3⁰ *Application de la définition du n⁰ 9 à la surface*

$$x = X(u,v), \quad y = Y(u,v), \quad z = Z(u,v),$$

où X, Y, Z sont trois déterminations indépendantes de la fonction du mouvement brownien à deux paramètres (pour la définition de cette fonction, voir *Processus*, p. 275-284).

L'existence de l'intégrale n'est pas douteuse, et cela sans qu'il soit nécessaire d'introduire des limites généralisées. Mais il s'agit de savoir si, en considérant cette intégrale comme fonction de S, on peut obtenir des résultats généralisant les résultats connus concernant l'aire comprise entre un arc de la courbe du mouvement brownien plan et sa corde (loc. cit. note [2])).

SUR UN DÉTERMINANT

Par J. G.-Mikusiński (Wrocław)

Introduisons les notations

$$(w^\sigma)^{(0)} = w^\sigma \qquad (\sigma=0,1,\ldots),$$
$$(w^0)^{(\nu)} = 0 \qquad (\nu=1,2,\ldots),$$
$$(w^\sigma)^{(\nu)} = \sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-\nu+1)w^{\sigma-\nu} \qquad (\sigma,\nu=1,2,\ldots).$$

Etant donnés m nombres naturels $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ nous démontrerons que le déterminant

$$\Delta\begin{pmatrix} w_1,\ldots,w_m \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_m\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} (w_1^0)^{(0)}, & \ldots,(w_1^0)^{(\alpha_1-1)}; & \ldots; (w_m^0)^{(0)}, & \ldots,(w_m^0)^{(\alpha_m-1)} \\ (w_1^1)^{(0)}, & \ldots,(w_1^1)^{(\alpha_1-1)}; & \ldots; (w_m^1)^{(0)}, & \ldots,(w_m^1)^{(\alpha_m-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (w_1^{n-1})^{(0)}, & \ldots,(w_1^{n-1})^{(\alpha_1-1)}; & \ldots; (w_m^{n-1})^{(0)}, & \ldots,(w_m^{n-1})^{\alpha_m-1} \end{vmatrix}$$

où $n=\alpha_1+\ldots+\alpha_m$, est égal au produit

$$\Delta\begin{pmatrix} w_1,\ldots,w_m \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_m\end{pmatrix} = \prod_{\mu=1}^{m}(\alpha_\mu-1)!! \prod_{1\leq\varkappa<\mu\leq m}(w_\mu-w_\varkappa)^{\alpha_\varkappa\alpha_\mu} \tag{1}$$

où le symbole $k!!$ est défini en posant

$$0!!=1,$$
$$k!!=1!2!\ldots k! \qquad \text{pour} \quad k=1,2,\ldots$$

Si $\alpha_1=\ldots=\alpha_m=1$, le déterminant se réduit évidemment au *déterminant de Vandermonde.*

Convenons de désigner les colonnes par deux indices: la colonne où paraît le symbole $(x_\mu^\sigma)^\nu$ sera désignée par μ,ν. L'indice σ sera employé pour désigner les lignes. Le déterminant $\Delta = \binom{w_1,\dots,w_m}{\alpha_1,\dots,\alpha_m}$ peut être écrit en abrégé

$$\Delta = |(w_\mu^\sigma)^{(\nu)}| \qquad \begin{pmatrix}\sigma=0,\dots,n-1; \\ \mu=1,\dots,m;\ \nu=0,\dots,\alpha_\mu-1\end{pmatrix}$$

ou bien, en séparant la première ligne,

$$\Delta = \begin{vmatrix}(w_\mu^0)^{(\nu)} \\ (w_\mu^\sigma)^{(\nu)}\end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\mu=1,\dots,m;\ \nu=0,\dots,\alpha_\mu-1 \\ \sigma=1,\dots,n-1;\end{pmatrix}.$$

En retranchant de chaque ligne, sauf la première, la ligne précédente multipliée par w_1 il vient

$$\Delta = \begin{vmatrix}(w_\mu^0)^{(\nu)} \\ (w_\mu^\sigma)^{(\nu)} - w_1(w_\mu^{\sigma-1})^{(\nu)}\end{vmatrix}.$$

En vertu de l'identité

$$(w_1^\sigma)^{(\nu)} - w_1(w_1^{\sigma-1})^{(\nu)} = \nu(w_1^{\sigma-1})^{(\nu-1)} \qquad (\nu=0,1,\dots;\ \sigma=1,2,\dots)$$

le déterminant se réduit au déterminant à $n-1$ lignes et $n-1$ colonnes:

$$\Delta = (\alpha_1-1)!\,|(w_1^{\sigma-1})^{(\varrho-1)}, (w_\mu^\sigma)^{(\nu)} - w_1(w_\mu^{\sigma-1})^{(\nu)}|$$
$$\begin{pmatrix}\sigma=1,\dots,n-1; \\ \varrho=1,\dots,\alpha_1-1; \\ \mu=2,\dots,m;\ \nu=0,\dots,\alpha_\mu-1\end{pmatrix}$$

lorsque $\alpha_1 \geqslant 2$ et

$$\Delta = |(w_\mu^\sigma) - w_1(w_\mu^{\sigma-1})^{(\nu)} \quad \begin{pmatrix}\sigma=1,\dots,n-1; \\ \mu=2,\dots,m;\ \nu=0,\dots,\alpha_\mu-1\end{pmatrix}$$

lorsque $\alpha_1=1$.

Les éléments de la colonne $\mu, 0$ ($\mu \geqslant 2$) peuvent s'écrire

$$w_\mu^\sigma - w_1 w_\mu^{\sigma-1} = (w_\mu - w_1) w_\mu^{\sigma-1} = (w_\mu - w_1)(w_\mu^{\sigma-1})^{(0)}$$

on peut donc tirer le facteur $(w_\mu - w_1)$ avant le déterminant et les éléments de la colonne $\mu, 0$ deviendront $(w_\mu^{\sigma-1})^{(0)}$.

Si $\alpha_\mu \geqslant 2$, retranchons cette colonne de la colonne $\mu, 1$:

$$(w_\mu^\sigma)^{(1)} - w_1(w_\mu^{\sigma-1})^{(1)} - (w_\mu^{\sigma-1})^{(0)} = \sigma w_\mu^{\sigma-1} - (\sigma-1) w_1 w_\mu^{\sigma-2} - w_\mu^{\sigma-1} =$$
$$= (w_\mu - w_1)(\sigma-1) w_\mu^{\sigma-2} = (w_\mu - w_1)(w_\mu^{\sigma-1})^{(1)};$$

on peut donc tirer le facteur $(w_\mu - w_1)$ avant le déterminant et les éléments de la colonne $\mu,1$ deviendront $(w_\mu^{\sigma-1})^{(1)}$.

Si $\alpha_\mu \geqslant 3$, retranchons cette colonne, multipliée par 2, de la colonne $\mu,2$:

$$\begin{aligned}&(w_\mu^\sigma)^{(2)} - w_1(w_\mu^{\sigma-1})^{(2)} - 2)(w_\mu^{\sigma-1})^{(1)} =\\ &= \sigma(\sigma-1)w_\mu^{\sigma-2} - (\sigma-1)(\sigma-2)w_1 w_\mu^{\sigma-3} - 2(\sigma-1)w_\mu^{\sigma-2} =\\ &= (w_\mu - w_1)(\sigma-1)(\sigma-2)w_\mu^{\sigma-3} = (w_\mu - w_1)(w_\mu^{\sigma-1})^{(2)};\end{aligned}$$

en tirant le facteur $(w_\mu - w_1)$ avant le déterminant, les éléments de la colonne $\mu,2$ deviendront $(w_\mu^{\sigma-1})^{(2)}$.

Si $\alpha_\mu \geqslant 4$, on retranchera cette colonne, multipliée par 3, de la colonne $\mu,3$ etc. En repétant ce procédé un nombre convenable de fois le déterminant Δ deviendra

$$\Delta = (\alpha_1 - 1)! \prod_{\mu=2}^{m} (w_\mu - w_1)^{\alpha_\mu} \Delta\binom{w_1, \dots, w_m}{\alpha_1 - 1, \dots, \alpha_m}$$

lorsque $\alpha_1 \geqslant 2$ et

$$\Delta = \prod_{\mu=2}^{m} (w_\mu - w_1)^{\alpha_\mu} \Delta\binom{w_2, \dots, w_m}{\alpha_2, \dots, \alpha_m} \tag{2}$$

lorsque $\alpha_1 = 1$. Par l'induction on trouve pour $\alpha_1 \geqslant 2$

$$\Delta = 1!2!\dots(\alpha_1 - 1)! \prod_{\mu=2}^{m} (w_\mu - w_1)^{\alpha_1 \alpha_\mu} \Delta\binom{w_2, \dots, w_m}{\alpha_2, \dots, \alpha_m}. \tag{3}$$

Les deux formules (2) et (3) peuvent s'écrire en une seule

$$\Delta\binom{w_1, \dots, w_m}{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = (\alpha_1 - 1)!! \prod_{\mu=2}^{m} (w_\mu - w_1)^{\alpha_1 \alpha_\mu} \Delta\binom{w_2, \dots, w_m}{\alpha_2, \dots, \alpha_m}.$$

L'itération de cette formule conduit à la formule suivante

$$\Delta\binom{w_1, \dots, w_m}{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = (\alpha_1 - 1)!! \dots (\alpha_{m-1} - 1)!! \prod_{1 \leqslant \varkappa < \mu \leqslant m} (w_\mu - w_\varkappa)^{\alpha_\varkappa \alpha_\mu} \Delta\binom{w_m}{\alpha_m}.$$

Or, il est facile de voir que $\Delta\binom{w_m}{\alpha_m} = (\alpha_m - 1)!!$, ce qui achève la démonstration de la formule (1).

COVERING SPACES AND CARTESIAN PRODUCTS

By Tudor Ganea (Bucarest)

1. Let $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ denote an arbitrary family, of any given potency, of connected, locally connected topological spaces; let $E = PE_\lambda$ denote its cartesian product, with the usual topology [1]).

The main purpose of this paper is the proof of the following results:

1.1. Theorem. *Necessary and sufficient for the simple connectedness of the space E, is the simple connectedness of each space E_λ.*

1.2. Theorem. *Necessary and sufficient for the space E to possess a simply connected covering space, is that:*

Each space E_λ possess a simply connected covering space $(\tilde{E}_\lambda, f_\lambda)$ and almost all the E_λ, i. e. all except a finite number, be simply connected.

Under these assumptions, letting $\tilde{E} = P\tilde{E}_\lambda$, $pr_\lambda : \tilde{E} \to \tilde{E}_\lambda$ and $f = \{f_\lambda pr_\lambda\}$, $(\tilde{E}, f)$ is a simply connected covering space of E.

1.3. Theorem. *Necessary and sufficient for the unicoherence of the space E, is the unicoherence of each space E_λ.*

Our main tool, throughout the whole paper, is the theory of covering spaces, as developed in [4], p. 40-60. The link between covering spaces and unicoherence will be given by the

1.4. Theorem. *Necessary and sufficient for the connected, locally connected space S to be multicoherent, is that:*

---

[1]) All the necessary definitions are given in the next section of the paper. Numbers in brackets refer to the bibliography at the end of the paper.

S possess a regular cyclic infinite covering space $(\tilde{S},g)$, *such that* $S=S_1\cup S_2$, *where* S_1 *and* S_2 *are open, connected subsets of* S, *both evenly covered by* $(\tilde{S},g)$.

For finite products, the sufficiency part of (1.1) and (1.2) has already been established in [4] (p. 45, P. 1 and p. 52, L. 2). A proof thereof, suitably extended for arbitrary products, yields our Lemma (3.1), which is fundamental for the treatment we give of both our cases: the simply connected, as well as the unicoherent one. Since "pathwise simple connectedness"[2]) and "simple connectedness", defined in terms of covering spaces, are not even equivalent over the range of compact, arcwise and locally arcwise connected subsets of the euclidian 3-space, [8], our Theorems (1.1) and (1.2) do not overlap with any classical results, for instance those in [9].

Under additional restrictions, particular cases of (1.3) have been proved long ago ([2], p. 204, T. 47; [10], p. 248; [5], p. 72, T. 5). The method of proof is essentially the same in all of them: it leans heavily on the technique of mappings into the circle. Therefore, a fundamental role is assigned to the normality of spaces under consideration.

However, beyond the range of normal, arcwise connected spaces, no general theorem concerning the unicoherence of cartesian products is at hand: this becomes fairly clear through a series of examples in a recent paper ([11], p. 431-432), where some properties of unicoherent, locally connected spaces are investigated, in the absence of any separation axiom.

2. For convenience, we recall here some definitions.

2.1. A *topological space* is a set of points in which open subsets have been selected, so as to satisfy the usual axioms ([3], p. 1). *No separation axiom is assumed.* A *neighbourhood* of a subset is an open set containing that subset. No distinction is made between a point and the set consisting of that single point. Let A be a subset of the topological space E. A point is *adherent* to A if each of its neighbourhoods meets A; it is *interior* to A if it has a neighbourhood entirely contained in A ([3], p. 5-6). The set of all points adherent (interior) to A, is denoted as usual by $\overline{A}$ $(\mathring{A})$; finally let $\mathrm{Fr}(A)=\overline{A}-\mathring{A}$. Subspaces are taken with the *relative topology* ([3], p. 14.) No arcwise connectedness is assumed: a space is *connected* if it is

[2]) An arcwise connected topological space is termed *pathwise simply connected* if each of its closed paths is deformable into a point.

not the union of two non-void disjoint open sets; it is *locally connected* when each neighbourhood of any point contains a connected neighbourhood of that point.

Let $\varphi: X \to Y$ be a transformation and $A \subset X$; the *contraction* ψ of φ to A is the transformation of A into Y defined by $\psi(a) = \varphi(a)$ for each $a \in A \subset X$. If X is a space and φ is onto, the *strongest topology* in Y for which φ is continuous is obtained by specifying $V \subset Y$ to be open if and only if $\varphi^{-1}(V)$ is open in X ([3], p. 52). $\mathfrak{P}(E)$ denotes the family of all the subsets of E.

Let $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ be an arbitrary family of topological spaces; its *cartesian product* PE_λ is the set of all the collections $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ with $x_\lambda \in E_\lambda$. Its customary topology is defined in terms of a base consisting of all the sets PU_λ, with each U_λ open in E_λ and $U_\lambda \neq E_\lambda$ for at most a finite set of subscripts ([3], p. 43). For $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in PE_\lambda = E$, x_μ is also denoted by $pr_\mu(x)$: thus pr_μ is a single valued, continuous and open transformation of E onto E_μ ([3], p. 43, 46). The subset PX_λ of PE_λ, defined by $X_\mu = E_\mu$ and $X_\lambda = x_\lambda$ for $\lambda \neq \mu$, is denoted by $E_\mu(x)$; with the relative topology it is homeomorphic to E_μ.

2.2. Let $f: \tilde{E} \to E$ be continuous, into. A subset $A \subset E$ is termed *evenly covered* by $(\tilde{E}, f)$ if $f^{-1}(A)$ is not empty and each component of $f^{-1}(A)$ is topologically mapped by f onto A ([4], p. 40, D. 2). A connected subset C of a set A evenly covered by $(\tilde{E}, f)$, is itself evenly covered by $(\tilde{E}, f)$; the components of $f^{-1}(C)$ are its intersections with the components of $f^{-1}(A)$ ([4], p. 41, L. 2). A *covering space* of the topological space E is a pair $(\tilde{E}, f)$, formed by a connected, locally connected space $\tilde{E}$ and a continuous map f of $\tilde{E}$ onto E, such that each point of E possess a neighbourhood evenly covered by $(\tilde{E}, f)$ ([4], p. 40, D. 3); f is then a local homeomorphism ([4], p. 41), hence E is itself connected and locally connected. Let $(\tilde{E}, f)$ be a covering space of E, A a connected, locally connected subset of E, $\tilde{A}$ an arbitrary component of $f^{-1}(A)$ and g the contraction of f to $\tilde{A}$; $(\tilde{A}, g)$ is then a covering space of A ([4], p. 42, L. 5). The covering space $(\tilde{E}, f)$ of E is *trivial* whenever f is univalent, hence a homeomorphism; if $\tilde{E}$ contains an open set univalently mapped by f onto E, then $(\tilde{E}, f)$ is trivial ([4], p. 45, L. 1). A space is termed *simply connected* if it is connected, locally connected and each of its covering spaces is trivial ([4], p. 44, D. 1); a simply connected subspace of a space E is evenly covered by any covering space of E. Let $(\tilde{E}, f)$ be a covering space of E:

2.3. *If A and B are „open" subsets of E, both connected and evenly covered by $(\tilde{E}, f)$, then $A \cup B$ is evenly covered by $(\tilde{E}, f)$, provided $A \cap B$ is non-empty and connected.*

With „closed, locally connected" instead of „open", this is proved in [4] (p. 57, L. 1), and quite a similar argument yields our (2.3).

2.4. Although it is assumed throughout [4], the Hausdorff separation axiom for topological spaces is not required in the theory of covering spaces, there developed, except perhaps in L. 1, p. 51, which we proceed now to derive in the absence of any separation assumption:

Let X be a connected space, $(\widetilde{Y}, g)$ a covering space of the connected, locally connected space Y, φ' and φ'' two continuous maps of X into $\widetilde{Y}$, satisfying $g\varphi' = g\varphi''$ on the whole of X. If, for at least one point $x_0 \in X$, $\varphi'(x_0) = \varphi''(x_0)$, then $\varphi' = \varphi''$ holds on the whole of X ([4], p. 51, L. 1).

In fact, let A be the set of all those $a \in X$ with $\varphi'(a) = \varphi''(a)$: $x_0 \in A$. Let $b \in X$ be adherent to A; then $g\varphi'(b) = g\varphi''(b) \in V$, where V is open in Y and evenly covered by $(\widetilde{Y}, g)$. Be $\widetilde{V}'$, $\widetilde{V}''$ the components of $g^{-1}(V)$ containing $\varphi'(b), \varphi''(b)$. The continuity of both φ' and φ'' implies the existence of an open $W \ni b$ with $\varphi'(W) \subset \widetilde{V}'$, $\varphi''(W) \subset \widetilde{V}''$. There is an $a \in A \cap W$, hence $\widetilde{V}' \ni \varphi'(a) = \varphi''(a) \in \widetilde{V}''$ and so $\widetilde{V}' = \widetilde{V}'' = \widetilde{V}$. For any $x \in W$, $\varphi'(x) \in \widetilde{V} \ni \varphi''(x)$ and $g\varphi'(x) = g\varphi''(x)$; since g is univalent on $\widetilde{V}$, it results $\varphi'(x) = \varphi''(x)$, hence $x \in A$ and $b \in W \subset A$. A is thus non-empty, open and closed in the connected X, i. e. $A = X$.

2.5. Previous results on covering spaces and retracts [1], which have been proved in [6] under separation assumptions, are now valid and will be used when no separation assumption holds:

Let A be a retract of the space E; if E is simply connected, or possesses a simply connected covering space $(\widetilde{E}, f)$, so does A; in the latter case, any component $\widetilde{A}$ of $f^{-1}(A)$ is a retract of $\widetilde{E}$, and with g denoting the contraction of f to $\widetilde{A}$, $(\widetilde{A}, g)$ is a simply connected covering space of A ([6]).

2.6. Let $(\widetilde{E}, f)$ be a covering space of E; if $f(\widetilde{a}_1) = f(\widetilde{a}_2)$, there exists at most one homeomorphism η of $\widetilde{E}$ onto itself, satisfying $\eta(\widetilde{a}_1) = \widetilde{a}_2$ and $f\eta = f$ on $\widetilde{E}$. If for any pair $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2$, with $f(\widetilde{a}_1) = f(\widetilde{a}_2)$, there exists such a homeomorphism, $(\widetilde{E}, f)$ is termed *regular*; if the group of those homeomorphisms η, that satisfy $f\eta = f$ on $\widetilde{E}$, is isomorphic to the additive group of integers, the covering space $(\widetilde{E}, f)$ is termed *cyclic infinite*.

3. Let $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ denote an arbitrary family of connected, locally connected topological spaces; let $E = PE_\lambda$. Then

3.1. Lemma. *Let $(\widetilde{E}, f)$ be a covering space of E, and let $U = PU_\lambda$ be open in E and evenly covered by $(\widetilde{E}, f)$. For a fixed $\mu \in \Lambda$, assume $E_\mu(x)$ to be evenly covered by $(\widetilde{E}, f)$ for any $x \in E$. Then, with $V_\mu = E_\mu$ and $V_\lambda = U_\lambda$ for $\lambda \neq \mu$, $V = PV_\lambda$ is again evenly covered by $(\widetilde{E}, f)$.*

Proof[3]). E and V are connected and locally connected ([3], p. 72, P. 6 and p. 75, P. 11). V is open in E and $U \subset V$. For any $x \in E$:

$x \in E_\mu(x)$ and $x \in E_\mu(y) \cap E_\mu(z)$ implies $E_\mu(y) = E_\mu(x) = E_\mu(z)$.

[3]) Modelled after the one in [4] (p. 45, P. 1).

Call *fiber* any component of any set $f^{-1}[E_\mu(x)]$, $x \in E$. Since each $E_\mu(x)$ is by assumption evenly covered by $(\widetilde{E},f)$, any fiber is topologically mapped by f onto some $E_\mu(x)$.

Let $\widetilde{V}$ be an arbitrary component of $f^{-1}(V)$ and $\widetilde{U}$ a component of $f^{-1}(U)$, contained in $\widetilde{V}$; $\widetilde{U}$ and $\widetilde{V}$ are open in the locally connected $\widetilde{E}$, and $(\widetilde{V},f)$, with f contracted to $\widetilde{V}$, is a covering space of V ([4], p. 42, L. 5). Let Γ be the union of all the fibers meeting $\widetilde{U}$. We shall consecutively prove that:

i) Γ is univalently mapped by f onto V;

ii) $\widetilde{U}\subset\Gamma\subset\widetilde{V}$;

iii) Γ is open in $\widetilde{E}$.

By [4] (p. 45, L. 1), f is then a homeomorphism of $\widetilde{V}$ onto V, which is thus evenly covered by $(\widetilde{E},f)$.

i) Let $\widetilde{x} \in \Gamma$, hence $\widetilde{x} \in F$, where F is a fiber meeting $\widetilde{U}$: $\widetilde{y} \in \widetilde{U}\cap F$. Notice that $f(\widetilde{U})=U$ and $f(F)=E_\mu(z)$ for some $z \in E$. Then:

$$x=\{x_\lambda\}=f(\widetilde{x}) \in E_\mu(z) \quad \text{and} \quad y=\{y_\lambda\}=f(\widetilde{y}) \in U\cap E_\mu(z),$$

hence $x_\lambda=y_\lambda \in U_\lambda=V_\lambda$ for $\lambda\neq\mu$. From $x_\mu \in E_\mu=V_\mu$ follows $x \in V$, i. e. $f(\Gamma)\subset V$.

Let $x=\{x_\lambda\} \in V$; take a $y_\mu \in U_\mu$ and let $y=\{y_\lambda\}$, with $y_\lambda=x_\lambda$ for $\lambda\neq\mu$. $V_\lambda=U_\lambda$, for $\lambda\neq\mu$, implies $y \in U$ and so there is a $\widetilde{y} \in \widetilde{U}$ with $f(\widetilde{y})=y \in E_\mu(y)$. Be F the component of the set $f^{-1}[E_\mu(y)]$, containing $\widetilde{y}$. Since F is a fiber, $\widetilde{y} \in \widetilde{U}\cap F$ implies $F\subset\Gamma$, and since $x \in E_\mu(y)$, there is an $\widetilde{x} \in F\subset\Gamma$ with $f(\widetilde{x})=$ $=x$, i. e. $f(\Gamma)\supset V$.

Be $\widetilde{x},\widetilde{y} \in \Gamma$ with $f(\widetilde{x})=f(\widetilde{y})=z=\{z_\lambda\}$. There exists fibers X and Y, such that: $\widetilde{x} \in X$, $\widetilde{y} \in Y$, $\xi \in \widetilde{U}\cap X$, $\eta \in \widetilde{U}\cap Y$.

$z=f(\widetilde{x}) \in f(X)=E_\mu(s)$ and $z=f(\widetilde{y}) \in f(Y)=E_\mu(t)$ imply $E_\mu(s)=$ $=E_\mu(z)=E_\mu(t)$ and $\xi,\eta \in X\cup Y\subset f^{-1}[E_\mu(z)]$. From $f(\xi),f(\eta) \in U\cap$ $\cap E_\mu(z)$ follows $U\cap E_\mu(z)=PW_\lambda$ with $W_\mu=E_\mu$ and $W_\lambda=z_\lambda$ for $\lambda\neq\mu$; thus $U\cap E_\mu(z)$ is not empty and connected. Since f is topological on $\widetilde{U}$, the set $\widetilde{U}\cap f^{-1}[E_\mu(z)]$ is topologically mapped by f onto $U\cap E_\mu(z)$. As such, it is connected, hence contained in a component F of $f^{-1}[E_\mu(z)]$. Since X, Y, F are fibers, $X=F=Y$ is implied by

$$\xi \in X \cap \tilde{U} \cap f^{-1}[E_\mu(z)] \subset F \supset f^{-1}[E_\mu(z)] \cap \tilde{U} \cap Y \ni \eta.$$

The univalence of f on F, $\tilde{x}, \tilde{y} \in F$ and $f(\tilde{x})=f(\tilde{y})$ imply $\tilde{x}=\tilde{y}$.

ii) Any $\tilde{x} \in \tilde{E}$ is obviously contained in some fiber, hence $\tilde{U} \subset \Gamma$. Since $\tilde{U}$ and any fiber are connected, $\tilde{U} \subset \Gamma$ implies the connectedness of Γ; $f(\Gamma)=V$ implies that Γ is contained in a component of $f^{-1}(V)$, and from $\tilde{U} \subset \tilde{V} \cap \Gamma$ follows finally $\Gamma \subset \tilde{V}$.

iii) Let F be an arbitrary fiber contained in Γ. Our aim is to prove $F=F \cap \mathring{\Gamma}$, where $\mathring{\Gamma}$ is the interior of Γ in $\tilde{E}$. From

$$\Gamma = \bigcup_{F \subset \Gamma} F = \bigcup_{F \subset \Gamma} F \cap \mathring{\Gamma} \subset \mathring{\Gamma}$$

follows then, that Γ is open in $\tilde{E}$. The proof of $F=F \cap \mathring{\Gamma}$ will be accomplished by showing $F \cap \mathring{\Gamma}$ to be non-empty, open and closed in the connected subspace F.

$F \subset \Gamma$ yields a $\tilde{c} \in F \cap \tilde{U}$; $\tilde{U}$ is open in $\tilde{E}$, hence $\tilde{U} \subset \Gamma$ implies $\tilde{U} \subset \mathring{\Gamma}$, $\tilde{c} \in F \cap \mathring{\Gamma}$: $F \cap \mathring{\Gamma}$ is not empty [4]) and open in F.

Let $\tilde{a} \in F$ be adherent to $F \cap \mathring{\Gamma}$, and let $a=\{a_\lambda\}=f(\tilde{a})$. Be $N=PN_\lambda \ni a$ open in E, evenly covered by $(\tilde{E}, f)$, and let $\tilde{N}$ denote the component of $f^{-1}(N)$ containing $\tilde{a}$. Since $\tilde{N}$ is open in the locally connected $\tilde{E}$, there is a $\tilde{b} \in \tilde{N} \cap F \cap \mathring{\Gamma}$ and

$$b=\{b_\lambda\}=f(\tilde{b}) \in f(\tilde{N} \cap \mathring{\Gamma});$$

this last set is open in E, hence contains a „prismatic" neighbourhood $M=PM_\lambda$ containing b. With $Q_\lambda=M_\lambda$ for $\lambda \neq \mu$ and $Q_\mu=N_\mu$, $Q=PQ_\lambda$ is open in E, hence $\tilde{N} \cap f^{-1}(Q)$ is open in $\tilde{E}$. $a_\mu \in N_\mu=Q_\mu$ and $\tilde{a}, \tilde{b} \in F$ implies $a_\lambda=b_\lambda \in M_\lambda=Q_\lambda$ for $\lambda \neq \mu$; thus $a \in Q$, hence $\tilde{a} \in \tilde{N} \cap f^{-1}(Q)$. Let $\tilde{x} \in \tilde{N} \cap f^{-1}(Q)$, $x=\{x_\lambda\}=f(\tilde{x}) \in N \cap Q$, $y_\lambda=x_\lambda$ for $\lambda \neq \mu$ and $y_\mu \in M_\mu$; then $x \in E_\mu(y)$ and $y=\{y_\lambda\} \in M \subset$ $\subset f(\tilde{N} \cap \mathring{\Gamma})$, hence $y=f(\tilde{y})$ for some $\tilde{y} \in \tilde{N} \cap \mathring{\Gamma}$. Since N is evenly covered by $(\tilde{E}, f)$ the contraction of f to $\tilde{N}$ is a homeomor-

---

[4]) Our argument is simpler than one used for the same purpose in [4], p. 46.

phism; thus $\widetilde{N}\cap f^{-1}[E_\mu(y)]$ is topologically mapped by f onto $N\cap E_\mu(y)=PW_\lambda$, where $W_\mu=N_\mu$ and $W_\lambda=x_\lambda$ for $\lambda\neq\mu$, as implied by $x\in N\cap E_\mu(y)$. As a consequence, $N\cap E_\mu(y)$ is connected and so is its topological image $\widetilde{N}\cap f^{-1}[E_\mu(y)]$, which is thus contained in some fiber Y. If a fiber meets Γ, it is entirely contained in Γ, hence

$$\widetilde{y}\in\widetilde{N}\cap f^{-1}[E_\mu(y)]\subset Y \quad\text{and}\quad \widetilde{y}\in\mathring{\Gamma}\subset\Gamma$$

imply $Y\subset\Gamma$. It follows

$$\widetilde{x}\in\widetilde{N}\cap f^{-1}[E_\mu(y)]\subset Y\subset\Gamma \quad\text{and thus}\quad \widetilde{N}\cap f^{-1}(Q)\subset\Gamma.$$

Since $\widetilde{N}\cap f^{-1}(Q)$ is open in $\widetilde{E}$, $\widetilde{a}\in\widetilde{N}\cap f^{-1}(Q)\subset\Gamma$ implies $\widetilde{a}\in\mathring{\Gamma}$, hence $\widetilde{a}\in F\cap\mathring{\Gamma}$ and (3.1) is proved.

3.2. Corollary. *Let $(\widetilde{E},f)$ be a covering space of E, and assume $E_\lambda(x)$ be evenly covered by $(\widetilde{E},f)$, for each $\lambda\in\Lambda$ and each $x\in E$. Then $(\widetilde{E},f)$ is trivial.*

This results by repeated application of (3.1), starting with a „prismatic" neighbourhood $U=PU_\lambda$, evenly covered by $(\widetilde{E},f)$, where $U_\lambda=E_\lambda$ for almost all the subscripts λ.

4. We are now ready for the

Proof of (1.1) and (1.2) (cf. also [7]). Necessary and sufficient for E to be connected and locally connected, is that each E_λ be so ([3], p. 72, P. 6 and p. 75, P. 11). For each $\lambda\in\Lambda$ and each $x\in E$, E_λ is homeomorphic to the subspace $E_\lambda(x)$ of E, which is in an obvious way a retract of E.

Since a simply connected subspace of E is evenly covered by any covering space of E, (1.1) follows readily from (2.5) and (3.2).

Suppose now E to admit a simply connected covering space $(\widetilde{E},f)$: by (2.5) so does each $E_\lambda(x)$, hence each E_λ. Let $U=PU_\lambda$, with $U_\lambda=E_\lambda$ for $\lambda\neq\lambda_1,\dots,\lambda_n$, be open in E, evenly covered by $(\widetilde{E},f)$. For $x\in U$ and $\lambda\neq\lambda_1,\dots,\lambda_n$, $E_\lambda(x)\subset U$ and since it is connected, by [4] (p. 41, L. 2), $E_\lambda(x)$ is evenly covered by $(\widetilde{E},f)$. By (2.5) any component $\widetilde{E}_\lambda(x)$ of $f^{-1}[E_\lambda(x)]$ is simply connected. Since f is a homeomorphism of $\widetilde{E}_\lambda(x)$ onto $E_\lambda(x)$, this set, hence also E_λ, is simply connected for $\lambda\neq\lambda_1,\dots,\lambda_n$.

Conversely, for each $\lambda \in \Lambda$, let $(\widetilde{E}_\lambda, f_\lambda)$ be the simply connected covering space of E_λ, and assume E_λ simply connected for $\lambda \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_n$. By (1.1) $\widetilde{E} = P\widetilde{E}_\lambda$ is simply connected and $f = \{f_\lambda pr_\lambda\}$ maps continuously $\widetilde{E}$ onto E. With $U_\lambda = E_\lambda$ for $\lambda \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, and U_{λ_i} open in E_{λ_i}, evenly covered by $(\widetilde{E}_{\lambda_i}, f_{\lambda_i})$, for $i = 1, \ldots, n$, $U = PU_\lambda$ is easily seen to be open in E and evenly covered by $(\widetilde{E}, f)$.

5. As is well known [2 and 5], a connected space S is *unicoherent*, whenever $S_1 \cap S_2$ is connected, whatever be the „closed" connected subsets S_1, S_2 of S, with $S = S_1 \cup S_2$. Without any separation axiom, it has been shown in [11] that for locally connected spaces, the term „closed" may be replaced by „open". A space which is not unicoherent, is termed *multicoherent*. We give now the

Proof of (1.4). Assume S be multicoherent. Then:

$$S = S_1 \cup S_2, \quad S_1 \cap S_2 = G_1 \cup G_2, \quad G_1 \cap G_2 = 0,$$

where S_1, S_2 are connected, G_1, G_2 are non-empty and all of them are open ([11], p. 432, T. 3) in S. Let N denote the additive group of integers, taken with the discrete topology, and let Δ be the set of the two digits 1 and 2. Let further

$$Z = \bigcup_{i \in \Delta,\, n \in N} S_i \times (2n+i) \subset S \times N$$

be taken with the relative topology. For any $z \in Z$, uniquely determined $i \in \Delta, n \in N$ and $x \in S_i$ exist, such that $z = x \times (2n+i)$.

If $x \bar{\in} S_1 \cap S_2$, let $\varphi(z) = \{z\} \in \mathfrak{P}(Z)$; if $x \in S_1 \cap S_2 = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = 0$ implies the existence of a single $l \in \Delta$ with $x \in G_l$; let then $\varphi(z) = \{z; x \times [2n+i+(-1)^{i+l}]\} \in \mathfrak{P}(Z)$. Thus has been defined a single valued transformation φ of Z into $\mathfrak{P}(Z)$, and for each $z \in Z$, $z \in \varphi(z)$ while $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ holds if and only if $z_1 \in \varphi(z_2)$.

Topologize $\widetilde{S} = \varphi(Z)$ with the strongest topology for which φ is continuous. For any $U_i \subset S_i$, $i \in \Delta$ and $n \in N$:

$$\varphi^{-1}\varphi[U_i \times (2n+i)] =$$
$$= [U_i \times (2n+i)] \cup \bigcup_{l \in \Delta} \{(G_l \cap U_i) \times [2n+i+(-1)^{i+l}]\}$$

which shows, taking U_i open in S, that φ is an open map.

As a consequence, since the open subset Z of $S\times N$ is locally connected, so is $\widetilde{S}=\varphi(Z)$. Each $\varphi[S_i\times(2n+i)]$ is connected, and, as easily seen so is also $\widetilde{S}$. For $z=x\times(2n+i)\in Z$, let $x=\psi(z)$: this defines a single valued, continuous and open map ψ of Z onto S. Let finally: $g=\psi\varphi^{-1}$. Clearly g is a single valued transformation of $\widetilde{S}$ onto S, and since ψ and φ are both continuous and open, so is g. For $i\in\Delta$, the definition of φ implies:

$$g^{-1}(S_i)=\varphi\psi^{-1}(S_i)=\bigcup_{n\in N}\varphi[S_i\times(2n+i)].$$

For fixed $i\in\Delta$, the sets $\varphi[S_i\times(2n+i)]$, $n\in N$, are connected, open in $\widetilde{S}$, and no two of them meet: as such they are the components of $g^{-1}(S_i)$. Since each of them is univalently mapped by g onto S_i, each component of $g^{-1}(S_i)$ is topologically mapped by g onto S_i; thus $(\widetilde{S},g)$ is a covering space of S and each S_i, $i\in\Delta$, is evenly covered by $(\widetilde{S},g)$.

For arbitrary $\widetilde{x}\in\widetilde{S}$, $x\times(2n+i)\in\varphi^{-1}(\widetilde{x})$ and $k\in N$, let

$$\xi_k(\widetilde{x})=\varphi\{x\times[2(n+k)+i]\}.$$

Since

$$\varphi[x'\times(2n'+i')]=\varphi[x''\times(2n''+i'')]$$

and $k\in N$ imply

$$\varphi\{x'\times[2(n'+k)+i']\}=\varphi\{x''\times[2(n''+k)+i'']\},$$

ξ_k is, for any fixed $k\in N$, a single valued transformation of $\widetilde{S}$ into itself, satisfying for each $\widetilde{x}\in\widetilde{S}$:

$$g\,\xi_k(\widetilde{x})=\psi\varphi^{-1}\varphi\{x\times[2(n+k)+i]\}=x=\psi\varphi^{-1}(\widetilde{x})=g(\widetilde{x}).$$

For $h,k\in N$ and any $\widetilde{x}\in\widetilde{S}$:

$$(*)\quad\begin{cases}\xi_h\xi_K(\widetilde{x})=\xi_h\varphi\{x\times[2(n+k)+i]\}=\\ \qquad\qquad=\varphi\{x\times[2(n+k+h)+i]\}=\xi_{k+h}(\widetilde{x}),\\ \xi_0(\widetilde{x})=\varphi\{x\times[2n+i]\}=\widetilde{x},\\ \xi_h(\widetilde{x})=\varphi\{x\times[2(n+h)+i]\}\neq\\ \qquad\qquad\neq\varphi\{x\times[2(n+k)+i]\}=\xi_k(\widetilde{x})\quad\text{if}\quad h\neq k.\end{cases}$$

As a consequence, $\xi_k^{-1}=\xi_{-k}$ hence each ξ_k is a univalent transformation of $\widetilde{S}$ onto itself. Since φ is continuous and open, each ξ_k is open, and since the same holds for $\xi_k^{-1}=\xi_{-k}$, each ξ_k is a homeomorphism of $\widetilde{S}$ onto itself. For $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2 \in \widetilde{S}$ with $g(\widetilde{a}_1)=g(\widetilde{a}_2)$, there exist $x \in S$, $i \in \Delta$ and $m,n \in N$ such that

$$\varphi[x\times(2m+i)]=\widetilde{a}_1, \quad \varphi[x\times(2n+i)]=\widetilde{a}_2.$$

With $k=n-m \in N$, the regularity of $(\widetilde{S},g)$ follows now from:

$$\xi_k(\widetilde{a}_1)=\varphi\{x\times[2(m+n-m)+i]\}=\widetilde{a}_2.$$

Let $\mathfrak{G}$ be the group of covering homeomorphisms of $(\widetilde{S},g)$. Let $\xi \in \mathfrak{G}$, $\widetilde{a} \in \widetilde{S}$, $\widetilde{b}=\xi(\widetilde{a})$ hence $g(\widetilde{a})=g(\widetilde{b})$; as above there is a $k \in N$ with $\xi_k(\widetilde{a})=\widetilde{b}$ and $g\xi_k=g=g\xi$ holds on $\widetilde{S}$; (2.4) implies $\xi_k=\xi$ on $\widetilde{S}$, and from (*) follows that $k\to\xi_k$ defines an isomorphism of N onto $\mathfrak{G}$.

Conversely, by (2.3) the unicoherence of S implies the triviality of any covering space $(\widetilde{S},g)$ of S, such that $S=S_1\cup S_2$, with S_1 and S_2 open, connected and evenly covered by $(\widetilde{S},g)$.

5.1. Corollary. *A simply connected* ([4], p. 44, D. 1) *space is unicoherent.*

6. Before we prove (1.3), we need the

6.1. Lemma. *Let S be a connected, locally connected space, and let $(\widetilde{S},g)$ be a covering space of S. Assume $S=\bigcup W_\alpha$, where each W_α is connected, open in S, while the set $\{\alpha\}$ is of arbitrary potency. If the union of any finite, connected*[5]) *aggregate of sets W_α is evenly covered by $(\widetilde{S},g)$, this covering space is trivial.*

Proof. For any two points $\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2 \in \widetilde{S}$ there is a finite „chain" $(\widetilde{a}_0,\widetilde{W}_{\alpha_0},\widetilde{a}_1,\ldots,\widetilde{a}_l,\widetilde{W}_{\alpha_l},\widetilde{a}_{l+1},\ldots,\widetilde{a}_r,\widetilde{W}_{\alpha_r},\widetilde{a}_{r+1})$ such that: $\widetilde{a}_0=\widetilde{x}_1$, $\widetilde{a}_{r+1}=\widetilde{x}_2$, $\widetilde{a}_l \in \widetilde{W}_{\alpha_l} \ni \widetilde{a}_{l+1}$, $g(\widetilde{W}_{\alpha_l})=W_{\alpha_l}$ and $\widetilde{W}_{\alpha_l}$ is a component of $g^{-1}(W_{\alpha_l})$, for $l=0,\ldots,r$. In fact, the set H of all those points of $\widetilde{S}$, that may be „joined" to $\widetilde{a}_0$ by such chains, is readily seen to be open and closed in the connected $\widetilde{S}$; $\widetilde{a}_0 \in H$ implies then $H=\widetilde{S}$. Assume now $g(\widetilde{x}_1)=g(\widetilde{x}_2)$; then $\{W_{\alpha_0},\ldots,W_{\alpha_r}\}$ is

---

[5]) That is, under suitable ordering, consecutive sets intersect.

clearly a finite, connected aggregate, hence $W=\bigcup_{l=0}^{r} W_{\alpha_l}$ is evenly covered by $(\tilde{S},g)$. A simple induction yields $\tilde{a}_{r+1}\in\tilde{W}$, $\tilde{W}$ denoting the component of $g^{-1}(W)$ containing $\tilde{a}_0$; the univalence of g on $\tilde{W}$ finally implies $\tilde{x}_1=\tilde{x}_2$.

6.2. Lemma. *If A and B are open, connected, intersecting subsets of a connected, locally connected, unicoherent space S, then $Fr(A)\cap Fr(B)\cap Fr(A\cap B)=0$ implies the connectedness of $A\cap B$.*

This follows from [11] (p. 429, T. 1 (iv) and p. 435-436, C. 2).

6.3. Lemma. *Let $(\tilde{S},g)$ be a covering space of the connected, locally connected, unicoherent space S. Let $S=U\cup V$, where U and V are open. Suppose each component of U and each component of V be evenly covered by $(\tilde{S},g)$. Then this covering space is trivial.*

Proof. Let $\{W_\alpha\}$ denote the family of all the components of the two sets U and V; then $S=\bigcup W_\alpha$ and each W_α is connected, open in the locally connected S and evenly covered by $(\tilde{S},g)$. On account of (6.1) it suffices to prove that the union of any finite, connected aggregate $\{W_{\alpha_0},\ldots,W_{\alpha_r}\}$ of sets W_α, is evenly covered by $(\tilde{S},g)$.

By assumption, W_{α_0} is evenly covered by $(\tilde{S},g)$. For $0\leqslant s<r$ assume $A=\bigcup_{l=0}^{s} W_{\alpha_l}$ be evenly covered by $(\tilde{S},g)$ and let $p\in A\cap B$, where $B=W_{\alpha_{s+1}}$. A and B are connected, open, intersecting sets, both evenly covered by $(\tilde{S},g)$. We aim to prove that $A\cup B$ is itself evenly covered by $(\tilde{S},g)$, and, on account of (2.3), this will be accomplished by proving $A\cap B$ to be connected.

If $\mathrm{Fr}(A)\cap\mathrm{Fr}(B)\cap\mathrm{Fr}(A\cap B)=0$, this follows from (6.2).

If $x\in\mathrm{Fr}(A)\cap\mathrm{Fr}(B)\cap\mathrm{Fr}(A\cap B)$, then

$$(*)\qquad x\in\overline{W_{\alpha_{s+1}}\cap\bigcup_{l=0}^{s}W_{\alpha_l}}\quad\text{and}\quad(\overset{*}{*})\qquad x\,\bar{\in}\bigcup_{l=0}^{s+1}W_{\alpha_l}.$$

Let W_ξ denote a component of U or V containing x. Since W_ξ is a neighbourhood of x, $(*)$ implies the existence of a

$$y\in W_\xi\cap W_{\alpha_{s+1}}\cap\bigcup_{l=0}^{s}W_{\alpha_l}$$

and so $y \in W_\xi \cap W_{\alpha_{s+1}} \cap W_{\alpha_k}$, for some $0 \leqslant k \leqslant s$. Since each of the three sets W_ξ, $W_{\alpha_{s+1}}$, W_{α_k}, is a component of U or V, at least two of them are components of the same one of the two sets U and V. As such, since all three meet, at least two of them are equal. If $W_{\alpha_{s+1}} = W_{\alpha_k}$, then $B \subset A$ hence $A \cap B = B$ is connected. The other two possible relations $W_{\alpha_k} = W_\xi$, $W_\xi = W_{\alpha_{s+1}}$ are ruled out by (*), since each of them implies $x \in W_\xi \subset \bigcup_{l=0}^{s+1} W_{\alpha_l}$.

Thus, inductively, $\bigcup_{l=0}^{r} W_{\alpha_l}$ is evenly covered by $(\tilde{S}, g)$.

7. Finally:

Proof of (1.3). The sufficiency part follows from (1.4), if we prove the triviality of any covering space $(\tilde{E}, f)$ of E, such that $E = L \cup M$, with L and M both open in E, connected and evenly covered by $(\tilde{E}, f)$. This triviality of $(\tilde{E}, f)$ results from (3.2), if we prove that $S = E_\mu(x)$ is evenly covered by $(\tilde{E}, f)$ whatever be $\mu \in A$ and $x \in E$. Let then $\tilde{S}$ be an arbitrary component of $f^{-1}(S)$ and let g be the contraction of f to $\tilde{S}$: we shall prove that g maps topologically $\tilde{S}$ onto S. Since S is a connected, locally connected subspace of E, by [4] (p. 42, L. 5) $(\tilde{S}, g)$ is a covering space of S. Let $U = S \cap L$, $V = S \cap M$; then $S = U \cup V$ and U, V are open in S. As a connected subset of L or M, any component of U or V is evenly covered by $(\tilde{E}, f)$ ([4], p. 41, L. 2), hence a fortiori by $(\tilde{S}, g)$. The unicoherence of E_μ, hence of S, and (6.3) imply finally the triviality of $(\tilde{S}, g)$.

Conversely, $\mathrm{pr}_\mu^{-1}(C_\mu)$ is connected if so is $C_\mu \subset E_\mu$ and the unicoherence of E implies that of each $E_\mu = pr_\mu(E)$ ([12], p. 138, (2.21)).

BIBLIOGRAPHY

[1] K. Borsuk, Fund. Math. 17 (1931), p. 152-170.
[2] K. Borsuk, Fund. Math. 17 (1931), p. 171-209.
[3] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, chap. I & II, 1940.
[4] C. Chevalley, *Theory of Lie Groups*, I, 1946.

[5] S. Eilenberg, Fund Math. 26 (1936), p. 61-112.
[6] T. Ganea, C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949), p. 1470-1472.
[7] T. Ganea, Bul. Acad. R. P. R., s. M. F. C., II (1950), p. 199-205.
[8] T. Ganea, Fund. Math. 38 (1951), p. 179-203.
[9] C. Kuratowski, Fund. Math. 24 (1935), p. 269-287.
[10] C. Kuratowski & S. Ulam, Fund. Math. 20 (1933), p. 244-253.
[11] A. H. Stone, Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949), p. 427-447.
[12] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, 1942.

SPECTRA AND SPECTRAL MANIFOLDS

By PAUL R. HALMOS (Chicago)

§ 1. Statement of the problem. Suppose that A is a (bounded) normal operator on a (complex) Hilbert space $\mathfrak{H}$ and that $\mathfrak{I}$ is a (closed) subspace of $\mathfrak{H}$ invariant under A. Let B be the restriction of A to $\mathfrak{I}$. In a preceding paper[1]) I began a systematic study of operators such as B (operators that should perhaps be called *subnormal*) and presented an intrinsic (though somewhat complicated) characterization of subnormal operators. The main purpose of this note is to make a further contribution to the study of subnormal operators by investigating the relation between the spectrum of A and the spectrum of B.

Recall that, in general, the spectrum $\Lambda(A)$ of an operator A is the set of all those complex numbers λ for which the operator $A-\lambda$ is not invertible. A related and useful concept, which is not quite as well known, is the approximate point spectrum of A; it may be defined as the set $\Pi(A)$ of all those complex numbers λ for which

$$\inf \{\|Ax-\lambda x\| : \|x\|=1\}=0.$$

The two pertinent facts concerning these concepts are that $\Pi(A)\subset\Lambda(A)$ for every operator A and that, if A is normal, then $\Pi(A)=\Lambda(A)$[2]). Since throughout this paper I shall be concerned with a fixed normal operator A and its restrictions (such as B) to invariant subspaces (such as $\mathfrak{I}$), it will be con-

---

[1]) *Normal dilations and extensions of operators*, Summa Brasil. Math., fasc. 9, vol. 2 (1950).

[2]) Cf., for instance, § 31 of my recent book, *Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity*, New York, 1951.

venient to write $\Lambda(\mathfrak{I})$ and $\Pi(\mathfrak{I})$ instead of $\Lambda(B)$ and $\Pi(B)$ respectively. (It is important to note that the invertibility of an operator such as B is defined in terms of its action on its domain $\mathfrak{I}$, and has nothing to do with the part of $\mathfrak{H}$ outside $\mathfrak{I}$. In other words, the question of invertibility for, say, $B-\lambda$ is the question of existence of a two-sided inverse of $B-\lambda$ with domain $\mathfrak{I}$).

An important and interesting class of invariant subspaces (where "invariant" means, of course, "invariant under A") is the class of all those invariant subspaces whose orthogonal complement is also invariant. Subspaces of this class are said to *reduce* A. Since the intersection of every class of reducing subspaces is a reducing subspace, it follows that to every invariant subspace $\mathfrak{I}$ there corresponds a unique minimal reducing subspace $\mathfrak{K}$ containing it.

In the notation and terminology introduced above, the problem to be treated here becomes the study of the function Λ — a function which makes correspond a set $\Lambda(\mathfrak{I})$ of complex numbers to every invariant subspace $\mathfrak{I}$ of $\mathfrak{H}$. More specifically: if $\mathfrak{I}$ and $\mathfrak{K}$ are invariant subspaces such that $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{K}$, then what is the relation between $\Lambda(\mathfrak{I})$ and $\Lambda(\mathfrak{K})$? It is an easy consequence of the positive results of this note that, in general, the sets $\Lambda(\mathfrak{I})$ and $\Lambda(\mathfrak{K})$ are not comparable. The positive results concern (a) the case in which $\mathfrak{I}$ and $\mathfrak{K}$ are reducing subspaces (the facts here are essentially known and almost trivial), and (b) the case in which $\mathfrak{I}$ is an arbitrary invariant subspace and $\mathfrak{K}$ is the minimal reducing subspace containing it (here the facts lie considerably deeper and the full force of the spectral theorem is apparently necessary to get at them).

The spectral theorem will be used essentially in its classical form. According to that theorem, to the operator A there corresponds a *spectral measure* E, i. e. a function that assigns a projection $E(M)$ with domain $\mathfrak{H}$ to every Borel subset M of the complex plane. (The range of $E(M)$ will be denoted by $\mathfrak{E}(M)$). The relation between A and E may be indicated, as usual, by writing

$$A = \int \lambda dE(\lambda),$$

where the integration is extended over the entire complex plane. The complement with respect to the complex plane of a set M of complex numbers will be denoted by M'.

§ 2. Solution of the problem.

Theorem 1. *If $\mathfrak{J}$ and $\mathfrak{K}$ are reducing subspaces such that $\mathfrak{J}\subset\mathfrak{K}$, then $\Lambda(\mathfrak{J})\subset\Lambda(\mathfrak{K})$.*

Proof. It is no loss of generality (but merely a change of notation) to assume that $\mathfrak{K}=\mathfrak{H}$. To say that $\mathfrak{J}$ reduces A is equivalent to saying that the projection with range $\mathfrak{J}$ commutes with A. If this is the case, and if $A-\lambda$ is invertible, then the projection with range $\mathfrak{J}$ commutes with $(A-\lambda)^{-1}$ also, or, equivalently, $\mathfrak{J}$ reduces $(A-\lambda)^{-1}$. Since the restriction of $(A-\lambda)^{-1}$ to $\mathfrak{J}$ is obviously the inverse of the restriction of $A-\lambda$ to $\mathfrak{J}$, it follows that $\lambda\in\Lambda(\mathfrak{J})'$ whenever $\lambda\in\Lambda(\mathfrak{H})'$, i. e. that $\Lambda(\mathfrak{J})\subset\Lambda(\mathfrak{H})$[3].

Lemma 1. *If* $M=\{\lambda:|\lambda|\leqq 1\}$ *and* $\mathfrak{D}=\{x:\|A^n x\|\leqq\|x\|, n=1,2,\ldots\}$, *then* $\mathfrak{D}=\mathfrak{E}(M)$.

Proof. If $x\in\mathfrak{E}(M)$, then

$$\|A^n x\|^2=\int_M|\lambda^n|^2 d(E(\lambda)x,x)\leqq\|x\|^2$$

for every positive integer n, and therefore $\mathfrak{E}(M)\subset\mathfrak{D}$. The remainder of the proof will be devoted to establishing the reverse inclusion. If $x\in\mathfrak{E}(M')$, then

$$\|Ax\|^2=\int_{M'}|\lambda|^2 d(E(\lambda)x,x)>\|x\|^2$$

unless $x=0$, and therefore $\mathfrak{E}(M')\cap\mathfrak{D}$ contains no non-zero vector. According to a theorem of Stone and Lengyel, the set $\mathfrak{D}$ is a subspace of $\mathfrak{H}$, and the subspace $\mathfrak{D}$ is invariant under every operator which commutes with A[4]. Since $E(M')$ com-

---

[3]) An even easier proof of Theorem 1 can be given in terms of the approximate point spectrum. The proof above is preferable because it applies to not necessarily normal operators.

[4]) B. A. Lengyel and M. H. Stone, *Elementary proof of the spectral theorem*, Ann. Math. 37 (1936), pp. 853-864). Stone and Lengyel state the theorem for Hermitian operators only, but with a very slight modification

mutes with A, it follows that $\mathfrak{D}$ is invariant under $E(M')$ and therefore, since $E(M')$ is Hermitian, $\mathfrak{D}$ reduces $E(M')$. It follows that if D is the projection with range $\mathfrak{D}$, then $E(M')$ commutes with D and hence that $E(M')D$ is the projection with range $\mathfrak{E}(M')\cap\mathfrak{D}$. This implies that $E(M')D=0$ and hence that $E(M)D=D$; in other words $\mathfrak{D}\subset\mathfrak{E}(M)$.

Theorem 2. *If $\mathfrak{J}$ is an invariant subspace and if $\mathfrak{K}$ is the minimal reducing subspace containing $\mathfrak{J}$, then $\Lambda(\mathfrak{K})\subset\Lambda(\mathfrak{J})$* [5].

Proof. Since the restriction of a normal operator to a reducing subspace is normal, there is no loss of generality in assuming that $\mathfrak{K}=\mathfrak{H}$. Denoting the restriction of A to $\mathfrak{J}$ by B, I proceed to prove first that, if B is invertible, then so is A. Write $\beta=\|B^{-1}\|$ and let ε be a positive number such that $\varepsilon\beta<1$. If

$$\mathfrak{D}_\varepsilon=\{x:\|A^n x\|\leqq\varepsilon^n\|x\|,\ n=1,2,\ldots\},$$

and if $x\in\mathfrak{D}_\varepsilon$ and $y\in\mathfrak{J}$, then

$$(x,y)=(x,B^nB^{-n}y)=(x,A^nB^{-n}y)=(A^{*n}x,B^{-n}y).$$

It follows that

$$|(x,y)|\leqq\|A^n x\|\cdot\|B^{-n}y\|\leqq(\varepsilon\beta)^n\|x\|\cdot\|y\|,$$

and hence, since this is true for every positive integer n, that $(x,y)=0$. In other words $\mathfrak{D}_\varepsilon$ is contained in the orthogonal complement of $\mathfrak{J}$. If $M_\varepsilon=\{\lambda:|\lambda|\leqq\varepsilon\}$, then it follows from an application of Lemma 1 to A/ε in place of A that $\mathfrak{D}_\varepsilon=\mathfrak{E}(M_\varepsilon)$ and consequently that $\mathfrak{J}\subset\mathfrak{E}(M'_\varepsilon)$. Since the subspace $\mathfrak{E}(M'_\varepsilon)$ reduces A, it follows that $\mathfrak{E}(M'_\varepsilon)=\mathfrak{H}$ and hence that $E(M_\varepsilon)=0$. This result, together with the spectral theorem, implies that A is invertible. The conclusion of the theorem can now be deduced as follows. If $\lambda\in\Lambda(\mathfrak{J})'$, so that $B-\lambda$ is invertible, then, since $\mathfrak{J}$ is invariant under the normal operator $A-\lambda$ and since the minimal subspace containing $\mathfrak{J}$ and reducing $A-\lambda$ is $\mathfrak{H}$,

---

their proof establishes the result for normal operators as well. The modification, together with a slight simplification of their proof, appears in my paper, *Commutativity and spectral properties of normal operators*, Acta Szeged 12 (1950), p. 153-156.

[5]) In terms of the language of subnormal operators, Theorem 2 asserts that in passing from a subnormal operator to its minimal normal extension the spectrum can only decrease.

it follows that $A-\lambda$ is invertible. In other words, if $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{J})'$, then $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{H})'$ and therefore $\Lambda(\mathfrak{H}) \subset \Lambda(\mathfrak{J})$.

It is worth noting that the inclusion relation asserted in Theorem 2 is not in general an equality. An example is obtained by considering a separable Hilbert space $\mathfrak{H}$ with a complete orthonormal sequence $\{x_n : n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ and defining A by $Ax_n = x_{n+1}$. If $\mathfrak{J}$ is the subspace spanned by the x_n's with $n>0$ and if $\mathfrak{K}=\mathfrak{H}$, then it is a not particularly difficult exercise to show that $\Lambda(\mathfrak{J})$ is the closed unit disc, whereas $\Lambda(\mathfrak{K})$ is only the circumference.

§ 3. Application to spectral manifolds. The main result of § 2 can be applied to obtain a new, rather simple, and completely geometric characterization of the spectral manifolds (i. e. the subspaces $\mathfrak{E}(M)$) of a normal operator. I present this characterization because I hope that it, or some reasonable analog of it, may turn out to be useful in the study of not necessarily normal operators, and because it sheds some light on the geometric behavior of normal operators also. (Note that in the sequel, although the statements of the results and the methods of the proofs refer to normal operators only, the definitions make sense in the most general case).

If M is any set of complex numbers, I write $\mathfrak{F}(M)$ for the subspace of $\mathfrak{H}$ spanned by the class of all those invariant subspaces $\mathfrak{J}$ for which $\Lambda(\mathfrak{J}) \subset M$. The consideration of subspaces such as $\mathfrak{F}(M)$ is rather natural from the geometric point of view; it is an attempt to sort out those parts of the space $\mathfrak{H}$ on which the "proper values" of A lie in a prescribed part of the complex plane. Clearly each subspace $\mathfrak{F}(M)$ is necessarily invariant. (Warning: the definition does not imply, and it is in fact not true, that the spectrum of the restriction of A to $\mathfrak{F}(M)$ is contained in M.)

The definition in the preceding paragraph can be given for reducing subspaces in place of invariant subspaces. I introduce the subspace $\mathfrak{G}(M)$ spanned by the class of all those reducing subspaces $\mathfrak{J}$ for which $\Lambda(\mathfrak{J}) \subset M$. The characterization theorem mentioned above is that $\mathfrak{E}(M)=\mathfrak{F}(M)$ whenever the left side of the equation is defined. The consideration of the subspaces $\mathfrak{G}(M)$ is a technical device. To prove that $\mathfrak{E}=\mathfrak{F}$, it is convenient to prove first that $\mathfrak{E}=\mathfrak{G}$ (this turns out to depend on a spectral-theoretic argument independent of the results of § 2), and second that $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}$ (and this depends in an essential way on Theorem 2). The equation $\mathfrak{E}=\mathfrak{G}$ is itself a geometric characterization of the spectral manifolds; since, however, the requirement that a subspace be reducing is more stringent than that it be invariant, the equation $\mathfrak{E}=\mathfrak{F}$ is likely to be easier to apply. The preceding comment implicitly contains half the proof of the equation $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}$. More precisely: since $\mathfrak{G}(M)$ is the span of a smaller class of subspaces than the one used to define $\mathfrak{F}(M)$, it follows that $\mathfrak{G}(M)\subset\mathfrak{F}(M)$ for every set M.

Lemma 2. *If M is a Borel set, then* $\mathfrak{E}(M)=\mathfrak{G}(M)$.

Proof. If N is a compact subset of the complex plane, if $\lambda_0 \in N'$, and if ε is the distance from λ_0 to N, then, for every vector x in $\mathfrak{E}(N)$, it follows that

$$\|Ax-\lambda_0 x\|^2=\int_N |\lambda-\lambda_0|^2 d(E(\lambda)x,x)\geqq\varepsilon^2\|x\|^2.$$

Since this implies that $\lambda_0 \in \Pi(\mathfrak{E}(N))'$, it follows that $\lambda_0 \in \Lambda(\mathfrak{E}(N))'$ and consequently, since λ_0 is arbitrary in N', that $\Lambda(\mathfrak{E}(N))\subset N$. The definition of $\mathfrak{G}$ implies now that $\mathfrak{E}(N)\subset\mathfrak{G}(N)$. In other words, I have proved so far that $\mathfrak{E}(M)\subset\mathfrak{G}(M)$ whenever M is compact. If M is not compact, consider compact subsets N of M; since

$$\mathfrak{E}(N)\subset\mathfrak{G}(N)\subset\mathfrak{G}(M)$$

for every such N, it follows from the regularity of spectral measures[6]) that $\mathfrak{E}(M)\subset\mathfrak{G}(M)$ for every Borel set M.

To prove the reverse inclusion, it is sufficient to prove that if $\mathfrak{I}$ is a reducing subspace such that $\Lambda(\mathfrak{I})\subset M$, then $\mathfrak{I}\subset\mathfrak{E}(\mathfrak{M})$, or, equivalently, that under these conditions $\mathfrak{I}$ is orthogonal to $\mathfrak{E}(M')$. Let P be the projection on $\mathfrak{I}$. Since P is a Hermitian operator that commutes with A, it follows that P commutes with $E(N)$ for every Borel set N. Since, therefore, $E(N)P$ is the projection with range $\mathfrak{E}(N)\cap\mathfrak{I}$, the assertion that $\mathfrak{I}$ is orthogonal to $\mathfrak{E}(N)$ is equivalent to either of the assertions $E(N)P=0$ or $\mathfrak{E}(N)\cap\mathfrak{I}=\mathfrak{O}$ (where $\mathfrak{O}$ denotes

[6]) See my paper in Acta Szeged, referred to in footnote [4]).

the trivial subspace containing 0 only). If now $\lambda_0 \epsilon M'$, then there exists a positive number ε such that

$$\|Ax - \lambda_0 x\| \geqq \varepsilon \|x\|$$

whenever $x \epsilon \mathfrak{J}$. If $N = \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon/2\}$, and if $x \epsilon \mathfrak{E}(N)$, then

$$\|Ax - \lambda_0 x\|^2 = \int_N |\lambda - \lambda_0|^2 d(E(\lambda)x, x) \leqq \frac{\varepsilon^2}{4} \|x\|^2$$

so that, unless $x = 0$, x does not belong to $\mathfrak{J}$. Since this means that $\mathfrak{E}(N) \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{O}$, it follows that $E(N)P = 0$. In other words, each point λ_0 in M' has a neighborhood N such that $E(N)P = 0$. The separability of the complex plane and the countable additivity of E imply then that $E(M')P = 0$; this completes the proof.

Theorem 3. *If M is a Borel set, then* $\mathfrak{E}(M) = \mathfrak{F}(M)$ [7]).

Proof. It is sufficient to prove that $\mathfrak{F}(M) \subset \mathfrak{G}(M)$, and this is true, in fact, for an arbitrary set M. Suppose, indeed, that $\mathfrak{J}$ is an invariant subspace such that $\Lambda(\mathfrak{J}) \subset M$, and let $\mathfrak{K}$ be the minimal reducing subspace containing $\mathfrak{J}$. Since, by Theorem 2, $\Lambda(\mathfrak{K}) \subset M$, and since $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{K} \subset \mathfrak{G}(M)$, it follows that whenever $\Lambda(\mathfrak{J}) \subset M$, then $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{G}(M)$. The definition of $\mathfrak{F}(M)$ implies now that $\mathfrak{F}(M) \subset \mathfrak{G}(M)$.

---

[7]) This characterization of $\mathfrak{E}(M)$ is somewhat similar to (but quite a bit simpler than) a characterization that is given in my Acta Szeged paper, referred to in footnote [4]). It is worth while to note that the commutativity theorem for normal operators can be deduced from the present characterization just as easily as from that earlier one.

University of Chicago.

SUR LES PROPRIÉTÉS DE PERMANENCE DE CERTAINS ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

Par J. Dieudonné (Nancy)

1. On sait que les travaux de L. Schwartz sur les distributions [6][1]) ont montré, dans ces dernières années, que les espaces normés, pour utiles qu'ils soient, ne suffisaient pas pour les applications à l'Analyse fonctionnelle; d'autres espaces vectoriels topologiques (localement convexes, mais en général non métrisables) s'avèrent indispensables. N. Bourbaki a remarqué récemment que les espaces normés, aussi bien que les espaces qui interviennent dans les travaux de Schwartz, rentrent tous dans deux catégories générales qu'il appelle les espaces *bornologiques* et les espaces *tonnelés* [3][2]); ces derniers en particulier tirent leur importance en Analyse fonctionnelle du fait que ce sont précisément ceux, où sont valables les théorèmes sur les limites de suites d'applications linéaires, démontrés d'abord pour les espaces normés complets par les deux profonds mathématiciens polonais S. Banach et H. Steinhaus dans leur mémoire classique [1]. En outre, ces deux catégories d'espaces présentent d'intéressantes propriétés de permanence pour plusieurs des opérations courantes sur les espaces vactoriels topologiques: par exemple, tout quotient, tout produit dénombrable, toute limite inductive d'espaces bornologiques (ou tonnelés) est un espace bornologique (ou tonnelé). Par contre, un sous-espace d'un espace bornologique (ou tonnelé) E n'est pas nécessairement un espace bornolo-

[1]) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article.

[2]) Nous conservons dans cet article la terminologie et les notations de [3] et [4].

gique (ou tonnelé); nous nous proposons de montrer dans ce travail que cette propriété de permanence est toutefois vraie si on suppose que le sous-espace soit de codimension finie dans E (mais pas nécessairement fermé dans E).

2. Nous commencerons par établir, à l'aide une méthode directe (qui nous servira par la suite), un théorème démontré de façon assez compliquée par G. Mackey ([5], p. 179, théorème IV-8). Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes[3]), et E^* l'espace dual algébrique de E (espace vectoriel de toutes les formes linéaires sur E); soit E' un sous-espace vectoriel de E^*, dense dans E^* pour la topologie faible $\sigma(E^*,E)$, ce qui signifie encore que E et E' sont en dualité faible. Nous appellerons *clôture*[4]) de E' sous-espace vectoriel $\widetilde{E}'$ de E^*, constitué par les formes linéaires x' qui restent bornées dans toute partie de E bornée pour la topologie faible $\sigma(E,E')$; et nous dirons que E' est *clos*[5]) dans E^* si $\widetilde{E}'=E'$.

Remarquons maintenant que dire que $|\langle x,x'\rangle|\leqslant a$ pour tout élément x d'un ensemble faiblement borné $B\subset E$ signifie que $x'\in aB^0$, en désignant par B^0 l'ensemble polaire de B dans E^*. D'autre part ([3], p. 6, corollaire de la proposition 1), un système fondamental d'ensemble bornés[6]) dans E (pour la topologie $\sigma(E,E')$) est obtenu en prenant les ensembles polaires P^0 des tonneaux de E' (pour la topologie faible $\sigma(E',E)$). Comme on sait que P^{00} est l'adhérence dans E^* (pour la topologie $\sigma(E^*,E)$) de P ([4], p. 64, prop. 1), on a donc la proposition suivante, qui caractérise la clôture de E':

Proposition 1. *Pour tout tonneau P dans E' (pour la topologie $\sigma(E',E)$), soit $\overline{P}$ l'adhérence de P dans E^* (pour la topologie $\sigma(E^*,E)$), et E'_P le sous-espace de E^* engendré par $\overline{P}$; la clôture de E' dans E^* est l'intersection des sous-espaces E'_P lorsque P parcourt l'ensemble des tonneaux de E'.*

Démontrons alors le théorème de Mackey précité:

[3]) On traiterait exactement de la même manière les espaces vectoriels sur le corps des nombres réels.

[4]) „Bounded closure" dans la terminologie de Mackey ([5], p. 175).

[5]) „Boundedly closed" dans la terminologie de Mackey.

[6]) Un ensemble de parties bornées de E est dit *système fondamental* d'ensembles bornés si toute partie bornée de E est contenue dans une partie bornée de l'ensemble considéré.

Théorème 1. *Si le sous-espace E' de E^* est clos, et V' est un sous-espace de E^* de dimension finie, $E'+V'$ est clos dans E^*.*

Il suffit évidemment de démontrer le théorème lorsque V' est un sous-espace de dimension 1, engendré par un élément $u \in E^*$ n'appartenant pas à E'. Cela revient à la propriété suivante: si v est un élément quelconque de E^* n'appartenant pas à $E'+V'$, il existe, dans $E'+V'$, un tonneau P tel que v n'appartienne pas au sous-espace de E^* engendré par $\overline{P}$. Par hypothèse, il existe un tonneau Q_1 dans E' tel que v n'appartienne pas au sous-espace engendré par $\overline{Q}_1$. Si l'intersection de ce sous-espace et du plan U', défini par u et v, se réduit à 0, nous prendrons $Q=Q_1$. Sinon, cette intersection est de dimension 1. Soit $w\neq 0$ un de ses éléments. En vertu de l'hypothèse, il existe un tonneau Q_2 dans E' tel que w n'appartienne pas au sous-espace de E^* engendré par $\overline{Q}_2$; nous prendrons alors $Q=Q_1 \cap Q_2$ (il est clair que Q est un tonneau dans E'). Comme $\overline{Q} \subset \overline{Q}_1 \cap \overline{Q}_2$, on voit que, dans tous les cas, le sous-espace W', engendré par $\overline{Q}$, a une intersection avec U' réduite à 0. Soit alors S l'ensemble des points de E^* de la forme λu avec $|\lambda| \leqslant 1$. S est compact pour la topologie $\sigma(E^*,E)$, et, par suite, $\overline{Q}+S$, somme d'un ensemble compact et d'un ensemble fermé, est aussi fermé ([2], p. 32, exercice 15). Il est clair, d'autre part, que $Q_0=(\overline{Q}+S)\cap(E'+V')$ est un tonneau dans $E'+V'$. Comme $\overline{Q}_0 \subset \overline{Q}+S$, le sous-espace de E^*, engendré par $\overline{Q}_0$, est contenu dans le sous-espace engendré par $\overline{Q}+S$, c'est-à-dire dans $W'+V'$; mais par construction, v n'appartient pas à $W'+V'$, ce qui démontre le théorème.

3. Nous allons maintenant démontrer la première propriété de permanence annoncée dans l'introduction.

Théorème 2. *Soient E un espace bornologique, H un sous-espace vectoriel de E de codimension finie; alors H (muni de la topologie induite par celle de E) est un espace bornologique.*

Par récurrence sur la codimension de H, on peut évidemment se ramener au cas, où cette codimension est égale à 1, c'est-à-dire, où H est un hyperplan dans E. Si H est fermé dans E, le théorème est évident, car H est alors isomorphe à un espace quotient de E (le quotient de E par un supplémentaire de H). On peut donc supposer que H soit partout dense dans E. Soit u une forme linéaire sur E (élément de E^*) telle que $\langle x,u\rangle = 0$ soit une équation de H; la forme u n'appartient donc pas à E'. Nous désignerons par V' le sous-espace (de dimension 1) de E^*, engendré par u, et poserons $F' = E' + V'$. Utilisons maintenant la caractérisation des espaces bornologiques, donnée dans la proposition 5 de [3]; il en résulte d'abord que E' est clos. D'après le théorème 1 démontré ci-dessus, $E' + V' = F'$ est aussi clos; par suite, l'espace E, muni de la topologie $\tau(E,F')$, est un espace bornologique. En outre, pour cette topologie, H est cette fois un hyperplan fermé de E; le théorème sera donc démontré si nous établissons que les topologies induites sur H par $\tau(E,E')$ et par $\tau(E,F')$ sont identiques.

Il nous faut pour cela examiner les parties de F' qui sont convexes, cerclées et faiblement compactes (c'est-à-dire compactes pour $\sigma(E^*,E)$). Désignons par S_α la partie de V', formée des λu avec $|\lambda| \leqslant \alpha$; S_α est convexe, cerclée et faiblement compacte, et, par suite, si K est une partie convexe, cerclée et faiblement compacte de E', $K + S_\alpha$ est convexe, cerclée et faiblement compacte dans F'. En outre, il est clair que la trace sur H de l'ensemble polaire $(K+S_\alpha)^0$ est identique à la trace de K^0: D'après la définition des topologies $\tau(E,E')$ et $\tau(E,F')$, la proposition sera démontrée si nous montrons que tout ensemble convexe, cerclé et faiblement compact M de F' est contenu dans un esnemble de la forme $K + S_\alpha$.

Pour cela, remarquons que tout point $x' \in M$ se met d'une seule manière sous la forme $y' + \lambda u$, où $y' \in E'$. Nous allons montrer que, lorsque x' parcourt M, l'ensemble des $|\lambda|$ est majoré par un nombre $\alpha > 0$, et que l'adhérence dans E' de l'ensemble des y' est un ensemble faiblement compact K; il en résultera que M est contenu dans $K + S_\alpha$. Or, comme E' est clos, il existe dans E' un tonneau P tel que le sous-espace vectoriel E'_P de E^*, engendré par $\overline{P}$, ait une intersection avec V' qui soit réduite à 0 (proposition 1). Comme P est fermé dans E', on a $E' \cap \overline{P} = P$, et, par suite, $F' \cap (\overline{P} + S_1) = P + S_1$, ce qui, par même raisonnement que dans la démonstration du théorème 1, prouve que $P + S_1$ est un tonneau dans F'. Comme M est compact dans F', le théorème 2 de [3] montre alors qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que $M \subset \alpha(P + S_1)$, ce qui établit que $|\lambda| \leqslant \alpha$

pour tout $x' \in M$. Soit ensuite N la projection de M sur E', ensemble de y', et soit $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre sur N; $\mathfrak{F}$ est la projection d'un filtre $\mathfrak{G}$ sur M, et si $\mathfrak{G}_0$ est un ultrafiltre sur M plus fin que $\mathfrak{G}$, la projection de $\mathfrak{G}_0$ sur N est un ultrafiltre plus fin que $\mathfrak{F}$, donc identique à $\mathfrak{F}$. Cela étant, l'ultrafiltre $\mathfrak{G}_0$ converge par hypothèse vers $x'_0 \in M$, et d'après ce que nous venons de voir, la projection de $\mathfrak{G}_0$ sur V', qui est une base d'ultrafiltre sur S_α, converge vers $\lambda_0 \in S_\alpha$; on en déduit que $\mathfrak{F}$ converge vers $x'_0 - \lambda_0 u$, qui est nécessairement contenu dans $\overline{P}$ puisque $N \subset \overline{P}$. Comme $x'_0 - \lambda_0 u \in F'$, on a $x'_0 - \lambda_0 u \in P \subset E'$, ce qui achève la démonstration, en prouvant que l'adhérence de N dans E' est compacte.

4. Théorème 3. *Soient E un espace tonnelé, H un sous-espace vectoriel de E de codimension finie; alors H est un espace tonnelé.*

Raisonnant comme dans la démonstration du théorème 2, on se ramène d'abord au cas, où H est un hyperplan dans E, et, comme le théorème est évident si H est fermé, on peut supposer que H est partout dense dans E; u, V' et F' auront le même sens que dans la démonstration du théorème 2. Nous allons montrer que l'espace E, muni de la topologie $\tau(E,F')$, est tonnelé. Il suffira pour cela ([3], proposition 2) de prouver que tout ensemble M, contenu dans F' et faiblement borné, est faiblement relativement compact dans F' (le qualificatif „faible" se rapportant toujours à $\sigma(E^*,E)$). Pour cela, nous prouverons que M est contenu dans un ensemble de la forme $K+S_\alpha$, où K est faiblement compact et contenu dans E', et S_α a la même signification que dans le théorème 2.

Prouvons d'abord que, si $x' = y' + \lambda u$, $|\lambda|$ reste borné lorsque x' parcourt M. Supposons le contraire; il existerait donc une suite (x'_n) d'éléments de M telle que, si $x'_n = y'_n + \lambda_n u$, $|\lambda_n|$ tende vers $+\infty$. On a $u = \frac{1}{\lambda_n} x'_n - \frac{1}{\lambda_n} y'_n$. Comme la suite (x'_n) est faiblement bornée, la suite $\left(\frac{1}{\lambda_n} x'_n\right)$ tend faiblement vers 0, donc la suite $\left(-\frac{1}{\lambda_n} y'_n\right)$ tend faiblement vers u. Or, cette dernière suite est contenue dans E' et faiblement bornée. Comme E est tonnelé, l'ensemble des $-\frac{1}{\lambda_n} y'_n$ est contenu dans une partie faiblement compacte de E', ([3], proposition 2), et, par suite, u appartiendrait aussi à E', ce qui est absurde.

Cela étant, si $|\lambda| \leqslant \alpha$ lorsque x' parcourt M, l'ensemble des $y' = x' - \lambda u$ est faiblement borné, donc contenu dans une partie faiblement compacte K de E', ce qui prouve que M est contenu dans $K + S_\alpha$.

Ce résultat s'applique en particulier à toute partie faiblement compacte M de F', et montre donc, comme dans le théorème 2, que, sur H, les topologies induites par $\tau(E,F')$ et $\tau(E,E')$ sont identiques. Mais, pour la topologie $\tau(E,F')$, H est un hyperplan fermé de l'espace tonnelé E, donc est tonnelé, ce qui achève de démontrer le théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Banach et H. Steinhaus, Fundamenta Mathematicae 9 (1927).

[2] N. Bourbaki, *Topologie générale*, chap. III (Actualités Scientifiques et industrielles, n° 916, Paris (Hermann) 1942).

[3] N. Bourbaki, *Sur certains espaces vectoriels topologiques*, Annales de l'Institut Fourier, t. 2 (1951), p. 5-16.

[4] J. Dieudonné et L. Schwartz, *La dualité dans les espaces* (F) *et* (LF), Annales de l'Institut Fourier, t. 1 (1949), p. 61-101.

[5] G. W. Mackey, *On infinite-dimensional linear spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, t. 57 (1945), p. 155-207.

[6] L. Schwartz, *Théorie des distributions* (Actualités Scientifiques et industrielles, n^{os} 1091 et 1122, Paris (Hermann), 1950-51).

A NOTE ON CAUCHY'S PROBLEM

By EINAR HILLE (New Haven, Conn., U. S. A.)

1. Introduction. This note contains some comments on the problem of Cauchy for a class of linear operator equations including linear partial differential equations. We start with the latter special case.

Let E_m, $m \geqq 1$, be the real Euclidean space of m dimensions with points $x=(\xi_1, \ldots, \xi_m)$. Let $A_{jk}[\eta]$, $j,k=1,2,\ldots,p$, be linear differential operators with respect to the variables $\xi_1, \ldots, \xi_m$, with coefficients which are continuous functions of x in E_m and do not involve the variable t. Consider the system of linear partial differential equations

$$\frac{\partial \eta_j}{\partial t} = \sum_{k=1}^{p} A_{jk}[\eta_k] \qquad (j=1,2,\ldots,p), \tag{1.1}$$

or in vector form

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \mathfrak{A}[y], \tag{1.2}$$

where

$$y=(\eta_1, \ldots, \eta_p), \quad \mathfrak{A}=(A_{jk}). \tag{1.3}$$

Let Y be a complex B-space whose elements are vectors $y(x)=(\eta_1(x), \ldots, \eta_p(x))$ with $\eta_k(x)$ defined for all x in E_m. We may formulate a Cauchy problem for (1.2) as follows:

For a given $y_0(\cdot) \in Y$ it is required to find a vector

$$y(x,t)=y[x,t;\, y_0(\cdot)]$$

such that (i) *$y(x,t)$ satisfies* (1.2) *for every $x \in E_m$, $t>0$,* (ii) *$y(\cdot,t)$ and $y_t(\cdot,t)$ are in Y for $t>0$,* (iii) *$y(\cdot,t)$ is an absolutely continuous function of t for $t>0$, and* (iv)

$$\operatorname*{strong\,lim}_{t \downarrow 0} y(\cdot,t) = y_0(\cdot). \tag{1.4}$$

Here condition (iii) is understood to imply that $y_t(\cdot,t)$ is a Bochner integrable function of t in any interval (α,β), $0<\alpha<\beta<\infty$, and, in conjunction with (iv), that

$$\int_0^t y_s[\cdot,s;y_0]\,ds = y[\cdot,t;y_0]-y_0(\cdot). \tag{1.5}$$

J. Hadamard (see for instance, [2], p. 4) calls a Cauchy problem "correctly set" if there is one and only one solution of the system of partial differential equations satisfying the auxiliary conditions. In our case it is desirable both to limit the admissible initial values $y_0(\cdot)$ and to impose a condition of growth on the admissible solutions as functions of t. Let Y_0 be a linear subspace of Y. We shall say that *Cauchy's problem for equation* (1.2) *is solvable* $[Y_0; O]$ *if for every* $y_0 \in Y_0$ *there is one and only one funtcion* $y(\cdot,t)$ *satisfying conditions* (i)-(iv), *with* $y(\cdot,t) \in Y_0$ *for* $t>0$, *together with a given order relation* O.

Various order relations will be specified in the following. While they are largely chosen *ad hoc*, they do single out an important class of solutions, namely those obtainable by applying a semi-group of linear bounded operators to the elements of Y_0. That Cauchy's problem, when correctly set, leads to group theoretical considerations has been emphasized by Hadamard (see [2], p. 53-55 and [3]) who arrived at this conclusion by an analysis of the major premise of Huygens' principle. An attempt to fit these phenomena into the general theory of semi-groups of linear operators was made by the author in Chapter XX of [5]. The present note puts some of my previous results on a firmer and more general basis and gives them a more precise form.

2. Review of semi-group theory. For the following discussion the reader will need some knowledge of the theory of semi-groups of linear bounded operators. A detailed account is to be found in [5], which should be compared with Yosida [7], but the reader might find the following summary helpful.

Let Y be a complex B-space with elements y. Let $\{T(t) \mid 0 \leqq t < \infty\}$ be a family of linear bounded operators on Y to itself. $T(t)$ is a *semi-group* if

$$T(t_1 + t_2) = T(t_1)\, T(t_2) \qquad (0 \leqq t_1, t_2 < \infty). \tag{2.1}$$

We assume that $T(0) = I$ and that $T(t)$ is strongly right-continuous at the origin, that is

$$\operatorname{strong}\lim_{t \downarrow 0} T(t) y = y \tag{2.2}$$

for every $y \in Y$. It is known that this implies

$$\operatorname{strong}\lim_{t \to t_0} T(t) y = T(t_0) y \qquad (t_0 \geqq 0), \tag{2.3}$$

and

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \|T(t)\| \equiv \omega < \infty. \tag{2.4}$$

Further

$$\operatorname{strong}\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} [T(t) y - y] \equiv A[y] \tag{2.5}$$

exists for y in a set $D[A]$ dense in Y. A is a linear closed operator and is known as the *infinitesimal generator* of the semi-group. It is bounded if and only if

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - I\| = 0. \tag{2.6}$$

For $\Re(\lambda) > \omega$, the operator $\lambda I - A$ has a bounded inverse $R(\lambda; A)$ so that

$$(\lambda I - A) R(\lambda; A) y = y, \quad y \in Y, \tag{2.7}$$

$$R(\lambda; A)(\lambda I - A) y = y, \quad y \in D[A], \tag{2.8}$$

and

$$R(\lambda; A)[y] = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)[y]\, dt, \quad \Re(\lambda) > \omega. \tag{2.9}$$

Conversely, for every $y \in Y$

$$T(t)[y] = \operatorname{strong}\lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}; A\right) \right\}^n [y]. \tag{2.10}$$

Finally we have

$$\frac{d}{dt} T(t)[y] = A\, T(t)[y] = T(t)\, A[y], \quad y \in D[A], \tag{2.11}$$

and this is basic for the following discussion.

3. A general Cauchy problem. As above let Y be a complex B-space with elements y and let Y_0 be a linear subspace of Y. Let U be a linear operator on Y to itself and consider the equation

$$y'(t) = U[y(t)], \tag{3.1}$$

where the dash indicates the strong derivative of $y(t)$ with respect to t, that is,

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}[y(t+h)-y(t)]-y'(t)\right\|=0. \tag{3.2}$$

In analogy with the classical case we formulate the following

Cauchy Problem. *Given an element $y_0 \in Y$, find a function $y(t)$ on $(0,\infty)$ to Y such that* (i) *$y(t)$ satisfies* (3.1) *for $t>0$,* (ii) *$y(t)$ and $y'(t)$ are in Y for fixed $t>0$,* (iii) *$y(t)$ is an absolutely continuous function of t, and* (iv)

$$\operatorname{strong}\lim_{t\downarrow 0} y(t) = y_0. \tag{3.3}$$

We say that this problem is solvable $[Y_0, O]$ if to every y_0 of a given linear subspace Y_0 there exists one and only one function $y(t)$ in Y_0 satisfying conditions (i)-(iv) *as well as a prescribed order relation O.*

The basis for the discussion is the following uniqueness theorem.

Theorem 1. *Suppose that U is a closed linear operator whose domain is dense in Y. Suppose that its resolvent $R(\lambda; U)$ exists for $\lambda > \lambda_0 \geqq 0$ and that $\limsup_{\lambda\to\infty} \lambda\|R(\lambda; U)\| < \infty$. Then for any choice of y_0 in Y the Cauchy problem for equation* (3.1) *has at most one solution satisfying*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log\|y(t)\| < \infty. \tag{3.4}$$

Proof. Suppose contrariwise that for a particular choice of y_0 there were two solutions $y_1(t)$ and $y_2(t)$ satisfying conditions (i)-(iv) as well as (3.4). Then their difference $y(t) = y_1(t) - y_2(t)$ satisfies (i)-(iii) and (3.4) while (iv) is replaced by

$$\operatorname{strong}\lim_{t\downarrow 0} y(t) = 0. \tag{3.5}$$

Suppose that the actual value of the left member of (3.4) is τ. For $\lambda > \tau$ we form

$$L(\lambda; y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} y(t)\,dt; \tag{3.6}$$

clearly the integral exists and defines an element of Y. By virtue of (ii) the integrand belongs to $D[U]$, the domain of U, for every t, $0<t<\infty$. We shall show that $L(\lambda; y) \in D[U]$ and evaluate $U[L(\lambda; y)]$.

For this purpose take $0<\alpha<\beta<\infty$ and form

$$\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} U[y(t)]\,dt = \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} y'(t)\,dt = [e^{-\lambda t} y(t)]_\alpha^\beta + \lambda \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} y(t)\,dt,$$

where the integral in the second member exists by condition (iii). As $\alpha \to 0$, $\beta \to \infty$, the integrated part tends to zero so the third member tends to the limit $\lambda L(\lambda; y)$. Setting

$$L_{\alpha\beta}(\lambda; f) = \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} f(t)\,dt,$$

we shall prove that

$$U[L_{\alpha\beta}(\lambda; y)] = L_{\alpha\beta}(\lambda; U[y]). \tag{3.7}$$

Since U is normally an unbounded operator, this requires a fairly elaborate argument based on the closure of U and properties of the resolvent.

By assumption there exists a finite M such that

$$k\|R(k; U)\| \leqq M, \quad k \geqq \lambda_0 + 1. \tag{3.8}$$

From

$$kR(k; U)y = R(k; U)\,Uy + y, \quad y \in D[U],$$

we conclude that

$$\operatorname*{strong\,lim}_{k\to\infty} kR(k; U)y = y, \tag{3.9}$$

to start with for $y \in D[U]$, and hence for all y by the Banach-Steinhaus theorem, since $D[U]$ is dense in Y and (3.8) holds. Further, for fixed $k \geqq \lambda_0 + 1$, the operator

$$kUR(k; U) = k[kR(k; U) - I]$$

is bounded with a norm not exceeding $k(M+1)$.

It follows that we may operate with $kUR(k; U)$ on $L_{\alpha\beta}(\lambda; y)$ by interchanging operation and integration so that

$$kUR(k; U)[L_{\alpha\beta}(\lambda; y)]=L_{\alpha\beta}(\lambda; kUR(k; U)y)$$

or, since $y(t) \in D[U]$ for $t>0$,

$$U\{kR(k; U)[L_{\alpha\beta}(\lambda; y)]\}=L_{\alpha\beta}(\lambda; kR(k; U)[Uy]).$$

Here we let $k\to\infty$. The element between the braces on the left converges strongly to $L_{\alpha\beta}(\lambda; y)$ by (3.9). On the right hand side

$$kR(k; U)[Uy(t)]\to U[y(t)]=y'(t)$$

for every t. Moreover, the functions occuring on the left in this relation are strongly measurable for each $k\geqq\lambda_0+1$ and their norms do not exceed the Lebesgue integrable function $M\|y'(t)\|$. It follows that we can pass to the limit with k under the sign of integration so that

$$L_{\alpha\beta}(\lambda; kR(k; U)[Uy])\to L_{\alpha\beta}(\lambda; Uy).$$

Now U being closed it follows that $L_{\alpha\beta}(\lambda; y) \in D[U]$ and (3.7) holds. We may then let $\alpha\to 0$, $\beta\to\infty$ in (3.7). The quantity between the braces converges to $L(\lambda; y)$ and the right hand side was seen to tend to $\lambda L(\lambda; y)$. Using the closure of U once more, we see that $L(\lambda; y) \in D[U]$ and $U[L(\lambda; y)]=\lambda L(\lambda; y)$ or

$$(\lambda I-U)L(\lambda; y)=0$$

for $\lambda>\tau$. Taking $\lambda>\max(\lambda_0, \tau)$, we then have

$$R(\lambda; U)(\lambda I-U)L(\lambda; y)=0$$

or

$$L(\lambda; y)\equiv 0.$$

But if the Laplace transform of a continuous function vanishes identically for all large values of λ, then the function is identically zero, so that $y(t)\equiv 0$ or $y_1(t)\equiv y_2(t)$. Hence the solution is unique whenever it exists. This completes the proof.

4. Solvability of Cauchy's problem. We say *that a solution of Cauchy's problem for equation* (3.1) *satisfying condition* (3.4) *is of normal type and the problem is solvable* $[Y_0; N]$ *if a* (unique) *solution of normal type exist for every* $y_0 \in Y_0$. *The problem is solvable* $[Y_0; N(\omega)]$ *if* (3.4) *holds in the stronger form*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|y(t; y_0)\| \leqq \omega < \infty, \quad y_0 \in Y_0, \tag{4.1}$$

and $[Y_0; NB(\omega)]$ *if the condition reads*

$$\|y(t; y_0)\| \leqq M \|y_0\| e^{\omega t}, \quad y_0 \in Y_0, \tag{4.2}$$

where ω *and* M *are fixed constants.* We shall prove various theorems linking these notions with the theory of semi-groups.

Theorem 2. *If* U *is bounded, then Cauchy's problem for equation* (3.1) *is solvable* $[Y; NB(\|U\|)]$ *and the solution is*

$$y(t; y_0) = \exp(tU)[y_0], \quad y_0 \in Y. \tag{4.3}$$

Proof. The exponential function being defined by the usual series, it is a simple matter to verify that (4.3) gives a solution and that (4.2) holds with $M = 1$, $\omega = \|U\|$. U being bounded, $R(\lambda; U)$ exists for $|\lambda| > \|U\|$ and $\lambda R(\lambda; U)$ is holomorphic at infinity so that the conditions of Theorem 1 are satisfied and (4.3) gives the only solution of normal type.

Theorem 3. *If* U *is the infinitesimal generator of a semi-group* $\{T(t) | 0 \leqq t < \infty\}$ *satisfying* (2.2) *and* (2.4) *then Cauchy's problem is solvable* $[D[U], NB(\omega)]$, *the solution being*

$$y(t; y_0) = T(t)[y_0], \quad y_0 \in D[U]. \tag{4.4}$$

Proof. Formula (2.11) shows that (4.4) gives a solution and this is the only one of normal type for $R(\lambda; U)$ exists when $\Re(\lambda) > \omega$ and (2.9) shows that $\lambda \|R(\lambda; U)\|$ stays bounded as $\lambda \to \infty$.

Here it should be observed that the operator $T(t)$ is defined for all of Y and not merely on $D[U]$, but we cannot assert that (4.4) satisfies (3.1) for y_0 outside of $D[U]$. A counterexample is given in section 5 below.

Theorem 4. *If* U *is a closed operator of domain* $D[U]$ *dense in* Y, *if* $\lambda R(\lambda; U)$ *exists and is a contraction operator for large positive* λ, *then* U *is the infinitesimal generator of a semi-group of contraction operators* $T(t)$ *satisfying condition* (2.2) *and* (2.4) *with* $\omega = 0$ *and the conclusions of Theorem* 3 *hold.*

For a proof see Hille [5], Theorem 12.21 and [6], and Yosida [7].

Theorem 5. *Let the operator U satisfy the assumptions of Theorem 1. If Cauchy's problem for equation* (3.1) *is solvable* $[D[U], NB(\alpha)]$, *then U is the infinitesimal generator of a semi-group $\{T(t) \mid 0 \leqq t < \infty\}$ of linear bounded operators satisfying* (2.2) *and* (2.4) *with $\omega \leqq \alpha$ and the solution is given by* (4.4).

Proof. Suppose that $y(t; y_0)$ is the solution of (3.1) corresponding to $y_0 \in D[U]$. It satisfies (4.2) with ω replaced by α so that we can form

$$(4.5) \qquad R(\lambda)[y_0] \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda t} y(t; y_0)\, dt, \qquad \lambda > \alpha.$$

Proceeding as in the proof of Theorem 1 we see that

$$(\lambda I - U) R(\lambda)[y_0] = y_0,$$

whence it follows that

$$(4.6) \qquad R(\lambda)[y_0] = R(\lambda; U)[y_0], \qquad \lambda > \max(\alpha, \lambda_0).$$

Next we prove that $y(t; y_0)$ has the semi-group property with respect to t. For this purpose we take $t_0 > 0$ and observe that the functions $y(t+t_0; y_0)$ and $y[t; y(t_0; y_0)]$ are both solutions of (3.1) for $t > 0$ converging to the same limit $y(t_0; y_0)$ as $t \downarrow 0$. The assumptions of the uniqueness theorem being satisfied, we have

$$(4.7) \qquad y(t+t_0; y_0) \equiv y[t; y(t_0; y_0)]$$

and this is the required relation. Consequently there exists a semi-group $\{T(t) \mid 0 \leqq t < \infty\}$ of operators acting in $D[U]$ such that

$$(4.8) \qquad y(t; y_0) = T(t)[y_0], \quad y_0 \in D[U],$$

and $T(0) = I$ while

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t)[y_0] = y_0, \quad \|T(t)[y_0]\| \leqq M \|y_0\| e^{\alpha t}.$$

Since $T(t)$ is bounded on the set $D[U]$, dense in Y, it may be extended to all of Y without change of norm and continuity properties so that the resulting semi-group acting in Y will satisfy (2.2) and (2.4) with $\omega \leqq \alpha$. It will then have an infinitesimal generator A and it remains to prove that $A=U$. Now formulae (2.9), (4.5), (4.6), and (4.8) show that

$$R(\lambda; A)[y_0]=R(\lambda; U)[y_0], \quad \lambda > \max(\alpha, \lambda_0),$$

to start with in the dense set $D[U]$, and hence everywhere in Y since the operators are bounded. But $R(\lambda; A)[Y]$ is the domain of A and $R(\lambda; U)[Y]$ is the domain of U so that $D[A]=D[U]$, and if

$$z=R(\lambda; A)[y]=R(\lambda; U)[y],$$

then $A[z]=U[z]$ so that $A=U$. The rest follows from Theorem 3.

Equation (2.11) is only the first one of infinitely many differential equations involving the semi-group operator and its infinitesimal generator. Generally, we have

$$\text{(4.9)} \qquad \frac{d^n}{dt^n} T(t)[y_0]=A^n T(t)[y_0]=T(t)A^n[y_0], \quad y_0 \in D[A^n].$$

This leads to the equation

$$\text{(4.10)} \qquad y^{(n)}(t)=U^n[y(t)]$$

for which a Cauchy problem may be formulated analogous to that of section 3 for $n=1$[1]).

5. Applications and examples. It is clear that each of the preceding theorems applies to the special case in which $U=\mathfrak{A}$ is a differential operator, so that, replacing U by $\mathfrak{A}$ we get results concerning the special Cauchy problem of the Introduction. If $m=1$, we have a single space coordinate and $\mathfrak{A}$ becomes an ordinary differential operator and if the non-homogeneous differential equation

$$\text{(5.1)} \qquad \mathfrak{A}f-\lambda f=-g$$

has a unique solution in Y for every given $g \in Y$ when λ is large positive, the solution is $f=R(\lambda; \mathfrak{A})[g]$. In order to apply

[1]) Added in proof, September, 18, 1952: A discussion of this problem will be published elsewhere. The conclusions of Theorems 1, and 5, hold under less restrictive assumptions. Details will be given in a later paper.

the criteria, we must verify in addition that $\lambda\|R(\lambda;\mathfrak{A})\|$ stays bounded when $\lambda\to\infty$. If $m>1$, equation (5.1) is still a partial differential equation, but it involves one independent variable less than (1.2) so that the problem has been reduced to a simpler one. We shall not pursue these generalities any further, but end the discussion by exhibiting a few illustrative examples.

We start with the simplest wave equation

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}. \tag{5.2}$$

Cf. [5] section 20.3, where, however, the space Y is not properly chosen. Setting

$$\eta=\eta_1,\quad \frac{\partial\eta}{\partial t}=\eta_2,$$

we obtain a matrix equation of type (1.2) with $m=1$, $p=2$, and

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}0 & I\\ D^2 & 0\end{pmatrix},\quad D^2=\frac{d^2}{d\xi^2}. \tag{5.3}$$

We take $Y=(\eta_1(\xi),\ \eta_2(\xi))$ where $\eta_1(\xi)\in C[-\infty,\infty]$ and is absolutely continuous with $\eta_1'(\xi)\in L(-\infty,\infty)$ and $\eta_2(\xi)\in L(-\infty,\infty)$. Setting

$$\|y\|=\max|\eta_1(\xi)|+\int_{-\infty}^{\infty}[|\eta_1'(\xi)|+|\eta_2(\xi)|]\,d\xi,$$

and defining the algebraic operations in the obvious manner, we see that Y becomes a B-space. The domain of $\mathfrak{A}$ is the set of ordered function pairs (η_1,η_2) such that $\eta_1(\xi)$, $\eta_1'(\xi)$, and $\eta_2(\xi)$ are in $C[-\infty,\infty]$ while $\eta_1'(\xi)$, $\eta_1''(\xi)$, $\eta_2(\xi)$, and $\eta_2'(\xi)$ are in $L(-\infty,\infty)$. The spectrum of $\mathfrak{A}$ is purely imaginary and the corresponding equation (5.1) is easily handled. It has a unique solution in Y for λ not on the imaginary axis and $\lambda\|R(\lambda;\mathfrak{A})\|$ is bounded on the real axis so that the uniqueness theorem applies. The classical solution of (5.2) is

$$\eta_1(\xi,t;\eta_{01},\eta_{02})=\tfrac{1}{2}[\eta_{01}(\xi+t)+\eta_{01}(\xi-t)]+\tfrac{1}{2}\int_{\xi-t}^{\xi+t}\eta_{02}(s)\,ds \tag{5.4}$$

with η_2 obtained by formal differentiation with respect to t. Now if $y_0=(\eta_{01},\eta_{02})$ is any element of Y, the vector $y(\xi,t;y_0)$, whose first element is given by (5.3) and whose second element is obtained by formal differentiation with respect to t, is also an element of Y and the linear transformation from y_0 to $y(\cdot,t;y_0)$ is bounded for $-\infty<t<\infty$ with a bound independent of t. Moreover, it may be varified that $y(\xi,t;y_0)$ is a solution of Cauchy's problem for the matrix wave equation when $y_0 \in D[\mathfrak{A}]$. It is thus the only solution of normal type and it is obtained by applying the group operator $T(t)$, generated by $\mathfrak{A}$, to the elements of $D[\mathfrak{A}]$. Two things should be observed here. First, owing to the properties of the resolvent, we are led to a group rather than to a semi-group. Secondly, $T(t)[y_0]$ need not be a solution of the matrix wave equation, when y_0 is not in $D[\mathfrak{A}]$. Thus, if either $\eta_{01}'(\xi)$ or $\eta_{02}(\xi)$ is a continuous non-differentiable function, we cannot apply the operator $\mathfrak{A}$ to the formal solution.

Taking Laplace's equation instead

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}=0 \tag{5.5}$$

and proceeding in the same manner, we are led to a matrix equation of type (1.2) with an $\mathfrak{A}$ obtained by replacing D^2 by $-D^2$ in (5.3). The resulting operator behaves in a completely different manner, however. If Y is chosen as in the previous case, the spectrum of $\mathfrak{A}$ covers the real axis and the resolvent exists in the upper and lower half-planes instead of in the right and left ones. This is an indication that Cauchy's problem is not correctly set, and it is of course well known that it is Dirichlet's problem and not Cauchy's problem that is meaningful for Laplace's equation.

This does not mean, however, that there are no solutions of the equation (5.5) for $t>0$ obtainable by applying a semi-group operator to initial values on the ξ-axis. But we have to find another mode of attack. Now Laplace's equation is actually of type (4.10) with $n=2$ and may be handled accordingly. We have merely to find a suitable interpretation of the square root of $-D^2$ and it is known that $-D^2=(DC)^2$ where D stand for differentiation with respect to ξ and C for conjugation (in the sense of potential theory). See Hille

[4], p. 39, [5], p. 411, and especially [6]. See also Bochner [1] where other fractional powers are considered.

We are thus led to consider the operator equation

$$y'(t) = DC[y(t)], \tag{5.6}$$

the solutions of which also satisfy (5.5) at least for y_0 in the domain of $(DC)^2 = -D^2$, but actually for all y_0. Here we take $Y = L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \infty$. The spectrum of DC is real negative and $\lambda R(\lambda; DC)$ turns out to be a contraction operator for $\lambda > 0$. Hence DC generates a semi-group of contraction operators and with the aid of (2.10) one may show that

$$y(\xi, t; y_0) = \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0(\xi + s)}{t^2 + s^2}\, ds, \tag{5.7}$$

or Poisson's integral for the upper half-plane. Here Cauchy's problem for equation (5.6) is solvable $[Y; NB(0)]$ and the solution satisfies Laplace's equation for every $y_0(\xi) \in Y$.

In conclusion we consider the ordinary heat equation

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}. \tag{5.8}$$

Here $\mathfrak{A} = D^2$ and if $Y = L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leq p < \infty$, the spectrum is real negative and $\lambda R(\lambda; D^2)$ is a contraction operator given by

$$R(\lambda; D^2)[y_0] = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{|s|\lambda}}\, y_0(\xi + s)\, ds. \tag{5.9}$$

The classical solution

$$y(\xi, t; y_0) = (\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}}\, y_0(\xi + s)\, ds \tag{5.10}$$

may be obtained from (5.9) by carrying out the limiting process of formula (2.10). The Cauchy problem for (5.8) is solvable $[Y; NB(0)]$.

Additional examples may be given ad lib., but those considered will suffice to show the power and the limitations of the method.

REFERENCES

[1] S. Bochner, *Diffusion equation and stochastic processes,* Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A. 35 (1949), p. 368-370.

[2] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations,* Yale University Press, New Haven, 1923.

[3] J. Hadamard, *Le principe de Huyghens,* Bull. Soc. Math. de France 52 (1924), p. 610-640.

[4] E. Hille, *Notes on linear transformations.* II. *Analyticity of semi-groups,* Annales of Math. (2) 40 (1939), p. 1-47.

[5] E. Hille, *Functional analysis and semi-groups,* Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 31, New York, 1948.

[6] E. Hille, *On the generation of semi-groups and the theory of conjugate functions,* Proc. R. Physiographical Soc. Lund 21 (1951), p. 130-142.

[7] K. Yosida, *On the differentiability and the representation of one-parameter semi-group of linear operators,* Journal Math. Soc. Japan 1 (1948), p. 244-253.

NOTE SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES MULTIFORMES

Par S. Stoilow (Bucarest)

Dans l'étude du comportement d'une fonction analytique au voisinage des éléments frontière de sa surface de Riemann — ce qui, dans le cas des fonctions uniformes, revient à l'étude au voisinage des singularités transcendantes — un rôle important est joué par la *propriété d'Iversen.* Celle-ci, qui appartient en particulier, comme on sait, à toutes les fonctions inverses des fonctions méromorphes dans le plan fini [1], apparaît, dans des cas plus généraux, étroitement liée aux théorèmes concernant l'indétermination totale de la fonction en l'un des éléments frontière de son domaine naturel d'existence, et à des propositions connexes [4, 8, 10].

Or, pour une fonction analytique quelconque, le fait de posséder, ou non, la propriété susmentionnée tient exclusivement à la structure de sa surface de Riemann, et notamment aux propriétés de recouvrement de celle-ci. Il est donc utile de définir la propriété d'Iversen, et de formuler ses conséquences, à partir d'une surface de Riemann donnée *a priori* et considérée comme domaine naturel d'existence d'une classe de fonctions, toutes, simultanément, pourvues ou non de la dite propriété.

1. Une surface riemannienne de recouvrement R, étant définie [5, 6] par une variété deux dimensionnelle V quelconque et une transformation intérieure $z=T(p)$ qui fait correspondre à tout $p \in V$ un point z de la sphère de Riemann S, est dite *de classe* (I) (et les fonctions correspondant à R possèdent la propriété d'Iversen) si, à tout chemin continu l, tracé sur S, d'extrémités a et b, et à tout $\alpha \in T^{-1}(a)$, on peut faire correspondre un chemin λ sur V, partant de α et aboutissant en un point β, tel que $T(\lambda)$ soit situé dans un voisinage quelconque de l, donné à l'avance, et le point $b'=T(\beta)$ aussi près qu'on le voudra de b.

Cette définition implique donc que les valeurs asymptotiques de $z=T(p)$ relatives aux divers éléments frontière de V (points singuliers de toutes les fonctions correspondant à R) sont distribuées d'une certaine manière sur R. Une telle distribution est bien *relative à* R, et non pas à S seulement: une R dont les valeurs asymptotiques formeraient sur S un ensemble totalement discontinu, serait evidemment de classe (I); mais la réciproque n'est pas vraie, comme le montrent immédiatement des exemples connus de surfaces de Riemann, engendrées par certaines fonctions entières (comme la fonction de Gross).

2. Il apparaît immédiatement que, dans la définition du paragraphe précédent, on peut remplacer S par une surface de Riemann quelconque R_0 (définie par V_0 et $z=T_0(p_0)$ avec $p_0 \in V_0$) et considérer les surfaces de Riemann R de recouvrement de R_0, définies par V et $p_0=T(p)$, $p \in V$. On conçoit donc facilement ce que l'on doit entendre par une surface R *de classe* (I) *sur* R_0, cette dernière étant arbitrairement donnée.

Les diverses classes de fonctions ordinairement considérées sur une surface de Riemann donnée R_0, uniformes ou multiformes sur celle-ci, ont bien des surfaces de Riemann de classe (I) sur R_0. Il en est ainsi, par exemple, des intégrales abéliennes classiques, où R_0 est surface close, des intégrales abéliennes de R. Nevanlinna [7], où R_0 est ouverte, des fonctions inverses des fonctions uniformisantes d'une R_0 quelconque. Il en est de même des fonctions dites *de classe* U de Seidel et de Frostman [2, 3], comme l'a montré Noshiro [10], qui sont de classe (I) sur $|w|<1$, des fonctions définies par une relation entière $G(w,z)=0$ [4], ainsi que de celles qui correspondent à des surfaces de Riemann dont la frontière est de mesure harmonique nulle [8], qui sont l'une et l'autre de classe (I) sur la sphère des valeurs w.

Il résulte encore de la définition du paragraphe précédent qu'une surface R_2 de classe (I) sur R_1, cette dernière étant de classe (I) sur R_0, est de classe (I) sur R_0.

3. Considérons un élément frontière d'une surface R quelconque, et soient D_i $(i=1,2,\ldots)$ les domaines déterminants de cet élément sur V (voir [6], p. 86). Si l'on désigne par $\overline{T(D_i)}$ la fermeture de l'ensemble $T(D_i)\subset R_0$ sur R_0, l'ensemble commun de tous les $\overline{T(D_i)}$ peut se réduire à un point unique et nous dirons alors que l'élément frontière est *ponctuel*; cet ensemble peut être vide et nous dirons, dans ce cas, que l'élément frontière est *extérieur à* R_0. L'élément frontière est dit *totalement étalé sur* R_0 si l'ensemble commun des $\overline{T(D_i)}$ recouvre tout R_0 [9]; il est partiellement étalé dans les autres cas.

L'importance de la notion de classe (I) tient justement dans l'absence de cette dernière espèce d'éléments frontière dans les surfaces R de classe (I) sur R_0. Plus précisément, on peut démontrer, comme je l'ai fait pour le cas, où R_0 est la sphère [4, 8], que

Si R est de classe (I) sur R_0, seul l'un des deux cas suivants peut se présenter:

1° *Tous les éléments frontière de R sont ponctuels ou extérieurs à R_0, et R possède un nombre fini de feuillets sur R_0.*

2° *Il existe au moins un élément frontière de R totalement étalé sur R_0, et ceux qui ne sont pas de cette espèce sont ponctuels ou extérieurs à R_0. R possède, dans ce cas, un nombre infini de feuillets sur R_0.*

Pour les fonctions $w(z)$ correspondant à R [1]), ces deux cas se traduisent, respectivement, par

1° Toute $w(z)$ est une algébroide généralisée sur R_0, c'est-à-dire qu'elle satisfait à une relation de la forme

$$w^n+A_1(z)\,w^{n-1}+\ldots+A_n(z)=0,$$

où les $A_i(z)$ sont des fonctions uniformes sur R_0, pouvant y avoir un ensemble totalement discontinu de singularités.

2° Toute fonction $z(w)$, inverse d'une fonction correspondant à R (au sens mentionné plus haut) est totalement indéterminée *relativement à* R_0, en au moins un de ses éléments

---

[1]) R, comme surface de recouvrement de S, se définit par V et $z=T_0(T(p))$. Les fonctions $w(z)$ sont celles correspondant à cette définition de R.

frontière [2]), les points singuliers correspondant aux éléments frontière ponctuels étant des points transcendants ordinaires.

Dans le cas, où R_0 est close, les démonstrations données [4, 8] s'appliquent sans changement. Dans le cas général, où interviennent les éléments frontière de R_0, des légères modifications qui n'ont rien d'essentiel sont nécessaires [3]).

4. Envisageons maintenant une surface de Riemann R recouvrant S d'une manière absolument quelconque et recherchons les domaines de S sur lesquels R, ou une partie de R, est de classe (I).

Il existe toujours de tels domaines — domaines (I) — quand nous nous bornons à une partie de R. Soit, en effet, C l'intérieur d'un cercle de centre $z=a$ et soit Q la composante de l'ensemble $T^{-1}(C)$ contenant un point déterminé de $T^{-1}(a)$. Si C est assez petit, $T(Q)$ recouvre tout le cercle C et la partie de R, limitée à $Q \subset V$ est de classe (I) sur C. Soit C^* la réunion de tous les cercles de centre a pour lesquels cette dernière propriété a lieu. Si le domaine Q^* correspondant comprend un élément frontière de R, c'est-à-dire si un voisinage de cet élément est compris dans Q^*, on pourra dire qu'un tel élément frontière est totalement étalé sur C^*, ou bien que $w(z)$ est une algébroide généralisée sur C^* (dans Q^*). En effet, on peut alors appliquer à la partie de R, qui est la surface définie par Q^* et $z=T(p)$, la proposition du paragraphe précédent, l'élément frontière de R compris dans Q^* étant un élément frontière de Q^*.

Par contre il n'existe pas toujours des domaines de S sur lesquels R serait de classe (I), c'est-à-dire qui seraient des domaines (I) pour R même. La recherche de tels domaines, s'ils existent, présente cependant un intérêt évident pour l'étude de R et des fonctions qui lui correspondent. Voici comment on peut alors les construire. Considérons sur S tous les cercles ouverts Γ ayant pour centres les points d'un ensemble

---

[2]) C'est-à-dire que l'ensemble des valeurs limite de la fonction, relatif à cet élément frontière est $T_0(V_0)$.

[3]) on démontre également [4] que les points de R_0 qui ne sont couverts que par un nombre fini de points de R au plus, forment sur R_0 un ensemble qui est au plus la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles totalement discontinus.

dénombrable donné E, dense sur S. S'il existe des domaines (I) pour R, il y aura au moins un Γ tel que chacune des parties de R, limitée à une composante de l'ensemble $T^{-1}(\Gamma)$, soit de classe (I) sur Γ. Soit Γ^* la réunion de tous les cercles, de centre fixe, possédant cette propriété. A chaque point de l'ensemble E on attachera ainsi un cercle Γ^* déterminé s'il existe au moins un Γ satisfaisant à la condition indiquée. Il y aura au plus une infinité dénombrable de Γ^*. Deux Γ^* seront dits *enchaînés entre eux* s'il existe une chaîne finie de Γ^*, allant du premier au second, et telle que deux Γ^* quelconques succesifs de cette chaîne forment un domaine de S. Cette relation est symétrique et transitive. Si l'on groupe tous les Γ^* enchaînés entre eux, on aura tous les domaines (I) relatifs à R, qui existent.

Soit Δ un domaine (I) pour R. Si $T^{-1}(\Delta)$ comprend un élément frontière de R, on pourra faire la même remarque que dans le cas, où l'on aurait affaire à un domaine (I) d'une partie de R seulement. Mais ici, l'on peut observer de plus que tous les éléments frontière de R, dont un voisinage au moins est extérieur à $T^{-1}(\Delta)$, sont des éléments d'indétermination *non totale*, car les points de Δ au moins ne sont pas, pour eux, des valeurs limite des fonctions $z(w)$ correspondantes.

5. On voit quel parti on peut tirer, pour l'étude des fonctions correspondant à R, de l'existence d'au moins un cercle Γ (donc d'un domaine (I) au moins) pour la surface R. Ceci n'est cependant pas toujours le cas.

Prenons, par exemple, le plan complexe (u) et pratiquons y une infinité de fentes rectilignes σ_n (où n parcourt tous les entiers) définies par

$$x \geqslant n, \quad y = 2\pi(n + r_n),$$

r_n désignant les nombres rationnels $\geqslant 0$ et <1.

Soit D le domaine $(u) - \sum\limits_n \sigma_n$. La surface R, engendrée par $z = e^u$, où u décrit D, ne possède aucun domaine (I).

Enfin, il se peut que R, sans être de classe (I) sur S, donne lieu cependant à la première partie de la proposition 2° du paragraphe 3; tel est, par exemple, le cas, lorsqu'il existe un seul domaine (I), et que celui-ci est partout dense sur S. On peut facilement former une telle surface en retranchant, par exemple, de chaque feuillet de la surface de $\log z$ les points se projetant sur un même segment de droite fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Iversen, *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*, Thèse, Helsingfors 1914.

[2] W. Seidel, *On the distribution of values of bounded analytic functions*, Transaction Am. Math. Soc. 36 (1934).

[3] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles*, Thèse, Lund 1935.

[4] S. Stoilow, *Sur les fonctions analytiques dont les surfaces de Riemann ont des frontières totalement discontinues*, Mathematica 12, Cluj 1936.

[5] S. Stoilow, *Sur la définition des surfaces de Riemann*, Comptes Rendus du Congrès Intern. des Mathém., Oslo 1936, t. II, p. 143.

[6] S. Stoilow, *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Paris 1938.

[7] R. Nevanlinna, *Qaudratisch intergrierbare Differentiale auf einer Riemannischen Mannigfaltigkeit*, Annales Academiae Scientiarum Fenniciae, Ser. A, 1 (1941).

[8] S. Stoilow, *Sur les singularités des fonctions analytiques multiformes dont la surface de Riemann a sa frontière de mesure harmonique nulle*, Mathematica 19, Cluj 1943.

[9] S. Stoilow, *Quelques remarques sur les éléments frontière des surfaces de Riemann et sur les fonctions correspondant à ces surfaces*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences 227 (1948), p. 1326-1328.

[10] K. Noshiro, *Contribution to the theory of the singularities of analytic functions*, Japanese Journal of Mathematics XIX (1948).

ON THE PRODUCT OF TWO SUMMABILITY METHODS

By O. Szász (Ohio, U. S. A.)

1. Introduction. The problems discussed here belong to a chapter of the theory of linear functionals, to which H. Steinhaus made important contributions. Suppose that T_1 and T_2 are two summability methods, and $T_1 \cdot T_2$ denotes the iteration product, that is the transform T_1 of the transform T_2 of a sequence (or a function). If T_1 is a regular method then clearly T_2 summability implies $T_1 \cdot T_2$ summability. However it is an open question under what conditions T_1 summability implies $T_1 \cdot T_2$ summability. If this is the case, then obviously the transform $T_1 \cdot T_2$ is at least as general as either T_1 or T_2. We have discussed some such cases in a recent paper [5]. These cases are:

1) Abel and Cesàro summability,
2) Laplace and Riesz summability,
3) Borel and Cesàro summability,
4) Borel and Euler summability.

In all these cases T implies $T \cdot T$. Similar results were obtained independently by Amnon Amir (Jakimovski) in a paper not yet published.

For other properties of products of methods see [1].

In the present paper we shall show that the same is true in the following cases:

a) Abel and Hausdorff summability (which includes 1)),
b) Borel and Hausdorff summability,
c) Abel summability and the circle method.

We also give an example of two regular methods, where T_1 does not imply $T_1 \cdot T_2$.

2. Euler and Hausdorff means. The general Euler means of a sequence $\{s_n\}$ (due to K. Knopp and E. Jacobsthal) are defined by

$$\varphi_n(r) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} r^\nu (1-r)^{n-\nu} s_\nu \qquad (n=0,1,2,\ldots), \tag{2.1}$$

r a parameter. The transform is regular for $0<r\leqslant 1$.

The Hausdorff means are defined by

$$h_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} s_\nu \int_0^1 r^\nu (1-r)^{n-\nu} d\psi(r), \tag{2.2}$$

where $\psi(r)$ is a function of bounded variation in $0\leqslant r\leqslant 1$.

The transform (2.2) is regular if and only if

$$\int_0^1 d\psi(r) = \psi(1) - \psi(0) = 1,$$

and if $\psi(r)$ is continuous at $r=0$.

We may assume that $\psi(0)=0$, so that

$$\psi(1)=1, \quad \psi(+0)=\psi(0)=0.$$

Euler-means, Cesàro-means and Hölder-means are special Hausdorff-means.

Lemma 1. *Let*

$$\bar{\varphi}_n(r) = \sum_0^n \binom{n}{\nu} r^\nu (1-r)^{n-\nu} |s_\nu|, \quad \bar{s}_n = \max_{\nu<n} |s_\nu|,$$

then

$$|\varphi_n(r)| \leqslant \bar{\varphi}_n(r) \leqslant \bar{s}_n \qquad (0\leqslant r\leqslant 1),$$

and

$$|h_n| \leqslant \bar{s}_n \int_0^1 |d\psi(r)|.$$

These inequalities follow from (2.1) and (2.2).

We shall also employ the following lemmas:

Lemma 2. *If the power series $\Sigma s_n x^n$ converges for $0<x<1$, then $\Sigma \bar{s}_n x^n$ converges for $0<x<1$.*

It follows from our assumption that for any $\varepsilon > 0$ there exists an $n_0(\varepsilon)$ such that $|s_n| < (1+\varepsilon)^n$ for $n > n_0(\varepsilon)$; a fortiori there exists an $n_1 > n_0$, such that

$$\bar{s}_n < (1+\varepsilon)^n \quad \text{for} \quad n > n_1,$$

and from this inequality our lemma follows.

Lemma 3. *If the power series* $\sum_0^\infty s_n \frac{x^n}{n!}$ *converges for all* $x > 0$, *then* $\sum_0^\infty \bar{s}_n \frac{x_n}{n!}$ *converges for all* $x > 0$.

It is seen easily that $\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} \sum_{\nu=0}^n |s_\nu|$ converges, whence our lemma follows.

3. Product of the Abel and Hausdorff methods. We assume that a sequence $\{s_n\}$ is summable Abel, that is $\sum a_n x_n$ converges for $|x|<1$ and $f(x) = \sum a_n x^n = (1-x) \sum s_n x^n \to s$ as $x \to 1$. Here $\sum_0^n a_\nu = s_n$. It follows from Lemma 1 that

$$\sum_m^\infty |\varphi_n(r)| x^n \leqslant \sum_m^\infty \bar{s}_n x^n, \tag{3.1}$$

and now from Lemma 2, that the series

$$\sum_0^\infty \varphi_n(r) x^n \equiv P(x,r) \tag{3.2}$$

is for any fixed $|x|<1$ absolutely and uniformly convergent in the interval $0 \leqslant r \leqslant 1$. It follows that (3.2) can be integrated term by term with respect to $d\psi(r)$. Obviously $(1-x)P(x,r) = AE(r)$ is the product of the Abel and Euler transforms. Now

$$\int_0^1 P(x,r)\, d\psi(r) = \sum_0^\infty x^n \int_0^1 \varphi_n(r)\, d\psi(r) = \sum_0^\infty h_n x^n,$$

and $(1-x)\Sigma h_n x^n$ is the iteration product AH of the Abel and Hausdorff transforms.

The double series

$$P(x,r)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}r^\nu(1-r)^{n-\nu}s_\nu$$

is, in view of lemmas 1 and 2, also absolutely convergent, hence interchange of summation is legitimate. We thus get

$$P(x,r)=\sum_{\nu=0}^{\infty}r^\nu(1-r)^{-\nu}s_\nu\sum_{n=\nu}^{\infty}\binom{n}{\nu}(1-r)^\nu x^n.$$

Now

$$\sum_{n=\nu}^{\infty}\binom{n}{\nu}(1-r)^n x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\nu+k}{\nu}(1-r)^{\nu+k}x^{\nu+k}=\frac{(1-r)^\nu x^\nu}{(1-x+rx)^{\nu+1}},$$

so that

$$P(x,r)=\sum_{\nu=0}^{\infty}r^\nu x^\nu(1-x+rx)^{-\nu-1}s_\nu.$$

On putting

$$\frac{rx}{1-x+rx}=t(x,r)=t,$$

we have $0<t\leqslant x$ for $0<x<1$, $0\leqslant r\leqslant 1$, and we get

$$(1-x)P(x,r)=\frac{1-x}{1-x+rx}\,\frac{1}{1-t}f(t)=f(t). \tag{3.4}$$

For this formula see also [2] and [3, p. 178]. If $x\to 1$ then $t\to 1$, hence by (3.4) Abel summability implies $AE(r)$ summability.

Incidentally, the convers is also true for sequences $\{s_n\}$ for which $\Sigma s_n x^n$ converges in $|x|<1$. This follows directly from the formula (3.4).

Clearly the series (3 3) is uniformly convergent over the interval $0\leqslant r\leqslant 1$, for any fixed $|x|<1$; hence it can be integrated term by term with respect to $d\psi(r)$. We thus get

$$(1-x)\int_0^1 P(x,r)\,d\psi(r)=(1-x)\sum h_n x^n=\int_0^1 f(t(x,r))\,d\psi(r).$$

We now wish to show that $(1-x)\Sigma h_n x^n \to s$, as $x\to 1$. We may assume that $s=0$ (otherwise we need only consider the sequence $\{s_n - s\}$). We write

$$\int_0^1 f(t(x,r))\,d\psi(r) = \int_0^\delta + \int_\delta^1 = I_1 + I_2, \text{ say;}$$

given $\varepsilon>0$ we may choose in view of (2.3), $\delta=\delta(\varepsilon)$, so that $\int_0^\delta |d\psi(r)| < \varepsilon$. It follows from our assumption that for some constant M

$$|f(t)|<M \qquad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

Hence

$$|I_1|<M\varepsilon \quad \text{for} \quad \delta<\delta(\varepsilon).$$

In I_2 $\delta\leqslant r\leqslant 1$, hence

$$t(x,r)=1-\frac{1-x}{1-x+rx}\geqslant 1-\frac{1-x}{1-x+\delta x};$$

it follows that $t\to 1$ uniformly for $\delta\leqslant r\leqslant 1$ as $x\to 1$. Thus

$$|f(t)|<\varepsilon \quad \text{for} \quad 0<1-x<\eta(\delta,\varepsilon),$$

and

$$|I_2|<\varepsilon\int_\delta^1 |d\psi(r)| \leqslant \varepsilon \int_0^1 |d\psi(r)|;$$

this proves our assertion. We have thus proved that summability A implies summability AH. This answers a question, raised on a recent occasion by Lee Lorch, in the affirmative.

4. Product of Borel and Hausdorff methods. Borel summability is defined by

$$B\Sigma a_n = \lim_{x\to\infty} e^{-x}\sum_0^\infty s_n \frac{x^n}{n!} = \lim B\{s_n, x\} = s, \tag{4.1}$$

where we assume that the series $\Sigma s_n \dfrac{x^n}{n!}$ converges for all x.

In a similar manner as (3.3) one finds the formula

$$e^{-x}\sum_{0}^{\infty}\varphi_n(r)\frac{x^n}{n!}=e^{-rx}\sum_{0}^{\infty}s_n\frac{(rx)^n}{n!}, \tag{4.2}$$

or

$$B\{\varphi_n(r);\,x\}=B\{s_n;\,rx\};$$

see also [3], Theorem 128, where reference is given to K. Knopp.

In view of Lemmas 1 and 3

$$\sum_{m}^{\infty}\bar{\varphi}_n(r)\frac{x^n}{n!}\leqslant\sum_{m}^{\infty}\bar{s}_n\frac{x^n}{n!}; \tag{4.3}$$

it now follows that the two series in (4.2) are for any fixed $x>0$ uniformly convergent in $0\leqslant r\leqslant 1$. Hence term by term integration is justified and we get

$$e^{-x}\sum h_n\frac{x^n}{n!}\equiv B\{h_n;\,x\}=\int_0^1 B\{s_n;\,rx\}\,d\psi(r).$$

The left side is the Borel-Hausdorff mean BH of the sequence $\{s_n\}$. To prove that the B-method is included in the BH-method we may assume again that $s=0$. We write

$$\int_0^1 B\{s_n;\,rx\}\,d\psi(r)=\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{1}=J_1+J_2,\ \text{say.}$$

Given $\varepsilon>0$, we can choose $\delta=\delta(\varepsilon)$, so that

$$\int_0^{\delta}|d\psi(r)|<\varepsilon\ \text{ for }\ \delta<\delta(\varepsilon).$$

By our assumption there exists a constant M, so that

$$|B\{s_n;\,rx\}|<M\ \text{ for }\ 0\leqslant r\leqslant 1\ \text{ and all }\ x>0.$$

Hence

$$|J_1|<M\varepsilon.$$

In J_2: $\delta\leqslant r$, $e^{-rx}\leqslant e^{-\delta x}\to 0$, as $x\to\infty$, hence

$$|B\{s_n;\,rx\}|<\varepsilon\ \text{ for }\ \delta\leqslant r\leqslant 1\ \text{ and for }\ x>\zeta(\delta,\varepsilon).$$

It follows that

$$|J_2| < \varepsilon \int_{\delta}^{1} |d\psi(r)| \leqslant \varepsilon \int_{0}^{1} |d\psi(r)| \text{ for } x > \zeta(\delta, \varepsilon).$$

This proves that B-summability implies BH-summability.

5. Produkt of the Borel Z_k-methods. The Z_k transform is defined by

$$z_n = \frac{1}{k+1}(s_{n-k} + s_{n-k+1} + \ldots + s),$$

where $n \to \infty$, $s_{-\nu} = 0$ for $\nu > 0$; k is a positive integer. It is obviously regular. The BZ_k transform is

$$B\{z_n; x\} = e^{-x} \sum_{0}^{\infty}{}' z_n \frac{x_n}{n!} = \frac{e^{-x}}{k+1} \sum_{0}^{\infty}{}' s_n \left(\frac{x_n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots + \frac{x^{n+k}}{(n+k)!}\right)$$
$$= \frac{1}{k+1}(B_0 + B_1 + \ldots + B_k),$$

where

$$B_\nu(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty}{}' s_n \frac{x^{n+\nu}}{(n+\nu)!}.$$

We have

$$B_\nu(x) = e^{-x} \int_{0}^{x} e^t B_{\nu-1}(t)\, dt_A \qquad (\nu \geqslant 1),$$

from which it follows easily that $B_{\nu-1}(x) \to s$ $(x \to \infty)$ implies $B_\nu(x) \to s$ $(x \to \infty)$. Hence B-summability implies BZ_k-summability. The convers is also true.

6. A counter example. We now give an example of two regular methods T_1 and T_2 so that T_1-summability does not imply $T_1 \cdot T_2$-summability. We choose for T_2 the simple transform

$$\text{(T)} \qquad t_n = \tfrac{1}{2}(s_n + s_{n+1}) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

and for T_1 the B-transform. Now $T_1 T_2$ is the transform

$$\frac{1}{2} e^{-x} \sum_{0}^{\infty}{}' (s_n + s_{n+1}) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2}\{B s_n; x\} + \frac{1}{2} e^{-x} \sum_{1}^{\infty} s_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$= \frac{1}{2} B(x) + \frac{1}{2} B^*(x),$$

say. We define $\{s_n\}$ by

$$B(x) \equiv \int_0^x \cos(e^t)\,dt = \int_1^{\exp x} \frac{1}{n} \cos n\,dn;$$

then

$$B(x) \to \int_1^\infty \frac{1}{n} \cos n\,dn, \quad \text{as } x \to \infty.$$

Furthermore

$$B'(x) = \cos(e^x) = B^*(x) - B(x).$$

Hence $\lim B^*(x)$ does not exist; thus B-summability does not imply BT-summability.

Observe the similarity of the transforms (T) and Z_1.

7. Product of Abel's method and the circle method. The circle method (γ, r) was introduced by Hardy and Littlewood [see 3, §§ 9.11 and 11.21], and later also discussed by Meyer-König [4] and by Wais [6].

It is defined by the transform

$$\gamma_n(r) = r^{n+1} \sum_{\nu=n}^\infty \binom{\nu}{n} (1-r)^{\nu-n} s_\nu, \quad n \to \infty; \; 0 < r < 1. \tag{7.1}$$

For the existence of $\gamma_n(r)$ for all n it is necessary and sufficient that for every fixed integer n

$$s_\nu = V(\nu^{-n}(1-r)^{-n}), \quad \text{as } \nu \to \infty. \tag{7.2}$$

If this condition is satisfied then the series (7.1) converges absolutely. Observe that the condition (7.2) depends on the fixed parameter value r.

The matrix of the transform (7.1) is the transposed of the Euler transform, multiplied each element by r.

Observe that

$$r^{n+1} \sum_{\nu=n}^\infty \binom{\nu}{n} (1-r)^{\nu-n} = \sum_{\lambda=0}^\infty \binom{n+\lambda}{n} (1-r)^\lambda r^{n+1} = 1.$$

We now consider the Abel transform of the sequence (7.1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(r) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n r^{n+1} \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} (1-r)^{\nu-n} s_\nu$$

$$(7.3) \qquad = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \sum_{n=0}^{\nu} x^n r^{n+1} \binom{\nu}{n} (1-r)^{\nu-n}$$

$$= r \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \sum_{n=0}^{\nu} \binom{\nu}{n} (rx)^n (1-r)^{\nu-n} = r \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu (1-r+rx)^\nu .$$

We assume that (7.2) holds for each positive $r<1$, or, what is the same, that the power series $\Sigma s_n x^n$ converges for $0<x<1$.

It is then clear that the double series in (7.3) converges absolutely, hence the interchange of summation is legitimate.

Assuming Abel summability, we have

$$r(1-x) \sum_{0}^{\infty} s_\nu (1-r+rx)^\nu \to s, \text{ as } x \to 1,$$

hence

$$(1-x) \sum_{0}^{\infty} \gamma_n(r) x^n \to s, \quad 0<r<1.$$

This proves that A-summability implies $A(\gamma, r)$-summability.

If we write

$$1-r+rx = \tau(x,r) = \tau,$$

so that $0<\tau<1$ for $0<r<1$, $0<x<1$, then (7.3) becomes

$$(7.4) \qquad \sum_{0}^{\infty} \gamma_n(r) x^n = r \frac{f(\tau)}{1-\tau} = \frac{f(\tau)}{1-x}.$$

See also [3], p. 218.

In analogy to the Hausdorff transform, we can now introduce corresponding to the function $\psi(r)$ the transform

$$(7.5) \qquad \int_0^1 \gamma_n(r)\, d\psi(r) = \eta_n;$$

however the situation here is more involved, as the integrals need not exist, and even if they exist the series (7.1) and (7.3) need not be term by term integrable.

If for instance $\psi(r)=1-(1-r)^p$, $p>0$, then the Hausdorff-means reduce to Cesàro-means of order p, while after term of term integration of (7.1) we find

$$\eta_n=p(n+1)\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{\nu!}{(\nu-n)!}\frac{\Gamma(\nu-n+p)}{\Gamma(\nu+p+2)}s_\nu;$$

in particular for $p=1$

$$\eta_n=(n+1)\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{s}{(\nu+1)(\nu+2)}.$$

For such "quasi-Hausdorff" transforms see [3], p. 277-280.

Similar results can be established for the transform

$$S_n(r)=r^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{n}(1-r)^\nu s_\nu,$$

which was considered by Meyer-König [4].

REFERENCES

[1] R. P. Agnew, *Comparison of products of methods of summability*, Transactions of the American Mathematical Society 43 (1938), p. 327-343.

[2] R. P. Agnew, *Euler transformations*, American Journal of Mathematics 66 (1944), p. 313-340.

[3] G. H. Hardy, *Divergent series*, Oxford 1949.

[4] W. Meyer-König, *Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren*, Mathematische Zeitschrift 52 (1949), p. 257-304.

[5] Otto Szász, *On products of summability methods;* to appear in the Proceedings of the American Math. Society.

[6] R. Wais, *Das Taylorsche Summierungsverfahren*, Dissertation, Tübingen 1935.

ON POSITIVITY PRESERVING SEMIGROUPS OF TRANFORMATIONS ON $C[r_1, r_2]$.

By W. Feller (Princeton)

1. Introduction. In the sequel $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}[r_1, r_2]$ denotes the Banach space of functions $x = x(s)$ continuous in $-\infty \leq r_1 \leq s \leq \leq r_2 \leq \infty$ with the usual norm $\|x\| = \sup |x(s)|$. We speak of a *semigroup* of transformations $\{T_t\}$ if to each $t > 0$ there corresponds a linear transformation $T_t x$ defined for all $x \in \mathfrak{C}$ such that $T_t x \in \mathfrak{C}$ and $T_{t+\tau} = T_t T_\tau$. Moreover, we shall always tacitly assume that $T_t x$ is weakly measurable and that

$$\|T_t\| \leq 1. \tag{1.1}$$

Since for each real a the transformations $e^{at} T_t$ form a new semigroup it is obvious that (1.1) is not more restrictive than

$$\|T_t\| \leq e^{at} \quad \text{for some } a. \tag{1.2}$$

It is known (cf. Hille [4], p. 183) that the weak measurability (together with the separability of $\mathfrak{C}$) implies the *strong continuity property*

$$\|(T_{t+h} - T_t)x\| \to 0 \qquad h \downarrow 0 \tag{1.3}$$

for each $t > 0$ (but not necessarily for $t = 0$).

The semigroup $\{T_t\}$ is called *positivity preserving* if $x \geq 0$ implies $T_t x \geq 0$ for all $t > 0$.

The purpose of this paper is to give *a characterization of all positivity preserving semigroups on* $\mathfrak{C}$ *which are generated by an operator of a local character* in the sense of Definition 1. It will be seen that whenever a mild differentiability condition is satisfied, the infinitesimal generator Ω of the semigroup in its domain of existence coincides for almost all s with the differential operator (4.1). In section 5 this result is reformulated in a way as to provide *a characterization of the parabolic differential equation*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(s)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + b(s)\frac{\partial u}{\partial s} + c(s)u. \tag{1.4}$$

This is the basic equation of the theory of stochastic processes of the diffusion type and is essentially equivalent to the so-called *Fokker-Planck equation.* This point is discussed in section 7. It will be seen that our theorem leads to a *new derivation of the Fokker-Planck equation* under less stringent conditions.

The semigroup $\{T_t\}$ possesses an adjoint semigroup $\{T_t^*\}$ of transformations operating on the conjugate space to $\mathfrak{C}$, namely the space $\mathfrak{BV}[r_1, r_2]$ of functions of bounded variation in $[r_1, r_2]$. Our results therefore apply to semigroups in this space (cf. section 6).

2. The Infinitesimal Generator. As is well-known, the semigroup $\{T_t\}$ is determined by its infinitesimal generator Ω. This is an operator defined only on a set $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{C}$ consisting of those $x \in \mathfrak{C}$ for which $h^{-1}(T_h - I)x$ approaches a limit

$$\Omega x = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T_h - I}{h} x \qquad x \in \mathfrak{D}. \tag{2.1}$$

Here I is the identity operator and the limit is taken in the strong sense (uniform convergence). The set $\mathfrak{D}$ is dense in the closure of the range space of $T_t x$, $x \in \mathfrak{C}$.

Definition 1. *The infinitesimal generator will be said to be of a local character if for each point $\xi \in [r_1, r_2]$ and any $x(s) \in \mathfrak{C}$ which vanishes in some interval $|s - \xi| < \delta$ one has*

$$\left.\frac{T_h - I}{h} x(s)\right|_{s=\xi} \to 0. \tag{2.2}$$

(The left side is the value of the function $(T_h - I)x(s)h^{-1}$ at the point ξ).

The fact that the infinitesimal generator Ω is of a local character does not guarantee that it is a differential operator [1]). To see this it suffices to consider a transformation of the independent variable $\sigma = f(s)$, where $f(s)$ is a strictly increasing but not differentiable function. Such a transformation does not affect the space $\mathfrak{C}$ nor the character of the semigroup. However, it changes a differential operator Ω in s into an operator of a different kind in σ.

To restrict the consideration to differential operators it is therefore necessary to introduce the following

Differentiability condition. *For each $x(s) \epsilon \mathfrak{D}$ and each $s \epsilon [r_1, r_2]$ the derivatives $x'(s)$ and $x''(s)$ exist.*

(It is not necessary to require that $x'(s) \epsilon \mathfrak{C}$).

3. Singular Points. In this section we assume that the differentiability condition is satisfied. The set $\mathfrak{D}$ is usually so large that to each $\xi \epsilon [r_1, r_2]$ and to any three real numbers p_0, p_1, p_2 it is possible to find an $x(s) \epsilon \mathfrak{D}$ such that

$$x(\xi) = p_0, \quad x'(\xi) = p_1, \quad x''(\xi) = p_2. \tag{3.1}$$

If this is the case we shall say that ξ is a *regular* point.

Definition 2. *A point $\xi \epsilon [r_1, r_2]$ will be called singular if there exists at least one linear relation*

$$q_0 x(\xi) + q_1 x'(\xi) + q_2 x''(\xi) = 0 \tag{3.2}$$

satisfied by each $x(s)$ in the domain $\mathfrak{D}$ of the infinitesimal generator.

Since $\mathfrak{D}$ is a linear set, each point is either regular or singular. The existence of singular points is proved, and their nature illustrated, by the following

Example. Let $-\infty < s < \infty$ and consider the semigroup

$$T_t x(s) = 2\pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \cdot \exp\left\{ -\frac{(s^3 - \xi^3)^2}{4t} \right\} \cdot 3\xi^2 \cdot d\xi. \tag{3.3}$$

---

[1]) If one considers semigroups of transformations in the space of essentially bounded functions, then the local character of the infinitesimal generator does not guarantee that continuous functions are taken into continuous functions.

Introducing the substitutions $s^3=y$, $\xi^3=\eta$ it is seen that the function $u(t,y)=T_tx(s)$ is the well-known solution of the initial value problem for the diffusion equation $u_t=u_{yy}$. Accordingly, $x(s)$ will belong to the domain $\mathfrak{D}$ of the infinitesimal generator of (3.3) if and only if

$$\frac{d^2x(y^{1/3})}{dy^2}\in\mathfrak{C}[-\infty,\infty]. \tag{3.4}$$

In this case we have for $s\to 0$

$$x(s)=A+Bs^3+Cs^6+o(s^6). \tag{3.5}$$

Hence $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$ for each $x(s)\in\mathfrak{C}$, and $s=0$ is triply singular. For $s\neq 0$

$$\Omega x(s)=\frac{d^2x(y^{1/3})}{dy^2}=\frac{1}{9}s^{-4}\frac{d^2x(s)}{ds^2}-\frac{2}{9}s^{-5}\frac{dx(s)}{ds}, \tag{3.6}$$

so that the infinitesimal generator coincides with a differential operator of second order. However, for $s=0$

$$\Omega x(s)\Big|_{s=0}=2C=\frac{2}{6!}\frac{d^6x(s)}{ds^6}\Big|_{s=0} \tag{3.7}$$

which shows that at a singular point the infinitesimal generator may be of a form different from the one given in the following theorem.

4. Theorem. *Suppose that the infinitesimal generator Ω of the semigroup $\{T_t\}$ is of local character and that it satisfies the differentiability condition of section 2. Then at each regular point Ω coincides with a differential operator*

$$\Lambda=a(s)\frac{d^2}{ds^2}+b(s)\frac{d}{ds}+c(s), \tag{4.1}$$

where $a(s)\geq 0$, $c(s)\leq 0$.

Note. Even in the absence of singular points Ω is in general not identical with Λ but only a contraction of Λ.

Proof. Let ξ be a regular point and consider an $x_0(s)\in\mathfrak{D}$ such that

$$x_0(\xi)=x_0'(\xi)=0,\quad x_0''(\xi)=1. \tag{4.2}$$

Construct a function $\bar{x}_0(s) \in \mathfrak{C}$ such that $\bar{x}_0(s) \geq 0$ for all s and $\bar{x}_0(s) = x_0(s)$ in some interval $|s-\xi|<\delta$, Since $x_0(s) \in \mathfrak{D}$ and since Ω is of a local character, there exists a finite limit

$$a = \lim_{h\to 0} \frac{T_h - I}{h} x_0(s) \Big|_{s=\xi} = \lim_{h\to 0} \frac{T_h - I}{h} \bar{x}_0(s) \Big|_{s=\xi} \tag{4.3}$$
$$= \lim_{h=0} h^{-1} T_h \bar{x}_0(s) \Big|_{s=\xi}.$$

We have assumed that T_t is positivity preserving, and therefore $a \geq 0$.

Let $x(s)$ be any function in $\mathfrak{C}$ such that $x''(\xi)$ exists and

$$x(\xi) = x'(\xi) = 0, \quad x''(\xi) = \varrho > 0. \tag{4.4}$$

Then for ε sufficiently small there exists a neighbourhood of ξ such that in it

$$0 \leq (\varrho - \varepsilon)\bar{x}_0(s) \leq x(s) \leq (\varrho + \varepsilon)\bar{x}_0(s). \tag{4.5}$$

We now construct a function $\bar{x}(s) \in \mathfrak{C}$ which coincides with $x(s)$ in that neighbourhood but satisfies (4.5) for all s. Then

$$(\varrho - \varepsilon) T_t \bar{x}_0(s) \leq T_t \bar{x}(s) \leq (\varrho + \varepsilon) T_t \bar{x}_0(s) \tag{4.6}$$

for all $t > 0$. Now $\bar{x}_0(\xi) = \bar{x}(\xi) = 0$, and therefore (4.6) and (4.3) together imply that

$$\lim \frac{T_h - I}{h} \bar{x}(s) \Big|_{s=\xi} = \varrho \lim h^{-1} T_h \bar{x}_0(s) = a\varrho. \tag{4.7}$$

Again, $\bar{x}(s)$ and $x(s)$ coincide in some interval about ξ and hence

$$\lim \frac{T_h - I}{h} x(s) \Big|_{s=\xi} = a\varrho = a x''(\xi) \tag{4.8}$$

for every function $x(s)$ satisfying (4.4) (even if $x(s) \in \mathfrak{D}$).

The same argument goes through if $\varrho < 0$, and also if $\varrho = 0$ provided that $x(s)$ does not change sign in some neighbourhood of ξ. If $x''(\xi) = 0$ and $x(s)$ does change sign, one has to consider the function $x_+(s)$ which vanishes for $s \leq \xi$ and equals $x(s)$ for $s \geq \xi$, and separately $x_-(s) = x(s) - x_+(s)$. In this way, one establishes the validity of (4.8) for all functions for which $x''(\xi)$ exists and $x(\xi) = x'(\xi) = 0$.

Next consider an arbitrary $x(s) \in \mathfrak{C}$ for which $x''(\xi)$ exists. Define the functions $\Phi_\xi(s)$ and $\Psi_\xi(s)$ so that in some neighbourhood of

$$\begin{aligned} \Phi_\xi(s) &= x(\xi) + (s-\xi)x'(\xi) \\ \Psi_\xi(s) &= x(s) - \Phi_\xi(s), \end{aligned} \tag{4.9}$$

and that they are continuous and bounded. Then $\Psi_\xi(\xi) = \Psi'_\xi(\xi) = 0$ and hence

$$\frac{T_h - I}{h} \Psi_\xi(s) \Big|_{s=\xi} \to a x''(\xi). \tag{4.10}$$

Therefore for each $x(s) \in \mathfrak{D}$ the limit of

$$\frac{T_h - I}{h} \Phi_\xi(s) \Big|_{s=\xi} \tag{4.11}$$

exists. Now choose first $x(s)$ so that $x(\xi)=0$, $x'(\xi)=1$ and next so that $x(\xi)=1$ and $x'(\xi)=0$. Call the corresponding limits b and c. Then, in the general case, the expression (4.11) tends to $bx'(\xi)+cx(\xi)$.

That $c \leq 0$ follows from the fact that for $x(s)=1$ we have $0 \leq T_h x \leq 1$ because of (1.1).

We have thus proved not only the theorem but also the

Corollary. *If ξ is a regular point then for any function $x(s) \in \mathfrak{C}$ for which $x''(\xi)$ exists*

$$\lim \frac{T_h - I}{h} x(s) \Big|_{s=\xi} = a(\xi)x''(\xi) + b(\xi)x'(\xi) + c(\xi)x(\xi)$$

exists (even if $x(s)$ does not belong to the domain $\mathfrak{D}$ of Ω).

5. Reformulation for Differential Equations. Let Λ be an arbitrary differential operator in the variable s and consider the partial differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Lambda u. \tag{5.1}$$

Suppose that the initial value problem has a unique solution in the sense that to each $x(s) \in \mathfrak{C}$ there exists one and only one solution $u(t,s)$ defined and bounded for each fixed $t>0$ and such that $u(t,s) \to x(s)$ uniformly as $t \to 0$. Then, putting $u(t,s) = T_t x(s)$ we get a semigroup in $\mathfrak{C}$.

If there is no uniqueness, lateral conditions must be imposed on the solution, and to each determining homogeneous lateral condition there corresponds a semigroup of transformations (cf. [2]). In each case the infinitesimal generator is a contraction of the operator Λ. Accordingly:

The solutions of the initial value problem of a partial differential equation of form (5.1) *(with or without homogeneous lateral conditions) will be positivity preserving and norm not increasing if and only if the right side is given by* (4.1).

6. Measure Preserving Transformations. The conjugate space to $\mathfrak{C}$ is isomorphic to the functions of bounded variation in $[r_1, r_2]$ or, what amounts to the same, to the Banach space of completely additive set functions in $[r_1, r_2]$. The adjoint transformations T_t^* to T_t transforms each such set function into another. If T_t is positivity preserving so is T_t^*, and if (1.1) holds then also $\|T_t^*\| \leq 1$. Finally, T_t^* transforms a probability measure into a probability measure if and only if T_t transforms the function $x(s) = 1$ into itself. Needless to say that the transformations $\{T_t^*\}$ form a semigroup.

Our theorem is therefore equivalent to a theorem on semigroups of transformations of measures. The new semigroup T_t^* is generated by an operator which is adjoint to Ω. In differential equation theory it is customary to consider the following equation as adjoint to (5.1)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial s^2}(a(s)v) - \frac{\partial}{\partial s}(b(s)v) + c(s)v. \tag{6.1}$$

The truth is more complicated inasmuch as the complete adjoint to Λ is not necessarily a differential operator and (6.1) must be replaced by a more general equation. A detailed discussion of the relation between (5.1) and (6.1) is given in [2] together with the complete adjoint to Ω. This paper contains also a construction of all possible lateral conditions determining semigroups T_t and T_t^*.

7. Diffusion Theory and the Fokker-Planck Equation. A stationary stochastic process of the Markov type can be defined abstractly as a semigroup of transformations T_t^* taking probability measures into probability measures. It is customary to assume that this semigroup can be represented as a kernel transformation

$$T_t^* m(A) = \int P(t,s,A)\, m(ds) \tag{7.1}$$

where for fixed $t>0$, $s \in [r_1, r_2]$ the kernel represents a completely additive set function, and the integration extends over the whole interval. Probabilistically P represents the transition probability of finding the system at time t within the set A if it was originally at the point s. Such a transition probability must satisfy the Chapman-Kolmogorov equation which is an analytic formulation of the assertion that the transformations (7.1) form a semigroup.

Perhaps the best known and most interesting type of such processes is represented by diffusion processes. Kolmogorov [5] was first to treat them systematically, and his treatment has been improved in [1].

To derive the fundamental equations of diffusion theory it is necessary to assume that the set function $P(t,s,A)$ has a density function $p(t,s,y)$. It is the first aim of the theory to show that for fixed y the density $p(t,s,y)$ must satisfy an equation of form

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a(s)\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} + b(s)\frac{\partial p}{\partial s} \tag{7.2}$$

and for fixed s

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(a(y)p) - \frac{\partial}{\partial y}(b(y)p). \tag{7.3}$$

These equations are special cases of (5.1) and (6.1) and are known as *Fokker-Planck equations* or as the *backward and forward equations of diffusion theory*. The second equation is really a consequence of the first.

Our theorem represents a new derivation of (7.2) *stating necessary and sufficient conditions* [2]). We do not require the existence of the transition density $p(t,s,y)$, and the differentiability condition of section 2 is much weaker than the regu-

[2]) The argument applies also to $c \leq 0$, but when $c<0$ the measure of the whole space will decrease with increasing t.

larity restrictions previously used to derive (7.2). The local character of the infinitesimal generator replaces the so-called *Lindeberg condition* used in [1] which requires that for each $\varepsilon > 0$ and each fixed s

$$(7.4)\qquad \begin{aligned} &\lim_{t\to 0} t^{-1} \int\limits_{|y-s|>\varepsilon} p(t,s,y)\,dy = 0, \\ &\lim_{t\to 0} t^{-1} \int\limits_{|y-s|<\varepsilon} p(t,s,y)\,dy = 1. \end{aligned}$$

This conditions obviously implies the local character of the infinitesimal generator.

In additions to the Lindeberg condition one had to assume that the limits

$$(7.5)\qquad \lim_{t\to 0} t^{-1} \int\limits_{|y-s|<\varepsilon} (y-s)\,p(t,s,y)\,dy = b(s)$$

and

$$(7.6)\qquad \lim_{t\to 0} t^{-1} \int\limits_{|y-s|<\varepsilon} (y-s)^2 p(t,s,y)\,dy = 2a(s)$$

exist [3]. The corollary to our theorem shows that whenever a kernel $p(t,s,y)$ exists

$$(7.7)\qquad t^{-1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{y-s}{1+(y-s)^2}\, p(t,s,y)\,dy \to b(s)$$

and

$$(7.8)\qquad \frac{1}{2} t^{-1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{(y-s)^2}{1+(y-s)^2}\, p(t,s,y)\,dy \to a(s).$$

In view of the Lindeberg condition (7.4) these relations are obviously equivalent to (7.5) and (7.6). It should be noted, however, that the abstract formulation gives a meaning to these relations without assuming the existence of a kernel $p(t,s,y)$.

[3] For a slightly weaker formulation cf. [3].

REFERENCES

[1] W. Feller, *Zur Theorie der stochastischen Prozesse (Existenz und Eindeutigkeitssätze)*, Math. Annalen 113 (1936), p. 113-160.

[2] W. Feller, *The parabolic differential equation and the associated semigroups of transformations*, Annals of Math. 55 (1952), p. 468-519.

[3] W. Feller, *Some recent trends in the mathematical theory of diffusion*, Proc. Internat. Congress Math., Cambridge 1950.

[4] E. Hille, *Functional Analysis and Semi-groups*, Am. Math. Soc. Colloquium Publ. 31, New York 1948.

[5] A. Kolmogoroff, *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Annalen 104 (1931), p. 415-458.

Halifax, N. S.
August 1951.

ON THE DIFFERENTIALS IN BANACH SPACES

By A. ALEXIEWICZ and W. ORLICZ (Poznań)

Let X and Y be two real Banach spaces, $y=F(x)$ an operation from a set $A\subset X$ to Y. The *Gateaux differential* of F at x with increment h is defined as

$$(1)\qquad \lim_{\tau\to 0}\frac{F(x+\tau h)-F(x)}{\tau}=\delta F(x,h)$$

under the hypothesis that this limit exists for every $h\in X$ and that it is an additive and homogeneous function of h. If the Gateaux differential $\delta F(x,h)$ is continuous in h it will be called the *continuous Gateaux differential*. To render possible the calculation of the limit (1) we must suppose that the set A is such that $h\in X$ implies $x+\tau h\in A$ for small values of $|\tau|$.

It is obvious that the existence of the limit (1) implies its homogeneity in h. If we were dealing with the complex Banach spaces, the existence of the limit (1) (as τ assumes complex values) would imply its additivity in h (Hille [1], p. 73). In the real Banach spaces this is different. Consider e. g. as X the real plane, as Y the real axis and put for $x=(x_1,x_2)\in X$

$$(2)\qquad F(x)=\begin{cases}\dfrac{x_1x_2^2}{x_1^2+x_2^2} & \text{for}\quad x_1^2+x_2^2>0,\\ 0 & \text{for}\quad x_1=x_2=0;\end{cases}$$

for this function $\delta F(x,h)$ exists everywhere, is continuous in h and for $x=0$ is not additive in h.

If the limit (1) exists for every $h\in X$, $\delta F(x,h)$ will be called the *quasidifferential* of F at x.

We shall prove that under supplementary hypotheses the existence of the quasidifferential implies the existence of the Gateaux differential except in a set of the first category.

We shall use the mean value theorem in the following form: $\Phi(x)$ being a functional defined on the segment I joining the points x_1 and x_2, if the pseudodifferential exists at every point of I, then with $0<\vartheta<1$

$$\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=\delta\Phi(x_1+\vartheta(x_2-x_1),x_2-x_1).$$

Lemma. *Let $F(x)$ be defined in an open set A containing x_0. If $\delta F(x,h)$ exists in A and $\delta F(x,h_i)$ is continuous at $x=x_0$ for $i=1,2,\dots,n$, then*

$$\delta F(x_0,h_1+\dots+h_n)=\sum_{i=1}^{n}\delta F(x_0,h_i).$$

Proof. Since for every linear functional fx

$$f\delta F(x,h)=\delta fF(x,h),$$

it is sufficient to prove that $\delta fF(x_0,h_1+\dots+h_n)=\sum_{i=1}^{n}\delta fF(x_0,h_i)$, i. e. to prove the Lemma under the supplementary hypothesis of F being a functional. We shall prove it for three elements h_1,h_2,h_3. By the mean value theorem

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau}[F(x_0+\tau(h_1+h_2+h_3))-F(x_0)]&=\frac{1}{\tau}[F(x_0+\tau(h_1+h_2+h_3))\\ &\quad-F(x_0+\tau(h_2+h_3))]+\frac{1}{\tau}[F(x_0+\tau(h_2+h_3))-F(x_0+\tau h_3)]\\ &\quad+\frac{1}{\tau}[F(x_0+\tau h_3)-F(x_0)]=\frac{1}{\tau}\delta F(x_0+\tau(h_2+h_3)+\vartheta_1\tau h_1,\tau h_1)\\ &\quad+\frac{1}{\tau}\delta F(x_0+\tau h_3+\vartheta_2\tau h_2,\tau h_2)+\frac{1}{\tau}\delta F(x_0+\vartheta_3\tau h_3,\tau h_3)\\ &=\delta F(x_0+\tau(h_2+h_3)+\vartheta_1\tau h_1,h_1)\\ &\qquad+\delta F(x_0+\tau h_3+\vartheta_2\tau h_2,h_2)+\delta F(x_0+\vartheta_3\tau h_3,h_3)\end{aligned}$$

with $0<\vartheta_i<1$. Hence, for $\tau\to 0$

$$\frac{1}{\tau}[F(x_0+\tau(h_1+h_2+h_3))-F(x_0)]\to \delta F(x_0,h_1)+\delta F(x_0,h_2)+\delta F(x_0,h_3).$$

Theorem. *Let the space X be separable and suppose that $F(x)$ is continuous in an open set A. If the quasidifferential $\delta F(x,h)$ exists for every $x \in A$, then the continuous Gateaux differential exists in a set R residual in A* [1].

Proof. Denote by A_n the set of the elements x, such that $\operatorname{dist}(x, CA) > 1/n$, and by H_n the sphere $\|h\| \leqslant 1/n$. It is sufficient to prove for any n the existence of a set R_n residual in A_n, such that

$$\delta F(x, h_1 + h_2) = \delta F(x, h_1) + \delta F(x, h_2) \tag{3}$$

for $x \in R_n$, $h_1, h_2 \in H_4$.

The function $\delta F(x,h)$ being the limit of functions

$$m[F(x+m^{-1}h) - F(x)]$$

continuous in $A_n \times H_1$ (defined for $m > n$), it is continuous in a residual set $W \subset A_n \times H_1$. By a theorem of Kuratowski and Ulam ([2], p. 248) there exists a set R_n residual in A_n, such that for every $x \in R_n$ the set

$$[(x) \times H_1] \cdot W = W_x \text{ [2]}$$

is residual in H_1. Let $x_0 \in R_n$, $h_1, h_2 \in H_4$; then the sets W^i of the elements of the form $h_i - w$, where $w \in W_{x_0}$, are residual in H_2 for $i = 1, 2$; hence $W_{x_0} \cdot W^1 \cdot W^2 \neq 0$; thus there are elements $h', h'', h''' \in W_{x_0}$ such that $h''' = h_1 - h' = h_2 - h''$. The function $\delta F(x,h)$ being continuous at x_0 for $h = h', h'', h'''$, we get by Lemma

$$\delta F(x_0, h_1 + h_2) = \delta F(x_0, h''' + h' + h''' + h'') =$$
$$\delta F(x_0, h''') + \delta F(x_0, h') + \delta F(x_0, h''') + \delta F(x_0, h'') =$$
$$\delta F(x_0, h''' + h') + \delta F(x_0, h''' + h'') = \delta F(x_0, h_1) + \delta F(x_0, h_2).$$

The continuity in h of $\delta F(x_0, h)$ is obvious.

The function $F(x)$ is said to be *Fréchet differentiable* at x if there exists the continuous Gateaux differential and

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x) - \delta F(x,h)}{\|h\|} = 0,$$

[1]) A set whose complement to the set A is of the first category is said to be *residual* in A.

[2]) (x) denotes here the set composed of the element x.

or, equivalently, if

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{F(x+\tau h)-F(x)}{\tau}=\delta F(x,h)$$

uniformly for $\|h\|\leqslant 1$. This being so, $\delta F(x,h)$ is called the *Fréchet differential.*

The example (2) shows that the existence of the limit (1) uniformly for $\|h\|\leqslant 1$ does not imply the additivity in h of that limit, though it might be continuous in h.

In finite dimensional spaces the existence of the Gateaux differential together with its continuity in all the variables implies the Fréchet differentiability (called in this case *Stolz differentiability*). We shall prove that this holds no more in general Banach spaces even if we impose on F more restrictive conditions.

There exists an operation $F(x)$ from a separable Banach space to itself, satisfying the condition of Lipschitz, having everywhere the Gateaux differential continuous in x and h jointly, and deprived everywhere of the Fréchet differential.

Let $X=Y$ be the space C_0 of the sequences $x=\{\xi_n\}$ of real numbers convergent to 0. Denote by δ_{ik} the delta of Kronecker, then put for $x=\{\xi_\nu\}$

$$\eta_{2\nu}(x)=\frac{1}{\nu}\cos\nu\xi_\nu,\qquad \eta_{2\nu+1}(x)=\frac{1}{\nu}\sin\nu\xi_\nu,$$
$$F(x)=\{\eta_n(x)\}.$$

The operation $F(x)$ is defined in C_0, assumes values of C_0, and satisfies the condition of Lipschitz. In fact, write $h=\{\gamma_n\}$; then

$$|\eta_{2\nu}(x+h)-\eta_{2\nu}(x)|=|\gamma_\nu\cos(\nu\xi_\nu+\nu\vartheta_\nu\gamma_\nu)|\leqslant|\gamma_\nu|\leqslant\|h\|$$

and similarly

$$|\eta_{2\nu+1}(x+h)-\eta_{2\nu+1}(x)|\leqslant\|h\|;$$

hence $\|F(x+h)-F(x)\|\leqslant\|h\|$. Put now

$$\zeta_{2\nu}(x,h)=-\gamma_\nu\sin\nu\xi_\nu,\qquad \zeta_{2\nu+1}(x,h)=\gamma_\nu\cos\nu\xi_\nu,$$
$$\Phi(x,h)=\{\zeta_\nu(x,h)\}.$$

The function $\Phi(x,h)$ is obviously additive and homogeneous in h, and continuous in both variables. We shall prove that $\delta F(x,h)=\Phi(x,h)$. By the mean value theorem

$$\frac{1}{\tau}[\eta_{2\nu}(x+\tau h)-\eta_{2\nu}(x)]-\zeta_{2\nu}(x,h)=\gamma_\nu[\sin\nu\xi_\nu-\sin\nu(\xi_\nu+\vartheta_\nu\tau\gamma_\nu)],$$

where $0<\vartheta<1$. The element $h=\{\gamma_\nu\}$ being fixed we first choose N for $\varepsilon>0$ so that $|\gamma_\nu|<\varepsilon$ for $\nu>N$, then we choose a $\delta>0$ so that $|\tau|<\delta$, $\nu=1,\ldots,N$ implies

$$|\sin\nu\xi_\nu-\sin\nu(\xi_\nu+\vartheta_\nu\tau\gamma_\nu)|<\frac{\varepsilon}{\|h\|}.$$

Then

$$\left|\frac{1}{\tau}[\eta_{2\nu}(x+\tau h)-\eta_{2\nu}(x)]-\zeta_{2\nu}(x,h)\right|<\varepsilon \quad\text{for}\quad |\tau|<\delta.$$

A similar result holds for the functions $\eta_{2\nu+1}(x,h)$; hence

$$\left\|\frac{1}{\tau}[F(x+\tau h)-F(x)]-\Phi(x,h)\right\|<\varepsilon$$

if $|\tau|<\delta'$.

In order to prove that $F(x)$ is nowhere Fréchet-differentiable denote by e_n the element $\{\delta_{n\nu}\}_{\nu=1,2,\ldots}$ and let $x=\{\xi_\nu\}$ be an arbitrary element. Consider two cases:

1^0 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|n\sin\xi_n|>0$. Put $h_n=2\pi n^{-1}e_{2n}$; then $\|h_n\|\to 0$ and

$$F(x+h_n)-F(x)-\delta F(x,h_n)=e_{2n}2\pi n^{-1}\sin n\xi_n=\|h_n\|e_{2n}\sin n\xi_n;$$

hence

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\|F(x+h_n)-F(x)-\delta F(x,h_n)\|}{\|h_n\|}>0; \tag{4}$$

2^0 $\lim\limits_{n\to\infty}|n\cos\xi_n|=1$. Put $h_n=2\pi n^{-1}e_{2n+1}$; then $\|h_n\|\to 0$ and

$$F(x+h_n)-F(x)-\delta F(x,h_n)=e_{2n+1}\|h_n\|\cos n\xi_n;$$

hence the inequality (4) holds in this case too.

BIBLIOGRAPHY

[1] E. Hille, *Functional Analysis and Semigroups*, American Mathematical Society Colloquium Publications 31 (1948).

[2] C. Kuratowski and S. Ulam, *Quelques propriétés topologiques du produit combinatoire*, Fundamenta Mathematicae 19 (1932), p. 247-251.

Poznań, June 1951.

Państwowy Instytut Matematyczny

ON VECTOR-VALUED ALMOST PERIODIC FUNCTIONS

By J. Kopeć (Poznań)

Let X be a complex Banach space. Any function $x(t)$ defined for $-\infty < t < +\infty$ with values in X will be called a *vector-valued* function.

In 1933 Bochner [2] developed a theory of vector-valued almost periodic functions. He established the validity of the main theorems of Bohr, in this more general case. The purpose of this note is to prove some of Bochner's results by quite different and simpler methods. Unlike in the proofs of Bochner an extended use is made of the results of Bohr concerning the numeric case.

The function $x(t)$ is said to be *almost periodic* or briefly to be *a. p.* if it is continuous and if for every $\varepsilon > 0$ there is a relatively dense set $T(\varepsilon)$ of numbers, such that for every $\tau \in T$ and every t

$$\|x(t+\tau) - x(t)\| \leqslant \varepsilon.$$

The elements of $T(\varepsilon)$ are called the *ε-translation numbers* of $x(t)$. The numeric almost periodic functions will be denoted in the sequel by $\varphi(t), \psi(t)$. We shall use the following theorems concerning the numeric case:

(a) *For every $\varphi(t)$ there exists*

$$M_t\{\varphi(t)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\,dt\,;$$

(b) *The set of the numbers λ for which $a(\lambda) = M_t\{\varphi(t)\,e^{-i\lambda t}\} \neq 0$ is at most denumerable.*

The λ's for which $a(\lambda) \neq 0$ are called the *Fourier exponents* of φ.

Denote by $\{\beta_i\}$ the basis of the exponents ([3]) of the function φ and put $P = q \cdot q! = q \cdot Q$ and

$$K^q(\vartheta) = \sum_{\nu_1=-P}^{P} \dots \sum_{\nu_q=-P}^{P} \left(1-\frac{\nu_1}{P}\right)\left(1-\frac{\nu_2}{P}\right)\dots\left(1-\frac{\nu_q}{P}\right) e^{-i\vartheta\left(\frac{\nu_1}{Q}\beta_1+\dots+\frac{\nu_q}{Q}\beta_q\right)},$$

(1)

$$s_q(\vartheta) = \sum_{1}^{N} a_k e^{i\Lambda_k t} = M\{\varphi(t+\vartheta)K^q(\vartheta)\}.$$

Then

(c) *$s_n(t)$ is a sequence of trigonometric polynomials and*

$$s_n(t) \rightrightarrows \varphi(t) \quad \text{for} \quad -\infty < t < +\infty,$$

(d) $K^q(\vartheta) \geqslant 0, \quad M_\vartheta\{K^q(\vartheta)\} = 1,$

(e) $|s_n(t)| \leqslant \max |\varphi(t)|.$

In the formulae defining the polynomials of Bochner some β_i's which do not belong to the basis may be added without any influence on the statements (c), (d) and (e).

The following theorems concerning the vector-valued *a. p.* functions either are trivial or can be proved in the same way as for the numeric functions:

(A) *$x(t)$ being an a. p. function and ξx being any functional linear over X, the function $\xi x(t)$ is a numeric a. p. function, and every ε-translation number for $x(t)$ is an ε-translation number for $\xi x(t)$.*

(B) *Every a. p. function is uniformly continuous and uniformly bounded.*

(C) *For every a. p. function there exists the mean value*

$$\mathfrak{M}_t\{x(t)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt,$$

the integral being taken in the Riemann sense [4].

(D) *For every a. p. function and every linear functional ξ*

$$\xi\,\mathfrak{M}_t\{x(t)\} = M_t\{\xi x(t)\}.$$

We pass now to the three principal theorems of the theory.

(E) **Theorem.** *For every a. p. function $x(t)$ the set of the values λ for which $A(\lambda)=\mathfrak{M}_t\{x(t)e^{-i\lambda t}\}\neq 0$ is at most denumerable.*

Proof. The function $x(t)$ being separably valued we may suppose that the space X is separable. Hence, by a theorem of Banach ([1], p. 124), there exists such a sequence of linear functionals $\{\xi_n\}$ that for every linear functional ξ there exists a subsequence $\{\xi_{n_i}\}$ such that

$$\lim_{i\to\infty}\xi_{n_i}(x)=\xi(x) \tag{2}$$

for every x. The set $E_n=\underset{\lambda}{E}\{\xi_n A(\lambda)\neq 0\}=\underset{\lambda}{E}\{M_t\{e^{-i\lambda t}\xi_n x(t)\}\neq 0\}$ being at most denumerable, by (A), (D), and (b), the set $E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n$ is so, too. We shall prove that $\lambda\in(-\infty,+\infty)-E$ implies $A(\lambda)=0$. In fact, ξ being any linear functional, pick out the functionals ξ_{n_i} so as to have (2). Since

$$\xi A(\lambda)=\lim_{i\to\infty}\xi_{n_i}A(\lambda)=0$$

for arbitrary functional ξ, we get $A(\lambda)=0$.

The series $\sum_{\lambda}A(\lambda)e^{i\lambda t}$ is called the *Fourier series* of $x(t)$. Since, given any linear functional ξ, the series $\sum_{\lambda}\xi A(\lambda)e^{i\lambda t}$ is the Fourier series of the function $\xi x(t)$, we get immediately the theorem of unicity:

(F) *Two a. p. functions with the same Fourier series are identical.*

(G) **Theorem.** *For every a. p. function $x(t)$ there exists a sequence of trigonometric polynomials converging uniformly to $x(t)$.*

Proof. The polynomials of Bochner for numeric functions are equi-uniformly continuous and equi-almost-periodic. Define the Bochner polynomials $S_n(t)$ for $x(t)$ by the same formulae as for numeric functions. Then for every linear functional ξ

$$\xi S_n(t) \rightrightarrows \xi x(t), \tag{3}$$

since every $a(\lambda)\neq 0$ for $\xi x(t)$ is equal to $\xi A(\lambda)$; moreover $S_n(t)$ are equi-almost-periodic and equi-uniformly continuous.

In fact

$$S_n(t+s)-S_n(t)=\mathfrak{M}_\vartheta\{[x(t+\vartheta+s)-x(t+\vartheta)]K^q(\vartheta)\},$$

and, by almost-periodicity, $s \in T(\varepsilon)$ implies

$$(4) \qquad \|S_n(t+s)-S_n(t)\| \leqslant M_\vartheta\{\varepsilon K^q(\vartheta)\}=\varepsilon M_\vartheta\{K^q(\vartheta)\}=\varepsilon;$$

we have also shown that every ε-translation number of $x(t)$ is an ε-translation number for $S_n(t)$. By uniform continuity of $x(t)$, the inequality (4) holds also for every $|s|<\delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon)$ being independent of n. This implies equi-uniform continuity of the S_n's.

Let the sequence $\{t_i\}$ be dense in $(-\infty, +\infty)$ and denote by X^n the Cartesian product $X\times X\times \ldots \times X$ (n-times); let the norm in X^n be defined as

$$\|z\|=\|(x_1,x_2,\ldots,x_n)\|=\max(\|x_1\|,\ldots,\|x_n\|).$$

The general form of linear functional in X^n is

$$\zeta z=\xi_1 x_1+\ldots+\xi_n x_n,$$

ξ_i being a linear functional in X. Put

$$\begin{aligned} z_k &= (S_k(t_1),\ldots,S_k(t_n)),\\ z &= (x(t_1),\ldots,x(t_n)). \end{aligned}$$

By (3) the sequence $\{z_k\}$ converges weakly to z; by a theorem of Mazur ([5], p. 81) there are non negative numbers $\alpha_{1n},\ldots,\alpha_{mn}$ such that

$$(5) \qquad \alpha_{1n}+\ldots+\alpha_{mn}=1$$

and

$$\|\alpha_{1n}z_1+\alpha_{2n}z_2+\ldots+\alpha_{mn}z_m-z\|<\frac{1}{n}.$$

Hence, writing

$$V_n(t)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{in}S_i(t)$$

we get

$$\|V_n(t)-x(t)\|<\frac{1}{n} \quad \text{for } t=t_k,\ k=1,\ldots,n.$$

By (4) the trigonometric polynomials are equi-uniformly continuous and every ε-translation number for $x(t)$ has the same property relatively to $V_n(t)$. By the theorem of Arzelà in every finite interval

$$V_n(t) \rightrightarrows x(t).$$

To prove the convergence to be uniform in $(-\infty, +\infty)$ denote by L an $\varepsilon/3$-inclusion interval for $x(t)$. Then choose an interval $\langle -a, a\rangle$ of a length greater than L. Every number t is of the form $l+\tau$ with $l \in \langle -a, a\rangle$, τ being common $\varepsilon/3$-translation number for $x(t)$ and all the $V_n(t)$. Hence,

$$\|V_n(t) - x(t)\| = \|V_n(l+\tau) - x(l+\tau)\| = \|[V_n(l+\tau) - V(l)] +$$
$$+ [x(l) - x(l+\tau)] + [V_n(l) - x(l)]\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

for $n > N(\varepsilon/3)$.

The polynomials $S_n(\vartheta)$ are not uniquely determined, since they depend on the arrangement of the elements of the basis into a sequence. If we add to the basis some new elements and form the polynomials $S_n(\vartheta)$ with respect to this extended basis the statements (c) and (d) hold likewise.

We shall prove, besides, that the Bochner polynomials $S_n(t)$ defined in the proof of the above theorem converge uniformly to $x(t)$.

Denote by E the space of the *a. p.* functions $y = y(t)$ with the same basis of exponents as the function $x(t)$; linear operations being defined as usual and the norm by formula

$$\|y\| = \sup \|y(t)\|,$$

E is a Banach space. From theorem (G) it follows that the finite trigonometric polynomials are dense in E. For every y in E form the operation

$$S_n = S_n(y; t)$$

by formula (1); this operation is linear from E to E; moreover $\|S_n\| \leqslant \|y\|$.

For every finite trigonometric polynomial

$$y = \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu e^{i\lambda_\nu t}$$

belonging to E we have

$$S_n(y;t) = \sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon_{\nu n} a_\nu e^{i\lambda_\nu t}$$

with $\lim \varepsilon_{\nu n} = 1$; hence $S_n(y;t) \rightrightarrows y(t)$. By the theorem of Banach and Steinhaus ([1], p. 79)

$$S_n(y;t) \rightrightarrows y(t)$$

for every $y \in E$; hence the same holds for the element $x = x(t)$.

BIBLIOGRAPHY

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1932.

[2] S. Bochner, *Abstrakte fastperiodische Funktionen*, Acta Mathematica 61 (1933), p. 149-184.

[3] H. Bohr, *Fastperiodische Funktionen*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin 1932.

[4] L. M. Graves, *Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis*, Transactions of the American Mathematical Society 44 (1938), p. 305-356.

[5] S. Mazur, *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen*, Studia Mathematica 4 (1933), p. 70-84.

Zakład Matematyki Uniwersytetu Poznańskiego.

GENERALIZED LIMITS AND MEANS

By R. Sikorski (Warszawa)

A semigroup G is said to be *solvable* [1]) if there is a sequence

$$G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n = G$$

of sub-semigroups $\{G_i\}$ such that, for $i=1,\ldots,n$,

(a) if $\varphi \in G_i$, $\psi \in G_{i-1}$, then there is a $\psi^* \in G_{i-1}$ such that $\psi^*\varphi = \varphi\psi$;

(b) if $\varphi, \psi \in G_i$, then there is a $\psi^* \in G_{i-1}$ such that $\varphi\psi = \psi^*\psi\varphi$;

(c) G_0 contains only the unit element of G.

In the sequel the letter f with indices will exclusively denote mappings of an abstract set T into linear topological spaces. The symbol $K(f)$ will denote the least closed convex set containing the image $f(T)$ of T. If f_i $(i=1,\ldots,j)$ is a mapping of T into a linear topological space X_i, then $[f_1,\ldots,f_j]$ will denote the mapping $g(t) = (f_1(t),\ldots,f_j(t))$ of T into the Cartesian product $X_1 \times \ldots \times X_j$. The superposition $f(\varphi(t))$ of mappings f, φ will be denoted by $f\varphi$.

Theorem. *Let G be a solvable semigroup of transformations of an abstract set T into itself. With every mapping f of T into any linear topological space, such that the set $K(f)$ is compact (= bicompact), one can associate a mapping $\Phi(f,t)$ $(t \in T)$ in such a way that*

(i) $\Phi(f,t) = \Phi(f,\varphi(t)) = \Phi(f\varphi,t)$ *for every* $t \in T$, $\varphi \in G$;

(ii) $\Phi(f,t) \in K(f\varphi)$ *for every* $\varphi \in G$;

(iii) *if F is a continuous linear transformation of $X_1 \times \ldots \times X_j$ into Y ($X_1,\ldots,X_j, Y$ — linear topological spaces) and if $K(f_i)$ is compact $(i=1,\ldots,j)$, then*

$$\Phi(F[f_1,\ldots,f_j],t) = F(\Phi(f_1,t),\ldots,\Phi(f_j,t)).$$

---

[1]) If G is a group, the above definition is equivalent to the usual one.

Consequently, if G has the property

(d) for every pair $t_1, t_2 \in T$ there are transformations $\varphi_1, \varphi_2 \in G$ with $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$,

then $\Phi(f) = \Phi(f,t)$ does not depend on t. Then $\Phi(f)$ is a functional defined on the class of all mappings f of T into linear topological spaces with compact $K(f)$, such that

(i′) $\Phi(f\varphi) = \Phi(f)$ for each $\varphi \in G$;

(ii′) $\Phi(f) \in K(f\varphi)$ for each $\varphi \in G$;

(iii′) $\Phi(F[f_1, \ldots, f_j]) = F(\Phi(f_1), \ldots, \Phi(f_j))$ for each linear continuous transformation F; in particular $\Phi([f_1, \ldots, f_j]) = (\Phi(f_1), \ldots, \Phi(f_j))$;

(iv′) $\Phi(af + a'f') = a\Phi(f) + a'\Phi(f')$ (a, a' — real numbers);

(v′) if f maps T into a partly ordered space[2]), and $f(t) \geqslant 0$ for all $t \in T$, then $\Phi(f) \geqslant 0$.

The above Theorem is a generalization of Theorem II in my paper *On the existence on the generalized limit*[3]), which will be referred to as [GL]. The existence of the functional $\Phi(f)$, which should be called the *generalized limit* or the *generalized mean*[4]) of f, was proved in [GL] under the more restrictive hypothesis that G is abelian. It follows from the above Theorem that in [GL], Corollary[5]), the assumption that the semigroup under consideration is abelian may be replaced by the weaker condition that it is solvable.

Proof. Notice first that the Theorem is true if the semigroup is abelian. This fact follows immediately from the proof of [GL], Theorem II.

Let $\{G_i\}$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) be the sequence of semigroups satisfying (a), (b) and (c). We shall show by induction on i that there is a functional $\Phi_i(f,t)$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) satisfying the conditions (i), (ii), and (iii), where Φ and G are replaced by Φ_i and G_i

---

[2]) A linear topological space is said to be *partly ordered* if there is defined an ordering relation $x \geqslant y$ such that: 1° if $x \geqslant y$, then $x+z \geqslant y+z$; 2° if $x \geqslant 0$ and a is a positive number, then $ax \geqslant 0$; 3° the set of all $x \geqslant 0$ is closed.

[3]) Studia Mathematica 12 (1951), p. 117-124.

[4]) See [GL], p. 124.

[5]) [GL], p. 123.

respectively. Obviously the functional $\Phi(f,t)=\Phi_n(f,t)$ is the required one.

The case $i=0$ is trivial. Since G_0 contains only the identical transformation, we put $\Phi_0(f,t)=f(t)$. In order to prove the Theorem it is sufficient to show that the existence of Φ_{i-1} implies the existence of Φ_i $(1\leqslant i\leqslant n)$.

Write $t\equiv t'$ if there exist transformations $\varphi_1,\dots,\varphi_m$, $\psi_1,\dots,\psi_m\in G_{i-1}$ and elements $t_1,\dots,t_{m+1}\in T$ such that $t=t_1$, $t'=t_{m+1}$ and $\varphi_k(t_k)=\psi_k(t_{k+1})$, $k=1,\dots,m$. The relation $\equiv$ is an equivalence relation. For every $t\in T$, let $\hat{t}$ be the set of all $t'\in T$ such that $t\equiv t'$, and let $\hat{T}$ be the set of all $\hat{t}$ $(t\in T)$.

If $t\equiv t'$ and $\varphi\in G_i$, then $\varphi(t)\equiv\varphi(t')$. In fact, by (a) there are $\varphi_k^*, \psi_k^*\in G_{i-1}$ such that $\varphi_k^*\varphi=\varphi\varphi_k$, $\psi_k^*\varphi=\varphi\psi_k$, $k=1,\dots,m$. Hence

$$\varphi_k^*(\varphi(t_k))=\varphi(\varphi_k(t_k))=\varphi(\psi_k(t_{k+1}))=\psi_k^*(\varphi(t_{k+1})),$$

which gives $\varphi(t)\equiv\varphi(t')$. Consequently the formula

$$\hat{\varphi}(\hat{t})=\widehat{\varphi(t)} \qquad (t\in T,\quad \varphi\in G_i)$$

defines a transformation $\hat{\varphi}$ of $\hat{T}$ into itself. The class $\hat{G}$ of all transformations $\hat{\varphi}$ $(\varphi\in G_i)$ is obviously a semigroup. Moreover, $\hat{G}$ is an abelian semigroup. In fact, if $\varphi,\psi\in G_i$, there is a $\psi^*\in G_{i-1}$ such that $\varphi\psi=\psi^*\psi\varphi$ by (b). Consequently $\hat{\varphi}\hat{\psi}=\hat{\psi}^*\hat{\psi}\hat{\varphi}$. Since $\psi^*\in G_{i-1}$, we have $\psi^*(t)\equiv t$, i. e. $\hat{\psi}^*$ is the identical mapping. Hence $\hat{\varphi}\hat{\psi}=\hat{\psi}\hat{\varphi}$.

$\hat{G}$ being abelian, there is a functional $\hat{\Phi}(\hat{f},\hat{t})$ defined for all mappings $\hat{f}$ of $\hat{T}$ into linear topological spaces with compact $K(\hat{f})$ and satisfying (i), (ii), and (iii), where Φ, T, and G are replaced by $\hat{\Phi}$, $\hat{T}$, and $\hat{G}$ respectively.

By (i), $\Phi_{i-1}(f,t)=\Phi_{i-1}(f,t')$ if $t\equiv t'$. Consequently the formula

$$\text{(e)} \qquad \hat{f}(\hat{t})=\Phi_{i-1}(f,t)$$

defines a mapping $\hat{f}$ on $\hat{T}$. The set $K(\hat{f})$ is compact since it is a closed subset of $K(f)$ (see (ii)).

It is easy to verify that the functional Φ_l defined by the equation

$$\Phi_l(f,t) = \hat{\Phi}(\hat{f},\hat{t}),$$

where $\hat{f}$ is determined by (e), has the required properties.

Państwowy Instytut Matematyczny
State Institute of Mathematics

ÜBER DIE ABSTÄNDE VON PUNKTEN $n\xi$ AUF DER KREISPERIPHERIE

Von S. HARTMAN (Wrocław)

Auf dem Kreise vom Umfang 1 wird ein irrationaler Bogen ξ von einem beliebig gewählten Nullpunkt P_0 aus in einer als positiv festgesetzten Richtung n-mal hintereinander abgelegt. Es seien $P_1, \ldots, P_n$ die so erhaltenen Endpunkte. Der kleinste Abstand von zwei benachbarten Punkten P_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) sei mit m_n und der größte mit M_n bezeichnet.

Die nachstehend bewiesenen Sätze bestätigen die von H. Steinhaus geäußerte Vermutung, nach welcher

$$\varliminf_{n\to\infty} n m_n = 0, \quad \varlimsup_{n\to\infty} n m_n = \varliminf_{n\to\infty} n M_n = 1, \quad \varlimsup_{n\to\infty} n M_n = \infty$$

für fast jedes ξ.

Die Beweise bestehen größtenteils in einer einfachen Zurückführung auf bekannte Ergebnisse über die diophantischen Approximationen, so daß vor allem die Anschaulichkeit und Symmetrie der Steinhausschen Formulierung ausschlaggebend für das Erscheinen dieser Arbeit waren.

Für fast jede Zahl ξ ist bekanntlich die Folge ihrer Teilnenner b_i in der Kettenbruchentwicklung $\xi = \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \ldots$ unbeschränkt. Wegen der für die Nenner der Näherungsbrüche $p_i/q_i = p_i(\xi)/q_i(\xi)$ geltenden Formel $q_{i+1} = b_{i+1} q_i + q_{i-1}$ ist die Relation $\varlimsup_{i\to\infty} b_i = \infty$ mit

$$(1) \qquad \varliminf_{i\to\infty} q_i/q_{i+1} = 0$$

gleichbedeutend.

Lemma. *Ist für ein irrationales ξ und natürliches $n \geqslant q_1$ der Index i aus der Ungleichung $q_i \leqslant n < q_{i+1}$ bestimmt, so gilt*

$$m_n = |q_i \xi - p_i|. \tag{2}$$

Beweis. Zuerst bemerken wir, daß m_n gleich dem (längs der Kreisperipherie gemessenen) Abstand von P_0 bis zum nächstliegenden P_k $(k=1,\ldots,n)$ ist. In der Tat: ist $m_n = \overline{P_r P_s}$ und etwa $r > s$, so ist $0 < r-s = t \leqslant n$ und $m_n \equiv t\xi \pmod 1$ oder $m_n \equiv -t\xi \pmod 1$, daher $m_n = \overline{P_0 P_t}$. Man hat also $m_n = |t\xi - u|$ bei geeignetem ganzen u. Daraus folgt mit Rücksicht auf die Irrationalität von ξ, daß für jedes natürliche $q < t$ (ja sogar für $q \leqslant n, q \neq t$) und jedes ganze p die Ungleichung $|q\xi - p| > |t\xi - u|$ besteht, daß also der Bruch u/t eine „beste Näherung zweiter Art" der Zahl ξ ist. Demnach muß bekanntlich t mit einem q_j identisch sein[1]). Da aber für $j < i$ immer $|q_i\xi - p_i| < |q_j\xi - p_j|$ gilt, so hat man endlich $t = q_i$, woraus (2) folgt.

Satz I. *Hat ξ unbeschränkte Teilnenner, so ist $\varliminf\limits_{n\to\infty} n m_n = 0$.*

Beweis. Auf Grund des Lemmas hat man

$$m_{q_i} = |q_i \xi - p_i|, \tag{3}$$

also $q_i m_{q_i} < q_i/q_{i+1}$, daher wegen (1)

$$\varliminf_{i\to\infty} q_i m_{q_i} = 0$$

und umsomehr die Behauptung des Satzes.

Bemerkung. Die Anwendung des Lemmas war in diesem Beweise unwesentlich, weil anstatt (3) die (augenscheinliche) Ungleichung $m_{q_i} \leqslant |q_i\xi - p_i|$ genügt hätte.

Satz II. *Hat ξ unbeschränkte Teilnenner, so ist $\varlimsup\limits_{n\to\infty} n m_n = 1$.*

Beweis. Es sei $\{q_{k_i}\}$ eine Teilfolge von q_i, welche den Bedingungen

$$\lim_{i\to\infty} q_{k_i}/q_{k_i+1} = 0, \tag{*}$$

$$q_{k_i+1} > 2 q_{k_i} \tag{**}$$

---

[1]) A. J. Khintchine, *Cepnye Drobi*, Moskva-Leningrad 1949, izd. 2, S. 36.

genügt. Wir setzen $q_{k_l+1}-q_{k_l}=c_l$ und beweisen, daß $\lim\limits_{l\to\infty} c_l m_{c_l}=1$. Da wegen $(\overset{*}{*})$ die Ungleichungen $q_{k_l}<c_l<q_{k_l+1}$ bestehen, so liefert das Lemma $m_{c_l}=|q_{k_l}\xi-p_{k_l}|$, daher

$$m_{c_l}>\frac{1}{q_{k_l+1}+q_{k_l}} \quad \text{und} \quad c_l m_{c_l}>\frac{q_{k_l+1}-q_{k_l}}{q_{k_l+1}+q_{k_l}}.$$

Demnach schließt man mit Rücksicht auf (*), daß $\varliminf\limits_{l\to\infty} c_l m_{c_l}\geqslant 1$. Da offenbar immer $nm_n<1$, so ergibt sich tatsächlich $\lim\limits_{l\to\infty} c_l m_{c_l}=1$ und $\varlimsup\limits_{n\to\infty} nm_n=1$.

Es liegt die Frage nahe, was man über $\varlimsup\limits_{i\to\infty} q_i m_{q_i}$ aussagen kann. Ich beweise nur, daß für fast jedes ξ die Ungleichung $\varlimsup\limits_{i\to\infty} q_i m_{q_i}\geqslant 1/2$ besteht.

Es sei nämlich ein ξ gegeben, für welches

$$\varlimsup_{i\to\infty} q_i/q_{i+1}=1. \tag{4}$$

Daß fast jede Zahl diese Eigenschaft hat, folgt z. B. aus dem viel allgemeineren Satze, nach welchem fast immer die Werte q_i/q_{i+1} $(i=1,2,\ldots)$ im Intervall $(0,1)$ dicht liegen [2]) (offenbar folgt daraus auch, daß die in den vorigen Beweisen benutzte Relation (1) fast immer besteht). Aus dem Lemma schließt man (3), und so gilt

$$q_i m_{q_i}>\frac{q_i}{q_i+q_{i+1}};$$

es ist nun $\varlimsup\limits_{i\to\infty} q_i/(q_i+q_{i+1})=1/2$ infolge von (4).

Satz III. *Hat ξ unbeschränkte Teilnenner, so ist* $\varliminf\limits_{n\to\infty} nM_n=1$.

Beweis. Es wird sogar $\varliminf\limits_{i\to\infty} q_i M_{q_i}=1$ bewiesen, was schärfer ist, weil offenbar immer $nM_n>1$. Wir setzen wieder (1) voraus und halten vorläufig ein i fest, für welches

$$q_{i+1}>2q_i. \tag{5}$$

[2]) P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Monographies des probabilités 1, Paris 1937, S. 314.

Außer den Punkten $P_0, P_1, \ldots, P_{q_i}$ betrachten wir das System $R_0 = P_0, R_1, \ldots, R_{q_i-1}$ von q_i in positiver Richtung numerierten äquidistanten Punkten auf der Kreisperipherie. Für $k = 0, 1, \ldots, q_i - 1$ ordnen wir jedem Punkte P_k den Punkt R_{l_k} mit $l_k \equiv k p_i \pmod{q_i}$ zu. Da $(p_i, q_i) = 1$, werden auf diese Weise verschiedenen P_k verschiedene R_l zugeordnet und demnach alle R_l erschöpft. Man hat

$$(6) \qquad \overline{P_k R_{l_k}} = \left| k\xi - \frac{kp_i}{q_i} \right| \leqslant \frac{k}{q_i q_{i+1}} < \frac{1}{q_{i+1}}.$$

Nun zeigen wir

(i) Sind die Punkte P_r und P_s benachbart (d. h. liegt kein P_k zwischen ihnen), so sind es R_{l_r} und R_{l_s} auch, d. h. es ist

$$(7) \qquad \overline{R_{l_r} R_{l_s}} = 1/q_i$$

(und dann offenbar $|l_r - l_s| = 1$).

In der Tat: läge etwa zwischen R_{l_r} und R_{l_s} ein Punkt R_{l_t}, so würde man zuerst aus (6)

$$(8) \qquad \overline{P_r R_{l_r}} < \frac{1}{q_{i+1}}, \quad \overline{P_s R_{l_s}} < \frac{1}{q_{i+1}}$$

und daraus weiter

$$\overline{P_t R_{l_t}} > \frac{1}{q_i} - \frac{1}{q_{i+1}}$$

schließen; wegen (5) widerspricht das aber (6).

Es ist $M_{q_i} \leqslant M_{q_i - 1}$. Ist M_{q_i-1} von einem Punktepaar P_r, P_s $(0 \leqslant r < s \leqslant q_i - 1)$ realisiert, d. h. $M_{q_i-1} = \overline{P_r P_s}$, so sind P_r und P_s jedenfalls benachbarte Punkte und deshalb gilt auf Grund von (i) außer (8) auch noch (7). Aus (7) und (8) folgt

$$(9) \qquad M_{q_i} \leqslant \overline{P_r P_s} < \frac{1}{q_i} + \frac{2}{q_{i+1}}.$$

Läßt man jetzt i unbeschränkt wachsen, so erhält man

$$\varlimsup_{i\to\infty} q_i M_{q_i} \leqslant \varlimsup_{i\to\infty} \left(1 + 2\frac{q_i}{q_{i+1}}\right),$$

also $\varliminf_{i\to\infty} q_i M_{q_i} = 1$, w. z. b. w.

Satz IV. *Hat ξ unbeschränkte Teilnenner, so ist* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, nM_n=\infty$.

Das ist eine Folgerung aus einem Satz von Khintchine [3]) über sogenannte normale Formen. Die Form $L_\beta(\xi)=q\xi-p-\beta$ mit ganzzahligen Variablen p, q heißt *normal*, wenn es ein $\gamma=\gamma(\xi,\beta)$ und ein $t_0=t_0(\xi,\beta)$ gibt, so daß zu jedem $t\geqslant t_0$ wenigstens ein Wertepaar (p, q) mit

$$1\leqslant|q|<t, \quad |q\xi-p-\beta|<\gamma/t$$

zu finden ist.

Der hier benötigte Spezialfall des Khintchineschen Satzes lautet nun [4]): damit $L_\beta(\xi)$ bei gegebenem irrationalen ξ für jedes β normal sei, ist notwendig und hinreichend, daß ξ beschränkte Teilnenner habe. Für unseren Zweck bedarf es nur der ersten Hälfte dieses Satzes. Ist nämlich für ein ξ immer $nM_n<C<\infty$, so ist jeder Punkt β der Kreisperipherie von dem nächstbenachbarten Punkte P_q $(1\leqslant q=q(\beta,n)\leqslant n)$ weniger als C/n entfernt, also gilt für geeignetes p

$$|q\xi-p-\beta|<C/n.$$

Die Form $L_\beta(\xi)$ erweist sich somit für jedes β als normal, und zwar mit $\gamma(\xi,\beta)=C+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$, dann hat aber ξ beschränkte Teilnenner und Satz IV ist bewiesen.

Wird die Voraussetzung (5) im Beweise des Satzes III fallen gelassen, so ergibt die dort angewandte Schlußweise anstatt der Formel (9) die schwächere Abschätzung $M_{q_i}\leqslant\dfrac{3}{q_i}+\dfrac{2}{q_{i+1}}$, deren man ohne weiteres

$$\overline{\lim_{i}}\, q_i M_{q_i}\leqslant 5 \quad \text{für jedes } \xi$$

entnimmt.

---

[3]) A. J. Khintchine, *Über die angenäherte Auflösung linearer Gleichungen in ganzen Zahlen*, Matematičeskij Sbornik 32 (1925), S. 203-218.

[4]) A. J. Khintchine, loc. cit. [1]), S. 58.

Państwowy Instytut Matematyczny
Staatliches Mathematisches Institut

ÜBER DEN AUFBAU EINES ERWEITERTEN GREENSCHEN TENSORS KANONISCHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN AUS ASSOZIERTEN LÖSUNGSSYSTEMEN [1])

Von E. Hölder (Leipzig)

1. Anfangs- und Endbedingung und die zugehörigen feldartigen Scharen. Es liege ein positiv reguläres kanonisches System

$$\dot{x}^i - H_{y_i} = 0, \qquad \dot{y}_i + H_{x^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n; \quad t^0 \leqslant t \leqslant t^1, \tag{1}$$

mit der Hamilton-Funktion

$$2\,H(t, x^i, y_i) = c^{ij}(t)\,y_i y_j + 2 b_i^j(t)\,x^i y_j + a_{ij}(t)\,x^i x^j \tag{2}$$

für die Variablen $x^i(t)$, $y_i(t)$ vor, ferner für die Anfangs- und Endwerte $x^{i0} = x^i(t^0), y_i^0$; x^{i1}, y_i^1 eine selbstadjungierte Randbedingung, die aus zwei getrennten Endbedingungen [2])

$$\begin{aligned} &\overset{0}{U}{}^{h'}(x^{l0}, y_l^0) \equiv x^{h'0} - \overset{0}{\gamma}{}^{h'}_{k''} x^{k''0} = 0, \text{ analog } \overset{1}{U}{}^{h'_1}(x^{l1}, y_l^1) = 0, \\ &\overset{0}{U}_{h''}(x^{l0}, y_l^0) \equiv y_k^0 \overset{0}{\gamma}{}^{k'}_{h''} - y_{h'}^0 - \overset{0}{\beta}_{l'' k''} x^{k''} = 0, \quad \overset{1}{U}_{h_1''}(x^{l1}, y_l^1) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

$(\overset{0}{\beta}_{h'' k''} = \overset{0}{\beta}_{k'' h''}$; $h', k' = r_0 + 1, \ldots, n$; $h'', k'' = 1, \ldots, r_0$; und ana-

---

[1]) Die vorliegende Note ist der Auszug eines Vortrags, den ich auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Würzburg im September 1943 gehalten habe. Das im Anschluss daran für den Jahresbericht der DMV eingesandte Manuskript ist verloren gegangen. Es ist hier — abgesehen von einigen Bezeichnungsänderungen — in unveränderter Form wiederhergestellt.

[2]) Diese Trennung könte auch bei der allgemeinsten selbstadjungierten Randbedingung durch Hinzufügen weiterer unabhängiger Variablenpaare $x^{n+h''}$, $y_{n+h''}$ erreicht werden, vgl. Hestenes, Amer. M. S. Trans. 36

log für den Endpunkt) bestehend angenommen wird; jede von ihnen definiert einzeln ein lineares feldartiges Extremalengebilde (M^0) bzw. (M^1)[3]).

2. Assoziierte Lösungssysteme. Für (M^1) bilden wir eine Basis

$$\begin{pmatrix} x^{ij} \\ y^j_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(mit Matrizenschreibweise und Transpositionsakzent), $x'y = y'x$, deren erste Spaltengruppe

$$\begin{pmatrix} x^{ij'} \\ y^{j'}_i \end{pmatrix} \qquad (j' = 1, \ldots, m,)$$

die (M^0) und (M^1) gemeinsam angehörenden Nullösungen des Systems (1), (2) sind.

Die Basis

$$\begin{pmatrix} x^{ij} \\ y^j_i \end{pmatrix}$$

ergänzen wir zu einem (im Sinne von v. Escherich) assoziierten Fundamentalsystem

$$\begin{pmatrix} u^i_j & x^{ij} \\ v_{ij} & y^j_i \end{pmatrix},$$

derart, dass die durch

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$$

gegebene Transformation $(Q^i, P_i) \to (X^l, Y_l)$ kanonisch ist, somit[4])

$$u'v = v'u, \quad x'y = y'x, \quad u'y - v'x = \varepsilon.$$

(1934). Auch ein ganz beliegiges lineares Randwertproblem irgend- welcher linearer Differentialgleichungen liesse sich behandeln, indem es durch Hinzufügen des adjungierten System zu einem selbstadjungierten Gesamtsystem ergänzt wird.

[3]) Vgl. M. Morse, *The Calculus of variations in the large,* New York 1934, S. 64 ff., 102 ff.

[4]) Vgl. J. Radon, *Zum problem von Lagrange,* Hamb. Abh. 6 (1928), S. 293.

3. Normierung der Basis einer felbartigen Schar in Bezug auf die zweite. Vermöge dieser Assoziiertheit ergeben geeignete Elementartransformationen (Multiplikation einer Spalte mit einer Zahl, bzw. Addition des Vielfachen einer Spalte zu einer anderen) für die Basis des feldartiges Gebildes, (M^0) dieselbe Normalform der Koeffizienten matrix, wie sie Carathéodory [5]) bei seinem speziellen assoziierten Fundamentalsystem erhält; wir können uns begnügen mit der (etwas weniger weitgehenden) Reduktion

$$
\begin{pmatrix} q^i_{j''} & x^{ij'} \\ p_{ij''} & y^{j'}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & x \\ v & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon^{i''}_{j''} & 0 \\ s_{i'j''} & \varepsilon^{j'}_{i'} \\ s_{i''j''} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}
$$

bei der nur die Spalten der ersten Gruppe unter sich elementar transformiert zu werden brauchten.

4. Ergänzung zu einem beiden feldartigen Scharen möglichst angepassten assoziierten Lösungssystem. Durch Ergänzung der in (3) rechts stehenden Koeffizientenmatrix zu

$$
\begin{pmatrix} \varepsilon^{i'}_{j'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{i''}_{j''} & 0 & 0 \\ s_{i'j'} & s_{i'j''} & \varepsilon^{j'}_{i'} & 0 \\ s_{i''j'} & s_{i''j''} & 0 & \varepsilon^{j''}_{i''} \end{pmatrix} \tag{4}
$$

mit den Grössen $s_{i''j'} = s_{j'i''}$ und den noch willkürlichen $\frac{1}{2}m(m+1)$ Grössen $s_{i'j'} = s_{j'i'}$, welche die symmetrische Matrix

$$
s = \begin{pmatrix} s_{i'j'} & s_{i'j''} \\ s_{i''j'} & s_{i''j''} \end{pmatrix}
$$

ergeben, erhält man ein neues assoziiertes System [6])

$$
\begin{pmatrix} q & x \\ p & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & x \\ v & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ s & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + xs & x \\ v + ys & y \end{pmatrix} \tag{5}
$$

---

[5]) C. Carathéodory, *Variationsrechnung*, Leipzig und Berlin 1935, S. 265-269.

[6]) Vgl. L. Siegel, Math. Ann. **116**,

mit den ursprünglichen zu (M^1) gehörigen dritten und vierten Spaltengruppen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ mit } \overset{1}{U}{}^{h'_1}(x^{l'}, y^1_l) = 0, \quad \overset{1}{U}_{h''_1}(x^{l'}, y^1_l) = 0$$

und obendrein mit einer zweiten Spaltengruppe

$$\begin{pmatrix} q^i_{j''} \\ p_{ij''} \end{pmatrix}$$

die zu (M^0) gehört und

$$\overset{0}{U}{}^{h'}(\varphi^{l'}_{j''}, \overset{\circ}{p}_{lj''}) = 0, \quad \overset{0}{U}_{h''}(\varphi^{l'}_{j''}, \overset{\circ}{p}_{lj''}) = 0$$

erfüllt. Die erste, zu den Nullösungen assoziierte Spaltengruppe

$$\begin{pmatrix} q^i_{j'} \\ p_{ij'} \end{pmatrix}$$

tut dies aber nicht, sondern es sind die Grössen

$$(6) \qquad \begin{aligned} \overset{0}{U}{}^{h'}(q^{l'}_{j'}, \overset{\circ}{p}_{lj'}) &= k^{h'}_{j'}, \\ \overset{0}{U}_{h''} &= k_{h''j'} \end{aligned}$$

bei jedem $j' = 1, \dots, m$ nicht alle Null.

5. Der erweiterte Greensche Tensor. Nunmehr erklären wir wie im einfachsten von Burkhardt behandelten Fall durch

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} G^{ij}(t, \boldsymbol{t}) & H^i_j(t, \boldsymbol{t}) \\ J^j_i(t, \boldsymbol{t}) & K_{ij}(t, \boldsymbol{t}) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} q\boldsymbol{x}' & q\boldsymbol{y}' \\ p\boldsymbol{x}' & p\boldsymbol{y}' \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad -\begin{pmatrix} x\boldsymbol{q}' & x\boldsymbol{p}' \\ y\boldsymbol{q}' & y\boldsymbol{p}' \end{pmatrix}$$

für $t < \boldsymbol{t}$ bzw. $\boldsymbol{t} < t$, wobei z. B. $q\boldsymbol{x}' = (q^i_l \boldsymbol{x}'^l)$ bedeutet, einen offenbar symmetrischen Greenschen Tensor im erweiterten Sinn [7]):

$$G^{ij}(t, \boldsymbol{t}) = G^{ji}(\boldsymbol{t}, t), \qquad K_{ij}(t, \boldsymbol{t}) = K_{ji}(\boldsymbol{t}, t),$$
$$H^i_j(t, \boldsymbol{t}) = J^i_j(\boldsymbol{t}, t).$$

---

[7]) Für den Fall, dass die Spaltengruppe

$$\begin{pmatrix} x^{ij'} \\ y^{j'}_i \end{pmatrix} \qquad (j' = 1, \dots, m),$$

der Nullösungen fehlt, habe ich den (gewöhnlichsten) Greenschen Tensor angegeben in den Abh. Math. Seminar Hamburg 13 (1939), S. 276 f.

Seine Spalten

$$\begin{aligned} x^i(t) &= G^{ij}(t, \boldsymbol{t}), \\ y_i(t) &= J_i^j(t, \boldsymbol{t}), \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} &H_j^i(t, \boldsymbol{t}), \\ &K_{ij}(t, \boldsymbol{t}) \end{aligned}$$

genügen der Differentialgleichung (1), der (von den willkürlichen $s_{i'j'}$ nicht mehr abhängigen) Randbedingung

$$(8) \qquad \left| \begin{aligned} \overset{0}{U}{}^{h'}(x^{l^0}, \overset{0}{y}_l) &= -\sum k_{l'}^{h'} x^{jl'} \\ \overset{0}{U}_{h''} \qquad &= -\sum k_{h''l'} x^{jl'} \end{aligned} \right. \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} &= -\sum k_{l'}^{h'} y_j^{l'}, \\ &= -\sum k_{h''l'} y_j^{l'} \end{aligned}$$

und

$$\left| \begin{aligned} \overset{1}{U}{}^{h'_1}(x^{l^1}, \overset{1}{y}_l) &= 0, \\ \overset{1}{U}_{h''_1} \qquad &= 0 \end{aligned} \right.$$

für beide Spaltengruppen, und der Sprungrelation

$$(9) \qquad \left[\begin{pmatrix} G & H \\ J & K \end{pmatrix} \right]_{t=\boldsymbol{t}-0}^{t=\boldsymbol{t}+0} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix},$$

da die Assoziiertheit statt durch

$$q'p = p'q, \quad x'y = y'x, \quad q'y - p'x = -\varepsilon$$

auch durch

$$qx' = xq', \quad py' = yp', \quad qy' - xp' = \varepsilon$$

beschrieben werden kann.

6. Auflösung der Randwertaufgabe für das nichtlineare kanonische System. Für das nichtlineare kanonische System

$$(10) \qquad \dot{x}^i - H_{y_i} = \Theta_{y_i}, \quad \dot{y}^i + H_{x^i} = -\Theta_{x^i}$$

zusammen mit der Randbedingung (2), wobei $\Theta_{x^i}, \Theta_{y_i}$ Glieder zweiten und höheren Grades in x^i, y_i oder mit einem kleinen Parameter multiplizierte Glieder sind, findet man auf Grund der Greenschen Formel

$$\int_{t^0}^{t^1} \{[x^i R_i(q,p) - y_i L^i(q,p)] - [q^i R_i(x,y) - p_i L^i(x,y)]\} dt = \\ = [x^i p_i - y_i q^i]_{t^0}^{t^1}$$

die Lösungen unter denen des nichtlinearen Integralgleichungssystems

$$x^i = \sum r_{j'} x^{ij'} + \int_{t^0}^{t^1} (G^{ij} \Theta_{x^j} + H^i_j \Theta_{y_j}) dt,$$

$$y_i = \sum r_{j'} y^{j'}_i + \int_{t^0}^{t^1} (J^j_i \Theta_{x^j} + K_{ij} \Theta_{y_j}) dt$$

mit

$$r_{j'} = [y_i q^i_{j'} - x^i p_{ij'}]^0. \tag{12}$$

Letzteres, (11), lässt sich unter geeigneten Voraussetzungen mit zunächst willkürlichen Parametern $r_{j'}$, wofern diese genügend klein gehalten werden, durch sukzessive Approximationen auflösen [8]).

Die Lösungen

$$\begin{pmatrix} x^i \\ y_i \end{pmatrix}$$

von (11) genügen der Differentialgleichung (1), ferner der Endbedingung

$$\overset{1}{U}{}^{h'}_1 = 0$$

$$\overset{1}{U}_{h''_1} = 0$$

und haben die vorgegebenen Parameter (12):

$$[q^l_{i'} y_l - p_{li'} x^l]^0 = r_{i'}.$$

Der Anfangsbedingung

$$\overset{0}{U}{}^{h'} = 0,$$

$$\overset{0}{U}_{h''} = 0$$

genügen die

$$\begin{pmatrix} x^i \\ y_j \end{pmatrix}$$

---

[8]) Vgl. Erhardt Schmidt, Math. Ann. **65** (1908), S. 370-399 und Lichtensteins in Lwów gehaltene *Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen*, Berlin 1931.

jedoch dann und nur dann, wenn die Linearkombinationen von Anfangswerten bzw. die akzessorischen Extremalen

$$\begin{matrix} \sum q_{i'}^{i^0} C^{j'} \\ \sum p^{\circ}_{ij'} C^{j'} \end{matrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{matrix} \sum q^i_{j'}(t)\, C^{j'}, \\ \sum p_{ij'}(t)\, C^{j'} \end{matrix} \qquad \left(C^{j'} = -\int_{t_0}^{t^1} (x^{jj'}\, \Theta_{x^j} + y_i^{j'}\, \Theta_{y_j})\, dt\right)$$

dem Gebilde (M^0) angehören; das ist der Fall nur für $C^{j'} = 0$, $j' = 1, \dots, m$, also wenn die Parameter $r_{j'}$, zum Schluss durch die Verzweigungsgleichungen

$$\int_{t^0}^{t^1} (\Theta_{x^i}\, x^{ij'} + \Theta_{y_i}\, y_i^{j'})\, dt = 0 \qquad (j = 1, \dots, m) \tag{13}$$

bestimmt werden.

AN APPLICATION OF PROBABILITY THEORY TO THE STUDY OF LAPLACE'S EQUATION

By M. Kac (Ithaca, U. S. A.)

1. The main purpose of this paper is to construct explicitly the Green's function of the equation $\Delta u = 0$, considered in a bounded closed three-dimensional region Ω, which vanishes on the boundary of the region. Only minor modifications will be needed to extend the results to higher dimensions but the method breaks down for the plane.

The construction will be accomplished by a method based on the theory of Brownian motion, as developed some thirty years ago by N. Wiener, and will follow rather closely the last two sections of the author's paper "On some connections between probability theory and differential and integral equations" soon to appear in the Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability.

The author is particularly happy to offer this paper to the volume honoring Professor H. Steinhaus. It was as a student of Professor Steinhaus that the author first became interested in the Theory of Probability and in the theory of Brownian motion, and it was from Professor Steinhaus that the author also learned to seek connections between Probability Theory and seemingly unrelated problems in other branches of Mathematics.

2. Let Ω be a bounded closed three-dimensional region and Ω_0 the set of its interior points. Let K be a closed sphere (interior + boundary) containing Ω in its interior and set

$$B = K - \Omega_0,$$

and

$$V_B(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \vec{r} \in B, \\ 0 & \text{if } \vec{r} \,\bar{\in}\, B. \end{cases}$$

Finally, let $A \subset \Omega_0$ be a sphere.

In his researches on Brownian motion N. Wiener has shown that it is possible to introduce a completely additive measure in the space C of all continuous functions $x(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, $x(0) = 0$, subject to the condition that, for $t_1 < t_2 < \dots < t_n$,

$$\text{Prob. } \{\alpha_1 < x(t_1) < \beta_1, \dots, \alpha_n < x(t_n) < \beta_n\}$$

(2.1)
$$= \frac{\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} e^{-\left\{\frac{x_1^2}{2t_1} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)} + \dots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2(t_n - t_{n-1})}\right\}} dx_1 \dots dx_n}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{t_1(t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})}}.$$

Here we use the word "probability" synonymously with "measure". If we consider the product space $C \times C \times C$ with an appropriately induced product measure, we are led to a measure in the space of all three-dimensional paths $\vec{r}(t)$, $\vec{r}(0) = 0$. (The measure of the whole space is easily seen to be 1).

Let now $\vec{y} \in \Omega_0$ and consider, for $u > 0$, the integral

$$\int_0^\infty E\{e^{-u\int_0^t V_B(\vec{y} + \vec{r}(\tau))\,d\tau}, \ \vec{y} + \vec{r}(t) \in A\}\,dt,$$

where

$$E\{e^{-u\int_0^t V_B(\vec{y} + \vec{r}(\tau))\,d\tau}, \ \vec{y} + \vec{r}(t) \in A\}$$

denotes the Wiener integral of

$$e^{-u\int_0^t V_B(\vec{y} + \vec{r}(\tau))\,d\tau}$$

over the set of those paths which satisfy the condition $\vec{y} + \vec{r}(t) \in A$.

Using (2.1) and following the computations of the last two sections of my paper cited in § 1, we arrive at the formula

$$\int_0^\infty E\{e^{-u\int_0^t V_B(\vec{y}+\vec{r}(\tau))\,d\tau}, \ \vec{y}+\vec{r}(t)\in A\}\,dt$$
(2.2)
$$=\int_A d\vec{r}\left|\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{y}|}-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{u}+\mu_j}\frac{1}{2\pi}\int_B\frac{\psi_j(\vec{\varrho})}{|\vec{\varrho}-\vec{y}|}d\vec{\varrho}\,\frac{1}{2\pi}\int_B\frac{\psi_j(\vec{\varrho})}{|\vec{\varrho}-\vec{r}|}d\vec{\varrho}\right|$$

where the μ_j's are the eigenvalues and the ψ_j's the normalized eigenfunctions of the integral equation

$$\frac{1}{2\pi}\int_B\frac{\psi(\vec{\varrho})}{|\vec{\varrho}-\vec{r}|}d\vec{\varrho}=\mu\psi(\vec{r}). \tag{2.3}$$

It is not difficult to show that the kernel $|\vec{\varrho}-\vec{r}|^{-1}$ is completely continuous and positive definite. In particular, it follows that the eigenfunctions form a complete set.

Assuming that A is a sphere of radius δ about the point $\vec{r}_0$ and letting $\delta\to 0$, we obtain

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\delta^3}\int_0^\infty E\{e^{-u\int_0^t V_B(\vec{y}+\vec{r}(\tau))\,d\tau}, \ |\vec{y}+\vec{r}(t)-\vec{r}_0|<\delta\}\,dt$$
(2.4)
$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\vec{r}_0-\vec{y}|}-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{u}+\mu_j}\frac{1}{2\pi}\int_B\frac{\psi_j(\vec{\varrho})}{|\vec{\varrho}-\vec{y}|}d\vec{\varrho}\,\frac{1}{2\pi}\int_B\frac{\psi_j(\vec{\varrho})}{|\vec{\varrho}-\vec{r}_0|}.$$

The series on the right hand side of (2.4) converges absolutely and uniformly (in y) in every closed subset of Ω_0. This follows from Schwarz's and Bessel's inequalities. Set

$$H_u(\vec{y},\vec{r}_0)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{u}+\mu_j}\frac{1}{2\pi}\int_B\frac{\psi_j(\vec{\varrho})}{|\vec{\varrho}-\vec{y}|}d\vec{\varrho}\,\frac{1}{2\pi}\int_B\frac{\psi_j(\vec{\varrho})}{|\vec{\varrho}-\vec{r}_0|}d\vec{\varrho} \tag{2.5}$$

and note that (2.3) may now be rewritten in the form

$$\int_0^\infty E\{e^{-u\int_0^t V_B(\vec{y}+\vec{r}(\tau))d\tau}, |\vec{y}+\vec{r}(t)-\vec{r}_0|<\delta\}dt$$

(2.6)
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|\vec{r}-\vec{r}_0|<\delta}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{y}|}d\vec{r}-\int_{|\vec{r}-\vec{r}_0|<\delta}H_u(\vec{y},\vec{r})d\vec{r}.$$

3. Let us now note that

$$0\leqslant\int_0^\infty E\{e^{-u\int_0^t V_B(\vec{y}+\vec{r}(\tau))d\tau}, |\vec{y}+\vec{r}(t)-\vec{r}_0|<\delta\}dt$$

$$\leqslant\int_0^\infty \text{Prob.}\{|\vec{y}+\vec{r}(t)-\vec{r}_0|<\delta\}dt$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{(2\pi t)^{3/2}}\int_{|\vec{\varrho}-\vec{r}_0|<\delta}e^{-\frac{|\vec{\varrho}-\vec{y}|^2}{2t}}d\vec{\varrho}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|\vec{\varrho}-\vec{r}_0|<\delta}\frac{1}{|\vec{\varrho}-\vec{y}|}d\vec{\varrho},$$

and, consequently,

$$0\leqslant\frac{1}{2\pi|\vec{r}_0-\vec{y}|}-H_u(\vec{y},\vec{r}_0)\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\vec{r}_0-\vec{y}|},$$

or

(3.1)
$$0\leqslant H_u(\vec{y},\vec{r}_0)\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{y}|}.$$

If $\vec{y}$ and $\vec{r}_0$ are close to each other a better upper estimate can be obtained. Let $S\equiv S(\vec{y},a)$ be the sphere with center at $\vec{y}$ and radius a and assume that $S\subset\Omega_0$. Let $\vec{r}_0\in S$ and let $T\equiv T(\vec{y},\vec{R})$ be the sphere with center at $\vec{y}$ and radius R chosen in such a way that $T\supset B$. Let $T-S=B_1$ and note that $B_1\supset B$.

Clearly, $V_{B_1}(\vec{r}) \geqslant V_B(\vec{r})$ and hence the analogue of $H_u(\vec{y},\vec{r}_0)$ for B_1 which we denote by $H'_u(\vec{y},\vec{r}_0)$ satisfies the inequality

(3.2) $$H_u(\vec{y},\vec{r}_0) \leqslant H'_u(\vec{y},\vec{r}_0).$$

From the formula

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\delta^3} \int_0^\infty E\{e^{-u\int_0^t V_{B_1}(\vec{y}+\vec{r}(\tau))\,d\tau}, |\vec{y}+\vec{r}(t)-\vec{r}_0|<\delta\}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\vec{r}_0-\vec{y}|} - H'_u(\vec{y},\vec{r}_0)$$

and the elementary properties of Brownian motion it follows that $H'_u(\vec{y},\vec{r}_0)$ is of spherical symmetry (i. e. a function of $|\vec{r}_0-\vec{y}|$). Writing the analogue of (2.5), we note that $H'_u(\vec{y},\vec{r}_0)$ is a harmonic function of $\vec{r}_0$ as long as $\vec{r}_0 \in S$. Being harmonic and of spherical symmetry $H'_u(\vec{y},\vec{r}_0)$ must be a constant (depending on u)

(3.3) $$H'_u(\vec{y},\vec{r}_0) = a(u), \qquad \vec{r}_0 \in S.$$

Since

$$H'_u(\vec{y},\vec{r}_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\vec{r}_0-\vec{y}|},$$

we have

$$a(u) \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\vec{r}_0-\vec{y}|} \quad \text{for every } \vec{r}_0 \in S,$$

and, consequently,

(3.4) $$a(u) \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{1}{a}.$$

From (3.1), (3.2), (3.3) and (3.4) it follows that the positive functions $H_u(\vec{y},\vec{r}_0)$ are *uniformly* bounded from above. From (2.5), it moreover follows that the functions $H_u(\vec{y},\vec{r}_0)$ are harmonic in $\vec{y} \in \Omega_0$ (also in $\vec{r}_0 \in \Omega_0$, but we prefer to keep $\vec{r}_0$ fixed and consider H_u as functions of $\vec{y}$).

From (2.4) it follows immediately that $u_1 < u_2$ implies

$$H_{u_1}(\vec{y},\vec{r}_0) \geqslant H_{u_2}(\vec{y},\vec{r}_0),$$

and, consequently, if $u \to \infty$, increasingly ($u \uparrow \infty$) the functions $H_u(\vec{y},\vec{r}_0)$ form a non-decreasing family of harmonic functions. Since these functions are uniformly bounded, from above, it follows from Harnack's Second Theorem that

$$\lim_{u \uparrow \infty} H_u(\vec{y},\vec{r}_0) = H(\vec{y},\vec{r}_0), \tag{3.5}$$

and $H(\vec{y},\vec{r}_0)$ is harmonic in $\vec{y} \in \Omega_0$. Finally, from (2.6) and (3.5) it follows that

$$\begin{aligned} &\lim_{u \uparrow \infty} \int_0^\infty E\{e^{-u\int_0^t V_B(\vec{y}+\vec{r}(\tau))\,d\tau}, |\vec{y}+\vec{r}(t)-\vec{r}_0|<\delta\}\,dt \\ &= \int_{|\vec{r}-\vec{r}_0|<\delta} \left\{\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{y}|} - H(\vec{y},\vec{r})\right\} d\vec{r}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

4. It shall now be demonstrated that

$$G(\vec{y},\vec{r}) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{y}|} - H(\vec{y},\vec{r}) \tag{4.1}$$

is the desired Green's functions. $G(\vec{y},\vec{r})$ has already the proper form (except that the usual $1/4\pi$ factor is replaced by $1/2\pi$) so that it remains to show that as $\vec{y}$ approaches a boundary point of Ω_0, $G(\vec{y},\vec{r})$ approaches 0. This however, need not be true and we must impose regularity conditions on the boundary points. We shall call a point $\vec{y}_0$ of the boundary of Ω_0 *regular*[1]) if, for every $t > 0$,

$$\text{Prob. } \{\vec{y}_0 + \vec{r}(\tau) \,\bar{\epsilon}\, B,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\} = 0. \tag{4.2}$$

---

[1]) An analogous condition for regularity for the "outside" Dirichlet problem is discussed briefly in our paper cited in § 1. A. Dvoretzky proved that the analogue of (4.2) is also a necessary condition for regularity.

In other words, a point is called regular if a Brownian particle starting from it must, with probability 1, find itself outside Ω_0, no matter how short the time interval is. Let $\vec{y}_0$ be such that (4.2) holds and note that

$$\lim_{u\uparrow\infty} E\{e^{-u\int_0^t V_B(\vec{y}_0+\vec{r}(\tau))d\tau}, \ |\vec{y}_0+\vec{r}(t)-\vec{r}_0|<\delta\}$$

$$=\text{Prob.}\{\vec{y}_0+\vec{r}(\tau)\,\bar{\epsilon}\,B,\ 0\leqslant\tau\leqslant t,\ |\vec{y}_0+\vec{r}(t)-\vec{r}_0|<\delta\}\ ^{*)}$$

$$\leqslant\text{Prob.}\{\vec{y}_0+\vec{r}(\tau)\,\bar{\epsilon}\,B,\ 0\leqslant\tau\leqslant t\}=0.$$

Thus

$$\lim_{u\uparrow\infty}\int_{|\vec{r}-\vec{r}_0|<\delta}\left\{\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{y}_0|}-H_u(\vec{y}_0,\vec{r})\right\}d\vec{r}=0. \tag{4.3}$$

Set

$$F_u(\vec{y})=\int_{|\vec{r}-\vec{r}_0|<\delta}\left\{\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{y}|}-H_u(\vec{y},\vec{r})\right\}d\vec{r}$$

and

$$F(\vec{y})=\int_{|\vec{r}-\vec{r}_0|<\delta}\left\{\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{y}|}-H(\vec{y},\vec{r})\right\}d\vec{r}.$$

We have $F_u(y)\geqslant F(y)$ and from (2.5) we see that $F_u(y)$ is a continuous function in the closed region Ω (in fact, it is continuous in K). From (4.3) it follows that $F(\vec{y}_0)=0$. Let now $\{\vec{y}_n\}$, $\vec{y}_n\,\epsilon\,\Omega_0$, be a sequence of points such that $\vec{y}_n\to\vec{y}_0$. Suppose that $F(\vec{y}_n)\to\beta>0$, then, for nearly all $n, F(\vec{y}_n)>\beta/2$ and

---

*) Added in proof: This is incorrect as it stands but becomes correct if the statement "$\vec{y}_0+\vec{r}(\tau)$ non $\epsilon\,\beta$, $0\leqslant\tau\leqslant t$" is replaced by the statement "the curve $\vec{y}_0+\vec{r}(\tau)$, $0\leqslant\tau\leqslant t$, spends 0 time in β". If Ω is star-shaped both statements are probabilistically equivalent, i. e. the probabilities are the same.

Except for this modification, which somewhat narrows the generality of the final result, the reasoning is unaffected.

hence $F_u(\vec{y}_n) > \beta/2$. Since $F_u(\vec{y})$ is continuous at $\vec{y}_0$, $F_u(\vec{y}_0) \geqslant \beta/2$ and hence $F(\vec{y}_0) = \lim\limits_{u\uparrow\infty} F_u(\vec{y}_0) \geqslant \beta/2$ contrary to the assumption that $F(\vec{y}_0) = 0$. Thus

$$F(\vec{y}) \to 0 \quad \text{as} \quad \vec{y} \to \vec{y}_0.$$

If δ is sufficiently small, and $\vec{y}$ is outside the sphere $|\vec{r} - \vec{r}_0| < \delta$, we have, by the well known property of harmonic functions,

$$F(\vec{y}) = \frac{4}{3}\pi\delta^3 G(\vec{y}, \vec{r}_0)$$

and, consequently,

$$G(\vec{y}_0, \vec{r}_0) \to 0 \quad \text{as} \quad \vec{y} \to \vec{y}_0. \tag{4.4}$$

The condition (4.2) of regularity can be replaced by a much stronger condition of an entirely classical nature. Let us assume that $\vec{y}_0$ is such that there exists a sphere through it which is in B and is outside Ω_0 (Poincaré's regularity condition) then $\vec{y}_0$ is regular in the sense of (4.2). In fact, denote the sphere by S and since $S \subset B$ it follows that

$$\text{Prob.}\,\{\vec{y}_0 + \vec{r}(\tau) \,\bar{\epsilon}\, B,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\}$$
$$\leqslant \text{Prob.}\,\{\vec{y}_0 + \vec{r}(\tau) \,\bar{\epsilon}\, S,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\}.$$

The latter probability is known to be 0.

5. In summary our principal result is as follows:

The Green's function $G(\vec{y}, \vec{r})$ of $\Delta u = 0$ which vanishes at every regular point of the boundary of Ω_0 is given by the formula

$$G(\vec{y}, \vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{y}|} - \lim_{u\uparrow\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{u} + \mu_j} \frac{1}{2\pi} \int_B \frac{\psi_j(\vec{\varrho})}{|\vec{\varrho} - \vec{y}|} d\vec{\varrho} \, \frac{1}{2\pi} \int_B \frac{\psi_j(\vec{\varrho})}{|\vec{\varrho} - \vec{r}|} d\vec{\varrho}. \tag{5.1}$$

and equivalently, in purely probabilistic terms,

$$(5.2)\quad G(\vec{y},\vec{r}) = \lim_{u\uparrow\infty}\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\delta^3}\int_0^\infty E\{e^{-u\int_0^t V_B(\vec{y}+\vec{r}(\tau))d\tau}, |\vec{y}+\vec{r}(t)-\vec{r}|<\delta\}\,dt.$$

The first of these expressions (5.1) is entirely classical in nature and it is rather likely that a proof circumventing the use of the theory of Wiener's measure can be found. The curious feature of (5.1) is the arbitrariness of B. This is entirely clear on probabilistic ground, because, roughly speaking, we are dealing only with the event of the Brownian particle not leaving Ω_0 and this event is equivalent to the event of not entering B. The former event is clearly independent of B and the fact that our formulas contain B is more or less accidental.

Yet, the appearance of B is of great technical convenience because it allows us to dispose with a good many tedious considerations involving the boundary of Ω_0. It is clear, of course, that the integrals over B in (5.1) should be replaced by integrals over the boundary of Ω_0. But it is more efficient not to use surface integrals and to thus avoid all the complicated pathology of surface area which for the problem in question is only of secondary importance.

RECHERCHES ALGÈBRIQUES SUR LES OPÉRATIONS ANALYTIQUES ET QUASI-ANALYTIQUES [1]

Par J. ŁOŚ (Wrocław)

Soit X une classe de sous-ensembles d'un ensemble fixé E et Φ une opération dans X de type α (α est un nombre ordinal), c'est-à-dire telle que, pour chaque suite $X_1, X_2, \ldots, X_\xi, \ldots$ $(\xi<\alpha)$ d'ensembles de X, $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_\xi, \ldots)$ soit un ensemble de X. D'après L. Kantorovitch et E. Livenson [2]), l'opération Φ est dite *quasi-analytique* si $p \in \Phi(X_1, X_2, \ldots, X_\xi, \ldots)$ et p non-$\in \Phi(Y_1, Y_2, \ldots, Y_\xi, \ldots)$ entraîne l'existence d'un nombre $\xi_0<\alpha$ pour lequel on ait

$$p \in X_{\xi_0}, \quad p \text{ non-}\in Y_{\xi_0},$$

ou bien

$$p \text{ non-}\in X_{\xi_0}, \quad p \in Y_{\xi_0},$$

et *analytique* si

$$p \in \Phi(X_1, X_2, \ldots, X_{\xi_0}, \ldots), \quad q \text{ non-}\in \Phi(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{\xi_0}, \ldots)$$

entraîne l'existence d'un nombre $\xi_0<\alpha$ pour lequel on ait

$$p \in X_{\xi_0}, \quad q \text{ non-}\in Y_{\xi_0},$$

ou bien

$$p \text{ non-}\in X_{\xi_0}, \quad q \in Y_{\xi_0}.$$

---

[1]) Présenté à la Société Polonaise de Mathématique, Section de Wrocław, le 16 Octobre 1951.

[2]) L. Kantorovitch and E. Livenson, *Memoir on the Analytical Operations and Projective Sets I*, Fundamenta Mathematicae 18 (1932), p. 214-279.

E. Marczewski[3]) a remarqué que les opérations quasi-analytiques peuvent être définies par la formule

$$\text{(M)}\quad \Phi(X_1, X_2, \ldots, X_\xi, \ldots) \dot{-} \Phi(Y_1, Y_2, \ldots, Y_\xi, \ldots) \subset \sum_{\xi<\alpha} (X_\xi \dot{-} Y_\xi)\ ^{4)}.$$

Nous ferons plus loin usage de cette remarque.

Je me propose d'examiner dans cette Note la structure des opérations analytiques et quasi-analytiques à un isomorphisme près, ce qui mène à une définition abstraite de ces opérations à l'aide des notions de la théorie générale des opérations, c'est-à-dire à l'aide des notions de sous-algèbre, de congruence et de produit direct des opérations.

Le § 2 contient un théorème de la théorie générale des opérations qui sera utilisé dans ce qui suit[5]).

§ 1. Notions de la théorie générale des opérations. A étant un ensemble fixé, φ est dite *opération de type* α sur A si à chaque suite $a_1, a_2, \ldots, a_\xi, \ldots$ $(\xi<\alpha)$ d'éléments de A correspond un élément $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_\xi, \ldots)$ de A. Un couple $\langle A, \varphi\rangle$ est dit *algèbre* si φ est une opération sur A. Nous allons désigner les algèbres par la majuscule grecque Γ. Dans la suite, nous n'envisagerons que des algèbres $\Gamma = \langle A, \varphi\rangle$, où φ est une opération d'un type fixé α.

Une algèbre $\Gamma_1 = \langle A_1, \varphi_1\rangle$ est dite *sous-algèbre* de l'algèbre $\Gamma = \langle A, \varphi\rangle$ si $A_1 \subset A$ et $\varphi_1(a_1, a_2, \ldots, a_\xi, \ldots) = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_\xi, \ldots)$ pour $a_\xi \in A_1$. Evidemment, si Γ_1 est une sous-algèbre de Γ, on peut identifier les opérations φ et φ_1 sur A_1 et poser $\Gamma_1 = \langle A_1, \varphi\rangle$.

Une relation binaire $\sim$, définie dans l'ensemble A de l'algèbre Γ, est dite *congruence* de cette algèbre si elle est une relation d'équivalence sur A, et, si $(a_1, a_2, \ldots, a_\xi, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_\xi, \ldots \in A)$:

$$\text{(1.1)}\qquad a_\xi \sim b_\xi, \text{ pour tous les } \xi<\alpha, \text{ entraîne}$$
$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_\xi, \ldots) \sim \varphi(b_1, b_2, \ldots, b_\xi, \ldots).$$

---

[3]) E. Marczewski, *Concerning the symmetric difference in the theory of sets and in Boolean algebras*, Colloquium Mathematicum 1 (1948), p. 197-202.

[4]) Par $\dot{-}$ est désigné l'opération de la différence symétrique $X \dot{-} Y = (X - Y) + (Y - X)$.

[5]) Je vais publier prochainement les autres applications de ce théorème (à la théorie des groupes abéliens).

Chaque congruence $\sim$ de l'algèbre Γ permet de définir une nouvelle algèbre qui sera désignée par $\Gamma/\sim = \langle A/\sim, \varphi/\sim\rangle$, et appelée *algèbre-quotient*. L'ensemble $A/\sim$ est celui de toutes les classes d'abstraction de la relation $\sim$ sur A (l'élément de $A/\sim$ qui consiste en tous les $x \in A$ pour lesquels $a \sim x$ sera désigné par $a/\sim$), et l'opération $\varphi/\sim$ est définie par la formule

$$(1.2) \qquad \varphi/\sim(a_1/\sim, a_2/\sim, \ldots, a_\xi/\sim, \ldots) = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_\xi, \ldots)/\sim.$$

Il résulte de (1.1) que $\varphi/\sim$ est une opération sur $A/\sim$.

Si $\tau = \{\Gamma_t = \langle A_t, \varphi_t\rangle\}_{t \in T}$ est une famille d'algèbres, nous comprenons par produit direct des algèbres de la famille τ une algèbre $\langle \underset{t\in T}{\boldsymbol{P}} A_t, \varphi\rangle$, où $\underset{t\in T}{\boldsymbol{P}} A_t$ est le produit cartésien des ensembles A_t, $t \in A_t$ ($\underset{t\in T}{\boldsymbol{P}} A_t$ se compose alors de toutes les fonctions f, définies pour $t \in T$, et telles que $f(t) \in A_t$), et où l'opération φ est définie par l'équivalence

$$(1.3) \qquad \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_\xi, \ldots) = f$$

si $f(t) = \varphi_t(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_\xi(t), \ldots)$ pour chaque $t \in T$.

Dans le cas, où T est un ensemble fini, par exemple $T = \langle 1, 2, \ldots, n\rangle$, le produit cartésien $\underset{t\in T}{\boldsymbol{P}} A_t$ peut être envisagé comme ensemble de toutes les suites finies $\langle a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}\rangle$, où $a^{(k)} \in A_k$. On peut alors simplifier la définition (1.3):

$$(1.4) \quad \varphi(\langle a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \ldots, a_1^{(n)}\rangle, \langle a_2^{(1)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_2^{(n)}\rangle, \ldots, \langle a_\xi^{(1)}, a_\xi^{(2)}, \ldots, a_\xi^{(n)}\rangle, \ldots) =$$
$$= \langle \varphi_1(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_\xi^{(1)}, \ldots), \varphi_2(a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_\xi^{(2)}, \ldots), \ldots, \varphi_n(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_\xi^{(n)}, \ldots)\rangle.$$

Le produit direct des algèbres de la famille τ sera désigné par $\underset{t\in T}{\mathfrak{P}} \Gamma_t$. Si, pour chaque $t \in T$, on a $\Gamma_t = \Gamma$, le produit $\underset{t\in T}{\mathfrak{P}} \Gamma_t$ est appelé *puissance directe* de l'algèbre Γ; elle ne dépend évidemment que de Γ et de la puissance (dans le sens de la théorie des ensembles) de T; nous posons alors $\underset{t\in T}{\mathfrak{P}} \Gamma_t = \Gamma^{\mathfrak{m}}$, où $\mathfrak{m} = \overline{\overline{T}}$.

Exemples. Soient R l'ensemble des nombres réels, I l'ensemble des nombres entiers, et N l'ensemble des nombres naturels. $\Gamma_1 = \langle R, +\rangle$, $\Gamma_2 = \langle I, +\rangle$, $\Gamma_3 = \langle N, +\rangle$ sont des algèbres. Γ_3 est une sous-algèbre de Γ_2, Γ_2 en est une de Γ_1, évidemment Γ_3 est alors une sous-algèbre de Γ_1.

La relation $a \sim b$, qui a lieu entre deux nombres réels si $a-b \in I$, est une congruence de l'algèbre Γ_1; l'algèbre-quotient $\Gamma_1/\sim$ est l'algèbre d'addition mod 1. L'algèbre-puissance Γ_1^2 est isomorphe à l'algèbre $\Gamma_0 = \langle C, +\rangle$, où C est l'ensemble des nombres complexes.

§ 2. Un théorème de la théorie générale des opérations. Nous dirons que la congruence $\sim$ de l'algèbre $\Gamma = \langle A, \varphi\rangle$ sépare les éléments $a, b \in A$ si $a \sim b$ n'a pas lieu, ou, ce qui revient au même, si $a/\sim \neq b/\sim$. Une famille $\{\sim_t\}_{t\in T}$ de congruences de Γ sépare toute l'algèbre Γ si, pour chaque couple d'éléments $a, b \in A$, il existe un $t \in T$ tel que la congruence $\sim_t$ sépare a et b.

Théorème 1. *Si la famille $\{\sim_t\}_{t\in T}$ de congruences de Γ sépare toute l'algèbre Γ, alors Γ est isomorphe à une sous-algèbre du produit direct $\underset{t\in T}{\mathscr{P}}(\Gamma/\sim_t)$.*

Démonstration. Posons $\underset{t\in T}{\mathscr{P}}(\Gamma/\sim_t) = \Gamma_0 = \langle \underset{t\in T}{\boldsymbol{P}}(A/\sim_t), \varphi_0\rangle$, et, pour $a \in A$,

$$h(a) = f \in \underset{t\in T}{\boldsymbol{P}}(A/\sim_t) \tag{2.1}$$

si $f(t) = a/\sim_t$ pour chaque $t \in T$. Nous avons, pour

$$a_1, a_2, \ldots, a_\xi, \ldots \in A \quad \text{et} \quad h(a_1) = f_1,\ h(a_2) = f_2, \ldots, h(a_\xi) = f_\xi, \ldots,$$

$$\varphi_0(h(a_1),\ h(a_2), \ldots,\ h(a_\xi), \ldots) = \varphi_0(f_1, f_2, \ldots, f_\xi, \ldots) = f,$$

où, d'après (1.3),

$$f(t) = \varphi/\sim_t(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_\xi(t), \ldots).$$

Mais, d'après (2.1), $f_\xi(t) = a_\xi/\sim_t$, alors

$$f(t) = \varphi/\sim_t(a_1/\sim_t, a_2/\sim_t, \ldots, a_\xi/\sim_t, \ldots).$$

De la formule (1.2), nous obtenons

$$f(t) = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_\xi, \ldots)/\sim_t,$$

et, puisque c'est valable pour tout $t \in T$, il résulte de (2.1) que $f = h(\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_\xi, \ldots))$.

Finalement, nous avons

$$\varphi_0(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_\xi), \ldots) = h(\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_\xi, \ldots)). \tag{2.2}$$

Mais la fonction h est biunivoque, ce qui résulte facilement de la séparation de Γ par la famille $\{\sim_t\}_{t\in T}$. On tire alors de la formule (2.2), que $\langle h(A),\varphi_0\rangle$ est une sous-algèbre de Γ_0, somorphe à Γ c. q. f. d.

§ 3. Quelques propriétés des algèbres quasi-analytiques et analytiques. L'algèbre $\Gamma=\langle A,\varphi\rangle$ est dite *analytique*, ou *quasi-analytique*, s'il existe un ensemble E, une famille $\boldsymbol{X}$ de sous-ensembles de E et une opération analytique, ou quasi-analytique, Φ sur $\boldsymbol{X}$, tels que l'algèbre $\langle\boldsymbol{X},\Phi\rangle$ soit isomorphe à l'algèbre Γ.

Lemme 1. *Toute algèbre analytique est quasi-analytique.*

La démonstration est évidente.

Lemme 2. *Toute sous-algèbre d'une algèbre analytique, ou quasi-analytique, est analytique, ou quasi-analytique.*

La démonstration est évidente.

Lemme 3. *Si $\{\Gamma_t\}_{t\in T}$ est une famille d'algèbres quasi-analytiques, le produit $\underset{t\in T}{\mathfrak{P}}\Gamma_t$ est aussi une algèbre quasi-analytique.*

Démonstration. Pour chaque $t\in T$, soit $\boldsymbol{X}_t$ une famille de sous-ensembles de l'ensemble E_t, Φ_t une opération quasi-analytique sur $\boldsymbol{X}_t$ telle que l'algèbre $\langle\boldsymbol{X}_t,\Phi_t\rangle$ soit isomorphe à Γ_t. Nous pouvons supposer que les ensembles de la famille $\{E_t\}_{t\in T}$ soient disjoints deux à deux; considérons la famille $\boldsymbol{X}$ des sous-ensembles de $\sum_{t\in T}E_t$ qui sont de la forme $\sum_{t\in T}X_t$, où $X_t\in\boldsymbol{X}_t$. Pour $\sum_{t\in T}X_t^{(1)},\sum_{t\in T}X_t^{(2)},\ldots,\sum_{t\in T}X_t^{(\xi)},\ldots\in\boldsymbol{X}$, posons

$$\Phi\Big(\sum_{t\in T}X_t^{(1)},\sum_{t\in T}X_t^{(2)},\ldots,\sum_{t\in T}X_t^{(\xi)},\ldots\Big)=\sum_{t\in T}\Phi_t(X_t^{(1)},X_t^{(2)},\ldots,X_t^{(\xi)},\ldots).$$

On vérifie facilement que Φ est une opération quasi-analytique sur $\boldsymbol{X}$, et que $\langle\boldsymbol{X},\Phi\rangle$ est isomorphe à $\underset{t\in T}{\mathfrak{P}}\Gamma_t$, c. q. f. d.

Lemme 4. *Si Γ est une algèbre analytique, la puissance $\Gamma^{\mathfrak{m}}$ (où $\mathfrak{m}$ est un nombre cardinal arbitraire) est aussi une algèbre analytique.*

La démonstration est semblable à celle du Lemme 3.

Lemme 5. *Si X se compose de deux ensembles 0 et E ($0 =$ ensemble vide), toute opération Φ sur $\boldsymbol{X}$ est analytique.*

La démonstration se fait par simple vérification.

Lemme 6. *Si l'ensemble A se compose de deux points, chaque algèbre $\Gamma = \langle A, \varphi \rangle$ est analytique.*

Ce lemme résulte du Lemme 5.

§ 4. Congruence des opérations analytiques et quasi-analytiques.

Lemme 7. *Soit Φ une opération quasi-analytique sur la famille $\boldsymbol{X}$ de sous-ensembles de l'ensemble E, et p un point de E. La relation $X \sim_p Y$, qui a lieu entre deux ensembles $X, Y \in \boldsymbol{X}$ seulement lorsque p non-$\in X \dot{-} Y$, est une congruence de l'algèbre $\langle \boldsymbol{X}, \Phi \rangle$.*

Ce lemme résulte de la formule (M).

Lemme 8. *Si Φ est une opération quasi-analytique sur la famille $\boldsymbol{X}$ de sous-ensembles de E, l'ensemble $\boldsymbol{X}/\sim_p$, où $p \in E$, contient deux éléments au plus. La famille $\{\sim_p\}$, composée des congruences $\sim_p$ pour lesquelles l'ensemble $\boldsymbol{X}/\sim_p$ contient exactement deux éléments, sépare toute l'algèbre $\langle \boldsymbol{X}, \Phi \rangle$.*

La démonstration est évidente. Les deux éléments de $\boldsymbol{X}/\sim_p$ sont la classe des ensembles $X \in \boldsymbol{X}$ pour lesquels $p \in X$, et la classe des ensembles $X \in \boldsymbol{X}$ pour lesquels p non-$\in X$ (l'une d'elles peut être vide).

Lemme 9. *Si Φ est une opération analytique sur une famille $\boldsymbol{X}$ de sous-ensembles de E, $p, q \in E$, $\boldsymbol{X}/\sim_p$ et $\boldsymbol{X}/\sim_q$ contiennent chacun exactement deux éléments, alors les algèbres-quotients $\langle \boldsymbol{X}, \Phi \rangle/\sim_p$ et $\langle \boldsymbol{X}, \Phi \rangle/\sim_q$ sont isomorphes.*

Démonstration. Soit X_1 (ou Y_1) un ensemble contenant p (ou q), et X_0 (ou Y_0) un ensemble ne contenant pas p (ou q); la classe $\boldsymbol{X}/\sim_p$ ne se compose que des ensembles $X_1/\sim_p$ et $X_0/\sim_p$, la classe $\boldsymbol{X}/\sim_q$ ne que des ensembles $Y_1/\sim_q$ et $Y_0/\sim_q$.

Posons $h(X_s/\sim_p)=Y_s/\sim_q$ $(s=0,1)$, et supposons que la formule

$$h(\Phi/\sim_p)(X_{s_1}/\sim_p, X_{s_2}/\sim_p, \ldots, X_{s_\xi}/\sim_p, \ldots))=$$
$$=\Phi/\sim_q(h(X_{s_1}/\sim_p), h(X_{s_2}/\sim_p), \ldots, h(X_{s_\xi}/\sim_p), \ldots)=$$
$$=\Phi/\sim_q(Y_{s_1}/\sim_q, Y_{s_2}/\sim_q, \ldots, Y_{s_\xi}/\sim_q, \ldots),$$

où $s_\xi=0,1$, pour $\xi<\alpha$, soit en défaut. Alors

$$\Phi/\sim_p(X_{s_1}/\sim_p, X_{s_2}/\sim_p, \ldots, X_{s_\xi}/\sim_p, \ldots)=X_s/\sim_p,$$
$$\Phi/\sim_q(Y_{s_1}/\sim_q, Y_{s_2}/\sim_q, \ldots, Y_{s_\xi}/\sim_q, \ldots)=Y_{1-s}/\sim_q.$$

Supposons $s=1$ (puisque la situation est symétrique); il résulte que $p \in \Phi(X_{s_1}, X_{s_2}, \ldots, X_{s_\xi}, \ldots)$ et q non-$\in \Phi(Y_{s_1}, Y_{s_2}, \ldots, Y_{s_\xi}, \ldots)$. Φ étant une opération analytique, il existe un $\xi_0<\alpha$ tel que $p \in X_{s_{\xi_0}}$ et q non-$\in Y_{s_{\xi_0}}$, ou bien, p non-$\in X_{s_{\xi_0}}$ et $q \in Y_{s_{\xi_0}}$. Mais, si $s_{\xi_0}=1$, nous avons $p \in X_{s_{\xi_0}}$ et $q \in Y_{s_{\xi_0}}$; si $s_{\xi_0}=0$, nous savons p non-$\in X_{s_{\xi_0}}$ et q non-$\in Y_{s_{\xi_0}}$, ce qui donne contradiction en chaque cas.

§ 5. Structure des opérations quasi-analytiques. Considérons la suivante condition de l'algèbre $\Gamma=\langle A,\varphi\rangle$:

(Q) Il existe une famille $\{\sim_t\}_{t\in T}$ de congruences de l'algèbre Γ séparant toute l'algèbre Γ, et telle que $A/\sim_t$ contienne exactement deux éléments pour chaque $t \in T$.

Théorème 2. *Pour que Γ soit une algèbre quasi-analytique, il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la condition* (Q).

Démonstration. En vertu du Lemme 8, chaque algèbre $\langle \boldsymbol{X},\Phi\rangle$, où Φ est une opération quasi-analytique sur $\boldsymbol{X}$, satisfait à la condition (Q). Puisqu'évidemment, avec une algèbre, toute algèbre isomorphe à elle satisfait à la condition (Q), cette condition est nécéssaire pour que Γ soit quasi-analytique.

Supposons maintenant que Γ satisfasse à la condition (Q), et soit $\{\sim_t\}_{t\in T}$ la famille de congruences, mentionnée dans cette condition. Chaque algèbre-quotient $\Gamma/\sim_t$ $(t \in T)$ est alors analytique (Lemme 6), l'algèbre-produit $\underset{t\in T}{\mathscr{P}}(\Gamma/\sim_t)$ est quasi-analytique (Lemme 3). En vertu du Théorème 1, l'algèbre Γ étant isomorphe à une sous-algèbre du produit $\underset{t\in T}{\mathcal{P}}(\Gamma/\sim_t)$, l'est à une algèbre quasi-analytique (Lemme 2), ce qui prouve que Γ est une algèbre quasi-analytique.

§ 6. Structure des opérations analytiques. Considérons maintenant une condition plus forte que (Q):

(A) Il existe une famille $\{\sim_t\}_{t\in T}$ de congruences de l'algèbre Γ séparant toute l'algèbre Γ, telle que, pour $t, t_1 \in T$, l'ensemble $A/\sim_t$ contienne exactement deux éléments, et les algèbres-quotients $\Gamma/\sim_t$, $\Gamma/\sim_{t_1}$ soient isomorphes.

Théorème 3. *Pour que Γ soit une algèbre analytique, il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la condition* (A).

Démonstration. La condition (A) est évidemment nécessaire, vu les Lemmes 8 et 9. Nous démontrerons qu'elle est aussi suffisante. Puisque toutes les algèbres-quotients $\Gamma/\sim_t$ $(t \in T)$ sont isomorphes, l'algèbre-produit $\underset{t\in T}{\mathcal{P}}(\Gamma/\sim_t)$ est isomorphe à l'algèbre-puissance $(\Gamma/\sim_t)^{\mathfrak{m}} = \Gamma_0$, où $\mathfrak{m} = \overline{\overline{T}}$, et $t \in T$. D'après les Lemmes 4 et 6, l'algèbre Γ_0 étant analytique, l'algèbre-produit $\underset{t\in T}{\mathcal{P}}(\Gamma/\sim_t)$ l'est aussi. Mais Γ, d'après le Théorème 1, est isomorphe à une sous-algèbre de $\underset{t\in T}{\mathcal{P}}(\Gamma/\sim_t)$; il résulte du Lemme 2 qu'elle est analytique c. q. f. d.

§ 7. Relation entre les algèbres analytiques et quasi-analytiques. Une opération Φ sur une famille d'ensembles sera dite *proprement quasi-analytique* si elle y est quasi-analytique sans être analytique. De même, l'algèbre Γ sera dite *proprement quasi-analytique*, si elle est quasi-analytique sans être analytique.

Il faut remarquer que les notions d'opération et d'algèbre proprement quasi-analytique ne coïncident pas, c'est-à-dire, qu'il existe des opérations proprement quasi-analytiques Φ sur $\boldsymbol{X}$, telles que l'algèbre $\langle \boldsymbol{X}, \Phi \rangle$ soit analytique. Comme exemple, considérons deux ensembles non vides, disjoints E_1, E_2, et soit $\boldsymbol{X}$ la classe de tous les sous-ensembles de leur somme E_1+E_2. Posons, pour $X_1, X_2 \epsilon \boldsymbol{X}$,

$$\Phi_1(X_1, X_2) = (X_1+X_2)\, E_1 + X_1 \cdot X_2 \cdot E_2,$$
$$\Phi_2(X_1, X_2) = X_1 + X_2.$$

L'opération Φ_1 est proprement quasi-analytique, l'opération Φ_2 est analytique, et on vérifie facilement que les algèbres $\langle \boldsymbol{X}, \Phi_1 \rangle$ et $\langle \boldsymbol{X}, \Phi_2 \rangle$ sont isomorphes [6]).

---

[6]) Après que ma note a était composée j'ai constaté que le théorème 1 est démontré par M. Garret Birkhoff dans son travail: *Subdirect unions in universal algebra,* Bulletin of the Amer. Math. Soc. 50 (1944), p. 764. Les applications de ce théorème à la théorie des groupes (annoncées dans le renvoi [5]) se trouvent aussi dans le travail de M. Birkhoff.

Państwowy Instytut Matematyczny.
Institut Mathématique de l'Etat.

SUR UNE CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE D'OMBILICITÉ D'UN POINT DE SURFACE

Par S. Gołąb (Kraków)

Le but de cette note est de donner une nouvelle condition analytique pour qu'un point d'une surface régulière à deux dimensions soit ombilique.

La condition classique connue est que le tenseur de la deuxième forme quadratique soit proportionnel au tenseur métrique, c'est-à-dire au tenseur de la première forme quadratique fondamentale.

La nouvelle condition, nécessaire et suffisante, qui est déduite plus bas concerne les courbures normales des lignes de courbure passant par le point envisagé.

Soit V_2 une surface régulière plongée dans l'espace à trois dimensions R_3, et

$$x = x(u^1, u^2) \tag{1}$$

l'équation vectorielle de cette surface, où x désigne le vecteur dont l'origine se trouve à l'origine du système des coordonnées et l'extrémité décrit précisément la surface V_2.

Nous supposons que le champ vectoriel (1) ait les deuxièmes dérivées partielles continues. En posant

$$x_i = \frac{\partial x}{\partial u^i} \qquad (i=1,2), \tag{2}$$

nous obtenons, en chaque point p de la surface V_2, deux champs de vecteurs tangents à cette surface.

Nous supposons que ces champs soient linéairement indépendants entre eux, ce qui équivaut à la supposition que la première forme quadratique fondamentale de la surface soit positivement définie. En désignant par un point la multiplication scalaire des vecteurs, nous poserons

$$g_{ik} = \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_k \qquad (i, k=1,2). \tag{3}$$

Les g_{ik} sont précisément les composantes du tenseur métrique. En raison de notre supposition, nous avons

$$\Delta = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 > 0. \tag{4}$$

En vertu de ces suppositions, la surface aura, en chaque point, un plan tangent déterminé, et, à chacun de ses points, nous pourrons associer, à côté des vecteurs $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, un troisième vecteur $\boldsymbol{x}_3$, normal à la surface, en posant, par exemple,

$$\boldsymbol{x}_3 = [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2], \tag{5}$$

où les crochets rectangulaires désignent le produit vectoriel. Remarquons que le vecteur $\boldsymbol{x}_3$ n'est pas nul en raison de la supposition (4).

En normalisant les vecteurs $\boldsymbol{x}_\lambda$ $(\lambda=1,2,3)$, désignons par $\boldsymbol{y}_\lambda$ le quotient

$$\boldsymbol{y}_\lambda = \frac{\boldsymbol{x}_\lambda}{|\boldsymbol{x}_\lambda|}, \tag{6}$$

où $|\boldsymbol{v}|$ est la longueur du vecteur $\boldsymbol{v}$.

Nous admettons, dans ce qui suit, que le réseau des coordonnées u^i sur la surface V_2 soit orthogonal.

Puisqu'en vertu de nos suppositions, les lignes de courbure existent, nous pouvons admettre que le réseau des coordonnées soit celui des lignes de courbures. Introduisons les abréviations

$$\boldsymbol{x}_{ik} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u^i \partial u^k} \qquad (i, k=1,2). \tag{7}$$

En désignant par

$$L_{ik} = \boldsymbol{x}_{ik} \cdot \boldsymbol{y}_3 \qquad (i, k=1,2), \tag{8}$$

nous obtenons les composantes de la deuxième forme quadratique fondamentale.

La supposition que le réseau des lignes paramétriques soit formé par les lignes de courbure conduit aux conclusions

$$g_{12} = 0, \qquad L_{12} = 0. \tag{9}$$

Fixons maintenant le point p sur la surface en question, et désignons par C_1 et C_2 deux lignes de courbure passant par ce point. Pour la ligne C_1, nous avons $u^2 = \text{const}$, et, pour la ligne C_2 — $u^1 = \text{const}$.

Désignons par $\boldsymbol{t}_\lambda$ le trièdre de Darboux attaché à C_1, et par $\boldsymbol{t}^*_\lambda$ le trièdre attaché à C_2. Nous appelons *trièdre de Darboux*, celui dont le premier vecteur est le vecteur-unité tangent à la ligne, le troisième vecteur (unité) est normal à la surface et le deuxième vecteur (unité) est situé dans le plan tangent à la surface et est normal à la courbe.

On aura, en faisant usage de nos désignations,

$$(10) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{y}_1, & \boldsymbol{t}_2 = \boldsymbol{y}_2, \quad \boldsymbol{t}_3 = \boldsymbol{y}_3, \\ \boldsymbol{t}^*_1 = \boldsymbol{y}_2, & \boldsymbol{t}^*_2 = \boldsymbol{y}_1, \quad \boldsymbol{t}^*_3 = \boldsymbol{y}_3. \end{cases}$$

Désignons par s_1 l'arc de la courbe C_1, et par s_2 l'arc de la courbe C_2. La première des équations de Bonnet-Kowalewski donne

$$(11) \qquad \frac{d\boldsymbol{t}_1}{ds_1} = \alpha_1 \boldsymbol{t}_2 + \gamma_1 \boldsymbol{t}_3$$

$$(12) \qquad \frac{d\boldsymbol{t}^*_1}{ds_2} = \alpha_2 \boldsymbol{t}^*_2 + \gamma_2 \boldsymbol{t}^*_3.$$

Les coefficients scalaires α_1, α_2 (de même que γ_1, γ_2) représentent respectivement les courbures géodésiques et les courbures normales des courbes C_1 et C_2.

Des désignations et suppositions faites plus haut résulte la suivante

Proposition. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point p d'une surface soit ombilique est que les courbures normales des lignes de courbure C_1 et C_2 passant par le point p soient égales*

$$(13) \qquad \gamma_1 = \gamma_2.$$

Démonstration Nous allons calculer les courbures γ_1 et γ_2, ne nous bornant qu'au calcul de γ_1 et laissant au lecteur un calcul analogue pour γ_2. L'équation (11) peut être récrite, en raison de (10), sous la forme

$$(14) \qquad \frac{d\boldsymbol{y}_1}{ds_1} = \alpha_1 \boldsymbol{y}_2 + \gamma_1 \boldsymbol{y}_3.$$

Multiplions scalairement par $\boldsymbol{y}_3$ les membres de l'équation (14), en ayant égard à ce que les trois vecteurs $\boldsymbol{y}_\lambda$ forment un système orthogonal (vecteurs-unités mutuellement orthogonaux). Nous obtenons alors

$$\gamma_1 = \boldsymbol{y}_3 \cdot \frac{d\boldsymbol{y}_1}{ds_1}. \tag{15}$$

Calculons ensuite

$$\frac{d\boldsymbol{y}_1}{ds_1} = \frac{d}{ds_1}\left(\frac{\boldsymbol{x}_1}{|\boldsymbol{x}_1|}\right) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}_1|} \cdot \frac{d\boldsymbol{x}_1}{ds_1} - \frac{1}{|\boldsymbol{x}_1|^2} \cdot \frac{d|\boldsymbol{x}_1|}{ds_1} \cdot \boldsymbol{x}_1. \tag{16}$$

Mais

$$\frac{d\boldsymbol{x}_1}{ds_1} = \frac{d}{ds_1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^1}\right) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{(\partial u^1)^2} \cdot \frac{du^1}{ds_1} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}_1}{\partial u^1 \partial u^2} \cdot \frac{du^2}{ds_1}; \tag{17}$$

u^2 étant constant le long de la courbe C_1, nous avons

$$\frac{du^2}{ds_1} \equiv 0, \tag{18}$$

et la formule (17) se réduit à

$$\frac{d\boldsymbol{x}_1}{ds_1} = \frac{du^1}{ds_1} \cdot \boldsymbol{x}_{11}. \tag{19}$$

En multipliant scalairement par $\boldsymbol{y}_3$ les deux membres de (16), nous obtenons

$$\boldsymbol{y}_3 \cdot \frac{d\boldsymbol{y}_1}{ds_1} = \frac{1}{|\boldsymbol{x}_1|}\left(\frac{d\boldsymbol{x}_1}{ds_1} \cdot \boldsymbol{y}_3\right) - \frac{1}{|\boldsymbol{x}_1|^2} \frac{d|\boldsymbol{x}_1|}{ds_1} (\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{y}_3). \tag{20}$$

Puisque

$$\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{y}_3 = 0, \tag{21}$$

nous avons, en tenant compte de (19), (21) et (8) dans la relation (20),

$$\boldsymbol{y}_3 \cdot \frac{d\boldsymbol{y}_1}{ds_1} = \frac{1}{|\boldsymbol{x}_1|} \cdot \frac{du^1}{ds_1} \cdot (\boldsymbol{x}_{11} \cdot \boldsymbol{y}_3) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}_1|} \cdot \frac{du^1}{ds_1} \cdot L_{11}. \tag{22}$$

Nous avons ensuite

$$|\boldsymbol{x}_1| = \sqrt{\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_1} = \sqrt{g_{11}}. \tag{23}$$

D'autre part, il vient

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik} du^i du^k = g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2, \tag{24}$$

ce qui, en raison de (18), conduit à la conclusion

$$ds_1^2 = g_{11}(du^1)^2. \tag{25}$$

Comme l'arc s_1 croît avec la croissance du paramétre u^1, nous avons

$$\frac{du_1}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}. \tag{26}$$

En substituant (23) et (26) dans (22), nous obtenons finalement, en tenant compte de (15),

$$\gamma_1 = \boldsymbol{y}_3 \cdot \frac{d\boldsymbol{y}_1}{ds_1} = \frac{L_{11}}{g_{11}}. \tag{27}$$

Un calcul tout à fait analogue conduit à la formule

$$\gamma_2 = \frac{L_{22}}{g_{22}}. \tag{28}$$

Le fait que la matrice

$$\begin{Vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{22} \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \end{Vmatrix} \tag{29}$$

est du premier ordre équivaut, en raison de (9), à la relation

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{22} \\ g_{11} & g_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{30}$$

En vertu de (27) et (28), la relation (30) est équivalente à l'égalité

$$g_{11} g_{22} (\gamma_2 - \gamma_1) = 0, \tag{31}$$

La proposition que nous voulions démontrer résulte de (31) et de l'inégalité

$$g_{11} g_{22} > 0 \tag{32}$$

qui est une conséquence de l'inégalité (4).

SUR LA MESURABILITÉ DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES *)

Par E. Marczewski et C. Ryll-Nardzewski (Wrocław)

1. Introduction. Lebesgue a démontré que

(i) Si une fonction $y=f(x,t)$ est mesurable B par rapport à x et continue par rapport à t, elle est mesurable B superficiellement [1]).

On démontre d'une façon analogue que

(ii) Si une fonction $y=f(x,t)$ est mesurable L par rapport à x et continue par rapport à t, elle est mesurable L superficiellement [2]).

Rappelons encore le théorème suivant de Ursell:

(iii) Si une fonction $y=f(x,t)$ est mesurable L par rapport à x et monotone par rapport à t, elle est mesurable superficiellement [3]).

L'hypothèse de continuité dans les théorèmes (i) et (ii) est essentielle. En effet, il suffit de considérer la fonction caractéristique d'un ensemble singulier plan de W. Sierpiński [4]) pour prouver que

---

*) Présenté à la Société Polonaise de Mathématique (Section de Varsovie), le 19 octobre 1951.

[1]) Voir par exemple C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa-Wrocław 1948, p. 285.

[2]) Voir par exemple H. D. Ursell, *Some methods of proving measurability*, Fund. Math. 32 (1939), p. 311-330, en particulier p. 326, Theorem 8.

[3]) Voir Ursell, l. c., p. 328-329, Theorem 11 et Theorem 13.

[4]) C'est un ensemble plan non mesurable L, qui possède deux et seulement deux points communs avec chaque droite. Voir W. Sierpiński, *Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement*, Fund. Math. 1 (1920), p. 112-115.

(iv) Il existe une fonction de deux variables semi-continues supérieurement par rapport a chaque variable et non mesurable L superficiellement.

Néanmoins, il est possible d'affaiblir les hypothèses des théoremes (i) et (ii). Nous allons démontrer d'abord que l'hypothèse de continuité peut être remplacée par celle de *continuité d'un côté déterminé* (Théorème 1).

Un exemple de S. Hartman montre que, dans le théorème (i), cette hypothèse ne peut pas être remplacée par *la continuité du côté variable* (**3**, Remarque 3) [5]), mais nous allons démontrer un théorème, d'après lequel cette dernière hypothèse (ainsi que certaines hypothèses plus générales) suffisent pour la proposition (ii) (Théorème 2). Ce théorème embrasse le théorème (iii) de Ursell (cf. **4**, 2°).

Ces résultats semblent être utiles par exemple dans la théorie des processus stochastiques, où on considère justement les fonctions continues d'un côté (par exemple dans les processus du type de Poisson).

Nos théorèmes sont énoncés non seulement pour le cas de variables réelles, mais sous des hypothèses plus générales. Par conséquent ils concernent aussi le cas de *plusieurs variables réelles* (Théorèmes 1'' et 2).

Indiquons enfin un résultat négatif concernant les fonctions d'*une infinité de variables*, à savoir nous allons démontrer qu'*il existe une fonction* $f(t_1,t_2,...)$ *constante par rapport à chaque variable séparément et non mesurable par rapport à la variable* $(t_1,t_2,...)$ (voir **7**).

Les résultats pour le cas de deux variables réelles sont récueillis dans une table.

2. Notations. Nous considérons dans ce travail les fonctions $y=f(x,t)$, où la variable x parcourt un espace abstrait X, la variable t — un espace métrique séparable T et les valeurs y appartiennent à un espace métrique Y. Dans certains cas nous ferons des hypothèses supplémentaires.

$\boldsymbol{K}$ désignera toujours un σ-corps (c'est-à-dire une classe complémentative et dénombrablement additive) de sous-en-

---

[5]) Le même exemple montre que la mesurabilité L dans le théorème (iii) ne peut pas être remplacée pas la mesurabilité B.

sembles de X, $\boldsymbol{B}$ — le corps des ensembles boreliens dans T et $\boldsymbol{M}$ — le plus petit σ-corps de sous-ensembles du produit cartésien $X \times T$, contenant tous les ensembles de la forme $A \times B$, où $A \in \boldsymbol{K}$ et $B \in \boldsymbol{B}$.

$\boldsymbol{Q}$ étant un σ-corps de sous-ensembles d'un ensemble Z et $y=f(z)$ une fonction définie sur Z dont les valeurs appartiennent à Y, nous appelons f *mesurable* ($\boldsymbol{Q}$) si $f^{-1}(G) \in \boldsymbol{Q}$ pour tout ensemble ouvert $G \subset Y$.

Nous adoptons le sens usuel des termes: fonction mesurable L, fonction mesurable B et fonction à propriété de Baire [6]).

3. Mesurabilité ($\boldsymbol{M}$). Supposons que T soit un ensemble de nombres réels.

Théorème 1. *Soit $y=f(x,t)$ une fonction définie dans $X \times T$ telle que la fonction $f(x,t_0)$ soit mesurable ($\boldsymbol{K}$) (pour tout $t_0 \in T$) et que la fonction $f(x_0,t)$ soit partout continue à droite (pour tout $x_0 \in X$). La fonction $f(x,t)$ de deux variables est alors mesurable ($\boldsymbol{M}$).*

Démonstration. Désignons par T_1 l'ensemble des points d'accumulation de T du côté droit et posons $T_0=T-T_1$. L'ensemble T_0 est au plus dénombrable: $T_0=(t_1,t_2,\ldots)$.

Désignons par F un ensemble fermé dans Y, par $G_1,G_2,\ldots$ une suite d'ensembles ouverts tels que $F=G_1\cdot G_2\cdot\ldots$ et par $r_1,r_2,\ldots$ une suite dense dans T.

En vertu de la continuité à droite de f par rapport à t, on a pour $t \in T_1$:

$$[f(x,t) \in F] \equiv \prod_n \sum_k \left(t<r_k<t+\frac{1}{n}\right)[f(x,r_k) \in G_n]. \tag{1}$$

On a donc

$$(X \times T_1)\cdot f^{-1}(F)=$$
$$=(X \times T_1)\cdot \prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{X \times \mathop{E}_{t}\left[t<r_k<t+\frac{1}{n}\right]\right\}\cdot\{\mathop{E}_{x}[f(x,r_n) \in G_n] \times T\},$$

d'où

$$(X \times T_1)\cdot f^{-1}(F) \in \boldsymbol{M}.$$

Par conséquent

$$f^{-1}(F)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathop{E}_{x}[f(x,t_n) \in F] \times (t_n)+(X \times T_1)\cdot f^{-1}(F) \in \boldsymbol{M},$$

ce qui exprime la thèse du théorème.

[6]) Voir C. Kuratowski, l. c., p. 280, 54 et 306.

Remarques. 1. Dans le cas, où X est un espace métrique et T un ensemble de nombres réels, comme auparavant, le même raisonnement donne le résultat suivant pour la classification de Baire et Borel:

Théorème 1'. *Soit $f(x,t)$ une fonction telle que $f(x,t_0)$ soit de classe α (pour tout $t_0 \epsilon T$) et $f(x_0,t)$ — continue à droite (pour tout $x_0 \epsilon X$). La fonction de deux variables $f(x,t)$ est alors de classe $\alpha+1$.*

2. Le théorème 1 peut être généralisé pour le cas où T est un sous-ensemble d'un espace euclidien E à k dimensions (ou, plus généralement, d'un groupe métrique séparable).

Pour tout $V \subset E$ et $p \epsilon E$ désignons par V^p l'ensemble des points $v+p$, où $v \epsilon V$. Nous dirons que f est continue au point p *du coté de l'ensemble* V, lorsque la fonction partielle $f|V^p+(p)$ est continue dans p.

D'une façon analogue p est point d'accumulation de Z *du coté de* V lorsque p est point d'accumulation de l'ensemble $Z \cdot V^p$.

Théorème 1''. *Soit V un sous-ensemble ouvert de E tel que la fermeture de V contienne le point 0. Soit T un sous-ensemble borelien de E tel que chaque point de T soit point d'accumulation de T du côté de V. Soit enfin $y=f(x,t)$ une fonction définie dans $X \times T$ telle que pour tout $t_0 \epsilon T$ la fonction $f(x,t_0)$ soit mesurable $(\boldsymbol{K})$ et pour tout $x_0 \epsilon X$ la fonction $f(x_0,t)$ soit partout continue du côté de V. La fonction $f(x,t)$ est alors mesurable $(\boldsymbol{M})$.*

Pour la démonstration il suffit de considérer une suite $\{r_n\}$ dense dans T et de remarquer que

$$[f(x,t) \epsilon F] = \prod_n \sum_k \left[\varphi(r_k,t) < \frac{1}{n}\right][(r_k - t) \epsilon V][f(x,r_k) \epsilon G_n].$$

3. Considérons encore l'exemple suivant dû à S. Hartman. Soit sur le plan euclidien $X \times T$ un ensemble non-borelien A situé sur la droite $x+t=0$. Désignons par B l'ensemble des points (x,t), où $x+t>0$, et par $h(x,t)$ la fonction caractéristique de l'ensemble $H=A+B$. *La fonction h possède les propriétés suivantes:*

1⁰ *Les fonctions d'une variable* $h(x_0,t)$ *et* $h(x,t_0)$ *(pour tout* $x_0 \in X$ *et tout* $t_0 \in T$*) sont non-décroissantes et continues partout d'un côté (à gauche dans certains points et à droite dans les autres).*

2⁰ *La fonction de deux variables* $h(x,t)$ *est non mesurable B.*

Cet exemple montre que l'hypothèse du théorème 1, exigeant que $f(x_0,t)$ soit continue d'un côté *déterminé* est essentielle.

4. Propriétés (N), (P) **et** (R). Soit R un ensemble au plus dénombrable, dense dans T. Pour toute fonction réelle $\varphi(t)$ définie sur T, désignons par $\varphi_R(t)$ et $\varphi^R(t)$ les bornes locales (inférieure et supérieure) de la fonction partielle $\varphi|R$ au point t. Par conséquent

(*) Pour toute suite d'ensembles ouverts $\{V_n\}$ contenant t, à diamètres tendant vers 0, on a

$$\varphi_R(t)=\lim_{n\to\infty}\inf_{r\in RV_n}\varphi(r).$$

Désignons par D_φ l'ensemble des points de discontinuité de φ et par λ une σ-mesure dans $\boldsymbol{B}$ (c'est-à-dire une fonction $\lambda(E)$ d'ensemble, dénombrablement additive et telle que $0\leqslant\lambda(E)\leqslant$ $\leqslant+\infty$) et considérons les conditions suivantes:

(N) $\lambda(D_\varphi)=0$,
(P) D_φ est un ensemble de première catégorie,
(R) $\varphi_R(t)\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi^R(t)$ pour chaque $t\in T$.

Il est à remarquer que pour les fonctions satisfaisant à (R), on a

$$D_\varphi=\mathop{E}_{t}[\varphi_R(t)<\varphi^R(t)].$$

Dans le cas, où T est l'ensemble des nombres réels et λ est la mesure de Lebesgue, les fonctions suivantes satisfont à (N), (P) et (R):

1⁰ Les fonctions continues dans chaque point d'un côté (à gauche dans les uns, à droite dans les autres).

2⁰ Les fonctions $\varphi(t)$ qui possèdent pour tout t les deux limites unilatères $\varphi(t-0)$ et $\varphi(t+0)$ et satisfont toujours aux inégalités $\varphi(t-0)\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi(t+0)$ ou bien $\varphi(t+0)\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi(t-0)$ (en particulier tous les fonctions monotones).

L'ensemble D_φ est dans ces cas au plus dénombrable et par conséquent les conditions (N) et (P) sont satisfaites. Evidemment, (R) est satisfaite aussi.

5. Mesurabilité ($\overline{\boldsymbol{M}}$). Soit $\varkappa$ une σ-mesure σ-finie dans $\boldsymbol{K}$ (c'est-à-dire telle que $X=X_1+X_2+\ldots$ où $\varkappa(X_j)<\infty$) et λ une σ-mesure σ-finie dans $\boldsymbol{B}$. Désignons par μ le produit direct $\mu=\varkappa\times\lambda$ dans $\boldsymbol{M}$. Définissons la classe $\overline{\boldsymbol{M}}$ en posant $M\in\overline{\boldsymbol{M}}$ lorsqu'il existe deux ensembles $M_1, M_2\in\boldsymbol{M}$ tels que $M_1\subset M\subset M_2$ et $\mu(M_2-M_1)$.

Si, par exemple, $X=T=$ l'ensemble des nombres réels, si $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{B}=$ le corps des ensembles boréliens dans T et si $\varkappa=\lambda=$ la mesure de Lebesgue dans $\boldsymbol{B}$, le corps $\boldsymbol{M}$ est celui des ensembles plans mesurables B; dans le même cas ainsi que dans le cas où $\boldsymbol{K}=$ le corps des ensembles mesurables L, le corps $\overline{\boldsymbol{M}}$ est celui des ensembles mesurables L superficiellement.

Théorème 2. *Soit $f(x,t)$ une fonction réelle définie dans $X\times T$ telle que la fonction $f(x,t_0)$ soit mesurable* ($\boldsymbol{K}$) *(pour tout $t_0\in T$) et que la fonction $f(x_0,t)$ satisfasse à* (R) *et à* (N) *(pour tout $x_0\in X$). La fonction $f(x,t)$ de deux variables est alors mesurable* ($\overline{\boldsymbol{M}}$).

Démonstration. Désignons par $G^{m,n}$ des ensembles ouverts dans T à diamètres plus petits que $1/m$ et tels que

$$T=G^{m,1}+G^{m,2}+\ldots$$

Posons encore

$$H^{m,1}=G^{m,1} \text{ et } H^{m,n}=G^{m,n}-(G^{m,1}+G^{m,2}+\ldots+G^{m,n-1}) \text{ pour } n>1;$$

on a donc

$$(1)\qquad T=H^{m,1}+H^{m,2}+\ldots \quad\text{et}\quad H^{m,i}\cdot H^{m,j}=0 \quad\text{pour}\quad i\neq j.$$

Finalement, désignons par $r_1^{m,n}, r_2^{m,n},\ldots$ la suite de tous $r\in RG^{m,n}$ et posons pour $t\in H^{m,n}$

$$(2)\qquad F_m(x,t)=\inf_{r\in RG^{m,n}} f(x,r)=\lim_{k\to\infty}\min_{1\leqslant j\leqslant k} f(x,r_j^{m,n}).$$

La fonction $F_m(x,t)$ est donc définie dans tout l'ensemble $X\times T$. Il résulte de l'hypothèse et de (2) qu'elle est mesurable

(M) dans $X \times H^{m,n}$ pour $n=1,2,\ldots$, donc aussi dans $X \times T$ en vertu de (1).

Considérons pour chaque $x_0 \in X$ la fonction $\varphi(t)=f(x_0,t)$ et appliquons la définition de φ_R et φ^R. Nous obtenons ainsi les fonctions $f_R(x_0,t)$ et $f^R(x_0,t)$.

En vertu de **4** (*) on a

$$f_R(x,t)=\lim_{m\to\infty} F_m(x,t) \text{ pour } x \in X,\ t \in T,$$

d'où il résulte que la fonction f_R est mesurable (M). La fonction f^R l'est évidemment aussi.

Posons

$$N=\underset{(x,t)}{E}[f_R(x,t)<f^R(x,t)], \qquad N_{x_0}=\underset{t}{E}[(x_0,t) \in N].$$

Les fonctions f_R et f^R étant mesurables (M), on a $N \in M$, et, la fonction $f(x_0,t)$ satisfaisant à (N) pour tout $x_0 \in X$, on a $\lambda(N_{x_0})=0$ pour tout $x_0 \in X$. Par conséquent, en vertu des propriétés bien connues des produits directs des mesures, $\mu(N)=0$.

Puisque $f(x_0,t)$ satisfait à la condition (R) pour tout $x_0 \in X$, on a

$$\underset{(x,t)}{E}[f_R(x,t) \neq f(x,t)] \subset N,$$

d'où il résulte aisément la mesurabilité $(\overline{M})$ de f.

6. La propriété de Baire. Supposons maintenant que X soit un espace métrique.

Théorème 3. *Soit $f(x,t)$ une fonction réelle définie dans $X \times T$ telle que la fonction $f(x,t_0)$ possède la propriété de Baire (pour chaque $t_0 \in T$) et que la fonction $f(x_0,t)$ satisfasse à* (R) *et à* (P) *(pour tout $x_0 \in X$). La fonction $f(x,t)$ de deux variables possède alors la propriété de Baire (dans $X \times T$).*

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 2. Elle est basée sur le théorème, d'après lequel si l'ensemble $P \subset X \times T$ possède la propriété de Baire et si l'ensemble $P \cdot [(x_0) \times T]$ est de première catégorie dans $(x_0) \times T$ pour tout $x_0 \in X$, l'ensemble P est de première catégorie dans $X \times T$ [7]).

---

[7]) Voir R. Sikorski, *On the cartesian product of metric spaces*, Fund. Math. 34 (1947), p. 288-292, en particulier p. 291, Theorem 3.

7. Fonctions d'une infinité de variables. Désignons par I l'intervalle $\langle 0,1\rangle$ et considérons le cube de Hilbert $H=I\times I\times\ldots$ Si $t=(t_1,t_2,\ldots)\in H$ et $u=(u_1,u_2,\ldots)\in H$, nous posons $t\equiv u$ lorsqu'on a $t_j=u_j$, à l'exception d'un nombre fini d'indices. Un ensemble quelconque $E\subset H$ sera dit *invariant* lorsque les relations $t\in E$ et $t\equiv u$ entraînent $u\in E$. Evidemment

(i) Pour que la fonction caractéristique $c(t_1,t_2,\ldots)$ d'un ensemble $E\subset H$ soit constante par rapport à chaque variable, il faut et il suffit que E soit invariant.

Désignons par $\varphi(t)$ pour tout $t\in H$ l'ensemble de tous les $u\in H$ tels que $t\equiv u$. La classe de tous les $\varphi(t)$, pour t parcourant H, sera désignée par H^*. Evidemment

(ii) Pour tout $\Phi\subset H^*$, l'ensemble $\varphi^{-1}(\Phi)$ est invariant, en particulier on a $\varphi^{-1}[\varphi(t)]=\varphi(t)$ pour tout $t\in H$.

Par conséquent, H^* étant de puissance du continu,

(iii) La classe des sous-ensembles invariants de H est de puissance de l'hypercontinu,

d'où il résulte, en vertu de (i), qu'*il existe des fonctions $f(t_1,t_2,\ldots)$ non mesurables B, constantes par rapport à chaque variable.*

Nous allons maintenant fortifier ce résultat: nous remplacerons la non mesurabilité B par la non mesurabilité L, ce qui exigera certaines remarques préliminaires.

Considérons la mesure λ de Lebesgue dans I et le produit direct $\mu=\lambda\times\lambda\times\ldots$ dans H. Un ensemble $M\subset H$ s'appelle mesurable L lorsqu'il existe deux ensembles boreliens B_1 et B_2 tels que $B_1\subset M\subset B_2$ et $\mu(B_2-B_1)=0$.

Voici le théorème dit *sur la probabilité zéro ou un*:

(iv) Pour tout sous-ensemble Z de H, invariant et mesurable L, on a $\mu(Z)=0$ ou bien $\mu(Z)=1$ [8]).

L'ensemble $\varphi(t)$ est, pour tout $t\in H$, un F_σ invariant et on démontre aisément que pour $t',t''\in H$ on a $\mu[\varphi(t')]=\mu[\varphi(t'')]$. Donc, en vertu de (iv), on a

(v) $\mu[\varphi(t)]=0$ pour tout $t\in H$.

---

[8]) Voir par exemple P. R. Halmos, *Measure theory*, New York 1950, p. 201, (3).

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES RÉELLES

I. Pour toute fonction $f(x, t)$ on a $AB \to C$

II. Il existe une fonction $f(x, t)$ telle que ABC

		A	B	C	
		Pour tout t_0 réel la fonction $f(x, t_0)$ d'une variable x	Pour tout x_0 réel la fonction $f(x_0, t)$ d'une variable t	La fonction $f(x, t)$ de deux variables	Renvois
I	1	est de classe α	est continue à droite	est de classe $\alpha+1$	Théorème 1′
	2	est mesurable B	est continue à droite	est mesurable B	Théorème 1
	3	est mesurable L	satisfait à (N) et à (R)	est mesurable L	Théorème 2
	4	a la propriété de Baire	satisfait à (P) et à (R)	a la propriété de Baire	Théorème 3
II	1	est semi-continue supérieurement	est semi-continue supérieurement	est non mesurable L	Sierpiński, **1** (iii)
	2	est non-décroissante et continue d'un côté	est non-décroissante et continue d'un côté	est non mesurable B	Hartman, **3** Remarque 3.

Nous allons démontrer que

(vi) Il existe dans H un ensemble invariant et non mesurable L.

Supposons par contre que tout ensemble invariant soit mesurable L. Par conséquent, en se basant sur (ii), nous pouvons poser

$$\nu(\Phi) = \mu[\varphi^{-1}(\Phi)], \qquad \text{pour tout} \quad \Phi \subset H^*.$$

Ainsi, ν est une σ-mesure dans la classe des sous-ensembles de H^*. En vertu de (ii) et de (iv) on a toujours $\nu(\Phi)=0$ ou bien $\nu(\Phi)=1$. En particulier on a $\nu(H^*)=1$ et, en vertu de (ii) et de (v), $\nu(\Phi)=0$ pour tout Φ composé d'un seul élément.

Nous arrivons ainsi à une contradiction, car dans la classe des sous-ensembles d'un ensemble de puissance du continu toute σ-mesure à valeurs 0 et 1, s'annulant pour les ensembles composés d'un seul point, s'annule identiquement [9]). La proposition (vi) est donc démontrée.

Il en résulte, en vertu de (i), qu'*il existe une fonction* $f(t_1, t_2, \ldots)$ *non mesurable* L*, constante par rapport à chaque variable.*

Państwowy Instytut Matematyczny
Institut Mathématique de l'État

---

[9]) Théorème de Ulam. Voir S. Ulam, *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre,* Fund. Math. 16 (1930), p. 140-150, en particulier p. 146 et 147, et E. Marczewski, *Two valued measures and prime ideals in fields of sets,* C. R. Soc. Sc. Varsovie, Année 1947, p. 11-17, en particulier p. 14, Theorem 3.

ON A TRIGONOMETRICAL SUM

By P. TURAN (Budapest)

1. This paper contains a modest contribution to the theory of trigonometrical series, a subject enriched by many remarkable discoveries of H. Steinhaus. The trigonometrical sum in question is

$$S_n(x) = \sum_{\nu \leqq n} \frac{\sin \nu x}{\nu}, \quad n \geqq 1. \tag{1.1}$$

The fact that they are bounded uniformly in x and n is classical; it was known perhaps to Dirichlet. Fejér stated first, as a conjecture, in 1910, the theorem that

$$S_n(x) > 0 \quad \text{for} \quad n \geqq 1,\ 0 < x < \pi. \tag{1.2}$$

The conjecture has been proved by Gronwall [1], Dunham-Jackson [2], Fejér himself [3] and [8], Landau [4], Hyltén-Cavallius [5] and by the present author [6]. The significance of (1.2) has turned up many times since. E. g. if

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

and $F(x)$ denotes its indefinite integral, i. e.

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{a_\nu}{\nu} \sin \nu x - \frac{b_\nu}{\nu} \cos \nu x \right),$$

then the representation

$$F(x) = \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} (f(x-t) - f(x+t)) \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu t}{\nu} \right) dt$$

gives immediately that supposing

$$|f(x)| \leq M$$

we have — using (1.2) —

$$|F(x)| \leq \frac{2M}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin \nu t}{\nu}\right|dt = \frac{2M}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin \nu t}{\nu}\right)dt = M\frac{\pi}{2},$$

which gives the well-known theorem of H. Bohr for an important part of the periodical case.

So far as I know none of the methods of the proofs of (1.2) can be plunged into a general theorem except that of [6]. In the sequel I shall give two generalizations of (1.2). This will give rise to some further questions exposed in sections 6 and 7.

2. The first generalization runs as follows:

Theorem I. *If for a fixed n the real numbers $b_1, b_2, \dots, b_n$ are such that*

(2.1) $$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 3x + b_3 \sin 5x + \dots + b_n \sin (2n-1)x \geq 0$$

for $0 < x < \pi$, then we have for the same n and for $0 < x < \pi$

(2.2) $$g(x) = \frac{b_1}{1}\sin x + \frac{b_2}{2}\sin 2x + \dots + \frac{b_n}{n}\sin nx > 0.$$

If we choose, in particular,

$$b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1,$$

then (2.1) is fulfilled by the well-known non-negativity property of the Fejér-kernel; thus in this form (1.2) appears as a consequence of the non-negativity of the Fejér-kernel.

The second generalization is contained in

Theorem II. *If*

(2.3) $$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = 0 \qquad (a_\nu \textit{ real})$$

and

(2.4) $$A(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cos \nu x \geq 0 \quad \textit{for} \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$$

then

$$B(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_{\nu-1}}{\nu} \sin \nu x > 0 \quad \textit{for} \quad 0 < x < \pi.$$

If we choose

$$A(x) = 1 - \cos nx$$

we get Fejér's inequality (1.2) again.

3. In order to deduce Theorem I from Theorem II we write (2.1) in the form

$$b_1 \sin \frac{x}{2} + b_2 \sin \frac{3x}{2} + b_3 \sin \frac{5x}{2} + \ldots + b_n \sin \frac{2n-1}{2} x > 0$$

valid for $0 < x < 2\pi$. Multiplying by $2 \sin \frac{x}{2}$ we obtain — again for $0 < x < 2\pi$ —

$$b_1(1 - \cos x) + b_2(\cos x - \cos 2x) + \ldots + b_n(\cos (n-1)x - \cos nx) > 0,$$

i. e.

$$b_1 + (b_2 - b_1) \cos x + (b_3 - b_2) \cos 2x + \ldots$$
$$\ldots + (b_n - b_{n-1}) \cos (n-1)x - b_n \cos nx > 0.$$

Thus (2.3)-(2.4) is satisfied for

$$a_0 = b_1, \quad a_1 = b_2 - b_1, \quad \ldots, \quad a_{n-1} = b_n - b_{n-1}, \quad a_n = -b_n.$$

Hence, the application of Theorem II gives at once Theorem I.

It would be of interest to deduce Theorem I by applying the parametric representation of Fejér-F. Riesz of non-negative trigonometrical polynomials.

4. In order to prove Theorem II we consider the function

$$F(z) = \sum_{\nu=0} a_\nu z^\nu.$$

By hypothesis

$$\frac{F(z)}{1-z} = \sum_{\nu=1}^{n} (a_0 + a_1 + \ldots + a_{\nu-1}) z^{\nu-1}. \tag{4.1}$$

Fixing x in $0<x<\pi$ we form that arc l of the circle

$$|1-z|=|1-e^{ix}|=\varrho$$

which lies in the unit-circle. Integrating both sides of (4.1) along l we obtain

$$\sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{a_0+a_1+\ldots+a_{\nu-1}}{\nu}\sin \nu x=\frac{1}{2i}\int_{(l)}\frac{F(z)}{1-z}\,dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi-x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} F(1-\varrho e^{-i\alpha})\,d\alpha\,.$$

Since the a_ν's are real, $F(z)$ assumes conjugate complex values for conjugate complex z's. Thus we have

$$(4.2)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{a_0+a_1+\ldots+a_{\nu-1}}{\nu}\sin \nu x=\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} \mathrm{Re}F(1-\varrho e^{-i\alpha})\,d\alpha\,.$$

Since $\mathrm{Re}F(z)$ is non-negative on the periphery of the unit-circle, the same holds, owing to the well-known property of harmonic functions, for the whole disc $|z|\leqslant 1$. But the values

$$1-\varrho e^{-i\alpha}\qquad \left(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi-x}{2}\right)$$

are obviously absolutely $\leqslant 1$, which means that the integrand in (4.2) is non-negative; this proves Theorem II.

5. In the case of (1.1) this representation takes the form

$$(5.1)\qquad S_n(x)=\sum_{\nu\leqslant n}{}' \frac{\sin \nu x}{\nu}=\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} \mathrm{Re}\{1-(1-\varrho e^{-i\alpha})^n\}\,d\alpha$$

stated in [6]. It may be remarked that this enables us to give a simple positive minorant to Fejér's polynomials $S_n(x)$. For, from (5.1) we have

$$\sum_{\nu\leqslant n}{}' \frac{\sin \nu x}{\nu}\geqslant\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} (1-|1-\varrho e^{-i\alpha}|^n)\,d\alpha\,,$$

and, since

$$|1-\varrho e^{-i\alpha}|\leqslant 1,$$

we get further

$$\sum_{\nu\leqslant n}\frac{\sin\nu x}{\nu}\geqslant\int_0^{\frac{\pi-x}{2}}(1-|1-\varrho e^{-i\alpha}|^2)\,d\alpha \quad \text{for} \quad n\geqslant 2.$$

Using

$$\int_0^{\frac{\pi-x}{2}}(-\varrho^2+2\varrho\cos\alpha)\,d\alpha=\left(2\cos\frac{x}{2}-\varrho\frac{\pi-x}{2}\right)\varrho=$$

$$=4\sin^2\frac{x}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi-x}{2}-\frac{\pi-x}{2}\right),$$

we have obtained the inequality

(5.2) $$\sum_{\nu\leqslant n}\frac{\sin\nu x}{\nu}>4\sin^2\frac{x}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi-x}{2}-\frac{\pi-x}{2}\right)$$

valid for $0<x<\pi$ and $n\geqslant 2$.

6. The inequality [6]

(6.1) $$\sum_{\nu\leqslant n}\frac{\sin\nu x}{\nu}<\pi-x,\quad n\geqslant 1,\quad 0<x<\pi,$$

admits a generalization similar to Theorem II. The representation (4.2) gives immediately the following

Theorem III. *If for real a's we have*

$$\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu=0$$

and for $0\leqslant x\leqslant 2\pi$

$$|f(x)|=\left|\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu\cos\nu x\right|\leqslant M,$$

then for $0<x<\pi$ *we have*

$$|g(x)|=\left|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_0+a_1+\ldots+a_{\nu-1}}{\nu}\sin\nu x\right|\leqslant M\frac{\pi-x}{2}.$$

7. It is possible to drop the restriction

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = 0$$

from theorems II and III. Then we are led to theorems which are deeper then the above ones and from certain properties of the series

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \cos \nu x \tag{7.1}$$

we infer some properties of the series

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_0 + A_1 + \ldots + A_{\nu-1}}{\nu} \sin \nu x.$$

These theorems can be compared with a theorem of Hardy [7] according to which some conclusions can be drawn from certain properties of the series (7.1) to those of the series

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_0 + A_1 + \ldots + A_{\nu-1}}{\nu} \cos \nu x.$$

I shall return to this subject at another occasion.

8. In [6] I have proved, starting from the inequality (6.1), the theorem that having a function $f(\vartheta)$ odd in $[0, 2\pi]$ and convex from above in $[0, \pi]$

$$f(\vartheta) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin \nu\vartheta$$

we have

$$s_n(\vartheta) = \sum_{\nu \leqq n} b_\nu \sin \nu\vartheta \leqq 2f(\vartheta). \tag{8.1}$$

This enables us to obtain a result in the theory of functions harmonic for $r < 1$.

Theorem IV. *If $f(\vartheta)$ is odd in $[0, 2\pi]$ and convex for $[0, \pi]$*

$$f(\vartheta) \sim \sum_{1}^{\infty} b_\nu \sin \nu\vartheta$$

then for the corresponding harmonic function

$$f(r,\vartheta) = \sum_{1}^{\infty} b_\nu r^\nu \sin \nu\vartheta$$

in the upper-half circle we have the estimation

$$s_n(r,\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu r^\nu \sin \nu\vartheta \leqslant 2f(r,\vartheta) \qquad (n=1,2,\ldots).$$

The proof follows immediately from two facts: 1^0 That

$$s_n(r,\vartheta) - 2f(r,\vartheta)$$

owing to (8.1) is non-positive on the periphery of the upper-half circle and is identically zero on the segments

$$\{\vartheta=0,\ 0\leqslant r\leqslant 1\}, \quad \{\vartheta=\pi,\ 0\leqslant r\leqslant 1\};$$

2^0 That a harmonic function assumes its maximum on the periphery. On the other hand the harmonic polynomials mentioned above are non-negative on the upper-half of the unit-circle as previously remarked Fejér and Pólya.

REFERENCES

[1] T. H. Gronwall, *Über die Gibbssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen* $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx$, Math. Ann. 72 (1912), p. 228-243.

[2] Dunham-Jackson, *Über eine trigonometrische Summe*, Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo 32 (1911).

[3] L. Fejér, *Einige Sätze, die sich aus das Vorzeichen einer ganzen rationalen Funktion beziehen*, Monatshefte für Math. 35 (1928), p. 305-344.

[4] E. Landau, *Über eine trigonometrische Ungleichung*, Math. Zeitsch. 37 (1933), p. 36.

[5] C. Hyltén-Cavallius, *Geometrical Methods Applied to Trigonometrical Sums*, Kungl. Fys. Sällskapets Lund Förhandlinger 21, N. 1 (1950), p. 1-19.

[6] P. Turán, *Über die Partialsummen der Fourierreihe*, Journ. of London Math. Soc. 13 (1938), p. 278-282.

[7] G. H. Hardy, *Notes on some points in the integral calculus*, Mess. of Math. 58 (1928), p. 50-52.

[8] L. Fejér, *Eigenschaften von einigen elementaren trigonometrischen Polynomen*, Comm. du Sémin. Math. de l'Univ. de Lun, Tome suppl. dédie à M. Riesz (1952), p. 62-72.

ON THE UNIFORM BUT NOT ABSOLUTE CONVERGENCE OF POWER SERIES WITH GAPS

By P. ERDÖS (London)

Hardy[1]) was the first to give an example of a power series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$ which converges uniformly in $|z| \leqq 1$ but for which $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$. Piranian asked me (in a letter) for what sequences of integers $n_1 < n_2 < \dots$ does there exist a power series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$ which converges uniformly in $|z| \leqq 1$ but for which $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverges. In the present paper I shall prove the following

Theorem 1. *Let $n_1 < n_2 < \dots$ be a sequence of integers satisfying* $\liminf n_n^{1/k} = 1$. *Then there exists a power series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$ which converges uniformly in $|z| \leqq 1$ but for which $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$.*

The condition $\liminf n_k^{1/k} = 1$ can certainly not be weakened a great deal. In fact Zygmund[2]) proved that if $n_{k+1}/n_k > c > 1$, and if $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$ converges for all $|z| = 1$ then $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$. On the other hand both Piranian and I observed that $\liminf n_k^{1/k} = 1$ is not a necessary condition. In fact I shall prove that the following somewhat stronger result holds:

---

[1]) E. Landau, *Neuere Ergebnisse der Funktionentheorie*, p. 68.

[2]) Studia Math. 3 (1931), p. 77-91.

Theorem 2. *Let* $n_1 < n_2 < \ldots$ *satisfy*

(1) $$\liminf (n_j - n_i)^{1/j-i} = 1, \text{ where } j-i \to \infty.$$

Then there exists a power series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$ *which converges uniformly for* $|z|=1$ *but* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$.

It is clear that Theorem 2 is stronger than Theorem 1, since if $\liminf n_k^{1/k} = 1$ holds then $\liminf (n_j - n_i)^{1/j-i} = 1$ also holds (put $n_i = n_1$ and let $j \to \infty$).

It is not impossible that (1) is the necessary and sufficient condition for the existence of a power series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$ which converges uniformly for $|z| \leqslant 1$ but $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$.

We will prove Theorem 2 since the proof of Theorem 1 is not easier. The proof will use methods of probability theory and for this reason I am glad that the paper appears in a volume dedicated to Professor Steinhaus who has contributed so much to this subject.

It easily follows from (1) that there exists a sequence of indices satisfying

(2) $i_1 < j_1 < i_2 < j_2 < \ldots,\ 3 < n_{j_l} - n_{i_l} < \exp(j_l - i_l/2^l),\ j_l - i_l = 2A_l - 1,$

$\exp z$ denoting e^z. The condition that $j_l - i_l$ is odd is assumed only to make some of the later computations simpler. From (2) we have

(3) $$2A_l = j_l - i_l + 1 \leqslant n_{j_l} - n_{i_l} + 1 < 2(n_{j_l} - n_{i_l}).$$

Further by (2)

(4) $$j_l - i_l > 2^l \quad \text{or} \quad A_l > 2^{l-1}.$$

Define $a_k = 0$ if k is not in any of the intervals (i_l, j_l), $l = 1, 2, \ldots$, and $a_k = (lA_{l/2})^{-1}$ if $i_l \leqslant k \leqslant j_l$. Denote by $r_k(t)$ the k-th Rademacher function.

We have $\sum_{k=i_l}^{j_l} a_k = 1/l$ hence $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{l=1}^{\infty} 1/l = \infty$. Therefore Theorem 2 follows from

Theorem 3. *For almost all* t

$$f_t(z) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) a_k z^{n_k}$$

converges uniformly for $|z| \leqslant 1$.

In other words if $\varepsilon_k = \pm 1$ and the ε-s are independent of each other, then $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k a_k z^{n_k}$ converges uniformly for almost all choices of the ε-s (since $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$ Theorem 3 includes Theorem 2).

To prove Theorem 3 we need a few lemmas. First of all put

$$Q_t^{(l)}(z) = \sum_{k=i_l}^{j_l} r_k(t)\, z^{n_k - n_{i_l}} = \sum_{k=i_l}^{j_l} \varepsilon_k\, z^{n_k - n_{i_l}}. \tag{5}$$

By (5)

$$f_t(z) = \sum_{l=1}^{\infty} z^{n_{i_l}}\, Q_t^{(l)}(z)/2l A_l.$$

The degree of $Q_t^{(l)}(z)$ is $n_{j_l} - n_{i_l}$ and it has $2A_l$ terms.

Lemma 1. *Suppose* $0 \leqslant b_i \leqslant 1$, *and let* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ *take on the values* ± 1 *in all possible ways (thus there are* 2^m *possible choices for the* ε-*s). Denote by* $g(m,r)$ *the number of choices of the* ε-*s for which*

$$\Big|\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i b_i\Big| < m - 2r + 1 \quad (\text{if } r > m/2,\ g(m,r) = 0) \tag{6}$$

(min $g(m,r)$ *denotes the smallest possible value of* $g(m,r)$). *Then*

$$\min g(m,r) = \binom{m}{r} + \binom{m}{r+1} + \dots + \binom{m}{m-r}. \tag{7}$$

The Lemma means that $g(m,r)$ is minimal if $b_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, m$.

The lemma and its proof are due to Szekeres[3]). We use induction for m and r. We can assume without loss of generality that $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \dots \leqslant b_m = 1$ (for if $b_m < 1$, we replace b_i by b_i/b_m, $i = 1, 2, \dots, m$, and $g(m,r)$ is clearly not increased). If

$$\Big|\sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i b_i\Big| < m - 2r + 1$$

[3]) Written communication.

and $\varepsilon_m=+1$ we obtain

(8) $$-(m-2r+2)<|\sum_{i=1}^{m-1}\varepsilon_i b_i|<m-2r.$$

If $\varepsilon_m=-1$ then

(9) $$-(m-2r)<|\sum_{i=1}^{m-1}\varepsilon_i b_i|<m-2r+2.$$

From (8) and (9) we obtain that

(10) $$\min g(m,r)\geqslant \min[g(m-1,r)]+\min[g(m-1,r-1)].$$

Lemma 1 clearly holds for $r=0$ and any m, also it holds for $m=1$ and any n. Thus by (10) and a simple induction argument it holds for all m and r, which proves Lemma 1.

Lemma 2. *Let $z_1, z_2, \ldots, z_{2m}$ be $2m$ complex numbers, $|z_i|=1$, $i=1,2,\ldots,m$. Then the nuwber of choices of the ε-s for which*

$$|\sum_{i=1}^{2m}\varepsilon_i z_i|\geqslant(2s+1)\sqrt{2}$$

is less than

$$8m\cdot 2^{2m}\exp(-s^2/2m).$$

Put $z_j=a_j+ib_j$. If

$$|\sum_{j=1}^{2m}\varepsilon_j z_j|\geqslant(2s+1)\sqrt{2}$$

then either

$$|\sum_{j=1}^{2m}\varepsilon_j a_j|\geqslant 2s+1 \quad \text{or} \quad |\sum_{j=1}^{2m}\varepsilon_j b_j|\geqslant 2s+1.$$

By lemma 1 the number of solutions of

$$|\sum_{j=1}^{2m}\varepsilon_j a_j|\geqslant 2s+1$$

is less than or equal to

$$2^{2m}-\min[g(2m,m-s)]=2^{2m}-\binom{2m}{m-s}-\ldots-\binom{2m}{m+s}=$$

(11) $$=2\sum_{i=1}^{m-s-1}\binom{2m}{i}<4m\binom{2m}{m-s}=$$
$$=4m\binom{2m}{m}\frac{m(m-1)\ldots(m-s+1)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+s)}<$$
$$<4m\cdot 2^{2m}\prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{2i-1}{2m}\right)<4m\cdot 2^{2m}\exp(-s^2/2m).$$

Similarly the number of solutions in the ε-s of

$$\left|\sum_{j=1}^{2m} \varepsilon_j b_j\right| \geqq 2s+1$$

satisfies (11), which proves Lemma 2.

Lemma 3. *For* $l > l_0$

$$\text{Prob}\,[\max_{|z|=1} |Q_t^{(l)}(z)| > ((2A_l+1)\sqrt{2}/l+\pi)] < 1/2^l.$$

In other words the measure in t of the set for which

$$\max_{|z|=1} |Q_t^{(l)}(z)| > (2A_l+1)\sqrt{2}/l+\pi$$

is less than $1/2^l$. Or in still other words: The number of choices of $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2A_l}$ for which

$$\text{(12)} \qquad \max_{|z|=1} |Q_t^{(l)}(z)| = \max_{|z|=1} \left|\sum_{k=i_l}^{j_l} \varepsilon_k z^{n_k - n_{i_l}}\right| > (2A_l+1)\sqrt{2}/l+\pi$$

is less than $2^{2A_l - l}$.

Put

$$\xi_r = \exp\,[2\pi ri/(n_{j_l} - n_{i_l})^2, \quad 1 \leqq r \leqq (n_{j_l} - n_{i_l})^2.$$

Thus ξ_r runs through the $(n_{j_l} - n_{i_l})^2$-th roots of unity. $Q_t^{(l)}(\xi_r)$ is of the form $\sum_{i=1}^{2A_l} \varepsilon_i z_i$, $|z_i| = 1$. Thus lemma 2 can be applied and we obtain from Lemma 2 on putting $A_l = m$, $s = A_l/l$ that the number of choices of the ε-s for which

$$|Q_t^{(l)}(\xi_r)| > (2A_l+1)\sqrt{2}/l$$

is less than

$$\text{(13)} \qquad 4A_l \cdot 2^{2A_l} \exp(-A_l/2l^2).$$

Therefore for $l > l_0$ by (12), (2), (3) and (4) the number of ε-s for which

$$\text{(14)} \qquad \max_{1 \leqq r \leqq (n_{j_l} \cdot n_{i_l})^2} |Q_t^{(l)}(\xi_r)| > (2A_l+1)\sqrt{2}/l$$

is less than

$$4A_l\cdot 2^{2A_l}(n_{j_l}-n_{i_l})^2\exp(-A_l/2l^2)<$$

$$<2^{2A_l+2}(n_{j_l}-n_{i_l})^3\exp(-A_l/2l^2)< \tag{15}$$

$$<2^{2A_l+2}\exp(3A_l/2^{l-1})\exp(-A_l/2l^2)<2^{2A_l+2}\exp(-A_l/4l^2)<2^{2A_l-l}.$$

In the last two inequalities of (15) we used the facts that for $l>l_0$ $3/2^{l-1}<1/4l^2$, and that for $l>l_0$ by (4)

$$A_l>2^{l-1}>4l^2(l+2).$$

Now let z_0 be any point on the circumference of the unit circle. Clearly

$$\min_{1\leqslant r\leqslant(n_{j_l}-n_{i_l})^2}|z_0-\xi_r|<\pi/(n_{j_l}-n_{i_l})^2. \tag{16}$$

Further

$$\max_{|z|=1}|(Q_t^{(l)}(z))'|\leqslant\sum_{k=i_l}^{j_l}(n_k-n_{i_l})<(n_{j_l}-n_{i_l})^2. \tag{17}$$

From (16) and (17) we see that if

$$\max_{1\leqslant r\leqslant(n_{j_l}-n_{i_l})^2}|Q_t^{(l)}(\xi_r)|\leqslant(2A_l+1)\sqrt{2}/l$$

then

$$\max_{|z|=1}|Q_t^{(l)}(z)|<(2A_l+1)\sqrt{2}/l+\pi. \tag{18}$$

The formulae (15) and (18) imply that the number of choices of the ε-s for which (12) is not satisfied is less than 2^{2A_l-l}, which proves Lemma 3.

Now we can prove Theorem 3. Since $\sum 1/2^l<\infty$ it follows from Lemma 3 and the Borel-Cantelli lemma that for almost all t

$$\max_{|z|=1}|Q_t^l(z)|\leqslant(2A_l+1)\sqrt{2}/l+\pi \tag{19}$$

except possibly for a finite number of l-s (these l-s of course may depend on t). Let t_0 be any real number for which (19) is false for only a finite number of l-s, and let $l_1=l_1(t)$ be such that (19) holds for $l>l_1(t)$. We shall prove that $f_{t_0}(z)$ converges uniformly for $|z|\leqslant 1$.

Let $k_1 > n_{j_{l_1}}$, assume that $n_{i_\lambda} < k_1 < n_{j_\lambda}$. We shall show that for $|z| \leqslant 1$

$$(20) \qquad \left| \sum_{k=k_1}^{\infty} r_k(t_0) a_k z^{n_k} \right| < \frac{8}{\lambda}.$$

(20) clearly implies the uniform convergence of $f_{t_0}(z)$.

We evidently have for $|z| \leqslant 1$

$$(21) \qquad \left| \sum_{k=k_1}^{\infty} r_k(t_0) a_k z^{n_k} \right| \leqslant \sum_{k=k_1}^{n_{j_\lambda}} |r_k(t_0)| a_k + \sum_{l=\lambda+1}^{\infty} |Q_{t_0}^{(l)}(z)|.$$

But (19) holds for $l > l_1$; hence from (21) and the definition of a_k and $f_{t_0}(z)$

$$\left| \sum_{k=k_1}^{\infty} r_k(t_0) a_k z^{n_k} \right| \leqslant \frac{1}{\lambda} + \sum_{l=\lambda+1}^{\infty} \left(\frac{(2A_l+1)\sqrt{2}}{2A_l l^2} + \frac{\pi}{2l A_l} \right).$$

But by (4) $A_l > 2^{l-1}$. Thus

$$\left| \sum_{k=k_1}^{k_2} r_k(t_0) a_k z^{n_k} \right| < \frac{1}{\lambda} + \sqrt{2} \sum_{l>\lambda} \frac{1}{l^2} + \sqrt{2} \sum_{l>\lambda} \frac{1}{2^l} + \pi \sum_{l>\lambda} \frac{1}{2^l} < \frac{8}{\lambda}.$$

Thus Theorem 3 and therefore Theorems 1 and 2 are proved.

This method can also be applied to entire functions. We can prove the following

Theorem 4. *Put*

$$f_t(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(t) z^k / k!$$

Then for $r > r_0(t)$ and almost all t

$$M_r(f_t) < \frac{e^r}{r^{1/4}} (\log r)^{c_1} \quad [M_r(f_t) = \max_{|z| \leqslant r} |f_t(z)|]$$

and for a sequence $r_n \to \infty$ and almost all t

$$M_{r_n}(f_t(z)) > \frac{e^r}{r^{1/4}} (\log r)^{c_2},$$

where $0 < c_2 < c_1$ are suitable constants.

We do not give the details of the proof.

University College, London

ON JANISZEWSKI'S PROPERTY OF TOPOLOGICAL SPACES

By A. Grzegorczyk and C. Kuratowski (Warszawa)

Let us call *Janiszewski's property* of a topological space (denoted by 1) the following property:

(O) *if F_0 and F_1 are connected and closed sets such that the set $1-(F_0+F_1)$ is connected, then their common part $F_0 \cdot F_1$ is connected* [1]).

It is well known that, if a locally connected continuum [2]) (containing more than one point) has Janiszewski's property and contains no separating point, then it is homeomorphic to the surface $\mathcal{S}_2$ of a three-dimensional sphere [3]).

If we do not require the continuum not to contain separating points, it may be characterized as such a continuum that each of its cyclic elements is homeomorphic to $\mathcal{S}_2$ (or to a single point) [4]). Such continua are called *Janiszewski's spaces.* A number of theorems has been established for those spaces [5]).

Now, it seems to be interesting that some of those theorems can be established (in quite a different way) without assuming

---

[1]) In the case where 1 denotes the surface $\mathcal{S}_2$ of a three-dimensional sphere, (O) is the well-known second theorem of Janiszewski. See S. Janiszewski, *Sur les coupures du plan*, Prace Mat. Fiz. **26** (1913), p. 55.

[2]) A space is called *locally connected*, if every open set is a sum of open connected sets.

[3]) Theorem of Kuratowski. See C. Kuratowski, *Une caractérisation topologique de la surface de la sphère*, Fund. Math. **13** (1929), p. 307, or C. Kuratowski, *Topologie II*, Monogr. Matemat. XXI, Warszawa-Wrocław 1950, p. 374.

[4]) See *Topologie II*, p. 379.

[5]) Ibid, § 54, I.

either compactness or separability of the space. The purpose of this paper is to supply such proofs.

In fact, the proofs will hold for every *normal locally connected space having Janiszewski's property.*

Throughout sections 1 and 2 of this paper we shall denote by 1 a space of the above kind.

Remarks. 1⁰. There exist (in the three-dimensional Euclidean space) connected and locally connected, but not compact, sets having Janiszewski's property. Such is the space of all real numbers.

A more instructive example is the following (due to B. Knaster)[6]: set on the upper side of a cube an infinite sequence of cones of equal height; suppose the bases of the cones converge to a single point. The surface of the figure thus obtained is a (non-compact) locally connected set having Janiszewski's property.

2⁰. A space is called *unicoherent*, if it is connected, and whenever F_0 and F_1 are connected and closed sets such that $1=F_0+F_1$, then the set $F_0 \cdot F_1$ is connected.

Obviously, *Janiszewski's property* (of a connected space) *implies unicoherence.*

Moreover: *suppose F, and $1-F$ are connected subsets of a space* 1 *having Janiszewski's property; then, if F is closed, F is unicoherent.*

Proof. Put $F=F_0+F_1$ where F_0 and F_1 are connected and closed sets. Since $1-(F_0+F_1)$ is connected, $F_0 \cdot F_1$ is connected because of (O).

1. We are going to show that the hypothesis of the proposition (O) may be replaced by a more general one:

Theorem 1. *Let F_0 and F_1 be two closed sets such that*

(1) $$1-(F_0+F_1) \quad \textit{is connected.}$$

---

[6]) See C. Kuratowski, *Un système d'axiomes pour la topologie de la surface de la sphère*, Atti del Congr. Int. dei Matematici, Bologna 1928, p. 241.

Let S_j be a component[7]) *of F_j (for $j=0,1$). Then $S_0 \cdot S_1$ is connected.*

Proof. Let $\{R_\varkappa\}$ denote the set of components of $1-(S_0+S_1)$:

$$1-(S_0+S_1)=\sum_\varkappa R_\varkappa, \tag{2}$$

where the sets $R_\varkappa$ are connected, open and disjoint.

Consider first the case where there is at most one index $\varkappa$ (call it 0) satisfying the double inequality:

$$\mathrm{Fr}(R_\varkappa)-S_0 \neq 0 \neq \mathrm{Fr}(R_\varkappa)-S_1\ ^{8)}. \tag{3}$$

Denote by K_0 the set of all $\varkappa$'s such that $\mathrm{Fr}(R_\varkappa)\subset S_0$, and by K_1 the set of all remaining indices except, perhaps 0 (if 0 satifies condition (3)). It follows that, if $\varkappa \in K_1$, then $\mathrm{Fr}(R_\varkappa)-S_0\neq 0$ and therefore $\mathrm{Fr}(R_\varkappa)-S_1=0$, for otherwise $\varkappa\neq 0$ would satisfy condition (3). Thus we have

$$\mathrm{Fr}(R_\varkappa)\subset S_j \quad \text{if} \quad \varkappa \in K_j \qquad (j=0,1). \tag{4}$$

Put

$$S_j^* = S_j + \sum_{\varkappa \in K_j} R_\varkappa .$$

Since $\mathrm{Fr}(R_\varkappa)\neq 0$ [9]), it follows from (4) that S_j^* is connected. It follows from (4) too that S_j^* is closed, for[10])

$$\mathrm{Fr}\Big(\sum_{\varkappa\in K_j} R_\varkappa\Big) \subset \overline{\sum_{\varkappa\in K_j} \mathrm{Fr}(R_\varkappa)} \subset S_j .$$

Thus, the sets S_0^* and S_1^* are connected, closed, and the set $1-(S_0^*+S_1^*)$ is connected (it coincides indeed with R_0

---

[7]) S is said to be a *component* of A if S is a connected subset of A and of no other connected subset of A.

It is to be noted that *a component of a closed set is closed and — in a locally connected space — a component of an open set is open.*

[8]) The boundary of X is $\mathrm{Fr}(X)=\overline{X}\cdot\overline{1-X}$.

[9]) This is due to the connectedness of the space.

[10]) According to the following formula

$$\mathrm{Fr}\Big(\sum_\varkappa A_\varkappa\Big) \subset \overline{\sum_\varkappa \mathrm{Fr}(A_\varkappa)}$$

valid for any collection of subsets $A_\varkappa$ of a locally connected space. See e. g. *Topologie II*, p. 168 (see also Appendix, theorem (i)).

or with 0). Since the space has Janiszewski's property, it follows that $S_0^* \cdot S_1^*$ is connected. But obviously $S_0^* \cdot S_1^* = S_0 \cdot S_1$.

This completes the proof in the case of at most one index $\varkappa$ satisfying condition (3).

It remains to show that, if we assume that there exist two values of $\varkappa$, say $\varkappa=0$ and $\varkappa=1$, satisfying the formula (3), we are led to a contradiction.

Since $\mathrm{Fr}(R_\varkappa) \subset S_0+S_1$ [11]), it follows by (3):

(5) $$S_0 \cdot \mathrm{Fr}(R_j) \neq 0 \neq S_1 \cdot \mathrm{Fr}(R_j) \quad \text{for} \quad j=0,1,$$

and as $\mathrm{Fr}(R_\varkappa)$ is connected [12]),

(6) the sets $S_0+\mathrm{Fr}(R_j)$ and $S_1+\mathrm{Fr}(R_j)$ are connected.

Since $1-(F_0+F_1) \subset 1-(S_0+S_1)$, we have, by (2),

$$1-(F_0+F_1) \subset \sum_\varkappa R_\varkappa.$$

As $1-(F_0+F_1)$ is connected (by (1)) and the sets $R_\varkappa$ are open and disjoint, it follows, for all indices $\varkappa$ except possibly one:

$$[1-(F_0+F_1)] \cdot R_\varkappa = 0, \quad \text{i. e.} \quad R_\varkappa \subset F_0+F_1.$$

We may therefore assume that

(7) $$R_0 \subset F_0+F_1.$$

We shall show that

(8) $$\mathrm{Fr}(R_0)-F_j \neq 0 \quad \text{for} \quad j=0,1.$$

Indeed, supposing that $\mathrm{Fr}(R_0) \subset F_0$, we have by (6) $S_0+\mathrm{Fr}(R_0) \subset S_0$ (for, S_0 is a component of F_0), i. e. $\mathrm{Fr}(R_0) \subset S_0$, contrary to (3).

As $1-F_1$ is open, it follows from (8) that

(9) $$R_0-F_1 \neq 0.$$

---

[11]) Owing to the following theorem: *if R is a component of a subset A of a locally connected space, then* $\mathrm{Fr}(R) \subset \mathrm{Fr}(A)$. See *Topologie II*, p. 169 (see also Appendix, theorem (ii)).

[12]) Owing to the following theorem: *let* 1 *be a unicoherent space; if R is a component of a set G such that* $1-G$ *is connected, then* $\mathrm{Fr}(R)$ *is connected.*

Let $\{Q_\lambda\}$ be the set of components of $R_0 - F_1$. We shall show that there exists a λ, say $\lambda = 0$, such that

$$(10) \qquad \mathrm{Fr}(Q_0) - F_1 \neq 0.$$

Indeed, otherwise we should have [13])

$$\mathrm{Fr}(R_0 - F_1) = \mathrm{Fr}(\sum_\lambda Q_\lambda) \subset \overline{\sum_\lambda \mathrm{Fr}(Q_\lambda)} \subset F_1$$

and therefore [14])

$$\mathrm{Fr}(R_0) \subset \mathrm{Fr}(R_0 \cdot F_1) + \mathrm{Fr}(R_0 - F_1) \subset \overline{R_0 \cdot F_1} + F_1 \subset F_1,$$

contrary to (8).

As Q_0 is a component of $R_0 - F_1$, we have [15])

$$(11) \qquad \mathrm{Fr}(Q_0) \subset \mathrm{Fr}(R_0 - F_1).$$

Now, as R_0 is a component of $1 - (S_0 + S_1)$, we get [16]) $\mathrm{Fr}(R_0) \subset S_0 + S_1$. Thus we have [17])

$$\mathrm{Fr}(R_0 - F_1) \subset \mathrm{Fr}(R_0) + F_1 \subset S_0 + S_1 + F_1 = S_0 + F_1;$$

hence $\mathrm{Fr}(R_0 - F_1) - F_1 \subset S_0$ and by (10) and (11)

$$\mathrm{Fr}(Q_0) \cdot S_0 \neq 0.$$

It follows that $Q_0 + S_0$ is connected.

On the other hand

$$(12) \qquad Q_0 \subset R_0 - F_1 \subset (F_0 + F_1) - F_1$$

by (7), i. e. $Q_0 \subset F_0$; hence $Q_0 + S_0 \subset F_0$. It follows that $Q_0 + S_0 \subset S_0$ (for S_0 is a component of F_0), i. e. $Q_0 \subset S_0$. But this is impossible since

$$Q_0 \subset R_0 \subset 1 - S_0$$

by (12) and (2).

2. In this section we shall show that, if the space 1 has Janiszewski's property, then the sets F_0 and F_1 in (O) and in theorem 1 may be supposed *open* (instead of being supposed closed).

---

[13]) See footnote 10.

[14]) For $\mathrm{Fr}(X+Y) \subset \mathrm{Fr}(X) + \mathrm{Fr}(Y)$. See *Topologie I*, second edition (1948), p. 29, II (8).

[15]) See footnote 11.

[16]) Ibid.

[17]) For $\mathrm{Fr}(XY) \subset \mathrm{Fr}(X) + \mathrm{Fr}(Y)$. See *Topologie I*, p. 29, II (9).

Theorem 2. *If G_0 and G_1 are connected and open sets such that*

$$(1) \qquad 1-(G_0+G_1) \quad \textit{is connected,}$$

then the set $G_0 \cdot G_1$ is connected.

Proof. Suppose that $G_0 \cdot G_1$ is not connected. Let Q_0 and Q_1 be two open sets such that

$$(2)\ G_0 \cdot G_1 = Q_0 + Q_1, \qquad (3)\ Q_0 \cdot Q_1 = 0, \qquad (4)\ Q_j \neq 0 \quad \text{for } j=0,1.$$

Owing to the local connectedness of the space, there exists a connected and open set W_j (for $j=0,1$) such that

$$(5)\quad W_j \neq 0, \qquad\qquad (6)\quad \overline{W}_j \subset Q_j$$ [18].

For the same reason, there exists a collection $\{W_\varkappa\}$ of connected and open sets (the index $\varkappa$ running over a set containing the numbers 0 and 1) such that

$$(7)\quad G_0 = \sum_\varkappa W_\varkappa, \qquad\qquad (8)\quad \overline{W}_\varkappa \subset G_0.$$

It is easy to see that there exists a finite system of indices $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$, where $\varkappa_0 = 0$ and $\varkappa_n = 1$, such that

$$W_{\varkappa_0} \cdot W_{\varkappa_1} \neq 0,\ W_{\varkappa_1} \cdot W_{\varkappa_2} \neq 0, \ldots, W_{\varkappa_{n-1}} \cdot W_{\varkappa_n} \neq 0$$ [19].

Put $K_0 = \overline{W}_{\varkappa_0} + \ldots + \overline{W}_{\varkappa_n}$. Hence K_0 is closed, connected and we have by (8):

$$(9) \qquad W_j \subset K_0 \subset G_0.$$

Similarly, let K_1 be a closed, connected set such that

$$(10) \qquad W_j \subset K_1 \subset G_1.$$

By (9) and (10) we have

$$(11)\quad K_0 + K_1 \subset G_0 + G_1, \quad \text{i. e.} \quad 1-(G_0+G_1) \subset 1-(K_0+K_1).$$

---

[18]) Let F be any closed non-void subset of Q_j and let (owing to the normality of the space) G denote an open set such that $F \subset G$ and $\overline{G} \subset Q_j$. We denote by W_j any component of Q_j.

[19]) See *Topologie II*, p. 86.

The set $1-(G_0+G_1)$ being connected by (1), let R denote its component in $1-(K_0+K_1)$. Put

(12) $$C=1-R.$$

Formulae (9) and (10) involve

(13) $$W_j\subset K_0\cdot K_1,$$

and (5), (6), and (13), involve

(14) $$K_0\cdot K_1\cdot Q_j\neq 0.$$

It follows that $K_0\cdot K_1\neq 0$. Hence K_0+K_1 is connected. Therefore C is connected[20]) and closed (for, 1 being locally connected, R is open).

By definition of R,

$$1-(G_0+G_1)\subset R\subset 1-(K_0+K_1),$$

i. e. (using (12)):

(15) $$K_0+K_1\subset C\subset G_0+G_1;$$

hence

(16) $$C=CG_0+CG_1.$$

The space being normal, so is C. It follows from (16) that there exist two closed sets H_0 and H_1 such that

(17) $C=H_0+H_1$, (18) $H_j\subset G_j$ (for $j=0,1$).

Put

(19) $$F_j=H_j+K_j.$$

Thus F_j is a closed set satisfying (by virtue of (18), (9) and (10)) the formula

(20) $$F_j\subset G_j.$$

K_j being a connected subset of F_j (see (19)), denote by S_j its component in F_j; thus

(21) $$K_j\subset S_j\subset F_j.$$

---

[20]) According to the following theorem: *if A is connected and R is a component of $1-A$, then $1-R$ is connected.* See *Topologie II*, p. 88, theorem 5.

We shall see that the hypotheses of theorem 1 are fulfilled. Indeed, we have by (19), (17) and (15):

$$F_0+F_1=H_0+H_1+K_0+K_1=C+K_0+K_1=C;$$

hence $1-(F_0+F_1)=1-C=R$ (by (12)), which means that the set $1-(F_0+F_1)$ is connected.

Thus, by theorem 1, $S_0\cdot S_1$ is connected.

On the other hand, by (21) and (20), $S_j\subset G_j$. Therefore

$$S_0\cdot S_1\subset G_0\cdot G_1=Q_0+Q_1$$

by (2), i. e.

$$S_0\cdot S_1=S_0\cdot S_1\cdot Q_0+S_0\cdot S_1\cdot Q_1.$$

Thus, we get a decomposition of the set $S_0\cdot S_1$ into two separated sets neither of which is void, for (by (14) and (21))

$$0\neq K_0\cdot K_1\cdot Q_j\subset S_0\cdot S_1\cdot Q_j.$$

But this contradicts the connectedness of $S_0\cdot S_1$.

Corollary. *If G is a connected open set such that $1-G$ is connected, then G is unicoherent.*

Proof. As G is locally connected, we have to show[21]) that whenever G_0 and G_1 are connected and open sets such that $G=G_0+G_1$, the set $G_0\cdot G_1$ is connected. But this follows at once from theorem 2.

Theorem 3. *Let G_0 and G_1 be two open sets such that*

(1) $$1-(G_0+G_1) \quad \textit{is connected.}$$

Let S_j be a component of G_j. Then $S_0\cdot S_1$ is connected.

Proof. Obviously we may assume that $S_0\cdot S_1\neq 0$. Thus, S_0+S_1 is connected. Denote by G the component of S_0+S_1 in G_0+G_1.

It follows that S_j is a component of $G\cdot G_j$. For, T being a connected set such that $S_j\subset T\subset G\cdot G_j$, we have $S_j\subset T\subset G_j$, hence $T=S_j$.

---

[21]) According to a theorem of Stone. See A. H. Stone, *Incidence relations in unicoherent spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **65** (1949), p. 427-447, theorem 3. See Appendix, theorem (iii).

According to the theorem quoted in footnote 20 and to (1), $1-G$ is connected. Hence, owing to the corollary, G is unicoherent.

Now we have $G=G\cdot G_0+G\cdot G_1$, and S_j is a component of $G\cdot G_j$. It follows[22]) that $S_0\cdot S_1$ is connected.

Remark. Theorem 3 is equivalent to the following statement called first theorem of Janiszewski[23]): *let F_0 and F_1 be two closed sets such that $F_0\cdot F_1$ is connected; if neither of these sets separates the points a and b, then the set F_0+F_1 does not separate these points*[24]).

Proof. Let us assume that the hypotheses of the first theorem of Janiszewski are fulfilled. Put $G_j=1-F_j$ and denote by S_j the component of G_j which contains a and b. The set $1-(G_0+G_1)=F_0\cdot F_1$ being connected, it follows by theorem 3 that the set $S_0\cdot S_1$ (containing a and b) is connected. As $S_0\cdot S_1\subset G_0\cdot G_1=1-(F_0+F_1)$, it follows that F_0+F_1 does not separate a and b.

Thus theorem 3 implies the first theorem of Janiszewski.

In order to prove the converse implication, assume the hypotheses of theorem 3 to be fulfilled. Denote by a and b two arbitrary points of $S_0\cdot S_1$. Putting $F_j=1-G_j$, we see at once that the hypotheses of the first theorem of Janiszewski are fulfilled. It follows that the set $1-G_0\cdot G_1=F_0+F_1$ does not separate a and b. Thus there exists a connected set C such that $a,b\in C\subset G_0\cdot G_1$; hence $a,b\in C\subset S_0\cdot S_1$.

This means that the set $S_0\cdot S_1$ is connected.

Problem. The following problem remains unsolved:

Let 1 be a connected and locally connected space satisfying theorem 3. Does the space possess Janiszewski's property?

---

22) See Appendix, theorem (v).

23) See S. Janiszewski, l. c. (footnote 1).

24) F is said to *separate the sets A and B* if $1-F=M+N$, where $A\subset M$, $B\subset N$, and M and N are separated, i. e. $\overline{M}\cdot N=0=M\cdot\overline{N}$.

If A and B reduce to single points a and b and F is closed, this means that a and b belong to different components of $1-F$ (1 being assumed locally connected).

3. Appendix. All arguments troughout this paper (except Remark in section 2) hold for any general closure algebra [25]) satisfying the conditions of normality, connectedness, local connectedness, and the following condition:

(+) *Every open set is a sum of closed connected subsets.*

Some of the theorems on which our arguments were based require proofs in terms of closure algebra. Such proofs will be now supplied.

(i) *In any locally connected space the following formula holds*:

$$\mathrm{Fr}\big(\sum_{\varkappa} A_{\varkappa}\big) \subset \overline{\sum_{\varkappa} \mathrm{Fr}(A_{\varkappa})}. \tag{1}$$

Proof. Put

$$G = 1 - \overline{\sum_{\varkappa} \mathrm{Fr}(A_{\varkappa})}. \tag{2}$$

It follows that

$$G \cdot \mathrm{Fr}(A_{\varkappa}) = 0 \quad \text{for each } \varkappa. \tag{3}$$

Let us suppose that (1) is false, i. e. that putting $S = \sum_{\varkappa} A_{\varkappa}$, we have

$$G \cdot \mathrm{Fr}(S) \neq 0. \tag{4}$$

The space being locally connected, we have

$$G = \sum_{\lambda} G_{\lambda}, \tag{5}$$

where the sets G_{λ} are connected and open.

According to (4) and (5) there exists an index λ such that $G_{\lambda} \cdot \mathrm{Fr}(S) \neq 0$. The set G_{λ} being open, this means that $G_{\lambda} \cdot S \neq 0 \neq G_{\lambda} - S$. Hence there exists an index $\varkappa$ such that

$$G_{\lambda} \cdot A_{\varkappa} \neq 0 \neq G_{\lambda} - A_{\varkappa}.$$

But, G_{λ} being connected, this contradicts (3).

(ii) *If R is a component of a subset A of a locally connected space, then*

$$\mathrm{Fr}(R) \subset \mathrm{Fr}(A). \tag{6}$$

---

[25]) For the notion of general closure algebra see R. Sikorski, *Closure algebras*, Fund. Math. **36** (1949), p. 165-206.

The axioms assumed are the following:

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}, \quad A \subset \overline{A}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \quad \overline{0} = 0.$$

Proof. Let us suppose that (6) is false. As

$$\operatorname{Fr}(R)=\overline{R}\cdot\overline{1-R}\subset\overline{A},$$

it follows that

(7) $$0\neq\operatorname{Fr}(R)-\operatorname{Fr}(A)\subset\operatorname{Fr}(R)-\overline{1-A}.$$

Put

(8) $$1-\overline{1-A}=\sum_{\lambda}G_{\lambda},$$

where the sets G_{λ} are connected and open.

By (7) and (8) there exists a λ such that $G_{\lambda}\cdot\operatorname{Fr}(R)\neq 0$; hence ($G_{\lambda}$ being open):

(9) $G_{\lambda}\cdot R\neq 0$, (10) $G_{\lambda}-R\neq 0$.

G_{λ} and R being connected, it follows from (9) that $G_{\lambda}+R$ is connected. Since $G_{\lambda}\subset A$ (by (8)), we have $G_{\lambda}+R\subset A$, and since R is a component of A, we get

$$G_{\lambda}+R\subset R,\quad \text{i. e.}\quad G_{\lambda}\subset R.$$

But this contradicts (10).

(iii) *Let* 1 *be a connected and locally connected space satisfying the following condition: whenever* G_0 *and* G_1 *are open connected sets such that* $1=G_0+G_1$, *then* $G_0\cdot G_1$ *is connected. Then* 1 *is unicoherent.*

Proof. Suppose it is not. Then there exist two closed connected sets F_0 and F_1 such that

(11) $$1=F_0+F_1$$

and that $F_0\cdot F_1$ is disconnected. There exist therefore two closed sets M_0 and M_1 satisfying the following conditions:

(12) $F_0\cdot F_1=M_0+M_1$, (13) $M_j\neq 0$, (14) $M_0\cdot M_1=0$.

Owing to the normality of the space, there exist by (14) two open sets H_0 and H_1 such that:

(15) $M_j\subset H_j$, (16) $H_0\cdot H_1=0$.

Put

(17) $$Q_j=F_j+H_0+H_1.$$

According to (12) and (15) we have

(18) $$F_0 \cdot F_1 \subset H_0 + H_1$$

and according to (11):

(19) $$F_0 - F_1 = (F_0 + F_1) - F_1 = 1 - F_1;$$

hence

$$F_0 + H_0 + H_1 = F_0 \cdot F_1 + (F_0 - F_1) + H_0 + H_1 = (1 - F_1) + H_0 + H_1.$$

Thus the sets Q_j $(j=0,1)$ are open and so are the components G_j of F_j in Q_j. Furthermore we have by (11):

$$1 = G_0 + G_1.$$

Hence, by hypothesis, $G_0 \cdot G_1$ is connected.

But (17) and (18) give

$$Q_0 \cdot Q_1 = F_0 \cdot F_1 + H_0 + H_1 = H_0 + H_1,$$

and, since $G_0 \cdot G_1 \subset Q_0 \cdot Q_1$, we get

(20) $$G_0 \cdot G_1 = G_0 \cdot G_1 \cdot H_0 + G_0 \cdot G_1 \cdot H_1.$$

Finally by (13), (12) and (15) we obtain

(21) $$0 \neq M_j = F_0 \cdot F_1 \cdot M_j \subset G_0 \cdot G_1 \cdot H_j.$$

The formulae (20), (21) and (16) contradict the connectedness of $G_0 \cdot G_1$.

The following statement will be used in proving (v).

(iv) *Let* 1 *be a locally connected unicoherent space. If* S_0 *and* S_1 *are two different components of an open set* G, *then there exists a component* K *of* $1-G$ *which separates* [26]) S_0 *and* S_1.

Proof. Since $S_0 \cdot \overline{S}_1 = 0$, we have $S_0 \subset 1 - \overline{S}_1$. Denote by T the component of $1 - \overline{S}_1$ which contains S_0. The set $\overline{S}_1$ being connected, $\mathrm{Fr}(T)$ is connected [27]).

Now we have $\mathrm{Fr}(T) \subset 1 - G$. For, by (ii),

$$\mathrm{Fr}(T) \subset \mathrm{Fr}(1 - \overline{S}_1) = \mathrm{Fr}(\overline{S}_1) \subset \mathrm{Fr}(S_1) \subset \mathrm{Fr}(G) \subset 1 - G.$$

---

[26]) See footnote 24.

[27]) See footnote 12.

Denote by K the component of $1-G$ which contains $\mathrm{Fr}(T)$, and put

$$M=T-K \quad \text{and} \quad N=1-\overline{T}-K.$$

We have

(22) $$1-K=M+N,$$

for

(23) $$\mathrm{Fr}(T)\subset K, \quad \text{i. e.} \quad 1-K=1-\mathrm{Fr}(T)-K,$$

and $1-\mathrm{Fr}(T)=1-(\overline{T}-T)=T+(1-\overline{T})$.

Since T and $1-\overline{T}$ are separated, so are M and N.

Finally

(24) $$S_0\subset M \quad \text{and} \quad S_1\subset N.$$

Indeed $S_0\subset T\cdot G\subset T-K$, and as $S_1\cdot T=0$ and S_1 is open, we get $S_1\cdot\overline{T}=0$; hence $S_1\subset G-\overline{T}\subset N$.

According to (22)—(24), K separates S_0 and S_1.

(v) *Let* 1 *be a locally connected unicoherent space. If G_0 and G_1 are open and such that*

(25) $$1=G_0+G_1,$$

and S_j is a component of G_j, then $S_0\cdot S_1$ is connected.

Proof. Suppose it is not. Let Q_0 and Q_1 be two different components of $S_0\cdot S_1$. It follows [28]) that Q_0 and Q_1 are components of $G_0\cdot G_1$. Let K be a component of $1-G_0\cdot G_1$ which separates Q_0 and Q_1 (according to (iv)).

As $K\subset 1-G_0\cdot G_1=(1-G_0)+(1-G_1)$, it follows that

(26) $$K=(K-G_0)+(K-G_1),$$

and, by (25), $(K-G_0)\cdot(K-G_1)=0$. This implies that the sets $K-G_0$ and $K-G_1$ are separated. Since K is connected, one

---

[28]) According to the following theorem (valid for any space): *if S_j is a component of A_j $(j=0,1)$ and Q is a component of $S_0\cdot S_1$, then Q is a component of $A_0\cdot A_1$.*

For, let T be a connected set such that $Q\subset T\subset A_0\cdot A_1$. We have to show that $Q=T$.

As $T\cdot S_j\neq 0$, $T+S_j$ is a connected subset of A_j. Since S_j is a component of A_j, we get $T+S_j\subset S_j$, i. e. $T\subset S_j$. Thus $Q\subset T\subset S_0\cdot S_1$. As Q is a component of $S_0\cdot S_1$, it follows that $Q=T$.

of these sets is void. We may assume that $K-G_0=0$. Hence by (26) $K\subset 1-G_1$, i. e. $K\cdot G_1=0$. As $S_1\subset G_1$, it follows that

(27) $$K\cdot S_1=0.$$

On the other hand

(28) $$Q_0+Q_1\subset S_1.$$

The formulae (27) and (28) contradict the assumption that K separates Q_0 and Q_1.

Państwowy Instytut Matematyczny

SUR LES SOMMES DE FONCTIONS ORTHOGONALES

Par G. ALEXITS (Budapest)

1. Soit $\{\varphi_n(x)\}$ un système de fonctions orthogonales et normées dans l'intervalle arbitraire (a,b). Nous désignerons dans les suivants par ε un nombre positif fixe, arbitrairement petit, par p un entier positif fixe, arbitrairement choisi, par $\log_p n$ le logarithme p-fois itéré de n, et par $L_n(p,\varepsilon)$ le nombre

$$L_n(p,\varepsilon)=\log n\cdot\log_2 n\cdot\ldots\cdot\log_p n\,(\log_{p+1} n)^{1+\varepsilon}.$$

Il est connu[1]) que, les coefficients c_n étant des nombres réels arbitraires, l'évaluation

$$\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)=o\left(\log n\left(\sum_{k=0}^{n} c_k^2\right)^{1+\varepsilon}\right) \tag{1}$$

a lieu presque partout; si $c_k=1$ pour $k=0,1,\ldots$, l'ordre de grandeur de cette évaluation peut être abaissé jusqu'à

$$\sum_{k=0}^{n}\varphi_k(x)=o\left(\log n\cdot\sqrt{nL_n(p,\varepsilon)}\right) \tag{2}$$

presque partout. En prenant les moyennes arithmétiques des sommes (2), l'ordre de grandeur obtenu peut être précisé, parce qu'il est, dans ce cas, $o\left(\sqrt{nL_n(p,\varepsilon)}\right)$ presque partout[2]).

2. Notre but est de généraliser ces résultats en démontrant les deux théorèmes suivants:

Théorème I. *Les moyennes de Césaro* $\sigma_n^{(\alpha)}(x)$ *des sommes* (1) *possèdent, pour* $\alpha\geqslant 1$, *presque partout l'ordre de grandeur*

$$\sigma_n^{(\alpha)}(x)=o\left(\sqrt{L_n(p,\varepsilon)\sum_{k=0}^{n}c_k^2}\right).$$

---

[1]) S. Kaczmarz et H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Warszawa-Lwów 1935, p. 165.

[2]) I. S. Gal, *Sur les moyennes arithmétiques des suites de fonctions orthogonales*, Ann. Inst. Fourier Univ. Grenoble 1 (1948), p. 218-224.

Théorème II. *Les sommes (1) possèdent presque partout l'ordre de grandeur*

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x) = o\left(\log n \cdot \sqrt{L_n(p,\varepsilon) \sum_{k=0}^{n} c_k^2}\right).$$

Les résultats mentionnés auparavant sont évidemment des cas spéciaux de nos théorèmes.

3. Démontrons d'abord le lemme suivant:

Lemme. *L'évaluation*

$$\sigma_{2^m}^{(\alpha)}(x) = o\left(\sqrt{L_{2^m}(p,\varepsilon) \sum_{k=0}^{2^m} c_k^2}\right) \tag{3}$$

tient presque partout pour tout $\alpha \geqq 0$.

Vu que

$$\sigma_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n-k+\alpha}{n-k}}{\binom{n+\alpha}{n}} c_k \varphi_k(x),$$

et, pour $\alpha \geqq 0$

$$\frac{\binom{n-k+\alpha}{n-k}^2}{\binom{n+\alpha}{n}^2} \leqq 1,$$

on obtient d'abord l'inégalité

$$\sum_{m=N}^{\infty} \int_{\alpha}^{b} \frac{[\sigma_{2^m}^{(\alpha)}(x)]^2}{L_{2^m}(p,\varepsilon) \sum_{k=0}^{2^m} c_k^2} dx \leqq \sum_{m=N}^{\infty} \frac{1}{L_{2^m}(p,\varepsilon)} = \sum_{m=N}^{\infty} O\left(\frac{1}{m L_m(p-1,\varepsilon)}\right) < \infty.$$

Il en résulte que la série

$$\sum_{m=N}^{\infty} \frac{[\sigma_{2^m}^{(\alpha)}(x)]^2}{L_{2^m}(p,\varepsilon) \sum_{k=0}^{2^m} c_k^2}$$

converge presque partout, par suite

$$\sigma_{2^m}^{(\alpha)}(x) = o\left(\sqrt{L_{2^m}(p,\varepsilon) \sum_{k=0}^{2^m} c_k^2}\right)$$

a lieu presque partout.

4. Pour démontrer le théorème I, il suffit, d'après notre lemme, d'envisager le cas $2^m < n < 2^{m+1}$ et $\alpha = 1$. On voit facilement que

$$\sigma_j^{(1)}(x) - \sigma_{j-1}^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{j(j+1)} k c_k \varphi_k(x),$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{=N}^{\infty} \int_a^b j \left[\frac{\sigma_j^{(1)}(x) - \sigma_{j-1}^{(1)}(x)}{\sqrt{L_{j-1}(p,\varepsilon) \sum\limits_{k=0}^{j-1} c_k^2}} \right]^2 dx = \sum_{j=N}^{\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{j} \binom{j-k+\alpha-1}{j-k}^2 k^2 c_k^2}{j(j+1)^2 L_{j-1}(p,\varepsilon) \sum\limits_{k=1}^{j-1} c_k^2}$$

$$= \sum_{j=N}^{\infty} O\left(\frac{1}{j L_{j-1}(p,\varepsilon)}\right) < \infty.$$

La série

$$\sum_{j=N}^{\infty} j \left[\frac{\sigma_j^{(1)}(x) - \sigma_{j-1}^{(1)}(x)}{\sqrt{L_{j-1}(p,\varepsilon) \sum\limits_{k=0}^{j-1} c_k^2}} \right]^2$$

est donc presque partout convergente, ce qui entraîne

$$\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} j \left[\frac{\sigma_j^{(1)}(x) - \sigma_{j-1}^{(1)}(x)}{\sqrt{L_{j-1}(p,\varepsilon) \sum\limits_{k=0}^{j-1} c_k^2}} \right]^2 = o(1) \tag{4}$$

presque partout. Or, on obtient de l'inégalité de Schwarz

$$\left| \frac{|\sigma_n^{(1)}(x)|}{\sqrt{L_n(p,\varepsilon) \sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2}} - \frac{|\sigma_{2^m}^{(1)}(x)|}{\sqrt{L_{2^m}(p,\varepsilon) \sum\limits_{k=0}^{2^m} c_k^2}} \right|$$

$$\leqslant \sum_{j=2^m+1}^{2^{m+1}} \left| \frac{|\sigma_j^{(1)}(x)|}{\sqrt{L_j(p,\varepsilon) \sum\limits_{k=0}^{j} c_k^2}} - \frac{|\sigma_{j-1}^{(1)}(x)|}{\sqrt{L_{j-1}(p,\varepsilon) \sum\limits_{k=0}^{j-1} c_k^2}} \right|$$

$$\leqslant \sum_{j=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{|\sigma_j^{(1)}(x) - \sigma_{j-1}^{(1)}(x)|}{\sqrt{L_{j-1}(p,\varepsilon) \sum\limits_{k=0}^{j-1} c_k^2}} \leqslant \left\{ \sum_{j=2^m+1}^{2^{m+1}} j \left[\frac{\sigma_j^{(1)}(x) - \sigma_{j-1}^{(1)}(x)}{\sqrt{L_{j-1}(p,\varepsilon) \sum\limits_{k=0}^{j-1} c_k^2}} \right]^2 \cdot \sum_{j=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{j} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot$$

Et, puisque

$$\sum_{j=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{j} < \log 2,$$

il en résulte, en vertu de (4),

$$\frac{|\sigma_n^{(1)}(x)|}{\sqrt{L_n(p,\varepsilon)\sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2}} - \frac{|\sigma_{2^m}^{(1)}(x)|}{\sqrt{L_{2^m}(p,\varepsilon)\sum\limits_{k=0}^{2^m} c_k^2}} = o(1)$$

presque partout. Ici, le second terme du premier membre tend, d'après (3), presque partout vers zéro; il s'ensuit donc

$$\sigma_n^{(1)}(x) = o\left(\sqrt{L_n(p,\varepsilon)\sum_{k=0}^{n} c_k^2}\right)$$

et le théorème I est démontré.

5. Quant au théorème II, posons

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x).$$

D'après notre lemme, la proposition du théorème est exacte, si $n = 2^m$. En vertu du théorème I, nous n'avons donc qu'à évaluer l'ordre de grandeur des différences

$$s_n(x) - \sigma_n^{(1)}(x) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k c_k \varphi_k(x)}{n+1} \tag{5}$$

lorsque $2^m < n < 2^{m+1}$. Or, il est connu[3]) qu'il existe une fonction $\delta_{2m}(x) \geqslant 0$ telle que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} k c_k \varphi_k(x)\right| \leqslant \delta_{2m}(x),$$

et, de plus

$$\int_a^b [\delta_{2m}(x)]^2 dx = O(m^2) \sum_{k=1}^{2^{m+1}} k^2 c_k^2.$$

---

[3]) S. Kaczmarz et H. Steinhaus, loc. cit. [1]), p. 162.

Cette deuxième relation conduit à l'évaluation

$$\sum_{m=N}^{\infty}\int_a^b \frac{[\delta_{2m}(x)]^2}{(\log 2^m)^2(2^m+1)^2 L_{2m}(p,\varepsilon)\sum\limits_{k=0}^{2m} c_k^2}\,dx=\sum_{m=N}^{\infty} O\left(\frac{1}{L_{2m}(p,\varepsilon)}\right)<\infty,$$

d'où il résulte, presque partout

$$\delta_{2m}(x)=o\left((2^m+1)\log 2^m\cdot\sqrt{L_{2m}(p,\varepsilon)\sum_{k=0}^{2m} c_k^2}\right).$$

Vu que $2^m < n < 2^{m+1}$, on en obtient, d'après (5) et (6),

$$s_n(x)-\sigma_n^{(1)}(x)=o\left(\log n\cdot\sqrt{L_n(p,\varepsilon)\sum_{k=0}^{n} c_k^2}\right)$$

presque partout, c. q. f. d.

Budapest, 31. VIII, 1951.
Université des Sciences Techniques.

A NOTE ON THE TOTAL MATRIX RING OVER A NON-COMMUTATIVE FIELD

By Loo-Keng Hua (Peking)

Let K be a field, not necessarily commutative, and K_n be the $n \times n$ total matrix ring over K.

Definition. Let R be a ring. The module generated by elements of the form

$$[a,b] = ab - ba,$$

where a, b, belong to R is called the *derived Lie module of R.*

We use L and L_n to denote the derived Lie module of K and K_n, respectively. In this paper we shall use frequently the following theorem which was proved previously by the author [1]):

Theorem 1. *A matrix M belongs to L_n if and only if its trace belongs to L.*

Practically, the theorem can be extended to the case of K being a ring with unity element.

Theorem 2. *Any normal submodule of K is either contained in the centre of K or contains L_n, except when $n=2$ and K contains only 2 elements. In that case the set*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

is a normal submodule of K.

---

[1]) Hua, Jour. of Chinese Math. Soc. 1, p. 109-163, in particular p. 144.

Proof. Let N be a normal submodule of K which is not contained in the centre of K_n. Let E_{ij} be the matrix with zero everywhere except the element at i, j position equal to 1.

1. If N contains E_{12}, then it contains also

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} E_{12} \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \lambda E_{12}.$$

Let

$$P_{ij} = I + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj} \qquad (i \neq j)$$

we can easily verify that $P_{ij}^2 = I$. For $i \neq 1$ and 2, we have

$$P_{i1} E_{12} = E_{i2} = E_{i2} P_{i1},$$

and for $i \neq j$ and 2

$$P_{2j} E_{i2} = (I + E_{2j} + E_{j2} - E_{22} - E_{jj}) E_{i2} = E_{i2} = E_{ij} P_{2j};$$

therefore N contains λE_{ij} for all $i \neq j$ and λ belonging to K.

Furthermore, since

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \mu & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \mu & 1\end{pmatrix}^{-1} - \lambda E_{12} + \mu\lambda\mu E_{21} = -\lambda\mu E_{11} + \mu\lambda E_{22},$$

we deduce that

$$(\lambda\mu - \mu\lambda) E_{11} = \lambda\mu E_{11} - \mu\lambda E_{22} - \{(\mu\lambda) E_{11} - (\mu\lambda) E_{22}\}$$

belongs to N. Consequently, L_n is contained in N.

2. Suppose that K contains more than two elements, that is, in K we have an element $\lambda \neq 0, \neq 1$.

Let A be any non-central element of N. Without loss of generality we may assume that $a_{12} \neq 0$. We write

$$A = \begin{pmatrix}a & \beta\\ \gamma & D^{(n-1)}\end{pmatrix}$$

and we use $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ to denote a diagonal matrix with $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ on its diagonal. Then

$$[\lambda, 1, \ldots, 1] A [\lambda, 1, \ldots, 1]^{-1} - A = \begin{pmatrix}\lambda a \lambda^{-1} & \lambda\beta\\ \gamma\lambda^{-1} & D\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a & \beta\\ \gamma & D\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\lambda a \lambda^{-1} - a & (\lambda - 1)\beta\\ \gamma(\lambda^{-1} - 1) & 0^{(n-1)}\end{pmatrix}.$$

A NOTE ON THE TOTAL MATRIX RING OVER A NON-COMMUTATIVE FIELD

By Loo-Keng Hua (Peking)

Let K be a field, not necessarily commutative, and K_n be the $n \times n$ total matrix ring over K.

Definition. Let R be a ring. The module generated by elements of the form

$$[a, b] = ab - ba,$$

where a, b, belong to R is called the *derived Lie module of* R.

We use L and L_n to denote the derived Lie module of K and K_n, respectively. In this paper we shall use frequently the following theorem which was proved previously by the author[1]):

Theorem 1. *A matrix M belongs to L_n if and only if its trace belongs to L.*

Practically, the theorem can be extended to the case of K being a ring with unity element.

Theorem 2. *Any normal submodule of K is either contained in the centre of K or contains L_n, except when $n = 2$ and K contains only 2 elements. In that case the set*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

is a normal submodule of K.

---

[1]) Hua, Jour. of Chinese Math. Soc. 1, p. 109-163, in particular p. 144.

Proof. Let N be a normal submodule of K which is not contained in the centre of K_n. Let E_{ij} be the matrix with zero everywhere except the element at i,j position equal to 1.

1. If N contains E_{12}, then it contains also

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} E_{12} \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \lambda E_{12}.$$

Let

$$P_{ij} = I + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj} \qquad (i \neq j)$$

we can easily verify that $P_{ij}^2 = I$. For $i \neq 1$ and 2, we have

$$P_{i1} E_{12} = E_{i2} = E_{i2} P_{i1},$$

and for $i \neq j$ and 2

$$P_{2j} E_{i2} = (I + E_{2j} + E_{j2} - E_{22} - E_{jj}) E_{i2} = E_{i2} = E_{ij} P_{2j};$$

therefore N contains λE_{ij} for all $i \neq j$ and λ belonging to K.

Furthermore, since

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \mu & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & \lambda\\ 0 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0\\ \mu & 1\end{pmatrix}^{-1} - \lambda E_{12} + \mu\lambda\mu E_{21} = -\lambda\mu E_{11} + \mu\lambda E_{22},$$

we deduce that

$$(\lambda\mu - \mu\lambda) E_{11} = \lambda\mu E_{11} - \mu\lambda E_{22} - \{(\mu\lambda) E_{11} - (\mu\lambda) E_{22}\}$$

belongs to N. Consequently, L_n is contained in N.

2. Suppose that K contains more than two elements, that is, in K we have an element $\lambda \neq 0, \neq 1$.

Let A be any non-central element of N. Without loss of generality we may assume that $a_{12} \neq 0$. We write

$$A = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & D^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

and we use $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ to denote a diagonal matrix with $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ on its diagonal. Then

$$[\lambda, 1, \ldots, 1] A [\lambda, 1, \ldots, 1]^{-1} - A = \begin{pmatrix} \lambda a \lambda^{-1} & \lambda\beta \\ \gamma\lambda^{-1} & D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & D \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a \lambda^{-1} - a & (\lambda - 1)\beta \\ \gamma(\lambda^{-1} - 1) & 0^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

We denote the last matrix by B. Furthermore

$$[1,\lambda,\dots,\lambda]B[1,\lambda,\dots,\lambda]^{-1}-B=\begin{pmatrix} 0 & (\lambda-1)\ \beta(\lambda^{-1}-1) \\ (\lambda-1)\ \gamma(\lambda^{-1}-1) & 0^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Therefore N contains an element of the form

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

with $\beta \neq 0$.

We have a matrix P such that $\beta P=(1,0,\dots,0)=u_1$. Then

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & u_1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Furthermore since

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I^{(n-2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0^{(n-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1}-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0^{(n-2)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

which is similar to E_{12}, the theorem follows from 1.

3. Suppose that K contains only two elements, 0 and 1, and $n>2$. We may assume that $a_{12}\neq 0$, that is, $a_{12}=1$.

Then

$$(I+E_{21})A(I+E_{21})^{-1}-A=E_{21}A+AE_{21}+E_{21}AE_{21}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & \beta \\ \gamma & 0 & 0^{(n-2)} \end{pmatrix}.$$

Furthermore

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & \beta \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

and

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

which is similar to E_{12}. The theorem again follows from 1.

4. Suppose that K has only two elements and $n=2$. Let $SL_2(2)$ be the group of nonsingular two-rowed matrices; it is a group of order 6

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix};$$

it contains a normal subgroup

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

Therefore the four elements in the theorem form a normal submodule. It is not contained in the centre and it does not contain L_2, which is

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

The theorem is now completely proved.

Theorem 3. *The ring K_n contains no proper normal subring which is not contained in the centre, except when $n=2$ and K has only two elements.*

Proof. Let R be the subring under consideration. By Theorem 2, it contains L_n. In particular, it contains

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0^{(n-2)}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&0\\0&0&0^{(n-2)}\end{pmatrix}.$$

Therefore, it contains

$$BA=aE_{11}.$$

Since every matrix can be expressed as

$$aE_{11}+M$$

where $M\in L_n$, we have

Theorem 4. *Every element A of K_n can be expressed as a finite sum of commutators, that is*

$$A=\sum_{i=1}^{n}\pm B_iC_iB_i^{-1}C_i^{-1} \tag{1}$$

except when $n=2$ and K has only two elements.

Proof. Evidently, the elements of the form (1) form a normal module of K_n; by Theorem 2, it contains L_n.

Let

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I^{(n-2)} \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I^{(n-2)} \end{pmatrix}.$$

Then, for $b \neq 0$, we have

$$\operatorname{tr}(BCB^{-1}C^{-1})=(n-2)+\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix}\right)=n-b.$$

Furthermore

$$\operatorname{tr} I=n.$$

Therefore $\operatorname{tr}(\Sigma BCBC)$ may be any element of K. The theorem follows from Theorem 2.

Now we consider K_n as a Jordan ring, i. e. it is closed with respect to the operation

$$\{A,B\}=AB+BA.$$

Theorem 5. *For a field K with characteristic different from 2, K_n contains no proper normal Jordan subring which is not contained in the centre. Or, more precisely, every element of K_n can be expressed as a finite sum of $\{A_i, B_i\}$.*

Proof. Let R be such a module generated by $\{A_i, B_i\}$, which is evidently a normal submodule of K. Therefore it contains L_n; in particular

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Thus it contains

$$\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$$

and

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Therefore $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ belongs to R for all λ. Therefore $R=K_n$.

Theorem 6. *Any Lie subring of K_n not contained in the centre contains L_n except when $n=2$ and K has only two elements. More generally, every triple Lie system not contained in the centre contains L_n.*

Theorem 7. *Every normal submodule of K_n closed with respect to the operation ABA either is K or is contained in the centre, except when $n=2$ and K is commutative.*

Proof. 1. $n>2$. The proof follows immediately from

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&-a&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&-0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

2. $n=2$ and K is not commutative. From the identities

$$\begin{pmatrix}ab&0\\c&-ba\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ab&0\\c&-ba\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}abc&-ab^2a\\c^2&-cba\end{pmatrix}$$

and

$$\begin{pmatrix}abc&-ab^2a\\c^2&-cba\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}bac&-ab^2a\\c^2&-cba\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(ab-ba)c&0\\0&0\end{pmatrix},$$

we have the theorem.

Remark. For the case $n=2$ and K being commutative, the theorem is not true. In fact, let

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}.$$

Then

$$A=\lambda A^{-1},\qquad \lambda=a^2+bc.$$

If $\operatorname{tr}A=\operatorname{tr}B=0$, then $\operatorname{tr}(ABA)=0$.

Therefore Theorem 7 is in this case false.

Henceforth we assume that the characteristic of the field K is different from 2.

Definition. A subset S of a ring R is called *weak normal* if M belonging to S implies

$$AMA^{-1}+A^{-1}MA$$

belonging to S for all invertible A.

Evidently every normal submodule is a weak normal. Now we have an improvement of Theorem 2.

Theorem 8. *Every weak normal submodule T of K either is contained in the centre or contains L_n.*

Proof. 1. First let us assume that T contains E_{12}. Since

$$\begin{pmatrix}1&0\\u&1\end{pmatrix}E_{12}\begin{pmatrix}1&0\\u&1\end{pmatrix}^{-1}+\begin{pmatrix}1&0\\u&1\end{pmatrix}^{-1}E_{12}\begin{pmatrix}1&0\\u&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-u&1\\-u^2&u\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u&1\\-u^2&-u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\-2u^2&0\end{pmatrix}$$

and

$$\begin{pmatrix}0&2\\-2u^2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2\\-2(u+1)^2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\4u+2&0\end{pmatrix},$$

T contains λE_{21} for all λ. Let P_{ij} denote the permutation matrix as in the proof of Theorem 2; we have $P_{ij}^2=I$ and

$$P_{ij}XP_{ij}^{-1}+P_{ij}^{-1}XP_{ij}=2P_{ij}XP_{ij}$$

the set contains λE_{ij} for all $i\neq j$ and all λ belonging to K.

Next, from

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&c\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}^{-1}+\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&c\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-bc&0\\0&cb\end{pmatrix}+2cE_{21}-bcbE_{12}$$

we deduce that T contains an element of the form

$$\begin{pmatrix}-bc&c\\0&cb\end{pmatrix}.$$

Consequently, T contains

$$\begin{pmatrix}-bc&0\\0&cb\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}cb&0\\0&-cb\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cb-bc&0\\0&0\end{pmatrix};$$

the theorem follows.

2. Let A be a non-central element of T. Suppose that there is a non-diagonal element different from zero; we may assume without loss of generality that $a_{12} \neq 0$. Since

$$[-1,1,\dots,1]A[-1,1,\dots,1]^{-1}+[-1,1,\dots,1]^{-1}A[-1,1,\dots,1]-2A=$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & -4\beta \\ -4\gamma & 0^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

the set T contains an element of the form

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta=(a,\beta_1), \quad a \neq 0.$$

Moreover, T contains

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I^{(n-2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & \beta_1 \\ b & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0^{(n-2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I^{(n-2)} \end{pmatrix}^{-1}$$
$$+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I^{(n-2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & \beta_1 \\ b & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0^{(n-2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I^{(n-2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2a & 2\beta_1 \\ 2(b-a) & 0 & 0 \\ 2\gamma_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$2\begin{pmatrix} 0 & a & \beta_1 \\ b & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0^{(n-2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a & 2\beta_1 \\ 2(b-a) & 0 & 0 \\ 2\gamma_1 & 0 & 0^{(n-2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

which is $2aE_{21}$. Since

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4a & 0 \end{pmatrix}^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4a & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4a & 0 \end{pmatrix} = E_{12},$$

the theorem follows from 1.

Finally, if $a_{ij}=0$ for all $i \neq j$ then from the identity

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu & -b\lambda+\mu b \\ -\lambda b+b\mu & 2\lambda \end{pmatrix}$$

we deduce that we may assume A being not diagonal. The result follows from the previous consideration.

From Theorem 8 we can deduce the corresponding consequences of Theorem 2. But, besides of these we have several new interesting consequences:

Theorem 9. *If we regard K_n as a Jordan ring with the operation $\{A,B\}$, it has no proper ideal.*

Proof. An ideal of K is a module T of elements $M,\ldots,$ of K_n such that $\{A,M\}$ belongs to T for all A of K_n and M of T. Evidently a Jordan ideal can not be contained in the centre. Since

$$\begin{aligned}\{A^{-1}, \{A,M\}\} &= A^{-1}(AM+MA)+(AM+MA)A^{-1}\\ &= AMA^{-1}+A^{-1}MA+2M,\end{aligned}$$

T is a weak normal submodule of K_n. By Theorem 8, T contains L_n. The proof is completed by the same method as in Theorem 5.

Theorem 10. *If we regard K_n as Lie ring with the operation $[A,B]$, every ideal which is not contained in the centre of K_n contains L_n.*

Since

$$\begin{aligned}[[A,M],A^{-1}] &= (AM-MA)A^{-1}-A^{-1}(AM-MA)\\ &= AMA^{-1}+A^{-1}MA-2M,\end{aligned}$$

every ideal of the Lie ring K_n is a weak normal submodule of K_n. The theorem follows immediately from Theorem 8. Finally, the same method establishes also

Theorem 11. *The Lie ring L_n has no proper ideal which is not contained in the centre.*

Proof. 1. If the ideal T contains E_{12}, then from

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\lambda\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

we deduce that T contains μE_{12} for all μ. Next, since

$$[E_{i1}, \lambda E_{12}] = \lambda E_{i2} \quad \text{for} \quad i \neq 1 \text{ and } 2,$$

and

$$[\lambda E_{i2}, E_{2j}] = \lambda E_{ij} \quad \text{for} \quad i \neq j,$$

T contains λE_{ij} for all $i \neq j$ and λ belonging to K. Since

$$[\lambda E_{ij}, \mu E_{ji}] = \lambda\mu E_{ii} - \mu\lambda E_{jj},$$

we have the theorem.

2. Suppose that the characteristic of the field does not divide n. If T contains a non-diagonal $A=(a_{ij})$ we may assume that $a_{12}\neq 0$.

Let

$$[-(n-1),1,\dots,1]A-A[-(n-1),1,\dots,1]=B,$$

and

$$B[1,-(n-1),1,\dots,1]-[1,-(n-1),1,\dots,1]B=C.$$

Then T contains

$$C=\begin{pmatrix} 0 & n^2a_{12} & 0 \\ n^2a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Since

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ \beta & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & a \\ \beta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

and

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}a^{-1} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}a^{-1} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

the set T contains E_{12}. The theorem follows from 1. Since

$$\begin{pmatrix} 0 & \nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \nu\mu-\lambda\nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

we may assume thet T always contains a non-central element except when T is contained in the centre.

3. Suppose that the characteristic of K divides n. Since

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P^{(n-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & * \\ * & A_1^{(n-1)} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} * & * \\ * & A_1^{(n-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P^{(n-1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} * & * \\ * & PA_1-A_1P \end{pmatrix}$$

and the characteristic of the field does not divide $n-1$, the set T contains an element of the form

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

provided that T contains a matrix with a non-central A_1, but the latter can always be fulfilled.

Moreover,

$$[0,1,-1,0,\dots,0]A-A[0,1,-1,0,\dots,0]=\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & a_{13} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{31} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

If the characteristic of the field is different from 3, we apply 2, to

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 2 \\ -a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

the theorem follows. Therefore we shall complete the proof if we can prove our theorem for the field with characteristic 3 and $n=3$, and T contains

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

But now

$$[0,1,-1]A-A[0,1,-1]-A=\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}=B \text{ (say)},$$

and

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}B-B\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

and the identity (2), in conclusion, T has E_{12}. Consequently the theorem follows.

THE MEASURE-THEORETIC SETTING OF PROBABILITY THEORY

By J. L. Doob (Urbana, U. S. A.)

It is now generally accepted that the mathematical theory of probability is simply the theory of measure, with special emphasis on certain aspects of that theory. In spite of this general agreement, however, no completely satisfactory account of the measure theoretic foundations of probability theory has been given, that is an account of the definitions peculiar to probability theory, with enough development to show that the definitions are adequate to the subject. The nearest approach to this is Kolmogorov's fundamental *Ergebnisse der Mathematik* paper of 1934, but this paper does not go very far into the subject, and it is significant that a recent book by Gnedenko and Kolmogorov (*Limiting Distributions of Sums of Independent Random Variables*, Moscow-Leningrad 1949) adopts a slightly more restrictive point of view, to be discussed below. The absence of an adequate basic text is undoubtedly the reason why mathematicians who are not specialists in probability theory find it almost impossible to understand probability books and technical papers. Writers in the subject have now become used to taking for granted a large amount of basic material which has never been adequately discussed.

In an as yet unpublished book on stochastic processes, the writer wished to take the ordinary mathematics of probability for granted, but soon found out that in the absence of a standard text the book was thereby rendered quite unreadable. He was thus forced to give a fairly complete outline of the basic ideas, with various modifications and extensions of existing treatments to avoid awkwardness in later developments. Since the publication of the book has been delayed, and since there has been so much confusion on the subject (in part inspired by the writer's ingenious proofs of incorrect theorems), the following account is offered as a simple exposition with a minimum of technical details.

Let Ω be any abstract space of points ω. Let $\mathcal{G}$ be a Borel field of ω sets and let Pr be a measure of $\mathcal{G}$ sets, with $Pr\{\Omega\}=1$. The mathematical theory of probability is the study of triples $\{\Omega,\mathcal{G},Pr\}$. In the following we shall call any measure function with maximum value 1 a *probability measure*. In the applications of the theory of probability, Ω is usually called the *space of elementary events* and the $\mathcal{G}$ sets are called *events*.

Given a triple $\{\Omega,\mathcal{G},Pr\}$, a real valued ω function x, measurable with respect to $\mathcal{G}$, is called a *random variable*, and its integral over Ω with respect to the given probability measure is denoted by $E\{x\}$. Let the range of values of x be R_x, and let Pr' be the probability measure of linear Borel sets A defined by

$$Pr'\{A\}=\int_A dF(\lambda), \quad F(\lambda)=Pr\{x(\omega)\leqslant\lambda\}.$$

The relation between R_x, Pr', and Pr plays an important although indirect role in many considerations, as we shall see below. In many cases it is true that if a linear set $A\subset R_x$ has as inverse image the ω set $\Lambda\in\mathcal{G}$ under the map $\omega\rightarrow x(\omega)$, then

$$Pr\{\Lambda\}=\inf_{A\subset B} Pr'\{B\} \qquad (B \text{ Borel}).$$

The truth of this for every x is a definite restriction on the triple $\{\Omega,\mathcal{G},Pr\}$, which is called *perfect* by Gnedenko and Kolmogorov if the condition is satisfied. The latter authors accept as part of their general definition of probability that a probability triple is perfect, but we shall not make this assumption, because it seems unnatural, unnecessary, and in some applications embarassing.

Let Ω and T be abstract spaces, and let $\{x_t, t\in T\}$ be any family of ω functions indexed by the parameter t. We shall denote by $\mathcal{B}(x_t, t\in T)$ the smallest Borel field of ω sets with respect to which the x_t's are all measurable. In particular if $\{\Omega, \mathcal{G}, Pr\}$ is a probability triple, and if the x_t's are random variables, that is functions measurable with respect to $\mathcal{G}$, the family of random variables is called a *stochastic process.* In this case evidently $\mathcal{B}(x_t, t \in T) \subset \mathcal{G}$ and we define $\mathcal{B}^*(x_t, t \in T)$ as the smallest Borel field of ω sets including those in $\mathcal{B}(x_t, t \in T)$ and also all subsets of those of the latter sets which have Pr measure 0. Finally we define $\mathcal{B}^{**}(x_t, t \in T)$ as the smallest Borel field of ω sets including those of $\mathcal{B}(x_t, t \in T)$ and also all ω sets of Pr measure 0. The sets in $\mathcal{B}^{**}(x_t, t \in T)$ and the random variables measurable with respect to this field will be said to be defined in terms of conditions on the x_t's. For each ω the random variable x_t has the function value $x_t(\omega)$, and for each ω this function value thereby determines a function of t, called a *sample function* of the stochastic process, or *sample sequence* if T is a sequence. Corresponding to this terminology, an ω set or function determined by conditions on the x_t's is sometimes called a set or function *measurable* on the sample space of the x_t's. If $x_1, \ldots, x_n$ are random variables, a function x is measurable on their sample space if and only if it is equal for almost ω to a Baire function of these n variables.

The simplest type of stochastic process from some points of view is one in which the point ω itself is a sample function of the process. More precisely, let T be any aggregate, and let Ω be the class of all real valued functions of $t \in T$. Then each point of Ω is a t function, and Ω is simply a coordinate space, of dimensionality the cardinal number of T. Let x_s be the s-th coordinate function, that is x_s is the ω function which for ω the t function f takes on the value $f(s)$, and denote the function value of x_s at ω by $x_s(\omega)$, as usual. Let $\mathcal{G} = \mathcal{B}(x_t, t \in T)$, and suppose that $\{\Omega, \mathcal{G}, Pr\}$ is a probability triple, with these definitions of Ω and $\mathcal{G}$. Then the stochastic process $\{x_t, t \in T\}$ determined by the coordinate functions will be called a *stochastic process of function space type.* Given Ω and $\mathcal{G}$ as described, the Pr measure of the triple is usually obtained constructively as follows. It is supposed that for each finite t set $t_1, \ldots, t_n$ a finite (n) dimensional distribution, that is a probability measure of n dimensional Borel sets, has been assigned, and the problem is to define Pr measure in such a way that $x_{t_1},\ldots,x_{t_n}$ have this distribution, that is in such a way that if A is an n dimensional Borel set,

$$Pr\{[x_{t_1}(\omega),\ldots,x_{t_n}(\omega)] \in A\} = \Phi_{t_1,\ldots,t_n}(A).$$

For this to be possible, the measures $\{\Phi_{t_1,\ldots,t_n}\}$ must satisfy obvious consistency conditions, and if these are satisfied Kolmogorov showed that the Pr measure can be defined as desired. In other words he has given a systematic method of defining probability measures in spaces of arbitrary dimensionality in terms of finite dimensional distributions assigned to finite aggregates of coordinate functions.

In particular, when one considers an n dimensional probability distribution, that is a probability measure of n dimensional Borel sets, one can consider the distribution as determined by the n dimensional distribution of the coordinate functions $x_1,\ldots,x_n$, in fact this is how the Pr measure is usually defined, and the process $\{x_j, j \leqslant n\}$ is then a process of function space type.

Let $\{\Omega, \mathcal{G}, Pr\}$ be a probability triple, and let $\{x_t, t \in T\}$ be a stochastic process whose functions are random variables defined on Ω. Then for many purposes this process can be replaced by one of function space type. This is done as follows. Let Ω' be the space of functions of $t \in T$, let x'_s be the s-th coordinate function on Ω' and let $\mathcal{G}' = \mathcal{B}(x'_t, t \in T)$. We define a Pr' measure of $\mathcal{G}'$ sets in such a way that if $t_1,\ldots,t_n$ is any finite t set, and if A is any n dimensional Borel set,

$$Pr'\{[x'_{t_1}(\omega'),\ldots,x'_{t_n}(\omega')] \in A\} = Pr\{[x_{t_1}(\omega),\ldots,x_{t_n}(\omega)] \in A\}.$$

This can be done trivially, in the light of Kolmogorov's method of constructing probability measures in coordinate space. In fact the right side of this equation defines a measure of n dimensional Borel sets for each finite T set $t_1,\ldots,t_n$, and the class of these measures is precisely what is needed for Kolmogorov's method. It is then easily proved that there is a correspondence between the Ω random variables x which are measurable on the sample space of the x_t's and the Ω' random variables x', with the following properties:

(a) To each x corresponds a unique x' (disregarding values of x' on sets of Pr' measure 0) and conversely. Moreover for each t, x'_t corresponds to x_t.

(b) If $x \geqslant 0$ for almost all ω, and if x' corresponds to x, then $x' \geqslant 0$ for almost all ω', and conversely.

(c) If $x_1, \ldots, x_n$ correspond to $x'_1, \ldots, x'_n$, and if Φ is a Baire function of n variables, then $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, corresponds to $\Phi(x'_1, \ldots, x'_n)$.

(d) If y_j corresponds to y'_j, and if $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$ exists for almost all ω, then $\lim\limits_{n\to\infty} y'_n$ exists for almost all ω' and the limits correspond, and conversely.

(e) If x corresponds to x', then $E\{x\}$ exists if and only if $E'\{x'\}$ exists, and if these expectations exist they are equal.

(Obviously these properties are not independent.) In particular, taking x as the characteristic function of a point set, to each $\mathcal{B}^*(x_t, t \in T)$ set corresponds a unique $\mathcal{G}'$ set, and conversely, neglecting sets of measure 0, and the corresponding sets have the same measures in their respective spaces. Moreover finite and enumerably infinite unions and intersections are invariant under this correspondence.

If the x'_t process is defined as described above, it will be called a *function space representation* of the x_t process. By going to this process, if the x_t process probabilities not defined in terms of conditions on the x_t's are not of interest, that is if one is only interested in sets and functions measurable with respect to $\mathcal{B}(x_t, t \in T)$, or at least measurable with respect to $\mathcal{B}^{**}(x_t, t \in T)$, one can reduce problems to those involving processes of function space type. The advantages of this substitution will be exhibited below. However it is neither necessary nor convenient to assume that all stochastic processes are of function space type. A stochastic process is simply a family of measurable functions, and it would be clumsy every time a new function, say the square of one already considered, must be added to the list of those under consideration, to adjoin it to the process, and accordingly replace Ω by a space with an additional coordinate.

Given a probability triple $\{\Omega, \mathcal{G}, Pr\}$, let $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ be a Borel field of ω sets, and let $\mathcal{F}^*$ be the smallest Borel field including all the $\mathcal{F}$ sets and also all ω sets of Pr measure 0. Then an ω function is measurable with respect to $\mathcal{F}^*$ if and only if it is equal almost everywhere to a function measurable with respect to $\mathcal{F}$. Let x be a random variable with $E\{|x|\} < \infty$. The *conditional expectation of x relative to $\mathcal{F}$*, $E\{x \mid \mathcal{F}\}$, is defined as any integrable random variable which is measurable with respect to $\mathcal{F}^*$ and which satisfies the equation

$$\int_\Lambda x \, dPr = \int_\Lambda E\{x \mid \mathcal{F}\} \, dPr, \quad \Lambda \in \mathcal{F}.$$

(The equation is then also true for $\Lambda \in \mathcal{F}^*$.) There always is such a random variable, any random variable equal almost everywhere to such a random variable satisfies the same conditions, and any two random variables satisfying these conditions are equal almost everywhere. In particular if x is the characteristic function of a set M, $E\{x \mid \mathcal{F}\}$ is also written $Pr\{M \mid \mathcal{F}\}$, and is described as the *conditional probability of M relative to $\mathcal{F}$*. The symbols for conditional expectation and probability will always denote some particular choice of the random variables satisfying the stated conditions. If $\{x_t, t \in T\}$ is any family of random variables, $E\{x \mid \mathcal{B}(x_t, t \in T)\}$ is also written as $E\{x \mid x_t, t \in T\}$, and is picturesquely described as the conditional expectation of x for given values of the x_t's. It is a random variable defined in terms of conditions on the x_t's, in the technical sense given earlier in this paper.

Let $\{x_t, t \in T\}$ be a stochastic process, based on the probability triple $\{\Omega, \mathcal{G}, Pr\}$, with function space representation $\{x'_t, t \in T\}$. If $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}^*(x_t, t \in T)$ is a Borel field of Ω sets, if $\mathcal{F}'$ is the Borel field of corresponding Ω' sets, and if x is an Ω random variable, corresponding to the Ω' random variable x', then if $E\{|x|\} < \infty$ we have defined $E\{x \mid \mathcal{F}\}$ as an Ω random variable and $E'\{x' \mid \mathcal{F}'\}$ as an Ω' random variable. These two random variables can be shown to correspond in the $\Omega \longleftrightarrow \Omega'$ correspondence, so that in considering conditional expectations and probabilities we can for many purposes assume that the given process is of function space type. Applications of this idea will be indicated below.

Let $\{\Omega, \mathcal{G}, Pr\}$ be a probability triple, and suppose that $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ is a Borel field of Ω sets. Then it is natural to ask whether $Pr\{\Lambda | \mathcal{F}\}$ can be defined in some specific way for each Λ to yield a single-valued function of Λ, ω which is a probability measure in Λ. More carefully formulated, the question is whether for each $\Lambda \in \mathcal{G}$ and point ω one can find a value $p(\Lambda, \omega)$, defining a single-valued function with the following properties:

(a) for fixed $\omega, p(\Lambda, \omega)$ defines a probability measure in Λ;

(b) for fixed $\Lambda \in \mathcal{G}$,

$$Pr\{\Lambda | \mathcal{F}\} = p(\Lambda, \omega)$$

for almost all ω (where the exceptional Ω set may depend on Λ).

If there is a function p with these properties, we say that there is a *conditional probability distribution relative to* $\mathcal{F}$. In this case $E\{x | \mathcal{F}\}$ can be defined for each ω as the integral of x with respect to the measure $p(\cdot, \omega)$. Unfortunately it is not true that there is always such a conditional probability distribution. Although there is such a conditional probability distribution if the Gnedenko-Kolmogorov hypothesis that the basic probability triple is perfect is satisfied, we have not adopted this hypothesis. The following remarks show how the convenience of a conditional probability distribution can be obtained even in the general case. Suppose that $x_1, \ldots, x_n$ are n random variables such that the range of the point $[x_1(\omega), \ldots, x_n(\omega)]$ in n dimensional space as ω varies is an n dimensional Borel set, and define $\mathcal{G}_1 = \mathcal{B}(x_1, \ldots, x_n)$. Then it can be shown that there is a conditional distribution of sets $\Lambda \in \mathcal{G}_1$, so that the conditional expectation of any Baire function of these x_j's, for example, is its integral with respect to the corresponding conditional distribution. Since one can go to the function space representation of any collection of random variables, and since conditional distributions are available in this representation, because, for example, the ranges of the random variables are Borel sets (the whole number space), it follows that the desired results can be proved using conditional distributions. As an example we take a somewhat trivial case. It is well known that

$$E^2\{x | \mathcal{F}\} \leqslant E\{x^2 | \mathcal{F}\}$$

with probability 1. (Since neither side is uniquely defined, the qualifying phrase "with probability 1" is always necessary in relations of this type.) The inequality can be proved directly from the definition of conditional expectation, but it is instructive to give a proof with more general implications. We first remark that if y and z are defined by

$$y = E\{x|\mathcal{F}\}, \quad z = E\{x^2|\mathcal{F}\},$$

we have, since every set defined by conditions on y and z differs by at most a set of probability 0 from an $\mathcal{F}$ set,

$$E\{x|y,z\} = E\{E\{x|\mathcal{F}\}|y,z\}$$

with probability 1, and on the other hand the right side of this equation is simply

$$E\{y|y,z\} = y,$$

with probability 1. In other words

$$E\{x|y,z\} = E\{x|\mathcal{F}\}$$

with probability 1, and similarly

$$E\{x^2|y,z\} = E\{x^2|\mathcal{F}\}$$

with probability 1. Hence the inequality to be proved reduces to

$$E^2\{x|y,z\} \leqslant E\{x^2|y,z\}$$

(with probability 1). Now the triple of variables x, y, z can be represented by a triple of function space type, that is by a distribution of three dimensional Borel sets, in which case there is a conditional probability distribution. However in this case the corresponding inequality is simply an application of Schwarz's inequality, for each ω'. Since the inequality is true in the representation, it is true for the original random variables, with probability 1. The introduction of the random variables y, z is somewhat artificial here. A more direct approach would be to introduce a family of random variables $\{y_t, t \in T\}$, where it is supposed that each y_t is measurable with respect to $\mathcal{F}$ and that $\mathcal{F} = \mathcal{B}(y_t, t \in T\}$. For example the y_t's could be taken as the characteristic functions of the sets of $\mathcal{F}$. The inequality to be proved is then obviously

$$E^2\{x|y_t, t \in T\} \leqslant E\{x^2|y_t, t \in T\}$$

(with probability 1), and the proof is given by going to the representation of the family consisting of x together with all the y_t's. The only advantage of the first proof is that it only involves three random variables, whereas T will in general be infinite.

Let $\{x_t, t \in T\}$ be a stochastic process based on some probability triple $\{\Omega, \mathcal{G}, Pr\}$. Then for many purposes one is only interested in the probabilities derived from the distributions of finite aggregates of x_t's. Let $\{y_t, t \in T\}$ be another stochastic process, defined on the same Ω space, and suppose that

$$Pr\{x_t(\omega) = y_t(\omega)\} = 1, \quad t \in T.$$

Then for the reason just given, the two processes can be considered equivalent for many purposes, and setting up an equivalence relation we describe each process as a *standard modification* of the other. Note that the equation

$$Pr\{x_t(\omega) = y_t(\omega), \quad t \in T\} = 1$$

is necessarily true for equivalent processes if and only if the parameter space T is at most enumerable.

Let $\{x_t, t \in T\}$ be a stochastic process based on some probability triple, and consider the Ω function $\sup\limits_{t \in T} x_t$. If T is non-denumerable, this Ω function is not necessarily measurable, that is the function is not necessarily a random variable, and the difficulties involved in questions of boundedness and continuity of sample functions of the process caused by this fact are well known. It is easily seen that there is a random variable x, uniquely determined neglecting values on sets of probability 0, and satisfying the following conditions:

(a) $$Pr\{x(\omega) \geqslant x_t(\omega)\} = 1, \quad t \in T;$$

(b) if y is a random variable satisfying (a), then

$$Pr\{y(\omega) \geqslant x(\omega)\} = 1.$$

We write $x = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t \in T} x_t$. It can be shown that there is an at most enumerable T set $\{t_n\}$ such that

$$Pr\{\operatorname*{ess\,sup}_{t \in T} x_t = \sup_n x_{t_n}\} = 1.$$

It would be natural to replace sup by ess sup everywhere, to avoid the measurability difficulties just described. However it is more useful as well as intuitively clearer to avoid generalized boundedness, continuity, and so on, and to restrict one's attention to stochastic processes for which such a substitution is unnecessary, because sup turns out to be measurable and equal with probability 1 to ess sup in the cases of interest. This is no real restriction, because it can be shown that if the original process does not already have this property, an equivalent one does. To make clear the principle involved, the following discussion is put into a general setting which makes it obvious how to generalize the treatment to abstract valued random variables. Les $\mathcal{S}$ be a class of T sets, and let $\mathcal{A}$ be a class of linear Borel sets with the property that for each $S \epsilon \mathcal{S}$ and each $A \epsilon \mathcal{A}$, there corresponds a finite or enumerable subset $\{t_n\}$ of S such that the Ω set

$$\{x_{t_j}(\omega) \epsilon A, \quad j \geqslant 1\}$$

(which is necessarily measurable) and the Ω set

$$\{x(\omega) \epsilon A, t \epsilon S\}$$

(which is necessarily Pr measurable only if S is at most enumerable) differ by at most a set of Pr measure 0. In this case the stochastic process $\{x_t, t \epsilon T\}$ will be said to be *separable relative to* $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$. (If the random variables are abstract valued the $\mathcal{A}$ sets would of course be sets used in the definition of measurability of the random variables.) It can be shown that in the numerical case we are considering in this paper, if T is a linear set, if $\mathcal{S}$ is the class of intersections of open intervals with T, and if $\mathcal{A}$ is the class of closed linear sets, then to a stochastic process corresponds a standard modification $\{y_t, t \epsilon T\}$ which is separable relative to $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$. For this separable process, ess sup y_t for t in the intersection of T with any interval coincides with sup y_t for t in this same domain, neglecting values on sets of Pr measure 0. It is easily shown that the classes of bounded sample functions, continuous sample functions, and so on, have probabilities, that is correspond to Pr measurable Ω sets. (In this development it is necessary to allow the y_t's to take on infinite values.)

Finally, if $\{x_t, t \in T\}$ is a stochastic process, and if T is a linear Lebesgue measurable set, it is sometimes necessary to discuss the Lebesgue measurability and integrability of sample functions, for example in the law of large numbers with T a half-line. The function value $x_t(\omega)$ defines a function of t, ω. Define t, ω measure as the direct product of Lebesgue t measure and the given ω measure. Then the process is called *(Lebesgue) measurable* if the above t, ω function is t, ω measurable. Under very general conditions there is a measurable stochastic process which is a standard modification of a given process. The condition that such a process exist is a condition on the distributions of finite aggregates of the x_t's. Moreover there is a measurable and separable (relative to the classes $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ described above) standard modification of a stochastic process whenever there is a measurable one. If a process is measurable almost all its sample functions (that is the sample functions corresponding to almost all ω) are Lebesgue measurable, and simple conditions can be given sufficient for their integrability.

UNE PROPRIÉTÉ DES SUITES DE POLYNÔMES HOMOGÈNES DE DEUX VARIABLES COMPLEXES BORNÉES SUR UNE COURBE

Par C. Loster (Kraków)

Soit $\{P_n(x,y)\}$ une suite de polynômes homogènes de la forme

(1) $$P_n(x,y) = a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}\,x^{n-1}y + \ldots + a_{0,n}\,y^n,$$

où les coefficients $a_{i,j}$ et les variables x et y sont complexes. D'autre part, soit C une courbe donnée par les équations

(2) $$x = x(t), \quad y = y(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions complexes, continues dans l'intervalle $[0,1]$. F. Leja a introduit une fonction d'ensemble définie pour les ensembles fermés et bornés de points de l'espace de deux variables complexes, dite *écart* de telles ensembles [1]). Nous supposerons que l'écart de tout arc partiel de la courbe (2) est positif. Dans ces hypothèses nous allons démontrer le

Théorème. *Lorsque la suite* (1) *est bornée en tout point de la courbe* (2), *à tout* $\varepsilon > 0$ *et tout point* $p_0 \in C$ *dont les coordonnées* x_0, y_0 *ne s'annullent pas à la fois on peut faire correspondre un voisinage* $V = V(\varepsilon, p_0)$ *du point* p_0 *dans lequel*

(3) $$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P_n(x,y)|} < 1 + \varepsilon.$$

---

[1]) F. Leja, *Sur l'existence du domaine de convergence des séries de polynômes homogènes*, Bullet. de l'Acad. Polon., série A, 1933, p. 453-461.

L'enoncé de ce théorème est dû à M. F. Leja qui a démontré un théorème analogue pour les suites de polynômes à une variable complexe [2]).

Nous aurons à nous appuyer sur deux lemmes suivants dont la démonstration se trouve dans le travail cité [2]):

Lemme 1. *Etant donnée une fonction positive M_τ de τ définie presque partout dans l'intervalle $[0,d]$, où $d>0$, il existe, pour tout $\mu>0$, un ensemble E des points τ de $[0,d]$ et un nombre $M>0$ tel qu'on a*

1⁰ $M_\tau \leqslant M$ *pour tout* τ *appartenant à* E,

2⁰ $m(\bar{E})>d-\frac{\mu}{4}$, *où* $\bar{E}=E+$ *les points limites de* E.

Lemme 2. *Etant donné un ensemble E des points de l'intervalle $[0,d]$ remplissant la condition $m(\bar{E})>d-\frac{\mu}{4}$ on peut trouver, pour tout nombre naturel n, un système de $n+1$ points $\tau_0,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n$ appartenant à E et remplissant les conditions suivantes*

$$0\leqslant\tau_0<\tau_1<\tau_2<\dots<\tau_n\leqslant d,$$

$$\tau_j-\tau_k\geqslant\frac{j^2-k^2}{n^2}(d-\mu) \qquad \textit{pour} \quad j>k=0,1,2,\dots,n.$$

Démonstration du théorème. Soit p_0 un point de C des coordonnées x_0,y_0 qui ne s'annulent pas à la fois, ε un nombre positif fixé arbitrairement et $\varepsilon'>0$ un nombre tel que $(1+\varepsilon')^2<1+\varepsilon$. D'autre part, soit ε_0 un nombre satisfaisant à l'inégalité

$$(4) \qquad 0<\varepsilon_0<\min\left[m_0,\frac{\varepsilon'\cdot m_0}{2}\right],$$

où
$$m_0=\max\left[\frac{|x_0|}{2},\ \frac{|y_0|}{2}\right].$$

La sphère K de centre $p_0\in C$ et de rayon ε_0 ne contient pas le point $(0,0)$, car si $p(x,y)\in K$ et, par exemple $|x_0|\geqslant|y_0|$ on a

$$||x|-|x_0||\leqslant|x-x_0|<\varepsilon_0 \text{ et } |x|>|x_0|-\varepsilon_0>|x_0|-\frac{|x_0|}{2}=\frac{|x_0|}{2}>0.$$

---

[2]) F. Leja, *Sur les suites de polynômes bornées presque partout sur la frontière d'un domaine*, Math. Ann. 108 (1933), p. 517-524.

Désignons par C_0 l'arc partiel de la courbe C contenue dans la sphère K et passant par p_0. L'écart de C_0 est, par hypothèse, positif. Donc il existe sur C_0 un point $p_1 = p(x_1, y_1)$ tel que

$$|x_0 y_1 - y_0 x_1| = l > 0.$$

Soit

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0), \quad x_1 = x(T), \quad y_1 = y(T);$$

on peut supposer que $t_0 < T$.

Désignons par C_1 l'arc partiel de C_0 aux extrémités p_0 et p_1; on a donc

$$C_1\{x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

Le segment $\overline{p_0 p_1}$ est situé à l'intérieur de la sphère K. La représentation parametrique de ce segment

$$\xi = x_0 + a\tau, \quad \eta = y_0 + b\tau, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant l,$$

peut être choisie de façon que les coefficients a et b satisfaissent à l'égalité

$$|x_0 b - y_0 a| = 1. \tag{5}$$

Un calcul simple montre que (5) implique

$$|x_1 b - y_1 a| = 1.$$

Considérons la fonction

$$\tau(t) = \left| \frac{y_0 x(t) - x_0 y(t)}{b x(t) - a y(t)} \right|. \tag{6}$$

Elle est non-négative et continue au sens large dans $[t_0, T]$, c'est-à-dire elle peut atteindre la valeur $+\infty$ d'une façon continue. En effet, le numerateur et le dénominateur dans la formule (6) sont des fonctions continues ne s'annulant pas à la fois pour $t \in [t_0, T]$, car si l'on avait

$$y_0 x(t') - x_0 y(t') = 0 \quad \text{et} \quad b x(t') - a y(t') = 0$$

où $t' \in [t_0, T]$, alors, en vertu de l'inégalité

$$|x(t')| + |y(t')| > 0,$$

on aurait

$$|x_0 b - y_0 a| = 0$$

contrairement à (5). Nous avons en outre

$$\tau(t_0) = 0 \quad \text{et} \quad \tau(T) = l > 0,$$

d'où il suit que l'ensemble de valeurs de la fonction (6) contient l'intervalle $[0,l]$. Par conséquent, à toute valeur $\tau \in [0,l]$ correspond une valeur (pas nécessairement unique) $t \in [t_0, T]$ satisfaisant à la formule (6). Faisons correspondre à tout nombre $\tau \in [0,l]$ un nombre unique $t \in [t_0, T]$ tel que

$$(6') \qquad \tau = \left| \frac{y_0 x(t) - x_0 y(t)}{bx(t) - ay(t)} \right|.$$

Ce nombre t sera désigné par t_τ. Définissons ensuite dans l'intervalle $[0,l]$ la fonction

$$(7) \qquad F(\tau) = \sup_n |P_n(x(t_\tau), y(t_\tau))|.$$

En vertu de nos hypothèses, la fonction (7) est non-négative et finie dans $[0,l]$. Selon le lemme 1, pour chaque nombre μ, où $0<\mu<l$, il existe un ensemble $E\subset[0,l]$, où $0 \in E$, et un nombre $M > 0$, tels que

$$F(\tau) \leqslant M \quad \text{pour tout} \quad \tau \in E,$$

$$m(E) > l - \frac{\mu}{4}.$$

L'ensemble E et le nombre $M>0$ étant choisis pour μ donné, on peut déterminer, d'après le lemme 2, pour chaque n naturel, $n+1$ nombres $0=\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n$ contenus dans E et tels que

$$(8) \qquad \begin{gathered} 0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n, \\ \tau_j - \tau_k \geqslant \frac{j^2 - k^2}{n^2}(l-\mu) \quad \text{pour} \quad j > k = 0,1,2,\ldots,n. \end{gathered}$$

Nous allons déterminer, à l'aide des nombres (8), un système de $n+1$ points de la sphère K. Posons à cet effet

$$x_j = x(t_{\tau_j}), \quad y_j = y(t_{\tau_j}), \quad j = 0,1,2,\ldots,n.$$

D'après (6) on a

$$\tau_j = \left| \frac{y_0 x_j - x_0 y_j}{b x_j - a y_j} \right|, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

donc

$$y_0 x_j - x_0 y_j = -\theta_j \tau_j (b x_j - a y_j),$$

où $|-\theta_j| = 1$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, et, par suite,

(9) $$(y_0 + b\theta_j \tau_j) x_j - (x_0 + a\theta_j \tau_j) y_j = 0.$$

Soit $q_0, q_1, \ldots, q_n$ un système de $n+1$ points aux coordonnées

(10) $$\xi_j = x_0 + a\theta_j \tau_j, \quad \eta_j = y_0 + b\theta_j \tau_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Les points $q_0, q_1, \ldots, q_n$ sont situés à l'intérieur de la sphère K, car leurs distances au centre p_0 satisfont à l'inégalité

$$\sqrt{|\xi_j - x_0|^2 + |\eta_j - y_0|^2} = \sqrt{|a|^2 \tau_j^2 + |b|^2 \tau_j^2} = \tau_j \sqrt{|a|^2 + |b|^2} \leqslant$$
$$\leqslant l \cdot \sqrt{|a|^2 + |b|^2} = |\overline{p_0 p_1}|, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

D'autre part, les distances triangulaires de ces points sont positives, car

$$|\xi_j \eta_k - \eta_j \xi_k| = |\theta_j \tau_j - \theta_k \tau_k| \geqslant |\tau_j - \tau_k| \geqslant \frac{j^2 - k^2}{n^2} (l - \mu)$$

pour $j > k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

D'après les relations (9), les points (10) sont situés respectivement dans les plans analytiques

$$y_j x - x_j y = 0, \quad |x_j| + |y_j| > 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

déterminés par les points $p(x_j, y_j) \in C_1$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

En employant la formule d'interpolation de Lagrange pour le polynôme $P_n(x, y)$ et le système de points (10), nous aurons

(11) $$P_n(x, y) = \sum_{j=0}^{n} P_n(\xi_j, \eta_j) \cdot \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x\eta_k - y\xi_k}{\xi_j \eta_k - \eta_j \xi_k}.$$

Remarquons maintenant que les égalités (9) sont remplies par les points $q_0, q_1, \ldots, q_n$. Par conséquent, on peut faire correspondre au point q_j un nombre $\lambda_j \neq 0$ tel que

$$\xi_j = \lambda_j x_j, \quad \eta_j = \lambda_j y_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Nous affirmons que

$$|\lambda_j| < 1 + \varepsilon', \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

En effet, en vertu de (4), lorsque $|x_0| \geqslant |y_0|$ on a

$$\big||\lambda_j| - 1\big| = \left|\frac{|\xi_j|}{|x_j|} - 1\right| \leqslant \left|\frac{\xi_j - x_j}{x_j}\right| < \frac{2\varepsilon_0}{|x_0| - \varepsilon_0} <$$

$$< \frac{2\varepsilon_0}{|x_0| - \dfrac{|x_0|}{2}} \leqslant \frac{2\varepsilon_0}{m_0} < \varepsilon',$$

car $|x_j| > |x_0| - \varepsilon_0$ et $m_0 = \dfrac{|x_0|}{2}$. Il en resulte, que

$$|P_n(\xi_j, \eta_j)| = |P_n(\lambda_j x_j, \lambda_j y_j)| = |\lambda_j|^n |P_n(x_j, y_j)| < (1 + \varepsilon')^n M.$$

D'autre part, comme $\xi_0 = x_0$, $\eta_0 = y_0$ on a

$$\left|\frac{x\eta_k - y\xi_k}{\xi_j \eta_k - \eta_j \xi_k}\right| \leqslant \frac{|(x - x_0)\eta_k - (y - y_0)\xi_k| + |\xi_0 \eta_k - \eta_0 \xi_k|}{|\xi_j \eta_k - \eta_j \xi_k|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varrho + |\xi_0 \eta_k - \eta_0 \xi_k|}{|\xi_j \eta_k - \eta_j \xi_k|}, \quad j \neq k,$$

où $\varrho = N(|x - x_0| + |y - y_0|)$ et $N = \max\limits_{[0,1]} [|x(t)| + |y(t)|]$.

L'inégalité

$$\tau_n - \tau_k \geqslant \frac{n^2 - k^2}{n^2} (l - \mu), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

entraîne l'inégalité

$$\tau_k \leqslant \mu + \frac{k^2}{n^2} \cdot (l - \mu), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

et puisque

$$\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{|j^2 - k^2|}{n^2} \geqslant \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2},$$

on en déduit la limitation

$$\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{k}\left|\frac{x\eta_k-y\xi_k}{\xi_j\eta_k-\eta_j\xi_k}\right|\leqslant 2\prod_{k=1}^{n}\frac{\varrho+\mu+\frac{k^2}{n^2}(l-\mu)}{\frac{k^2}{n^2}(l-\mu)}=2\prod_{k=1}^{n}\frac{a^2+\frac{k^2}{n^2}}{\frac{k^2}{n^2}},$$

où

$$a^2=\frac{\varrho+\mu}{l-\mu},$$

donc

$$|P_n(x,y)|\leqslant(1+\varepsilon')^n\cdot 2M(n+1)\prod_{k=1}^{n}\frac{a^2+\frac{k^2}{n^2}}{\frac{k^2}{n^2}}. \tag{12}$$

La suite de la démonstration est analogue à celle donnée dans le travail cité plus haut [3]). Désignons par $J_n(a)$ l'expression suivante

$$J_n(a)=e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{a^2+\frac{k^2}{n^2}}{\frac{k^2}{n^2}}}.$$

Si n tend vers l'infini, la suite $J_n(a)$, $n=1,2,\ldots$, tend vers la limite suivante

$$J_n(a)\to J(a)=e^{\int\limits_0^1\ln\frac{a^2+u^2}{u^2}\,du}. \tag{13}$$

Mais, comme d'après (12),

$$\sqrt[n]{|P_n(x,y)|}\leqslant(1+\varepsilon')\sqrt[n]{2(n+1)M}\,J_n(a) \tag{14}$$

et comme

$$0<\int\limits_0^1\ln\frac{a^2+u^2}{u^2}\,du<2\ln\frac{(1+a)^{1+a}}{a^a}$$

on a

$$\limsup_n\sqrt[n]{|P_n(x,y)|}\leqslant(1+\varepsilon')\left[\frac{(1+a)^{1+a}}{a^a}\right]^2 \tag{15}$$

et cette inégalité a lieu uniformément dans le voisinage du point p_0.

[3]) Cf. la remarque 2.

Notre théorème est une conséquence immédiate de cette dernière inégalité. En effet, lorsque $\varrho+\mu\to 0$ le nombre α tend vers zéro et l'expression

$$\left[\frac{(1+\alpha)^{1+\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\right]^2$$

tend vers l'unité, donc, dans un voisinage suffisament petit du point p_0, on a

$$\limsup_n \sqrt[n]{|P_n(x,y)|} \leqslant (1+\varepsilon')^2 < 1+\varepsilon.$$

Remarque 1. Il est probable que ce théorème peut être généralisé en remplaçant dans son énoncé la courbe C par un continu satisfaisant à la même condition que la courbe C.

Remarque 2. Cette dernière condition est essentielle. En effet, soit C un segment ne contenant pas le point $(0,0)$ et situé dans le plan analytique $ax+by=0$, $|a|+|b|>0$. Soit $\{p(x_n,y_n)\}$ une suite de points sur C. Posons

$$P_n(x,y) = n^n \prod_{k=1}^{n}(xy_k - yx_k).$$

On voit que $P_n(x,y)=0$ sur C. D'autre part, si $p(x,y)$ est un point remplissant la condition

$$ax+by \neq 0,$$

alors

$$\limsup_n \sqrt[n]{|P_n(x,y)|} = \limsup_n n\,\delta(x,y) = +\infty,$$

où

$$\delta(x,y) = \inf_{\xi,\eta\in C} |x\eta - y\xi| > 0.$$

On en conclut que la propriété (3) n'est remplie dans aucun voisinage d'un point quelconque de C.

TAUBERIAN SERIES AND THEIR ABEL POWER SERIES TRANSFORMS

By R. P. Agnew (Ithaca, U. S. A.)

1. Introduction. Starting with efforts to obtain relations between the set of limit points of the sequence s_n of partial sums of a series Σu_n satisfying the Tauberian condition $\limsup |nu_n| < \infty$ and the set of limit points of the Abel power series transform

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k u_k, \tag{1.1}$$

several investigations culminate in the following two theorems.

Theorem 1.2. *Let $q > 0$. Then the relation*

$$\limsup_{t \to 1-} \Big| \sum_{k=0}^{\infty} t^k u_k - \sum_{k=0}^{[q/(1-t)]} u_k \Big| \leqq A(q) \limsup_{n \to \infty} |nu_n| \tag{1.21}$$

holds for each series Σu_n of real or complex terms for which $\limsup |nu_n| < \infty$ *when $A(q)$ is the constant defined by*

$$A(q) = \gamma + \log q + 2\int_q^{\infty} x^{-1} e^{-x} dx. \tag{1.22}$$

Moreover $A(q)$ is the best constant in the following sense. There is a real series Σu_n such that $0 < \limsup |nu_n| < \infty$ *and the members of* (1.21) *are equal.*

Theorem 1.3. *Let $q > 0$. Then the relation*

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{q}{n}\right)^k u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \right| \leqq A(q) \limsup_{n \to \infty} |nu_n| \tag{1.31}$$

holds for each series Σu_n *of real or complex terms for which* $\limsup |nu_n|<\infty$ *when* $A(q)$ *is the constant defined by* (1.22). *Moreover* $A(q)$ *is the best constant in the sense specified in Theorem* 1.2.

Here and hereafter, γ is Euler's constant, the logarithms have base e, and $[x]$ denotes the greatest integer less than or equal to x. It is known that the theorem, obtained by replacing (1.21) by

$$\limsup_{t\to 1} \Big| \sum_{k=0}^{\infty} t^k u_k - \sum_{k=0}^{[q/\log t^{-1}]} u_k \Big| \leqq A(q) \limsup_{n\to\infty} |nu_n| \tag{1.4}$$

in Theorem 1.2, is true. It is likewise known that the theorem, obtained by replacing (1.31) by

$$\limsup_{n\to\infty} \Big| \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-q/n})^k u_k - \sum_{k=0}^{\infty} u_k \Big| \leqq A(q) \limsup_{n\to\infty} |nu_n| \tag{1.5}$$

in Theorem 1.3, is true. For proofs of these facts and references to earlier work on the subject, see Agnew [1] and references given there. Theorems of this type have been generalized to cover a class of transformations, including that of Abel, by Delange [3]. For the case of the Abel transformation, Delange's Théorème 4 reduces to the formulation in Theorem 1.2, except that (1.21) is replaced by (1.4) and $A(q)$ takes the form

$$A(q) = \int_0^q \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx + \int_q^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx \tag{1.6}$$

which can be shown to be in agreement with (1.22) with the aid of the useful formula

$$\gamma = \int_0^q \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx - \int_q^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx - \log q. \tag{1.7}$$

One object of this note is to show that the unpleasant quantities $[q/\log t^{-1}]$ and $e^{-q/n}$ in (1.4) and (1.5) can be replaced respectively by the simpler quantities $[q/(1-t)]$ and $1-q/t$ in (1.21) and (1.31) and thus to prove Theorems 1.2 and 1.3. These theorems are then generalized and supplemented by theorems and remarks. Some unsolved problems are noted.

2. Proof of Theorem 1.2. One can take the view that Theorem 1.2 gives a partial answer to the following question. A series $\sum u_n$ for which $\limsup |nu_n|<\infty$ being given and the parameter t, being fixed between 0 and 1 so that $\sigma(t)=\sum_{k=0}^{\infty} t^k u_k$ is determined, how shall we choose n to make the partial sum $\sum_{k=0}^{n} u_k$ a good approximation to $\sigma(t)$, and how good is the approximation? We now show that the answer $[q/\log t^{-1}]$ given in (1.4) can be replaced by $q/(1-t)$ as in (1.21). Let

$$F(t)=\frac{q}{1-t}-\frac{q}{\log t^{-1}}. \tag{2.1}$$

Putting $h=1-t$ gives

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 1} F(t) &= \lim_{h\to 0} q\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{\log(1-h)^{-1}}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} q\,\frac{\log(1-h)^{-1}-h}{h\log(1-h)^{-1}}=\frac{q}{2}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

It follows that for values of t near 1

$$\left[\frac{q}{\log t^{-1}}\right]\leq\left[\frac{q}{1-t}\right]\leq\left[\frac{q}{\log t^{-1}}\right]+\frac{q}{2}+2. \tag{2.3}$$

When Σu_n satisfies the Tauberian condition $\limsup |nu_n|<\infty$, we have $\lim u_n=0$ and hence

$$\lim_{t\to 1-}\left(\sum_{k=1}^{[q/(1-t)]} u_k-\sum_{k=1}^{[q/\log t^{-1}]} u_k\right)=0. \tag{2.4}$$

It follows that Theorem 1.2 is implied by the similar theorem containing (1.4) in place of (1.21).

3. Proof of Theorem 1.3. One can take the view that Theorem 1.3 gives a partial answer to the following question. A series Σu_n for which $\limsup |nu_n|<\infty$ being given and a positive integer n being fixed so that $s_n=\sum_{k=0}^{n} u_k$ is determined, how shall we choose t to make the Abel transform $\sigma(t)=\sum_{k=0}^{\infty} t^k u_k$

a good approximation to s_n, and how good is the approximation? We now show that the answer $e^{-q/n}$ given in (1.5) can be replaced by $1-q/n$ as in (1.31). Let Σu_n be a series for which $\limsup |nu_n|<\infty$ and choose C such that $|nu_n|\leqq C$ for each n. Let $\sigma(t)=\sum_{k=0}^{\infty} t^k u_k$. Then

$$\sigma'(t)=\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} ku_k, \tag{3.1}$$

$$|\sigma'(t)|\leqq \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} C = C/(1-t). \tag{3.2}$$

Let θ_n be the bounded sequence of positive numbers defined by the equations

$$e^{-q/n}=1-\frac{q}{n}+\frac{\theta_n}{n^2} \qquad (n=1,2,3,\ldots). \tag{3.3}$$

Then $\lim \theta_n = q^2/2$. Let

$$B_n=\sigma\left(1-\frac{q}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}\right)-\sigma\left(1-\frac{q}{n}\right). \tag{3.4}$$

By the mean value theorem, there is a number ξ between $1-q/n$ and $1-q/n+\theta_n/n^2$ such that $B_n=(\theta_n/n^2)\sigma'(\xi)$. Hence

$$\begin{aligned} |nB_n| &\leqq (\theta_n/n)C/(1-\xi) \\ &\leqq \theta_n C/(q-\theta_n/n) \end{aligned} \tag{3.5}$$

and $\limsup |nB_n|\leqq qC/2$. Thus $\lim B_n=0$, that is

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sigma(e^{-q/n})-\sigma\left(1-\frac{q}{n}\right)\right\}=0. \tag{3.6}$$

It follows that Theorem (1.3) is implied by the similar theorem containing (1.5) in place of (1.31).

Before passing to generalizations of Theorems 1.2 and 1.3, we remark that, since $q/(1-t)$ takes all integer values from q upwards as t increases from 0 to 1, (1.21) implies (1.31). For if

$$\limsup_{t\to 1-} \left| \sum_{k=0}^{\infty} t^k u_k - \sum_{k=0}^{[q/(1-t)]} u_k \right| = H$$

and we set $t_n=1-q/n$ so that $q/(1-t_n)=n$, then

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} t_n^k u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \right| \leqq H;$$

but of course $\limsup_{n\to\infty} |F(t_n)|=H$ implies only $\limsup_{t\to 1} |F(t)| \geqq H$ unless further information about $F(t)$ is available. The connection between the generalizations of Theorems 1.2 and 1.3 is less close because the functions $n(t)$ which we shall introduce need not be increasing functions taking all sufficiently great integer values.

4. Generalization of Theorem 1.2. We now prove the following theorem which reduces to Theorem 1.2 when $n(t)$ is taken to be the function $[q/(1-t)]$.

Theorem 4.1. *Let $n(t)$ be a function, defined for $0<t<1$ and taking non-negative integer values, such that*

$$0<q_1=\liminf_{t\to 1} (1-t)n(t) \leqq \limsup_{t\to 1} (1-t)n(t)=q_2<\infty. \tag{4.11}$$

Then the relation

$$\limsup_{t\to 1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} t^k u_k - \sum_{k=0}^{n(t)} u_k \right| \leqq B \limsup_{n\to\infty} |nu_n| \tag{4.12}$$

holds for each series Σu_n of real or complex terms for which $\limsup |nu_n|<\infty$ *when B is the maximum of the two positive numbers $A(q_1)$ and $A(q_2)$. Moreover B is the best constant in the sense of Theorem* 1.2.

Let

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty} t^k u_k - \sum_{k=0}^{n(t)} u_k, \tag{4.2}$$

and let $x_n=nu_n$ and $\limsup |x_n|<\infty$. Then

$$y(t)=\sum_{k=1}^{n(t)} -\frac{1-t^k}{k} x_k + \sum_{k=n(t)+1}^{\infty} \frac{t^k}{k} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) x_k, \tag{4.21}$$

where

$$a_k(t)=\begin{cases} -(1-t^k)/k & (1\leqq k\leqq n(t)), \\ t^k/k & (k>n(t)). \end{cases} \tag{4.22}$$

Writing n for $n(t)$ at some times to simplify formulae, we obtain

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k(t)|=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-t^k}{k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{t^k}{k}$$

(4.23)
$$=\sum_{k=1}^{n}\int_t^1\beta^{k-1}d\beta+\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_0^t\beta^{k-1}d\beta$$

$$=\int_t^1\frac{1-\beta^n}{1-\beta}d\beta+\int_0^t\frac{\beta^n}{1-\beta}d\beta.$$

Transforming the integrals by the substitution $\beta=e^{-x/n}$ gives

(4.24)
$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k(t)|=\int_0^{n\log t^{-1}}\frac{1-e^{-x}}{x}\left\{\frac{x/n}{e^{x/n}-1}\right\}dx$$
$$+\int_{n\log t^{-1}}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\left\{\frac{x/n}{e^{x/n}-1}\right\}dx.$$

Since

(4.25) $\quad n(t)(1-t)-n(t)\log t^{-1}=n(t)(1-t)\{1-(1-t)^{-1}\log t^{-1}\},$

and the last factor in braces converges to 0 as $t\to 1$, it follows from (4.11), that

(4.26) $$\lim_{t\to 1}\{n(t)(1-t)-n(t)\log t^{-1}\}=0,$$

(4.27) $$q_1\leqq\liminf_{t\to 1} n(t)\log t^{-1}\leqq\limsup_{n\to\infty} n(t)\log t^{-1}\leqq q_2.$$

For each $x>0$, the quantity $(x/n)/(e^{x/n}-1)$ lies between 0 and 1 and converges to 1 as $n\to\infty$ and hence as $t\to 1$. Therefore, even though the limits of integration in (4.24) are functions of t, (4.27) enables us to employ a modification of the Lebesgue criterion of dominated convergence for taking limits under integral signs to obtain

(4.3) $$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k(t)|=\varepsilon_1(t)+\int_0^{n\log t^{-1}}\frac{1-e^{-x}}{x}dx+\int_{n\log t^{-1}}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx,$$

where $\varepsilon_1(t)\to 0$ as $t\to 1$. Using (4.26) and (4.11), we find from (4.3), that

$$(4.31)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}|a_k(t)|=\varepsilon_2(t)+\int_0^{(1-t)\,n(t)}\frac{1-e^{-x}}{x}\,dx+\int_{(1-t)\,n(t)}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

Thus,

$$(4.32)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}|a_k(t)|=\varepsilon_2(t)+A((1-t)n(t)),$$

where $A(q)$ is the function in (1.6) and (1.22). We interrupt the argument to remark that we could have written (4.23) in the form

$$(4.4)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}|a_k(t)|=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}+2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{t^k}{k}.$$

Using the fact that

$$(4.5)\qquad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=\gamma_n+\log n$$

then gives

$$(4.5)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}|a_k(t)|=\gamma_n+\log n+\log(1-t)+2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{t^k}{k}.$$

Transforming the last sum into an integral exactly as we did, beginning with (4.23), leads directly to (4.32) with $A(q)$ given by the expression in (1.22). Combining the two procedures gives an indirect proof of the formula (1.7) for Euler's constant.

The derivative $A'(q)=q^{-1}e^{-q}(e^q-2)$ shows that $A(q)$ is decreasing when $q<\log 2$ and increasing when $q>\log 2$. This implies that if $q_1\leqq x\leqq q_2$, and B is the maximum of $A(q_1)$ and $A(q_2)$ as in the statement of Theorem 4.1, then $A(x)\leqq B$. This fact, (4.11), and (4.32) imply that

$$(4.6)\qquad \limsup_{t\to 1}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k(t)|=B.$$

Moreover

$$(4.61)\qquad \lim_{t\to 1}a_k(t)=0\qquad (k=1,2,3,\ldots).$$

Because of (4.2) and (4.21), Theorem 4.1 now follows from the following lemma which was proved by Agnew [2]:

Lemma 4.7. *If $a_1(t), a_2(t), \ldots$ is a sequence of real or complex functions, defined over $0<t<1$, such that*

(4.71) $$\limsup_{t\to 1} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(t)| = M,$$

(4.72) $$\lim_{t\to 1} a_k(t) = 0 \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

then each bounded real or complex sequence x_n has a transform

(4.73) $$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\, x_k$$

such that

(4.74) $$\limsup_{t\to 1} |y(t)| \leqq M \limsup_{n\to\infty} |x_n|.$$

Moreover there is a sequence x_n, which is real if the functions $a_k(t)$ are real, such that $0<\limsup |x_n|<\infty$ and the members of (4.74) are equal.

5. A supplement to Theorems 1.2 and 4.1. The function $A(q)$ in (1.22) and (1.6) becomes infinite as $q\to 0$ and as $q\to\infty$. Hence, Theorems 1.2 and 4.1 would lead one to expect the following theorem to be true, except that one might perhaps expect only the weaker condition $\limsup |nu_n|<\infty$.

Theorem 5.1. *Let $n(t)$ be a function defined for $0<t<1$ and taking non-negative integer values, such that one or both of*

(5.11) $$\liminf_{t\to 1} (1-t)\, n(t) = 0,$$

(5.12) $$\limsup_{t\to 1} (1-t)\, n(t) = \infty$$

holds. Then there is a real series Σu_n such that $\limsup |nu_n| = 0$ *and*

(5.13) $$\limsup_{t\to 1} \Big| \sum_{k=0}^{\infty} t^k u_k - \sum_{k=0}^{n(t)} u_k \Big| = \infty.$$

Suppose first that (5.12) holds and choose a sequence $t_1, t_2, \ldots$ such that $0<t_p<1$, $t_p\to 1$, and

(5.21) $$\lim_{p\to\infty} (1-t_p)\, n(t_p) = \infty.$$

We proceed precisely as in the proof of Theorem 4.1 until (4.24) is reached, and then obtain

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(t)| > \int_0^{n \log t^{-1}} \frac{1-e^{-x}}{x} \left\{ \frac{x/n}{e^{x/n}-1} \right\} dx. \tag{5.22}$$

Since (5.21) implies that $\lim n(t_p) \log t_p^{-1} = \infty$, we conclude that, if H is a positive constant, then

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(t_p)| \geqq \int_0^{H} \frac{1-e^{-x}}{x} \left\{ \frac{x/n}{e^{x/n}-1} \right\} dx \tag{5.22}$$

for each sufficiently great p. As $p \to \infty$, $n = n(t_p) \to \infty$ and we obtain

$$\liminf_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(t_p)| \geqq \int_0^{H} \frac{1-e^{-x}}{x} dx. \tag{5.23}$$

Since the right side of (5.23) becomes infinite with H, it follows that

$$\limsup_{t\to 1} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(t)| = \infty. \tag{5.24}$$

In case (5.12) does not hold but (5.11) does, we can modify the argument, keeping the second instead of the first integral of (4.24) in the right member of (5.22), to obtain (5.24).

Theorem 5.1 is now implied by the following lemma which is well known in the theory of linear transformations.

Lemma 5.3. *If $a_1(t), a_2(t), \ldots$ is a sequence of real or complex functions, defined over $0 < t < 1$, such that*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(t)| < \infty \qquad (0 < t < 1), \tag{5.31}$$

$$\limsup_{t\to 1} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(t)| = \infty, \tag{5.32}$$

$$\lim_{t\to 1} a_k(t) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{5.33}$$

then there is a sequence x_n, which is real if the functions $a_k(t)$ are real, such that $\lim x_n = 0$ and

$$\limsup_{t\to 1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) x_k \right| = \infty. \tag{5.34}$$

6. Generalization of Theorem 1.3. The following theorem reduces to Theorem 1.3 when the sequence t_n is taken to be $t_n = 1 - q/n$.

Theorem 6.1. *Let t_n be a sequence of numbers such that $0 < t_n < 1$ and*

$$(6.11) \qquad 0 < q_1 = \liminf_{n\to\infty} (1 - t_n)n \leqq \limsup_{n\to\infty} (1 - t_n)n = q_2 < \infty.$$

Then the relation

$$(6.12) \qquad \limsup_{n\to\infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} t_n^k u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \right| \leqq B \limsup_{n\to\infty} |nu_n|$$

holds for each series Σu_n of real or complex terms for which $\limsup |nu_n| < \infty$ *when B is the maximum of the two positive numbers $A(q_1)$ and $A(q_2)$. Moreover B is the best constant in the sense of Theorem 1.2.*

It is possible to prove Theorem 6.1 by the procedure used to prove Theorem 4.1; only details in the formulae are changed. Instead of starting with (4.2), we now start with

$$(6.2) \qquad y_n = \sum_{k=0}^{\infty} t_n^k u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t_n) x_k$$

and obtain

$$(6.3) \qquad \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(t_n)| = B.$$

The conclusion then follows from a modification of Lemma 4.7 in which the $a_k(t)$ are defined for $t = t_1, t_2, t_3, \dots$ instead of $0 < t < 1$.

7. A supplement to Theorems 1.3 and 6.1. The following theorem supplements Theorems 1.3 and 6.1 as Theorem 5.1 supplements Theorems 1.2 and 4.1.

Theorem 7.1. *Let t_n be a sequence such that $0 < t_n < 1$ and one or both of*

$$(7.11) \qquad \liminf_{n\to\infty} (1 - t_n)n = 0,$$

$$(7.12) \qquad \limsup_{n\to\infty} (1 - t_n)n = \infty$$

holds. Then there is a real series Σu_n *such that* $\limsup |nu_n|=0$ *and*

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\sum_{k=0}^{\infty} t_n^k u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k\right| = \infty. \tag{7.13}$$

The proof of Theorem 7.1 is a modification of the proof of Theorem 5.1 just as the proof of Theorem 6.1 is a modification of the proof of Theorem 4.1. We omit details.

8. Remarks on Abel transforms. To save repeated statements, we understand that Σu_n always represents a series for which

$$\limsup_{n\to\infty} |nu_n| \leqq L, \tag{8.1}$$

L being a fixed positive number. As we have already remarked, the function $A(q)$ appearing in our theorems has the derivative $A'(q)=q^{-1}e^{-q}(e^q-2)$. Therefore $A(q)$ has a unique absolute minimum when $q=q_0=\log 2$. This minimum of $A(q)$ is known, see Agnew [1], p. 28, to be

$$A_0=A(q_0)=A(\log 2)=.9680448. \tag{8.2}$$

It is possible to choose a sequence t_n, *independent of the series* Σu_n such that

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\sum_{k=0}^{\infty} t_n^k u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqq A_0 L. \tag{8.3}$$

Theorem 1.3 shows that the sequence $t_n=1-(\log 2)/n$ will serve, and Theorem 6.1 shows that any sequence for which $\lim (1-t_n)n=\log 2$ will serve since in this case we have, in Theorem 6.1, $q_1=q_2=\log 2$ and $B=q(\log 2)$. Theorems 6.1 and 7.1 imply that A_0 is the least constant with the following property. It is possible to choose a sequence t_n, *independent of the series* Σu_n, such that (8.3) holds. This of course does not preclude the possibility that for some constant $A_1<A_0$ one may be able to choose a sequence t_n *depending upon* Σu_n such that

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\sum_{k=0}^{\infty} t_n^k u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqq A_1 L. \tag{8.4}$$

There are of course many series Σu_n for which such a possibility can be realized, but there are others for which it cannot be.

In fact, it was shown by Agnew [1] that if $A_1 < A_0$, then there is a real series Σu_n with bounded partial sums and with $\limsup |nu_n| = L = 1$ such that

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{\infty} t^k u_k \right) \geqq A_1 L \qquad (0 < t < 1).$$

For this series we have

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} t_n^k u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \right| \geqq A_1 L$$

for every sequence t_n such that $0 < t_n < 1$. It follows that A_0 is the least constant with the following property. It is possible to determine a sequence t_n, which may depend upon the series Σu_n, such that 8.3 holds.

9. Unsolved problems. Let Σu_n continue to stand for a series Σu_n for which $\limsup |nu_n| = L$. It is possible to choose a function $n(t)$ *independent of* Σu_n such that

$$\limsup_{t\to 1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} t^k u_k - \sum_{k=0}^{[n(t)]} u_k \right| \leqq A_0 L. \tag{9.1}$$

Theorem 1.2 shows that the function $n(t) = (\log 2)/(1-t)$ will serve, and Theorem 4.1 shows that any function for which $\lim (1-t)n(t) = \log 2$ will serve. Theorems 4.1 and 5.1 imply that A_0 is the least constant with the following property. It is possible to choose a sequence t_n, independent of Σu_n, such that 9.1 holds.

Here, the analogy with the preceding section ends. It is not known whether there is a constant B less than A_0 with the following property. It is possible to determine a function $n(t)$, which may depend upon the series Σu_n, such that

$$\limsup_{t\to 1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} t^k u_k - \sum_{k=0}^{[n(t)]} u_k \right| \leqq BL.$$

Calculations of Hadwiger [4], and very similar calculations of Agnew [1] involving series Σu_n for which $S_n = n^{i\theta} = e^{i\theta} \log n$, show that B fails to have the property if B is a certain constant with approximate value .4858. It is easy to show that if our attention were confined to real series, then the assertion involving B would hold with $B=0$. It is not known whether confining attention to series with bounded partial sums would influence the results.

Cornell University,
Ithaca, New York, USA.

REFERENCES

[1] R. P. Agnew, *Abel transforms of Tauberian series*, Duke Mathematical Journal 12 (1945), p. 27-36.

[2] R. P. Agnew, *Abel transforms and partial sums of Tauberian series*, Annals of Mathematics (2) 50 (1949), p. 110-117.

[3] H. Delange, *Sur les théorèmes inverses des procédés de sommation*, I, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (3) 67 (1950), p. 99-160.

[4] H. Hadwiger, *Über ein Distanztheorem bei der A-Limitierung*, Commentarii Mathematici Helvetici 16 (1944), p. 209-214.

SUR LES DÉFORMATIONS DE L'ESPACE BASÉ SUR LE GROUPE $\bar{x}=hx+a,\ \bar{y}=kx+h^m y+b$

Par W. ŚLEBODZIŃSKI (Wrocław)

1. Désignons par G_4 le groupe de transformations linéaires à quatre paramètres a, b, h, k

$$\bar{x}=hx+a, \quad \bar{y}=kx+h^m y+b,$$

et par E_2 l'espace affine à deux dimensions dont la géométrie est déterminée par G_4. Les équations de définition du groupe G_4 peuvent s'écrire

$$\bar{\omega}^1=\omega^1,\ \bar{\omega}^2=\omega^2,\ \bar{\omega}^3=\omega^3,\ \bar{\omega}^4=\omega^4, \tag{1}$$

où l'on a posé

$$\omega^1=\frac{dx}{u},\ \omega^2=-\frac{v\,dx}{u^{m+1}}+\frac{dy}{u^m},\ \omega^3=\frac{du}{u^m},\ \omega^4=-\frac{v\,du}{u^{m+1}}+\frac{dv}{u^m}, \tag{1'}$$

les lettres affectées d'une barre désignant ce que deviennent respectivement les formes ω^h, si l'on y remplace les variables x, y, u, v par $\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}$. Des équations (1′), on déduit les équations de structure du groupe G_4

$$d\omega^1+[\omega^3\omega^1]=0, \quad d\omega^2+[\omega^4\omega^1]+m[\omega^3\omega^2]=0. \tag{2}$$

On appelle *déformation de l'espace* E_2 une transformation ponctuelle T telle que deux morceaux infiniment petits, qui se correspondent par T, puissent se déduire l'un de l'autre, aux infiniment petits d'ordre deux près, par une transformation du groupe G_4 [1]). Les déformations de l'espace E_2 sont déterminées par le système tronqué déduit des équations (1)

$$\bar{\omega}^1=\omega^1, \quad \bar{\omega}^2=\omega^2.$$

[1]) [2]. Voir l'index placé à la fin de la Note.

Il est facile de montrer, au moyen des relations (2), que ce système de Pfaff est en involution, et que sa solution générale est donnée par les formules

$$\bar{x} = \varphi(x), \quad \bar{y} = \psi(x) + \varphi'^m(x) y, \tag{3}$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont deux fonctions arbitraires. On voit ainsi que les déformations de l'espace E_2 constituent un groupe infini de transformations à deux variables dépendantes de deux fonctions arbitraires d'un argument. Nous l'appellerons *groupe de déformations de l'espace* E_2, et nous le désignerons par Γ. Les invariants, par rapport à Γ, des objets géometriques de l'espace E_2 seront appelés leurs *invariants de déformation*.

2. Il est clair qu'une ligne courbe d'admet pas d'invariants de déformation, toute courbe de l'équation $y = f(x)$ pouvant être déformée en une autre courbe arbitraire par une transformation du groupe (3). En général, il n'en est pas de même d'une famille (F) de courbes, définie par l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{4}$$

Pour trouver les invariants de la famille (F) supposons que l'équation

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) \tag{5}$$

soit la transformée de l'équation (4) par la substitution (3). Si l'on y porte les expressions

$$d\bar{x} = \varphi' \, dx, \quad d\bar{y} = (\psi' + m\varphi'^{m-1}\varphi'' y) dx + \varphi'^m dy, \tag{6}$$

déduites de (3), et que l'on tient compte de l'hypothèse que les équations (4) et (5) soient équivalentes, on trouve

$$\bar{f} = \varphi'^{m-1} f + m\varphi'^{m-2}\varphi'' y + \frac{\psi'}{\varphi'}. \tag{7}$$

En calculant la différentielle $d\bar{f}$ au moyen de cette formule, on aura

$$\begin{aligned} \bar{f}'_{\bar{x}} d\bar{x} + \bar{f}'_{\bar{y}} d\bar{y} = \varphi'^{m-1}(f'_x dx + f'_y dy) + (m-1)\varphi'^{m-2}\varphi'' f dx + \\ + m(m-2)\varphi'^{m-3}\varphi''^2 y \, dx + m\varphi'^{m-2}\varphi'' dy + \left(\frac{\psi'}{\varphi'}\right)' dx. \end{aligned} \tag{8}$$

Si l'on y remplace les différentielles $d\bar{x}$ et $d\bar{y}$ par leurs expressions (6), et que l'on égale les coefficients de dy, on obtient

(9) $$\bar{f}'_{\bar{y}} = \sigma f'_y - \sigma',$$

où l'on a posé $\sigma = \frac{1}{\varphi'}$. La dérivation de cette égalité par rapport à y conduit à une suite illimitée de relations

(10) $$\begin{aligned} \bar{f}''_{\bar{y}^2} &= \sigma^{m+1} f''_{y^2}, \\ \bar{f}'''_{\bar{y}^3} &= \sigma^{2m+1} f'''_{y^3}, \\ \bar{f}^{(4)}_{\bar{y}^4} &= \sigma^{3m+1} f^{(4)}_{y^4}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Il faut dans les raisonnements suivants, distinguer deux cas: $m+1 \neq 0$ et $m+1=0$. Nous nous bornons ici à considérer seulement le premier, le second pouvant être traité de la même manière. Nous pouvons donc constater, en nous servant des relations (10), que l'expression

$$I_1 = (f'''_{y^3})^{\frac{1}{2m+1}} : (f''_{y^2})^{\frac{1}{m+1}}$$

est *un invariant de déformation du troisième ordre de la famille* (F). Il est évident que les mêmes relations permettent aussi de former une suite infinie d'invariants d'ordres 4,5,...

On a supposé ici que la dérivée f''_{y^2} n'est pas identiquement nulle. Si l'on avait $f''_{y^2}=0$, l'équation (4) serait linéaire, $\frac{dy}{dx} = P_y + Q$; il est facile de ce convaincre, au moyen de la formule (7), que cette équation peut être transformée en la suivante $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = 0$. On voit ainsi que l'équation linéaire n'a pas d'invariants, ses courbes intégrales pouvant être déformées en droites parallèles à l'axe x. Nous excluons ce cas de nos considérations qui suivent.

Reprenons maintenant l'équation (8). Si, après y avoir remplacé les différentielles $d\bar{x}$, $d\bar{y}$ par les expressions (6), l'on compare les coefficients de dx de deux membres, il vient

$$\bar{f}'_{\bar{x}} + \left(\frac{\psi}{\varphi'} + m\varphi'^{m-2}\varphi'' y\right)\bar{f}'_{\bar{y}} = \varphi'^{m-2} f'_x + (m-1)\varphi'^{m-3}\varphi'' f + \\ + m(m-2)\varphi'^{m-4}\varphi''^2 y + \frac{1}{\varphi'}\left(\frac{\psi'}{\varphi'}\right)'.$$

Cette relation, jointe aux formules (7) et (9), conduit à l'égalité

$$\bar{f}'_{\bar{x}}+\bar{f}\bar{f}'_{\bar{y}}=\varphi'^{m-2}(f'_x+ff'_y)+m\varphi'^{m-3}\varphi''f+m(m-2)\varphi'^{m-4}\varphi''^2y+\frac{1}{\varphi'}\left(\frac{\psi'}{\varphi'}\right)'.$$

En la dérivant deux fois par rapport à y, et en posant

$$M=f'_x+ff'_y,$$

on trouve

$$\frac{\partial^2\bar{M}}{\partial\bar{y}^2}\varphi'^{2m}=\varphi'^{m-2}\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+m\varphi'^{m-3}\varphi''f''_{y^2}.$$

Remplaçons, dans cette égalité, φ'' par l'expression

$$m\varphi''=\varphi'^2\bar{f}'_{\bar{y}}-\varphi'f'_y,$$

tirée de la relation (9); si l'on tient encore compte de la première des égalités (10), il viendra

$$\bar{M}''_{\bar{y}^2}-\bar{f}'_{\bar{y}}\bar{f}''_{\bar{y}^2}=\varrho^{m+2}(M''_{y^2}-f'_yf''_{y^2}).$$

En comparant cette équation à la première des relations (10), on s'aperçoit immédiatement que l'expression

$$I_2=\frac{M''_{y^2}-f'_yf''_{y^2}}{(f''_{y^2})^{\frac{m+2}{m+1}}}$$

est un second invariant de déformation du troisième ordre de la famille (F). Les formules, données plus haut, montrent aussi que I_1 et I_2 sont les seules invariant du troisième ordre, et que la famille de courbes (F) n'a pas d'invariants d'ordres inférieurs à trois.

3. Avec la famille (F), définie par l'équation (4), sont aussi liées, d'une manière invariante, deux formes différentielles linéaires. Il est facile de se convaincre, au moyen des formules (6), (7), et de la première des relations (10), que ce sont les formes

$$\tau^1=(f''_{y^2})^{\frac{1}{m+1}}dx,\quad \tau^2=(f''_{y^2})^{\frac{m}{m+1}}(dy-f\,dx). \tag{11}$$

Considérons maintenant un invariant arbitraire I de la famille (F); si, dans la formule

$$dI=I'_xdx+I'_ydy,$$

l'on substitue aux différentielles dx, dy leurs expressions tirées des équations (11), on aura

$$dI = D_1(I)\tau^1 + D_2(I)\tau^2, \tag{12}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} D_1(I) &= (f''_{y^2})^{-\frac{1}{m+1}}(I'_x + fI'_y), \\ D_2(I) &= (f''_{y^2})^{-\frac{1}{m+1}} I'_y. \end{aligned} \tag{13}$$

Les deux formes τ^1 et τ^2 étant évidemment indépendantes, on conclut de la relation (12), que les expressions (13) sont aussi invariantes vis-à-vis du groupe Γ. Nous voyons ainsi que les deux opérations différentielles D_1 et D_2 permettent de déduire, de chacun des invariants de déformation de la famille (F), une suite illimitée de nouveaux invariants.

4. La méthode employée dans le numéro précédent permet de former tous les invariants d'un ordre donné. Nous allons considérer le cas général, où, parmi les invariants de la famille (F), il y en a deux indépendants; nous les désignerons par J_1 et J_2. D'après la formule (12), on aura

$$dJ_i = D_1(J_i)\tau^1 + D_2(J_i)\tau^2 \qquad (i=1,2). \tag{14}$$

Les invariants J_1, J_2 étant par hypothèse indépendants, on peut poser

$$D_h(J_i) = \Phi_{hi}(J_1, J_2) \qquad (h, i=1,2). \tag{15}$$

Les équations (14) peuvent donc s'écrire

$$dJ_i = \Phi_{1i}\tau^1 + \Phi_{2i}\tau^2 \qquad (i=1,2).$$

Ces relations permettent de résoudre le problème de l'équivalence par rapport au groupe Γ de deux familles de courbes de l'espace E_2. En effet, supposons que l'on se donne une seconde famille $(\bar{F})$ de courbes, définie au moyen de l'équation $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y})$, et désignons par $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ ceux de ses invariants qui correspondent aux invariants J_1, J_2. Pour que les familles (F) et $(\bar{F})$ soient déformables l'une dans l'autre, il faut d'abord que les fonctions $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ soient indépendantes. Il résulte aussi de ce qui précède qu'il doit être

$$\bar{D}_h(\bar{J}_i) = \Phi_{hi}(\bar{J}_1, \bar{J}_2) \qquad (h, i=1,2), \tag{16}$$

les fonctions Φ_{hl} étant les mêmes que dans les formules (15). Nous allons montrer que ces conditions sont aussi suffisantes et que la transformation qui change la famille (F) en la famille $(\bar{F})$ est donnée par les relations

$$\bar{J}_h(\bar{x},\bar{y}) = J_h(x,y) \qquad (h=1,2). \tag{17}$$

En effet, en différentiant les équations (17), en appliquant les formules (14) et les formules analogues pour les différentielles $d\bar{J}_h$, on trouve, en vertu des formules (15) et (16), les relations

$$\Phi_{1l}(\bar{J}_1, \bar{J}_2)\bar{\tau}^1 + \Phi_{2l}(\bar{J}_1, \bar{J}_2)\bar{\tau}^2 = \Phi_{1l}(J_1,J_2)\tau^1 + \Phi_{2l}(J_1,J_2)\tau^2.$$

Si l'on tient compte des équations (17) et de l'hypothèse que le déterminant $|\Phi_{hl}(J_1,J_2)|$ soit différent de zéro, les fonctions J_1,J_2 étant indépendantes, il résulte de ces dernières équations

$$\bar{\tau}^1 = \tau^1, \quad \bar{\tau}^2 = \tau^2.$$

D'après les formules (11) ces équations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} &(\bar{f}''_{\bar{y}^2})^{\frac{1}{m+1}} d\bar{x} = (f''_{y^2})^{\frac{1}{m+1}} dx, \\ &(\bar{f}''_{\bar{y}^2})^{\frac{m}{m+1}} (d\bar{y} - \bar{f}\, d\bar{x}) = (f''_{y^2})^{\frac{m}{m+1}} (dy - f\, dx). \end{aligned} \tag{18}$$

Il résulte de la première d'entre-elles que la variable $\bar{x}$ doit s'exprimer au moyen de la seule variable x

$$\bar{x} = \varphi(x), \tag{19}$$

et que, par suite, on aura

$$(\bar{f}''_{\bar{y}^2})^{\frac{1}{m+1}} \varphi'(x) = (f''_{y^2})^{\frac{1}{m+1}}.$$

Si l'on tient compte de ces relations, la deuxième des équations (18) deviendra

$$d\bar{y} - \bar{f}\varphi' dx = \varphi'^m (dy - f dx),$$

ou

$$d\bar{y} = (\bar{f}\varphi' - f\varphi'^m) dx + \varphi'^m dy.$$

On en déduit les équations

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} = \bar{f}\varphi' - f\varphi'^m, \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = \varphi'^m.$$

La seconde d'entre-elles donne

$$\bar{y} = \psi(x) + \varphi'^m(x)y; \tag{20}$$

si l'on substitue cette expression dans la première équation, il viendra

$$\bar{f} = \varphi'^{m-1}f + m\varphi'^{m-2}\varphi''y + \frac{\psi'}{\varphi'},$$

conformément à la relation (7). La transformation, composée des formules (19) et (20), appartenant au groupe Γ, notre proposition est ainsi démontrée.

Remarque 1. Le cas $m+1=0$ peut être traité de la même manière que $m+1\neq 0$; remarquons seulement que dans ce cas la famille (F) admet un invariant du second ordre.

Remarque 2. Le problème de l'équivalence des équations (4) et (5) dans le cas particulier $m=0$ a été résolu par K. Żorawski [3].

Remarque 3. Il serait facile de montrer que tout groupe infini de transformations à deux variables peut être envisagé comme le groupe de déformations d'un espace affine spécial convenablement choisi; les équations de tous ces groupes ont été déterminées par E. Cartan [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Cartan, *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, Ann. Ecole Normale (3) 21 (1904), p. 153-206.

[2] E. Cartan, *Problème général de la déformation*, CR Congrès Inter. Math., Strasbourg 1920, p. 397-406.

[3] K. Żorawski, *Przyczynek do teorii zmiany zmiennych w równaniach różniczkowych rzędu pierwszego*, Rozprawy Akad. Um. Wydz. Mat.-Przyr. (2) 26 (1893), p. 67-99.

ON THE THEOREM OF GELFAND-MAZUR

By M. H. Stone (Chicago, Illinois)

Let A be a topological linear algebra over the complex field Γ. The theorem of Gelfand-Mazur[1]) states that, if A is a Banach space and a division algebra, then A is isomorphic to Γ. Arens[2]) has extended this result to the case where A is a convex linear space, not necessarily complete, and a division algebra with continuous inversion. The proofs given by Gelfand and Arens are simple applications of the theorem of Liouville for entire functions. In Arens's version the proof runs as follows: if A contains some element a which is not a complex multiple of its unit e, then the complex function h defined by $h(\lambda)=g[(a-\lambda e)^{-1}]$, where $\lambda \in \Gamma$ and g is a linear functional such that $g(a^{-1})\neq 0$, is differentiable and hence entire; as h vanishes at infinity Liouville's theorem shows that h vanishes identically, contradicting the fact that $h(0)=$ $=g(a^{-1})\neq 0$; and thus A consists of the elements λe, $\lambda \in \Gamma$, alone. Mazur's proof, which appears to rest much more upon algebraic reasoning, is not available in full.

Our purpose here is to offer a proof which, though in essence a variant of the Gelfand-Arens proof, avoids any direct appeal to complex function theory and thus has a more algebraic character. Our discussion falls short of the generality attained by Arens, since we add to his requirements by as-

---

[1]) See I. Gelfand, Mat. Sbornik 9 (1941), p. 3-24, and S. Mazur, C. R. Paris 207 (1938), p. 1025-1027.

[2]) See R. Arens, Bulletin of the American Mathematical Society 53 (1947), p. 623-630. Arens gives a concise account of the principal elementary applications of the result quoted, including those to the characterization of quaternions.

suming that A is complete. It would be of interest, perhaps, to modify our method so as to eliminate this additional assumption.

If A contains an element a which is not a complex multiple of the unit e, the function f which carries $\lambda \in \Gamma$ into $a(a-\lambda e)^{-1} \in A$ is continuous and vanishes at infinity, in the sense that $\lim_{|\lambda| \to \infty} f(\lambda)=0$. A function g of two real variables r and t, where $0 \leqslant r < +\infty$ and $0 \leqslant t \leqslant 1$, is defined by putting $g(r,t)=f(re^{2\pi it})$; this function is jointly continuous in its arguments and $\lim_{r\to+\infty} g(r,t)=0$ uniformly in t. The algebraic part of our proof ests upon the identity

$$(1) \qquad a^n(a^n-r^n)^{-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(r\omega_k)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(r,\frac{k}{n}\right),$$

where the numbers $\omega_k=e^{2\pi i(k/n)}$ $(k=0,1\ldots,n-1)$ are the n^{th} roots of unity arranged in the order of increasing arguments. The analytic part consists essentially in the observation that because A is a complete convex linear space the identity (1), in which the last term is clearly a Riemann sum involving g as a function of t, implies the existence and continuity of the function h given by $h(r)=\lim_{n\to\infty} a^n(a^n-r^n)^{-1}$, $r\geqslant 0$. The standard methods for treating Riemann sums easily yield a direct demonstration of this observation. While we shall omit the details, it is suggestive to observe that $h(r)$ is in fact the Riemann integral $\int_0^1 g(r,t)\,dt$ and is expressible for $r>0$ as $\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} f(\lambda)\,d\lambda/\lambda$. We need to take note of the relations $h(0)=e$ and $\lim_{r\to+\infty} h(r)=0$, the first of which is evident and the second of which will be discussed briefly in order to illustrate the kind of argument required to carry through the analytic part of our proof. If U is any neighborhood of 0 in A, then there is a closed convex neighborhood V of 0 such that $V\subset U$. For all sufficiently large values of r we have $g(r,t)\in V$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Because V is convex, it contains the Riemann sum above, and hence $a^n(a^n-r^n)^{-1} \in V$. Since V was taken to be closed, passage to the limit yields $h(r) \in V$, for all sufficiently large values of r; in other words, $\lim_{r\to+\infty} h(r)=0$. We now show that, if $h(r_0)\neq 0$, then $h(r)=e$ for $r<r_0$. From (1) and the assumption that inversion is continuous in A we see that $r_0^n a^{-n}=$ $=e-[a^n(a^n-r_0^n)^{-1}]^{-1}$ tends (as n becomes infinite) to the limit $e-[h(r_0)]^{-1}$. If $r<r_0$, we therefore have $\lim_{n\to\infty} r^n a^{-n}=$ $=\lim_{n\to\infty}(r/r_0)^n \lim_{n\to\infty} r_0^n a^{-n}=0$ and hence $h(r)=\lim_{n\to\infty}(e-r^n a^{-n})^{-1}=e$. The properties which we have verified for h are clearly inconsistent: they show that the set where $h(r)=0$ is a closed interval $r_0\leqslant r<+\infty$ with $r_0>0$ and that $h(r)=e$ on the complementary interval $0\leqslant r<r_0$; but since h is continuous, the set where $h(r)=e$ is closed. This contradiction shows that A consists of complex multiples of e alone, as we wished to prove.

It is easy to derive from this result a treatment of the case where the topology of A is given by a norm such that $\|xy\|\leqslant\|x\|\|y\|$ but A is not assumed to be complete. The completion of A is a Banach algebra $\bar{A}$ in which A is an everywhere dense division subalgebra. If $\bar{M}$ is an arbitrary maximal ideal in $\bar{A}$ the quotient-algebra $\bar{A}/\bar{M}$ is a Banach division algebra [3]) and by the result above consists of complex multiples of its unit $\bar{e}$. The natural homomorphism $\bar{A}\to\bar{A}/\bar{M}$ carries A *isomorphically* into $\bar{A}/\bar{M}$ since the difference of distinct elements in A has an inverse and therefore cannot be an element of $\bar{M}$. It is then easy to see that A consists of complex multiples of its unit, since if $a \in A$ is carried into $\lambda\bar{e} \in \bar{A}/\bar{M}$, then $\lambda e \in A$ is carried into $\lambda\bar{e}$ and hence $a=\lambda e$.

---

[3]) See Gelfand, loc. cit., for the now familiar details.

QUELQUES NOUVEAUX THÉORÈMES DE FERMETURE

Par S. MANDELBROJT (Paris).

Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur la droite entière R dont toutes les dérivées appartiennent, sur R, à L:

$$\|f^{(n)}\| = \int |f^{(n)}(x)|\, dx < \infty \qquad (n \geqslant 0);$$

(nous écrivons $\int$ pour $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$). $\{M_n\}$ étant une suite positive, l'ensemble de toutes les fonctions f telles que

$$\|f^{(n)}\| \leqslant M_n \qquad (n \geqslant 0)$$

sera appelé *classe* $L\{M_n\}$. Soit, d'autre part, g une fonction appartenant, sur R, à L. Dans un travail récent [3] nous avons indiqué des conditions portant, à la fois, sur la suite $\{M_n\}$ et sur les ensembles respectifs des zéros des transformées de Fourier de f et de g (f appartenant à $L\{M_n\}$) pour que toute translatée de f soit une limite, dans la topologie de L, des combinaisons linéaires finies des dérivées successives de f et des translatées de g.

Si $\varphi \in L$ (au cours de tout ce travail L désignera la classe des fonctions de module intégrable sur R), nous désignerons par $S(\varphi)$ la transformée de Fourier de φ, c'est-à-dire

$$S(\varphi) = \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(x) e^{-iux}\, dx.$$

Nous désignerons par $\Omega(\varphi)$ l'ensemble des zéros de $S(\varphi)$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels u' tels que $\Phi(u') = 0$. Si donc nos conditions, portant sur $\{M_n\}$, $\Omega(f)$, $\Omega(g)$ ($f \in L\{M_n\}$, $g \in L$), sont satisfaites, à tout $a > 0$ et à tout $\varepsilon > 0$ correspondent un entier n, des constantes réelles $\xi_0,\dots,\xi_n$ et des constantes réelles ou complexes $a_0,\dots,a_n$, $b_0,\dots,b_n$, tels que:

$$\left\|f(x+a)-\sum_0^n\left(a_\nu f^{(\nu)}(x)+b_\nu g(x+\xi_\nu)\right)\right\|$$

$$=\int\left|f(x+a)-\sum_0^n\left(a_\nu f^{(\nu)}(x)+b_\nu g(x+\xi_\nu)\right)\right|dx<\varepsilon.$$

Désignons par $\tau(f)$ la fermeture, dans la topologie de L, des combinaisons linéaires des translatées de f. $\tau(f)$ est donc l'ensemble de toutes les fonctions φ de L telles que la propriété suivante est satisfaite: à tout $\varepsilon>0$ correspondent un entier m, des constantes réelles $a_1,a_2,\dots,a_m$ et des constantes réelles ou complexes $c_1,c_2,\dots,c_m$, tels que

$$\left\|p(x)-\sum_1^m c_\nu f(x+a_\nu)\right\|<\varepsilon.$$

Il est clair que les conditions mentionnées sont aussi suffisantes pour que toute fonction φ de $\tau(f)$ appartienne à la fermeture des combinaisons linéaires de la forme

$$\sum_0^n\left(a_\nu f^{(\nu)}(x)+b_\nu g(x+\xi_\nu)\right).$$

Les théorèmes fournissant ces conditions nous ont permis, en particulier, de résoudre le problème d'approximation polynômiale (avec un „poids") sur un ensemble fermé quelconque, situé sur R, ainsi que le problème d'unicité des moments lorsque le spectre de la distribution est placé sur un ensemble fermé quelconque, situé sur R.

Le but de ce travail est de généraliser les résultats précédemment obtenus en remplaçant la suite de toutes les dérivées de f par une suite partielle de ces dérivées. Avant de pouvoir énoncer notre théorème principal, il nous faut introduire quelques notations préliminaires.

$\{\nu_n\}$ étant une suite d'entiers positifs, désignons par $N(t)$ $(t>0)$ le nombre de ν_n inférieurs à t

$$N(t)=\sum_{\nu_n<t}1,$$

et posons $D(t)=N(t)/t$. Les fonctions

$$D^\bullet(t)=\overline{\text{borne}}_{x\geqslant t}\, D(x), \quad D_\bullet(t)=\underline{\text{borne}}_{x\geqslant t}\, D(x)$$

seront appelées respectivement *fonction de densité supérieure* et *fonction de densité inférieure* de $\{\nu_n\}$, et les quantités

$$D^\bullet=\lim_{t=\infty} D^\bullet(t)=\overline{\lim_{t=\infty}}\, D(t), \quad D_\bullet=\lim_{t=\infty} D_\bullet(t)=\underline{\lim_{t=\infty}}\, D(t)$$

seront appelées respectivement *densité supérieure* et *densité inférieure* de $\{\nu_n\}$.

$\{M_n\}$ $(n\geqslant 0)$ étant une suite de nombres positifs, la fonction

$$C(\sigma)=\overline{\text{borne}}_{n\geqslant 0}\,(n\sigma-\log M_n)$$

caractérise d'une manière assez précise la classe $L\{M_n\}$ (voir [1] et [3]). Cette fonction sera appelée la *dérivabilité* de $L\{M_n\}$.

E étant un ensemble situé sur R et h une constante positive, posons

$$\underset{h}{E}=\bigcup_{x\in E}[xe^{-h}, xe^{h}],$$

où $[a,b]$ désigne un intervalle fermé, positif ou négatif (si $a>b$).

Nous désignerons par V_1 la classe des fonctions $u(x)$ $(x\in R)$ bornées supérieurement, bornées inférieurement par un nombre positif (les fonctions u sont donc en particulier positives) et à variation bornée. V_2 est la classe de toutes les fonctions $u(x)$ bornées supérieurement, bornées inférieurement par un nombre positif, possédant une dérivée continue $u'(x)$ telles que $xu'(x)$ soit à variation bornée et telles que $\int|x|[u'(x)]^2dx<\infty$. Si donc $u\in V_2$, les fonctions

$$U_1(\sigma)=u(e^\sigma), \quad U_2(\sigma)=u(-e^\sigma)$$

sont à variation bornée, et l'on a

$$\int_0^\infty [U_1'(\sigma)]^2d\sigma<\infty, \quad \int_0^\infty [U_2'(\sigma)]^2d\sigma<\infty.$$

$\varphi(x)$ étant une fonction positive, l'égalité $\int^{\infty}\varphi(x)\,dx=\infty$ indique que, pour a suffisamment grand et $A>a$, l'intégrale $\int_a^A\varphi(x)\,dx$ existe, et

$$\lim_{A=\infty}\int_a^A\varphi(x)\,dx=\infty.$$

Le symbole $\int^{\sigma}\varphi(x)\,dx$ désigne $\int_a^{\sigma}\varphi(x)\,dx$, où a est suffisamment grand et indépendant de σ.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant:

Théorème I (principal). *Soient $f\in L\{M_n\}$, $g\in L$, et soit $\{\nu_n\}$ $(n\geqslant 1)$ une suite d'entiers positifs dont la fonction de densité inférieure est $D_\bullet(t)$ et dont la densité inférieure $D_\bullet$ est supérieure à $1/2$. Posons*

$$E=\Omega(g)\cap\overline{C\Omega(f)}\,^{1)},\tag{1}$$

et soit $\varphi(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble $C(\underset{h}{E})$, où h est une constante supérieure à $1-D_\bullet$. Soit, enfin, $C(\sigma)$ la dérivabilité de la classe $L\{M_n\}$.

S'il existe une fonction $u(x)$ appartenant soit à V_1, soit à V_2, vérifiant, lorsque l'un des points x, $-x$ appartient à $\underset{h}{E}$,

$$u(x)<\varphi(x)+D_\bullet[C(\log|x|)]-\tfrac{1}{2},\tag{2}$$

et telle que

$$\int^{\infty}C(\sigma)\,e^{-\int^{\sigma}\frac{d\tau}{u(e^{\tau})+u(-e^{\tau})}}\,d\sigma=\infty,\tag{3}$$

alors, quelle que soit la constante a, $f(x+a)$ est une limite, dans L, des expressions de la forme

$$a_0f(x)+\sum_1^n\left(a_kf^{(\nu_k)}(x)+b_kg(x+\xi_k)\right).\tag{4}$$

---

[1]) CA désigne l'ensemble complémentaire, par rapport à R, de l'ensemble A. $\overline{A}$ désigne la fermeture de A.

A étant un ensemble fermé, décomposons le selon le théorème de Cantor: $A = RA \cup PA$, où RA est un ensemble dénombrable et où PA est un ensemble parfait (ou vide), PA étant, par conséquent, l'intersection des ensembles dérivées de A de tous les ordres finis ou transfinis.

On peut ajouter au théorème précédent le suivant:

Théorème II. *Si $RE \subset \Omega(f)$, on peut remplacer, dans l'énoncé du théorème principal, l'ensemble E par l'ensemble*

$$E_1 = E \cap C(RE). \tag{5}$$

Les théorèmes I et II sont essentiellement basés sur le lemme ci-dessous:

Lemme I. *Si les hypothèses du théorème I sont satisfaites, toute fonction $h(y)$ essentiellement bornée sur R qui vérifie les relations*

$$\int f(-y)\,h(y)\,dy = 0, \tag{6}$$

$$\int f^{(\nu_n)}(-y)\,h(y)\,dy = 0 \qquad (n \geqslant 1), \tag{7}$$

$$\int g(x-y)\,h(y)\,dy = 0, \tag{8}$$

vérifie aussi la relation

$$\int f(x-y)\,h(y)\,dy = 0. \tag{9}$$

Cette conclusion reste encore vraie si, au lieu de supposer les hypothèses du théorème I satisfaites, l'on suppose que $RE \subset \Omega(f)$ et que les hypothèses du théorème I soient modifiées par le fait que E est remplacé par E_1 (donné par (5)).

Un lemme semblable, où $\nu_n = n$, a été démontré dans notre Mémoire cité [3]; mais, dans le cas présent, la démonstration est plus difficile car elle nécessite non seulement un principe de Watson, bien généralisé (comme c'est le cas dans [3], voir aussi [4]), mais encore quelques considérations sur les séries asymptotiques, semblables à celles que j'ai utilisées dans mes travaux récents sur les théorèmes d'unicité ([1], [2]).

Posons

$$p(x) = \int f(x-y)\,h(y)\,dy. \tag{10}$$

On voit immédiatement, d'après les hypothèses du lemme, que

(11) $$p(0) = p^{(\nu_n)}(0) = 0 \qquad (n \geqslant 1),$$

(12) $$|p^{(n)}(x)| \leqslant A M_n \qquad (n \geqslant 0).$$

De même, d'après (8),

(13) $$\int g(x-y)\, p(y)\, dy = 0.$$

Introduisons maintenant la fonction

(14) $$\Phi(\zeta) = \int_{-\infty}^{0} e^{-ix\zeta} p(x)\, dx \qquad (\zeta = \xi + i\eta).$$

Cette intégrale définit $\Phi(\zeta)$ pour $\eta > 0$. Si E n'est pas la droite entière, il résulte, d'un théorème de Carleman et d'un théorème établi par l'auteur en collaboration avec Agmon (pour la bibliographie, voir la démonstration du lemme III dans [3]) que le prolongement analytique de $\Phi(\zeta)$ est une fonction holomorphe et uniforme dans le domaine Δ_E obtenu en enlevant du plan l'ensemble E. Dans le demi-plan inférieur, $\eta < 0$, on a alors

(15) $$\Phi(\zeta) = -\int_{0}^{\infty} e^{-ix\zeta} p(x)\, dx.$$

En intégrant (14) m fois par parties, on obtient, pour $\eta > 0$

(16) $$\begin{aligned}\Phi(\zeta) &= ip(0)\zeta^{-1} + p'(0)\zeta^{-2} + \dots - (-i)^m p^{(m-1)}(0)\zeta^{-m} \\ &\quad + (-i)^m \zeta^{-m} \int_{-\infty}^{0} e^{-ix\zeta} p^{(m)}(x)\, dx,\end{aligned}$$

et une égalité analogue (en intégrant par parties (15)) pour $\eta < 0$.

C'est ici qu'apparaît la différence essentielle entre la démonstration actuelle et celle du théorème plus simple de [3]. Dans le second membre de la relation (20) de [3] (qui correspond à la relation (16) que nous venons d'écrire) n'intervient qu'une intégrale. C'est donc ici que commencent les difficultés propres aux hypothèses actuelles.

Soit $\{q_n\}$ $(n \geqslant 1)$ la suite d'entiers positifs, complémentaire à la suite $\{\nu_n\}$ par rapport à celle de tous les entiers positifs. D'après (11) et (16), on a, pour $q_n < q \leqslant q_{n+1}$, $\eta > 0$,

$$(17) \qquad \Phi(\zeta) = \sum_{1}^{n} p^{(q_k)}(0)\zeta^{-q_k-1} + (-i)^q \zeta^{-q} \int_{-\infty}^{0} e^{-ix\zeta} p^{(q)}(x)\,dx,$$

et une égalité analogue pour $\eta < 0$.

On a ainsi, dans Δ_E et en vertu de (12) (nous éliminons le cas, où $E = R$, car alors la démonstration du théorème s'obtient facilement en simplifiant plusieurs points du raisonnement qui suit et en opérant séparément pour $\eta > 0$ et $\eta < 0$),

$$(18) \qquad \left|\Phi(\zeta) - \sum_{1}^{n} p^{(q_k)}(0)\zeta^{-q_k-1}\right| \leqslant \frac{AM_q}{|\zeta|^q |\eta|} \qquad (q_n < q \leqslant q_{n+1}).$$

Soit $h' < h$, un nombre positif suffisamment petit pour que l'ensemble, obtenu en enlevant du plan ζ l'ensemble $\bigcup_{\xi \in E} \Delta(\xi, h')$, où $\Delta(\xi, h')$ est le carré de côtés parallèles aux axes et égaux à h', soit un domaine. Désignons par $\Delta_E(h')$ ce domaine. Si l'origine n'appartient pas à E, hypothèse qui ne restreint pas la généralité (car on se ramène à ce cas-ci en remplaçant éventuellement f et g respectivement par $f(x)e^{-ix\alpha}$, $g(x)e^{-ix\alpha}$, où $\alpha \in CE$), on voit, par un raisonnement analogue à celui qui a servi à démontrer l'inégalité (35) de [3], qu'il existe une constante $B = B(h')$ telle qu'on ait, dans la partie de $\Delta_E(h')$ pour laquelle $|\zeta| \geqslant h'$

$$(19) \qquad \left|\Phi(\zeta) - \sum_{1}^{n} p^{(q_k)}(0)\zeta^{-q_k-1}\right| \leqslant \frac{BM_q}{(|\zeta| - h')^q} \qquad (q_n < q \leqslant q_{n+1}).$$

Posons $\zeta = -ie^s$, $s = \sigma + it$, et soit

$$H(s) = \Phi(-ie^s) - p^{(q_1)}(0)\, i^{q_1+1} e^{-q_1 s}.$$

Soit $D(h', a)$ le domaine du plan s, obtenu en excluant de ce dernier les points $s = \sigma + it$ suivants $(a > h')$:

$$e^\sigma \in \underset{h'}{E}, \quad 2k\pi < \operatorname{arc\,cos}(e^{-a-\sigma}) \leqslant t \leqslant \operatorname{arc\,cos}(-e^{-a-\sigma}) < (2k+1)\pi,$$

$$-e^\sigma \in \underset{h'}{E}, \quad (2k-1)\pi < \operatorname{arc\,cos}(-e^{-a-\sigma}) \leqslant t \leqslant \operatorname{arc\,cos}(e^{-a-\sigma}) < 2k\pi.$$

Il est évident, d'après (18) et (19), qu'on a dans $D(h',a)$, pour a assez grand et $q_n < q \leqslant q_{n+1}$,

$$|H(s) - \sum_2^n p^{(q_k)}(0) i^{q_k+1} e^{-q_k s}| < C^q M_q e^{-(q-1)\sigma+a},$$

où C est une constante ne dépendant que de h'. Nous écrirons encore cette inégalité sous la forme

$$(20) \qquad |H(s) - \sum_1^n d_k e^{-\lambda_k s}| < C^q M_q e^{-(q-1)\sigma+a} \quad (\lambda_n \leqslant q < \lambda_{n+1}).$$

où l'on a posé $\lambda_n = q_{n+1}$ $(n \geqslant 1)$, $d_k = p^{(q_{k+1})}(0) i^{q_{k+1}+1}$.

Nous supposons d'ailleurs que la suite $\{q_n\}$ (donc la suite $\{\lambda_n\}$) est infinie, car, dans le cas contraire, nous serons facilement conduits au théorème déjà établi dans [3] $(\nu_n = n)$. Posons

$$\Lambda_m(r) = \prod_{k \neq m} \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_k^2}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p^{(m)} r^{2p},$$

$$L_m(r) = \int_0^\infty e^{-ur} \Lambda_m(r)\, dr.$$

En posant

$$H_n(s) = H(s) - \sum_1^n d_k e^{-\lambda_k s},$$

et

$$H_{n,m}(s) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p c_p^{(m)} H_n^{(2p)}(s)$$

pour $m \leqslant n$, on voit facilement (voir, par exemple [1]) que

$$H_{n,m}(s) = H_m^*(s) - d_m \Lambda_m(i\lambda_m) e^{-\lambda_m s}$$

où

$$H_m^*(s) = \sum (-1)^p c_p^{(m)} H^{(2p)}(s).$$

La fonction $H_{n,m}(s)$ est donc indépendante de n pour $n \geqslant m$.

Soit $D_\lambda^\bullet(t)$ la fonction de densité supérieure de $\{\lambda_n\}$, et $D_\lambda^\bullet$ la densité supérieure de cette suite. Il est clair que $D_\lambda^\bullet + D_\bullet = 1$, $D_\lambda^\bullet(t) + D_\bullet(t) \leqslant 1$. Posons

$$A_m(s) = H_m^*(s) - d_m \Lambda_m(i\lambda_m) e^{-\lambda_m s}.$$

En appliquant le théorème de Cauchy pour évaluer $A^{(2p)}(s)$ d'après les valeurs que prend $A(s)$ sur la circonférence du cercle $C(s, \pi R)$ — cercle de centre s et de rayon πR — on voit que, si $R > D^{\bullet}_{\lambda}$ et $C(s,\pi R) \subset D(h',a)$, alors

$$|A_m(s)| \leqslant \pi R L_m(\pi R)\, C^q M_q\, e^{a-(q-1)(\sigma-\pi R)}$$

avec $q \geqslant \lambda_m$.

Ainsi, si $C\big(s, \pi D^{\bullet}_{\lambda}(C(\sigma))\big) \subset D(h',a)$, avec $\sigma > \sigma_0$, où σ_0 est suffisamment grand, on a

$$|A_m(s)| \leqslant \pi R L_m[\pi D^{\bullet}_{\lambda}(C(\sigma))]\, e^a e^{\sigma-\pi R} e^{-C(\sigma-d)},$$

d étant une constante. Or, $\log L_m[\pi D^{\bullet}_{\lambda}(C(\sigma))] = o(C(\sigma))$ $(\sigma \to \infty)$ (voir [1]); l'inégalité précédente permet donc d'écrire:

$$(21) \qquad |A_m(s)| \leqslant e^a\, e^{-A_1 C(\sigma-d)},$$

où A_1 est une constante positive, et où σ est grand.

Posons

$$G^{(a)}_1(\sigma) = u(e^{\sigma}) - \pi^{-1} \operatorname{arc\,sin}\, (e^{-a-\sigma}),$$

$$G^{(a)}_2(\sigma) = u(-e^{\sigma}) - \pi^{-1} \operatorname{arc\,sin}\, (e^{-a-\sigma}),$$

et désignons par P_a le domaine défini par $-\pi G^{(a)}_2(\sigma) < t < \pi G^{(a)}_1(\sigma)$, $\sigma > \sigma_1$, où σ_1 est choisi suffisamment grand.

On peut alors affirmer que $A_m(s)$ est une fonction holomorphe dans P_a; dans ce domaine, on a l'inégalité (21), et (d'après les hypothèses)

$$\int^{\infty} C(\sigma - d)\, e^{-\int^{\sigma} \frac{d\tau}{G(\tau)}}\, d\sigma = \infty,$$

où $G(\sigma) = G^{(a)}_1(\sigma) + G^{(a)}_2(\sigma)$. Etant données les propriétés des fonctions $G^{(a)}_1(\sigma)$, $G^{(a)}_2(\sigma)$ (semblables à celles de $u(e^{\sigma})$, $u(-e^{\sigma})$), on voit, d'après un théorème établi dans [4] (qui généralise aux domaines non symétriques et aux frontières moins régulières un théorème établi par l'auteur et G. Mac-Lane, voir par exemple [1], et aussi un travail de Reiter, non publié, cité dans [4]) que $A_m(s) \equiv 0$, c'est-à-dire que

$$H^*_m(s) = d_m A_m(i\lambda_m)\, e^{-\lambda_m s}.$$

On constate aussi, en partant de (19), avec $n=1$, qu'il existe une constante $R > D_\lambda^2$ telle que, dans le domaine P_a° formé par les cercles $C(\sigma, \pi R)$ (centre σ, rayon πR) avec $\sigma \geqslant -a$, on ait

$$|H_m^*(s)| \leqslant Q L_m(\pi R) e^{a-(q-1)\sigma},$$

où Q est une constante.

On peut donc écrire aussi

$$|d_m A_m(i\lambda_m)| e^{\lambda_m a} \leqslant Q L_m(\pi R) e^{q_1 a} \qquad (m \geqslant 1),$$

et, en faisant tendre a vers $+\infty$, on obtient $d_m = 0$ (car $\lambda_m > q_1$). Ainsi donc $p^{(n)}(0) = 0$ pour $n \neq q_1$. C'est-à-dire que les relations (7) peuvent être remplacées par l'ensemble des relations

$$\int f^{(n)}(-y) h(y) dy = 0 \qquad (n \neq q_1).$$

Le théorème établi dans [3] (avec un léger changement, facile à effectuer) prouve alors que (9) a lieu. Notre lemme est ainsi démontré en supposant que $\varphi(x)$ est la fonction caractéristique de $C(E)_h$. Le passage du cas E au cas E_1 se fait d'une manière parfaitement analogue à celle utilisée dans [3].

On passe facilement du lemme aux théorèmes I et II en utilisant un théorème classique de Banach-Riesz.

En calquant un raisonnement que nous avons fait dans [3] et [4], le lecteur trouvera facilement des conditions portant sur la fonction F et sur l'ensemble fermé E pour que toute fonction $H(u)$, continue sur R et vérifiant la condition $\lim_{|u|=\infty} H(u) = 0$ puisse être approchée sur E par des expressions de la forme $P(u)F(u)$, où $P(u)$ est un polynôme de la forme $a_0 + a_1 u^{\nu_1} + \ldots + a_n u^{\nu_n}$, c'est-à-dire, pour qu'à tout $\varepsilon > 0$ corresponde un polynôme $P(u)$, de la forme mentionnée, tel qu'on ait $|H(u) - P(u)F(u)| < \varepsilon$ sur E. On retrouvera d'ailleurs un théorème classique de S. Bernstein si l'on pose $E = R$, $\nu_n = n$ $(n \geqslant 1)$.

On pourra aussi indiquer des conditions (toujours en calquant les méthodes de [4]) pour que, si le problème des moments E (le spectre de la distribution V est sur E)

$$\int t^{\nu_n} dV = m_n \quad \int dV = m_0 \qquad (n \geqslant 1)$$

admet une solution, celle-ci soit (substantiellement) unique.

Les deux problèmes ont été résolus dans notre Mémoire [3] pour le cas $\nu_n = n$ $(n \geqslant 1)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Mandelbrojt, *Sur une inégalité fondamentale*, Annales de l'Ecole Normale Supérieure 63 (1946), p. 351.

[2] S. Mandelbrojt, *Théorèmes d'unicité*, Annales de l'Ecole Normale Supérieure 65 (1948), p. 101.

[3] S. Mandelbrojt, *Théorèmes généraux de fermeture*, Journal d'Analyse Mathématique 1 (1951), p. 180.

[4] S. Mandelbrojt, *General Theorems of closure*, Monograph in Mathematics, The Rice Institute Pamphlet 38 (1951).

UN THÉORÈME SUR LA COMPACTIFICATION

Par B. Knaster (Wrocław)

1. Généralités. D'après un théorème de compactification, dû à Hurewicz [1]), tout espace métrique séparable X de dimension $n \geqslant 0$ se laisse compactifier sans altérer sa dimension. Plus précisément, X se laisse loger topologiquement dans le cube-unité d'un espace euclidien à r dimensions [2]) de façon que la fermeture $\overline{X}$ y soit de la même dimension que X l'était:

$$(1) \qquad \dim(\overline{X}) = \dim(X).$$

Quant aux points de $\overline{X} - X$, l'ensemble $\overline{X}$ y est de dimension n au plus:

$$(2) \qquad \dim_p(\overline{X}) \leqslant \dim(X) \quad \text{pour tout} \quad p \in \overline{X} - X.$$

Il y a cependant des considérations [3]) qui exigent l'existence d'un sur-ensemble compact $\overline{X}^*$ de X ayant, comme $\overline{X}$, la propriété

$$(1^*) \qquad \dim_p(\overline{X}^*) = \dim(X) \quad \text{pour tout} \quad p \in X,$$

mais associée à la suivante, juste opposée à (2):

$$(2^*) \qquad \dim_p(\overline{X}^*) > \dim(X) \quad \text{pour tout} \quad p \in \overline{X}^* - X.$$

---

[1]) W. Hurewicz, Proceedings K. Nederlandse Akademie van Wetenschappen te Amsterdam 30 (1927), p. 425.

[2]) où $r = 2n+1$ d'après le théorème de Menger et Nöbeling (voir K. Menger, ibidem, Amsterdam 29 (1926), p. 1125 et G. Nöbeling, Mathematische Annalen 104 (1930), p. 71).

[3]) Pour $n = 0$ par exemple, voir B. Knaster et M. Reichbach, *Sur la caractérisation topologique de l'ensemble des bouts d'une courbe*, Fundamenta Mathematicae 40 (à paraître).

La condition nécessaire pour qu'un tel $\overline{X}^*$ existe est que X soit un G_δ absolu (c'est-à-dire homéomorphe à un espace complet).

En effet, l'ensemble X de tous les points en lesquels un espace est de dimension n au plus est un G_δ dans lui [4]) et tout G_δ dans un espace complet séparable, donc en particulier dans $\overline{X}^*$ (compact par hypothèse), est un G_δ absolu.

Il est facile de voir que cette condition est suffisante lorsque $n=0$. La construction qui suit montre qu'elle l'est encore pour $n=1,2,...$ lorsque X est compactifié de façon qu'il est partie commune d'une suite de sous-ensembles ouverts de $\overline{X}$ aux frontières de dimension $n-1$ au plus. Sinon, la même condition est en tout cas nécessaire et suffisante pour l'existence d'un $\overline{X}^*$ compact ayant la propriété (2*) augmentée des mots „excepté tout au plus un ensemble frontière $F_\sigma G_\delta$ de dimension 0".

La construction dont il s'agit consiste essentiellement à remplacer les points de $\overline{X}-X$ par des segments rectilignes (qui, bien entendu, ne forment pas simplement un cylindre) ou, au besoin, par des polyèdres convenables à plusieurs dimensions. Elle exige des précautions.

2. Le G_δ. Soit X un G_δ de dimension n en tout point et dont la fermeture $\overline{X}$ est un ensemble compact situé à l'intérieur du cube-unité $\mathcal{J}^r$ de l'espace euclidien $\mathcal{E}^r$ à r dimensions $(r\geqslant 2n+1)$:

(3) $\overline{X}\subset \mathrm{Int}(\mathcal{J}^r)$, (4) $\dim_p(X)=n$ pour tout $p\in X$,

(5) $X=\prod_{i=1}^{\infty} G_i$, où G_i sont des ensembles ouverts dans $\mathcal{E}^r$,

(6) $\dim[\mathrm{Fr}(G_i)\overline{X}]\leqslant n-1$ pour tout $i=1,2,...$ [5]).

---

[4]) K. Menger, Monatshefte für Mathemathik und Physik 34 (1924), p. 141.

[5]) Les hypothèses (5) et (6) équivalent respectivement à celles que $X=\prod_{i=1}^{\infty} H_i$ où H_i sont des ensembles ouverts dans $\overline{X}$ et que l'on a $\dim[\mathrm{Fr}(H_i)]\leqslant n-1$; voir C. Kuratowski, *Topologie*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław, volume I (1948) et II (1950). Presque toutes les notations sont ici empruntées à cette oeuvre. Elle sera citée dans la suite par numéros de volume et page, sans le nom d'auteur. Ainsi, pour le théorème ci-dessus, voir I, p. 25 et 122.

On peut évidemment poser $G_0 = \mathrm{Int}(\mathcal{J}^r)$ et admettre dans (5) que

(7) $G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots$ où $G_i \neq G_{i'}$ pour $i \neq i'$,

en y remplaçant les facteurs par leurs produits partiels et en éliminant ceux qui se répètent.

3. Base dimensionnelle. Subdivisons l'ensemble compact $\overline{G}_1$ en un nombre fini de domaines fermés (c'est-à-dire fermetures d'ensembles ouverts) de diamètre inférieur à 1/2, de façon que leurs intérieurs soient disjoints deux à deux et que les parties communes de leurs frontières soient de dimension $r-1$ au plus, celles de $r+2$ frontières étant vides; on peut exiger en outre que ces frontières n'aient avec $\overline{X}$ que des parties communes de dimension $n-1$ au plus [6]).

Appelons *cellules de 1° approximation* ou *1-cellules* tout court les domaines fermés en question et *1-mailles* les parties communes de leurs intérieurs avec G_1.

Subdivisons de-même le domaine fermé $\overline{G_0 - \overline{G}_1}$ s'il n'est pas vide.

$\overline{G}_0$ se trouve décomposé de cette manière en un nombre fini, soit l_1, de 1-mailles disjointes $M_{11}, M_{12}, \ldots, M_{1l_1}$ et en autant de leurs frontières, dont la somme contient $\mathrm{Fr}(G_1)$ et n'a avec $\overline{X}$ qu'une partie commune de dimension $n-1$ au plus.

Les fermetures $\overline{M}_{1j}$ des 1-mailles sont les 1-cellules, mais les frontières des 1-cellules ne sont, en général, que des parties de celles des 1-mailles:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Fr}(M_{1j}) = \mathrm{Fr}(\overline{M}_{1j}) + \mathrm{Fr}(G_1)M_{1j} \\ \dim\,[\mathrm{Fr}(M_{1j})\overline{X}] \leqslant n-1 \end{array}\right\} \quad \text{pour tout} \quad j = 1, 2, \ldots, l_1.$$

Aucun point situé à la frontière d'une maille n'appartient à la fois à plus de $2r+2$ 1-cellules, car il appartient tout au plus à $r+1$ cellules de $\overline{G}_1$ et à autant de cellules de $\overline{G_0 - \overline{G}_1}$.

Reprenons le même procédé avec toute maille M_{1j} de G_0 (au lieu de G_0 lui-même), en remplaçant G_1 par $G_2 M_{1j}$ et 1/2 par $1/2^2$ (pour avoir une subdivision plus fine), et ainsi de suite. On a de cette manière une subdivision du cube $\mathcal{J}^r$, devenue infiniment fine par itération, en mailles M_{ij} et leurs frontières, qui a les propriétés suivantes [7]):

[6]) II, p. 59.

[7]) II, p. 8 (1) et 58-59.

(i) Le cube est, pour tout entier positif i, somme finie de i-cellules:

$$\mathcal{J}^r = \bar{G}_0 = \sum_{j=1}^{l_i} \bar{M}_{ij} \quad \text{pour} \quad i=1,2,\ldots$$

(ii) Leur diamètre est inférieur à $1/2^i$:

$$\delta(\bar{M}_{ij}) < 1/2^i \quad \text{pour} \quad i=1,2,\ldots$$

(iii) Les $(i+1)$-mailles résultent par subdivision des i-cellules par rapport à G_{i+1} tout comme les 1-mailles par celle du cube entier par rapport à G_1. En conséquence, toute $(i+1)$-maille est contenue dans une i-maille et

(8) tout G_i est composé d'un nombre *fini* de i-mailles (et de parties de leurs frontières),

$$\left.\begin{array}{ll} (9) & \mathrm{Int}(\bar{M}_{i_1 j_1})\,\mathrm{Int}(\bar{M}_{i_2 j_2}) = 0 \\ (10) & \bar{M}_{i_1 j_1}\,\bar{M}_{i_2 j_2} \subset \mathrm{Fr}(\bar{M}_{i_1 j_1})\,\mathrm{Fr}(\bar{M}_{i_2 j_2}) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{si } M_{i_1 j_1} - M_{i_2 j_2} \neq 0 \\ \text{et } M_{i_2 j_2} - M_{i_1 j_1} \neq 0, \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (11) & \mathrm{Fr}(M_{ij}) = \mathrm{Fr}(\bar{M}_{ij}) + \mathrm{Fr}(G_i) M_{ij} \\ (12) & \dim[\mathrm{Fr}(M_{ij})\,\bar{X}] \leqslant n-1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{pour } i=1,2,\ldots \\ \text{et } j=1,2,\ldots,l_i. \end{array}$$

(iv) Toutes les mailles et cellules sont de dimension r et leur frontières sont de dimension $r-1$.

(v) [8] La partie commune de deux cellules quelconques dont aucune ne contient l'autre est de dimension $r-1$ au plus:

$$\dim(M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2}) \leqslant r-1 \quad \text{si} \quad M_{i_1 j_1} - M_{i_2 j_2} \neq 0 \neq M_{i_2 j_2} - M_{i_1 j_1}$$

et celle de $r+2$ cellules d'un même G_i — ou de $2r+2$ cellules quelconques — dont aucune ne contient aucune autre est vide (on n'aura d'ailleurs à faire intervenir que la première de ces conditions et, au lieu de la dernière, l'existence d'un nombre fini fixe s tel qu'il n'existe pas de point commun à s cellules).

(vi) L'ensemble dénombrable $\boldsymbol{B}$ de toutes les mailles constitue une *base dimensionnelle* [9] de l'ensemble $\bar{X}$ dans $\mathcal{J}^r$, en ce sens que pour tout point $p \in \bar{X}$ il existe des i aussi grands que l'on veut pour lesquels p est point intérieur d'une somme S de $2r+2$ i-cellules (fermetures de mailles) au plus dont la frontière n'a avec $\bar{X}$ qu'un ensemble de points communs de dimension ne dépassant pas $n-1$:

[8]) Cf. I, p. 182, condition D_n.

[9]) I, p. 165.

(13) $$\dim[\mathrm{Fr}(S)\overline{X}] \leqslant n-1.$$

En effet, si $p \in \mathrm{Int}\,(\overline{M}_{ij})$, on n'a qu'à poser $S=\overline{M}_{ij}$ et si le point p est situé, à partir d'une valeur de i, à la frontière de toute i-cellule qui le contient, il appartient, comme point intérieur de $\mathcal{J}^r$, au moins à 2, et en vertu de (v) au plus à s cellules distinctes; S désignant leur somme, le point p n'appartient pas à $\mathrm{Fr}(S)$, car il appartiendrait alors à la frontière de G_0-S, donc à une $(s+1)$-ème i-cellule $\overline{M}_{ij}\subset G_0-S$, contrairement à la définition de S. On a donc $p \in \mathrm{Int}(S)$ et, la frontière de S étant contenue dans la somme de celles de ses i-cellules, (12) entraîne (13), c'est-à-dire la propriété (vi) de $\boldsymbol{B}$.

Les propriétés (i)-(vi) ne sont pas indépendantes et se réduisent notoirement à des propriétés plus simples, valables dans des conditions beaucoup plus générales. Cependant, même dans le cas spécial dont il s'agit, leur réalisation peut ne pas être simple. On sait par exemple (l'arc d'Antoine!) que les cellules $\overline{M}_{ij}$ ne peuvent pas toujours être choisies parmi les ensembles homéomorphes à des sphères (fermées de dimension convenable), à moins de renoncer à (vi).

Notons que si $\boldsymbol{B}$ est une base dimensionnelle pour l'ensemble E de dimension n, elle l'est aussi pour tout ensemble $Y\subset E$ de même dimension.

4. Le F_σ. Considérons à son tour l'ensemble $\overline{X}-X$. Cet F_σ est en vertu de (5) et (7) somme d'ensembles compacts croissants:

(14) $$\overline{X}-X=\sum_{i=1}^{\infty}\overline{X}-G_i \quad \text{où} \quad \overline{X}-G_1\subset\overline{X}-G_2\subset\ldots$$

On a $X\subset G_i$, donc $\overline{X}\subset\overline{G}_i$, c'est-à-dire $\overline{X}\subset G_i+\mathrm{Fr}(G_i)$. Ces deux sommandes étant disjoints (car G_i est ouvert), il vient

(15) $$\overline{X}-G_i\subset\mathrm{Fr}\,(G_i) \quad \text{pour} \quad i=1,2,\ldots$$

Comme G_i est d'après (8) somme finie de i-mailles, $\mathrm{Fr}(G_i)$ est contenu dans la somme de leurs frontières (en tant que frontière d'une somme finie), donc à plus forte raison dans celle des frontières de toutes les i-mailles. On a donc $\overline{X}-G_i\subset\sum_{j=1}^{l_i}\mathrm{Fr}(M_{ij})$ d'après (15), d'où en vertu de (14)

(16) $$\overline{X}-X\subset\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{l_i}\mathrm{Fr}(M_{ij}).$$

Il en résulte en particulier que

$$(17)\qquad \overline{X}-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{l_i}\mathrm{Fr}(M_{ij})\subset\overline{X}-(\overline{X}-X)=X.$$

Nous allons représenter $\overline{X}-X$ comme somme d'une suite d'ensembles compacts ayant la propriété, essentielle pour la suite, d'être contenus dans toute maille sur laquelle ils empiètent. Rangeons à ce but toutes les mailles de la base $\boldsymbol{B}$ en une suite simple de manière que les i-mailles y précèdent les $(i+1)$-mailles pour tout $i=1,2,\ldots$ Les ensembles deux à deux disjoints

$$(18)\qquad F_{ij}=(\overline{X}-X)[\mathrm{Fr}(M_{ij})-\sum_{u=1}^{i-1}\sum_{j=1}^{l_u}\mathrm{Fr}(M_{uj})-\sum_{v=1}^{j-1}\mathrm{Fr}(M_{iv})]$$

sont donc des F_σ comme parties communes de deux F_σ.

Or, tout F_σ dans un espace métrique compact est somme d'une suite d'ensembles compacts de diamètre tendant vers 0. Il suffit en effet de représenter son k-ième sommande compact comme somme finie d'ensembles compacts de diamètre inférieur à $1/2^k$ par exemple et de transformer en une suite simple la suite double ainsi formée. On peut donc admettre que

$$(19)\qquad F_{ij}=\sum_{k=1}^{\infty}F_{ijk},$$

où F_{ijk} sont des ensembles compacts, et en appliquant (ii) à (18) pour $i\to\infty$, que

$$(20)\qquad \delta(F_{ijk})\to 0 \quad \text{lorsque} \quad i\to\infty \ \text{ou}\ k\to\infty.$$

On conclut de (19) et (20) que pour tout $k=1,2,\ldots$

$$(21)\qquad F_{ijk}\,\mathrm{Fr}(M_{i'j'})=0 \quad \text{lorsque} \quad i'<i \ \text{ou}\ j'<j,$$

ce qui permet de montrer que

$$(22)\qquad F_{ijk}\,M_{i'j'}\neq 0 \quad \text{entraîne} \quad F_{ijk}\subset M_{i'j'}.$$

En effet, cette inégalité entraîne la suivante:

$$(23)\qquad \mathrm{Fr}(M_{ij})M_{i'j'}\neq 0,$$

puisque $F_{ijk}\subset\mathrm{Fr}(M_{ij})$ d'après (18) et (19). Les mailles étant des ensembles ouverts par définition, on conclut de (23) que

$M_{ij}M_{i'j'}\neq 0$. Il s'ensuit en vertu de (9) que $M_{ij}\subset M_{i'j'}$ ou $M_{i'j'}\subset M_{ij}$ et comme la seconde alternative entraîne $M_{i'j'}\mathrm{Fr}(M_{ij})=0$ contrairement à (23), c'est la première qui se présente, ce qui n'est possible d'après (iii) que si $i'<i$. On a donc $F_{ijk}\mathrm{Fr}(M_{i'j'})=0$ d'après (21) et la même alternative entraîne $\overline{M}_{ij}\subset\overline{M}_{i'j'}$, d'où $F_{ijk}\subset\mathrm{Fr}(M_{ij})\subset M_{i'j'}+\mathrm{Fr}(M_{i'j'})$, donc $F_{ijk}\subset M_{i'j'}$. La propriété (22) est ainsi établie.

5. Les pyramides. Plaçons à présent $X\subset\mathcal{J}^r$ dans le cube fondamental $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ de Hilbert et désignons par $\{\xi_\lambda\}$ où $\lambda=1,2,\ldots$ la suite des coordonnées de points de cet espace. Chacune d'elles détermine dans $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ un axe orthogonal à tous les autres; appelons-le *axe* ξ_λ. Admettons que c'est l'hyperplan

(24) $$\xi_\lambda=0 \quad \text{pour tout} \quad \lambda>r$$

qui contient $\mathcal{J}^r$ et partageons la suite des entiers $\lambda>r$ en systèmes finis, composés chacun de $n+1$ nombres successifs:

(25) $$N_m=\{r+(m-1)(n+1)+1,\quad r+(m-1)(n+1)+2,\quad \ldots \\ \ldots,\quad r+m(n+1)\}.$$

Rangeons les indices $m=1,2,\ldots$ en une suite triple

$$\{ijk\} \quad \text{où} \quad i=1,2,\ldots,\quad j=1,2,\ldots,l_i \quad \text{et} \quad k=1,2,\ldots$$

Les systèmes Λ_m (pour $m=1,2,\ldots$) de demi-axes positifs ξ_λ où $\lambda\in N_m$ se trouvent donc rangés de même en une suite triple $\{\Lambda_{ijk}\}$. Deux systèmes Λ_{ijk} et $\Lambda_{i'j'k'}$ sont donc identiques ou disjoints; ils sont disjoints lorsqu'ils diffèrent par la valeur de l'un quelconque de leurs trois indices.

Faisons correspondre à tout F_{ijk} le système Λ_{ijk} et remplaçons tout point $p\in F_{ijk}$ par la pyramide P_{ijk} à $n+1$ dimensions, ayant p pour sommet et les $n+1$ arètes, de longueur $\delta(F_{ijk})$ respectivement, parallèles aux axes $\xi_\lambda\in\Lambda_{ijk}$. L'ensemble F^*_{ijk} ainsi formé est donc le produit cartésien

(26) $$F^*_{ijk}=F_{ijk}\times P_{ijk}$$

et on a évidemment

(27) $$\delta(F^*_{ijk})\leqslant\delta(F_{ijk})\sqrt{2}\,;$$

comme $F_{ijk}\subset F_{ij}\subset\mathrm{Fr}(M_{ij})$ d'après (18) et (19), on conclut de (27) en vertu de (ii) que

(28) $$\delta(F^*_{ijk}) < \sqrt{2}/2^i$$

et en vertu de (20) que

(29) $$\delta(F^*_{ijk}) \to 0 \quad \text{lorsque} \quad i \to \infty \text{ ou } k \to \infty.$$

De plus

(30) $$\dim_p(F^*_{ijk}) \geqslant n+1 \quad \text{pour tout} \quad p \in F^*_{ijk},$$

puisque déjà P^*_{ijk} est de dimension $n+1$ en ce point.

Les sommandes de la décomposition (19) n'étant pas disjoints, il y a des points communs à des produits (26) différents, à savoir les sommets communs des pyramides de divers diamètres. Mais ce qui importe c'est que, grâce à la diversité des directions d'axes et vu (25), aucune pyramide n'a avec l'hyperplan (24) d'autre point commun que son sommet:

(31) $$F^*_{ijk}\mathcal{J}^r = F_{ijk},$$

et deux pyramides quelconques aux sommets appartenant à des F_{ijk} différents sont disjointes, de sorte que la partie commune de deux F^*_{ijk} distincts coïncide avec celle des ensembles de leurs sommets, c'est-à-dire des F_{ijk} correspondants:

(32) $$F^*_{ijk}F^*_{i'j'k'} = F_{ijk}F_{i'j'k'} \quad \text{quels que soient } i, j, k, i', j' \text{ et } k'.$$

Soit M^*_{ij} l'ensemble $M_{ij}\bar{X}$ augmenté de toutes les pyramides dont les sommets sont situés dans lui. Le diamètre d'une figure quelconque formée de pyramides au sommet commun p situées dans $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ de la manière décrite, ne dépasse évidemment pas celui de la plus grande, donc le nombre $\sqrt{2}/2^i$ pour $p \in M_{ij}$, puisque les F_{ijk} qui contiennent ce sommet sont en vertu de (22) et (ii) de diamètre inférieur à $1/2^i$. La conséquence en est que

(33) $$\delta(M^*_{ij}) \leqslant \delta(M_{ij})\sqrt{2} < \sqrt{2}/2^i \quad \text{pour } i=1,2,\ldots \text{ et } j=1,2,\ldots,l_i.$$

6. Le théorème. Il résulte de (29) que

(34) toute suite convergente de points extraits d'une infinité des F^*_{ijk} différents a pour limite un point de $\bar{X}$, à savoir celui qui est point-limite de sommets des pyramides contenant les points de cette suite.

En effet, le diamètre des pyramides contenues dans des F^*_{ijk} différents tendant vers 0 en vertu de (29), il en est de même de la distance entre les points quelconques de ces pyramides et leurs sommets, d'où l'identité des points-limites en question.

Etant donné un ensemble E, désignons d'une façon générale par E^* l'ensemble composé de points de $E\bar{X}$ et de ceux de toutes les pyramides aux sommets $p \epsilon F_{ijk}E$ pour $i=1,2,...,$ $j=1,2,...,l_i$ et $k=1,2,...$ Les définitions de F^*_{ijk} et M^*_{ij} en sont donc des cas particuliers et il en est encore de même de la suivante:

(35) $$\bar{X}^* = \bar{X} + \sum_{ijk} F^*_{ijk}.$$

La conséquence facile de (34) est que

(36) si l'ensemble E est compact, il en est de même de E^* (et réciproquement).

Il en résulte en particulier que

(37) $\bar{X}^*$ est compact

et que l'ensemble $(\bar{X}-M_{ij})^* = \bar{X}^* - M^*_{ij}$ est compact, d'où

(38) M^*_{ij} est ouvert dans $\bar{X}^*$.

Considérons l'ensemble $\overline{M^*_{ij}}$ (ne pas confondre avec $\bar{M}^*_{ij}$). En vertu de (34), tout point-limite de $M^*_{ij}-M_{ij}$ qui n'est pas élément de cette différence est situé dans $\bar{M}^*_{ij}\bar{X}$. On a donc

$$\overline{M^*_{ij}-M_{ij}} \subset (M^*_{ij}-M_{ij}) + \bar{M}_{ij}\bar{X},$$

d'où $\overline{M^*_{ij}} = \bar{M}_{ij}\bar{X} + \overline{M^*_{ij}-M_{ij}} \subset M^*_{ij} + \bar{M}_{ij}\bar{X}$, et il vient d'après (38)

$$\mathrm{Fr}(M^*_{ij})\,\bar{X}^* = \overline{M^*_{ij}}(\bar{X}^* - M^*_{ij}) \subset (M^*_{ij} + \bar{M}_{ij}\bar{X})(\bar{X}^* - M^*_{ij}) \subset$$
$$\subset \bar{M}_{ij}\bar{X}(\bar{X}^* - M^*_{ij}) = (\bar{M}_{ij} - M^*_{ij})\bar{X} = (\bar{M}_{ij} - M_{ij})\bar{X} = \mathrm{Fr}(M_{ij})\bar{X},$$

c'est-à-dire

(39) $$\mathrm{Fr}(\bar{M}^*_{ij})\bar{X}^* = \mathrm{Fr}(M_{ij})\bar{X}.$$

Il en résulte d'après (12) que

(40) $$\dim[\mathrm{Fr}(M^*_{ij})\,\bar{X}^*] \leqslant n-1$$

et il en est donc de même de toute somme finie d'ensembles M^*_{ij}.

Il est facile de déduire pour les ensembles munis d'astérisque les propriétés (i*)-(vi*) en lesquelles se transforment (i)-(vi). C'est ainsi que (i) devient en vertu de (35)

(i*) $$\bar{X}^* \subset \sum_{j=1}^{l_i} \bar{M}_{ij}^* \quad \text{pour } i=1,2,\ldots$$

et on conclut de (33) d'après (ii) que

(ii*) $$\delta(\overline{M_{ij}^*}) < \sqrt{2}/2^i \quad \text{pour } i=1,2,\ldots$$

Les propriétés (iii*)-(v*) ne méritent pas d'intérêt, sauf la formule (40), qui remplace (12). Enfin, on a au lieu de (vi) la propriété importante, qui est une conséquence directe de (vi) et (39), à savoir:

(vi*) L'ensemble $\boldsymbol{B}^*$ de tous les M_{ij}^* constitue une base dimensionnelle de X dans $\bar{X}^*$ en ce sens que pour tout $p \in X$ il existe des i aussi grands que l'on veut et tels que p est un point intérieur d'une somme Σ de tout au plus $2r+2$ ensembles $\overline{M_{ij}^*}$ pour laquelle

(41) $$\dim[\mathrm{Fr}(\Sigma)\bar{X}^*] \leqslant n-1.$$

On conclut aussitôt de (41) que $\dim_p(\bar{X}^*) \leqslant n$ pour tout $p \in X$, d'où la propriété (1*) en vertu de (4). D'autre part, (18) implique que $\sum_{ij} F_{ij} = (\bar{X}-X)\sum_{ij}\mathrm{Fr}(M_{ij})$, d'où $\sum_{ijk} F_{ijk} = (\bar{X}-X)\sum_{ij}\mathrm{Fr}(M_{ij})$ en vertu de (19) et comme $(\bar{X}-X) \subset \sum_{ij}\mathrm{Fr}(M_{ij})$ en vertu de (16), il vient $\sum_{ijk} F_{ijk} = \bar{X}-X$, d'où $\bar{X}-X \subset \sum_{ijk} F_{ijk}^*$, puisque tout F_{ijk}^* contient F_{ijk} par définition. On a donc $\bar{X}^* = X + \sum_{ijk} F_{ijk}^*$ en vertu de (35), d'où $\bar{X}^* - X \subset \sum_{ijk} F_{ijk}^*$, ce qui entraîne la propriété (2*) en vertu de (4) et (30).

Le théorème suivant se trouve donc établi:

Théorème. *Etant donné un espace métrique séparable X de dimension n, la condition nécessaire pour qu'il existe un $\bar{X}^*$ compact ayant les propriétés (1*) et (2*) est que X soit un G_δ absolu; la même condition est suffisante lorsque X est compactifié de façon qu'il constitue la partie commune d'une suite d'ensembles ouverts dans $\bar{X}$ aux frontières de dimension $n-1$ au plus.*

7. Remarques. Envisageons à présent le cas où l'ensemble X de dimension n est partie commune d'une suite d'ensembles ouverts dans $\overline{X}$, supposé métrique compact de dimension n, mais dont les frontières sont de dimension n au moins. Les ensembles ouverts dans $\overline{X}$, plongé au préalable dans l'intérieur de $\mathcal{J}^r$ par homéomorphie, étant alors remplaçables par des ensembles ouverts dans $\mathcal{E}^r$ (voir le renvoi [5]), p. 253), on a (3), (4) et (5), mais pas (6):

$$\dim[\mathrm{Fr}(G_i)\overline{X}]=n \quad \text{pour tout} \quad i=1,2,... \tag{42}$$

La construction de la base dimensionnelle de X dans $\mathcal{J}^r$ doit alors être modifiée de manière que les ensembles $\mathrm{Fr}(G_i)\overline{X}$ n'entrent pas en constitution des frontières de cellules. Les ensembles G_i perdent leur rôle: il ne reste que le procédé banal consistant à subdiviser cube $\mathcal{J}^r$ en un nombre fini de cellules de diamètre 1/2, puis chacune de celles-ci en un nombre fini de cellules de diamètre $1/2^2$ et ainsi de suite, bien entendu de façon que les frontières des cellules n'aient avec $\overline{X}$ que des parties communes de dimension $n-1$ au plus — mais sans que les ensembles G_i y soient pour quelque chose. Cependant, ayant alors réalisé les propriétés analogues à (i)-(vi), on voit être en défaut (8) ou (12). L'effet en est que (16) ne résulte plus de (14) et (15); aussi, contrairement à (16), y a-t-il alors des points de $\overline{X}-X$ dans des mailles infiniment décroissantes. Il se comportent donc à cet égard comme des points analogues de X, de sorte que la dimension de $\overline{X}$ en eux ne se laisse pas augmenter par la construction des pyramides sans abolir l'égalité (39), donc sans élever la dimension de $\mathrm{Fr}(M_{ij}^*)\overline{X}^*$, ce qui éleverait en même temps celle de $\overline{X}^*$ aux points de X.

Or, l'ensemble de ces points de $\overline{X}-X$ est partie commune de deux ensembles suivants: de $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathrm{Fr}(G_i)\overline{X}$, qui est un F_σ frontière dans $\overline{X}$ (comme contenu d'après (5) dans $\overline{X}-X$), et de $\mathcal{J}^r-\sum\limits_{ij}\mathrm{Fr}(M_{ij})$, qui est un G_δ de dimension 0 [10]). L'ensemble des points de $\overline{X}-X$ non affectés par la construction qui augmente en eux la dimension est donc un ensemble fron-

---

[10]) I, p. 165, 4.

tière de dimension 0 et de la forme $F_\sigma G_\delta$, ce qui démontre la variante du théorème énoncée au début (voir p. 253) pour le cas qui vient d'être envisagé.

Autre remarque: la circonstance que $\overline{X}-X$ est un ensemble frontière n'est pas essentielle dans la démonstration du théorème. Une légère modification de la construction primitive permet de remplacer d'emblée $\overline{X}$ par son sur-ensemble compact quelconque, en particulier par $\overline{X}^*$, en vue d'itérer le procédé, par exemple.

Le problème s'impose: X étant un G_δ absolu de dimension n, est-il possible de le compactifier de façon qu'il soit partie commune d'une suite d'ensembles ouverts dans $\overline{X}$ aux frontières de dimension $n-1$ au plus?

Si oui, la variante envisagée dans la première remarque serait superflue.

Cependant elle ne l'est pas, *la réponse au problème étant négative*. C'est évident pour $n=0$. En effet[11]), en supposant que les ensembles ouverts en question aient les frontières vides, donc qu'ils soient à la fois ouverts et fermés dans $\overline{X}$, l'ensemble X serait nécessairement compact (comme partie commune d'une famille d'ensembles compacts); il y a cependant des G_δ absolus (de toute dimension) qui ne sont pas des ensembles compacts. Tel est, pour en donner l'exemple le plus banal (de dimension 0), l'ensemble $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels du segment $\mathcal{J}$ de l'axe d'abscisses.

Considérons, pour $n=1$, l'ensemble plan X formé de tous les segments verticaux V_x de longueur 1 dont les bouts inférieurs sont les points de $\mathcal{N}$. On a évidemment $\dim_p(X)=1$ en tout point $p \in X$ et l'ensemble X est un G_δ absolu sans être un F_σ, même localement en aucun de ses points. Ces propriétés étant des invariants de l'homéomorphie, il s'ensuit que, de quelle façon qu'on ne compactifie X dans $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ (les $\overline{X}$ non séparables n'étant pas pris ici en considération, comme donnant lieu à des problèmes d'ordre différent), X résultera un ensemble-frontière dans $\overline{X}$: en effet, si X contenait un ensemble ouvert G, il serait localement ouvert, donc F_σ, en tout point de G.

---

[11]) Je dois cette remarque à C. Ryll-Nardzewski.

Désignons l'image homéomorphe de X dans $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ par la même lettre X; on peut évidemment admettre que $X=\prod_{i=1}^{\infty} G_i$ où G_i y sont des ensembles ouverts dans $\overline{X}$ et que $\overline{X}-X=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{Fr}(G_i)$, ces frontières y étant entendues comme relatives à l'ensemble compact $\overline{X}$.

Si l'on suppose que $\dim[\mathrm{Fr}(G_i)]\leqslant 0$ pour tout $i=1,2,\ldots$, les composantes des $\mathrm{Fr}(G_i)$, donc de $\overline{X}-X$, se réduiraient à des points, tandis que celles de X, comme images homéomorphes des V_x, sont des continus de diamètre positif. Soit H_i l'ensemble-somme de toutes les composantes de X de diamètre au moins égal à $1/i$. On a donc $X=\sum_{i=1}^{\infty} H_i$ et il existe évidemment une valeur de i à partir de laquelle les ensembles H ne sont pas vides. L'ensemble-limite d'une suite de composantes de diamètre non inférieur à $1/i$ étant un continu de diamètre non inférieur au même nombre, il vient $\overline{H}_i\subset X$, d'où $\overline{H}_i=H_i$. En même temps, X étant un ensemble-frontière dans $\overline{X}$, il en serait de même des H_i. Comme ensembles-frontières et fermés, les H_i seraient non-denses, donc X de I^re^ catégorie, contrairement au théorème de Baire. Ainsi, la représentation supposée de X est impossible.

Appelons *G_δ de I genre* tout G_δ absolu qui est homéomorphe à un ensemble représentable comme partie commune d'une suite d'ensembles ouverts dans sa fermeture aux frontières de dimension inférieure à la sienne; entendons par *II genre* la négation du *I*.

Nous pouvons donc énoncer la troisième remarque, qui suit, en ces termes: *il y a deux genres des G_δ absolus* (parmi les ensembles de dimension nulle et parmi ceux de dimension positive).

En effet, l'ensemble $\mathcal{N}$ (de dimension 0), de même que celui de la forme $\mathcal{N}\times\mathcal{J}$ (de dimension 1), qui vient d'être envisagé, sont des G_δ de II genre.

Remettons aux problèmes ouverts la question s'il existe des G_δ de II genre de toute dimension $n\geqslant 0$ (voir plus particulièrement le problème 3°, p. 267) et passons à la quatrième remarque, qui est la suivante:

On peut être porté à chercher la différence entre les deux genres des G_δ dans le degré de complexité de leur structure. On peut montrer toutefois, en profitant de la remarque précitée de Ryll-Nardzewski, qu'*il existe parmi les G_δ de chacun de ces genres des ensembles aussi compliqués qu'on le veut.*

Soient en effet X_1 un G_δ de dimension positive et $\{G_{\iota 1}\}$ la suite d'ensembles ouverts dans $\overline{X}_1$ dont X_1 est la partie commune. Soient d'autre part X_2 un G_δ *quelconque* situé dans l'ensemble de Cantor et $\{G_{\iota 2}\}$ la suite d'ensembles ouverts respectifs, donc d'ensembles aux frontières de dimension 0 ou 1. Alors l'ensemble $X_1+X_2=\prod\limits_{\iota=1}^{\infty}(G_{\iota 1}+G_{\iota 2})$ se comporte évidemment comme X_2 quant à la complexité — à moins que celle de X_1 ne prévale — et comme X_1 quant à son genre — car on a $\dim[\mathrm{Fr}(G_{\iota 1}+G_{\iota 2})]=\dim[\mathrm{Fr}(G_{\iota 1})]$ dans le cas en question.

Considérons en particulier les G_δ qui sont des ensembles des points en lesquels les ensembles compacts sont tout au plus d'une dimension n donnée *(noyaux dimensionnels)* et demandons-nous si, même parmi ces G_δ, il y a qui appartiennent aux deux genres. Le théorème établi (p. 261) et l'exemple qui suit montrent que *la réponse est affirmative.* C'est la cinquième remarque:

Soient $\mathcal{C}$ l'ensemble de Cantor sur le segment $0\leqslant x\leqslant 1$ de l'axe d'abscisses et $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ l'ensemble de tous les points de $\mathcal{C}$ qui ne sont pas les bouts des intervalles contigus à lui. L'ensemble $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ est homéomorphe à $\mathcal{N}$. Posons $X=\mathcal{N}_{\mathcal{C}}\times\mathcal{J}$; c'est donc l'image homéomorphe de $\mathcal{N}\times\mathcal{J}$ formée de segments verticaux V_x d'ordonnées $0\leqslant y\leqslant 1$ dont les bouts inférieurs $(x,0)$ sont des points de $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$. L'ensemble X est donc un G_δ de II genre.

On a évidemment $\overline{X}=\mathcal{C}\times\mathcal{J}=\overline{\mathcal{C}\times\mathcal{J}-X}$ et $\dim_p(X)=$ $=\dim_p(\overline{X})=1$ en tout point $p\in\overline{X}$. Remplaçons toute composante de $\mathcal{C}\times\mathcal{J}-X$, c'est-à-dire segment vertical de longueur 1 au bout inférieur $(x,0)$ appartenant à $\mathcal{C}-\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$, par la suite de 2^j disques (tangents chacun au suivant)

$$\left(y-\frac{2k-1}{2^{j+1}}\right)^2+z^2\leqslant\left(\frac{1}{2^{j+1}}\right)^2 \quad \text{où} \quad k=1,2,\ldots,2^j$$

lorsque x est le bout de l'intervalle contigu à $\mathcal{C}$ de longueur $1/3^j$. Soit D la somme de tous les disques pour $x \epsilon \mathcal{C} - \mathcal{N}_{\mathcal{C}}$. Alors $\overline{D} = D + X$, $DX = 0$ et

$$\dim_p(\overline{D}) = \begin{cases} 2 \text{ pour tout } p \epsilon D, \\ 1 \text{ pour tout } p \epsilon X, \end{cases}$$

de sorte que X est bien l'ensemble des points en lesquels l'ensemble compact $\overline{D}$ est de dimension au plus égale à $n=1$.

Soit en effet $p = (x_0, y_0) \epsilon X$, c'est-à-dire $x_0 \epsilon \mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ et $0 \leqslant y_0 \leqslant 1$. Etant donné un $\varepsilon > 0$, il existe sur l'axe d'abscisses, de part et d'autre de x_0, deux intervalles contigus à $\mathcal{C}$ de longueur moindre que $1/3^j$ et situés à la distance moindre que $1/3^j$ de x_0, le nombre j étant choisi de façon à avoir $1/2^j < \varepsilon/6$. Alors, en désignant par x_1 et x_2 les centres respectifs de ces intervalles, les plans verticaux $x = x_1$ et $x = x_2$ sont distants l'un de l'autre de $|x_1 - x_2| < \varepsilon/2$ et ils sont disjoints de $\overline{D}$. Il en est de même des parties des plans horizontaux $z = \varepsilon/2$ et $z = -\varepsilon/2$ comprises entre eux, puisque les plus grands disques qui s'y trouvent sont de diamètre $d < 1/2^j$ par définition. Soient enfin y_1, y_2 et y_3 trois ordonnées successives de leurs points de tangence, telles que $y_1 < y_0 < y_3$. Alors les plans verticaux $y = y_1$ et $y = y_3$ ne sont distants l'un de l'autre que de $2d < 2/2^j < \varepsilon/3$ et ne rencontrent $\overline{D}$ qu'en des points de tangence situés sur D et des points de mêmes ordonnées situés sur X, à savoir au total en deux ensembles compacts de dimension 0 superposables par projection avec le partie de $\mathcal{C}$ comprise entre les plans $x = x_1$ et $x = x_2$. Ainsi, le parallélépipède contenant le point p et délimité par les six plans considérés est de diamètre inférieur à $\sqrt{3(\varepsilon/2)^2} < \varepsilon$ et sa surface n'a avec $\overline{D}$ qu'un ensemble de points communs de dimension nulle. La dimension 1 de $\overline{D}$ au point p se trouve ainsi établie.

Voici enfin la sixième remarque. On sait que tout ensemble ouvert d'un espace compact est homéomorphe à un ensemble compact privé d'un point; c'est en effet, plus généralement, la propriété de toute différence de deux ensembles compacts ou — ce qui revient au même[12]) — de tout ensemble localement

[12]) II, p. 50; voir aussi P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie I*, p. 93.

compact. La question s'impose si tout G_δ absolu est homéomorphe à un ensemble compact privé de $\aleph_0$ points au plus. L'exemple $X=\mathcal{N}\times\mathcal{J}$, envisagé p. 263-264, montre que *la réponse est négative*, l'ensemble $\overline{X}-X$ étant nécessairement de dimension positive, donc indénombrable, quel que soit le plongement topologique de X dans $\mathcal{J}^{\aleph_0}$.

8. Problèmes. Les problèmes suivants restent ouverts:

1⁰ La notion de *genre* d'un G_δ étant topologique par définition (comme invariante par rapport aux homéomorphies), caractériser les ensembles de I ou II genre par leurs propriétés topologiques intrinsèques.

2⁰ Caractériser par les propriétés topologiques intrinsèques les G_δ homéomorphes à ceux qui sont des ensembles des points en lesquels les ensembles compacts sont tout au plus d'une dimension $n\geqslant 1$ donnée.

3⁰ Les G_δ de la forme $\mathcal{N}\times\mathcal{J}^n$ sont-ils de II genre pour tout $n\geqslant 1$?

4⁰ X étant un G_δ absolu de dimensions différentes en ses divers points, existe-t-il un $\overline{X}^*$ compact tel que[13])

$$\dim_p(\overline{X}^*)=\dim_p(X) \qquad \text{pour tout} \quad p\in X,$$
$$\dim_p(\overline{X}^*-X)>\dim(X) \quad \text{pour tout} \quad p\in \overline{X}^*-X\,?$$

5⁰ La dernière condition se laisse-t-elle remplacer par la plus précise suivante:

$$\dim_p(\overline{X}^*-X)=\dim(X)+1\,?$$

Państwowy Instytut Matematyczny.
Institut Mathématique de l'État.

[13]) Cf. C. Kuratowski, Fundamenta Mathematicae 30 (1938), p. 13.

ON CERTAIN MAPPING OF THE 2-SPHERE ONTO ITSELF

By K. BORSUK (Warszawa)

Let X be a metric separable space, E_n the n-dimensional Euclidean space and S_n the n-dimensional sphere defined in E_{n+1} by the equation

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n+1}^2=1.$$

We denote the set of all continuous mappings of X in S_n by S_n^X and we define a metric topology in the functional space S_n^X by setting

$$\varrho(f,g)=\sup_{x\in X}\varrho(f(x),g(x)) \qquad \text{for every } f,g\in S_n^X.$$

A mapping $f\in S_n^X$ is said to be *inessential* if there is a mapping $F\in S_n^{X\times I}$, where I denotes the interval $0\leqslant t\leqslant 1$, such that

$$\left.\begin{aligned} F(x,0)&=f(x)\\ F(x,1)&=\text{constant}\end{aligned}\right\}\ \text{for every } x\in X.$$

In particular, the analysis of the space S_1^X yields a powerful tool in the study of topological structure of the space X. The following theorem[1]) plays an important role in this analysis:

A mapping $f\in S_1^X$ is inessential if and only if there exist two mappings $\varphi\in E_1^X$, $\psi\in S_1^{E_1}$ such that

$$f(x)=\psi\varphi(x) \quad \textit{for every } x\in X.$$

---

[1]) S. Eilenberg, *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, Fund. Math. 26 (1936), p. 68.

The purpose of this paper is to show that an analogous theorem for inessential mappings into S_2 is not true. More precisely, we shall prove the following

Theorem. *There exists an inessential mapping $f \epsilon S_2^{S_2}$ which is not representable in the form $\psi\varphi(x)$, where $\varphi \epsilon E_2^{S_2}$ and $\psi \epsilon S_2^{E_2}$.*

First we establish the following

Lemma. *Let A be a compact, locally connected subset of E_2 and G_1, G_2 two different bounded components of $E_2 - A$. Then $A - \bar{G}_1 \cdot \bar{G}_2 \neq 0$.*

Proof. Let us choose two points $a_1 \epsilon G_1$ and $a_2 \epsilon G_2$. Since the locally connected compactum A cuts E_2 between a_1 and a_2 there exists [2]) a simple closed curve $\Omega \subset A$ which also cuts E_2 between a_1 and a_2. By the Jordan curve theorem Ω cuts E_2 into just two regions Γ_1 containing a_1 and Γ_2 containing a_2. Then $G_1 \subset \Gamma_1$ and $G_2 \subset \Gamma_2$. Consequently

$$\bar{G}_1 \cdot \bar{G}_2 \subset \Omega \subset A.$$

But $\Omega \neq A$, since $E_2 - A$ contains two different bounded components G_1 and G_2. Hence

$$A - \bar{G}_1 \cdot \bar{G}_2 \neq 0.$$

Proof of the theorem. Every point $p \epsilon S_2$ is of the form

$$p = p(\alpha, \beta) = (\cos\alpha, \sin\alpha \cdot \cos\beta, \sin\alpha \cdot \sin\beta),$$

where α and β are arbitrary real numbers. We obtain all points of S_2 even if we restrict the range of the parameters α and β to the intervals

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant \beta < 2\pi.$$

Consider the mapping $f \epsilon S_2^{S_2}$ defined by the formula

$$f(p(\alpha, \beta)) = p(2\alpha, \beta) \quad \text{for every} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \beta < 2\pi.$$

---

[2]) C. Kuratowski, *Topologie II*, Monografie Matematyczne XXI, Warszawa-Wrocław 1950, p. 405.

Setting

$$f_t(p(\alpha,\beta))=p(2\alpha,\beta) \quad \text{for} \quad 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\beta<2\pi,\ 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},$$

$$f_t(p(\alpha,\beta))=p(2\alpha,\beta+2t\pi) \quad \text{for} \quad \frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi,\ 0\leqslant\beta<2\pi,\ 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},$$

$$f_t(p(\alpha,\beta))=p(4\alpha(1-t),\beta) \quad \text{for} \quad 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\beta<2\pi,\ \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,$$

$$f_t(p(\alpha,\beta))=p(4(\pi-\alpha)(1-t),\beta) \text{ for } \frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi,\ 0\leqslant\beta<2\pi,\ \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,$$

we can easily verify that $f_t(p)$ is a continuous mapping of $S_2\times I$ into S_2. In fact, it suffices to observe that

$$f_t(p(0,\beta))=(1,0,0) \text{ for } 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$f_t\left(p\left(\frac{\pi}{2},\beta\right)\right)=p(\pi,\beta)=p(\pi,\beta+2t\pi)=(-1,0,0) \text{ for } 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},$$

$$f_t\left(p\left(\frac{\pi}{2},\beta\right)\right)=p(2\pi(1-t),\beta) \text{ for } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,$$

$$f_t(p(\pi,\beta))=p(2\pi,\beta+2t\pi)=(1,0,0) \text{ for } 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},$$

$$f_t(p(\pi,\beta))=p(0,\beta)=(1,0,0) \text{ for } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.$$

Moreover we have

$$f_0(p(\alpha,\beta))=p(2\alpha,\beta)=f(p(\alpha,\beta))$$

and

$$f_1(p(\alpha,\beta))=p(0,\beta)=(1,0,0)$$

for every $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$ and $0\leqslant\beta<2\pi$. Consequently the mapping $f\in S_2^{S_2}$ is inessential.

Let us suppose now that f is representable in the form $\psi\varphi$, where φ is a continuous mapping of S_2 into E_2 and ψ a continuous mapping of E_2 into S_2. The set S of all points of the form $p\left(\frac{\pi}{2},\beta\right)$, $0\leqslant\beta\leqslant 2\pi$, is a circle cutting S_2 into two regions

$$H_1=\underset{p}{E}\left[p=p(\alpha,\beta),\ 0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}\right],$$

$$H_2=\underset{p}{E}\left[p=p(\alpha,\beta),\ \frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi\right].$$

The transformation f maps H_i topologically onto the set $S_2-(p(-1,0,0))$ for $i=1,2$. If follows easily that φ maps H topologically onto a region $G_i \subset E_2$ and ψ maps G_i topologically onto $S_2-(p(-1,0,0))$. Moreover, the set $\varphi(S)$ constitutes the common boundary of G_1 and G_2. But $\varphi(S)$ is a locally connected compactum. Hence we infer by the lemma that

$$G_1 = G_2. \tag{1}$$

Now we shall show that there exists a number β_0 such that

$$0 \leqslant \beta_0 \leqslant \pi \quad \text{and} \quad \varphi\left(p\left(\frac{\pi}{2},\beta_0\right)\right) \neq \varphi\left(p\left(\frac{\pi}{2},\beta_0+\pi\right)\right). \tag{2}$$

In fact, if $\beta_0=0$ does not satisfy (2), then $\varphi\left(p\left(\frac{\pi}{2},0\right)\right)=$ $=\varphi\left(p\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\right)$. Let L_1 and L_2 denote two geodetic arcs joining, on S_2, the point $p(0,0)$ with the points $p\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ and $p\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ respectively. Then φ maps L_1+L_2 onto a simple closed curve $\Omega_1 \subset G_1+(c)$, where $c=\varphi\left(p\left(\frac{\pi}{2},0\right)\right)=\varphi\left(p\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\right) \in \varphi(S)$. The curve Ω_1 cuts G_1 into just two regions $G_{1,1}$ and $G_{1,2}$. The boundary of one of them (for instance the boundary of $G_{1,1}$) lies, except for the point c, in G_1. The region $G_{1,1}$ is the image by the mapping φ of a region on the sphere S_2 lying in H_1 and bounded by L_1+L_2 and by an arc L_3 of the circle S. We infer that

$$\varphi(p)=c \quad \text{for every} \quad p \in L_3.$$

Let d be an arbitrary point of $\varphi(S)-(c)$. Then there exists a point $p_0 \in S-L_3$ such that $\varphi(p_0)=d$. Denoting by q_0 the point antipodal on S_2 to p_0 we infer that $q_0 \in L_3$ and that

$$\varphi(p_0)=d \neq \varphi(q_0)=c.$$

But the points p_0 and q_0 belong to S and are antipodal. Hence there exists a number β_0 such that $0 \leqslant \beta_0 \leqslant \pi$ and that one of the points p_0, q_0 is of the form $p\left(\frac{\pi}{2},\beta_0\right)$ and the other is of the form $p\left(\frac{\pi}{2},\beta_0+\pi\right)$. Thus the existence of a number β_0 satisfying (2) is proved.

Now we observe that for every number $0<\lambda<\frac{\pi}{2}$,

$$f\left(p\left(\frac{\pi}{2}+\lambda,\beta_0\right)\right)=p(\pi+2\lambda,\beta_0)=$$
$$=(-\cos 2\lambda, -\sin 2\lambda\cdot\cos\beta_0, -\sin 2\lambda\cdot\sin\beta_0),$$
$$f\left(p\left(\frac{\pi}{2}-\lambda,\beta_0+\pi\right)\right)=p(\pi-2\lambda,\beta_0+\pi)=$$
$$=(-\cos 2\lambda, -\sin 2\lambda\cdot\cos\beta_0, -\sin 2\lambda\cdot\sin\beta_0).$$

Hence

(3) $$f\left(p\left(\frac{\pi}{2}+\lambda,\beta_0\right)\right)=f\left(p\left(\frac{\pi}{2}-\lambda,\beta_0+\pi\right)\right) \quad \text{for every} \quad 0<\lambda<\frac{\pi}{2}.$$

But (1) and (2) imply that for every sufficiently small λ $\varphi\left(p\left(\frac{\pi}{2}+\lambda,\beta_0\right)\right)$ and $\varphi\left(p\left(\frac{\pi}{2}-\lambda,\beta_0\right)\right)$ are different points of G_1. We infer from (3) that ψ maps them on the same point of S_2. But this is impossible, because ψ maps the region G_1 topologically. Thus the proof of the theorem is completed.

Problems. 1. Does there exist for every $n>2$ an inessential mapping $f\in S_n^{S_n}$ which is not of the form $\psi\varphi$, where $\varphi\in E_n^{S_n}$ and $\psi\in S_n^{E_n}$?

2. Does there exist a space X such that the set of all inessential mappings $f\in S_2^{S_2}$ is identical with the set of all mappings of the form $\varphi\psi$, where $\varphi\in X^{S_2}$ and $\psi\in S_2^X$?

SUR UN PROBLÈME DE F. LEJA

Par J. Górski (Kraków)

1. F. Leja a posé le problème suivant [1]):

Soient F un ensemble fermé et borné de points de l'espace euclidien R_3 à 3 dimensions, P_1P_2 la distance cartésienne entre les points P_1 et P_2 de R_3, n un nombre naturel fixe, et

$$P_{1n}, P_{2n}, \dots, P_{nn} \tag{1}$$

un système de n points de F tels que la somme

$$\sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \frac{1}{P_{in}P_{kn}} \tag{2}$$

soit la plus petite. Prouver que la suite de fonctions du point variable P

$$u_n(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{PP_{in}} \qquad (n=1,2,\dots) \tag{3}$$

converge partout en dehors de F (ou démontrer que cette proposition est fausse).

H. Teresaka [2]) a donné une réponse négative à ce problème pour le cas où l'ensemble F ne contient que deux points d'accumulation. F. Leja a remarqué [3]) que lorsque le diamètre transfini $d(F)$ de l'ensemble F au sens de G. Polya et G. Szegö est positif le problème reste ouvert. On verra que pour $d(F) > 0$, la réponse est positive.

---

[1]) Ann. Soc. Polon. de Math. 19 (1946), p. 252.

[2]) Ibid. 23 (1950), p. 201.

[3]) Ibid. 23 (1950), p. 205.

2. Soient D_∞ un domaine non borné dans R_3, contenant le point ∞, F sa frontière, et (1) un système de points de F tels qu'on ait

$$\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} \frac{1}{P_{in}P_{kn}} \leqslant \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} \frac{1}{P_iP_k} \tag{4}$$

pour chaque système $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de n points de F. Tout système (1) satisfaisant à la condition (4) est dit *n-ième système de points extrémaux de F*. Supposons que le diamètre transfini $d(F)$ soit >0. En m'appuyant sur certains résultats de O. Frostman, je vais démontrer le

Théorème 1. *La suite* (3) *tend en dehors de* F *vers une limite finie*

$$u(P) = \lim_n u_n(P),$$

la convergence étant uniforme dans le voisinage de chaque point P *n'appartenant pas à* F.

La limite $u(P)$ *est une fonction harmonique du point* P *en dehors de* F *et satisfait à l'inégalité*

$$u(P) < \frac{1}{d(F)} \quad \textit{pour } P \in D_\infty.$$

Si l'ensemble complémentaire $C\bar{D}_\infty$ *n'est pas vide, on a*

$$u(P) = \frac{1}{d(F)} \quad \textit{pour } P \in C\bar{D}_\infty.$$

Démonstration. La fonction (3) représente la valeur, au point P, du potentiel électrostatique engendré par les masses $1/n$ situées aux points $P_{in} (i=1,2,\ldots,n)$. Désignons cette répartition discontinue de la masse unité sur F par $\mu_n = \mu_n(\Delta)$, où Δ est un ensemble borelien quelconque contenu dans F; $\mu_n(\Delta)$ est une fonction non négative, complètement additive de Δ. On a $\mu_n(F)=1$, $\mu_n(\Delta)=0$ si $F\cdot\Delta=0$, et $\mu_n(\Delta)\leqslant 1$ quel que soit $\Delta \subset F$ pour $n=1,2,\ldots$ Le potentiel (3) peut être représenté par l'intégrale suivante

$$u_n(P) = \int_F \frac{d\mu_n(\Delta_Q)}{PQ}, \quad Q \in F. \tag{5}$$

D'après un théorème de de la Vallée Poussin[4]), on peut, de chaque suite illimitée de fonctions additives uniformément bornées, extraire une suite partielle convergente. Considérons la suite $\{\mu_n\}=\{\mu_n(\Delta)\}$; soient $\{\mu_{n_k}\}$ une suite partielle convergente, et μ la limite de $\{\mu_{n_k}\}$.

O. Frostman a démontré[5]) que la limite μ fournit la borne inférieure de l'intégrale d'énergie, c'est-à-dire qu'on a

$$\inf_{\sigma} \int_F\int \frac{d\sigma(\Delta_p)\,d\sigma(\Delta_Q)}{PQ} = \int_F\int \frac{d\mu\, d\mu}{PQ} = \frac{1}{d(F)}, \tag{6}$$

$\sigma=\sigma(\Delta)$ étant une répartition quelconque de la masse unité sur F. D'autre part, il a prouvé qu'il n'existe qu'une seule fonction μ réalisant la borne (6).

Il résulte de ces deux théorèmes que la suite $\{\mu_n\}$ est convergente et que, pour chaque point P n'appartenant pas à F, on a[6])

$$\lim_{n\to\infty} u_n(P) = \int_F \lim_n \frac{d\mu_n(\Delta_Q)}{PQ} = \int_F \frac{d\mu(\Delta_Q)}{PQ}.$$

L'intégrale $\int_F \frac{d\mu(\Delta_Q)}{PQ}$ représente la valeur du potentiel engendré par la masse unité dont la distribution sur F est donnée par μ, donc la limite $u(P)=\lim_n u_n(P)$ est une fonction harmonique en dehors de F.

On a[7]) $u(P)\leqslant\frac{1}{d(F)}$ dans R_3, et $u(P)=\frac{1}{d(F)}$ en chaque point de CD_∞ sauf, au plus, dans un ensemble de capacité nulle contenu dans F.

Remarque. La fonction $u(P)$ est la solution du problème de Dirichlet généralisé pour le domaine D_∞ et la valeur con-

---

[4]) De la Vallée Poussin, *Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet,* Ann. de l'Inst. H. Poincaré 2 (1932), p. 223.

[5]) O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions,* Meddel. f. Lunds Univ. Mat. Sem. 3, p. 46.

[6]) Cf. le travail cité de Frostman, p. 16.

[7]) Cf. le travail cité de Frostman, p. 56.

stante égale à $\frac{1}{d(F)}$ sur la frontière F, la valeur de cette solution à l'infini étant supposée égale à 0.

3. Théorème 2. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point Q de la frontière F du domaine D soit régulier pour le problème de Dirichlet, est qu'à tout nombre $\varepsilon > 0$, on puisse faire correspondre deux nombres $\delta(\varepsilon) > 0$ et $N(\varepsilon) > 0$ tels qu'on ait, pour chaque $n > N(\varepsilon)$,*

$$(7) \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{PP_{in}} > \frac{1}{d(F)} - \varepsilon \quad \textit{lorsque } PQ < \delta(\varepsilon) \textit{ et } P \in D_\infty.$$

Démonstration. La condition est nécessaire car, lorsque le point Q est régulier, la limite $\lim\limits_{P \to Q\ (P \in D_\infty)} u(P) = \frac{1}{d(F)}$ existe, donc $u(P) > \frac{1}{d(F)} - \frac{\varepsilon}{2}$ lorsque $PQ < \delta(\varepsilon)$ et $P \in D_\infty$. Mais, d'après le théorème 1, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\frac{1}{PP_{in}} > u(P) - \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour } n > N(\varepsilon),$$

d'où résulte l'inégalité (7).

La condition est suffisante. En effet, il en résulte d'après le théorème 1 que

$$u(P) \geqslant \frac{1}{d(F)} - \varepsilon \qquad \text{pour } PQ < \delta(\varepsilon) \text{ et } P \in D_\infty$$

et, par suite,

$$\varliminf_{P \to Q\ (P \in D_\infty)} u(P) \geqslant \frac{1}{d(F)}.$$

Mais, lorsque $P \in D_\infty$, on a $u(P) < \frac{1}{d(F)}$, donc

$$\varlimsup_{P \to Q\ (P \in D_\infty)} u(P) \leqslant \frac{1}{d(F)}.$$

Il s'ensuit que la limite $\lim\limits_{P \to Q\ (P \in D_\infty)} u(P) = \frac{1}{d(F)}$ existe et, par suite, Q est régulier.

Remarque. On dit que le point Q de la frontière F *satisfait à la condition de Poincaré* s'il existe un cône de sommet Q, contenu entièrement (à l'exception du seul point Q) dans le domaine $C\bar{D}_\infty$. Je dis qu'en particulier, la *condition* (7) *est satisfaite au point* Q lorsque Q satisfait à la condition de Poincaré.

En effet, soient P un point de D_∞ et S un point de $D=C\bar{D}_\infty$. Alors $PP_{in}\leqslant SP_{in}+SP\leqslant SP_{in}+SQ+QP$, donc

$$\frac{1}{PP_{in}}\geqslant\frac{1}{SP_{in}+SQ+QP}=\frac{1}{SP_{in}}-\frac{SQ+QP}{SP_{in}[SP_{in}+SQ+QP]}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{SP_{in}}-\frac{SQ+QP}{SP_{in}^2},$$

et, par suite,

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\frac{1}{PP_{in}}\geqslant\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\frac{1}{SP_{in}}-(SQ+QP)\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\frac{1}{SP_{in}^2}. \tag{8}$$

Soient $P_{1n},P_{2n},\ldots,P_{nn}$ les points extrémaux de F. Puisque $S\bar{\epsilon}F$ et que $1/SR^2$ (R étant un point de F) est une fonction continue de R, on a

$$\lim_{n}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\frac{1}{SP_{in}^2}=\int_F\frac{d\mu(\Delta_R)}{SR^2}<\infty.$$

En faisant tendre n vers ∞, on déduit de (8) l'inégalité

$$u(P)\geqslant\frac{1}{d(F)}-(SQ+QP)\int_F\frac{d\mu(\Delta_R)}{SR^2}. \tag{9}$$

Soit K une sphère de centre au point Q. On a

$$\frac{1}{d(F)}=\int_F\frac{d\mu(\Delta_R)}{SR}=\int_{F-KF}\frac{d\mu(\Delta_R)}{SR}+\int_{KF}\frac{d\mu(\Delta_R)}{SR}.$$

Puisque Q satisfait à la condition de Poincaré, on peut choisir le point $S\in D$ de manière qu'on ait $\varrho(S,F)/SQ\geqslant\lambda>0$, où $\varrho(S,F)$ est la distance du point S à la frontière F.

Supposons que la position du point $P\in D_\infty$ soit telle qu'on ait $PQ=SQ$. Alors

$$(SQ+QP)\int_F\frac{d\mu(\Delta_R)}{SR^2}=2SQ\int_F\frac{d\mu(\Delta_R)}{SR^2}. \tag{10}$$

Mais, puisque Q est le sommet d'un cône appartenant à D, on a

$$2\,SQ\int\limits_{KF}\frac{d\mu(\Delta_R)}{SR^2}<\frac{2\,SQ}{\varrho(S,KF)}\int\limits_{KF}\frac{d\mu(\Delta_R)}{SR}\leqslant\frac{2}{\lambda}\int\limits_{KF}\frac{d\mu(\Delta_R)}{SR}.$$

Choisissons le rayon de la sphère K si petit qu'on ait

$$(11)\qquad 2\,SQ\int\limits_{KF}\frac{d\mu(\Delta_R)}{SR^2}\leqslant\frac{2}{\lambda}\int\limits_{KF}\frac{d\mu(\Delta_R)}{SR}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour cette sphère, on a

$$2\,SQ\int\limits_{K-KF}\frac{d\mu(\Delta_R)}{SR^2}<\frac{2\,SQ}{\varrho^2(S,F-KF)}$$

et, lorsque $SQ=PQ$ est suffisamment petit,

$$(12)\qquad 2\,SQ\int\limits_{F-KF}\frac{d\mu(\Delta_R)}{SR^2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Les inégalités (9), (10), (11) et (12) prouvent que, lorsque la distance PQ est suffisamment petite, on a l'inégalité

$$u(P)>\frac{1}{d(F)}-\varepsilon.$$

ON A CONJECTURE OF H. STEINHAUS

By Alfred Rényi (Budapest)

Introduction. In a lecture [1] in 1937 H. Steinhaus formulated the following conjecture: if a system

$$\{f_n(x)\} \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{1}$$

consisting of a finite or enumerably infinite number of stochastically independent[1]) measurable functions defined in a finite interval (a,b), *is saturated with respect to independence*, i. e. if there exists no measurable function $g(x)$, which is not constant almost everywhere, and which could be added to the system (1) without violating the independence of the system, then the system of functions

$$\{f_1^{m_1}(x)\cdot f_2^{m_2}(x)\cdot\ldots\cdot f_n^{m_n}(x)\} \tag{2}$$

where $m_1, m_2, \ldots, m_n$ run independently over all non-negative integers, and $n=1,2,3,\ldots$, is complete in the interval (a,b). He mentioned some suggestive examples, in which the above

[1]) In what follows the term "stochastically" will be generally omitted; when we speak of independence we always mean stochastic independence. The independence of measurable functions was defined first by Steinhaus [2], the equivalence of his definition with the definition of A. N. Kolmogoroff (*Über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ergebnisse d. Math. (1933)), in answer to a question of E. Marczewski, for the case of Lebesgue measure has recently been proved by S. Hartman (Colloquium Math. I, 1948, p. 19-22). In the general case the two definitions do not agree (see J. L. Doob, ibidem, p. 216-217). By the assertion that (1) is a system of independent functions, we mean that these functions are independent in their totality, i. e. not only every pair of these functions, but also every 3, every 4,...., every n-tuple of functions of the systems are independent of one another.

assertion is valid, for instance when (1) is the system of Rademacher functions

$$(3) \qquad R_n(x) = \operatorname{sg} \sin(2^{n-1}\pi x) \qquad (n=1,2,3,\dots)$$

in which case (2) is the well known Walsh system which is known to be complete in the interval (0,1). Another example is as follows: a function which itself forms a system, saturated with respect to independence, will be called a *universal function.* Clearly $f_1(x)=x$ is a universal function; in this case (2) is the system $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ which is known to be complete.

In spite of these suggestive examples, the conjecture is not true in general. Let us consider for instance the function

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{if } \frac{1}{2} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

As $h(x)$ is monotonic in $(0,\frac{1}{2})$ and outside this interval it does not again take on the values which it takes on in $(0,\frac{1}{2})$, according to a theorem of Ottaviani [3], $h(x)$ is a universal function. On the other hand it is easy to see that the system $\{h^n(x)\}$ is not complete, as $h^n(x)$ is for every value of n orthogonal to the function $g(x)$, which is defined as follows:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{if } \frac{1}{2} < x \leqslant \frac{3}{4}, \\ -1 & \text{if } \frac{3}{4} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Nevertheless, the conjecture of Steinhaus is valid for a very general class of saturated systems of independent functions.

The purpose of the present paper is to prove the above mentioned conjecture of Steinhaus under very general conditions. In a lecture [4] held at the First Hungarian Mathematical Congress in 1950 at Budapest, I proved the same conjecture under more restrictive conditions; in the meantime I succeeded in eliminating some of these conditions. In § 1 I shall prove a general theorem which makes it possible to establish the completeness of system (2) under a condition in which the notion of independence does not figure at all; this is a theorem of the theory of real functions, nevertheless it contains all known cases in which the conjecture of Steinhaus is valid. We introduce the notion of *maximal systems*;

the system (1) of real measurable functions defined in (a,b) is called maximal, if for different values of x the sequences $\{f_n(x)\}$ are different (except for a set of measure 0 of values of x). Thus we call the system (1) maximal if there exists a set Z of measure 0, such that if x_1 and x_2 do not belong to Z and $f_n(x_1)=f_n(x_2)$ for all values of $n=1,2,3,\ldots$, then $x_1=x_2$. The content of the theorem is that if system (1) is maximal, system (2) is complete. All examples of systems (1) of independent functions, for which system (2) is complete, are maximal systems. It is also interesting to note that a maximal system of independent functions is always saturated with respect to independence (Lemma 3). An interesting example of a maximal system in the interval $(0,2\pi)$, is the system consisting of the two functions $\sin x$, $\cos x$; in this case system (2) — after omitting those functions which are linearly dependent on the others — is the system $\{\cos^n x, \sin x\cdot\cos^n x;\ n=0,1,2,\ldots\}$ which is equivalent [2]) to the system $\{\cos nx, \sin(n+1)x;\ n=0,1,2,\ldots\}$, i. e. to the well known trigonometrical system, which is known to be complete. Further $\cos x$ in itself forms a maximal system in $(0,\pi)$ and thus the system $\{\cos^n x\}$, — or, which is the same, the system $\{\cos nx\}$ — is complete in $(0,\pi)$ (see [5]).

The example of the system $\{\sin x, \cos x\}$ may be generalized as follows: if $u=f(x)$ and $v=g(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ are the parametric equations of a curve in the (u,v)-plane, which does not intersect itself (or the set of multiple points of which corresponds to a set of measure zero of values of x) then the system $\{f^n(x)\cdot g^m(x);\ n,m=0,1,2,\ldots\}$ is complete (we suppose $f(x)$ and $g(x)$ to be bounded and measurable). The case in which system (1) consists only of a single function, is not completely trivial either: in this case the theorem asserts that if $f(x)$ is bounded and measurable in (a,b), further if $y=f(x)$ establishes a one-to-one mapping of the interval (a,b) onto a set on the y-axis, then the system $\{f^n(x)\}$ is complete; this is Lemma 2 of the present paper; it is stated in the form of a Lemma, though it is a special case of our theorem, because

[2]) We call two systems of functions *equivalent*, if the sets of linear combinations of the two systems are identical. Clearly if a system is complete, any system equivalent to it is also complete.

the proof of the general case is based on this special case. A function which forms a maximal system in itself, will be called a *maximal function*.

The most important step which leads from Lemma 2 to our theorem is the application of an idea of A. N. Kolmogoroff; he used this idea to prove a theorem on conditional mean values in [6] in which he generalizes an earlier theorem of mine [7] on the invariance of the central limit theorem of probability theory, with respect to the change of measure on the underlying field of probability[3]).

§ 1. Proof of the theorem on complete systems. We begin by proving the following

Lemma 1. *Let $f(x)$ denote a measurable, bounded function, defined in the interval $(0,1)$*[4]), *with values belonging to the same interval. If $g(x)$ is any bounded Baire function in $(0,1)$ and $A \geqslant 1$, for any $\varepsilon > 0$ a polynomial $P(x)$ can be found such that*

$$\int_0^1 |g(f(x)) - P(f(x))|^A \, dx < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Proof. First we prove (1.1) for the case in which $g(x)=1$ if $0 \leqslant x \leqslant u < 1$ and $g(x)=0$ for $u < x < 1$. Given $\varepsilon > 0$, we can find a polynomial $P(x)$ with the following properties: 1. $0 \leqslant P(x) \leqslant 1$, 2. $|g(x)-P(x)| < \varepsilon$ if $0 \leqslant x \leqslant u$ and if $u+\varepsilon \leqslant x \leqslant 1$.

For instance, the polynomial

$$P(x) = \frac{\int\limits_0^{u+1/\sqrt[3]{n}} (1-(x-t)^2)^n \, dt}{\int\limits_{-1}^{+1} (1-t^2)^n \, dt} \tag{1.2}$$

if n is chosen sufficiently large, has all the required properties. It follows, that

$$\int_0^1 |g(f(x)) - P(f(x))|^A \, dx \leqslant \varepsilon^A + |E(\varepsilon)| \cdot C, \tag{1.3}$$

---

[3]) I am thankful to Á. Császár for a valuable remark, which helped me to simplify my proof.

[4]) Throughout this paper we consider the interval $(0,1)$, but evidently all our theorems are valid for any finite interval.

where $E(\varepsilon)$ denotes the set of those points for which $u<f(x)<u+\varepsilon$ and $|E(\varepsilon)|$ its Lebesgue measure, and C is a positive constant. As evidently $\lim_{\varepsilon\to 0} E(\varepsilon)=0$, (1) is proved for the functions mentioned. Applying the well known inequality of H. Minkowski:

$$(1.4)\qquad \int_0^1 |a(x)+b(x)|^A\,dx \leqslant \Big[\Big(\int_0^1 |a(x)|^A\,dx\Big)^{\frac{1}{A}}+\Big(\int_0^1 |b(x)|^A\,dx\Big)^{\frac{1}{A}}\Big]^A$$

it follows that if Lemma 1 holds for $g(x)=g_k(x)$, $k=1,2,\dots,m$, it also holds for $g(x)=\sum_{k=1}^{m} c_k g_k(x)$. Thus Lemma 1 holds for any step function. Using the same inequality it follows that if Lemma 1 holds for $g(x)=g_n(x)$, $n=1,2,\dots$, and

$$(1.5)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 |g_n(f(x))-g^*(f(x))|^A\,dx=0$$

it holds for $g^*(x)$ also. But as for any continuous function, and therefore for any bounded Baire function $g^*(x)$, a sequence of step-functions $g_n(x)$ can be found such that (1.5) holds, it follows that Lemma 1 holds for any bounded Baire function $g(x)$.

Now we can prove

Lemma 2. *If $f(x)$ is a measurable, bounded and maximal function in the interval $(0,1)$ and $0\leqslant f(x)\leqslant 1$, the set of functions*

$$(1.6)\qquad \{f^n(x)\}\qquad (n=0,1,2,\dots)$$

is closed in the space L^2.

Proof. Let us suppose first that $f(x)$ is a Baire function. Let $G(x)$ denote any bounded Baire function, in the interval $(0,1)$. Since $f(x)$ is maximal, it follows that $f^{-1}(y)$ and thus $G(f^{-1}(y))=g(y)$ are also bounded Baire functions [5]), and applying Lemma 1 with $A=2$ to $g(x)$, since $g(f(x))=G(x)$, it follows that for any $\varepsilon>0$ a polynomial $P(x)$ can be found such that

$$(1.7)\qquad \int_0^1 |G(x)-P(f(x))|^2\,dx<\varepsilon.$$

[5]) For those values of y which do not belong to the set of values of $f(x)$, we define $f^{-1}(y)=0$.

As to any measurable function $F(x)$ of the class L^2 a bounded Baire function $G(x)$ can be found such that $\int_0^1 (F(x)-G(x))^2 dx < \varepsilon$, Theorem 1 holds if $f(x)$ is a Baire function. But as the integral (1.7) is not changed if the value of $f(x)$ is changed on a set of measure zero, Theorem 1 is proved.

Now we prove our

Theorem. *Let $\{f_n(x)\}$ be a finite or enumerably infinite maximal system of bounded measurable functions in the interval $(0,1)$, then the set of functions*

$$f_1^{m_1}(x)\cdot f_2^{m_2}(x)\cdot \ldots \cdot f_n^{m_n}(x) \qquad (m_k=0,1,2,\ldots;\quad k=1,2,\ldots,n;\quad n=1,2,\ldots) \tag{1.8}$$

is complete in L^2.

Proof. We may evidently suppose that $0\leqslant f_n(x)\leqslant 1$, further that all $f_n(x)$ are Baire functions. Let us put

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n(x)}{2^{2n-1}}, \quad \text{where} \quad x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n(x)}{2^n}, \tag{1.9}$$

is the dyadic expansion of x, i. e.

$$\varepsilon_n(x)=\begin{cases} 1 & \text{if } \ \frac{1}{2}\leqslant(2^{n-1}x)<1, \\ 0 & \text{if } \ 0\leqslant(2^{n-1}x)<\frac{1}{2}, \end{cases}$$

where (z) denotes the fractional part of z.

Further let us define $\varphi_k(x)=\varphi_{k-1}(\varphi_1(x))$ for $k=2,3,\ldots,$ and

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(f_k(x))}{2^{2^{k-1}-1}}. \tag{1.10}$$

As $\varphi_1(x)$ is a Baire function, $\varphi_k(f_k(x))$ and thus $f(x)$ is also a Baire function. It is easy to see further that $f(x)$ is a maximal function [6]). As a matter of fact, if $N=2^{r-1}(2s-1)$ we have $\varepsilon_N(f(x))=$ $=\varepsilon_s(f_r(x))$; thus if $x_1 \neq x_2$, there exists (except when x_1 or x_2

---

[6]) The introduction of a single function of one real variable, which is maximal if and only if system (1) is maximal, is the idea of A. N. Kolmogoroff referred to in the introduction.

belongs to a certain set Z of measure 0) at least one value of r for which $f_r(x_1) \neq f_r(x_2)$, and thus at least one value of s for which $\varepsilon_N(f(x_1)) = \varepsilon_s(f_r(x_1)) \neq \varepsilon_s(f_r(x_2)) = \varepsilon_N(f(x_2))$, where $N = 2^{r-1}(2s-1)$; thus we obtain $f(x_1) \neq f(x_2)$. It follows by Lemma 2, that for an arbitrary $F(x) \in L^2$ for any $\varepsilon > 0$ a polynomial $P(x)$ can be found such that

$$(1.11) \qquad \int_0^1 (F(x) - P(f(x)))^2 dx < \varepsilon.$$

Let us put

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\varphi_k(f_k(x))}{2^{2^{k-1}-1}}.$$

As we have $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $0 \leqslant S_N(x) \leqslant 1$ and

$$(1.12) \qquad |f(x) - S_N(x)| < \frac{1}{2^{2^N}}$$

for all values of x, it follows, that for any $\varepsilon > 0$ a polynomial $P(x)$ and an integer N can be found, such that

$$(1.13) \qquad \int_0^1 (F(x) - P(S_N(x)))^2 dx < 4\varepsilon.$$

But again using Lemma 1, we can find for any $A > 0$ and $\delta > 0$ polynomials $P_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ such that

$$(1.14) \qquad \int_0^1 |\varphi_k(f_k(x)) - P_k(f_k(x))|^A dx < \delta^A \quad \text{for } k = 1, 2, \ldots, N$$

and thus

$$(1.15) \qquad \int_0^1 |\varphi_k(f_k(x)) - P_k(f_k(x))|^r dx < \delta \quad \text{for } r \leqslant A \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Choosing for A the degree of $P(x)$, after some calculation by putting

$$(1.16) \qquad \sigma_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{P_k(f_k(x))}{2^{2^{k-1}-1}},$$

we obtain:

$$(1.17) \qquad \int_0^1 |P(s_N(x)) - P(\sigma_N(x))|^2 dx < C\delta,$$

where C is a constant which depends only on $P(x)$. Choosing $\delta=\varepsilon/c$ we obtain

$$\int_0^1 |F(x)-P(\sigma_N(x))|^2 dx < 9\varepsilon. \tag{1.18}$$

As $P(\sigma_N(x))$ is of the form

$$\sum_{m_1=0} \sum_{m_2=0} \cdots \sum_{m_N=0} c_{m_1 m_2 \ldots m_N} f_1^{m_1}(x) \cdot f_2^{m_2}(x) \cdot \ldots \cdot f_N^{m_N}(x), \tag{1.19}$$

i. e. is a finite linear combination of the functions (1.8) it fol lows that the system (1.8) is closed, and thus complete in L^2.

§ 2. Some remarks on independent functions. We first prove

Lemma 3. *If the system of independent functions $\{f_n(x)\}$ is maximal, it is saturated with respect to independence.*

Proof. We may suppose here also that the functions $f_n(x)$ are Baire functions. Let us suppose, that there exists a function $g(x)$ of the class L^2 such that the system $\{g(x); f_n(x)\}$ is a system of independent functions. Then the function $g(x)$ is independent of $\varphi_k(f_k(x))$ for $k=1,2,\ldots$ (note that $\varphi_k(x)$ is a monotonic function!) and thus $g(x)$ is independent of

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(f_k(x))}{2^{2^{k-1}-1}} \tag{2.1}$$

also. Thus the functions $f^n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ are all independent of $g(x)$, and we have (see [2]) putting $\gamma=\int_0^1 g(x)\,dx$

$$\int_0^1 f^n(x)(g(x)-\gamma)\,dx = \int_0^1 f^n(x)\,dx \cdot \int_0^1 (g(x)-\gamma)\,dx = 0 \tag{2.2}$$

for $n=0,1,2,\ldots$ Clearly $f(x)$ is a maximal function and therefore the system $\{f^n(x)\}$ is closed, and thus complete. This implies that $g(x)-\gamma$ is almost everywhere equal to 0, and thus $g(x)\equiv\gamma$ almost everywhere. This proves Lemma 3.

Thus we have deduced the completeness of system (2) from an assumption (that of maximality) regarding system (1), which in the case of independent functions is somewhat stronger than the assumption that (1) is saturated whith respect to independence.

The following problem still remains unsolved:

What are the necessary and sufficient conditions regarding the system (1) of independent functions, which ensure the completeness of system (2)?

BIBLIOGRAPHY

[1] H. Steinhaus, *La théorie et les applications des fonctions indépendantes au sens stochastique*, Colloque consacré à la Théorie des Probabilités, Part V, Actualités Sci. et Ind. 738 (1938), p. 57-73.

[2] M. Kac, *Sur les fonctions indépendantes*, Studia Math. 6 (1936), p. 46-58.

[3] G. Ottaviani, *Sulle funzioni indipendenti*, Giorn. Ist. Ital. Attuari 11 (1940), p. 270-282.

[4] A. Rényi, *Stochastical independence and complete systems of functions*, Transactions of the First Hungarian Mathematical Congress, 1950 (in print).

[5] A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Warszawa 1935, p. 13, Example 4.

[6] A. N. Kolmogoroff, *A Theorem on the Convergence of Conditional Mean Values with Some Applications*, Transactions of the First Hungarian Mathematical Congress, 1950 (in print).

[7] A. Rényi, *Contribution to the Theory of Independent Random Variables*, Acta Math. Acad. Sci Hung. I. 1 (1950), p. 99-103.

Budapest, Institute for Applied Mathematics of the Academy of Sciences of Hungary, September 7, 1951.

ON THE LOCALIZATION OF VALUES OF VECTOR VALUED FUNCTIONS

By A. ALEXIEWICZ (Poznań)

In the theory of analytic functions we often observe a plane analogy between the theorems of uniqueness and the theorems of the Vitali type concerning the convergence of sequences of analytic functions. Examples of such analogous theorems are the classical theorem of uniqueness and the theorem of Vitali, or Blaschke's theorem of uniqueness and the theorem of convergence of the same author [2], or the theorem of uniqueness of Riesz [9] and the theorem of Khintchine [5].

The purpose of this paper is to show that these analogies have a common source in a theorem dealing with vector valued functions. Then we prove as applications a series of theorems concerning vector valued analytic functions, in particular we give a new proof of the theorem of Vitali for vector valued functions [1]).

1. Let X be a real or complex Banach space. Every closed set which can be obtained from a linear set by a translation is called a *linear variety*.

We will denote by $x(t), x(\zeta), y(\zeta), v(\zeta)$ vector valued functions, i. e. with values in X, by $\varphi(t), \varphi(\zeta), \gamma(\zeta)$ the complex or real valued functions which will be termed in the sequel the *numerical functions*.

Let $\mathfrak{A}$ denote a class of numerical functions $\varphi(t)$ defined in a set T, such that $\varphi(t)$ — const belongs to $\mathfrak{A}$ whenever $\varphi(t)$

[1]) See section 2.1 of this paper; for an alternative proof see Hille [4], p. 61.

belongs to $\mathfrak{A}$. The set A will be called *U-set* relative to the class $\mathfrak{A}$ or, briefly, the U-set if every function $\varphi(t) \in \mathfrak{A}$ vanishing in A vanishes identically.

Theorem 1. *Suppose that the function $x(t)$ is such that for every functional ξx linear in X the function $\xi x(t)$ belongs to $\mathfrak{A}$. Let L be a linear variety in X. If $x(t) \in L$ for every t in a U-set A, then all the values of $x(t)$ belong to L.*

Proof. Suppose that there is a t_0 such that $x(t_0) \operatorname{non} \in L$, then we can choose a linear functional ξ such that

$$\xi x = a \quad \text{for} \quad x \in L,$$
$$\xi x(t_0) \neq a.$$

But this is impossible since the numerical function $\xi x(t)$ is in $\mathfrak{A}$ and $\xi x(t) = a$ for $t \in A$.

Remark. Theorem 1 is valid also in the case when X is a convex linear topological space (Wehausen [10]).

2. Now we shall supply some applications of Theorem 1 to holomorphic vector valued functions.

A function $x(\zeta)$ defined in a domain D of the complex plane (with values in a complex Banach space) is said to be *holomorphic in D* if it is everywhere differentiable in D. It is well known that the chief theorems concerning the numerical holomorphic functions still hold in this more general case; in particular every holomorphic function is representable by Cauchy's integral and developable in Taylor's series. The function $x(\zeta)$ is holomorphic in D if and only if for every linear functional ξx the numerical function $\xi x(\zeta)$ is holomorphic in D (Dunford [3], p. 354).

The function $x(\zeta)$ is said to be *almost bounded* in D if it is bounded in every compact subset of D. A set Γ of linear functionals will be termed *fundamental* if there are two positive constants K and k such that for every x

$$\sup_{\xi \in \Gamma, \|\xi\| \leqslant K} |\xi x| \geqslant k\|x\|.$$

The following criterion is important in applications:

Criterion of Dunford[2]. *The function $x(\zeta)$ is holomorphic in D if it is almost bounded in D and if for every ξ in a fundamental set Γ the function $\xi x(\zeta)$ is holomorphic in D.*

In view of the classical theorem and the theorem of Blaschke of uniqueness one gets from Theorem 1 the following theorems of uniqueness for vector valued functions:

If the function $x(\zeta)$ is holomorphic in D and vanishes in a set having a limit point interior to D, then $x(\zeta)$ vanishes identically.

If the function $x(\zeta)$ is holomorphic in the unit circle, if $\sup\limits_{0<r<1}\int\limits_0^{2\pi}\log^+|\xi x(re^{i\varphi})|\,d\varphi<\infty$ for every linear functional ξ and if $x(\zeta_n)=0$, $\{\zeta_n\}$ being a sequence such that $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-|\zeta_n|)=\infty$, then $x(\zeta)$ vanishes identically.

To deduce from Theorem 1 theorems of the Vitali type we must first introduce some functional spaces.

2.1. Let $m\{X\}$ denote the Banach space composed of the bounded sequences $y=\{x_n\}$ of elements of the space X, the norm being defined as $\|y\|=\sup\limits_n\|x_n\|$. The subset L of $m\{X\}$ composed of these $y=\{x_n\}$ for which x_n converges forms a linear variety. If we take as Γ the set of functionals linear on $m\{X\}$ of the form $\eta y=\xi x_n$, where ξ is any linear functional in X and n is any positive integer we get a fundamental set.

Every sequence $\{x_n(\zeta)\}$ of functions defined in D, bounded for every ζ gives rise to the function $y(\zeta)=\{x_n(\zeta)\}$ from D to $m\{X\}$. If moreover the functions $x_n(\zeta)$ are holomorphic in D and almost uniformly bounded (i. e. uniformly in every compact subset of D), then by the criterion of Dunford the function $y(\zeta)$ is holomorphic in D.

Choose now as $\mathfrak{A}_1$ the class of the numerical holomorphic functions, as A a set with a limit point interior to D; this set is a U-set. Hence Theorem 1 gives the

---

[2]) Proved implicitely in [3], p. 354.

Theorem of Vitali for vector valued functions. *If the sequence $\{x_n(\zeta)\}$ of functions holomorphic in D is almost uniformly bounded in D and converges in a set having a limit point interior to D, then the sequence converges almost uniformly*[3]) *in D.*

Proof. Theorem 1 implies the convergence everywhere of the sequence $\{x_n(\zeta)\}$. Almost uniform boundedness implies equicontinuity of the sequence in every compact subset of D and this in turn implies almost uniform convergence.

Denote now by L_1 the set of elements $y=\{x_n\}$ of $m\{X\}$ such that the sequence $\{x_n\}$ converges weakly[4]). It is easy to prove that the set L_1 is closed and linear. Hence Theorem 1 yields

Theorem 2. *Let the sequence $\{x_n(\zeta)\}$ of functions holomorphic in D be almost uniformly bounded there and converge weakly in a set which has a limit point interior to D. Then this sequence converges weakly at any point of D to a holomorphic function $x(\zeta)$, moreover there exist non-negative numbers a_{in} $(i=1,2,\dots,n)$ such that $a_{1n}+\dots+a_{nn}=1$ and the functions*

$$x_n^*(\zeta)=\sum_{i=1}^{n} a_{in}x_i(\zeta)$$

converge almost uniformly in D to $x(\zeta)$.

Proof. The first part of the theorem results from Theorem 1. To prove the second part suppose that the sequence $\{x_n(\zeta)\}$ converges weakly at $\zeta=\zeta_j$ and that the ζ_j converge to an inner point of D. By a theorem of Mazur ([7], p. 81) we can choose numbers a_{in} such that $a_{in}\geqslant 0$, $a_{1n}+\dots+a_{nn}=1$ and $\|x_n^*(\zeta_i)-x(\zeta_i)\|<1/n$ for $i=1,2,\dots,n$. Since the sequence $\{x_n^*(\zeta)\}$ is (obviously) almost uniformly bounded, it converges almost uniformly in D. The identity of its limit with $x(\zeta)$ follows by the uniqueness theorem.

---

[3]) i. e. uniformly in every compact subset of D.

[4]) The sequence x_n converges weakly if there exists an element x_0 such that $\lim_{n\to\infty} \xi x_n = \xi x_0$ for every linear functional ξx. The element x_0 is then written (w) $\lim_{n\to\infty} x_n$.

2.2. Denote by $\mathfrak{A}_2$ the class of functions $\psi(\zeta)$ holomorphic in the unit circle K and such that

$$\sup_{0\leqslant r<1}\int_0^{2\pi}\log^+|\psi(re^{i\varphi})|\,d\varphi<\infty.$$

Every set containing a sequence $\{\zeta_n\}$ such that $|\zeta_n|<1$ and $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\zeta_n|)=\infty$ is a U-set for the class $\mathfrak{A}_2$!.

Let $\alpha(\zeta)$ be a non-negative function defined in K such that

$$\sup_{0\leqslant r<1}\int_0^{2\pi}\log^+|\alpha(re^{i\varphi})|\,d\varphi=C<\infty,$$

and let $\{x_n(\zeta)\}$ be a sequence of functions holomorphic in K such that

$$\|x_n(\zeta)\|\leqslant\alpha(\zeta).$$

These functions are almost uniformly bounded in K. For, given any linear functional ξx, the function $\log^+|\xi x(\zeta)|$ being subharmonic, we get for $r<R<1$

$$\log^+|\xi x_k(re^{i\varphi})|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\vartheta)}\log^+|\xi x_k(Re^{i\vartheta})|\,d\vartheta$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{R+r}{R-r}\int_0^{2\pi}\log^+|\xi x_k(Re^{i\vartheta})|\,d\vartheta\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{R+r}{R-r}\int_0^{2\pi}\log^+[\|\xi\|\alpha(Re^{i\vartheta})]\,d\vartheta$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{R+r}{R-r}(2\pi\log^+\|\xi\|+C).$$

Hence

$$|\xi x_k(re^{i\varphi})|\leqslant 1+\exp\left[\frac{R+r}{R-r}\left(\log^+\|\xi\|+\frac{C}{2\pi}\right)\right].$$

Choosing ξ so that $\xi x_k(re^{i\varphi})=\|x_k(re^{i\varphi})\|$, $\|\xi\|\leqslant\sqrt{2}$ we get

$$\|x_k(re^{i\varphi})\|\leqslant\exp\left[\frac{R+r}{R-r}\left(\sqrt{2}+\frac{C}{2\pi}\right)\right]+1\leqslant\exp\left[\frac{1+r}{1-r}\left(\sqrt{2}+\frac{C}{2\pi}\right)\right]+1.$$

Yet, we can consider the function $y(\zeta)=\{x_n(\zeta)\}$ as a holomorphic function from K to $\boldsymbol{m}\{X\}$, as in the case 2.1. Since for every functional ηy linear in $\boldsymbol{m}\{X\}$

$$|\eta y(\zeta)|\leqslant\|\eta\|\|y(\zeta)\|\leqslant\|\eta\|a(\zeta),$$

the function $\eta y(\zeta)$ is in $\mathfrak{A}_2$. Hence similarly as in 2.1 we deduce

Theorem 3. *Let $\{x_n(\zeta)\}$ be a sequence of functions holomorphic in K and such that $\|x_n(\zeta)\|<a(\zeta)$ and*

$$\sup_{0\leqslant r<1}\int_0^{2\pi}\log^+|a(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta<\infty.$$

If $|\zeta_k|<1$, $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\zeta_k|)=\infty$ and the sequence $\{x_n(\zeta)\}$ converges for $\zeta=\zeta_k$, then this sequence converges almost uniformly in K.

2.3. Denote by $\boldsymbol{M}$ the space of complex valued functions $\varphi(p)$ defined on a topological space P and bounded there. With the usual definitions of addition and multiplication by numbers and with the norm defined as $\|\varphi\|=\sup_{p\in P}|\varphi(p)|$, $\boldsymbol{M}$ is a Banach space. The set L composed of the functions $\varphi(p)$ which are continuous is closed and linear in $\boldsymbol{M}$.

D being any domain in the complex plane, every numerical function $\varphi(\zeta,p)$ defined in $D\times P$ and bounded for fixed ζ may be considered as a function $x(\zeta)$ from D to P. The function $\varphi(\zeta,p)$ will be said to be *almost uniformly bounded in $D\times P$* f it is bounded in every set $F\times P$ where F is a compact subset of D. Choosing an appropriate fundamental set of linear functionals one can easily show that $x(\zeta)$ is holomorphic in D if the function $\varphi(\zeta,p)$ is almost uniformly bounded in $D\times P$ and holomorphic in ζ for fixed p.

Theorem 4. *Let the function $\varphi(\zeta,p)$ be almost uniformly bounded in $D\times P$ and holomorphic for fixed p. If $\varphi(\zeta,p)$ is continuous in p for fixed ζ belonging to a set with a limit point interior to D, then the function $\varphi(\zeta,p)$ is continuous in $D\times P$.*

Proof. Applying Theorem 1 as in the case 2.1 we see that the function $\varphi(\zeta,p)$ is continuous in p for fixed ζ. The formula

$$\varphi(\zeta',p)-\varphi(\zeta'',p)=\frac{\zeta''-\zeta'}{2\pi i}\oint\frac{\varphi(\sigma,p)}{(\sigma-\zeta')(\sigma-\zeta'')}\,d\sigma$$

implies that for every compact set $F\subset D$

$$|\varphi(\zeta',p)-\varphi(\zeta'',p)|\leqslant K(F)|\zeta'-\zeta''|,$$

$K(F)$ depending only on F. The continuity of $\varphi(\zeta,p)$ now follows immediately.

Now take as P a domain Δ of the complex plane; then the class L_1 composed of the functions $\varphi(p)$ which are holomorphic in Δ forms a linear variety in $\boldsymbol{M}$. By an argument similar to the above we can prove

Theorem 5. *Let the function $\varphi(\zeta,\sigma)$ of two complex variables σ and ζ be bounded in $D\times\Delta$ and let it be holomorphic for fixed σ. If for every ζ belonging to a set having a limit point interior to D the function $\varphi(\zeta,\sigma)$ is holomorphic as a function of σ alone, then $\varphi(\zeta,\sigma)$ is holomorphic in the two variables jointly.*

3. We give now a theorem of localization of values of a vector valued function dealing with the boundary values of the function.

If for a (vector valued or numerical) function $x(\zeta)$ defined in the unit circle K there exists the limit as ζ tends to $e^{i\varphi}$ in such a manner that the ratio $|e^{i\varphi}-\zeta|/|e^{i\varphi}-|\zeta||$ remains bounded, this limit will be denoted by $\lim\limits^{*}_{\zeta\to e^{i\varphi}} x(\zeta)$. The weak limit under the same conditions will be written $(\mathrm{w})\lim\limits^{*}_{\zeta\to e^{i\varphi}} x(\zeta)$.

Theorem 6. *Let the function $x(\zeta)$ be holomorphic in the unit circle K and suppose there exists the limit*

$$(\mathrm{w})\lim^{*}_{\zeta\to e^{i\varphi}} x(\zeta)=y(\varphi) \tag{2}$$

for every φ in a set C of positive measure. If for every $\varphi\in C$ the element $y(\varphi)$ belongs to a linear variety L, then all the values of $x(\zeta)$ lie in L.

Proof. Let $\mathfrak{A}_3$ denote the class of numerical functions $\gamma(\zeta)$ holomorphic in K for which $\lim\limits_{\zeta\to e^{i\varphi}}^* \gamma(\zeta)$ exists for every $\varphi \in C$. Let S be the set of the points $e^{i\varphi}$ with $\varphi \in C$. Let us consider the functions of the class $\mathfrak{A}_3$ as defined in $K+S$. By a theorem of Lusin and Privaloff ([6], p. 159) the set S is a U-set for the class $\mathfrak{A}_3$. Since $\xi x(\zeta)$ belongs to $\mathfrak{A}_3$ for every linear functional ξx, we can apply Theorem 1.

Similarly, dealing with the class $\mathfrak{A}_4$ of bounded and holomorphic functions in K we get

Theorem 7. *The thesis of Theorem 6 remains true if we suppose the functions to be holomorphic and bounded in K and replace the limit (2) by the radial limit*

$$(\mathrm{w}) \lim_{r\to 1-} x(re^{i\varphi}) = y(\varphi).$$

The following theorem shows that the hypothesis of existence of the limit (2) is equivalent to a stronger one

Theorem 8. *Let the function $x(\zeta)$ be holomorphic in K and suppose that for any $\varphi \in C$ there exists the weak limit (2). Then the strong limit*

$$\lim_{\zeta\to e^{i\varphi}}^* x(\zeta)$$

exists for almost every $\varphi \in C$.

Proof. We prove the theorem first under the hypothesis that $x(\zeta)$ is bounded, and $|C| = 2\pi$. Then the function

$$y(\varphi) = (\mathrm{w}) \lim_{\zeta\to e^{i\varphi}}^* x(\zeta) = (\mathrm{w}) \lim_{r\to 1-} x(re^{i\varphi})$$

is measurable by a theorem of Pettis ([8], p. 278), and the boundedness of $y(\varphi)$ implies integrability in the sense of Bochner. Hence there exists the integral

$$v(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}\, y(\varphi)\, d\varphi,$$

and since $\xi v(re^{i\vartheta}) = \xi x(re^{i\vartheta})$ for every linear functional ξ, we get $v(\zeta) = x(\zeta)$. It remains to prove that for the Poisson integral $v(\zeta)$ the limit $\lim^*_{\zeta\to e^{i\varphi}} v(\zeta)$ exists and is equal almost everywhere to $y(\varphi)$; this may be shown exactly as for numerical functions.

Passing now to the general case [5]), denote by $\Delta_n(\varphi)$ the closed equilateral triangle with axis on the segment $[0, e^{i\varphi}]$, one vertex at $e^{i\varphi}$ and two equal sides of length $1/n$ forming the angle $\pi - 2/n$. It is sufficient to prove that, given any $\varepsilon > 0$, there exists a set $D \subset C$ such that $|C-D| < \varepsilon$ and that for any $\varphi \in D$ $x(\zeta)$ tends to a limit as $\zeta \to e^{i\varphi}$ through the set $\Delta_{n/2}(\varphi)$. For every $\varphi \in C$ there exists the weak limit of the function $x(\zeta)$ as $\zeta \to e^{i\varphi}$ varying in the set $\Delta_n(\varphi)$, hence $\gamma(\varphi) = \sup_{\zeta \in \Delta_n(\varphi)} \|x(\zeta)\| < \infty$. Since the function $\gamma(\varphi)$ is measurable, there exists a closed set $D \subset C$ such that $|C-D| < \varepsilon$ and $\sup_{\varphi \in D} \gamma(\varphi) = k < \infty$. We now form a domain G composed of the circle $|\zeta| \leqslant \sqrt{1 - \frac{1}{n^4}}$ and the triangles $\Delta_n(\varphi)$ with $\varphi \in D$; the boundary B of G is a rectifiable curve. The function $x(\zeta)$ is bounded in G and for every $\sigma \in B$ there exists the limit $(\mathrm{w}) \lim_{\zeta\to\sigma} x(\zeta)$. We finish the proof by mapping conformally the domain G into K and using the well known properties of conformal mappings on the boundary of the domains.

Theorem 7 applied to the space $m\{X\}$ and the linear variety introduced in 2.1 gives the following extension to the case of vector valued functions of a theorem of Khintchine [5]:

Let the functions $x_n(\zeta)$ be holomorphic and uniformly bounded in the unit circle K and suppose that

$$(\mathrm{w}) \lim^*_{\zeta\to e^{i\varphi}} x_n(\zeta) = y_n(\varphi)\ ^{6)}$$

exists for any φ in a measurable set C of positive measure. If the sequence $\{y_n(\varphi)\}$ converges almost everywhere in C, then the sequence $\{x_n(\zeta)\}$ converges almost uniformly in K.

---

[5]) The argument used below is due to Lusin and Privaloff [6].

[6]) In the case of vector valued functions boundedness does not in general imply the existence of this limit.

Proof. By Theorem 8 there exists the strong limit

$$\lim_{\zeta \to e^{i\varphi}}{}^{*} x_n(\zeta) = y_n(\varphi)$$

almost everywhere in C. Hence by a theorem of Banach ([1], p. 122) $x(\zeta)=\{x_n(\zeta)\}$ converges weakly to $y(\varphi)=\{y_n(\varphi)\}$ as $\zeta \to e^{i\varphi}$ in such manner that the ratio $|e^{i\varphi}-\zeta|/|e^{i\varphi}-|\zeta||$ remains bounded. Now we can apply Theorem 6.

Państwowy Instytut Matematyczny.

BIBLIOGRAPHY

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1932.

[2] W. Blaschke, *Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen*, Leipziger Berichte 67 (1915), p. 194.

[3] N. Dunford, *Uniformity in Linear Spaces*, Transactions of the American Mathematical Society 44 (1938), p. 305-350.

[4] E. Hille, *Functional Analysis and Semigroups*, American Mathematical Society Colloquium Publications 25 (1948).

[5] A. Khintchine, *Sur les suites des fonctions analytiques bornées dans leur ensemble*, Fundamenta Mathematicae 4 (1923), p. 72-75.

[6] N. Lusin and I. Privaloff, *Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques*, Annales de l'École Normale Supérieure 42 (1925), p. 143-191.

[7] S. Mazur, *Über die konvexe Mengen in linearen normierten Räumen*, Studia Mathematica 4 (1933), p. 70-84.

[8] B. J. Pettis, *On Integration in Vector Spaces*, Transactions of the American Mathematical Society 44 (1938), p. 277-304.

[9] F. and M. Riesz, *Über die Randwerte analytischer Funktionen*, IV Congr. Scand. Math. Stockholm (1916).

[10] J. V. Wehausen, *Transformations in Linear Topological Spaces*, Duke Mathematical Journal 4 (1938), p. 157-169.

COURT EXPOSÉ DES PROPRIÉTÉS PRINCIPALES DE LA MESURE DE LEBESGUE

Par M. Riesz (Lund)

Je suis heureux que le Comité de Rédaction du volume jubilaire dédié à M. Steinhaus ait bien voulu accepter cette modeste contribution qui n'est qu'un exposé destiné primitivement à l'usage de mes élèves.

Introduction. Lebesgue part de la mesure extérieure et de la mesure intérieure d'un ensemble E, cette dernière étant définie à l'aide de la mesure extérieure de l'ensemble complémentaire CE de E. Ces deux espèces de mesures figurent aussi dans la version de la théorie de Lebesgue qui est due à W. H. Young et à C. de la Vallée Poussin et qui se trouve exposée d'une manière magistrale dans un livre très connu de ce dernier auteur[1]).

Dans la suite, nous intrdouisons la notion de mesurabilité et celle de mesure uniquement au moyen de la mesure extérieure, celle-ci étant définie, comme d'habitude, à l'aide des ensembles ouverts. Notre procédé a, entre autres, l'avantage d'être immédiatement applicable même aux ensembles non bornés. L'équivalence de notre définition avec les définitions usuelles peut être établie en quelques lignes.

Nous nous restreignons ici au *cas linéaire* et n'indiquerons qu'à la fin l'extension au cas de plusieurs dimensions. D'ailleurs le lecteur initié trouvera sans peine que la méthode peut s'étendre à des mesures beaucoup plus générales que celle de Lebesgue.

---

[1]) *Intégrale de Lebesgue. Fonctions d'ensembles. Classes de Baire,* Paris 1916.

Notations. Pour la réunion d'ensembles, qui peuvent avoir des points communs, nous utilisons le signe $\cup$ (par exemple $E_1 \cup E_2$, $\bigcup_1^\infty E_k$, $\cup E_k$). Pour l'intersection d'ensembles, nous utilisons, comme on l'a fait autrefois, les signes de multiplication (par exemple $E_1 E_2$, $\prod_1^n E_k$, $\prod E_k$). Etant donné que l'usage des ensembles complémentaires sera évité, nous éviterons aussi l'emploi du signe $\cap$, dual de $\cup$. Ici il ne ferait qu'encombrer les formules. Pour la réunion = somme d'ensembles disjoints nous employons les signes $+$ et Σ (par exemple $E_1 + E_2$, $\sum_1^\infty E_k$, $\sum E_k$). Dans le cas où $E_1 \supset E_2$, nous désignons par $E_1 - E_2$ l'ensemble des points qui sont compris dans E_1 sans être compris dans E_2.

Ensembles ouverts. Un ensemble ouvert O peut, d'une manière unique à l'ordre près, s'écrire comme la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles ouverts disjoints $I_n = (a_n, b_n)$; on définit la *mesure* mO de O par la formule

$$mO = \sum mI_n = \sum (b_n - a_n).$$

Cette définition est *univoque*, car la somme d'une série à termes positifs est indépendante de l'ordre des termes et cela dans le cas d'une somme finie ou d'une somme infinie.

Pour arriver à la décomposition indiquée, on remarque d'abord que tout point de O est compris dans un intervalle ouvert maximum déterminé, faisant partie de O. Dans le cas où O est borné, ces intervalles peuvent être énumérés par ordre de grandeur, car il n'y en aura qu'un nombre fini $> \varepsilon$. Le cas où O n'est pas borné se réduit au précédent par une application biunivoque et continue de l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ sur un intervalle fini (par exemple $y = \operatorname{arctg} x$).

Théorème 1. *Si O' et O'' sont des ensembles ouverts tels que $O' \supset O''$, on a $mO' \geqslant mO''$.*

En effet, la construction par laquelle on a décomposé un ensemble ouvert quelconque en une somme d'intervalles met en évidence que, dans la condition posée, chaque intervalle I''_n est contenu dans un intervalle I'_m. La longueur totale des intervalles disjoints I''_n situés dans le même intervalle I'_m ne peut être supérieure à la longueur de ce dernier.

Les réunions d'un nombre fini ou infini d'ensembles ouverts O_k sont manifestement des ensembles ouverts. C'est aussi le cas pour l'intersection d'un nombre fini d'ensembles ouverts.

Théorème 2. *Pour un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles disjoints O_k on a*

$$m(\sum O_k) = \sum mO_k, \tag{2}$$

ce qui implique que les deux membres ont en même temps des valeurs finies ou infinies.

Le fait énoncé résulte du théorème sur les séries doubles à termes positifs.

Théorème 3. *On a*

$$mO_1 + mO_2 = m(O_1 \cup O_2) + m(O_1 O_2). \tag{3}$$

Ce théorème découle de considérations géométriques élémentaires quand les ensembles O_1 et O_2 sont composés chacun d'un nombre fini d'intervalles. Le théorème général en résulte alors par un passage à la limite.

On déduit de ce qui précède l'énoncé assez grossier que voici

Théorème 4. *Pour un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles O_k on a*

$$m(\cup O_k) \leqslant \Sigma mO_k. \tag{4}$$

Mesure extérieure. Nous définissons la *mesure extérieure* $\overline{m}E$ d'un ensemble arbitraire E par la formule

$$\overline{m}E = \inf \{mO;\ O \supset E\}. \tag{5}$$

On déduit du théorème 1 que, pour un ensemble ouvert O, on a $\overline{m}O = mO$. Du même théorème on déduit aussi

Théorème 5. *Si E' et E'' sont des ensembles tels que $E' \supset E''$, on a $\overline{m}E' \geqslant \overline{m}E''$.*

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 4.

Théorème 6. *Pour un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles E_k on a*

$$\overline{m}(\cup E_k) \leqslant \sum \overline{m} E_k. \tag{6}$$

Ensembles mesurables. Mesure. Un ensemble E est dit *mesurable* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble ouvert $O \supset E$ tel que $\overline{m}(O-E) < \varepsilon$. On définit la *mesure* mE d'un tel ensemble E par $mE = \overline{m}E$. L'hypothèse ci-dessus peut aussi s'exprimer par les formules

$$O = E + e, \ Ee = \Phi, \text{ où } \Phi \text{ est l'enseble vide, } \overline{m}e < \varepsilon. \tag{7}$$

Remarque. Pendant la rédaction de cette Note, j'ai appris que la définition ci-dessus se trouve déjà dans le livre du regretté S. Saks, *Théorie de l'intégrale*, Warszawa 1933. Cependant notre exposé est très différent de celui de Saks. Seules les démonstrations de la mesurabilité de la réunion d'ensembles mesurables sont identiques. Dans l'édition anglaise (1937) du livre de Saks, la définition dont il s'agit ici est abandonnée et remplacée par celle de Carathéodory.

La définition donnée met en évidence que tout ensemble E dont la mesure extérieure $\overline{m}E = 0$ est mesurable avec $mE = 0$. Ces ensembles sont précisément ce qu'on appelle *ensembles de mesure nulle*. On conclut aussi que tout ensemble faisant partie d'un ensemble de mesure nulle est lui-même de mesure nulle.

Théorème 7. *Pour un nombre fini d'ensembles mesurables E_k, les ensembles $\cup E_k$ et $\prod E_k$ sont mesurables.*

On forme des ensembles ouverts $O_k \supset E_k$, on pose $O_k = E_k + e_k$ et on écrit $\cup O_k = \cup E_k + e'$, $\prod O_k = \prod E_k + e''$ respectivement. Il est dès lors clair que $e' \subset \cup e_k$ et $e'' \subset \cup e_k$. On peut choisir les O_k de façon que $\sum \overline{m} e_k < \varepsilon$ ce qui donne $\overline{m}e' < \varepsilon$, $\overline{m}e'' < \varepsilon$. Comme les ensembles $\cup O_k$ et $\prod O_k$ sont ouverts, notre théorème se trouve démontré.

Théorème 7bis. *Le théorème 7 subsiste pour une infinité dénombrable d'ensembles E_k.*

Pour $\bigcup\limits_1^\infty E_k$ la démonstration ci-dessus subsiste aussi puisque l'ensemble $\bigcup\limits_1^\infty O_k$ est ouvert dans cette hypothèse plus générale, et on aura encore $\sum_1^\infty \overline{m}e_k < \varepsilon$, si l'on choisit par exemple $\overline{m}e_k < 2^{-k}\varepsilon$. Pour la mesurabilité de $\prod_1^\infty E_k$, la démonstration sera donnée plus loin.

Théorème 8 (Théorème d'additivité restreinte). $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *étant des ensembles mesurables disjoints, on a*

$$m\left(\sum_1^n E_k\right) = \sum_1^n mE_k. \tag{8}$$

On sait déjà par le théorème 4 que l'ensemble $\sum E_k$ est mesurable. Il suffit de démontrer (8) pour $n=2$. Il résulte d'abord de (6) que

$$m(E_1+E_2) \leqslant mE_1 + mE_2. \tag{9}$$

Ensuite on forme $O_1 = E_1 + e_1$, $O_2 = E_2 + e_2$, avec $\overline{m}e_1 < \varepsilon$, $\overline{m}e_2 < \varepsilon$. Il en résulte d'une part, $O_1 \cup O_2 = E_1 + E_2 + e$, avec $e \subset e_1 \cup e_2$ et par conséquent:

$$m(O_1 \cup O_2) \leqslant m(E_1+E_2) + 2\varepsilon. \tag{10}$$

D'autre part — puisque E_1 et E_2 sont disjoints — $O_1O_2 = (E_1+e_1)(E_2+e_2) = E_1E_2 \cup E_1e_2 \cup E_2e_1 \cup e_1e_2 \subset e_1 \cup e_2$, et dès lors

$$m(O_1O_2) < 2\varepsilon. \tag{11}$$

L'identité (3) et les inégalités (10) et (11) fournissent alors

$$mO_1 + mO_2 \leqslant m(E_1+E_2) + 4\varepsilon$$

et, à plus forte raison,

$$mE_1 + mE_2 \leqslant m(E_1+E_2) + 4\varepsilon.$$

Cette dernière inégalité et l'inégalité (9) donnent le théorème à démontrer.

Théorème 8^bis^ (Théorème d'additivité complète). $E_1, E_2, \ldots$ *étant des ensembles mesurables disjoints en nombre fini ou infini dénombrable, on a*

$$m\left(\sum_1^\infty E_k\right) = \sum_1^\infty mE_k. \tag{8$^{\text{bis}}$}$$

On a d'après les théorèmes 8 et 5

$$\sum_1^N mE_k = m(\sum_1^N E_k) \leqslant m(\sum_1^\infty E_k).$$

Il en résulte

$$\sum_1^\infty mE_k \leqslant m(\sum_1^\infty E_k).$$

Cette inégalité et l'inégalité (6) de caractère opposé fournissent notre théorème.

Notre prochain but est de démontrer que la différence $E_1 - E_2$ de deux ensembles mesurables E_1 et E_2 tels que $E_1 \supset E_2$ est mesurable. Ce fait découlera de la mesurabilité de la *différence symétrique* de deux ensembles mesurables quelconques. Voici la définition de cette dernière notion extrêmement utile.

On définit la différence symétrique $A \triangle B = B \triangle A$ de deux ensembles arbitraires A et B par l'une des deux formules équivalentes

$$(12) \qquad A \triangle B = B \triangle A = A \cup B - AB = (A - AB) + (B - AB).$$

On a toujours: $A \triangle B = A - B$, quand $A \supset B$; $A \triangle B = A + B$, si AB est vide.

La différence symétrique, manifestement *commutative*, est aussi *associative*, ce qui s'écrit $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$. En effet, chacun de ces deux ensembles est constitué par les points qui appartiennent à un ou à trois des ensembles A, B, C. La notation abrégée $A \triangle B \triangle C$ est donc légitime. Dans le même ordre d'idées, l'ensemble $A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n$ ne sera que l'ensemble des points qui font partie d'un nombre impair des ensembles A_k, et dès lors il sera *invariant* par rapport à toute *permutation* de ces derniers ensembles.

Lemme. *Si l'ensemble E est tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble mesurable A de sorte que $\overline{m}(E \triangle A) < \varepsilon$, l'ensemble E sera mesurable.*

Posons d'abord, pour abréger, $E \triangle A = D$; notons que $E \cup D = A \cup D = E \cup A$ et que par conséquent $E \subset A \cup D$ et $A \subset E \cup D$. Choisissons $O_A = A + a$ avec $\overline{m}a < \varepsilon$ et $O_D \supset D$ avec $mO_D < \varepsilon$. Posons en outre $O = O_A \cup O_D \supset A \cup D \supset E$. On obtient

$O=A\cup a\cup O_D\subset E\cup D\cup a\cup O_D=E\cup a\cup O_D$, et alors $O=E+e$ avec $\overline{m}e<2\varepsilon$, par quoi le lemme se trouve démontré.

Pour la suite, nous avons encore besoin d'un théorème concernant la structure des ensembles ouverts.

Théorème 9. *Tout ensemble ouvert O contient un ensemble fermé F, somme d'intervalles fermés, tel que la mesure de l'ensemble ouvert $O-F$ est arbitrairement petite.*

Pour le voir, écrivons O sous la forme $O=\sum\limits_1^\infty I_k$, les I_k étant des intervalles ouverts (disjoints). Pour chaque k on peut prendre un intervalle fermé I'_k compris dans I_k de manière que $m(\sum(I_k-I'_k))$ soit arbitrairement petit. Cela étant, admettons d'abord que mO est fini. Il en sera alors de même de $\sum mI'_n$. Dès lors on pourra rendre $\sum\limits_{N+1}^\infty mI'_n$ arbitrairement petit en prenant N assez grand. L'ensemble F constitué par les points des intervalles I'_k, $k=1,\dots,N$, possède les propriétés désirées. La construction devient un peu plus délicate dans le cas où $mO=\infty$. Nous supprimons tous les intervalles I'_k qui sont compris dans l'intervalle $(-n, +n)$ sans être compris dans l'intervalle $(-(n-1), (n-1))$, sauf un nombre fini, de façon que la longueur totale des intervalles supprimés soit $<\varepsilon_n$ avec $\sum\varepsilon_n<\varepsilon$. L'ensemble F, somme des intervalles I'_k non supprimés, possède encore les propriétés désirées.

Théorème 10. *Si les ensembles E_1 et E_2 sont mesurables, l'ensemble $E_1\triangle E_2$ est mesurable. Si en outre $m(E_1E_2)$ est fini, on a $m(E_1\triangle E_2)=m(E_1\cup E_2)-m(E_1E_2)$.*

Admettons d'abord que E_1 et E_2 sont des ensembles ouverts: $E_1=O_1$, $E_2=O_2$. L'ensemble O_1O_2 étant ouvert, il existe, d'après le théorème 9, pour tout $\varepsilon>0$ un ensemble fermé $F\subset O_1O_2$ tel que $m(O_1O_2-F)<\varepsilon$. Cela étant, posons $E=O_1\triangle O_2=O_1\cup O_2-O_1O_2$, $A=O_1\cup O_2-F$. On en tire $A\triangle E=$ $=A-E=O_1O_2-F$. L'ensemble A étant ouvert et, dès lors, mesurable, de plus $\overline{m}(A\triangle E)=m(O_1O_2-F)$ étant arbitrairement petit, $E=O_1\triangle O_2$ sera mesurable d'après le lemme.

Passons au cas général, où E_1 et E_2 sont des ensembles mesurables arbitraires. On choisit des ensembles ouverts $O_1\supset E_1$, $O_2\supset E_2$ tels que $\overline{m}(O_1-E_1)<\varepsilon$, $\overline{m}(O_2-E_2)<\varepsilon$ et on pose $E = E_1 \triangle E_2$, $A = O_1 \triangle O_2$. On en tire, grâce au caractère associatif et commutatif de l'opérateur $\triangle$,

$$A \triangle E = (O_1 \triangle O_2) \triangle (E_1 \triangle E_2) = O_1 \triangle O_2 \triangle E_1 \triangle E_2 =$$
$$= (O_1 \triangle E_1) \triangle (O_2 \triangle E_2) = (O_1 - E_1) \triangle (O_2 - E_2) \subset (O_1 - E_1) \cup (O_2 - E_2).$$

Par conséquent $\overline{m}(A \triangle E) < 2\varepsilon$. Ceci met en évidence que $E = E_1 \triangle E_2$ est mesurable, car $A = O_1 \triangle O_2$ est mesurable en vertu du résultat particulier qui précède. La dernière partie du théorème 10 découle, à l'aide du théorème 8, de la formule (12) et du fait évident que les ensembles $E_1 \triangle E_2$ et $E_1 E_2$ sont disjoints.

Des résultats qu'on vient de déduire, on obtient immédiatement les corollaires suivants:

A. Si E_1 et E_2 sont mesurables, $E_1 \supset E_2$, alors $E_1 - E_2$ est mesurable. Si en outre mE_2 est fini, on a $m(E_1 - E_2) = mE_1 - mE_2$.

B. Dans les conditions 1) E_1 et E_2 sont mesurables, 2) $E_1 \supset E_2$, 3) $mE_1 = mE_2$ sont finis, l'ensemble $E_1 - E_2$ a la mesure nulle.

C. Dans les mêmes conditions, en ce qui concerne E_1 et E_2, tout ensemble E tel que $E_1 \supset E \supset E_2$, est mesurable avec $mE = mE_1 = mE_2$.

D. Un ensemble et son ensemble complémentaire sont mesurables en même temps.

Puisque tout ensemble fermé est le complémentaire d'un ensemble ouvert, il résulte:

E. Tout ensemble fermé est mesurable.

Mesure d'ensembles limites.

Théorème 11. *Si* $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \ldots$ *sont des ensembles mesurables et qu'on pose* $\lim E_n = \cup E_k$, *dans ce cas* $\lim E_n$ *est mesurable et*

$$m(\lim E_n) = \lim mE_n.$$

En effet, $\lim E_n$ est mesurable d'après le théorème 7^{bis}.

Si mE_n est infini à partir d'un certain indice, il en sera de même de $m(\lim E_n) = m(\cup E_n)$. D'autre part, si mE_n est fini pour tout indice, la relation découle de l'identité

$\lim E_n = \cup E_n = E_1 + (E_2 - E_1) + (E_3 - E_2) + \ldots$ et des théorèmes 8^{bis} et 10.

Théorème 12. *Si $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ sont des ensembles mesurables et qu'on pose* $\lim E_n = \prod E_n$, $\lim E_n$ *est mesurable. Si mE_n est fini à partir d'un certain indice, on a en outre*

$$m(\lim E_n) = \lim mE_n.$$

Moyennant l'identité $\lim E_n = E_N - \sum_{k=N}^{\infty} (E_k - E_{k+1})$, valable pour tout indice N, on conclut des théorèmes 7^{bis} et 10 que $\lim E_n$ est mesurable. S'il existe un indice N tel que $mE_N < \infty$, on tire de l'identité, grâce aux théorèmes 8^{bis} et 10, que $m(\lim E_n) = \lim mE_n$.

Le fait que l'intersection d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable elle aussi (seconde partie du théorème 7^{bis}, dont nous avons ajourné la démonstration), résulte immédiatement du dernier théorème.

On voit aussi que $\overline{\lim}$ et $\underline{\lim}$ d'une suite d'ensembles mesurables sont *mesurables*, puisque ces ensembles s'obtiennent à partir des ensembles donnés au moyen de réunions et d'intersections.

Théorème 13. (Cas particulier du lemme de Fatou). *Si les ensembles E_n sont mesurables, on a*

$$m(\underline{\lim}\, E_n) \leqslant \underline{\lim}\, mE_n.$$

On a par définition $\underline{\lim}\, E_n = \lim (E_n E_{n+1} \ldots)$. Cela posé, on choisit une suite partielle d'indices n' tels que $mE_{n'} \to \underline{\lim}\, mE_n$. Dès lors, d'après le théorème 11, $m(\underline{\lim}\, E_n) = \lim m(E_n E_{n+1} \ldots) = \lim m(E_{n'} E_{n'+1} \ldots) \leqslant \lim mE_{n'} = \underline{\lim}\, mE_n$.

Théorème 14. *Si les ensembles E_n sont mesurables et s'il existe un ensemble mesurable G tel que $mG < \infty$ et $E_n \subset G$ pour tout n, on a*

$$m(\overline{\lim}\, E_n) \geqslant \overline{\lim}\, mE_n.$$

Nous avons par définition $\overline{\lim}\, E_n = \lim (E_n \cup E_{n+1} \cup \ldots)$ et, par hypothèse, $m(E_n \cup E_{n+1} \cup \ldots) \leqslant mG < \infty$. Nous choisissons maintenant une suite partielle d'indices n' tels que

$mE_{n'} \to \overline{\lim}\, mE_n$. Dès lors, d'après le théorème 12, $m(\overline{\lim}\, E_n) = \lim m(E_n \cup E_{n+1} \cup \ldots) = \lim m(E_{n'} \cup E_{n'+1} \cup \ldots) \geqslant \lim mE_{n'} = \overline{\lim}\, mE_n$.

Théorème 15. (Cas particulier du théorème de majoration de Lebesgue). *Si les ensembles* E_n *sont mesurables et s'il existe un ensemble mesurable* G, *avec* $mG < \infty$, *tel que* $E_n \subset G$ *pour tout* n, *et si de plus* $\lim E_n$ *existe, on a*

$$m(\lim E_n) = \lim mE_n.$$

En effet, on tire des théorèmes qui précèdent

$$\overline{\lim}\, mE_n \leqslant m(\overline{\lim}\, E_n) = m(\lim E_n) = m(\underline{\lim}\, E_n) \leqslant \underline{\lim}\, mE_n.$$

Par conséquent, $\lim mE_n$ existe et est égal à $m(\lim E_n)$.

Le théorème de Carathéodory. On doit à Carathéodory le théorème suivant:

Théorème 16. *Si* E *est mesurable on a pour un ensemble* A *arbitraire*

$$\overline{m}A = \overline{m}(AE) + \overline{m}(A \cdot CE).$$

Inversement, si cette relation est remplie pour tout ensemble A, E *est mesurable.*

Nous démontrons d'abord la seconde partie du théorème. Il suffit de supposer que l'identité est valable pour tout ensemble *ouvert* A.

Nous admettons pour commencer que E est borné. Nous pouvons alors trouver un ensemble ouvert $O \supset E$ tel que $mO < \overline{m}E + \varepsilon$. Si nous posons $A = O$, nous obtenons $\overline{m}E + \varepsilon > mO = \overline{m}(OE) = \overline{m}(O \cdot CE) = \overline{m}E + \overline{m}(O - E)$. Par suite $\overline{m}(O - E) < \varepsilon$, et E est mesurable. Dans le cas où E n'est pas borné, le théorème subsiste, puisque E peut être considéré comme l'ensemble limite de ses intersections avec des intervalles finis et que ces intersections sont mesurables par ce qui précède. La première partie du théorème ci-dessus est comprise dans le théorème suivant:

Théorème 17. *Si les* E_k *sont des ensembles disjoints mesurables en nombre fini ou infini dénombrable et que* A *est un ensemble arbitraire, on a*

$$\overline{m}(\textstyle\sum AE_k) = \sum \overline{m}AE_k.$$

Il suffit de donner la démonstration pour un nombre fini d'ensembles, le passage à une infinité dénombrable étant analogue à celui effectué dans la démonstration du théorème 8bis. Cela étant, on peut même se restreindre au cas de deux ensembles E_1 et E_2. On prend $O \supset (AE_1 + AE_2)$ de manière que $mO < \overline{m}(AE_1 + AE_2) + \varepsilon$. On prend en outre $O_1 \supset E_1$ et $O_2 \supset E_2$, avec $\overline{m}(O_1 - E_1) < \varepsilon$ et $\overline{m}(O_2 - E_2) < \varepsilon$.

Puisque $E_1 E_2$ est vide, on voit que $O_1 O_2 \subset (O_1 - E_1) \cup (O_2 - E_2)$ et $m(O_1 O_2) < 2\varepsilon$. En tenant compte de $OO_1 \supset AE_1$ et $OO_2 \supset AE_2$, on obtient $\overline{m}(AE_1 + AE_2) + \varepsilon \geqslant mO \geqslant m(OO_1 \cup OO_2) = m(OO_1) + m(OO_2) + m(OO_1 OO_2) \geqslant \overline{m}(AE_1) + \overline{m}(AE_2) - 2\varepsilon$. Il en ressort que $\overline{m}(AE_1 + AE_2) \geqslant \overline{m}(AE_1) + \overline{m}(AE_2)$.

L'inégalité opposée étant évidente (cf. le théorème 6), la démonstration se trouve achevée.

Pour passer du cas linéaire au cas de *plusieurs dimensions*, on pourra s'appuyer sur l'exposé donné dans le livre cité de C. de la Vallée Poussin sur la structure et la mesure des ensembles ouverts, en notant en particulier que cette mesure s'y trouve définie d'une manière univoque aussi dans le cas général. Ce point acquis, il n'y aura presque rien à changer aux considérations qui précèdent pour établir les résultats correspondants concernant la mesure de Lebesgue dans les espaces cartésiens ayant un nombre fini de dimensions.

En terminant, j'ai à remercier mon jeune collaborateur, M. Lars Hörmander, de son dévouement et de ses précieuses contributions.

SUR L'INTÉGRABILITÉ RIEMANNIENNE DE LA FONCTION DE CROFTON

Par H. Fast et A. Götz (Wrocław)

1. Pour déterminer la position d'une droite dans le plan euclidien, on peut procéder comme suit: par l'origine O d'un système de coordonnées rectangulaires, on mène un axe perpendiculaire à la droite donnée, dirigé vers le demi-plan supérieur (si la droite est perpendiculaire à l'axe des x, on choisit cet axe). La position de la droite est alors déterminée par deux nombres p et ϑ, où p désigne la coordonnée, sur l'axe engendré, du point d'intersection de cet axe avec la droite, ϑ — l'angle que forme cet axe avec l'axe des x. On établit ainsi une correspondance biunivoque entre les droites du plan (xy) et les points de l'ensemble

$$Z = \underset{(p,\vartheta)}{E}\{-\infty < p < +\infty,\ 0 \leqslant \vartheta < \pi\}$$

du plan $(p\vartheta)$. La droite l correspondant au point (p,ϑ) sera désignée par $[p,\vartheta]$.

On dira qu'une *suite de droites* l_n *tend vers une droite* l s'il existe une suite de points P_n $(P_n \in l_n)$ convergente vers un point de l, et si l'angle entre les droites l_n et l converge vers 0. On entend par angle entre deux droites non orientées celui des angles, formés par celles-ci, qui est compris entre 0 et $\pi/2$.

La correspondance mentionnée ci-dessus a la suivante propriété: la convergence d'une suite de points (p_n,ϑ_n) vers un point (p,ϑ) implique la convergence de la suite des droites $l_n = [p_n,\vartheta_n]$ vers la droite $l = [p,\vartheta]$. Réciproquement, si $\vartheta \neq 0$, la convergence d'une suite de droites $[p_n,\vartheta_n]$ vers une droite $[p,\vartheta]$ implique la convergence de la suite des points (p_n,ϑ_n)

vers le point (p,ϑ). Par suite, si on laisse de côté les droites pour lesquelles $\vartheta=0$ (droites perpendiculaires à l'axe des x), la correspondance sera bicontinue. De telles droites seront toujours éliminées dans la suite.

Soit donnée une droite $[p_0,\vartheta_0]$. Construisons un rectangle $ABB'A'$ (fig. 1) tel que les côtés AB et $A'B'$ soient parallèles à la droite et situés de part et d'autre de cette droite. L'ensemble de points (p,ϑ) tels que la droite $[p,\vartheta]$ coupe les deux côtés AA' et BB' en leurs points intérieurs, forme un entourage du point (p_0,ϑ_0) dans le plan $(p\vartheta)$. Remarquons que si $\vartheta_0 \neq 0$, on peut, par un choix convenable du rectangle $ABB'A'$, obtenir un entourage du point (p_0,ϑ_0) de l'ensemble Z, aussi petit que l'on veut.

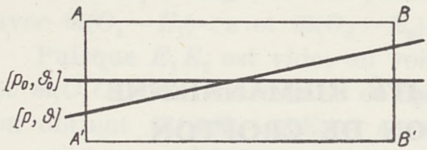

Fig. 1.

On définit la mesure d'un ensemble M de droites comme *mesure plane de Lebesgue* d'un ensemble de points correspondant à ces droites suivant le mode établi au début. La mesure ainsi définie est invariante par rapport aux déplacements du plan (xy) sur lui-même [1]), ne dépend donc pas du choix du système de coordonnées.

Soit donnée une courbe K sur le plan. Déterminons dans l'ensemble Z, la fonction $N_K(p,\vartheta)$ égale au nombre des points d'intersection de la courbe K avec la droite $[p,\vartheta]$. Cette fonction est appelée *indicatrice* ou *fonction de Crofton* de K. Elle admet des valeurs entières non négatives et ∞. L'indicatrice de K est mesurable; pour que son intégrale de Lebesgue soit finie, il faut et il suffit que K soit rectifiable. On a alors

$$\int_Z N_K(p,\vartheta)\,dp\,d\vartheta = 2L,$$

où L désigne la longueur de K. C'est le théorème de Crofton [2]).

H. Steinhaus a posé la question si la fonction $N_K(p,\vartheta)$ est intégrable au sens de Riemann quand elle est bornée (c'est-

[1]) Cf. W. Blaschke, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, 1 Heft, 2 Auflage, Leipzig-Berlin, p. 6-7.

[2]) Cf. W. Blaschke, loco cit., p. 11 et 46-48.

à-dire quand chaque droite coupe la courbe en un nombre borné de points [1])). Dans le présent travail, nous y répondons négativement et indiquons des conditions nécessaires et suffisantes de l'intégrabilité riemannienne de cette fonction pour des arcs simples K.

2. Introduisons les termes et notations nécessaires pour formuler les théorèmes. Désignons par (a,b) l'intervalle ouvert $a<s<b$ et par $\langle a,b\rangle$ l'intervalle fermé $a\leqslant s\leqslant b$.

Soit K un arc simple sur le plan, c'est-à-dire l'image homéomorphe de l'intervalle $\langle 0,L\rangle$ [2])

$$P=\Phi(s),$$

où P est un point du plan (xy). Supposons K rectifiable et admettons que l'homéomorphie Φ soit établie de manière que la longueur de l'arc $\Phi((s_1,s_2))$, où $s_1<s_2$, soit égale à s_2-s_1. La mesure linéaire d'un sous-ensemble E de K est égale à la mesure de Lebesgue de l'ensemble $\Phi^{-1}(E)$.

On dit qu'une droite l, passant par le point $P=\Phi(s_0)$ de l'arc K, *appartient au paratingent* [3]) *de K en P* s'il existe deux suites $\{P_i\},\{P_i'\}$ de points de K convergentes vers P telles que les droites l_i, joignant les points P_i et P_i', tendent vers l, ou, ce qui revient au même, s'il existe deux suites $\{s_i\},\{s_i'\}$ $(s_i\neq s_i')$ de valeurs du paramètre s, telles que $s_i\to s_0$, $s_i'\to s_0$ et les droites l_i, joignant les points $\Phi(s_i)$ et $\Phi(s_i')$, tendent vers l.

Si le paratingent de K en P contient plus qu'une droite, il contient toutes les droites appartenant à un couple d'angles opposés par le sommet, ce dernier étant situé au point P. S'il ne se compose que d'une droite, celle-ci est tangente à K; s'il existe en P une tangente à K, le paratingent la contient, mais il peut aussi contenir d'autres droites. Si K a partout un axe tangent, le paratingent aux points de continuité de l'axe tangent n'a qu'une seule droite, à savoir cet axe même.

[1]) voir H. Steinhaus, *O długości krzywych empirycznych i jej pomiarze zwłaszcza w geografii*, Sprawozdanie Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego 4 (1949), Dodatek 5, p. 1-6.

[2]) Tous les suivants raisonnements et définitions pourront être répétés pour les images homéomorphes du cercle.

[3]) voir G. Bouligand, *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Paris 1932, p. 72 et 165.

Les points de K, en lesquels le paratingent contient plus qu'une droite, seront appelés *points singuliers* de K.

3. Théorème 1. *Si l'ensemble des points singuliers de l'arc simple K est de mesure linéaire nulle, l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $N_K(p,\vartheta)$ a la mesure plane de Lebesgue nulle.*

Théorème 2. *Si l'ensemble des points singuliers de l'arc K est de mesure linéaire positive, l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $N_K(p,\vartheta)$ a la mesure plane de Lebesgue positive.*

De ces théorèmes résulte immédiatement le suivant corollaire: *si la fonction $N_K(p,\vartheta)$ est bornée, il faut et il suffit, pour qu'elle soit intégrable au sens de Riemann, que l'ensemble des points singuliers de l'arc K ait la mesure linéaire nulle.*

Pour K ayant partout un axe tangent presque partout continu, en particulier, pour l'arc de la forme

$$x=x(t), \quad y=y(t),$$

où $x(t)$ et $y(t)$ ont les dérivées continues et $x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$ [1], la fonction $N_K(p,\vartheta)$ est intégrable au sens de Riemann.

4. Avant d'aborder la démonstration des théorèmes, introduisons encore plusieurs notions.

On dira qu'une droite $l=[p,\vartheta]$ du plan est *ordinaire* si elle coupe l'arc K en un nombre fini de points, chacun d'eux étant non singulier, en lesquels la tangente (confondue dans ce cas avec le paratingent) forme avec elle un angle différent de 0, et ne passe pas par les extrémités de l'arc. Les droites restantes seront appelées *singulières*.

Lemme 1. *Si la droite l est ordinaire, on peut construire un rectangle $ABB'A'$, aux côtés AB et $A'B'$ parallèles à l et situés de part et d'autre de l, tel que toutes les droites, coupant les deux côtés AA' et BB', perpendiculaires à l, en leurs points intérieurs, rencontrent l'arc K en un même nombre de points que la droite l.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient $\Phi(s_1),\Phi(s_2),\dots,\Phi(s_n)$ les points d'intersection de la droite l avec l'arc K. Comme l est ordi-

[1]) Cf. W. Blaschke, loco cit., p. 11.

naire, les paratingents de l'arc en ces points se composent d'une droite et forment avec l des angles plus grands qu'un nombre $\alpha > 0$. D'après la définition du paratingent, il existe donc un nombre $\delta > 0$ tel que chaque arc $I_i = \Phi((s_i - \delta, s_i + \delta))$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ait un point commun avec la droite l, et tel que les cordes, joignant les points de cet arc, forment avec l des angles plus grands que $\alpha/2$. Ces arcs traversent la droite, car si l'arc K, au voisinage d'un point $\Phi(s)$ n'était situé que d'un côté de l, il existerait des cordes, suffisamment proches de $\Phi(s_i)$, qui seraient parallèles à l, et cette dernière appartiendrait au paratingent.

En rejetant $I_1, I_2, \ldots, I_n$ de K, on obtient un ensemble situé à une distance positive de la droite l. On peut donc trouver deux droites l_1 et l_2 parallèles à l, situées de part et d'autre de l, et telles que la partie de K qui se trouve entre elles se décompose en n arcs $J_1, J_2, \ldots, J_n$, où $J_i \subset I_i$. Comme K est bornée, on peut l'enfermer à l'intérieur d'un rectangle dont deux côtés seraient perpendiculaires à l. Ces côtés découpent de la bande entre l_1 et l_2 un rectangle $ABA'B'$; en rapprochant l_1 et l_2 de l, les côtés perpendiculaires restant immobiles, on peut atteindre que les droites, qui joignent les points intérieurs des côtés AA' et BB', forment avec l des angles plus petits que $\alpha/2$. Chacune de ces droites coupe alors chaque arc J_i exactement en un point et ne rencontre plus l'arc K autre part. Elle a donc n points d'intersection avec K, autant que l, c. q. f. d.

De ce lemme résulte aussitôt le suivant

Lemme 2. *Si $[p_0, \vartheta_0]$ est une droite ordinaire, (p_0, ϑ_0) est un point de continuité de la fonction $N_K(p, \vartheta)$, et, par suite, l'ensemble des points de discontinuité de $N_K(p, \vartheta)$ est contenu dans l'ensemble des points (p, ϑ) auxquels correspondent des droites singulières.*

Vu la définition, l'ensemble des droites singulières est somme

1⁰ de l'ensemble des droites tangentes à l'arc,

2⁰ de l'ensemble des droites passant par les points singuliers de l'arc,

3⁰ de l'ensemble des droites passant par les extrémités de l'arc, 4° de l'ensemble des droites coupant l'arc en une infinité de points.

Lemme 3. *Pour tout ϑ $(0 \leqslant \vartheta < \pi)$, l'ensemble des valeurs p, telles que la droite $[p, \vartheta]$ soit tangente à K, a la mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. Par l'origine du système de coordonnées, menons un axe u formant l'angle ϑ avec l'axe des x. Cet axe est perpendiculaire aux droites considérées, et les valeurs p considérées sont coordonnées, sur cet axe, des points d'intersection de celui-ci avec ces droites. Si une droite perpendiculaire à l'axe u est tangente à l'arc au point $\Phi(s)$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un $\delta = \delta(\varepsilon, s)$ tel que la projection sur l'axe u de l'arc $\Phi((s-\eta, s+\eta))$ soit moindre que $2\eta\varepsilon$ pour $\eta < \delta$. La famille d'intervalles $(s-\eta, s+\eta)$ recouvre au sens de Vitali l'ensemble M des valeurs du paramètre s, pour lesquelles la tangente à l'arc au point $\Phi(s)$ existe et est perpendiculaire à l'axe u. En vertu du théorème de Vitali [1]), on peut donc choisir l'ensemble dénombrable d'intervalles disjoints $(s_i - \eta_i, s_i + \eta_i)$ qui recouvre presque tout M. Les droites perpendiculaires à u, qui traversent l'ensemble $\Phi(M - \sum\limits_i (s_i - \eta_i, s_i + \eta_i))$ de mesure linéaire nulle, coupe u en un ensemble de points de mesure nulle. Les droites passant par les points de l'ensemble $\Phi(\sum\limits_i (s_i - \eta_i, s_i + \eta_i))$ coupent u en un ensemble de points contenu dans la projection de la somme des ensembles $\Phi((s_i - \eta_i, s_i + \eta_i))$, dont la mesure ne dépasse pas $\sum\limits_i 2\eta_i\varepsilon \leqslant L\varepsilon$, où L désigne la longueur de l'arc. Le nombre ε étant arbitraire, l'ensemble considéré est de mesure nulle.

Lemme 4. *Si l'ensemble des points singuliers de l'arc K est de mesure linéaire nulle, l'ensemble S_ϑ des p, tels que la droite $[p, \vartheta]$ soit singulière et coupe l'arc en un nombre fini de points, est de mesure nulle pour tout ϑ $(0 < \vartheta < \pi)$.*

Démonstration. Construisons, comme pour la démonstration du lemme précédent, l'axe u et considérons l'ensemble des points d'intersection de u avec les droites singulières, perpendiculaires à u, coupant l'arc en un nombre fini de points.

---

[1]) voir par exemple S. Saks, *Theory of the integral*, Warszawa 1937, p. 109.

En vertu du lemme 3, les droites tangentes coupent l'axe u en un ensemble de points de mesure nulle. L'ensemble des points d'intersection de l'axe u avec les droites perpendiculaires à lui, passant par les points singuliers de K, est de mesure nulle comme étant projection verticale d'un ensemble de mesure linéaire nulle (d'après l'hypothèse du lemme). Par les extrémités de l'arc passent au plus deux droites perpendiculaires à u, coupant ce dernier en deux points au plus. Les trois genres de droites cités épuisent toutes les droites de la thèse du lemme, par suite, S_ϑ est de mesure nulle comme étant somme de trois ensembles de mesure nulle, c. q. f. d.

Démonstration du théorème 1. Comme la fonction $N_K(p,\vartheta)$ admet des valeurs entières et ∞, l'ensemble de ses points de discontinuité est fermé, donc mesurable. Il est contenu dans la somme de l'ensemble S des points (p,ϑ) pour lesquels la droite $[p,\vartheta]$ est singulière et coupe l'arc en un nombre fini de points, et de l'ensemble des points (p,ϑ) en lesquels $N_K(p,\vartheta)=\infty$. Comme

$$\iint\limits_Z N_K(p,\vartheta)\,dp\,d\vartheta = 2L$$

est fini, le dernier ensemble a la mesure plane nulle. Il en résulte que la coupure de cet ensemble du plan (p,ϑ) par la droite $\vartheta=\text{const.}$ a la mesure linéaire nulle pour presque tout ϑ; il s'ensuit du lemme 4 que les coupures de l'ensemble S par ces droites sont aussi de mesure linéaire nulle. Par suite, les coupures de l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $N_K(p,\vartheta)$ par les droites $\vartheta=\text{const.}$ sont de mesure linéaire nulle pour presque tout ϑ, d'où il résulte, en vertu du théorème de Fubini, que l'ensemble a la mesure plane nulle, c. q. f. d.

5. Afin de démontrer le théorème 2, prouvons encore quelques lemmes.

On dit que l est la *droite d'appui* de l'arc K au point $\Phi(s_0)$ s'il existe un intervalle $(s_0-\delta, s_0+\delta)$ tel que les points $\Phi(s)$, pour $s \in (s_0-\delta, s_0+\delta)$, soient situés d'un côté de l et aucun d'eux, à l'exception de $\Phi(s_0)$, ne se trouve sur l.

Si $s_1<s_2$, il existe une droite, parallèle à la corde joignant $\Phi(s_1)$ et $\Phi(s_2)$, qui, ou bien est droite d'appui de K en un point

$\Phi(s)$ $(s_1<s<s_2)$, ou bien a avec $\Phi((s_1,s_2))$ une infinité de points communs.

Lemme 5. *Si une droite l coupe l'arc K en un nombre fini de points, et si elle est droite d'appui de K en au moins un point, on peut, par un déplacement parallèle arbitrairement petit de l, ou une rotation arbitrairement petite autour d'un point de l, augmenter le nombre des points d'intersection de la droite avec l'arc.*

Démonstration. Soient $\Phi(s_1),\Phi(s_2),...,\Phi(s_m)$ les points d'appui de l'arc K sur la droite l. Il existe donc un nombre $\delta>0$ tel que les arcs $I_i=\Phi((s_i-\delta, s_i+\delta))$ $(i=1,2,...,m)$ soient situés entièrement d'un côté ou de l'autre de l. Soient $I_1,I_2,...,I_k$ ceux qui se trouvent d'une part de l, et $I_{k+1},I_{k+2},...,I_m$ de l'autre. Aux points d'intersection restants $\Phi(s_{m+1}),...,\Phi(s_n)$, la droite n'est pas droite d'appui de l'arc K; il existe donc un nombre $\eta>0$ tel que chaque arc $J_j=\Phi((s_{m+j}-\eta, s_{m+j}+\eta))$ $(j=1,2,...,n-m)$ traverse la droite et a avec elle un point commun $\Phi(s_{m+j})$. De là, par un déplacement parallèle suffisamment petit ou une rotation suffisamment petite de la droite l, le nombre des points d'intersection des arcs J_j avec la droite l ne peut que s'augmenter ou rester fixe. Si maintenant les nombres des arcs supportés, situés d'une part de l et de l'autre, ne sont pas égaux, par exemple $k>m-k$, alors en déplacant parallèlement l suffisamment peu vers les arcs $I_1,...,I_k$, on augmente le nombre des points d'intersection de cette droite avec ces arcs de k au moins, en ne perdant que $m-k<k$ points d'intersection avec $I_{k+1},...,I_m$. Le nombre total des points d'intersection avec l'arc ne peut que s'augmenter (fig. 2a).

Si $k=m-k$, on effectuera une rotation de la droite autour d'un point d'appui extrême (au sens de l'ordre naturel sur la droite). Les arcs I_i, s'appuyant aux points restants, se répartissent de part et d'autre de l en quantités inégales et, par suite, en tournant la droite suffisamment peu dans la direction où se trouvent le plus des arcs, on augmente, comme tout-à-l'heure, le nombre de points d'intersection de l avec K (fig. 2b).

Lemme 6. *Si une droite $[p_0,\vartheta_0]$ $(\vartheta_0\neq 0)$ appartient au paratingent de l'arc K en un point $\Phi(s_0)$ de K, le point (p_0,ϑ_0) du plan $(p\vartheta)$ est un point de discontinuité de la fonction $N_K(p,\vartheta)$.*

Démonstration. Si $[p_0, \vartheta_0]$ appartient au paratingent de K en $\Phi(s_0)$, il existe, pour tout couple $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, deux nombres $s_1, s_2 \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ tels que la corde, joignant les points $\Phi(s_1)$ et $\Phi(s_2)$ de l'arc forment avec la droite $[p_0, \vartheta_0]$ un

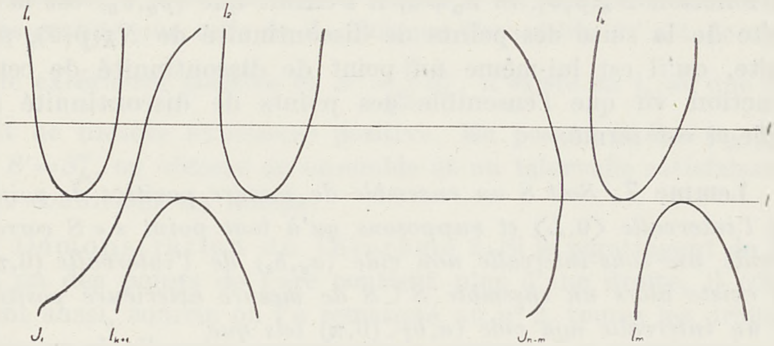

Fig. 2 a.

angle plus petit que η. Comme on l'à déjà remarqué, il existe alors une droite l, parallèle à cette corde, qui, ou bien est droite d'appui de K en un point $\Phi(s')$ tel que $s_1 < s' < s_2$, ou

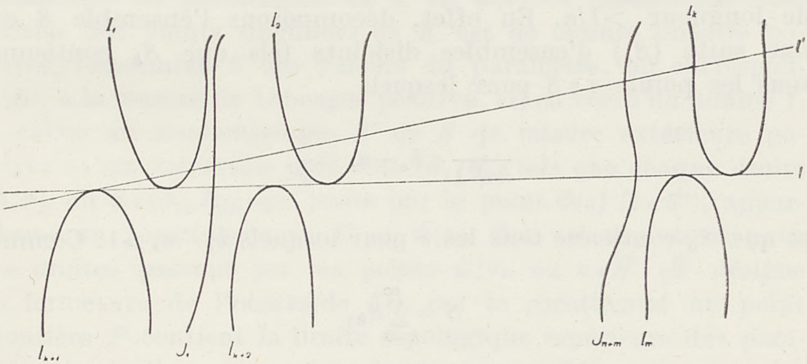

Fig. 2 b.

bien a avec $\Phi((s_1, s_2))$ une infinité de points communs. Dans les deux cas, le point (p, ϑ), correspondant à cette droite, est un point de discontinuité de la fonction $N_K(p, \vartheta)$. En effet, si la droite $[p, \vartheta]$ est droite d'appui de l'arc et le coupe en un nombre fini de points, (p, ϑ) est un point de discontinuité en vertu du lemme 5; si $[p,\vartheta]$ coupe l'arc en une infinité de points, c'est-à-dire $N_K(p,\vartheta)=\infty$, (p,ϑ) est un point de discontinuité.

La droite $[p_0,\vartheta_0]$ est donc la limite d'une suite de droites $[p_n,\vartheta_n]$ telles que (p_n,ϑ_n) sont des points de discontinuité de la fonction $N_K(p,\vartheta)$. Si $\vartheta_0\neq 0$, il s'ensuit que (p_0,ϑ_0) est la limite de la suite des points de discontinuité de $N_K(p,\vartheta)$, par suite, qu'il est lui-même un point de discontinuité de cette fonction vu que l'ensemble des points de discontinuité de celle-ci est fermé.

Lemme 7. *Soit S un ensemble de mesure positive de points de l'intervalle $\langle 0,L\rangle$ et supposons qu'à tout point $s\in S$ corresponde un sous-intervalle non vide (a_s,b_s) de l'intervalle $(0,\pi)$. Il existe alors un ensemble $S'\subset S$ de mesure extérieure positive et un intervalle non vide $(a,b)\subset(0,\pi)$ tels que*

$$(a,b)\subset\prod_{s\in S'}(a_s,b_s).$$

Démonstration. Nous démontrerons d'abord qu'il existe un nombre naturel n et un ensemble $S''\subset S$ de mesure extérieure positive tels qu'à tout $s\in S''$ corresponde un intervalle de longueur $>1/n$. En effet, décomposons l'ensemble S en une suite $\{S_k\}$ d'ensembles disjoints tels que S_k contienne tous les points $s\in S$ pour lesquels

$$\frac{1}{k+1}<b_s-a_s\leqslant\frac{1}{k},$$

et que S_0 contienne tous les s pour lesquels $b_s-a_s>1$. Comme

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}S_k,$$

il existe un k_0 tel que S_{k_0} soit de mesure extérieure positive. En posant $S''=S_{k_0}$ et $n=k_0+1$, on obtient un ensemble S'' de mesure extérieure positive aux points duquel correspondent des intervalles de longueur $>1/n$.

Décomposons maintenant l'intervalle $\langle 0,\pi\rangle$ en un nombre fini m d'intervalles disjoints $I_j=\langle\alpha_j,\beta_j)$ tels que $1/4n<\beta_j-\alpha_j<1/2n$, et l'ensemble S'' en un même nombre d'ensembles disjoints S''_j $(j=1,2,...,m)$ tels que S''_j contienne tous les points $s \in S''$ pour lesquels $\frac{a_s+b_s}{2} \in I_j$. Tous les intervalles correspondant aux points de S''_j contiennent alors l'intervalle I_j, car leur centre s'y trouve et leur longueur est au moins deux fois plus grande que celle de I_j. Puisque l'ensemble S'' est de mesure extérieure positive et $S''=\sum_{j=1}^{m} S''_j$, il existe un j_0 tel que S''_j soit de mesure extérieure positive. En posant $(a,b)=(a_{j_0},\beta_{j_0})$ et $S'=S''_{j_0}$, on obtient un ensemble et un intervalle satisfaisant aux conditions du lemme.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 2. Si le paratingent de K en un des points de l'arc contient plus d'une droite, il contient aussi, comme on l'a remarqué au n° 2, toutes les droites d'un couple d'angles opposés par le sommet. Les coordonnées ϑ des droites appartenant au paratingent recouvrent un intervalle de longueur positive contenu dans l'intervalle $\langle 0, \pi)$. A chaque point singulier $\Phi(s)$ de l'arc K, on peut donc faire correspondre un intervalle ouvert non vide $(a_s, b_s) \subset \langle 0, \pi)$ tel que, si $a_s < \vartheta < b_s$ et la droite $[p,\vartheta]$ passe par le point $\Phi(s)$, elle appartient au paratingent de K en $\Phi(s)$. Si maintenant l'ensemble des points singuliers de K est de mesure linéaire positive, l'ensemble S des valeurs du paramètre, lui correspondant, a la mesure de Lebesgue positive, et, en vertu du lemme 7, il existe un sous-ensemble S' de S de mesure extérieure positive et un intervalle non vide $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ tels que chaque droite $[p,\vartheta]$, où $\vartheta \in (\vartheta_1, \vartheta_2)$, qui passe par le point $\Phi(s)$ $(s \in S')$, appartienne au paratingent de K en $\Phi(s)$. Ceci est vrai aussi pour les droites passant par les points $\Phi(s)$, où $s \in \overline{S}'$ ($\overline{S}'$ désigne la fermeture de l'ensemble S'), car le paratingent au point frontière P contient la limite topologique supérieure des paratingents de l'arc aux points tendant vers P [1]).

Considérons, pour $\vartheta \in (\vartheta_1, \vartheta_2)$ fixe, l'ensemble des p tels que la droite $[p,\vartheta]$ passe par un point de l'ensemble $\Phi(\overline{S}')$, donc, qu'elle appartienne au paratingent de K en ce point. Cet ensemble est projection verticale de l'ensemble fermé $\Phi(\overline{S}')$ de mesure linéaire positive sur l'axe u formant avec l'axe des x

[1]) Cf. G. Bouligand, loco cit., p. 75.

l'angle ϑ; il est donc de mesure positive pour tous les ϑ à l'exception peut-être d'un seul[1]). Le point (p,ϑ) correspondant à une telle droite est, en vertu du lemme 6, un point de discontinuité de la fonction $N_K(p,\vartheta)$. Les points de discontinuité de $N_K(p,\vartheta)$ pour $\vartheta=$ const. constituent un ensemble fermé D_ϑ; en outre, pour tout $\vartheta \epsilon (\vartheta_1, \vartheta_2)$, à l'exception d'un seul au plus, cet ensemble contient un sous-ensemble de mesure positive. L'ensemble D_ϑ est donc de mesure positive. Ainsi, en vertu du théorème de Fubini, l'ensemble des points de discontinuité de $N_K(p,\vartheta)$ a la mesure plane positive, ce qui termine la démonstration.

6. Nous construirons un exemple d'arc K pour lequel $N_K(p,\vartheta)\leqslant 6$, et l'ensemble des points de discontinuité de cette fonction est de mesure positive (l'indicatrice n'est donc pas intégrable au sens de Riemann). En outre, cet arc aura une tangente en chaque point. Choisissons à cet effet un arc $\widehat{PQ}$, d'une circonférence unitaire, de longueur $<\pi/2$, et construisons sur lui un ensemble C non dense, parfait, de mesure positive, en rejetant de son milieu $\frac{1}{4}$ de l'arc entier, du milieu des deux arcs restants $\frac{1}{16}$ de $\widehat{PQ}$ etc. Les points de C feront partie de l'arc K. A la place des arcs rejetés effectuons la construction suivante (fig. 3): par les extrémités d'un arc rejeté, on mène des tangentes à la circonférence, et on remplace cet arc par un autre, renflé, qui a les propriétés suivantes:

1° il est compris entre l'arc rejeté et les tangentes,

2° il a en chaque point une tangente continue convergente vers la tangente à la circonférence lorsque le point de contact converge à l'une des extrémités de l'arc; la tangente en un de ses points forme avec la droite qui le joint au centre de la circonférence, un angle égal à $\pi/4$,

3° il a, avec toute droite, trois points d'intersection au plus, et un point seulement avec le rayon de la circonférence.

---

[1]) C'est un corollaire immédiat d'un théorème de A. S. Besicovitch. *On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets*, Math. Ann. 98 (1928), p. 422-464, en particulier p. 426, et de la remarque que tout sous-ensemble d'un arc simple est régulier (voir la deuxième partie du même mémoire, Math. Ann. 115 (1938), p. 296-329, en particulier p. 304).

L'ensemble C complété par de tels arcs forme une courbe K qui est un arc simple en vertu de la propriété 3°, et a une tangente en chaque point; la tangente aux points de C est confondue avec la tangente à la circonférence. Le paratingent aux points de C contient, à part la tangente, une droite parallèle à la corde PQ de l'arc choisi plus haut. En effet, on dé-

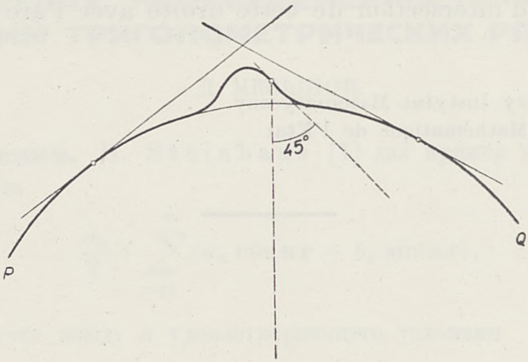

Fig. 3.

montre aisément que la condition 2° entraîne l'existence d'un point, sur chaque arc complémentaire, en lequel la tangente est parallèle à la corde PQ; mais, comme chaque point p de C est la limite topologique d'une suite d'arcs complémentaires, il est la limite d'une suite de points auxquels le paratingent contient une droite parallèle à PQ et, en vertu des propriétés mentionnées du paratingent, celui-ci au point p possède une telle droite. Tous les points de C sont donc singuliers et l'ensemble des points singuliers de l'arc K est de mesure positive. Si nous prouvons que K est rectifiable, il en résultera, en vertu du théorème 2, que l'ensemble des points de discontinuité de l'indicatrice de K est de mesure positive. L'indicatrice étant bornée, il résulte en effet, en vertu du théorème de Crofton, que K est rectifiable. Reste à démontrer que $N_K(p,\vartheta)\leqslant 6$. Si une droite ne rencontre pas l'arc de circonférence $\widehat{PQ}$, ou y est tangente, elle ne peut couper qu'un renflement de K, donc, en vertu de la propriété 3°, n'a avec K que trois points communs au plus; si une droite coupe l'arc $\widehat{PQ}$

en un point quelconque, la demi-droite, bornée par ce point et située à l'extérieure de la circonférence, ne peut couper, en vertu de la propriété 1°, qu'un arc complémentaire; elle n'a donc avec K, en vertu de la propriété 3°, que trois points communs au plus. Comme une droite arbitraire peut couper l'arc $\widehat{PQ}$ de la circonférence en deux points au plus, le nombre des points d'intersection de cette droite avec l'arc K ne peut dépasser 6.

Państwowy Instytut Matematyczny
Institut Mathématique de l'Etat

О ПРЕДЕЛАХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЧАСТНЫХ СУММ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Д. МЕНЬШОВ.

Введение. H. Steinhaus [1] дал пример тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{1}$$

расходящегося всюду и удовлетворяющего условиям

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\qquad \lim_{n\to\infty}b_n=0. \tag{2}$$

Ещё раньше Н. Лузин [2] построил пример тригонометрического ряда (1), удовлетворяющего условиям (2) и расходящегося почти всюду [1]).

Обозначим через $S_n(x)$ сумму $n+1$ первых членов ряда (1), т. е. положим

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\qquad (n=1,2,3,\ldots). \tag{3}$$

Можно доказать, что не существует тригонометрического ряда (1), удовлетворяющего условиям (2) и такого, что для любой возрастающей последовательности натуральных чисел n_k, $k=1,2,3,\ldots$, функции $S_{n_k}(x)$, $k=1,2,3,\ldots$, не стремятся к конечному пределу при $k\to\infty$ в любой точке сегмента $[-\pi,\pi]$ [2]). С другой стороны, можно доказать, существование тригонометрического ряда (1), удовлетворяющего условию (2) и такого, что для любой возрастающей последовательности натуральных чисел n_k, $k=1,2,3,\ldots$, функции $S_{n_k}(x)$

[1]) С. Стечкин [3] установил, что тригонометрический ряд, построенный Н. Лузиным, расходится всюду.

[2]) [4], стр. 197.

не стремятся к конечному пределу при $k \to \infty$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$ [3]).

Этот результат можно несколько усилить; а именно, можно доказать следующее утверждение:

Теорема 1. *Существует тригонометрический ряд* (1), *удовлетворяющий условиям* (2) *и такой, что для любой возрастающей последовательности натуральных чисел* n_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, *выполняются равенства*

$$\lim_{k\to\infty}\inf S_{n_k}(x) = -\infty, \qquad \lim_{k\to\infty}\sup S_{n_k}(x) = +\infty \tag{4}$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Теорема 1 получается, как следствие, из более общей теоремы, для формулировки которой нам понадобятся определения верхнего и нижнего пределов последовательности измеримых функций.

Предположим, что функции $g_k(x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, измеримы и конечны почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$. Мы скажем, что измеримая функция $F(x)$ [4]), определенная почти всюду на $[a, b]$, *есть верхний предел по мере на* $[a, b]$ *последовательности функций* $g_k(x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, если $F(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{mes}\{E[g_k(x) > \varphi(x)] \cdot [\varphi(x) > F(x)]\} = 0 \text{ [5])} \tag{a^0}$$

для любой измеримой функции $\varphi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$;

$$\lim_{k\to\infty}\sup \operatorname{mes}\{E[g_k(x) > \psi(x)] \cdot E[F(x) > \psi(x)]\} > 0 \tag{b^0}$$

для любой измеримой функции $\psi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$ и такой, что $\operatorname{mes} E[F(x) > \psi(x)] > 0$.

Функцию $G(x)$, измеримую и определенную почти всюду на $[a, b]$, мы будем называть *нижним пределом по мере на* $[a, b]$

---

[3]) [4], стр. 198.

[4]) $F(x)$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

[5]) Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ две какие-нибудь измеримые функции, определенные почти всюду на $[a, b]$, то мы будем обозначать, как обычно, через $E[\varphi_1(x) > \varphi_2(x)]$ множество всех точек на $[a, b]$, для которых $\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$.

последовательности функций $g_k(x)$, $k=1, 2, 3, \ldots$, если $G(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$(\alpha^0) \qquad \lim_{k\to\infty} \operatorname{mes} \{E[g_k(x) < \tau(x)] \cdot E[\tau(x) < G(x)]\} = 0$$

для любой измеримой функции $\tau(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$;

$$(\beta^0) \qquad \limsup_{k\to\infty} \operatorname{mes} \{E[g_k(x) < \chi(x)] \cdot E[G(x) < \chi(x)]\} > 0$$

для любой измеримой функции $\chi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$ и такой, что $\operatorname{mes} E[G(x) < \chi(x)] > 0$ [6]).

Как было доказано в работе [5], верхний и нижний пределы по мере определяются однозначно с точностью до множества меры нуль и обладают многими свойствами, аналогичными соответствующим свойствам обычных верхних и нижних пределов.

Кроме того, справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Если $F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на $[a, b]$ последовательности функций $g_k(x)$, $k=1, 2, 3, \ldots$, то*

$$\liminf_{k\to\infty} g_k(x) \leqslant G(x) \leqslant F(x) \leqslant \limsup_{k\to\infty} g_k(x)$$

почти всюду на сегменте $[a, b]$ [7]).

Теорема 1 получается, как частный случай, из следующей теоремы:

Теорема 3. *Пусть измеримые функции $G(x)$ и $F(x)$ определенны, и удовлетворяют неравенству*

$$(5) \qquad G(x) \leqslant F(x)$$

почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ [8]). *Тогда можно определить тригонометрический ряд* (1), *удовлетворяющий условиям* (2) *и такой, что, во-первых, $F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на $[-\pi, \pi]$ последова-*

---

[6]) [5], стр. 4.

[7]) Теорема 2 является непосредственным следствием теорем C, F и G работы [5] (стр. 14, 18 и 19).

[8]) $G(x)$ и $F(x)$ могут равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры.

тельности его частных сумм и, во вторых, для любой возрастающей последовательности натуральных чисел n_k, $k=1,2,3,\ldots$, *выполняется равенство*

$$\liminf_{k\to\infty} S_{n_k}(x) \leqslant G(x) \leqslant F(x) \leqslant \limsup_{k\to\infty} S_{n_k}(x) \tag{6}$$

почти всюду на $[-\pi,\pi]$, *где* $S_n(x)$ *определяется из равенства* (3).

Теорема 1 получается из теоремы 3, если положить в этой последней теореме $G(x)=-\infty$, $F(x)=+\infty$ всюду на сегменте $[-\pi,\pi]$.

§ 1. Для доказательства теоремы 3 нам понадобятся несколько определений и лемм.

Лемма А. *Пусть* E_m, $m=1,2,3,\ldots$, *есть последовательность измеримых множеств и* p_m, $m=1,2,3,\ldots$, — *последовательность натуральных чисел, которые удовлетворяют условиям*:

I. *Для* $m=1,2,3,\ldots$,

$$\operatorname{mes} E_m=(b-a)\lambda, \qquad E_m\subset(a,b), \tag{1.1}$$

где a, b *и* λ *не зависят от* m *и* λ *удовлетворяет неравенству*

$$0<\lambda<1. \tag{1.2}$$

II. *Каждое из множеств* E_m, $m=1,2,3,\ldots$, *состоит из конечного числа не пересекающихся интервалов, концы которых находятся среди точек*

$$a+\frac{(b-a)t}{2p_m} \qquad (t=0,1,2,\ldots,2p_m). \tag{1.3}$$

III. *Числа* $\dfrac{p^{m+1}}{p_m}$ — *целые.*

IV. *Для каждого значения* $m=1,2,3,\ldots$, *все множества*

$$\left\{E_{m+1}\cdot\left(a+\frac{(b-a)(t-1)}{2p_m},\, b+\frac{(b-a)t}{2p_m}\right)\right\} \quad (m=1,2,3,\ldots,2p_m) \tag{1.4}$$

имеют одну и ту же меру M_m, *которая, вообще говоря, зависит от* m, *но не зависит от* t.

При этих условиях

$$\operatorname{mes} \limsup_{m\to\infty} E_m = b - a \text{ [9]}.$$

Пользуясь леммой A, мы можем доказать следующую лемму:

Лемма B. *Предполагая, что s есть какое-нибудь натуральное число, разделим сегмент $[a, b]$ на 2^s равных частей и обозначим через x_{st}, $t=0, 1, 2, \ldots, 2^s$, точки деления, перенумерованные слева на право, т. е. положим,*

$$x_{st} = a + \frac{(b-a)\,t}{2^s} \qquad (t=0, 1, 2, \ldots, 2^s). \tag{1.6}$$

Тогда, вводя обозначение

$$E_{s,\varrho} = \sum_{j=0}^{2^{s-1}-1} (x_{s,2j+\varrho},\, x_{s,2j+\varrho+1}) \qquad (\varrho=0,1;\, s=1,2,3,\ldots), \tag{1.7}$$

будем иметь

$$\operatorname{mes} \limsup_{m\to\infty} E_{s_m,\varrho} = b - a,\ \limsup_{m\to\infty} E_{s_m,\varrho} \subset (a, b) \qquad (\varrho=0,1) \tag{1.8}$$

для любой возрастающей последовательности натуральных чисел s_m, $m=1,2\ 3,\ldots$

Вывод леммы B из леммы A. Из равенства (1.6), следует, что для любово натурального s:

$$x_{s,0} = a < x_{s,1} < x_{s,2} < \ldots < x_{s,2^s} = b, \tag{1.9}$$

$$x_{st} - x_{s,t-1} = \frac{b-a}{2^s} \qquad (t=1,2,3,\ldots,2^s), \tag{1.10}$$

откуда на основании (1.7),

$$\operatorname{mes} E_{s,\varrho} = \frac{b-a}{2},\ E_{s,\varrho} \subset (a, b) \qquad (\varrho=0,1;\, s=1,2,3,\ldots) \tag{1.11}$$

---

[9]) Для случая $a=0$, $b=2\pi$ лемма A доказана в [4] (§ 8, стр. 220-223). Общий случай получается из данного частного случая при помощи линейного преобразования. В [4] в условии II предполагается, что множества E_m состоят из конечного числа сегментов (а не интервалов); однако замена сегментов интервалами в условии II не влияет на справедливость леммы, так как мера множества не зависит от счетного множества точек.

и, следовательно, для любой возрастающей последовательности чисел s_m, $m=1,2,3,\dots$, каждая из последовательностей множеств $E_{s_m,0}$, $m=1,2,3,\dots$, и $E_{s_m,1}$, $m=1,2,3,\dots$, удовлетворяет условию I леммы A, если в этой лемме положить $\lambda_m=\frac{1}{2}$, $m=1,2,3,\dots$, и взять $E_{s_m,0}$ или $E_{s_m,1}$ вместо E_m. Кроме того, на основании (1.6) и (1.7) каждое из множеств $E_{s_m,0}$ и $E_{s_m,1}$, $m=1,2,3,\dots$, состоит из конечного числа открытых интервалов, концы которых находятся среди точек

$$a+\frac{(b-a)\,t}{2^{s_m}} \qquad (t=0,1,2,\dots,2^{s_m}).$$

В таком случае каждая из последовательностей множеств $E_{s_m,0}$, $m=1,2,3,\dots$, и $E_{s_m,1}$, $m=1,2,3,\dots$, удовлетворяет условию II леммы A, в которой полагаем

$$p_m=2^{s_m-1} \qquad (m=1,2,3,\dots). \tag{1.12}$$

Из равенств (1.12) следует, что

$$\frac{p_{m+1}}{p_m}=2^{s_{m+1}-s_m},$$

а так как $s_{m+1}>s_m$, $m=1,2,3,\dots$, то отношение p_{m+1}/p_m равно целому числу для любого m, т. е. числа p_m, $m=1,2,3,\dots$, удовлетворяют условию III леммы A. Докажем теперь, что числа p_m, $m=1,2,3,\dots$, и каждая из последовательностей множеств $E_{s_m,0}$, $m=1,2,3,\dots$, и $E_{s_m,1}$, $m=1,2,3,\dots$, удовлетворяют условию IV леммы A.

Полагая

$$t\cdot 2^{s_{m+1}-s_m-1}=j_{m,t} \qquad (t=0,1,2,\dots,2^{s_m},\ m=1,2,3,\dots), \tag{1.13}$$

мы видим, что $j_{m,t}$ являются целыми числами, удовлетворяющими неравенствам

$$j_{m,0}=0<j_{m,1}<j_{m,2}<\dots<j_{m,2^{s_m}}=2^{s_{m+1}-1} \qquad (m=1,2,3,\dots). \tag{1.14}$$

Кроме того, сопоставляя (1.6) и (1.13), получаем

$$x_{s_m,t}=a+\frac{(b-a)\,t}{2^{s_m}}=a+\frac{(b-a)\cdot 2j_{m,t}}{2^{s_{m+1}}}=x_{s_{m+1},2j_{m,t}} \qquad (t=0,1,2,\dots,2^{s_m};\ m=1,2,3,\dots). \tag{1.15}$$

откуда, на основании (1.9)

$$\operatorname{mes}\{E_{s_{m+1},\varrho}\cdot(x_{s_m,t-1},x_{s_m,t})\}=$$

$$(1.16)\qquad =\sum_{i=2j_{m,t-1}}^{2j_{m,t}-1}\operatorname{mes}\{E_{s_{m+1},\varrho}\cdot(x_{s_{m+1},i},x_{s_{m+1},i+1})\}=$$

$$=\sum_{\tau=0}^{1}\sum_{j=j_{m,t-1}}^{j_{m,t}-1}\operatorname{mes}\{E_{s_{m+1},\varrho}\cdot(x_{s_{m+1},2j+\tau},x_{s_{m+1},2j+\tau+1})\}$$

$$(\varrho=0,1;\ m=1,2,3,\ldots;\ t=1,2,3,\ldots,2^{s_m}).$$

Из равенства (1.7) и неравенств (1.9) следует, что

$$\{E_{s_{m+1},\varrho}\cdot(x_{s_{m+1},2j+\varrho},x_{s_{m+1},2j+\varrho+1})\}=(x_{s_{m+1}2j+\varrho},x_{s_{m+1},2j+\varrho+1})$$

$$(\varrho=0,1;\ j=0,1,2,\ldots,2^{s_{m+1}-1}-1;\ m=1,2,3,\ldots),$$

$$\{E_{s_{m+1},\varrho}\cdot(x_{s_{m+1},2j+\tau},x_{s_{m+1},2j+\tau+1})\}=0$$

$$(\varrho=0,1;\ \tau=0,1;\ j=0,1,2,\ldots,2^{s_{m+1}-1}-1;\ m=1,2,3,\ldots),$$

откуда, на основании (1.14) и (1.16),

$$\operatorname{mes}\{E_{s_{m+1},\varrho}\cdot(x_{s_m,t-1},x_{s_m,t})\}=\sum_{j=j_{m,t-1}}^{j_{m,t}-1}(x_{s_{m+1},2j+\varrho+1}-x_{s_{m+1},2j+\varrho})$$

$$(\varrho=0,1;\ m=1,2,3,\ldots;\ t=1,2,3,\ldots,2^{s_m}),$$

а в таком случае, в силу (1.6), (1.12) и (1.13),

$$\operatorname{mes}\left\{E_{s_{m+1},\varrho}\cdot\left(a+\frac{(b-a)(t-1)}{2^{s_m}},a+\frac{(b-a)t}{2^{s_m}}\right)\right\}=$$

$$=\operatorname{mes}\left\{E_{s_{m+1},\varrho}\cdot\left(a+\frac{(b-a)(t-1)}{2p_m},a+\frac{(b-a)t}{2p_m}\right)\right\}=$$

$$=\frac{b-a}{2^{s_{m+1}}}(j_{m,t}-j_{m,t-1})=\frac{b-a}{2^{s_{m+1}}}\cdot 2^{s_{m+1}-s_m-1}=\frac{b-a}{4p_m}$$

$$(\varrho=0,1;\ m=1,2,3,\ldots;\ t=1,2,3,\ldots,2p_m).$$

Из последнего равенства следует, что числа p_m, $m=1,2,3,\ldots$, и каждая из последовательностей множеств $E_{s_m,0}$, $m=1,2,3,\ldots$, и $E_{s_m,1}$, $m=1,2,3,\ldots$, удовлетворяют условию IV леммы A, в которой мы полагаем $M_m=(b-a)/4p_m$. Раньше мы уже видели, что те же числа и те же последовательности множеств удовлетворяют условиям I, II, III леммы A. В таком случае, на основании этой леммы, выполняется первое соотношение (1.8) для $\varrho=0$ и $\varrho=1$.

Из равенства (1.7) и неравенств (1.9) следует, что $E_{s,\varrho}\subset(a,b)$, $\varrho=0,1$, $s=1,2,3,\ldots$, а в таком случае будет выполняться также второе соотношение (1.8) для $\varrho=0,1$. Тем самым лемма B доказана.

Введем теперь следующее определение. Возьмем две последовательности чисел

$$U_1,\ U_2,\ldots,\ U_m,\ldots \tag{1.17}$$

и

$$V_1,\ V_2,\ldots,\ V_m,\ldots \tag{1.18}$$

причём будет предполагать, что каждое из чисел U_m и V_m или равно конечной величине, или равно $+\infty$, или равно $-\infty$.

Будем говорить, что последовательности (1.17) и (1.18) являются *равностепенно сходящимися*, если выполняются следующие условия:

(a) U_m-V_m стремится к нулю, когда m возрастает, принимая значения, для которых оба числа U_m и V_m конечны;

(b) U_m и V_m стремятся к $+\infty$, когда m возрастает, принимая значения, для которых хотя бы одно из чисел U_m или V_m равно $+\infty$;

(c) U_m и V_m стремятся к $-\infty$, когда m возрастает, принимая значения, для которых хотя бы одно из чисел U_m или V_m равно $-\infty$ [10]).

Предположим теперь, что две последовательности функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_m(x),\ldots \tag{a}$$

и

$$h_1(x),\ h_2(x),\ldots,\ h_m(x),\ldots \tag{b}$$

определены почти всюду на некотором сегменте $[a,b]$ [11]). Мы будем говорить, что последовательности (a) и (b) являются *равностепенно сходящимися почти всюду на* $[a,b]$, если они явля-

[10]) Когда мы говорим, что U_m стремится к $+\infty$ или к $-\infty$, то мы не исключаем возможности того, что для некоторых значений m $U_m=$ $=+\infty$ или $U_m=-\infty$.

[11]) Функции (1.19) и (1.20) могут равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры.

ются равностепенно сходящимися в каждой точке сегмента $[a, b]$ за исключением, быть может, множества точек меры нуль [12]).

Легко доказать следующие утверждения:

Лемма C. *Если последовательности* (1.17) *и* (1.18) *являются равностепенно сходящимися, то для любой возрастающей последовательности натуральных чисел* m_k, $k=1, 2, 3, \ldots$, *последовательности* U_{m_k}, $k=1, 2, 3, \ldots$, *и* V_{m_k}, $k=1, 2, 3, \ldots$, *также являются равностепенно сходящимися.*

Лемма D. *Возьмем последовательность чисел*

$$W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots \tag{1.19}$$

и предположим, что, с одной стороны, две последовательности (1.17), (1.19) *и, с другой стороны, две последовательности* (1.18), (1.19) *являются равностепенно сходящимися. В таком случае две последовательности* (1.17) *и* (1.18) *обладают тем же свойством.*

Лемма E. *Если последовательности* (1.17) *и* (1.18) *являются равностепенно сходящимися, то множества их предельных точек совпадают.*

Непосредственным следствием леммы E является

Лемма F. *Если последовательности* (1.17) *и* (1.18) *являются равностепенно сходящимися, то*

$$\liminf_{m\to\infty} U_m = \liminf_{m\to\infty} V_m,$$

$$\limsup_{m\to\infty} U_m = \limsup_{m\to\infty} V_m.$$

Формулируем теперь лемму, доказанную в работе [5] и являющуюся основной при доказальстве теоремы 3.

Лемма G. *Пусть даны измеримые функции* $G(x)$, $F(x)$ *и* $f_m(x)$, $m=1, 2, 3, \ldots$, *определённые почти всюду на сегменте* $[-\pi, \pi]$ [13]), *причём*

$$G(x) \leqslant f_m(x) \leqslant F(x) \qquad (m=1, 2, 3, \ldots) \tag{1.20}$$

почти всюду на этом сегменте.

[12]) Определение последовательностей функций, равностепенно сходящихся почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$, было дано в [5] (стр. 27).

[13]) Эти функции могут принимать бесконечные значения на множествах положительной меры.

Тогда существует тригонометрический ряд (1), *функции* $h_m(x)$, $m=1, 2, 3, \ldots$, *непрерывные на* $[-\pi, \pi]$, *и натуральные числа* ν_m, $m=1,2,3,\ldots$, *которые обладают следующими свойствами:*

1. *Последовательности функций* $f_m(x)$, $m=1, 2, 3, \ldots$, *и* $h_m(x)$, $m=1, 2, 3, \ldots$, *являются равностепенно сходящимися почти всюду на сегменте* $[-\pi, \pi]$.

2. $$\nu_m < \nu_{m+1} \qquad (m=1, 2, 3, \ldots)$$
и
$$\lim_{m\to\infty} [h_m(x) - S_{\nu_m}(x)] = 0$$
почти всюду на $[-\pi, \pi]$, *где* $S_n(x)$ *определяется из равенства* (3).

3. *Верхний и нижний пределы по мере на* $[-\pi, \pi]$ *последовательности*
$$S_1(x), S_2(x), \ldots, S_n(x), \ldots \tag{1.21}$$
равны соответственно $F(x)$ *и* $G(x)$.

4. *Для любой возрастающей последовательности натуральных чисел* n_k, $k=1, 2, 3, \ldots$, *или верхний и нижний пределы по мере на* $[-\pi, \pi]$ *последовательности функций* $S_{n_k}(x)$, $k=1,2,3,\ldots$, *равны соответственно* $F(x)$ *и* $G(x)$, *или можно определить неубывающую последовательность натуральных чисел* p_k, $k=1,2,3,\ldots$, *таких что*
$$\lim_{n\to\infty} p_k = \infty \tag{1.22}$$
и последовательность функций
$$h_{p_k}(x) - S_{n_k}(x) \qquad (k=1, 2, 3, \ldots)$$
сходится по мере к нулю на $[-\pi, \pi]$.

5. $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} b_k = 0$$ [14]).

§ 2. Доказательство теоремы 3. Возьмём произвольное натуральное число m и разделим сегмент $[-\pi, \pi]$ на 2^m равных частей. Обозначим через x_{mt}, $t=0, 1, 2, \ldots, 2^m$, точки деления, перенумерованные слева на право. Тогда
$$x_{mt} = -\pi + \frac{\pi t}{2^{m-1}} \qquad (t=0, 1, 2, \ldots, 2^m). \tag{2.1}$$

---

[14]) [5], лемма 5,2 (стр. 55). В лемме 5,2 нужно взять $h_{p_k}(x) - S_{n_k}(x)$ вместо $h_{p_k}(x) - S_{p_k}(x)$, как это видно из её доказательства (стр. 88).

Положим

$$(2.2)\qquad H_{m,\varrho} = \sum_{j=0}^{2^{m-1}-1} (x_{m,2j+\varrho}, x_{m,2j+\varrho+1}) \quad (\varrho=0,1;\ m=1,2,3,\ldots),$$

$$(2.3)\qquad f_m(x) = \begin{cases} G(x), & \text{если } x \in H_{m,0} \\ F(x), & \text{если } x \in H_{m,1} \end{cases} \quad (m=1,2,3,\ldots),$$

где $G(x)$ и $F(x)$ являются функциями, входящими в формулировку теоремы 3. Тогда, на основании (2.1), функции $f_m(x)$, $m=1,2,3,\ldots$, будут измеримы и определены почти всюду на сегменте $[-\pi,\pi]$, причём из неравенства (5) (см. формулировку теоремы 3) и равенств (2.3) следует, что

$$(2.4)\qquad G(x) \leqslant f_m(x) \leqslant F(x) \qquad (m=1,2,3,\ldots)$$

почти всюду на этом сегменте.

Из неравенства (2.4) следует, что функции $F(x)$, $G(x)$ и $f_m(x)$, $m=1,2,3,\ldots$, удовлетворяют всем условиям леммы G, а в таком случае, на основании этой леммы, мы можем определить тригонометрический ряд (1) и функции $h_m(x)$, $m=1,2,3,\ldots$, непрерывные на $[-\pi,\pi]$, которые обладают свойствами 1, 3, 4 и 5 [15]).

Принимая во внимание свойство 5 тригонометрического ряда (1), мы видим, что его коэффициенты удовлетворяют условию (2). Кроме того, в силу свойства 3 ряда (1), $F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами по мере $[-\pi,\pi]$ последовательности его частных сумм. В таком случае, чтобы закончить доказательство теоремы 3, нам остаётся доказать, что для любой возрастающей последовательности натуральных чисел n_k, $k=1,2,3,\ldots$, выполняется неравенство (6) почти всюду на сегменте $[-\pi,\pi]$.

Возьмём произвольную возрастающую последовательность натуральных чисел n_k, $k=1,2,3,\ldots$ Предположим сперва, что $F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на $[-\pi,\pi]$ последовательности функций $S_{n_k}(x)$, $k=1,2,3,\ldots$ В таком случае, на основании теоремы 2, неравенство (6) выполняется почти всюду на $[-\pi,\pi]$.

---

[15]) Числа r_m, которые мы могли бы определить в силу леммы G, и свойство 2, входящее в формулировку этой леммы, нам не понадобятся.

Предположим теперь, что $F(x)$ и $G(x)$ не являются одновременно верхним и нижним пределами по мере на $[-\pi, \pi]$ последовательности функций $S_{n_k}(x)$, $k=1, 2, 3,\ldots$ В таком случае, в силу свойства 4 ряда (1) и функций $h_m(x)$, можно определить неубывающую последовательность натуральных чисел p_k, $k=1, 2, 3,\ldots$, удовлетворяющих условию (1.22) и таких, что последовательность функций $h_{p_k}(x)-S_{n_k}(x)$, $k=1, 2, 3,\ldots$, сходится по мере к нулю на $[-\pi, \pi]$.

Принимая во внимание известное свойство последовательностей, сходящихся по мере, мы можем определить возрастающую последовательность натуральных чисел k_ν, $\nu=1, 2, 3,\ldots$, для которых выполняется равенство

$$\lim_{\nu\to\infty}[h_{p'_\nu}(x)-S_{n'_\nu}(x)]=0 \tag{2.5}$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$, где

$$p'_\nu=p_{k_\nu},\quad n'_\nu=n_{k_\nu}\qquad (\nu=1, 2, 3,\ldots). \tag{2.6}$$

При этом, в силу равенств (1.22) и (2.6), мы можем предположить, что

$$p'_\nu<p'_{\nu+1}\qquad (\nu=1, 2, 3,\ldots). \tag{2.7}$$

Так как $h_m(x)$, $m=1, 2, 3,\ldots$, и $S_n(x)$, $n=1, 2, 3,\ldots$, непрерывны и, следовательно, конечны всюду на $[-\pi, \pi]$, то из равенства (2.5) следует, что последовательности функций $h_{p'_\nu}(x)$, $\nu=1, 2, 3,\ldots$, и $S_{n'_\nu}(x)$, $\nu=1, 2, 3,\ldots$, являются равностепенно сходящимися почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$. С другой стороны, в силу свойства 1 функций $h_m(x)$, последовательности функций $f_m(x)$, $m=1, 2, 3,\ldots$, и $h_m(x)$, $m=1, 2, 3,\ldots$, являются равностепенно сходящимися почти всюду на $[-\pi, \pi]$ Так как, на основании (2.7), натуральные числа p'_ν, $\nu=1, 2, 3,\ldots$, образуют возрастающую последовательность, то, в силу леммы C, последовательности функций $f_{p'_\nu}(x)$, $\nu=1, 2, 3,\ldots$, и $h_{p'_\nu}(x)$, $\nu=1, 2, 3,\ldots$, являются равностепенно сходящимися почти всюду на $[-\pi, \pi]$, а в таком случае, на основании леммы D, последовательности функций $f_{p'_\nu}(x)$, $\nu=1,2,3,\ldots$, и $S_{n'_\nu}(x)$, $\nu=1,2,3,\ldots$, также являются равностепенно сходящимися почти всюду на $[-\pi, \pi]$. Отсюда следует, в силу леммы F, что

$$\begin{aligned}\liminf_{\nu\to\infty} f_{p'_\nu}(x)&=\liminf_{\nu\to\infty} S_{n'_\nu}(x)\\ \limsup_{\nu\to\infty} f_{p'_\nu}(x)&=\limsup_{\nu\to\infty} S_{n'_\nu}(x)\end{aligned} \tag{2.8}$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Так как числа k_ν, $\nu=1, 2, 3, \ldots$, образуют возрастающую последовательность, то, на основании второго равенства (2.6), будем иметь

$$\liminf_{k\to\infty} S_{n_k}(x) \leqslant \liminf_{\nu\to\infty} S_{n'_\nu}(x),$$
$$\limsup_{\nu\to\infty} S_{n'_\nu}(x) \leqslant \limsup_{k\to\infty} S_{n_k}(x)$$

всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ и, следовательно, из равенств (2.8) мы видим, что

$$\liminf_{k\to\infty} S_{n_k}(x) \leqslant \liminf_{\nu\to\infty} f_{p'_\nu}(x), \quad \limsup_{\nu\to\infty} f_{p'_\nu}(x) \leqslant \limsup_{k\to\infty} S_{n_k}(x) \tag{2.9}$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$

Докажем теперь, что

$$\liminf_{\nu\to\infty} f_{p'_\nu}(x) = G(x), \qquad \limsup_{\nu\to\infty} f_{p'_\nu}(x) = F(x) \tag{2.10}$$

почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Из неравенств (2.3) следует, что

$$G(x) \leqslant \liminf_{\nu\to\infty} f_{p'_\nu}(x) \leqslant \limsup_{\nu\to\infty} f_{p'_\nu}(x) \leqslant F(x) \tag{2.11}$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Положим

$$\Omega_\varrho = \limsup_{\nu\to\infty} H_{p'_\nu, \varrho} \qquad (\varrho=0, 1). \tag{2.12}$$

Из равенств (2.1) и (2.2) следует, что множества $H_{s,\varrho}$, $\varrho=0, 1$, $s=1, 2, 3, \ldots$, совпадают с множествами $E_{s,\varrho}$ леммы B, если положить в этой лемме $a=-\pi$ и $b=\pi$. В таком случае, так как натуральные числа p'_ν, $\nu=1, 2, 3, \ldots$, образуют возрастающую последовательность, то, на основании леммы B,

$$\operatorname{mes} \Omega_\varrho = 2\pi, \qquad \Omega_\varrho \subset (-\pi, \pi) \qquad (\varrho=0, 1). \tag{2,13}$$

Предположим, что x есть произвольная точка множества Ω_0. Тогда, в силу равенства (2.12), можно определить возрастающую последовательность натуральных чисел ν_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, для которых

$$x \in H_{r_i, 0} \qquad (i=1, 2, 3, \ldots), \tag{2.14}$$

где

$$r_i = p'_{\nu_i} \qquad (i=1, 2, 3, \ldots). \tag{2.15}$$

Сопоставляя равенства (2.3) и (2.3), мы видим, что в рассматриваемой точке x выполняется равенство

$$f_{r_i}(x) = G(x) \qquad (i=1,2,3,\ldots), \tag{2.16}$$

а так как числа ν_i, $i=1,2,3,\ldots$, образуют возрастающую последовательность, то, на основании (2.15),

$$\liminf_{\nu\to\infty} f_{p'_\nu}(x) \leqslant G(x). \tag{2.17}$$

Мы получили неравенство (2.17), предполагая, что x есть произвольная точка множества Ω_0. Следовательно, в силу (2.13), неравенство (2.17) выполняется почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Предположим теперь, что x есть произвольная точка множества Ω_1. Тогда, принимая во внимание (2.12), мы можем определить возрастающую последовательность натуральных чисел μ_i, $i=1,2,3,\ldots$, для которых

$$x \in H_{q_i,1} \qquad (i=1,2,3,\ldots), \tag{2.18}$$

где

$$q_i = p'_{\mu_i} \qquad (i=1,2,3,\ldots) \tag{2.19}$$

и, следовательно, в силу (2.3), будем иметь в рассматриваемой точке x:

$$f_{q_i}(x) = F(x) \qquad (i=1,2,3,\ldots). \tag{2.20}$$

Так как натуральные числа μ_i, $i=1,2,3,\ldots$, образуют возрастающую последовательность, то из равенств (2.19) и (2.20) получаем

$$F(x) \leqslant \limsup_{\nu\to\infty} f_{p'_\nu}(x), \tag{2.21}$$

а так как x ест произвольная точка множества Ω_1, то, на основании (2.13), неравенство (2.21) выполняется почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Итак, мы установили, что каждое из неравенств (2.11), (2.17) и (2.21) выполняется почти всюду на $[-\pi, \pi]$, а в таком случае равенства (2.10) также справедливы почти всюду на этом сегменте. Отсюда следует, в силу (2.9), что неравенство (6) выполняется почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Мы пришли к этому результату, предполагая, что $F(x)$ и $G(x)$ не являются одновременно верхним и нижним пределами по мере на $[-\pi, \pi]$ последовательности функций $S_{n_k}(x)$, $k=1,2,3,\ldots$ Раньше мы получили то же утверждение, предполагая, что $F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на $[-\pi, \pi]$ последовательности функций $S_{n_k}(x)$, $k=1,2,3,\ldots$ Следовательно, для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\varkappa_k$, $k=1,2,3,\ldots$, неравенство (6) выполняется почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ Тем самым доказательство теоремы 3 закончено.

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Steinhaus, *Une série trigonométrique partout divergente*, Comptes Rendus de la Société Scientifique de Varsovie? (1912), p. 219-229.

[2] Н. Лузин, *Ueber eine Potenzreihe*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 32 (1911), стр. 386-390.

[3] С. Стечкин, *О сходящихся и расходящихся тригонометрических рядах*, Успехи Математических Наук 6, вып. 2 (42) (1951), стр. 148, 149.

[4] Д. Меньшов, *О частных суммах тригонометрических рядов*, Математический Сборник 20 (62), вып. 2 (1947) стр. 197-238.

[5] — *О сходимости по мере тригонометрических рядов*, Труды Математического Института им. В. А. Стеклова 32 (1950), стр. 3-97.

Les publications de la Société Polonaise de Mathématique ont paru pour la première fois en 1921 sous le titre de »*Rozprawy Polskiego Towarzystwa Matematycznego*« en un volume comprenant aussi bien des mémoires en langue polonaise que des mémoires rédigés en d'autres langues. Depuis 1922, l'organe de la Société porte le titre d'**Annales de la Société Polonaise de Mathématique**; les travaux de langue polonaise paraissent dans un Supplément *(Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego)*, le corps du volume étant réservé aux travaux rédigés en d'autres langues.

Les tomes I-XXV contiennent 332 mémoires et notes des 142 auteurs suivants:

Abramowicz K., Agnew R., Alexiewicz A., Alexits G., Auerbach H., Bielecki A., Biernacki M., Bilimovitch A., Borel E., Borsuk K., Bouligand G., Butlewski Z., Cartan E., Chwistek L., Cotton F., Delsarte J., Denjoy A., Dieudonné J., Doob J. L., Durañona y Vedia A., Eilenberg S., Erdös P., Fast H., Feller W., Flamant P., Fréchet M., Gambier B., Ganea T., Garcia G., Ghizzetti A., Giraud G., Glass S., Godeaux L., Gołąb S., Götz A., Górski J., Grzegorczyk A., Hadamard J., Halmos P, Hartman S., Herzberg J., Hildebrandt T., Hille E., Hlavatý V., Hoborski A., Hölder E., Janet M., Jarník V., Jaśkowski S., Kac M., Katětov M., Kawaguchi A., Kempisty S., Knaster B., Kobrzyński Z., Kołodziejczyk S., Kopeć J., Korevaar J., Kozakiewicz W., Krzyżański M., Kumorovitz M., Kuratowski K., Labrousse A., Lainé E., Lebesgue H., Leitner R., Leja F., Lévy P., Lichtenstein L., Litwiniszyn J., Loo-Keng Hua, Loster C., Łojasiewicz S., Łoś J., Mandelbrojt S., Marcinkiewicz J., Marchaud A., Marczewski E., Mazurkiewicz S., Menger K., Mieńszow D., Mikołajska Z., Mikusiński J., Montel P., Morse M., Mostowski A., Nagy G., Nikliborc W., Nikodym O., Novák J., Orlicz W., Perausówna I., Piccard S., Picone M., Pogorzelski W., Popovici C., Renyi A., Riesz M., Rosenblatt A., Le Roux J., Rudnicki J., Ruziewicz S., Ryll-Nardzewski C., Sakellariou N., Saks S., Severi F., Sieczka F., Sierpiński W., Sikorski R., Ślebodziński W., Stamm E., Stoilow S.. Stone M., Stożek W., Straszewicz S., Szarski J., Szasz O., Szmydtówna Z., Taussky O., Terasaka H., Todd J., Tonolo A., Trjitzinski W. J., Tsortsis A., Turan P., Turowicz A., Turski S., Urbański W., Vasseur M., Vera F., Vitali G., Wajnsztejn D., Ważewski T., Weyssenhoff J., Whitehead J. H. C., Whyburn G. T., Wilkosz W., Wróbel T., Zahorski Z., Zaremba S., Zaremba S. K., Zygmund A.